Übungsserie 7

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie ihre manuelle Lösungen für die Aufgaben 1 und 2 in die Datei *Gruppe_S7_Aufg1.pdf* bzw. *Gruppe_S7_Aufg2.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrem Python-Skript *Gruppe_S7_Aufg3.py* in einer ZIP-Datei *Gruppe_S7.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (45 Minuten):

Eine Regierung benötigt Impfstoff für die Bevölkerung, spezifisch für die drei Altersgruppen: Erwachsene (E), Teenager (T) und Kleinkinder (K). Da die Zeit drängt, wird bei drei Herstellern geordert, welche den Impfstoff in unterschiedlich grossen Produktionseinheiten liefern. Eine Produktionseinheit beinhaltet dabei die folgende Anzahl Impfdosen für die drei Altersgruppen:

- bei Hersteller A: 20'000 E, 10'000 T, 2'000 K
- bei Hersteller B: 30'000 E, 17'000 T, 3'000 K
- bei Hersteller C: 10'000 E, 6'000 T, 2'000 K

Die Bevölkerung setzt sich folgendermassen zusammen: 5.20 Mio. Erwachsene, 3.00 Mio Teenager, 0.76 Mio. Kleinkinder. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Wieviele Produktionseinheiten müssen bei jedem Hersteller bestellt werden, wenn genug Impfstoff für die gesamte Bevölkerung verfügbar sein soll? Es müssen alle drei Hersteller berücksichtigt werden und es darf keinen Überschuss geben. Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf und berechnen Sie die Lösung manuell mit dem Gauss-Algorithmus (ohne Pivotisierung). Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Ihrer Pathon-Funktion aus der letzten Serie.

b) Geben Sie, basierend auf den unter a) durchgeführten Rechenschritten, die LR-Zerlegung von A an.

c) Kurz vor Bestellungsaufgabe stellt sich heraus, dass die Bevölkerungszahlen auf überholten Daten basieren. Eine Neuschätzung ergibt: 5.720 Mio. Erwachsene, 3.300 Mio Teenager, und 0.836 Mio. Kleinkinder. Stellen Sie mit den unter b) berechneten Matrizen L und R zwei lineare Gleichungssysteme auf und berechnen Sie daraus für die neuen Bevölkerungszahlen manuell die benötigten Produktionseinheiten.

Aufgabe 2 (ca. 45 Min.):

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 2.2 & 3.6 \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 1.2 & 2.0 & 5.8 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie manuell die LR-Zerlegung von A. Verwenden Sie dafür den Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Berücksichtigen Sie dabei, dass Sie nun auch die Permutionsmatrix P berechnen müssen, so dass $LR = PA$ gilt (siehe Skript). Dieses Verfahren ist auch als Spalten- bzw. Kolonnenmaximumstrategie bekannt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) manuell die Lösung von $Ax = b$.

c) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem Resultat der Python-Funktion *scipy.linalg.lu()*. Importieren Sie dafür die Python Library Scipy. Was stellen Sie bzgl. Vergleich der Resultate L, R, P fest?

Aufgabe 3 (45 Minuten):

Die Anzahl der Tage pro Jahr mit extremer UV-Belastung in Hawaii sind in der untenstehenden Tabelle für einige Jahre abgebildet[1].

Jahr	1997	1999	2006	2010
Anzahl Tage	150	104	172	152

Schreiben Sie ein Python-Skript, welches Ihnen die foglenden Aufgaben löst. Benutzen Sie für die Auswertung des Polynoms für gegebene $x-$Werte die Python-Funktion *numpy.polyval()* (lesen Sie die Beschreibungen der Funktion im Numpy-Manual nach).

a) Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades, welches exakt durch diese Beobachtungspunkte verläuft. Verschieben Sie dafür die Zeitachse, so dass das 1997 dem Jahr 0 entspricht, 1999 dem Jahr 2 etc. und stellen das entsprechende lineare Gleichungssystem auf, um die Koeffizienten des Polynoms zu bestimmen. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Ihrer Funktion *Serie6_Aufg2()* aus der letzten Serie und fertigen Sie einen Plot an, der die Datenpunkte (mit den Original-Jahreszahlen auf der x-Aches) und Ihr Polynom zeigt. Stellen Sie dabei das Polynom mit einer ausreichend fein aufgelösten Zeitachse dar (z.B. mit einer Schrittweite von 0.1 Jahren).

b) Bestimmen Sie das Polynom nochmals, dieses Mal aber ohne Verschiebung der Zeitachse. Plotten Sie deses Polynom ebenfalls. Was stellen Sie fest, und woran liegt das? Schreiben Sie Ihren Kommentar ins Skript.

c) Für die Jahre 2003 und 2004 gibt es von der Messstation keine Daten. Was für Schätzwerte bekämen Sie anhand Ihres unter a) berechneten Polynoms für diese beiden Jahre?

d) Benutzen Sie die Python-Funktion *numpy.polyfit()* (lesen Sie die Beschreibungen der Funktion im Numpy-Manual nach) und bestimmen Sie damit erneut die Koeffizienten des Polynoms bzw. die Schätzwerte für die Jahre 2003 und 2004. Vergleichen Sie mit Ihrer Lösung aus den Aufgaben a) und c), z.B. grafisch.

[1] Daten von http://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/stratosphere/uv_index/uv_annual.shtml

Eine Regierung benötigt Impfstoff für die Bevölkerung, spezifisch für die drei Altersgruppen: Erwachsene (E), Teenager (T) und Kleinkinder (K). Da die Zeit drängt, wird bei drei Herstellern geordert, welche den Impfstoff in unterschiedlich grossen Produktionseinheiten liefern. Eine Produktionseinheit beinhaltet dabei die folgende Anzahl Impfdosen für die drei Altersgruppen:

- bei Hersteller A: 20'000 E, 10'000 T, 2'000 K
- bei Hersteller B: 30'000 E, 17'000 T, 3'000 K
- bei Hersteller C: 10'000 E, 6'000 T, 2'000 K

Die Bevölkerung setzt sich folgendermassen zusammen: 5.20 Mio. Erwachsene, 3.00 Mio Teenager, 0.76 Mio. Kleinkinder. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Wieviele Produktionseinheiten müssen bei jedem Hersteller bestellt werden, wenn genug Impfstoff für die gesamte Bevölkerung verfügbar sein soll? Es müssen alle drei Hersteller berücksichtigt werden und es darf keinen Überschuss geben. Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf und berechnen Sie die Lösung manuell mit dem Gauss-Algorithmus (ohne Pivotisierung). Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Ihrer Pathon-Funktion aus der letzten Serie.

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}20'000\\10'000\\2'000\end{matrix}}^{HS_A} & \overbrace{\begin{matrix}30'000\\17'000\\3'000\end{matrix}}^{HS_B} & \overbrace{\begin{matrix}10'000\\6'000\\2'000\end{matrix}}^{HS_C} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5'200'000 \\ 3'000'000 \\ 750'000 \end{pmatrix}$$

Erwachsene = E
Teenager = T
Kleinkinder = K

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 30 & 10 & 5'200 \\ 10 & 17 & 6 & 3'000 \\ 2 & 3 & 2 & 750 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2II - I \\ 10III - I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 30 & 10 & 5200 \\ 0 & 4 & 2 & 800 \\ 0 & 0 & 10 & 2400 \end{array}\right)$$

$x_3 = 2400 / 10 = 240$ Typ C

$x_2 = (800 - (2 \cdot 240)) / 4 = 80$ Typ B

$x_1 = ((5200 - (10 \cdot 240) - (30 \cdot 80)) / 20 = 20$ Typ A

Produktionseinheiten

$$\underline{\underline{x = \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \\ 240 \end{pmatrix}}}$$

b) Geben Sie, basierend auf den unter a) durchgeführten Rechenschritten, die LR-Zerlegung von A an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 30 & 10 & 5'200 \\ 10 & 17 & 6 & 3'000 \\ 2 & 3 & 2 & 760 \end{array}\right) \begin{array}{l} II - \frac{1}{2} I \\ III - \frac{1}{10} I \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 30 & 10 & 520 \\ 0 & 2 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 240 \end{array}\right)}_{R}$$

c) Kurz vor Bestellungsaufgabe stellt sich heraus, dass die Bevölkerungszahlen auf überholten Daten basieren. Eine Neuschätzung ergibt: 5.720 Mio. Erwachsene, 3.300 Mio Teenager, und 0.836 Mio. Kleinkinder. Stellen Sie mit den unter b) berechneten Matrizen L und R zwei lineare Gleichungssysteme auf und berechnen Sie daraus für die neuen Bevölkerungszahlen manuell die benötigten Produktionseinheiten.

$$\overbrace{L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{y}}^{A} = b$$

$\underline{Ly = b}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \cdot y_1 = 5720 \\ y_2 = \frac{1}{2} \cdot 5720 - 1 \cdot y_2 = 3300 \\ y_3 = \frac{1}{10} \cdot 5720 - 0 \cdot 440 + 1 \cdot y_3 = 836 \end{array}\right\} y = \begin{pmatrix} 5720 \\ 440 \\ 264 \end{pmatrix}$$

$\underline{Rx = y}$

$$\begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5720 \\ 440 \\ 264 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 20 \cdot x_1 + 30 \cdot 88 + 10 \cdot 264 = 5720 \\ x_2 = 2 \cdot x_2 + 254 = 440 \\ x_3 = 1 \cdot x_3 = 264 \end{array}\right\} x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix}$$