Relazione stima della traccia di una matrice,Ferrari Luca S4784573

Il codice implementa :

- una ,matrice composta da vector di float (MatrixB) 300 x 300 riempita tramite la funzione riempi() con numeri float casuali compresi tra 0 e 1.
- La matrica a= $b^t b$ è stata implementata trasponendo la matrice matrixB tramite la funzione trasposta, mentre il prodotto tra matrici è stato eseguito tramite la funzione prodottoMatrix()
- La traccia della matrice a è stata calcolata sommando tutti gli elementi in diagonale tramite la funzione traccia()
- La (norma di Frobenius $)^2$ è stata calcolata tramite la funzione normaF() facendo la doppia sommatoria di i=1 to n e r=1 to n a^2_{ir} (due cicli for annidati)
- A questo punto ho implementato MonteCarloTrace

Algoritmo 9.1. *MonteCarloTrace* $(\mathbf{A}, M)$
Input: $\mathbf{A}$, matrice $n \times n$ semi-definita positiva e M, numeri di campioni
Output: $\langle X \rangle_M$, stima di $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ e σ^2_M, varianza campionaria della stima

---

$\bar{X}_0 = 0$
for $m = 1, \ldots, M$
1. campiona $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{R}^n$ vettore di Rademacher
2. ottieni $X_m = \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u}$ dall'oracolo
3. $\langle X \rangle_m = \langle X \rangle_{m-1} + (X_m - \langle X \rangle_{m-1})/m$

$\sigma^2_M = \sum_{m=1}^{M} (X_m - \langle X \rangle_M)^2 / (M-1)$

I risultati ottenuti:

```
M= 5
La traccia stimata media e: 31992.7
Il quadrato della norma di Frobenius e: 5.09686e+008
La varianza campionaria media della stima e: 5.41898e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 2.03874e+008


M= 10
La traccia stimata media e: 29784.4
Il quadrato della norma di Frobenius e: 5.09686e+008
La varianza campionaria media della stima e: 2.55396e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.01937e+008


M= 25
La traccia stimata media e: 30808.7
Il quadrato della norma di Frobenius e: 5.09686e+008
La varianza campionaria media della stima e: 2.1555e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 4.07749e+007


M= 100
La traccia stimata media e: 30723.6
Il quadrato della norma di Frobenius e: 5.09686e+008
La varianza campionaria media della stima e: 2.91692e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.01937e+007
```

Per la legge dei grandi numeri la probabilita che al crescere di M la stima della traccia ottenuta coma media campionaria si discosti per piu di epsilon dal valor vero diventa arbitrariamente piccola. Tuttavia, dalla disuguaglianza di Chebyshev si vede che M dipende da 1/epsilon^2 . Se e richiesta una precision è molto spinta, il numero M di esperimenti potrebbe risultare insensatamente grande.

Chebyshev La varianza σ^2 di una distribuzione binomiale con m lanci e probabilità $p = 1/n$ è

$$\sigma^2 = m\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{m}{n}.$$

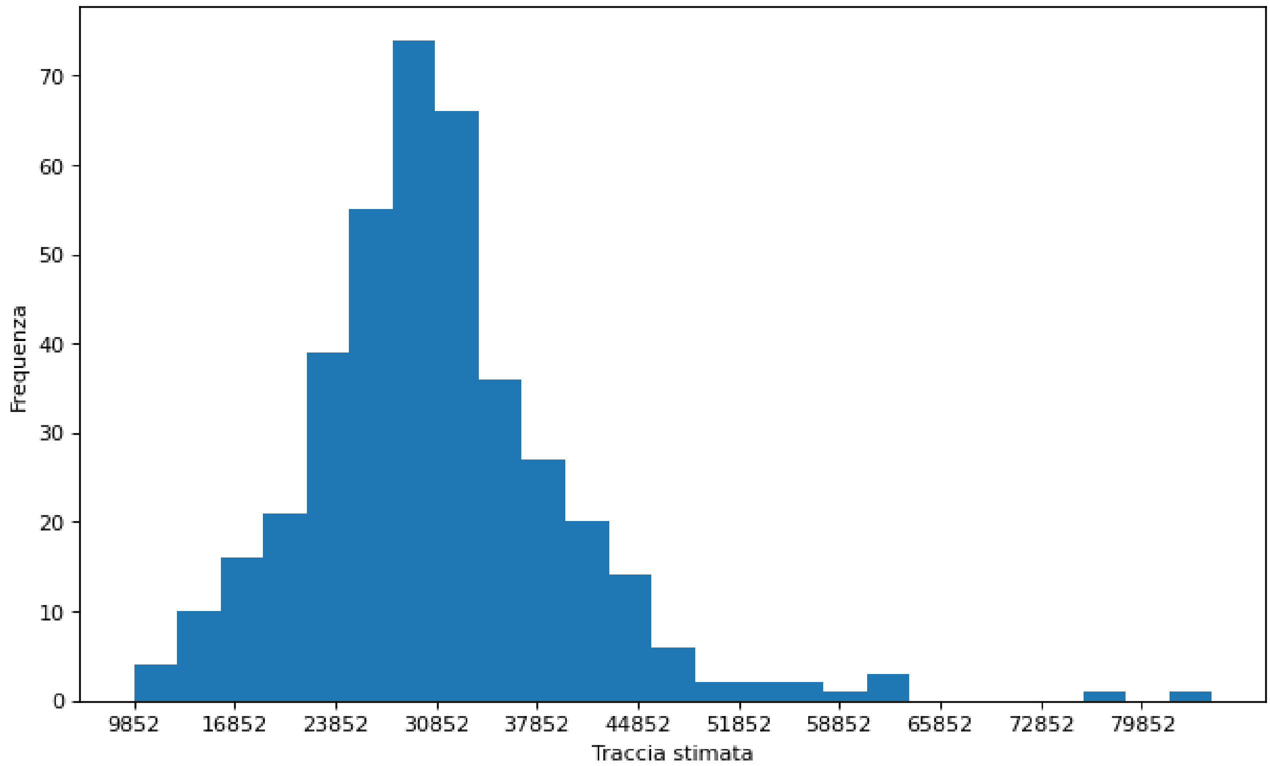
Pertanto, la disuguaglianza (17) per $\mu = m/n = \ln n$ e $\epsilon = 9 \ln n$ diventa

$$\Pr\{X \geq \ln n + 9 \ln n\} \leq \frac{\ln n}{81 \ln^2 n} = \frac{1}{81 \ln n}$$

Come possiamo notare la traccia della matrice rimane sempre intorno ai 30000

la varianza campionaria media della stima è sempre minori o uguali del doppio della norma di Frobenius al quadrato fratto M.

grafico ottenuto:



Come possiamo notare la frequenza maggiore dei valori della tracci stimata si aggira ai 30000.