Analisi prestazionale di problemi di facility location

Implementazione dell’algoritmo di ascesa duale e confronto tra rilassamento lagrangiano e rilassamento lineare.

Luca Fiscariello
0318266

Obiettivi

- Implementazione dell'algoritmo di ascesa duale per un problema di facility location nella versione capacitata e non capacitata.
- Valutazione delle prestazioni degli algoritmi implementati.
- Individuazione del miglior lower bound calcolato tramite rilassamento lineare e rilassamento lagrangiano.

Metodologia

- Scrittura del modello “manuale”.
- Trascrizione del modello su un solver commerciale. In particolare è stato utilizzata l’API python offerta da **Gurobi**.
- Generazione dei casi di test sfruttando un approccio statistico.
- Generazione di grafici per interpretare i risultati.

Scrittura del modello

I due modelli su cui si basa il progetto sono: il problema di facility location capacitato (CFL) e il problema di facility location non capacitato(UFL). Per ciascuno di questi due modelli sono state implementate diverse varianti del problema

CFL	UFL
Modello base	Modello base
Modello rilassato linearmente	Modello rilassato linearmente
Modello rilassato lagrangeanamente	Modello rilassato lagrangeanamente
Algoritmo di ascesa duale	Algoritmo di ascesa duale

Scrittura del modello : UFL

$$min \sum_{u \in S} X_u F_u + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} C_{uv}$$

```python
# Modello
m = gp.Model("facility")
m.ModelSense = GRB.MINIMIZE
m.Params.Method = 2
```

$$\sum_{u \in S} Y_{uv} = 1 \quad \forall v \in D$$

```python
# Vincoli sul soddisfacimento della domanda dei clienti
# Sommatoria su u (yuv) == 1
m.addConstrs((y.sum('*', v) == 1 for v in clients), "Demand")
```

$$X_u - Y_{uv} \geq 0 \quad \forall uv \in S \, x \, D$$

```python
# Vincoli che legano le variabili di xu e yuv
# yuv<=xu
m.addConstrs((x[u]-y[u, v] >= 0 for u in facility for v in clients), "Continuity")
```

$$X_u, Y_{uv} \in \{0,1\}$$

```python
# Variabile decisionale: x[u] == 1 se centro u è attivo.
x = m.addVars(facility, vtype=GRB.BINARY, obj=setup_costs, name="X")

# Variabile decisionale : y[u][v] == 1 se centro u serve cliente v
y = m.addVars(facility, clients, vtype=GRB.BINARY, obj=allocation_costs, name="Y")
```

Scrittura del modello : UFL lagrange

$$Vincoli\ rilassati:\ X_u - Y_{uv} \geq 0 \quad \forall\, uv \in S\ x\ D$$

$$min \sum_{u \in S} X_u F_u + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} C_{uv} - \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} \lambda_{uv} (X_u - Y_{uv})$$

$$min \sum_{u \in S} X_u \boxed{\left(F_u - \sum_{v \in D} \lambda_{uv}\right)} + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} \boxed{(C_{uv} + \lambda_{uv})}$$

```
x_moltiplicator = [self.setup_costs[u] - sum(lambda_vector) for u in facility]
```

```
y_moltiplicator = [self.allocation_costs[(self.client_number+1)*v + u] + lambda_vector[(self.client_number+1)*v + u] for v in clients for u in facility]
```

I vincoli sul soddisfacimento della domanda continuano ad essere presenti.

Così come quelli della binarietà delle variabili.

Scrittura del modello : UFL ascesa duale (1/2)

Primale

$$X \equiv \{X_a, X_b, X_c\}$$

$$Y \equiv \{Y_{a1}, Y_{a2}, Y_{b1}, Y_{b2}, Y_{c1}, Y_{c2}\}$$

$$Y_{a1} + Y_{b1} + Y_{c1} = 1 \rightarrow Z_1$$
$$Y_{a2} + Y_{b2} + Y_{c2} = 1 \rightarrow Z_2$$
$$X_a - Y_{a1} \geq 0 \rightarrow w_{a1}$$
$$X_a - Y_{a2} \geq 0 \rightarrow w_{a2}$$
$$X_b - Y_{b1} \geq 0 \rightarrow w_{b1}$$
$$X_b - Y_{b2} \geq 0 \rightarrow w_{b2}$$
$$X_c - Y_{c1} \geq 0 \rightarrow w_{c1}$$
$$X_c - Y_{c2} \geq 0 \rightarrow w_{c2}$$

Duale

$$max \quad Z_1 + Z_2$$

$$w_{a1} + w_{a2} \leq F_a$$
$$w_{b1} + w_{b2} \leq F_b$$
$$w_{c1} + w_{c2} \leq F_c$$
$$\boxed{Z_1 \leq C_{a1} + w_{a1}}$$
$$Z_2 \leq C_{a2} + w_{a2}$$
$$\boxed{Z_1 \leq C_{b1} + w_{b1}}$$
$$Z_2 \leq C_{b2} + w_{b2}$$
$$\boxed{Z_1 \leq C_{c1} + w_{c1}}$$
$$Z_2 \leq C_{c2} + w_{c2}$$

Generalizzazione

$$Z_1 \leq C_{a1} + w_{a1}$$
$$Z_1 \leq C_{b1} + w_{b1}$$
$$Z_1 \leq C_{c1} + w_{c1}$$

$$Z_1 = argmin\,(C_{a1} + w_{a1}, C_{b1} + w_{b1}, C_{c1} + w_{c1})$$
$$w_{a1} = \max(0, F_a - w_{a2})$$
$$w_{b1} = \max(0, F_b - w_{b2})$$
$$w_{c1} = \max(0, F_c - w_{c2})$$

$$Z_v = argmin_{u \in S}(C_{uv} + w_{uv})$$

$$w_{uv} = \max(0, F_u - \sum_{k \in D} w_{uk} + w_{uv})$$

Scrittura del modello : UFL ascesa duale (2/2)

Per implementare l'algoritmo è necessario inizializzare alcuni valori:

$$Inizializzo\ Z_v\ : min_{u \in S}(\ C_{uv})$$

$$Inizializzo\ w_{uv}:\ \max(0, F_u -\ C_{uv})$$

La rispettiva implementazione:

```
#Inizializzo zv al minimo di cuv scorrendo tutte le u
for v in range(len(c[0])):
    temp = []
    for u in range(len(c)):
        temp.append(c[u][v])

    z.append(min(temp))

#calcolo wuv=max(0,zv - cuv)
for u in range(len(c)):
    temp = []
    for v in range(len(c[0])):
        temp.append(max(0, z[v]-c[u][v]))

    w.append(temp)
```

Inizializzati i valori si procede con l'esecuzione:

$$Z_v = argmin_{u \in S}(\ C_{uv} + w_{uv})$$

$$w_{uv} =\ \max(0, F_u - \sum_{k \in D} w_{uk} +\ w_{uv}\ )$$

La rispettiva implementazione:

```
#calcolo deltauv
for u in range(len(c)):
    temp = []
    for v in range(len(c[0])):
        temp.append(f[v] - (sum_w - w[u][v]))
    delta.append(temp)

#trovo valori finali di zv come il minimo z[v] + delta[u][v] scorrendo le u
for v in range(len(c[0])):
    temp = []
    for u in range(len(c)):
        temp.append(z[v] + delta[u][v])

    z_final.append(min(temp))
```

Scrittura del modello : CFL

$$\min \sum_{u \in S} X_u F_u + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} C_{uv}$$

```
# Modello
m = gp.Model("facility")
m.ModelSense = GRB.MINIMIZE
m.Params.Method = 2
```

$$\sum_{u \in S} Y_{uv} = 1 \quad \forall v \in D$$

```
# Vincoli sulla capacità
# Sommatoria su v (yuv)*dv <= ku*xu
m.addConstrs((sum(y[u, v]*demands[v] for v in clients) <= capacity[u] * x[u] for u in facility), "Capacity")
```

$$\sum_{v \in D} Y_{uv} d_v \le X_u k_u \quad \forall u \in S$$

```
# Vincoli sul soddisfacimento della domanda dei clienti
# Sommatoria su u (yuv) == 1
m.addConstrs((y.sum('*', v) == 1 for v in clients), "Demand")
```

$$X_u, Y_{uv} \in \{0,1\}$$

```
# Variabile decisionale: x[u] == 1 se centro u è attivo.
x = m.addVars(facility, vtype=GRB.BINARY, obj=setup_costs, name="X")

# Variabile decisionale : y[u][v] == 1 se centro u serve cliente v
y = m.addVars(facility, clients, vtype=GRB.BINARY, obj=allocation_costs, name="Y")
```

Scrittura del modello : UFL lagrange

$$Vincoli\ rilassati: \sum_{v \in D} Y_{uv} d_v \leq X_u k_u \quad \forall\, u \in S$$

$$min \quad \sum_{u \in S} X_u F_u + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} C_{uv} - \sum_{u \in S} \lambda_u \left(X_u k_u - \sum_{v \in D} Y_{uv} d_v\right)$$

$$min \quad \sum_{u \in S} X_u \boxed{(F_u - \lambda_u k_u)} + \sum_{u \in S} \sum_{v \in D} Y_{uv} \boxed{(C_{uv} + d_v \lambda_u)}$$

```
x_moltiplicator = [self.setup_costs[u] - self.capacity[u]*lambda_vector[u] for u in facility]
```

```
y_moltiplicator = [self.allocation_costs[(self.client_number+1)*v + u] + lambda_vector[u]+self.demands[v] for v in clients for u in facility]
```

I vincoli sul soddisfacimento della domanda continuano ad essere presenti.

Così come quelli della binarietà delle variabili.

Scrittura del modello : CFL ascesa duale (1/2)

Primale

$$X \equiv \{X_a, X_b, X_c\}$$

$$Y \equiv \{Y_{a1}, Y_{a2}, Y_{b1}, Y_{b2}, Y_{c1}, Y_{c2}\}$$

$$Y_{a1} + Y_{b1} + Y_{c1} = 1 \quad \rightarrow \lambda_1$$

$$Y_{a2} + Y_{b2} + Y_{c2} = 1 \quad \rightarrow \lambda_2$$

$$X_a k_a - (Y_{a1} d_1 + Y_{a2} d_2) \geq 0 \quad \rightarrow \gamma_a$$

$$X_b k_b - (Y_{b1} d_1 + Y_{b2} d_2) \geq 0 \rightarrow \gamma_b$$

$$X_c k_c - (Y_{c1} d_1 + Y_{c2} d_2) \geq 0 \quad \rightarrow \gamma_c$$

Duale

$$max \quad \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\gamma_a k_a \leq F_a$$

$$\gamma_b k_b \leq F_b$$

$$\gamma_c k_c \leq F_c$$

$$\boxed{\lambda_1 - \gamma_a d_1 \leq C_{a1}}$$

$$\lambda_2 - \gamma_a d_2 \leq C_{a2}$$

$$\boxed{\lambda_1 - \gamma_b d_1 \leq C_{b1}}$$

$$\lambda_2 - \gamma_b d_2 \leq C_{b2}$$

$$\boxed{\lambda_1 - \gamma_c d_1 \leq C_{c1}}$$

$$\lambda_2 - \gamma_c d_2 \leq C_{c2}$$

Generalizzazione

$$\lambda_1 \leq C_{a1} + \gamma_a d_1$$

$$\lambda_1 \leq C_{b1} + \gamma_b d_1$$

$$\lambda_1 \leq C_{c1} + \gamma_c d_1$$

$$\lambda_1 = argmin\,(C_{a1} + \gamma_a d_1\,, C_{b1} + \gamma_b d_1\,, C_{c1} + \gamma_c d_1)$$

$$\gamma_a \leq \frac{F_a}{k_a}\,, \gamma_b \leq \frac{F_b}{k_b}\,, \gamma_c \leq \frac{F_c}{k_c}$$

$$\lambda_v = argmin_{\,u \in S}\,(C_{uv} + \gamma_u d_v)$$

$$\gamma_u \leq \frac{F_u}{k_u}$$

Scrittura del modello : CFL ascesa duale (2/2)

Due osservazioni:

- La domanda di un singolo cliente dovrebbe sempre essere più piccola della capacità di un centro.
- La soluzione del duale deve essere intera.

Combinando le osservazioni si ottiene:

$$\lambda_v = argmin_{\,u \in S} \left(C_{uv} + \frac{F_u}{k_u} d_v\right) \longrightarrow \lambda_v = argmin_{\,u \in S} \left(C_{uv} + \left\lceil \frac{F_u}{k_u} d_v \right\rceil\right)$$

La corrispondente implementazione :

```
#trovo valori finali di lv come c[u][v] + f[u] in corrispondenza del minimo c[u][v] + delta[u][v] scorrendo le u
for v in range(len(c[0])):
    temp = []
    temp_l = []
    for u in range(len(c)):
        temp.append(c[u][v] + delta[u][v])
        temp_l.append(c[u][v] + f[u])

    min_value = min(temp)
    min_pos = temp.index(min_value)
    l_final.append(temp_l[min_pos])
```

Generazione dei casi di test

I test sono stati generati seguendo due metodologie:

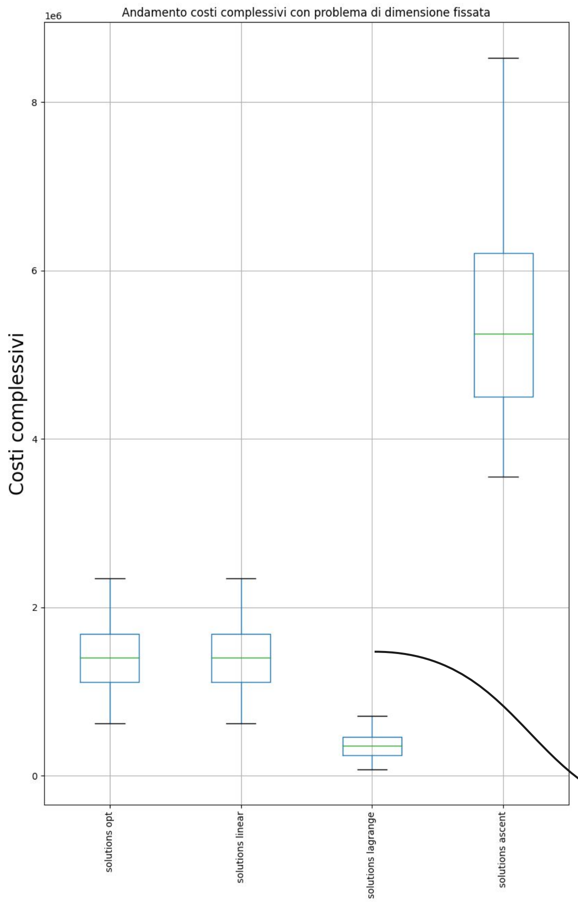
1. Fissata la dimensione del problema (numero di variabili decisionali) si fanno variare i parametri come i costi fissi associati a un centro o i costi di allocazione.
2. Si incrementa progressivamente la dimensione del problema e si analizzano le prestazioni.

L’analisi delle prestazioni riguarda la vicinanza alla soluzione ottima ma anche il tempo di esecuzione.

Generazione dei casi di test

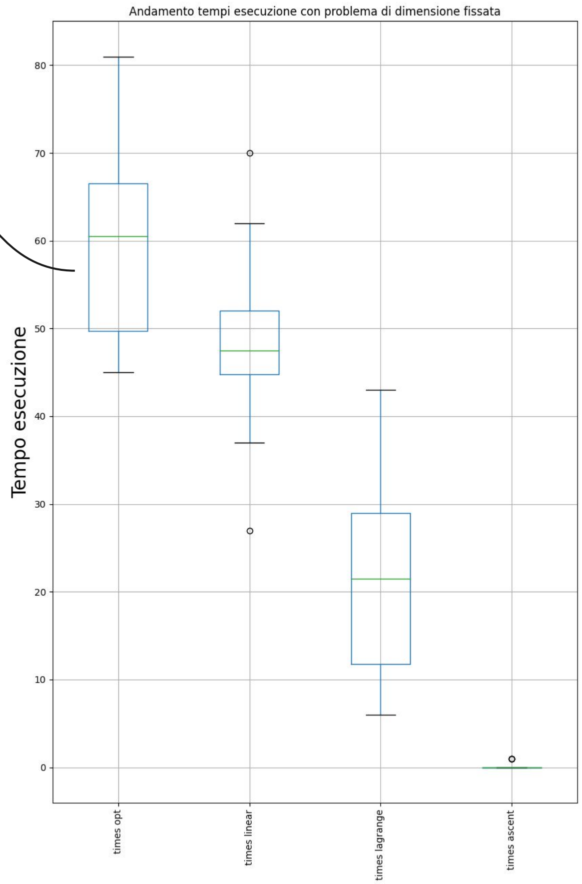
Come specificato in precedenza l’approccio applicato è statistico. I valori che verranno mostrati nei grafici non sono ottenuti da un’unica esecuzione, ma sono il risultato di più prove con parametri differenti. I parametri utilizzati nei test sono ottenuti da un **generatore pseudo-random multistream**.

UFL: dimensione fissata

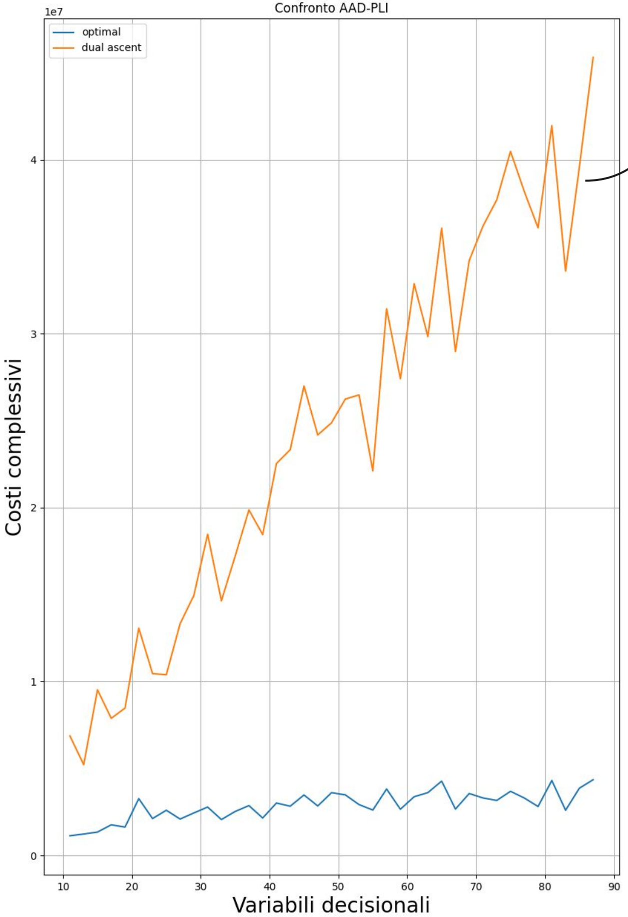


Mediamente il tempo necessario per calcolare l'ottimo del PLI è maggiore del tempo necessario per risolvere i rilassamenti.

I rilassamenti hanno mediamente valori più bassi della soluzione del PLI

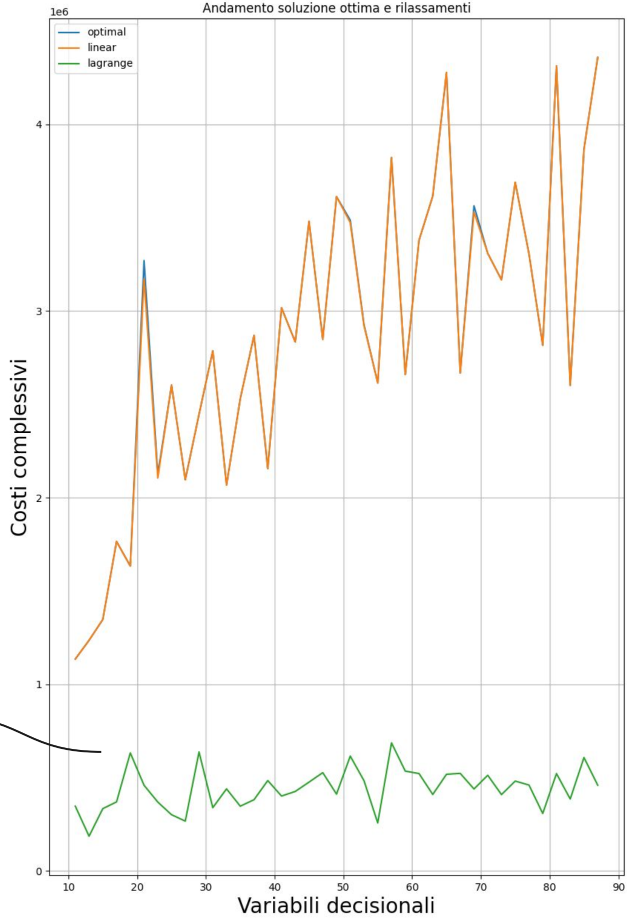


UFL: variando la dimensione (1/2)

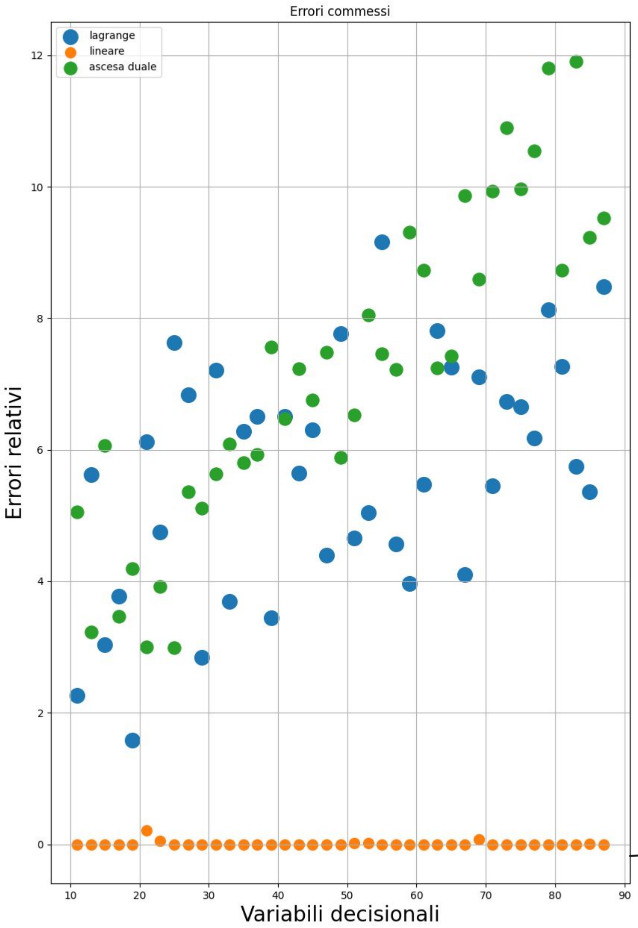


All’aumentare delle dimensioni del problema , AAD degrada le prestazioni.

Il rilassamento lineare segue perfettamente la soluzione del PLI. Il rilassamento lagrangiano ha prestazioni peggiori.

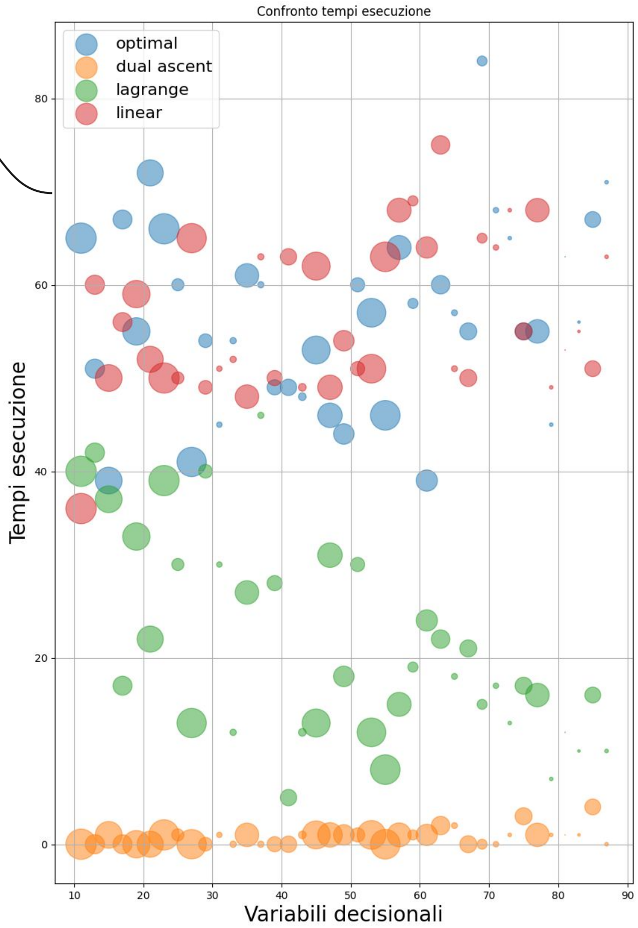


UFL: variando la dimensione (2/2)

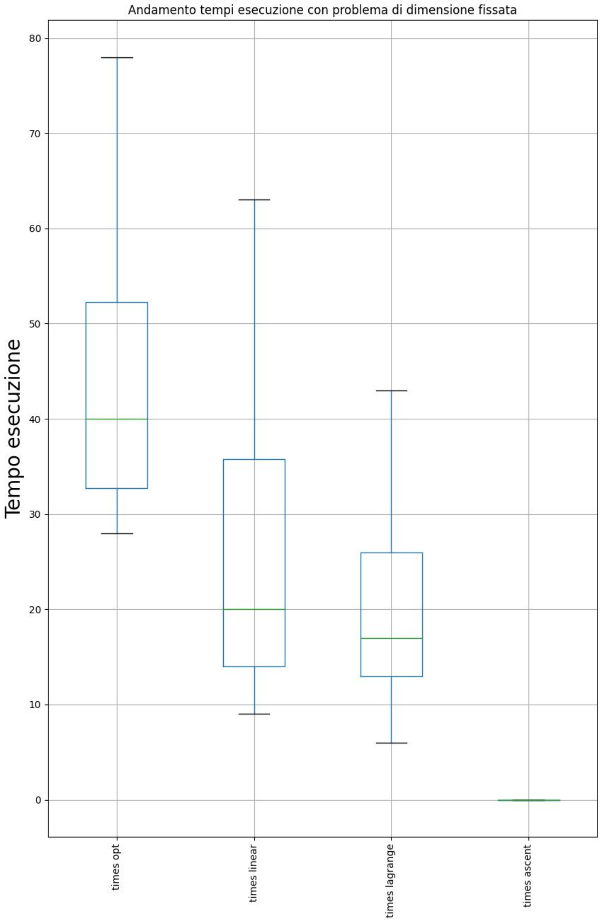


Il rilassamento lagrangeano è computazionalmente meno oneroso nel rilassamento lineare. AAD ha ottime prestazioni.

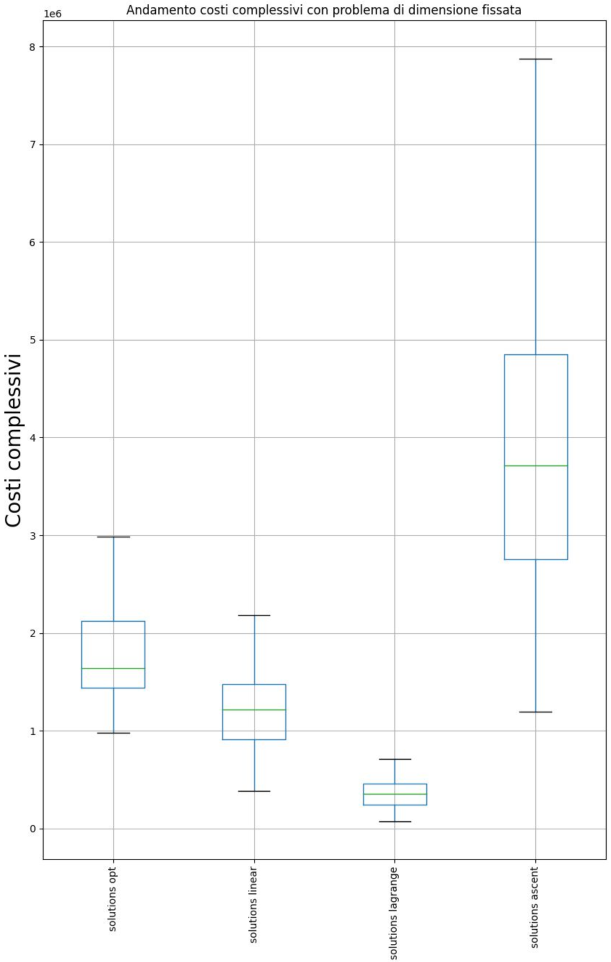
Ulteriore conferma del fatto che il rilassamento lineare segue perfettamente la soluzione del PLI.



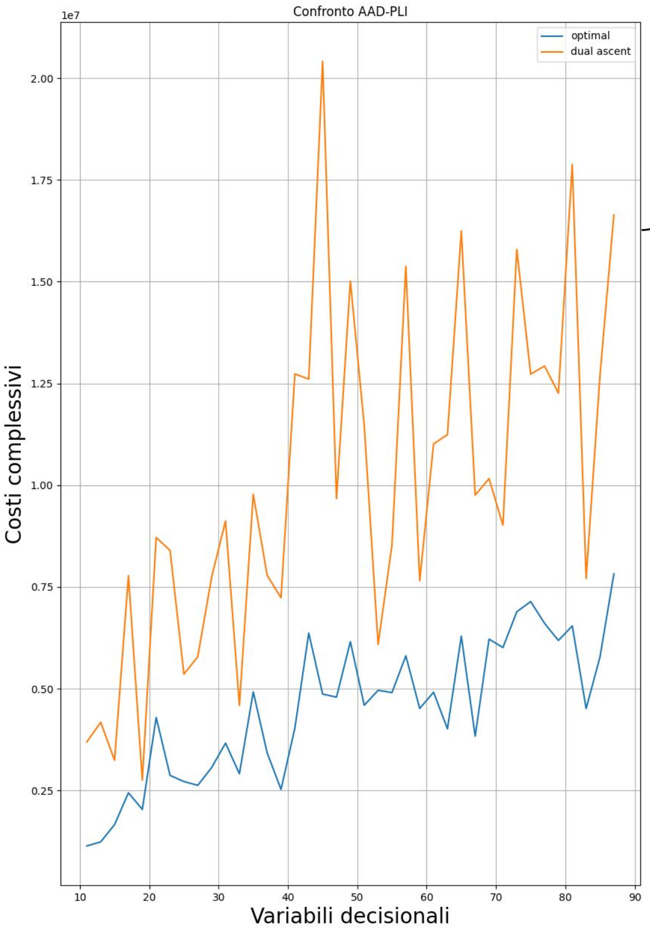
CFL: dimensione fissata



Stessi risultati
dell’analisi UFL

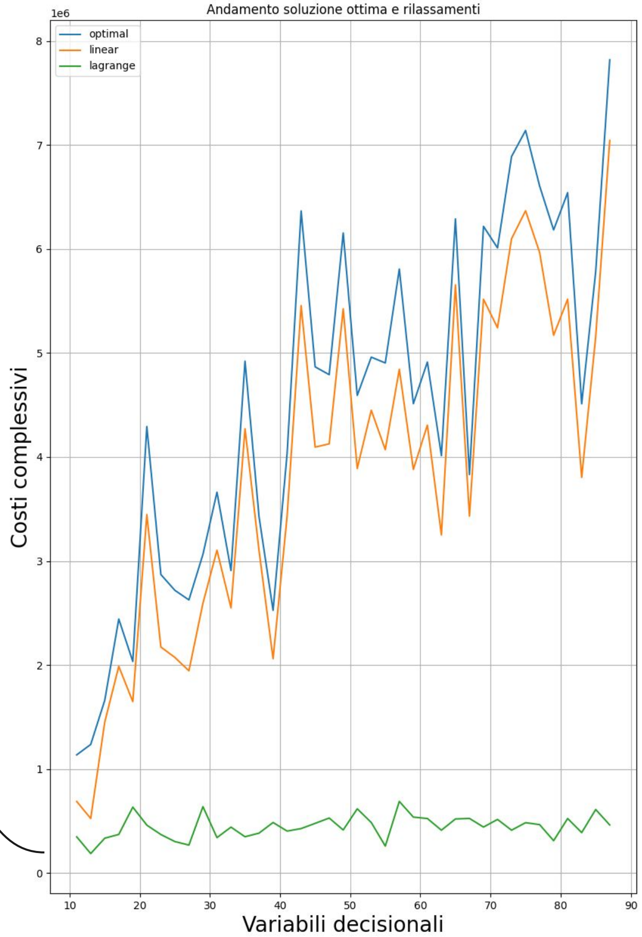


CFL: variando la dimensione (1/2)

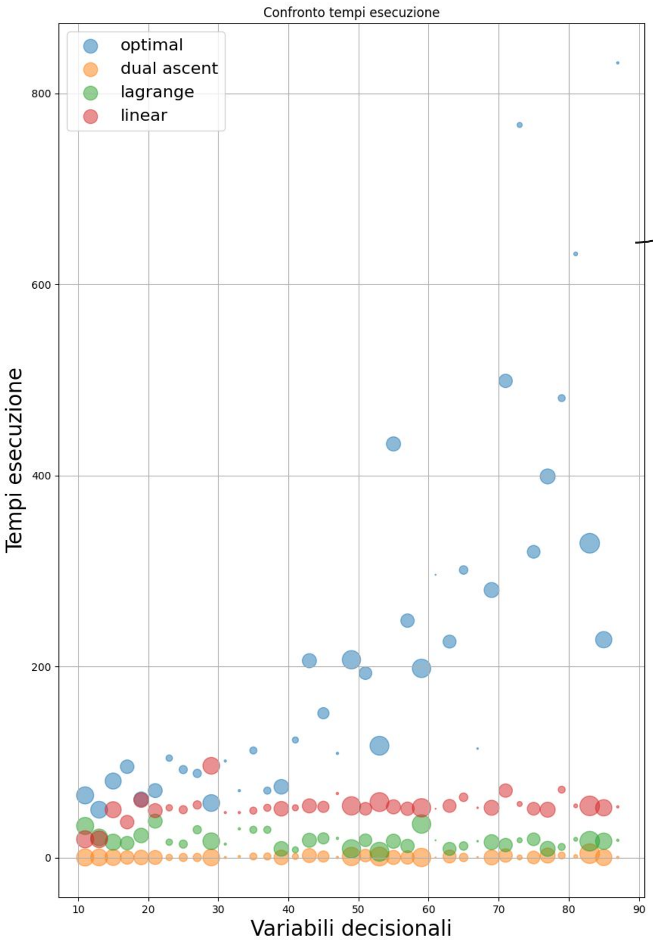


In questa versione del problema AAD segue bene la soluzione del PLI

Anche qui il rilassamento lineare è migliore di quello lagrangeano. Rispetto a UFL il rilassamento lineare non segue perfettamente la soluzione del PLI

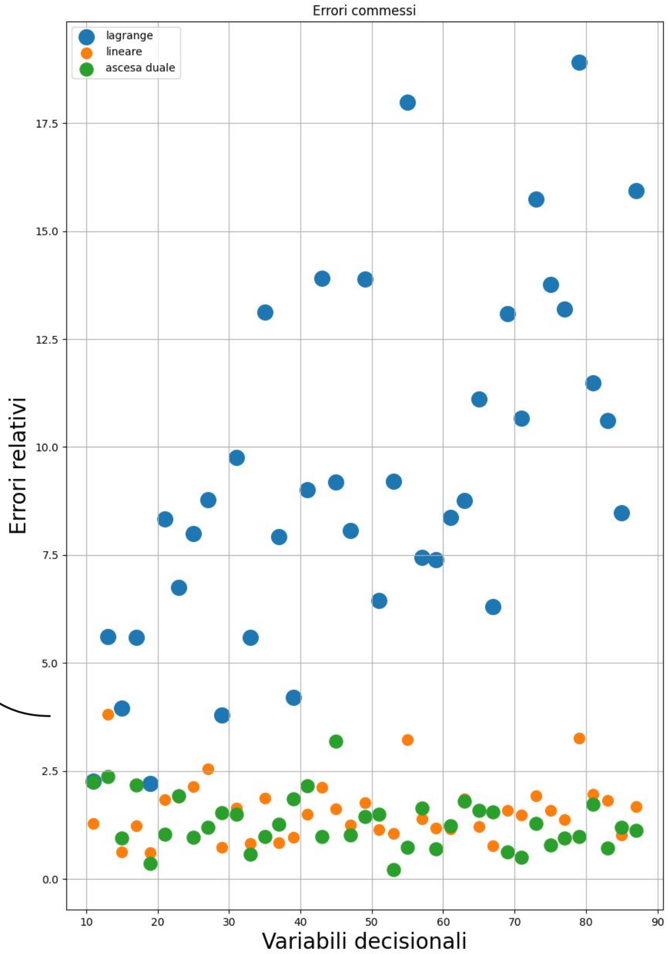


CFL: variando la dimensione (2/2)



Il tempo di esecuzione per trovare la soluzione del PLI cresce esponenzialmente.

Il rilassamento lagrangeano commette un errore in percentuale maggiore del rilassamento lineare.



Conclusioni

- Il rilassamento lineare permette di individuare un miglior lower bound rispetto al rilassamento lagrangeano, seppur più oneroso dal punto di vista computazionale.
- L'algoritmo di ascesa duale è poco oneroso dal punto di vista computazionale. Nella versione non capacitata non rappresenta una buona soluzione euristica. Nella versione capacitata l'algoritmo ha registrato prestazioni migliori.