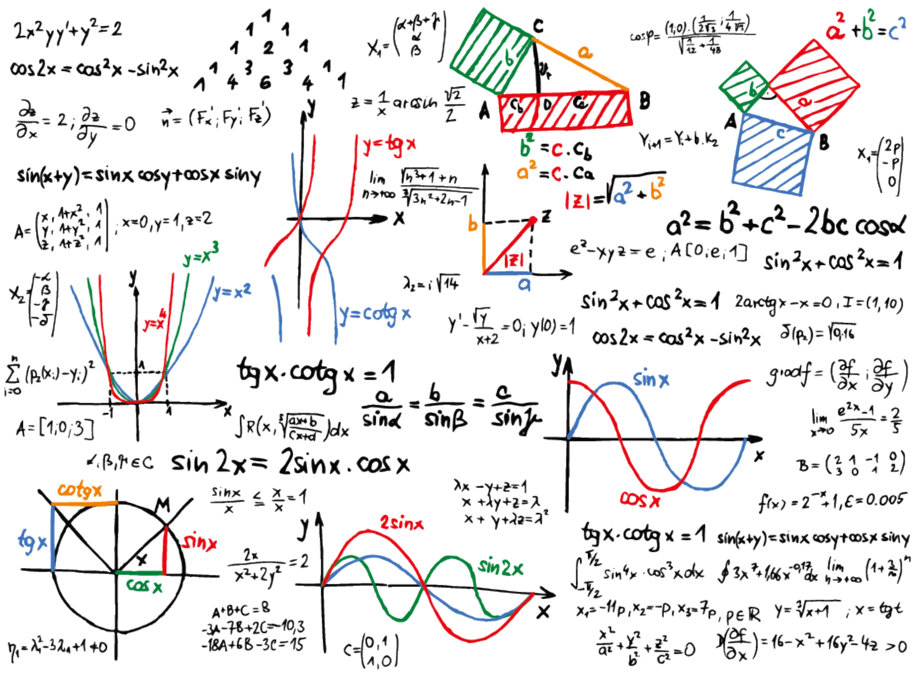
Dispensa

di

Analisi Matematica I



Luca Canessa

Indice

1 Insiemi

Il concetto di insieme è un concetto primitivo, quindi, l'unica definizione possibile è la seguente:

Definizione 1 (Insieme). *Un insieme* A *è una collezione di oggetti che prendono il nome di* elementi di A

Un metodo per rappresentare l'insieme *A* è elencare gli elementi che lo compongono se questo è fattibile, altrimenti si descrive la sua caratteristica principale *P(x)*. Ad esempio:

$$A = \{1, 4\}$$

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

Mentre per descrivere l'appartenenza di un elemento nell'insieme *A* si usano queste simbologie:

$$a \in A$$

mentre la **NON** appartenenza si indica come

$$a \notin A$$ [1]

Se, invece, l'insieme *A* non contiene nessun elemento, si dice che l'insieme è vuoto e si indica

$$C = \emptyset$$

e questo indica, anche, che nessun elemento dell'insieme soddisfa la proprietà *P(x)*.

L'insieme che contiene tutti i numeri maggiori o uguali a 0 si chiama *insieme dei numeri naturali* e si indica con $\mathbb{N}$. L'insieme $\mathbb{N}$ e i loro negativi si chiama *insieme dei numeri interi relativi* e si indica con $\mathbb{Z}$. L' *insieme dei numeri razionali* è quell'insieme composto da tutti i numeri che si scrivono come numeri fratti del tipo

$$\frac{a}{b}$$

dove *a* appartiene a $\mathbb{Z}$ e *b* a $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (escluso 0). L'insieme di tutti i numeri appartenenti agli insiemi precedenti e i numeri che non possono essere rappresentati come fratti viene chiamato *insieme dei numeri reali* e si indica con $\mathbb{R}$.

1.1 Sottoinsiemi

Definizione 2 (Sottoinsieme e Sottoinsieme stretto). *Dati due insiemi* A *e* B*, diremo che* A è contenuto in B *(o che è sottoinsieme) se ogni elemento di* A *appartiene anche a* B*, e si scrive*

$$A \subseteq B$$

Dati due insiemi A *e* B*, diremo che* A è parzialmente contenuto in B *se esiste almeno un elemento di* B *che non appartiene aa* A*, e si scrive*

$$A \subset B$$

[1] **Attenzione**: $a \neq \{a\}$, il primo è un elemento di un insieme il secondo è un insieme con un solo elemento che è *a*. Questo tipo di insiemi vengono detti *singoletti*

Mentre un insieme A *si dice* non contenuto in B *(o non è sottoinsieme) se nessun elemento di* A *appartiene anche a* B*, e si scrive*

$$A \not\subseteq B$$

L'insieme vuoto $\emptyset$ è contenuto in **qualsiasi** insieme (e anche sottoinsieme).

Definizione 3 (Parti). *Se A è un insieme, chiameremo $\wp(A)$ l'insieme delle parti di A, ovvero l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A.*

Teorema 1 (Cardinalità delle parti). *Un insieme A con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.*

Definizione 4 (Cardinalità). *Se B è un insieme finito, chiameremo* cardinalità di B*, $\#B$, il numero degli elementi di B*

1.2 Operazioni Insiemistiche

Definizione 5 (Unione). *Si chiama* **unione** *di due insiemi* A *e* B*, l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli appartenenti ad almeno uno dei due insiemi.*

$$A \cup B$$

Alcune proprietà dell'unione:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

Definizione 6 (Intersezione). *Si chiama* **intersezione** *di due insiemi* A *e* B *l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad* A *che a* B.

$$A \cap B$$

Alcune proprietà dell'intersezione:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Due insiemi che **non** hanno elementi in comune vengono detti ***disgiunti*** e la loro intersezione è *vuota*

Definizione 7 (Differenza). *La differenza di due insiemi* A *e* B *è l'insieme costituito da tutti gli elementi di* A *che non appartengono a* B

$$A \backslash B \quad A - B$$

Alcune proprietà della differenza:

- $A \cap B \Rightarrow A - B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

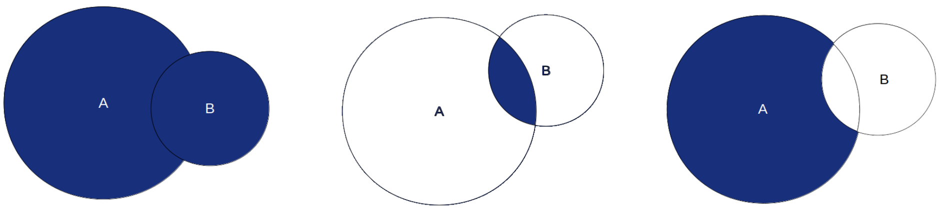


Figura 1.1: $A \cup B$ $A \cap B$ $A - B$

2 Numeri Interi e Razionali

2.1 Interi Relativi

I numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ sono l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e i loro opposti, cioè i negativi. Tali numeri possono essere scritti anche come frazioni, il cui denominatore può assumere valore 1 oppure un multiplo del numeratore.

$$I \subseteq \mathbb{Z} = \{-1, \frac{3}{1}, \frac{8}{2}\}$$

2.2 Razionali

Se scrivendo un numero fratto ci si accorge che non è possibile ridurre tale frazione ad un intero, allora siamo incappati in un nuovo insieme di numeri detto *insieme dei numeri razionali*. Per convenzione, tale numero fratto, si descrive come una **frazione ridotta ai minimi termini**, cioè dove numeratore e denominatore sono **coprimi**, il che significa primi tra loro. Esempio:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

dove $\frac{3}{2}$ è la frazione ridotta ai minimi termini. In oltre è bene notare che *due frazioni* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *sono congruenti se e solo se* $a \cdot d = b \cdot c$

3 Numeri Reali

L'insieme dei numeri reali è definibile attraverso una *definizione assiomatica*:

Definizione 8 (Definizione Assiomatica di $\mathbb{R}$). *In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di* somma *e* prodotto *con le seguenti proprietà.*

1. ***COMMUTATIVA*** $(a+b=b+a) \wedge (a \cdot b = b \cdot a)$ [1]

2. ***ASSOCIATIVA*** $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

3. ***ELEMENTO NEUTRO*** $(a+0=a) \wedge (a \cdot 1 = a)$

4. ***OPPOSTI*** $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ (-a) \mid a+(-a)=0$
   $\forall (a \neq 0) \in \mathbb{R}\ \exists\ a^{-1} \mid a \cdot a^{-1} = 1$

5. ***RIFLESSIVA*** $a \leq a$

6. ***ANTISIMMETRICA*** $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$

7. ***TRANSITIVA*** $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

8. ***DISTRIBUTIVA*** $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

[1] Il prodotto di due numeri positivi è sempre positivo

3.1 Intervalli

Definizione 9 (Intervallo Aperto). *Se* a *e* b *sono due numeri reali con* a < b, *chiameremo* **intervallo aperto di estremi a b**, *l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di* a *e minori di* b

$$]\,a,\ b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

In questo particolare intervallo a e/o b possono essere rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$, allora l'intervallo sarà del tipo

$$]-\infty,\ +\infty\,[$$

e corrisponde alla retta dei reali

Definizione 10 (Intervallo Chiuso). *Se* a *e* b *sono numeri reali con* a < b, *chiameremo* **intervallo chiuso di estremi a b**, *l'insieme di tutti i numeri reali maggiori o uguali ad* a *e minori o uguali a* b

$$[\,a,\ b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Definizione 11 (Intervallo semiaperto destra e sinistra). *Se* a *e* b *sono numeri reali con* a < b, *chiameremo* **intervallo semiaperto a destra di estremi a b**, *l'insieme di tutti i numeri reali maggiori o uguali di* a *e minori di* b

$$[\,a,\ b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Se a *e* b *sono numeri reali con* a < b, *chiameremo* **inter-**

vallo semiaperto a sinistra di estremi a b, *l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di* a *e minori o uguali di* b

$$]\, a,\ b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Assioma 1 (Assioma di continuità). *Presa comunque una partizione di tutti i punti di una retta in due sottoinsiemi, tale che nessun punto di un sottoinsieme giace tra due punti dell'altro, esiste un punto di un sottoinsieme che giace tra tutti gli altri punti di quel sottoinsieme e tutti i punti dell'altro.*

$$\forall\, k \in \mathbb{R}\ \exists!\ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\ a_k, b_k \in \mathbb{R}\ .\ a_k \leq \lambda \leq b_k$$

Definizione 12 (Sottoinsieme Induttivo). *Un insieme* A $\subset \mathbb{R}$ *si dice* ***induttivo*** *se:*

1. $1 \in$ A
2. x $\in$ A $\Rightarrow$ x+1 $\in$ A

Da questa definizione di *insieme induttivo* si può dedurre che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è induttivo perché intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$

Dimostrazione. 1. per definizione $1 \in \mathbb{N}$

2. supponendo che $x \in \mathbb{N}$ e che quindi $x \in$ ad ogni sottoinsieme induttivo di $A \Rightarrow$ per definizione, $x+1 \in$ ai sottoinsiemi induttivi di A, quindi anche alla loro intersezione che è $\mathbb{N}$

□

3.2 Estremi Superiore ed Inferiore

Per un $E \subset \mathbb{R}$, si dice ***massimo M*** di E se

1. M è un maggiorante di E, se $\forall\, e \in E \,.\, e \leq M$

2. $M \in E$

Definizione 13 (Estremo Superiore). *Sia* $E \neq 0 \subseteq \mathbb{R}$ *si chiama* ***estremo superiore*** *di E il minimo dei maggioranti di E e si indica con* $\sup(E)$

Le proprietà dell'estremo superiori sono che:

- *sup(E)* è un maggiorante di E
- $\nexists n \in E \,.\, n < sup(E) \mid$ n è maggiorante di E

Definizione 14 (Maggiornate). *Sia* X *un insieme ordinato e* $E \neq \emptyset \subseteq X$. $y \in X$ *è un maggiorante di* E *se per ogni* $x \in E$ *si ha* $x \leq y$

Assioma 2 (Estremo Superiore). *Un insieme* E *non vuoto e limitato superiormente, ha sempre estremo superiore*

Dimostrazione. Essendo E limitato superiormente, esiste un suo maggiorante, b_1, e non essendo vuoto esiste un numero, a_1 che non è maggiorante.
Costruendo una successione di intervalli dimezzati del tipo

$$c = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e per ogni intervallo prendiamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c$ se esiste il maggiorante, altrimenti $a_2 = c$ e $b_2 = b_1$. In questo modo

otteniamo una serie di intervalli del tipo $[a_k,\ b_k]$ tali che b_k è sempre maggiorante di *E*.
Per l'assioma di continuità, l'intersezione di tutti questi intervalli è costituita dal solo numero λ in quanto:

1. λ è un maggiorante

2. nessun numero minore di λ è maggiorante. Per assurdo assumiamo che esista $\mu < \lambda$ che sia maggiorante. Dato che tutti i b_k sono maggiori o uguali a λ allora $\mu < b_k$. Quindi μ sarebbe un maggiorante e a_k no, ma allora $a_k \leq \mu$ e quindi μ sarebbe contenuto in tutti gli intervalli $[a_k,\ b_k]$ avendo un assurdo

quindi λ è l'estremo superiore di *E* $\square$

Definizione 15 (Estremo Inferiore). *Si definisce estremo inferiore di un insieme E, non vuoto e limitato inferiormente, il maggiore dei minoranti m di E, cioè* $\forall e \in E\ .\ e \geq m$*, e si indica con* $\inf(E)$

Le proprietà dell'estremo inferiore sono:

- $\inf(E)$ è minorante di *E*
- nessun numero maggiore di $\inf(E)$ è minorante di *E*

Definizione 16 (Minorante). *Sia* X *un insieme ordinato e* $E \neq \emptyset \subseteq X$. $y \in X$ *è un minorante di* E *se per ogni* $x \in E$ *si ha* $x \geq y$

Da queste definizioni si può notare che

$$\forall x \in E\ .\ \inf(E) \leq x \leq \sup(E) \Rightarrow \inf(E) \leq \sup(E)$$

facendo particolare attenzione al $\leq$, perchè nel caso in cui l'insieme E ha un solo elemento allora $\inf(E) = \sup(E)$. Inoltre, se E non fosse limitato inferiormente e/o superiormente allora i suoi estremi sarebbero rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$

3.3 Valore Assoluto

Definizione 17 (Valore Assoluto). *Si chiama* ***valore assoluto*** *di un numero reale*

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

3.3.1 Disugalianza triangolare

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ .\ |a + b| \leq |a| + |b|$$

Dimostrazione.

$$(\ a \leq |a| \wedge b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|\ )$$

$$\wedge$$

$$(\ -a \leq |a| \wedge -b \leq |b| \Rightarrow -a - b \leq |a| + |b|\ )$$

$$\Rightarrow$$

$$|a + b| = \max\{(a + b),\ (-a - b)\} \leq |a| + |b|$$

□

4 Numeri Complessi

Per poter risolvere certe equazioni come ad esempio $x^2+1=0$ è necessario un insieme di numeri in più, perché tale tipo di equazioni non ha soluzione nel campo dei reali.

L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$, mentre i numeri sono indicati con la lettera i detta *unità immaginaria*, avente la proprietà che $i^2=-1$. Così facendo anche le equazioni di 2^o grado del tipo $x^2+2px+q=0$ avranno soluzione e se $p^2<q$ allora la soluzione sarà

$$x=-p\pm i\sqrt{q-p^2}$$

Quindi, i numeri complessi, si posso scrivere nella forma $a+ib$ dove *a* e *b* sono numeri reali ma vengono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria*.

4.1 Operazioni con i numeri complessi

4.1.1 Somma e Prodotto

Definendo le operazioni di somma e prodotto tra numeri complessi, c'è da tenere a mente sempre che $i^2=-1$, in questo modo possiamo vedere che

- $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(c+d)$

- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

4.1.2 Modulo

$$\alpha = a + ib \in \mathbb{C} \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Anche i numeri complessi possono essere messi in relazioni con la retta in corrispondenza biunivoca, avendo l'asse x come *retta reale* e l'asse y come *asse immaginaria*. Creando un grafico, utilizzando questo metodo, è facile notare che il modulo di un numero complesso corrisponde al calcolare la distanza del punto definito da *a* e *b* rispetto all'origine.

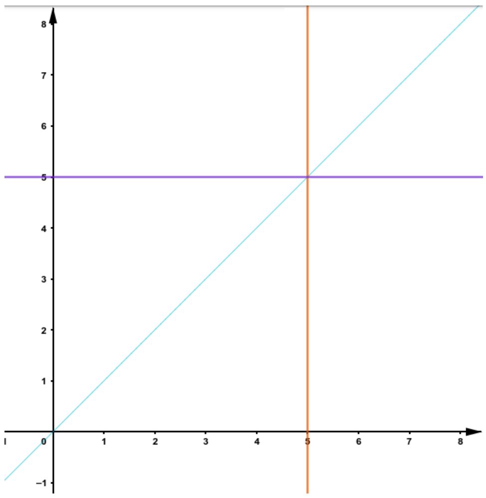


Figura 4.1: Distanza del punto α dall'origine

4.1.3 Rappresentazione Trigonometrica

Tale corrispondenza tra numeri complessi e punti del piano e la visione grafica, aiuta a capire che il numero α è possibile descriverlo anche attraverso la sua distanza dall'origine e l'angolo che lo divide dall'asse dei reali, arrivando ad avere un'equazione del tipo

$$\alpha = a + ib = d(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = de^{i\theta}$$

dove d è la distanza tra il punto e l'origine degli assi, θ l'angolo che si forma tra l'asse x e il punto.
Nella formula $de^{i\theta}$ chiaramente la parte esponenziale sará congruente a $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, e le due formule sono totalmente interscambiabili.

4.1.4 Radici

Una radice n-esima di ω è un numero complesso z tale che $z^n = \omega$.
Inoltre
$z = de^{i\theta} \ \wedge \ \omega = De^{i\delta}$
$\Rightarrow z^n = d^n e^{in\theta} = De^{i\delta}$
$\Rightarrow d^n = D \ \wedge \ n\theta = \delta + 2k\pi$
$\Rightarrow r = \sqrt[n]{D}$

5 Retta Reale

Definizione 18 (Distanza). *Si chiama distanza tra due punti x e y il valore della differenza tra x e y*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Definizione 19 (Intorno). *Sia x_0 un punto di $\mathbb{R}^n$, e sia r un numero positivo. Si chiama* intorno di centro x_0 e raggio r *l'insieme $I(x_0, r)$ dei punti che distano da x_0 meno di r* [1]

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$$

5.1 Punti di $\mathbb{R}$

Dalle definizioni sopra si può studiare la topologia di $\mathbb{R}^n$ e dei suoi sottoinsiemi.

Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- se x_0 è tutto circondato da punti di E allora esiste un intorno di x_0 contenuto in E e si dice che x_0 è **interno** ad E
- se vicino a x_0 non ci sono punti di E allora esiste un intorno di x_0 in cui non cadono punti di E e si dice che x_0 è un **punto esterno** a E

[1] Gli intorni di $\mathbb{R}$ è l'intervallo aperto $]x_0 - r,\ x_0 + r[$

- se non accade nessuno dei casi precedenti allora in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E e del suo complementare $\overline{E}$ (E^c), in questo caso si dice che x_0 è **punto di frontiera**

Definizione 20 (Punto di Accumulazione). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si chiama* ***punto di accumulazione per E*** *se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di E*

Intuitivamente, quindi, un punto di accumulazione di E è un punto interno al quale i punti di E si addensano, in modo che in ogni suo intorno ce ne siano infiniti.
NOTA: È evidente che per avere punti di accumulazione l'insieme deve essere costituito da un numero infinito di punti. Nel caso in cui l'insieme ha numero finito di punti, NON esistono punti di accumulazione in questo insieme.

5.2 Insiemi Aperti e Chiusi

Definizione 21 (Insieme Aperto). *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice* **aperto** *se ogni suo punto è interno.*

$$E^i = E$$

Ricordando la definizione di intorno, è possibile anche dire che un insieme E è aperto se per ogni $x_0 \in E$ esiste un intorno x_0 tutto contenuto in E

Teorema 2 (Insieme Aperto). *Un insieme A è aperto se e solo se non contiene nessun punto di frontiera, cioè $A \cap \partial A = \emptyset$*

Definizione 22 (Insieme Chiuso). *Diremo che un insieme D è chiuso se il suo complementare D^c è aperto*

Teorema 3 (Insieme Chiuso). *Un insieme D è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera, cioè $\partial D \subset D$.*

Un insieme D è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

NOTA: Non tutti gli insiemi sono aperti o chiusi, esistono infatti insiemi che non sono ne aperti ne chiusi. Ad esempio l'intervallo $[a,\ b[$, in quanto non è aperto perchè contiene un elemento di frontiera a e non è chiuso perchè il suo complementare $]-\infty,\ a[\,\cup\,[b,\ +\infty[$ non è aperto in quanto contiene b che è elemento di frontiera.

Teorema 4 (Chiusura). *La chiusura di E è il piú piccolo insieme chiuso che contiene E*

5.3 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Teorema 5 (Insieme Limitato Infinito). *Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ limitato e infinito ha almeno un punto di accumulazione*

Dimostrazione. Sia a un minorante di E e b un maggiorante di E, si avrà $E \subseteq [a,\ b]$ e di conseguenza in questo intervallo cadranno infiniti punti di E. Andando a dividere questo intervallo a metà e prendendo sempre l'intervallo ottenuto avente infiniti punti di E, si ottiene una successione I_k di intervalli dimezzati. Ricordandoci dell'assioma di continuità, l'intersezione di questi (sotto)intervalli è costituita da solo punto x_0. Prendendo poi un qualsiasi intorno $I(x_0,\ r)$ di x_0, sapremmo che l'intervalli I_k cadrà dentro $I(x_0,\ r)$, quando la usa ampiezza sarà minore di r, cioè quando $2^k > \frac{b-a}{r}$. Di conseguenza $I(x_0,\ r)$ contiene infiniti punti di E, quindi x_0 sarà punto di accumulazione $\square$

Teorema 6 (Punto di Frontiera). *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, e supponiamo che il suo complementare E^c sia anch'esso non vuoto. Allora E ha almeno un punto di frontiera.*

5.4 Retta Reale Estesa

Definizione 23 (Retta Reale Estesa). *Si chiama retta reale estesa l'unione della retta reale $\mathbb{R}$ e dell'insieme $-\infty, +\infty$.*

$$\mathbb{R}^* = R \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Teorema 7 (Estensione di $\mathbb{R}$). *Estendendo la definizione di estremo superiore ed estremo inferiore a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^*$, si ha che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ esistono $\sup(A) \in \mathbb{R}^*$ e $\inf(A) \in \mathbb{R}^*$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$, allora*

- $\sup(A) = +\infty \iff A$ *non è superiormente limitato*
- $\inf(A) = -\infty \iff A$ *non è inferiormente limitato*
- $\sup(\emptyset) = -\infty$ *e* $\inf(\emptyset) = +\infty$

Dimostrazione. Essendo $A \neq \emptyset$. Se $+\infty \in A$ allora $+\infty = \sup(A) = \max(A)$.
Considerando il caso $A \subseteq \mathbb{R}$:

- A superiormente limitato $\Rightarrow \exists \sup(A) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \sup(A) \in \mathbb{R}^*$

  A non è superiormente limitata $\iff$

  $\{maggioranti\} = \{+\infty\} \iff \sup(A) = +\infty$

- facendo le opportune modifiche, come sopra

- $A = \emptyset \Rightarrow maggioranti = \mathbb{R}^* \Rightarrow \sup(\emptyset) = -\infty$ e $\inf(\emptyset) = +\infty$

$\square$

6 Funzioni Reali

Dare una definizione precisa di funzione è cosa complicata e assai lunga, quindi, si tende a dare una descrizione del tipo:

Definizione 24 (Funzione). *Siano A e B due insiemi. Una funzione $f : A \to B$ è una legge che ad ogni elemento $x \in A$ fa corrispondere un elemento $y = f(x)$ di B*

Gli insiemi sopra citati, A e B sono detti rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione f. Quando si parla di *funzioni reali ad una variabile reale*, dominio e codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

6.1 Immagine

Definizione 25 (Immagine). *Si chiama immagine di A (tramite f) l'insieme dei punti $y \in B$ che provengono da qualche punti di A.*

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme del codominio della funzione f

6.2 Immagine Inversa o Controimmagine

Definizione 26 (Controimmagine). *Sia $f\colon A \to B$ una funzione e sia $D \subset B$. Si chiama immagine inversa o controimmagine di D l'insieme dei punti $x \in A$ tali che $f(x) \in D$.*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

6.3 Funzione Composta

Definizione 27 (Composta). *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Si chiama funzione composta di g e f la funzione che ha come dominio A e come codominio C, e che ad ogni $x \in A$ associa il punto $g(f(x))$*

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

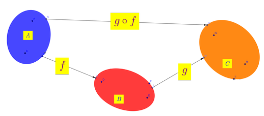


Figura 6.1: $g \circ f$

6.4 Iniettiva, Suriettiva, Biettiva

Definizione 28 (Iniettiva). *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice iniettiva se ogni elemento di B è associato al più ad un solo elemento di A*

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \,.\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \,.\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definizione 29 (Suriettiva). *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice suriettiva se ogni elemento di B è associato ad almeno un elemento di A.*

$$f \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow \forall b \in B,\ \exists a \in A \mid f(a) = b$$

Definizione 30 (Biettiva). *Una funzione si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva.*

6.5 Monotònia

Definizione 31 (Crescenza e Decrescenza). *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se invece $f(x_1) < f(x_2)$, la funzione si dice strettamente crescente.*

Analogamente, una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 > x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$. Se invece $f(x_1) > f(x_2)$, la funzione si dice strettamente decrescente.

6.6 Grafici delle funzioni base

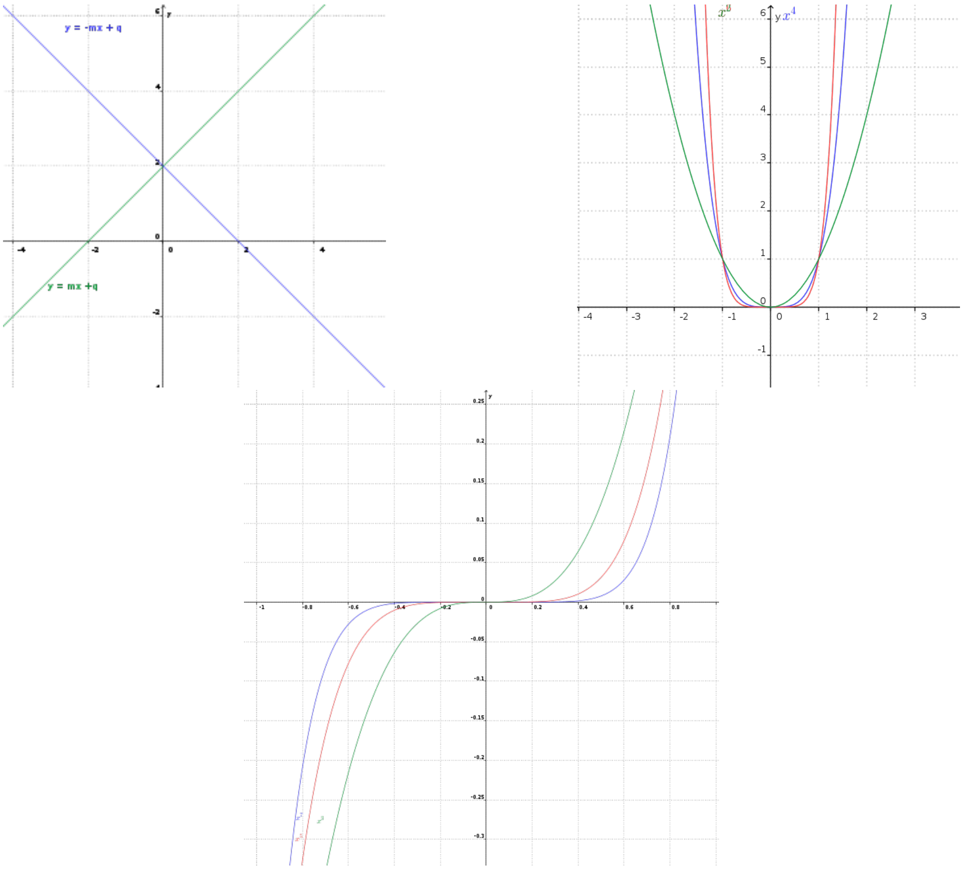


Figura 6.2: Grafici di funzioni: retta, esponente pari, esponente dispari

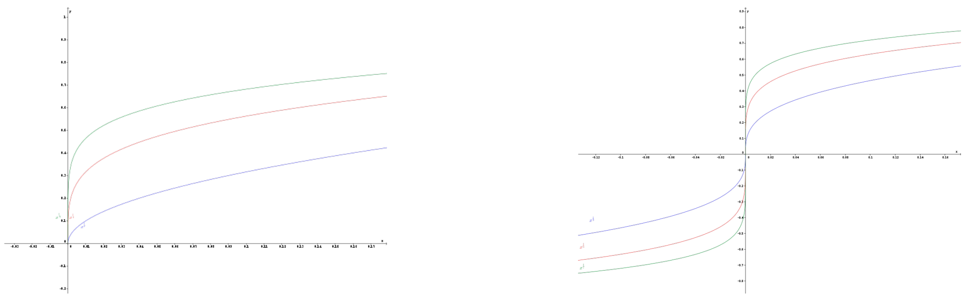


Figura 6.3: Grafici di radicali pari e dispari

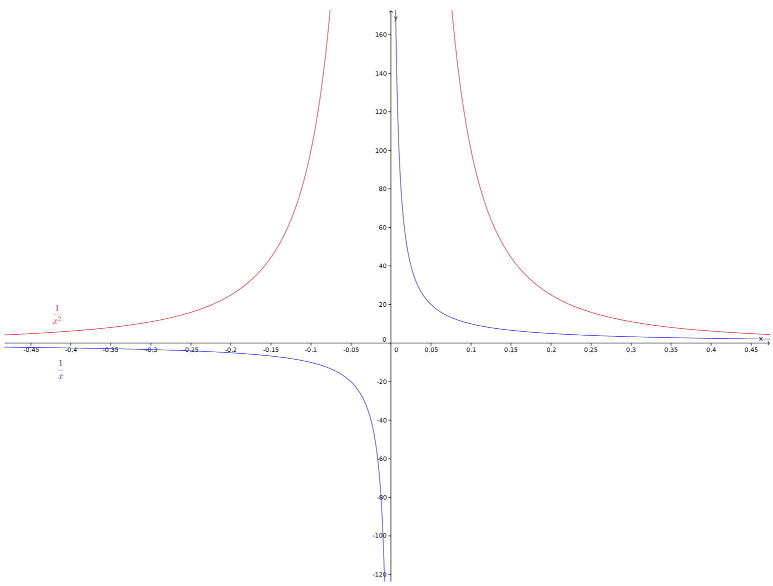


Figura 6.4: Grafici di funzioni fratte con esponente pari (rosso) e dispari (blu)

Nelle funzioni trigonometriche, $\sin(x)\cos(x)\tan(x)$, la x corrisponde alla misura dell'angolo misurato in radianti, che è pari alla lunghezza dell'arco EC della circonferenza di raggio $AE = 1$. Inoltre, sappiamo che la $\tan(x)$ è possibile ricavarla attraverso la funzione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Cosa da sottolineare è il fatto che $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono definiti per un qualsiasi valore di x, mentre $\tan(x)$ non è definita per valori uguali a $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Inoltre, è bene notare che, sono funzioni periodiche, in particolare $\sin(x)$ e $\cos(x)$ ad intervalli di 2π mentre $\tan(x)$ a π.

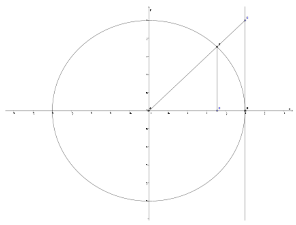


Figura 6.5: Circonferenza trigonometrica

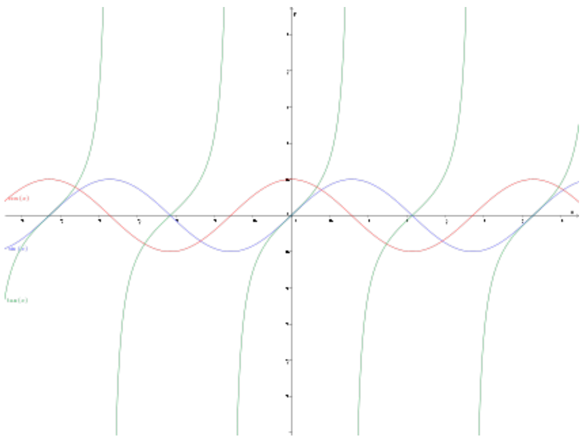


Figura 6.6: Grafici di $\sin(x)$ (blu), $\cos(x)$ (rosso), $\tan(x)$ (verde)

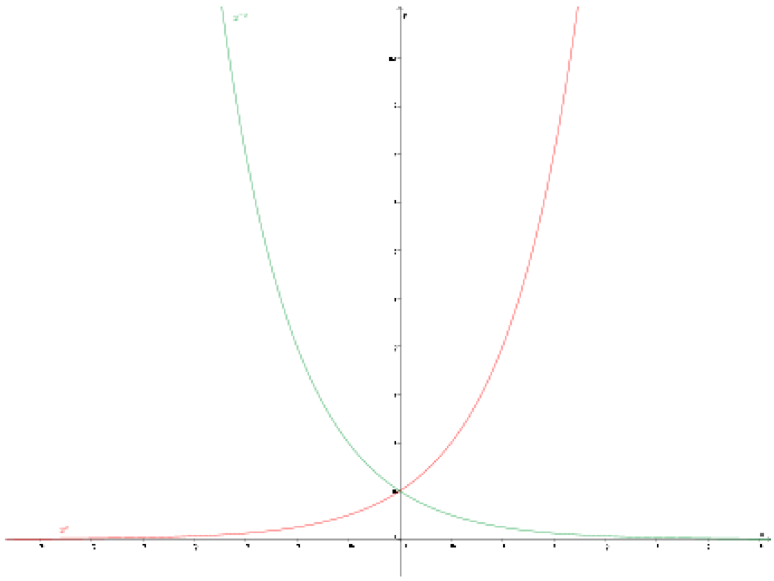


Figura 6.7: Grafici di a^x (rosso), a^{-x} (verde)

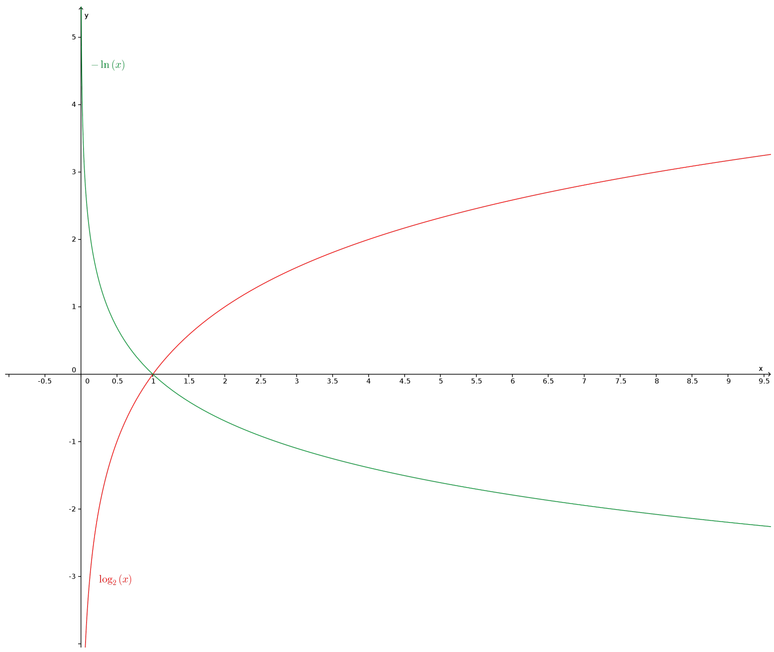


Figura 6.8: Grafici di $\log_a(x)$ (rosso), $-\log_a(x)$ (verde)

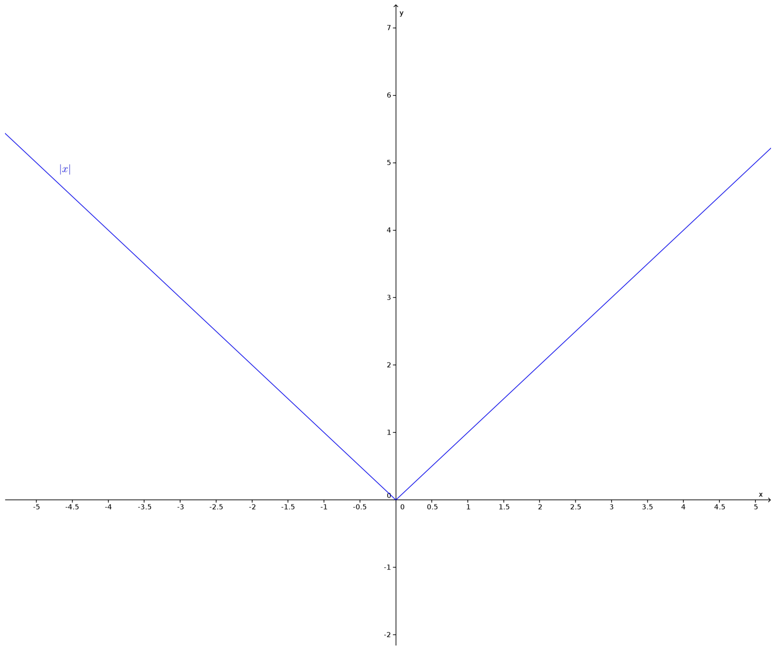


Figura 6.9: Grafico di $|x|$

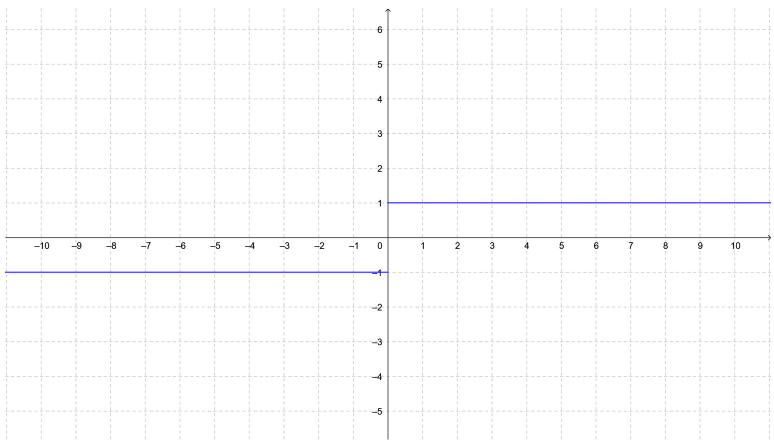


Figura 6.10: Grafico di una funzione definita a tratti

6.7 Restrizioni

Ci sono funzioni per le quali prendere certi valori potrebbe portare ad errori o a situazioni che non possono evolversi, come ad esempio se volessimo invertire la funzione x^2. In questo caso non sarebbe possibile perché tale funzione è suriettiva, ma restringendo il suo dominio (campo di esistenza) a $[0, +\infty[$ l'operazione diventa fattibile.

Definizione 32 (Restrizione). *Sia f una funzione di A in B ($f\colon A \to B$) e sia $D \subset A$. Chiameremo restrizione di f a D la funzione f considerata solo nell'insieme D.*

$$f_D\colon D \to B$$

Tale concetto è utile anche nel caso in cui nella composizione di due funzioni, il codominio B della prima, non coincida con il domino E della seconda. Restringendo la funzione a dei valori di x per i quali $f(x) \in E$, si scavalca l'inconveniente.

6.8 Estremi Superiore ed Inferiore

6.8.1 $\sup(f)$

Definizione 33 (Limite Superiore). *Diremo che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è limitata superiormente in A se la sua immagine $f(A)$ è limitata superiormente.*

Definizione 34 (Estremo Superiore). *Sia f una funzione limitata superiormente in un insieme E. Chiameremo estremo superiore della funzione f in E l'estremo superiore* *dell'insieme $f(E)$, cioè il minimo dei maggioranti*

$$\sup(f)$$

6.8.2 $\inf(f)$

Definizione 35 (Limite Inferiore)**.** *Diremo che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è limitata inferiormente in A se la sua immagine $f(A)$ è limitata inferiormente.*

Definizione 36 (Estremo Inferiore)**.** *Sia f una funzione limitata inferiormente in un insieme E. Chiameremo estremo inferiore della funzione f in E l'estremo inferiore dell'insieme $f(E)$, cioè il maggiore dei minoranti*

$$\inf(f)$$

6.9 Limiti di Funzione

Per capire a grandi linee di cosa si tratta quando si parla di limiti, diamo un semplice esempio:
se presa una funzione $f(x)$ definita nel punto x_0, possiamo sapere cosa succede in x_0 e nei suoi punti limitrofi, supponendo che si mantengano simili a $f(x_0)$.

L'operatore limite, permette di vedere cosa succede proprio in questi punti vicino a x_0; si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e si dice che *il limite tende a L quando x tende a x_0*. Più precisamente, ciò che è stato appena detto, significa che più x è vicina a x_0, $f(x)$ si avvicina a L.

Definizione 37 (Limite). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}$. e sia x_0 un punto di accumulazione di D, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \,.\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

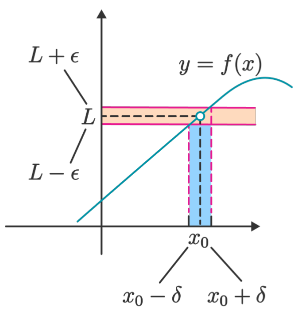


Figura 6.11: Descrizione grafica del limite

Analizzando la definizione sopra, è necessario sottolineare che:

1. la $f(x)$ ovunque essa sia definita ($\mathbb{R}$, D), deve esistere per alemno un x nell'intorno δ di x_0, cioè x_0 deve essere un punto di accumulazione
2. la disuguaglianza $0 < |x - x_0| < \delta$ sottolinea il fatto che l'intorno di x_0 deve essere positivo e di lunghezza massima pari a δ
3. la disugaglianza $|f(x) - L| < \epsilon$ ci dice quanto deve essere piccolo l'intorno di $f(x)$. Da notare che siccome l'intorno di $f(x)$ deve essere arbitrariamente piccolo, ϵ può assumere un qualsiasi valore, ciò implica che tale valore influenzerà anche la scelta del δ. Più piccolo sarà ϵ, più piccolo sarà anche δ: $\forall\epsilon > 0\, \exists\delta > 0$

Teorema 8 (dei Carabinieri). *Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni e supponiamo che risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno bucato x_0 e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Allora anche

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Poiché $f(x) \to L$, eisterà un $\delta_1 > 0$ tale che per ogni x con $0 < |x - x_0| < \delta_1$ risulta $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$, in particolare $f(x) > L - \epsilon$.
Analogamente, dato che $h(x) \to L$, eisterà un $\delta_2 > 0$ tale che per ogni x con $0 < |x - x_0| < \delta_2$ risulta $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$, in particolare $h(x) > L - \epsilon$.

Infine esisterà un δ_3 tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_3$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se si prende il δ pari al minore dei δ_1, δ_2, δ_3, tutte le disuguaglianze varranno simultaneamente per ogni x con $0 < |x - x_0| < \delta$. Pertanto per questi x si avrà $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$, ergo, $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$. □

Definizione 38 (Limite tende a +infinito). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}$. e sia x_0 un punto di accumulazione di D, allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) > M$

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \,.\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Definizione 39 (Limite tende a -infinito). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}$. e sia x_0 un punto di accumulazione di D, allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) < -K$

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \,.\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$$

Definizione 40 (x tende a +infinito). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme D non limitato superiormente, allora*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* v *tale che per ogni* $x \in D$ *con* $x > v$ *si ha* $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists v \mid \forall x \in D \; . \; x > v \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definizione 41 (x tende a -infinito). *Sia* $f(x)$ *una funzione definita in un insieme* D *non limitato superiormente, allora*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* μ *tale che per ogni* $x \in D$ *con* $x < \mu$ *si ha* $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \mu \mid \forall x \in D \; . \; x < \mu \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definizione 42 (x tende a 0+). *Sia* $f(x)$ *una funzione definita in un insieme* $D \subset \mathbb{R}$. *e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D, *allora*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in D$ *con* $0 < x - x_0 < \delta$ *si ha* $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \; . \; 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definizione 43 (Limite tende a 0-). *Sia* $f(x)$ *una funzione definita in un insieme* $D \subset \mathbb{R}$. *e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D, *allora*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in D$ *con* $-\delta < x - x_0 < 0$ *si ha* $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \; . \; -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Le due definizioni sopra descrivono il limite destro e limite sinistro di una funzione. Tali limiti non sono altro che i limiti di una restrizione dell'insieme D così descritti: $D \cap]x_0, +\infty[$ per quello destro, e $D \cap]-\infty, x_0[$ per quello sinistro.

6.9.1 Asintoti

Definizione 44. *(Asintoto) Sia $f(x)$ una funzione definita in una semiretta $]x_0, +\infty[$, la retta di equazione $y = ax + b$ è asintoto di f per $x \to +\infty$ se*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in una semiretta $]-\infty, x_0[$, la retta di equazione $y = ax + b$ è asintoto di f per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

Per capire meglio cosa sia un asintoto, immaginiamo una funzione $f(x)$. Un suo assintoto è quella retta alla quale la curva si avvicina sempre più si avvicina a $+\infty$, senza mai toccarlo. Abbiamo quindi tre tipi di asintoti:

1. **VERTICALE**: è l'asintoto per il quale vale il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ed è pari a x_0
2. **ORIZZONTALE**: è l' per il quale vale il limite $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ ed è pari a $y = L$
3. **OBLIQUO**: è l'asintoto per il quale vale il limite $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ ed è pari a $y = ax + b$

6.9.2 Continuità e Discontinuità

Definizione 45 (Continuità). *Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice continua, se tale funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Per poter utilizzare la definizione sopra, è necessario che la funzione ammetta il limite nel punto x_0 e che x_0 sia punto di accumulazione. Nel caso in cui x_0 è punto isolato, allora è necessario asserire che ogni funzione è continua dei suoi punti isolati

Un punto di discontinuità per una funzione f è un punto in cui $f(x)$ non è continua. Tale discontinuità può assumere diverse tipicità:

1. **salto**: la discontinuità di questo tipo avviene quando limite destro e limite sinistro esistono ma sono diversi.
$$\lim_{x\to x_0^-} \neq \lim_{x\to x_0^+}$$
2. **essenziale**: la discontinuità di questo tipo avviene quando limite destro e limite sinistro esistono ma almeno uno dei due è infinito o non esiste
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty. \end{cases} \quad \vee \lim_{x\to x_0^+} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty. \end{cases}$$
3. **eliminabile**: la discontinuità di questo tipo avviene quando limite destro e limite sinistro esistono e sono

uguali ma la funzione non è definita nel punto x_0

$$\lim_{x\to x_0^-} = \lim_{x\to x_0^+} \neq f(x_0)$$

Teorema 9 (Permanenza del segno). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un insieme A e sia x_0 un punto di A. Se risulta $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap A$ si ha $f(x) < c$*

(oppure)

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta$

Teorema 10 (Esistenza degli zeri). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, e supponiamo che sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$*

Dimostrazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due parti uguali $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) > 0$ poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = c$, altrimenti $a_1 = c$ e $b_1 = b$. Ripetendo tale procedimento per $[a_k, b_k]$, otteniamo una successione di intervalli dimezzati, tali che $f(a_k) \leq 0$ e $f(b_k) > 0$. Per l'assioma di continuità, esiste un solo punto x_0 contenuto in tutti gli intervalli, tale che $a_k \leq x_0 \leq b_k$ per ogni k. Le successioni a_k e b_k tendono entrambe a x_0. Siccome f è continua in x_0, per il teorema di continuità delle successioni, si avrà:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$$

Per costruzione $f(a_k) \leq 0$ e quindi $\lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq 0$. Mentre per $f(b_k) \geq 0$, si avrà $\lim_{k\to\infty} f(b_k) \geq 0$ e quindi $f(x_0) = 0$ □

Teorema 11 (inf e sup). *Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_i f$*

Dimostrazione. Sia M l'estremo superiore e m l'estremo inferiore della funzione f nell'intervallo I, e sia $m < c < M$. Essendo c maggiore di m allora c non potrà essere minorante ed esisterà un punto $a \in I$ tale che $f(a) < c$. Essendo c minore di M allora c non potrà essere maggiorante ed esisterà un punto $b \in I$ tale che $f(b) > c$. La funzione continua $g(x) = f(x) - c$ sarà positiva in b e negativa in a, per il teorema degli zeri ci sarà un punto x_0 compreso tra a e b in cui $g(x) = 0$ e quindi $f(x_0) = c$ □

Definizione 46 (Esistenza di un massimo). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A, e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 è un punto di massimo se risulta $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni punto $x \in A$. In corrispondenza, il valore $f(x_0)$ si dice valore massimo, o massimo, della funzione $f(x)$.*

Teorema 12 (Weierstrass). *Una funzione continua in un insieme E compatto ha massimo e minimo*

Teorema 13 (Continuità funzione composta). *Siano X e Y due intervalli aperti di $\mathbb{R}$. Sia $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$ con $Im(f) \subseteq Y$ e $g\colon Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0) \in Y$. Allora $g \circ f$ è continua in $x_0 \in X$*

Dimostrazione. Sia x_0 un punto del dominio della funzione composta $h(x) = g(f(x))$. Chiamando $y_0 = f(x_0)$ l'immagine del punto x_0 mediante la funzione f, allora, $h(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$. Poiché la funzione g è continua per ipotesi nel punto y_0, per ogni $\epsilon > 0 \exists \gamma > 0$ tale che $|y - y_0| < \epsilon$ allora risulterà

$|g(y) - g(y_0)| < \gamma$. Per ipotesi, f è continua in x_0, per un qualsiasi valore $\bar{\epsilon}$ esisterà un $\bar{\delta}$ tale che $|x - x_0| < \bar{\epsilon}$ e quindi $|f(x) - f(x_0)| < \bar{\delta}$. Dato che ciò vale per ogni $\bar{\epsilon}$ allora varrà anche per ϵ, ma allora, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Da ciò $|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(y) - g(y_0))|$. Poiché $|x - x_0| < \bar{\epsilon} \Rightarrow |y - y_0| < \epsilon$ e quindi $|g(y) - g(y_0)| < \gamma$ □

Teorema 14 (Teorema di Sostituzione). *Supponiamo* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *e sia* g *una funzione definita in un intorno bucato di* l*. Supponiamo che:*

- *esista* $\lim_{y\to l} g(y)$ *(finito o infinito)*
- g *sia continua in* l *oppure esista un intorno* $I(x_0)$ *tale che* $f(x) \neq l, \forall x \in I^*(x_0)$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$$

6.9.3 Limiti Notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Poiché x tende a 0 possiamo supporre che $1 + x > 0$ quindi segue che $(1 + x)^a = e^{a\ln(1+x)}$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)} - a}{a\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Se $x \to 0$ allora $a\ln(1 + x) \to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$

Dimostrazione. Dato che $\frac{\sin(x)}{x}$ è una funzione pari, è possibile tenere in considerazione solo il caso $x>0$ e si può supporre che $x<\frac{\pi}{2}$. Perciò si avrà

$$0<\sin(x)\le x\le \tan(x)$$

Considerando i reciproci si ottiene

$$\frac{1}{\sin(x)}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Moltiplicando tutto per $\sin(x)$ otteniamo

$$1\ge\frac{\sin(x)}{x}\ge\cos(x)$$

Dato che $\cos(x)$ tende a 1 quando $x\to 0$ per il teorema dei Carabinieri la funzione di mezzo tende allo stesso valore delle altre due □

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0}$$

Dimostrazione. Sapendo che $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1\Rightarrow 1-\cos^2(x)=\sin^2(x)$ quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\frac{x}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{x}{1+\cos(x)}$$

Dato che il primo termine tende a 1 e il secondo a 0 si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{x}{1+\cos(x)}=0$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

Dimostrazione. Moltiplicando e dividendo per $1+\cos(x)$ si ottiene

$$\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

Dato che $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos(x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}$$

$\square$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Dimostrazione. Si ponga $z=e^x-1$ ottenendo $x=\ln(1+x)$. In più se $x\to 0$. $z\to 0$ e Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z}}$$

Sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1}=1$$

$\square$

6.10 Derivate

La derivata è un concetto scoperto relativamente alla ricerca della tangente di una curva, difatti, per dare una spiegazione al significato di derivata si usa la seguente descrizione: supponendo di avere una curva $y = f(x)$, prendiamo la retta secante di coordinate (x_0, y_0) e x_1, y_1. L'equazione di tale retta sarà dunque

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

essendo $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$ si otterrà

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Facendo tendere il punto x_1 a x_0 la retta secante tenderà a diventare tangente e il suo coefficiente angolare tenderà a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ponendo $x = x_0 + h$, $x - x_0 = h$ tenderà a 0 ottenendo quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite viene detto, appunto, derivata della funzione f nel punto x_0 e i modi per indicarlo sono: $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. Ovviamente tale definizione di derivata è una definizione geometrica, infatti, la retta tangente alla curva $f(x)$ è pari a $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Se prendiamo l'equazione di una retta $y = mx + q$, possiamo notare che $m = \tan(\alpha)$ dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse. Essendo anche $m = f'(x_0)$, allora si evince che $\tan(\alpha) = f'(x_0)$. Continuando questo ragionamento possiamo vedere che, più grande sarà la derivata, più l'angolo α si avvicinerà a $\frac{\pi}{2}$ e quindi maggiore sarà la pendenza della curva. Al contrario, più la derivata è piccola, più l'angolo tende a 0 e quindi la curva sarà costante o quasi.

Definizione 47 (Funzione Derivabile). *Sia f una funzione definita in un intervallo $]a,b[$ e sia x un punto di questo intervallo. Diremo che f è derivabile in x se esiste finito il limite*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e tale limite se esiste si chiama derivata della funzione f nel punto x

Teorema 15 (Derivabile e continua). *Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora è continua in x_0*

Dimostrazione. Quando x tende a x_0, $f(x)$ tende a $f(x_0)$, quindi $f(x)-f(x_0)=0$. Se $x \neq x_0$ possiamo scrivere $f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$. Quando $x \to x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tende a $f'(x_0)$ mentre $(x-x_0)$ tende a 0. Di conseguenza $f(x)$ tenderà a $f(x_0)$, così la funzione f sarà continua in x_0 $\square$

6.10.1 Massimi e Minimi

Con il teorema di Weierstrass, siamo venuti a conoscenza che una funzione f in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e/o minimo, ma tale teorema non ci da la possibilità di trovare tali punti. A questo scopo ci viene in aiuto il concetto di derivata. perché esista massimo e/o minimo, una funzione f, deve avere la tangente con equazione $y = c$. Sapendo che la derivata in un punto è la tangente del grafico in quel punto e sapendo che l'equazione della tangente è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, significa che per avere tangente pari a una costante, la derivata dovrà essere nulla. Quindi, se nel punto x_0 la derivata si annulla, significa che la tangente è parallela all'asse delle ascisse e che quindi abbiamo massimo o minimo in quel punto.

Definizione 48 (Massimo). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dirà di massimo relativo (o locale) se esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap A$ si abbia*

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Se tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \in A$, allora x_0 si dice punto di massimo assoluto in A

Definizione 49 (Minimo). *Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dirà di minimo relativo (o locale) se esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in J \cap A$ si abbia*

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Se tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \in A$, allora x_0 si dice punto di minimo assoluto in A

Teorema 16 (Teorema di Fermat (punti stazionari)). *indexTeorema! punti stazionari Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad A. Se f è derivabile in x_0, risulta $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Siccome x_0 è punto di massimo interno ad A, allora esiste un intorno $I(x_0, e)$ tutto contenuto in A, tale che per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \leq f(x_0)$. Considerando un $|h| < r$, avremmo che il rapporto incrementale relativo al punto x_0 è

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Poiché $|h| < r$ il punto $x_0 + h$ è contento in $I(x_0, r)$ e dunque $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. In questo modo il numeratore del rapporto incrementale è sempre minore o uguale a 0 e quindi sarà positivo per $h < 0$ e negativo per $h > 0$. Siccome f è derivabile per ipotesi in x_0, esisteranno i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale, che saranno uguali alla derivata $f'(x_0)$. Per il teorema della permanenza del segno

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quindi, la derivata dovrà essere contemporaneamente ≤ 0 e ≥ 0, ma questo è possibile se e solo se $f'(x_0) = 0$.
Similmente, con opportune modifiche, si può dimostrare per un punto di minimo. □

6.10.2 Rolle, Lagrange, Cauchy, de l'Hôpital

Teorema 17 (Rolle). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$, e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto compreso tra a e b in cui la derivata si annulla.*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, la funzione f ha massimo e minimo in $[a, b]$. Chiamiamo x_M il punto di massimo e x_m il punto di minimo. Due possibili casi sono:

1. Sia x_M che x_m cadono agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Poiché la funzione assume stesso valore nei due punti, massimo e minimo coincidono, quindi f sarà costante, dunque la derivata nulla in tutto l'intervallo.

2. Almeno uno dei due punti x_m x_M cade all'interno di $[a,b]$. Per definizione di massimo (minimo) relativo, la derivata in questo punto sarà 0.

In ogni caso, la derivata si annulla in almeno un punto interno. $\square$

Teorema 18 (Lagrange o valor medio). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso $[a,b]$, e derivabile in $]a,b[$. Esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Essendo continua in $[a,b]$ perché combinazione lineare di funzioni continue in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ perché combinazione lineare di funzioni derivabili in $]a,b[$ ed essendo

$$\psi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)$$

$$\psi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$$

quindi $\psi(a) = \psi(b)$. Soddisfando ψ le ipotesi del teorema di Rolle, per cui esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che $\psi'(\xi) = 0$, si ottiene $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) = 0$ $\square$

Questo teorema ha un senso geometrico che possiamo descrivere in questo modo:

esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che la tangente alla curva passante per $(\xi, f(\xi))$, ha stesso coefficiente angolare della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

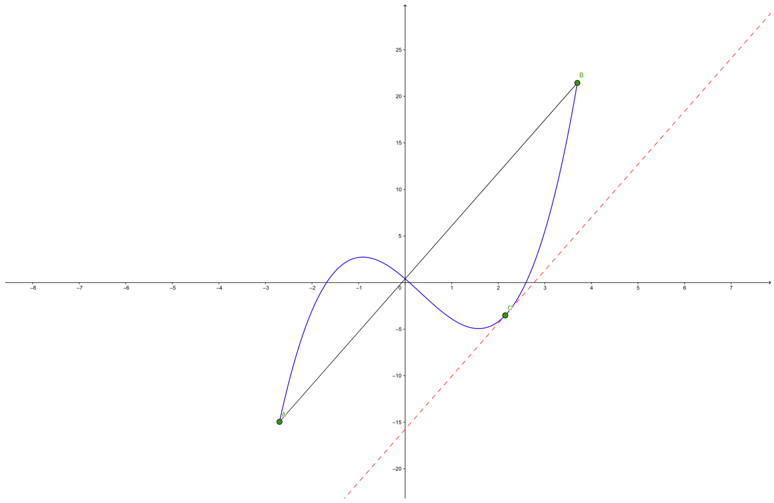


Figura 6.12: Significato geometrico del valor medio

Teorema 19 (Cauchy). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$, derivabili in $]a, b[$. Esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $[g(b) - g(a)]f'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$. Essendo continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e

$$h(a) = [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$$

$$h(b) = [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b)$$

quindi sarà $h(a) = h(b)$. Soddisfacendo h le ipotesi del teorema di Rolle, per cui esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$, si ottiene $[g(b) - g(a)]f'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) = 0$ $\square$

Questo teorema è una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Teorema 20 (de l'Hôpital 1). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in un intervallo $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$ con la possibile eccezione di un punto x_0. Supponiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e che $g(x)$ e $g'(x)$ non si annullino mai per $x \neq x_0$. Supponiamo anche che esista il limite del rapporto delle derivate*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni ed è uguale al precedente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dimostrazione. Sia x un punto di $]a,b[$. Per il teorema di Cauchy esiste un punto tra x_0 e x, dipendente da x, tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Quando $x \to x_0$ il punto ξ, che è compreso tra x_0 e x, tende a x_0, e dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L$$

□

Teorema 21 (de l'Hôpital 2). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in $[a,b] - \{x_0\}$. Supponiamo che per $x \to x_0$ $f(x)$ e $g(x)$ tendano entrambe a $+\infty$ e che $g'(x)$ non si annulli mai per un intorno di x_0. Supponiamo anche che esista il limite del rapporto delle derivate*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni ed è uguale al precedente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dimostrazione. Supponendo che x_0 sia l'estremo a, è possibile procedere con una dimostrazione generale considerando il limite destro e sinistro separatamente. Avendo appena supposto che $x \to a$, possiamo considerare un intorno di a in cui g' e g siano diverse da 0. Supponendo anche che L sia finito, allora, per ogni $0 < \epsilon < 1$ esiste un $x_1 > a$ tale che per ogni $\xi \in]a, x_1[$ risulta

$$L - \epsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L + \epsilon$$

Se $x \in]a, b[$ allora per il teorema di Cauchy esiste un punto $\xi \in]x, x_1[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

e quindi per ogni $x \in]a, x_1[$

$$L - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} < L + \epsilon$$

D'altra parte

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

Dato che $x \to a$ sia $f(x)$ che $g(x)$ tendono all'infinito e

$$Q(x) = \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

tende a 1. Esisterà allora un punto $x_2 \leq x_1$ tale che per ogni $x \in\,]a, x_2[$ risulta $1-\epsilon < Q(x) < 1+\epsilon$. Quindi, per ogni $x \in]a, x_2[$, sarà

$$(1-\epsilon)(L-\epsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (L+\epsilon)(1+\epsilon)$$

Da ciò si ottiene

$$(L+\epsilon)(1+\epsilon) = L + (L+1)\epsilon + \epsilon^2 < L + (L+2)\epsilon$$

e

$$(L-\epsilon)(1-\epsilon) = L - (L+1)\epsilon + \epsilon^2 < L - (L+2)\epsilon$$

Concludendo, per ogni $x \in\,]a, x_2[$ si avrà

$$L - (L+2)\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + (L+2)\epsilon$$

quindi il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a L $\square$

6.10.3 Cuspide e Punto Angoloso

In analisi matematica si parla di cuspidi e punti angolosi, nel dominio di una funzione, quando abbiamo particolarità durante lo studio della derivata di tale funzione.

Definizione 50 (Cuspide). *Si dice che una funzione di variabile reale $f(x)$ continua in un punto x_0 del dominio, ha una cuspide in x_0 se il limite destro e sinistro del rapporto incrementale in x_0 sono divergenti con segno opposto, in particolare:*

$$\lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

oppure

$$\lim_{h \to 0^{\mp}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

Definizione 51 (Punto Angoloso). *Un punto angoloso nel x_0 del dominio di una funzione reale a variabile reale $f(x)$ esiste quando derivata destra e derivata sinistra della funzione esistono ma sono diverse (ma non devono essere entrambe infinite).*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

6.10.4 Convessità, Concavità

Definizione 52 (Convessità). *Una funzione $f(x)$ si dice concava in un intervallo $[a,b]$ se per ogni punto x_0 appartenente a $[a,b]$ il grafico della funzione in questo intervallo è al di sopra della retta tangente nel punto $(x_0, f(x0))$*

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Se f possiede derivata seconda, allora la funzione sarà convessa se e solo se

$$f''(x) \geq 0$$

Definizione 53 (Concavità). *Una funzione $f(x)$ si dice convessa in un intervallo $[a,b]$ se per ogni punto x_0 appartenente a $[a,b]$ il grafico della funzione in questo intervallo è al di sotto della retta tangente nel punto $(x_0, f(x0))$*

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Se f possiede derivata seconda, allora la funzione sarà concava se e solo se

$$f''(x) \leq 0$$

6.10.5 Flesso

Un punto di flesso è un punto particolare della funzione e proprio per questo motivo, assume definizioni differenti in base al contento.

Definizione 54. *Un punto x_0 si dice di flesso per una funzione $f(x)$ se la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ attraversa il grafico della funzione, cioè se la funzione $f(x)$ nel punto x_0 cambia concavità*

Se $f(x)$ ha un punto di flesso in x_0 allora $f''(x_0) = 0$

Il punto di flesso è categorizzabile in 3 diversi casi:

- **flesso orizzontale**: questo flesso esiste quando la derivata prima nel punto è zero $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
- **flesso obliquo**: esiste quando la derivata prima nel punto è diversa da zero e infinito $\Rightarrow f'(x_0) \neq 0 \neq \pm\infty$
- **flesso verticale** o a tangente verticale: esiste quando la derivata prima nel punto tende $\infty \Rightarrow f'(x_0) = \pm\infty$

6.11 Integrali

L'operatore integrale associa alla funzione *l'area orientata* sottesa dal suo grafico entro un dato intervallo $[a, b]$ nel dominio. Per capire il concetto di integrale possiamo partire da concetti più semplici. Supponendo di avere una funzione $f(x)$ positiva definita in un intervallo $[a, b[$. Supponendo di voler calcolare l'area sottesa a tale funzione e che tale funzione sia costante, la figura in esame sarebbe un rettangolo F e la sua area $A(F)$ sarebbe il prodotto di base e altezza. Prendendo un caso però più generale, dove $m \leq f(x) \leq M$ un rettangolo di base $[a, b[$ e di altezza m e un secondo rettangolo con stessa base ma altezza M sono contenuti in una curva F, otterremmo

$$m(b-a) \leq A(F) \leq M(b-a)$$

Una migliore approssimazione si avrebbe dividendo l'intervallo $[a, b[$ in due sotto-intervalli $[a, c[$ e $[c, b[$, costruendo per entrambi due rettangoli di altezza rispettivamente m_1, M_1 del primo e m_2, M_2 del secondo. Replicando tale idea, si può arrivare ad un concetto più generale, dividendo l'intervallo $[a, b[$ in n intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_n$ mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ e costruire per ognuno di questi (I_k) due rettangoli, uno minorante e uno maggiorante di altezza rispettivamente m_k e M_k. A questo punto avremmo una situazione del tipo

$$m_1(x_1-a) + m_2(x_2-x_1) + \cdots + m_b(b-x_{n-1})$$

$$\leq A(F) \leq$$

$$M_1(x_1-a) + M_2(x_2-x_1) + \cdots + M_b(b-x_{n-1})$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq A(F) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Si può, quindi, definire, e nei casi più semplici calcolare, l'area $A(F)$ come l'estremo superiore delle approssimazioni per diffetto o l'estremo inferiore delle approssimazioni per eccesso.

6.11.1 Integrale di Riemann

Considerando dei punti $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ si possono costruire gli intervalli $I_1 = [x_0, x_1[$, $I_2 = [x_1, x_2[$, . . . , $I_n = [x_{n-1}, x_n[$. Se λ_1, λ_2, . . . , λ_n sono numeri reali, allora, la funzione $\phi(x)$, vale λ_1 in I_1, λ_2 in I_2, λ_n in I_n e si dice *semplice o costate a tratti in* $[a, b[$. Per definire ϕ in tutto $\mathbb{R}$, la poniamo pari a 0 nel complementare di $[a, b[$. Ricordando che la funzione caratteristica di un insieme E è la funzione $\phi_E(x)$ che vale 1 se $x \in E$ 0 altrimenti, si ottiene:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{I_k}(x)$$

Infatti, nell'intervallo I_1, la funzione ϕ_1 vale 1, mentre tutte le altre valgono 0, in questo modo si avrà $\phi(x) = \lambda_1$ in I_1. Se ϕ è la funzione semplice $\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{I_k}(x)$, allora definiremo *integrale di ϕ nell'intervallo* $[a, b[$, il numero

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k m(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_{k-1})$$

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $I = [a, b[$ e limitata. Sia $\Im^+$ o $\Im^+(f)$ la classe di funzioni semplici in I maggioranti la funzione f, cioè funzioni semplici per cui $\phi(x) = 0$ è fuori di I e $\phi(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$ e $\Im^-$ o

$\Im^{-}(f)$ funzioni semplici minoranti, tali che $\psi(x) = 0$ è fuori di I e $\psi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in I$.
Notiamo che queste classi non sono vuote: se $|f(x)| \leq M$ in $[a, b[$, allora la funzione $\phi = M\phi_{[a,b[}$ è maggiorante e $\psi = -M\phi_{[a,b[}$ è minorante. Si nota che se $\phi \in \Im^{+}$ e $\psi \in \Im^{-}$ allora $\psi \leq \phi$ in I, e di conseguenza, $\int_a^b \psi dx \leq \int_a^b \phi dx$. Da ciò si può derivare che

$$\sup_{\psi \in \Im^{-}} \int_a^b \psi \, dx \leq \inf_{\phi \in \Im^{+}} \int_a^b \phi \, dx$$

Definizione 55 (Funzione integrabile). *Una funzione f, definita in un intervallo $I = [a, b[$ e limitata, si dice integrabile in $[a, b[$ se*

$$\sup_{\psi \in \Im^{-}} \int_a^b \psi \, dx = \inf_{\phi \in \Im^{+}} \int_a^b \phi \, dx$$

Se ciò accade, il loro valore comune si chiamerà integrale della funzione f esteso all'intervallo $[a, b[$ e si indicherà

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

Teorema 22. *Condizione necessaria e sufficiente affichè una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a, b[$ e limitata, sia integrabile in $[a, b[$ è che per ogni $\epsilon > 0$ esistano una funzione semplice maggiorante $\bar{\phi}$ e una funzione minorante $\bar{\psi}$ tali che*

$$\int_a^b \bar{\phi} \, dx - \int_a^b \bar{\psi} \, dx < \epsilon$$

Più in generale è possibile scrivere:
Condizione necessaria e sufficiente affichè una funzione f, definita in un intervallo $[a, b[$ e limitata, sia integrabile in $[a, b[$ è che esistano una successione ϕ_h di funzioni maggioranti e una successione ψ_h di funzioni minoranti

tali che

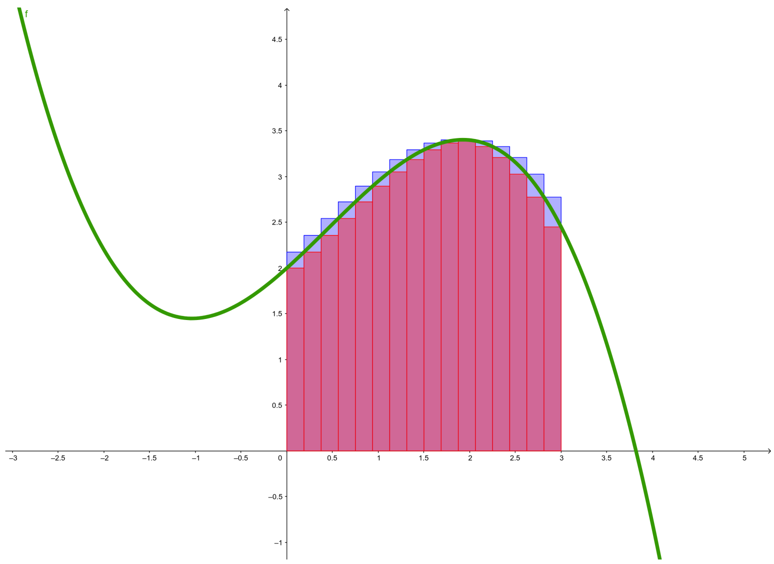
$$\lim_{h\to\infty}\left(\int_a^b \phi_h\,dx - \int_a^b \psi_h\,dx\right) = 0$$

Se ciò accade si avrà

$$\int_a^b \psi_h\,dx \le \int_a^b f\,dx \le \int_a^b \phi_h\,dx$$

e quindi

$$\lim_{h\to\infty}\int_a^b \phi_h\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_a^b \psi_h\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_a^b f\,dx$$



Funzioni Integrabili

Teorema 23. *Una funzione* f *continua in* $[a,b]$ *è integrabile in* $[a.b[$.

Dimostrazione. Una funzione è uniformemente continua in $[a,b]$, il che significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$

tale che se I è un intervallo contenuto in $[a,b]$ di ampiezza minore di δ, l'oscillazione $\sup_I(f) - \inf_I(f)$ sarà minore di ϵ. Dividendo l'intervallo $[a,b]$ in n sotto intervalli $I_1,\dots,I_n$ ognuno con ampiezza minore di δ, poniamo

$$M_k = \sup_{I_k}(f(x))$$

e

$$m_k = \inf_{I_k}(f(x))$$

è quindi possibile scrivere

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} M_k \phi_{I_k}$$

e

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} m_k \phi_{I_k}$$

In base a quanto detto precedentemente. è possibile scrivere

$$M_k - m_k < \epsilon$$

e di conseguenza

$$\int \phi\, dx - \int \psi\, dx = \sum_{k=1}^{n} [M_k - m_k] m(I_k) < \epsilon \sum_{k=1}^{n} m(I_k) = \epsilon(b-a)$$

Essendo state verificate le condizioni di integrabilità, la funzione f è dunque integrabile. $\square$

Un esempio di funzione non integrabile è la funzione *di Dirichlet* che è definita come

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sapendo che f è 1 per ogni numero razionale e 0 per ogni numero irrazionale, allora se P è una partizione di n intervalli di $[a,b]$ allora, $M_k = \sup_{I_k} = 1$ e $m_k = \inf_{I_k} = 0$, ne segue che ogni intervallo di lunghezza $\neq 0$ contiene sia numeri razionali che irrazionali. Quindi, la somma superiore sarà pari a 1 e la somma inferiore pari a 0 per ogni partizione di P di $[0, 1]$, di conseguenza le due somme non potranno mai essere uguali.

6.11.2 Teorema fondamentale del calcolo

Teorema 24 (Della media integrale). *Se $f(x)$ è una funzione integrabile in $[x_1, x_2[$, posto*

$$m = \inf_{[x_1,x_2[} f(x) \quad \text{e } M = \sup_{[x_1,x_2[} f(x)$$

si ha

$$m \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \leq M$$

Se poi f è continua, esiste un punto ζ compreso tra x_1 e x_2 tale chapter

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = f(\zeta)$$

Dimostrazione. Supponendo che $x_1 < x_2$ si ha $m \leq f(t) \leq M$ $\forall t \in [x_1, x_2[$. Integrando si ottiene

$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \leq M(x_2 - x_1)$$

Dividendo tutto per $x_2 - x_1$ si ottiene

$$m \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \leq M$$

Se però $x_1 > x_2$ si ottiene

$$m \leq \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_2}^{x_1} f(t)\, dt \leq M$$

che però è identica alla precedente perché

$$\int_a^b h(z) = - \int_b^a h(z)$$

e quindi

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

Per dimostrare

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = f(\zeta)$$

supponiamo che $f(x)$ sia continua in $[x_1, x_2[$, il valore di

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

è compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f, e per il teorema dei valori intermedi, esisterà un punto ζ in cui $f(x)$ assume quel valore. $\square$

Teorema 25 (Teorema fondamentale calcolo integrale). *Sia $f(x)$ una funzione continua e limitata in $[a, b[$. La sua funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile, e si ha $F'(x) = f(x)$.
Se poi $G(x)$ è una funzione derivabile e $G'(x) = f(x)$ allora si ha $F(x) = G(x) - G(a)$

Dimostrazione. La dimostrazione di

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è conseguenza del teorema della media integrale, infatti

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t)\,dt = f(\zeta)$$

dove ζ è un punto compreso tra x e $x+h$. Quando h tende a 0, ζ tende a x. Per la continuità della funzione f, $f(\zeta)$ tenderà a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(X)}{h} = f(x)$$

Quindi la funzione $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è $f(x)$

Per dimostrare $F(x) = G(x) - G(a)$, supponiamo che $G(x)$ sia una funzione che verifica la relazione $G'(x) = f(x)$. Si ha allora $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ e cioè la derivata è nulla in $[a, b[$. Da ciò si deduce che $G(x) - F(x)$ è costante ed è uguale al suo valore nel punto a dove vale $G(a)$ dato che

$$F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Dunque $G(x) - F(x) = G(a) \Rightarrow F(x) = G(x) - G(a)$ $\square$

Tali teoremi ci suggeriscono che se si conosce una funzione $G(x)$ che abbia derivata $f(x)$, cioè **una primitiva** di $f(x)$, allora si conosce anche la funzione integrale $F(x) = G(x) - G(a)$, e quindi il calcolo dell'integrale sarà ricondotto alla ricerca di una sua primitiva. Questo tipo di integrale prende il nome di *integrale indefinito* e si indica

$$\int f(x)\, dx$$

6.11.3 Schema generale di calcolo

Dai teoremi precedenti possiamo, quindi, estrapolare uno schema per aiutarci nel calcolo di un integrale definito in un intervallo $[a, b]$ della funzione f come segue:

1. Trovare una primitiva $G(x)$ della funzine f, cioè una funzione tale che $G'(x) = f(x)$

2. Calcolare $G(b) - G(a)$ ottenendo il valore dell'integrale

In formule, ciò che è stato appena scritto, si può riscrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

dove G è ovviamente una primitiva

Integrazione per sostituzione

Le primitive che riusciamo ad ottenere direttamente da una derivata sono poche, è spesso più utile osservare che la derivata della funzione composta $F(g(x))$ è $F'(g(x))g'(x)$ Da ciò

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$$

Sostituendo $g(x)$ con u, è possibile calcolare

$$\int f(u)\,du = F(u)$$

e sostituire poi u con $g(x)$. Quindi la formula generale di sostituzione è

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad \text{con } u = g(x) \quad \text{e } du = g'(x)dx$$

Integrazione per parti

Per l'integrale del prodotto di due funzioni non ci sono regole utilizzabili, ma un aiuto viene dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$f'(x)g'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Se si integrano entrambi i membri ricordando che l'integrale di una derivata è la funzione stessa

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\ dx + \int f'(x)g(x)\ dx$$

e quindi

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\ dx$$

Tale procedimento non risolve interamente l'integrale ma ci può aiutare semplificandolo.

Integrazione di funzioni razionali

Integrare funzioni razionali può diventare complesso con il crescere della molteplicità delle radici di questa. Facendo riferimento però a casi semplici, possiamo cercare di scrivere la funzione

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

come somma di *frazioni parziali*, cioè, frazioni del tipo

$$\frac{c}{x+a}$$

A questo punto però si presentano situazioni differenti, in base al grado rispettivo tra numeratore e denominatore:

1. $(P(x) > Q(X))$: il grado del numeratore è maggiore al grado del denominatore

2. $(P(x) = Q(X))$: il grado del numeratore e del denominatore coincidono

3. $(P(x) < Q(X))$: il grado del denominatore è maggiore al grado del numeratore

e per ogni situazione presentata esiste una metodologia di risoluzione per facilitare il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Caso 1

Per calcolare questo tipo di integrale ci sono due metodi alternativi: nel primo si esegue la divisione tra $P(x)$ e $Q(x)$ sostituendo il risultato direttamente nell'integrale. Nel secondo si utilizza il *principio di identità* dei polinomi.

Vediamo nel dettaglio il metodo della divisione con un esempio.

Dato l'integrale

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx$$

si può notare che il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore qui è possibile procedere.

$$
\begin{array}{c|l}
x^3+3x^2+0x+0 & \quad x^2+1 \\ \cline{2-2}
 & \\
-x^3+0+0-x & x+3 \leftarrow \ \text{quoziente} \\
0+3x^2-x+0 & \\
0-3x^2+0-3 & \\ \cline{1-1}
 & \\
0+0-x-3 \leftarrow \ \text{resto} &
\end{array}
$$

Da tale divisione quindi possiamo riscrivere la funzione originale come

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}$$

ottenendo

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int x+3\,dx + \int \frac{-x-3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}\log(x^2-1) - 3\arctan(x) + c$$

Se fosse stato usato il principio di intentità dei polinomi il risultato ovviamente sarebbe stato identico ma si sarebbe svolto come segue:

$$GRADO(x^3-3x^2) - GRADO(x^2-1) = 3-2 = 1$$
$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$
$$x^3+3x^2 = (ax+b)(x^2+1)+cx+d$$

da qui si può determinare a, b, c, d

$$x^3+3x^2 = (ax+b)(x^2+1)+cx+d \equiv ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d$$

che tramite un sistema di 4 equazioni in 4 incognite si ottengono i valori di a, b, c, d ottenendo

$$x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}$$

Caso 2

In questo caso non ci sono regole definite perchè potrebbe essere possibile semplificare i due polinomi facendo dei raccoglimenti, oppure in casi estremi è comunque possibile utilizzare il metodo della divisione tra polinomi.

Caso 3

Ricordando il *teorema fondamentale dell'algebra*, che afferma che un polinomio di grado n ammette esattamente n radici, e utilizzandolo per scomporre il polinomio $Q(x)$ nella forma

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}$$

si prova a scrivere la funzione integranda nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

Essendo i valori di A distinit e reali, si cercano utilizzando due metodologie.

La prima consiste nel molteplicare entrambi i membri dell'equazione

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

per $x-\alpha_h$ (con $h = 1, 2, 3, \dots, k$) per tutte le k radici ottenendo:

$$\frac{P(x)(x-\alpha_h)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)} = \frac{A_1(x-\alpha_h)}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_h(x-\alpha_h)}{x-\alpha_h} + \dots + \frac{A_k(x-\alpha_h)}{x-\alpha_k}$$

Se per ogni radice si calcola il limite per $x \to \alpha_h$ si ottengono k limiti della forma

$$\lim_{x\to\alpha_h} \frac{(x-\alpha_h)P(x)}{Q(x)} = A_h$$

Si osservi che ogni volta al denominatore manca il termine $x-\alpha_h$. Dal calcolo di tutti questi limiti otteniamo il valore di tutte le costanti k A.

Il secondo metodo consiste nell'utilizzare il prinicipo di identità dei polinomi, andando a calcolare tutte le costanti k A utilizzando un sistema lineare di k equazioni in k incognite. Supponendo che la funzione integranda si possa scrivere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

e sommando i termini del secondo membro dell'equazione appena scritta si ottiene

$$P(x) = A_1[(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)] + A_2[(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_k)] + \dots +$$

$$+A_k[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{k-1})]$$

A questo punto per il principio di identità dei polinomi si ottiene un sistema di k equazioni in k incognite, che risolvendolo si ottengono i valori di tutte le k A costanti

6.11.4 Integrali impropri

Se si volesse calcolare l'integrale di una funzione non limitata o in un intervallo non limitato, le regole finora date, non sarebbero applicabili. Per ovviare a tale problema esisete una categoria di integrali appositi a questo scopo detti *integrali impropri*.

Definizione 56 (Integrale improprio in $[a,b[$). *Una funzione $f(x)$ definita in $]a,b[$ e non limitata vicino all'estremo a, si dirà integrabile in senso improprio in $[a,b[$ se f è integrabile in ogni intervallo $[t,b[$ con $a<t<b$ e se esiste finito il limite*

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Il valore di questo limite è l'integrale tra a e b della funzione f

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Allo stesso modo se $f(x)$ non è limitata vicino al secondo estremo b, si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

Se uno dei qualsiasi limiti sopra descritti non esistesse o fosse infinito, si dice che la funzione $f(x)$ non è integrabile in $[a,b[$

Definizione 57 (Integrale improprio in $[a,+\infty[$). *Sia $f(x)$ una funzione definita nella semiretta $[a,+\infty[$, si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty[$ se f è integrabile in ogni intervallo $[a,t[$ con $t>a$ e se esiste finito il limite*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

In questo caso si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Cosa analoga, con i rispettivi cambiamenti, è la definizione per l'integrale tra $-\infty$ e a.

Se tali limiti non esistessero o fossero infinito, allora $f(x)$ non è integrabile in $[a,+\infty[$ (o $]-\infty,a]$).

Nel caso si voglia calcolare una $f(x)$ che non è limitata in nessun estremo, oppure si voglia integrare tra $-\infty$ e $+\infty$, l'idea è di usare, nei rispettivi casi, una delle definizioni sopra date, spezzando l'intervallo in due. Nel caso in cui almeno uno dei due integrali non esistesse allora tutta la funzione si dice non integrabile.

6.12 Equazioni Differenziali

In analisi matematica un'equazione differenziale è un'equazione che lega una funzione incognita alle due derivate, e se la funzione è di una sola variabile e l'equazione ha solo derivate ordinarie allora l'equazione si dice *equazione differenziale ordinaria*. Le equazioni differenziali sono le equazioni più studiate ed utilizzate in tutti gli ambiti dove la matematica viene usata come strumento. Nel caso più semplice nell'equazione compare solo la derivata e tale tipo di equazione viene risolta utilizzando il *teorema fondamentale del calcolo integrale* e le sue soluzioni hanno la forma

$$f(t) = f_0 + G(t)$$

dove f_0 è costante e G è la primitiva di g e quindi

$$G(t) = \int g(t)\, dt$$

Definizione 58 (Equazione differenziale ordinaria). *Sia $F\colon \Omega \subseteq \mathbb{C}^{n+2} \to C$ con $\Omega \neq \emptyset$ un insieme aperto e connesso e $n \in \mathbb{N}$ Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine n una relazione del tipo*

$$F\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^n(x)\right) = 0$$

dove $u^i(x)$ si dice derivata i–esima della funzione $u(x)$

Definizione 59 (Equazione differenziale lineare). *Si dice equazione differenziale lineare se F è combinazione lineare di $u, u', \ldots, u^n$, cioè*

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = s(x) + b_0(x)u + b_1(x)u' + \ldots + b_n(x)u^{(n)}$$

o

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)u^{(i)} + r(x)$$

dove $r(x), a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x) \in C^0(I)$

6.12.1 Equazioni differenziale I ordine

Definizione 60 (Equazione differenziale lineare del I ordine). *Si chiama equazione differenziale lineare del primo ordine l'equazione della forma*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

dove $a(x)$ *e* $b(x)$ *sono funzioni continue in un intervallo fissato. La funzione* $y = y(x)$ *è l'incognita dell'equazione differenziale*

Teorema 26 (Soluzioni dell'equazione differenziale lineare). *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono espresse da*

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

dove $A(x)$ *è una primitiva di* $a(x)$

Le equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee sono della forma

$$y(x) = ce^{A(x)}$$

in quanto $b(x) = 0$, e dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e c una costante arbitraria

Equazioni a variabili separabili

Definizione 61. *Si dicono equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili le equazioni del tipo*

$$y' = f(x)g(y)$$

dove $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni continue.

Se $g(y_0) = 0$ per un qualche valore reale di y_0, allora la funzione costante $y(x) = y_0$ è soluzione dell'equazione differenziale. Se invece $g(y)$ non si annulla, possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione ed integrare rispetto a x ottenendo

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int f(x)\, dx$$

Indicando con $F(x)$ la primitiva di $f(x)$ e con $G(y)$ la primitiva della funzione $\frac{1}{g(y)}$ con y una variabile indipendente, la relazione si può anche scrivere come

$$G(y(x)) = F(x) + c$$

6.12.2 Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy consiste nel trovare la soluzione di un'equazione differenziale di ordine n

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

tale che soddisfi le condizioni iniziali

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y_1$$

$$\dots$$

$$y^{n-1}(a) = y_{n-1}$$

Il teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy dimostra che la soluzione esiste ed è localmente unica, se f rispetta opportune ipotesi. Inoltre, è sempre possibile ridurre un problema di ordine n ad un sistema di n equazioni differenziali ordinarie, ponendo

$$z_1 = y(x)$$

$$z_2 = z_1'(x) = y'(x)$$

$$\dots$$

$$z_n(x) = z_{n-1}'(x) = y^{n-1}(x)$$

Teorema 27 (Teorema di Cauchy per le equazioni lineari del I ordine). *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia x_0 un punto di un intervallo dove $a(x)$ e $b(x)$ sono continue. Per ogni numero reale y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy

Dimostrazione. Sapendo che l'equazione differenziale ha infinite soluzioni, occorre provare, però che tra queste ne esiste una, ed una sola, con la proprietà che $y(x_0) = y_0$. Per questo si prende $A(x)$ come primitiva di $a(x)$ cosicchè $A(x_0) = 0$, quindi

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

Ora si scrive la formula

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

mettendo in evidenza la costante che viene dall'integrazione indefinita

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int e^{-A(x)} b(x)\, dx \right)$$

Dato che $A(x_0) = 0$, si avrà che $y(x_0) = e^0(x + 0) = c$ quindi esiste una sola costante c per cui

$$c = y_0 = y(x_0)$$

□

Provando a dare un significato geometrico al problema di Cauchy, si suppone $a(x)$ e $b(x)$ continue su tutto l'asse reale. Il teorema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine, afferma che, per ogni punto (x_0, y_0) passa una ed una sola soluzione (curva integrale) dell'equazione differenziale in

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Tenendo conto che per ogni punto (x_0, y_0), il coefficiente angolare $y'(x_0)$ della retta tangente a tali curve è determinato dall'equazione differenziale stessa, si avrà

$$y_0' = a(x_0)y(x_0) + b(x_0) = a(x_0)y_0 + b(x_0)$$

6.12.3 Equazioni differenziale II ordine

Un'equazione differenziale del secondo ordine è un'equazione nella quale, oltre all'incognita $y(x)$, compaiono anche la derivata prima $y'(x)$ e la derivata seconda $y''(x)$.

Definizione 62 (Equazione differenziale lineare del II ordine). *Un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è del tipo*

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a e b costanti e $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I.

Le costanti a e b si dicono *coefficienti* dell'equazione, mentre $f(x)$ è il termine noto. L'equazione viene detta omogenea se $f(x) = 0$ Una funzione $y = y(x)$ è soluzione dell'equazione se è derivabile due volte e se $y(x)$, $y(x)'$, $y(x)''$ soddisfano l'equazione per ogni x dell'intervallo fissato. L'insieme di tutte le soluzioni si chiama *integrale generale*.

7 Successioni e Serie

Una successione (o sequenza infinita) può essere definita, intuitivamente, come un elenco ordinato infinito numerabile di oggetti, chiamati *termini* della successione. In contrasto con gli insiemi numerabili, per una successione è rilevante sia l'ordine che la cardinalità dei termini, e tali caratteristiche distinguono una *n-upla* ordinata da un insieme costituito da n elementi. Le successioni sono largamente studiate nel calcolo infinitesimale in quanto il loro domino $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e quindi è possibile rappresentarle in un codominio di $\mathbb{R}$

Definizione 63 (Successione). *Una successione di elementi di un dato insieme A è un'applicazione dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in A*

$$f \colon N \to A$$

L'elemento a_n della successione è quindi l'immagine del numero $n$secondo la funzione f

$$a_n = f(n)$$

7.0.1 Limite di Successione

Definizione 64 (Limite di successione convergente). *Un numero reale a è limite della successione a_n se qualunque sia $\epsilon > 0$, esiste un numero υ tale che $a-\epsilon < a_n < a+\epsilon$ ($|a_n-a| < \epsilon$) per ogni $n > \upsilon$*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \upsilon \mid \forall n > \upsilon\ .\ |a_n - a| < \epsilon$$

Definizione 65 (Successione convergente). *Una successione si dice convergente se*

$$\exists a \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

Teorema 28 (Unicità del limite). *Una successione convergente non può avere due limiti distinti*

Dimostrazione. Supponendo per assurdo che esistano due limiti distinti, $a_n \to a$ e $a_n \to b$ con $a \neq b$ e ponendo $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$ si ottiene

$$\exists \upsilon_1 \mid \forall n > \upsilon_1\ .\ |a_n - a| < \epsilon$$

$$\wedge$$

$$\exists \upsilon_2 \mid \forall n > \upsilon_1\ .\ |a_n - b| < \epsilon$$

Ponendo ora, $\upsilon = \max\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ le due relazioni sopra valgono contemporaneamente e sia ha

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \leq |a-a_n|+|a_n-b| = |a_n-a|+|a_n-b| < \epsilon+\epsilon = |a-b|$$

ottenendo che $|a-b| < |a-b|$ che è assurdo. $\square$

Definizione 66 (Limite di successione divergente). *Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ se qualunque sia $M > 0$ esiste un numero υ tale che $a_n > M$ per ogni $n > \upsilon$*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \upsilon \mid \forall n > \upsilon \,.\, a_n > M$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \upsilon \mid \forall n > \upsilon \,.\, a_n < -M$$

Definizione 67 (Successione divergente). *Una successione si dice divergente se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$$

Definizione 68 (Successione irregolare). *Una successione si dice irregolare o indeterminata se*

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Successioni limitate

Definizione 69 (Successione limitata). *Una successione a_n si dice limitata se esiste un numero reale M tale che*

$$|a_n| \leq M \equiv -M \leq a_n \leq M$$

Esistono successioni limitate irregolari, cioè successioni limitate che non ammettono limite

Teorema 29 (Successione convergente è limitata). *Ogni successione convergente è limitata*

Dimostrazione. Supponendo che a_n converga ad a e scegliendo un $\epsilon = 1$ □

Teoremi di confronto

Teorema 30 (Teorema della permanenza del segno). *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ *allora esiste un numero tale che* $a_n > 0$ *per ogni* $n > N$

Dimostrazione. Sia $a > 0$ e un numero $\epsilon = \frac{a}{2}$, allora esiste un numero N per cui $|a_n - a| < \frac{a}{2}$ per ogni $n > N$. Ciò significa che

$$\forall n > N \Rightarrow a - \frac{a}{2} < a_n < \frac{a}{2} + a \equiv a_n > \left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} > 0$$

□

Teorema 31 (Teorema dei Carabinieri). *Siano* a_n, b_n, c_n *tre successioni tali che* $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, a_n \leq c_n \leq b_n$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$ *allora anche* c_n *è convergente e* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

Dimostrazione. Ragionando per ipotesi:

$$\forall \epsilon > 0 \left[(\exists \upsilon_1 \colon \forall n > \upsilon_1 \,.\, |a_n - a| < \epsilon) \wedge (\exists \upsilon_2 \colon \forall n > \upsilon_2 \,.\, |b_n - a| < \epsilon)\right]$$

Quindi se $n > \upsilon = \max\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ avremmo

$$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$$

Quindi come volevasi dimostrare avremmo $\forall n > \upsilon \,.\, |c_n - a| < \epsilon$ □

7.0.2 Successioni Monotone

Definizione 70 (Monotonia). *Sia* a_n *una successione:*

- *si dice* ***strettamente crescente*** *se:* $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, a_n < an + 1$
- *si dice* ***crescente*** *se:* $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, a_n \leq an + 1$
- *si dice* ***strettamente decrescente*** *se:* $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, a_n > an + 1$

- *si dice* ***decrescente*** *se:* $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, a_n \geq an + 1$

a_n *si dice monotona se soddisfa una delle condizioni sopra citate*

Se una successione è sia crescente che decrescente contemporaneamente, allora si dice **costante**.

Teorema 32 (Successioni monotone). *Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione limitata è convergente cioè ammette limite finito*

Dimostrazione. Sia a_n crescente e limitata. Fissato $l = \sup_n a_n$ e $\epsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore esiste un $v \in \mathbb{N}$ tale che

$$l - \epsilon < a_v$$

Per $n > v$ risulta che $a_v < a_n$ e quindi

$$l - \epsilon < a_v \leq a_n \leq l < l + \epsilon$$

ergo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

$\square$

Definizione 71 (Sottosuccessione o successione estratta). *Sia* a_n *una successione* $\mathbb{N} \to X$ *e* n_k *una successione crescente* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Si dice sottosuccessione o successione estratta*

$$a_n(n_k) \equiv a_{n_k}$$

Un esempio di estratta se a_n è la successione di numeri interi e $n_k = 2k$, l'estratta sarà $a_{n_k} = n_{2k}$ e cioè la successione dei numeri pari.

Teorema 33. *Se a_n converge verso a allora ogni estratta a_{n_k} converge verso a*

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$ esiste una k_0 tale che per ogni $n > k_0$ vale $|a_n - a| < \epsilon$. Se $k > k_0$ ed $n_k \geq k$ allora si avrà anche $n_k > k_0$ e quindi $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ □

Teorema 34 (Bolzano-Weierstrass). *Sia a_n una successione limitata, allora esiste almeno una sua estratta convergente*

Dimostrazione. Supponendo I l'insieme degli elementi di a_n, si distinguono due casi:

1. Se I è finito allora esiste almeno un elemento $a \in I$ che si ripete infinite volte, cioè che esistono infiniti indici di n_k tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$ $a_{n_k} = a$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$

2. Se I è infinito allora bisogna osservare che essendo a_n limitata, esisterà un intervallo $[x, y]$ in cui esista I. Se si divide l'intervallo $[x, y]$ in due infinite volte, e si sceglie sempre la parte che contiene I, otterremmo una successione di intervalli

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$$

avente le proprietà $y_n - x_n = \frac{y-x}{2^n}$ e $I \cap I_n$ è infinito. Tale successione, essendo limitata, e crescente per costruzione, e per il teorema sulle successioni monotone, ammette limite finito con valore l. Sia a_{n_k} il primo termine appartenente a $[x_k, y_k]$ con $n_k > n_{k-1}$, implica che a_{n_k} è estratta da a_n perciò

$$x_k \leq a_{n_k} \leq \left(y_k = x_k + \frac{y-x}{2^k} \right)$$

Passando al limite e utilizzando il teorema dei carabinieri si ottiene

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l$$

$\square$

7.0.3 Massimo e Minimo Limite

Definizione 72 (Minimo Limite). *Si chiama minimo limite o limite inferiore di una successione a_n mediante la posizione*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} a_n = l'$$

Definizione 73 (Massimo Limite). *Si chiama massimo limite o limite superiore di una successione a_n mediante la posizione*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} a_n = l'$$

7.0.4 Successioni di funzioni

Sia f_n una successione di funzioni in $C([0,1];\mathbb{R})$, ovvero tale che f_n è una funzione continua per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che, per ogni $x \in [0,1]$, esiste un numero reale $f(x)$ tale che $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, ovvero si ha che f_n converge puntualmente a f. Per sapere quando la f è a sua volta continua è necessario capire che si tratta del problema di "scambio di limiti"; infatti, la continuità di una funzione è definita tramite un limite, e quindi ci stiamo chiedendo se valga la seguente uguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0} [lim_{n \to +\infty} f_n(x)] \overset{?}{=} \lim_{n \to +\infty} [lim_{x \to x_0} f_n(x)]$$

Infatti, "espandendo" le parentesi quadre, ed usando la continuità di f_n, tale uguaglianza si riscrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Ora, lo scambio di limiti non è sempre possibile, ed anche quando è possibile non necessariamente le proprietà possedute da f_n per ogni n sono conservate dal limite f.

8 Taylor

Un metodo per approssimare una funzione derivabile nel punto x_0 con un polinomio è dato dal polinomio

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dove $\cong$ indica la differenza tra il primo ed il secondo membro del polinomio. Tale differenza è possibile scriverla come $R_1(x)$, che significa resto di valore 1, e tenderà a zero più rapidamente di $x - x_0$. Quindi riscrivendo il polinomio con la differenza si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$$

Sapendo che una funzione si può derivare anche per gradi $n > 1$, si cerca di capire se la funzione è scomponibile per polinomi di grado n e resto $R_n(x)$.

Definizione 74 (Formula di Taylor). *Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in x_0, si ottiene*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione. Supponendo che $f^n(x)$ sia continua in x_0 e sapendo $R_n(x)$ occorre dimostrare

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}]}{(x - x_0)^n} = 0$$

Notando che il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e per risolvere si utilizza il teorema di de l'Hôpital. Dovendo derivare rispetto a x si nota che la derivata di $f(x_0)$ è 0 mentre la derivata di $\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$ è

$$\frac{f^n(x_0)n(x - x_0)^{n-1}}{n!} = \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

Risolvendo il limite con la funzione calcolata si ottiene nuovamente la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando quindi n volte il teorema di de l'Hôpital, si ottiene il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{n!}$$

Tale limite sarà 0 in quanto la funzione in x_0 è continua.

□

Teorema 35. *Se esistono le derivate della funzione $f(x)$ nel punto x_0, allora vale che*

$$f^i(x_0) = 0 \begin{cases} f^{i+1}(x_0) > 0 \Rightarrow & \textit{minimo relativo in } x_0 \\ f^{i+1}(x_0) < 0 \Rightarrow & \textit{massimo relativo in } x_0 \\ f^{i+1}(x_0) = 0 \Rightarrow f^{i+2}(x_0) \end{cases} \quad \forall i \in [1, n]$$

8.1 Resto di Peano

Considerando il polinomio $p(x)$ di grado n a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

sarà indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ e le sue derivate di ordine maggiore di n sono tutte nulle, inolte si può verificare che $p(0) = a_0$ e $p^k = k!a_k$ per ogni $k \leq n$. Ricavando i valori dei vari a_k possiamo riscrivere

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n$$

Sostituendo 0 con il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{p^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ne segue che un polinomio di grano n è univocamente determinato se sono noti i valori che assumono le sue n derivate in x_0. Cercando di determinare un polinomio $p_n(x)$ di grado minore o uguale a n si ottiene che $p_n(x_0) = f(x_0)$ $p'_n(x_0) = f'(x_0)$ $p''_n(x_0) = f''(x_0)$ $p^n_n(x_0) = f^n(x_0)$ e quindi il polinomio risulterà

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tale polinomio prende il nome di **polinomio di Taylor** di ordine n e centro della funzione $f(x)$ in x_0.

Si definisce funzione resto la funzione $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$

Teorema 36 (Formula di Taylor con resto di Peano). *Se f è derivabile n volte in x_0 allora il resto $R_n(x)$ è infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x - x_0)^n$*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione. Dimostrazione uguale a quella data per la formula di Taylor ad inizio capitolo, tranne per la supposizione che la derivata n-esima sia continua in x_0. (Non si suppone che la derivata sia continua in x_0) $\square$

Definizione 75 (o piccolo). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite in un intorno di x_0 (con eccezzione eventuale del punto stesso, non nulle per $x \neq x_0$. Si dice che $f(x)$ è per $x \to x_0$ un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ o che $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ se $g(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to x_0$* e $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{per } x \to x_0$$

Con tale definizione si può scrivere il resto di Peano come $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ e di conseguenza la formula di Taylor si può riscrivere anch'essa come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Nel caso si utilizzi la formula di Taylor con centro $x_0 = 0$ allora tale formula prende il nome di *formula di Mac Laurin*.

8.2 Resto di Lagrange

Definizione 76 (Formula di Taylor con resto di Lagrange). *Se f è derivabile $n + 1$ volte in $[a, b]$, con derivata $f^{(n+1)}$ continua allora per ogni $x \in [a, b]$ esiste un numero x_1 compreso tra x_0 ed x_1 tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

Appendice

A

A.1 Simboli

Alfabeto Greco			
α	Alpha	$\ni$	Ni
β	Beta	ξ	Xi
γ	Gamma	o	O
δ	Delta	π	Pi
ϵ	Epsilon	ρ	Rho
ζ	Zeta	σ	Sigma
η	Eta	τ	Tau
θ	Theta	υ	Upsilon
ι	Iota	ϕ	Phi
κ	Kappa	χ	Chi
λ	Lambda	ψ	Psi
μ	Mu	ω	Omega

Altri Simboli			
∞	Infinito	$\iff$	Se e solo se
$\circ$	Composizione	$\Rightarrow$	Implica
$\vee$	OR	$\lim_{x\to x_0}$	Limite
$\wedge$	AND	$\frac{d}{dx}$	Derivata
$\cup$	Unione	$\int$	Integrale
$\cap$	Intersezione	$\neq$	Diverso
$\subset$	Sottoinsieme	$\sum$	Sommatoria
$<$	Minore	$\prod$	Produttoria
$>$	Maggiore	$\mathbb{N}$	Insieme Naturali
$\leq$	Minore o uguale	$\mathbb{R}$	Insieme Reali
$\geq$	Maggiore o uguale	$\mathbb{C}$	Insieme Complessi
$\exists$	Esiste	$\forall$	Per ogni

B

B.1 Proprietà degli Esponenti

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ . \ x^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ . \ 1^x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ . \ x^1 = x$$

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R} \ . \ a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\forall x, a, b \in \mathbb{R} \ . \ a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R} \ . \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\forall x, a, b \in \mathbb{R} \ . \ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ . \ a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$\forall x, a, b \in \mathbb{R} \ . \ (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \land \forall n \in \mathbb{N} \ . \ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \land \forall n, m \in \mathbb{N} \ . \ x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

B.2 Proprietà dei Logaritmi

$$\forall x, a \in R^+ \ . \ a^{log_a(x)} = x$$

$$\forall x, a \in R^+ \ . \ log_a(a^x) = x$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \ . \ log_a(1) = 0$$

$$\forall a, x, y \in \mathbb{R}^+ \ . \ log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$$

$$\forall a, x, y \in \mathbb{R}^+ \ . \ log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$$

$$\forall a, x, y \in \mathbb{R}^+ \land \forall \alpha \in \mathbb{R} \ . \ log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot log_a(x)$$

$$\forall a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+ \ . \ log_a(x) = \frac{1}{log_x a} = -log_{\frac{1}{x}}(x)$$

$$\forall a, b, x \in \mathbb{R}^+ \ . \ log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$$

B.3 Proprietà Trigonometriche

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sec = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x-+y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + tan(y)}{1 - (\tan(x)\cdot\tan(y))}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - tan(y)}{1 + (\tan(x)\cdot\tan(y))}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)cos(x)$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\tan(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

C

C.1 Limiti

Regole Generali	
$\frac{a\neq 0}{0} = \pm\infty$	$\frac{0}{a\neq 0} = 0$
$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

Forme indeterminate	
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
$0 \cdot \infty$	1^∞
0^0	∞^0
$+\infty - \infty$	

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x)^{\frac{1}{f(x)}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \log_a e \qquad \forall a > 0 \land a \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln(a) \qquad \forall a > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^a \log_b f(x) = 0 \qquad \forall a > 0 \land b > 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$$

C.2 Derivate

Funzione	**Derivata**
$k \in \mathbb{R}$	0
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]$
$f(x)^a$	$a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln(a)}$

$\sin((f(x))$	$cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
$\tan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$\cot(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$
$\arcsin(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arccos(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arctan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

C.3 Integrali

Integrale	Primitiva
$\int k \cdot f(x)dx$	$k \cdot \int f(x)dx$
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$	$F(g(x)) + c$
$\int f(x) \pm g(x)dx$	$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx$	$\frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx$	$\sqrt{f(x)} + c$
$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x)dx$	$-\cos(f(x)) + c$
$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x)dx$	$\sin(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}dx$	$\tan(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}dx$	$-\cot(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx$	$\arcsin(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{sqrt1-f(x)^2}dx$	$-\arccos(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx$	$\arctan(f(x)) + c$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx$	$e^{f(x)} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c$

Indice analitico

U

V

Bibliografia

Anauntta (2019). *Is Dirichlet function Riemann integrable?* URL: https://math.stackexchange.com/q/1964512.

Enrico, Giusti (2002). *Analisi Matematica 1 - Terza Edizione*. Milano: Bollati Boringhieri.

Marcellini Paolo, Sbordone Carlo (2002a). *Calcolo*. Napoli: Liguori.

— (2002b). *Elementi di Analisi Matematica Uno*. Napoli: Liguori.

OpenSchool (n.d.). *Flesso*. URL: http://www.elenet.net/OpenSchool/Matematica/Classe%204%20quarta/Flessi/flessi.htm.

Wikipedia (2020). *Limite Notevole*. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Limite_notevole.

Wikipedia (2019). *Cuspide*. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Cuspide_(matematica).

Wikipedia (2015). *Punto Angoloso*. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Punto_angoloso.

Wikipedia (2020). *Funzione convessa*. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Derivata#Convessit%C3%A0.