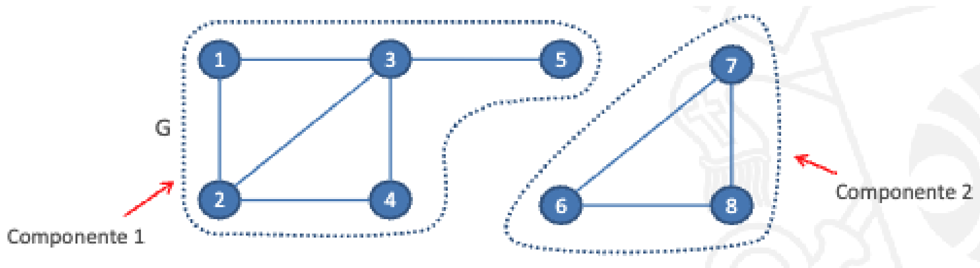
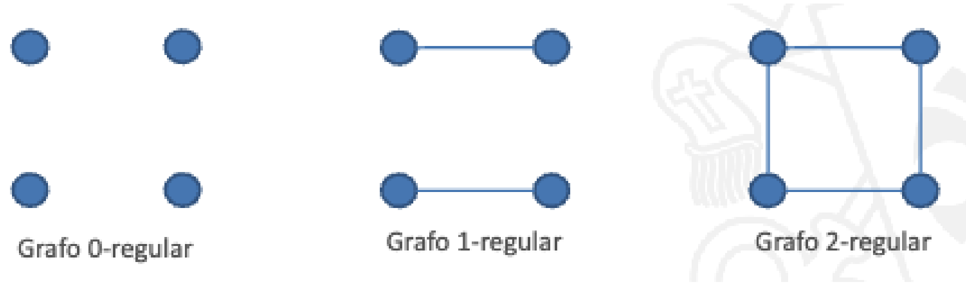
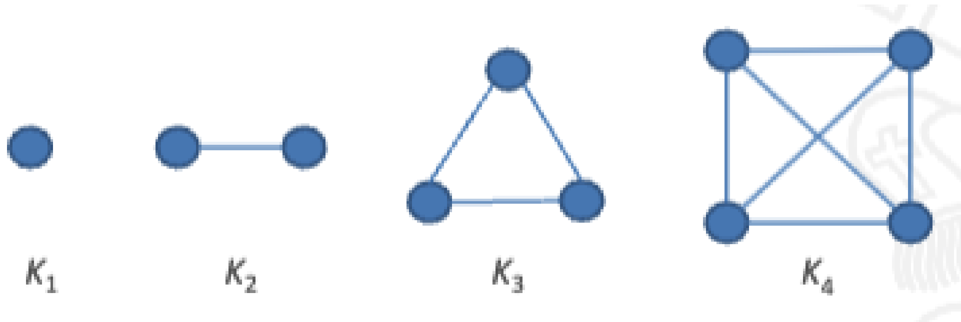
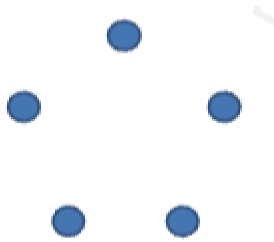
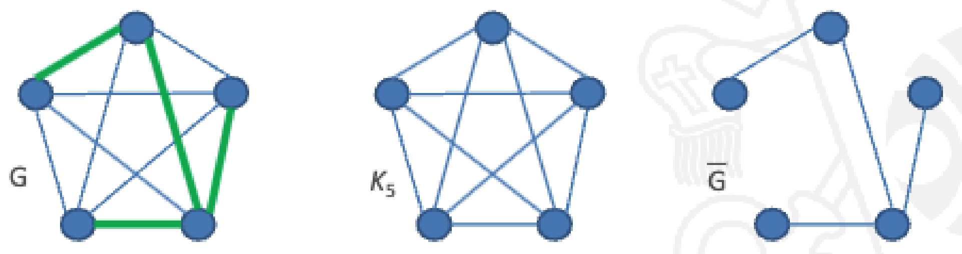
Resumo para a 1ª prova de Teoria dos Grafos e Computabilidade

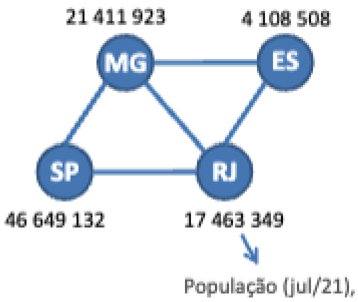
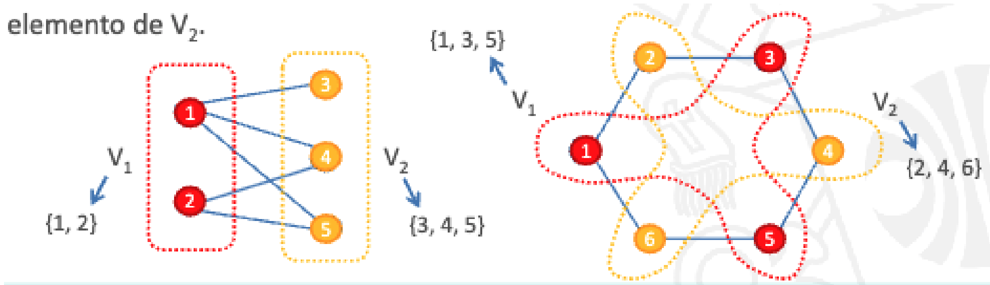
Resumo elaborado pelo aluno Luca Ferrari Azalim, com base no material do professor Zenilton Patrocínio
Imagens retiradas do material do professor Zenilton Patrocínio

---

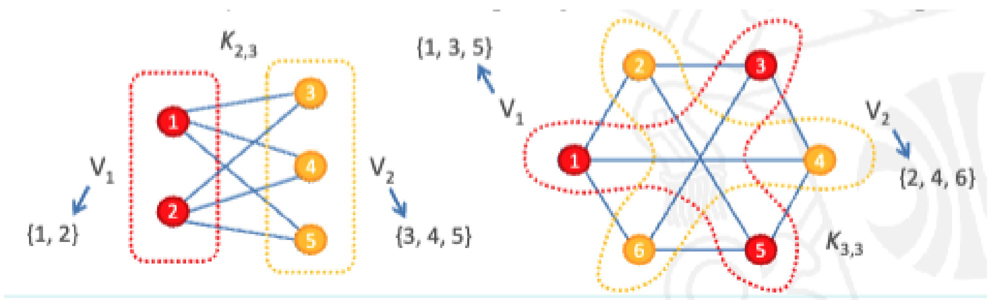
Conceitos Fundamentais	
Grafo	Representação da relação entre um conjunto de objetos.
Vértice, objeto ou nó	Representação de um ponto no grafo.
Aresta, relação ou arco	Representa uma conexão entre dois vértices de um grafo.
Grafo não direcionado	Grafo em que uma relação entre dois vértices é válida em ambas as direções.
Grafo não direcionado	Grafo em que uma relação entre dois vértices é válida apenas em uma das direções.
Extremo ou extremidade de uma aresta	Vértices ligados pela aresta.
Pares ordenados	Pares de vértices que compõem o conjunto de arestas de um grafo direcionado. **Notação:** { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4) }
Pares não ordenados	Pares de vértices que compõem o conjunto de arestas de um grafo não direcionado. **Notação:** { {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2,4} }
Laços ou auto-loop	Aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Permite modelar relações de um objeto com ele mesmo.
Arestas paralelas	Arestas que relacionam o mesmo par de vértices. Em grafos direcionados, são arestas paralelas apenas aquelas que relacionam o mesmo par de vértices em uma mesma direção.
Arestas antiparalelas	Em grafos direcionados, são arestas que relacionam o mesmo par de vértices, mas em direções opostas.
Relação de Adjacência e Vizinhança	
Vértices adjacentes	Vértices que possuem uma aresta entre eles são ditos vértices adjacentes.
Arestas adjacentes	Arestas que possuem um extremo em comum são ditas adjacentes.
Vizinhança de um vértice	Em grafos não direcionados, a vizinhança de um vértice é o conjunto de todos os vértices adjacentes a ele. **Notação:** $\Gamma(v)$
Sucessores de um vértice	Em um grafo direcionado, os sucessores de um vértice são os vértices adjacentes que divergem deste vértice. **Notação:** $\Gamma^{+}(v)$

Predecessores (ou pais) de um vértice	Em um grafo direcionado, os predecessores de um vértice são os vértices adjacentes que convergem para este vértice. **Notação:** $\Gamma^{-}(v)$
Relação de Incidência e Grau	
Aresta incidente	Uma aresta {3, 4} ou (3, 4), por exemplo, é incidente aos vértices 3 e 4.
Aresta convergente	Em grafos direcionados, uma aresta (3, 4) é divergente de 3 e convergente a 4.
Grau de um vértice	Em grafos não direcionados, o grau de um vértice v corresponde ao número de vértices adjacentes a v. Também corresponde ao número de arestas que incidem sobre v. **Notação:** $d(v)$ **Menor grau de um grafo:** $\delta(G)$ **Maior grau de um grafo:** $\Delta(G)$
Lema do aperto de mãos	A soma dos graus de todos os vértices de um grafo será sempre igual ao dobro do número de arestas.
Sequência de graus de um grafo	Lista com os valores de grau de todos os vértices em ordem crescente.
Grau de entrada de um vértice	Em grafos direcionados, o grau de entrada de um vértice corresponde ao número de arestas que entram nele. **Notação:** $d^{-}(v)$
Grau de saída de um vértice	Em grafos direcionados, o grau de saída de um vértice corresponde ao número de arestas que saem dele. **Notação:** $d^{+}(v)$
Vértice isolado	Vértice que não possui arestas incidentes a ele. Ou seja, o vértice não está relacionado com nenhum outro vértice.
Vértice pendente	Vértice que possui apenas uma aresta incidente a ele.
Componente de um grafo	Consiste em um subconjunto de vértices (e suas arestas) que possuem relações entre si (não necessariamente de todos para todos) e que não possuem relações com os demais vértices do grafo. 
Tipos de Grafo	
Grafo simples	Grafo que não possui laços ou arestas paralelas. No caso de grafos simples direcionados, pode haver arestas antiparalelas.
Grafo regular	Grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau.

Grafo k-regular	Grafo regular em que todos os vértices possuem grau igual a k. 
Grafo completo	Grafo simples que contém uma aresta para cada par de vértices distintos. Ou seja, todos os vértices estão relacionados uns com os outros. Todo grafo completo é regular.
Grafo completo K_n	Grafo completo com n vértices. 
Grafo nulo	Grafo em que todos os vértices são isolados, ou seja, não há nenhuma aresta. 
Grafo complementar	Dado um grafo G, o grafo complementar de G possui os mesmos vértices de G e as arestas que faltam para G se tornar um grafo completo. **Notação**: $C(G)$ ou $\overline{G}$ 
Grafo rotulado em vértices	Grafo em que cada vértice está associado a um rótulo.
Grafo rotulado em arestas	Grafo em que cada aresta está associada a um rótulo.

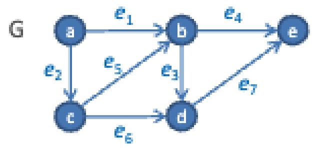
<table>
<tr><td>Grafo ponderado ou valorado</td><td>Grafo em que existe uma ou mais funções relacionando os vértices e/ou as arestas com um conjunto de números.

</td></tr>
<tr><td>Grafo bipartido (ou bipartite)</td><td>Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando um conjunto de vértices V puder ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 disjuntos (sem elementos comuns) de forma que toda aresta de E conecta um elemento de V_1 a um elemento de V_2.

</td></tr>
<tr><td>Grafo bipartido completo</td><td>Um grafo é bipartido completo quando seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos (sem elementos em comum) e todo elemento de um conjunto for adjacente a todos os elementos do outro conjunto, não havendo arestas entre vértices do mesmo conjunto.

Notação: $K_{m,n}$ em que m é o número de vértices de um conjunto e n é o número de vértices do outro conjunto.

Total de arestas: $|E| = m \times n$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representação de Grafo</td></tr>
</table>

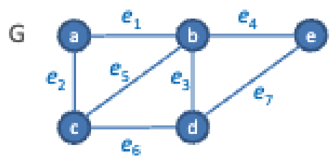
<table>
<tr>
<td>Matriz de incidência para grafo direcionado</td>
<td>
Matriz com n linhas (uma para cada vértice) e m colunas (uma para cada aresta). Cada elemento ij é dado por:

- -1, se aresta j sai do vértice i
- +1, se aresta j entra do vértice i
- 0, caso contrário (j e i não tem relação)



$$\mathbb{I} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \end{array}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Matriz de incidência para grafo não direcionado</td>
<td>
Matriz com n linhas (uma para cada vértice) e m colunas (uma para cada aresta). Cada elemento ij é dado por:

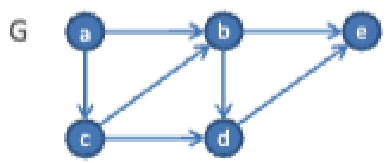
- 1, se aresta j incide no vértice i
- 0, caso contrário (j e i não tem relação)



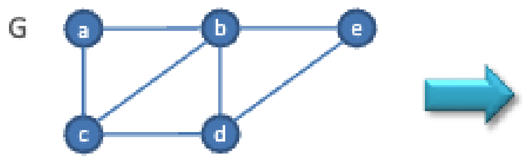
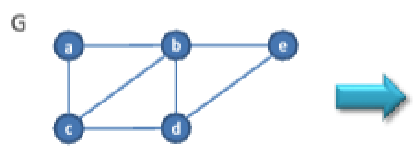
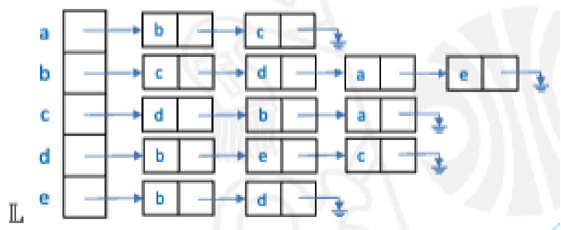
$$\mathbb{I} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \end{array}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Propriedades da matriz de incidência</td>
<td>

- Uma matriz de incidência representa um grafo G sem ambiguidade;
- Um grafo G pode ser representado por diferentes matrizes de incidência, pois pode-se permutar as linhas e colunas;
- Toda coluna da matriz de incidência possui apenas duas posições não nulas (extremos da aresta);
- Permite consulta O(1) à existência de aresta incidente a um vértice;
- Ocupa um espaço proporcional a $O(n \times m)$, que pode ser $O(n^2)$ para grafos esparsos ou mesmo $O(n^3)$ para grafos densos.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Matriz de adjacência para grafo direcionado</td>
<td>
Matriz com n linhas e n colunas (uma para cada vértice) em que o elemento ij é dado por:

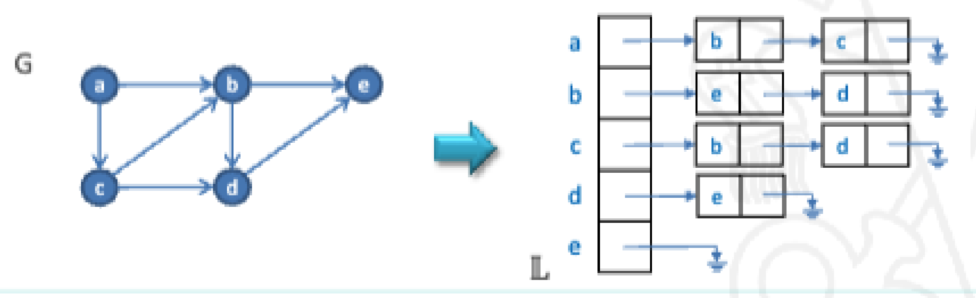
- 1, se existir aresta saindo de i e entrando em j
- 0, caso contrário

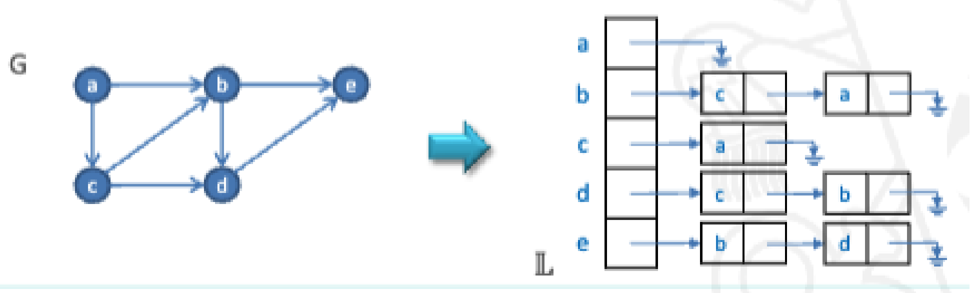


$$\mathbb{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \end{array}$$
</td>
</tr>
</table>

Matriz de adjacência para grafo não direcionado	Matriz com n linhas e n colunas (uma para cada vértice) em que o elemento ij é dado por: ● 1, se existir aresta entre i e j ● 0, caso contrário (j e i não tem relação)  $$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$
Propriedades da matriz de adjacência	● Uma matriz de adjacência representa um grafo G sem ambiguidade; ● Um grafo G pode ser representado por diferentes matrizes de adjacência, pois pode-se permutar as linhas e colunas; ● A matriz de adjacência é simétrica para grafos não direcionados, pois quando existir aresta entre dois vértices, esta vale em ambas as direções; ● Permite consulta O(1) à existência de aresta incidente a um vértice; ● Ocupa espaço proporcional a $O(n^2)$ para grafos esparsos ou densos.
Lista de adjacência para grafo não direcionado	Um grafo não direcionado pode ser representado por um conjunto de n listas de adjacência (uma para cada vértice), de modo que a lista do vértice v contém os vértices adjacentes de v. A lista de adjacência é implementada por meio de lista encadeada. $$\mathbb{L}[v] = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$$  

<table>
<tr>
<td>Lista de adjacência para grafo direcionado</td>
<td>
Um grafo direcionado pode ser representado por um conjunto de n listas de adjacência (uma para cada vértice), de modo que a lista do vértice v contém os sucessores ou predecessores de v. A lista de adjacência é implementada por meio de lista encadeada.

<u>Lista de sucessores</u>: $\mathbb{L}[v] = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$


<u>Lista de predecessores</u>: $\mathbb{L}[v] = \{w \in V(G) \mid (w, v) \in E(G)\}$


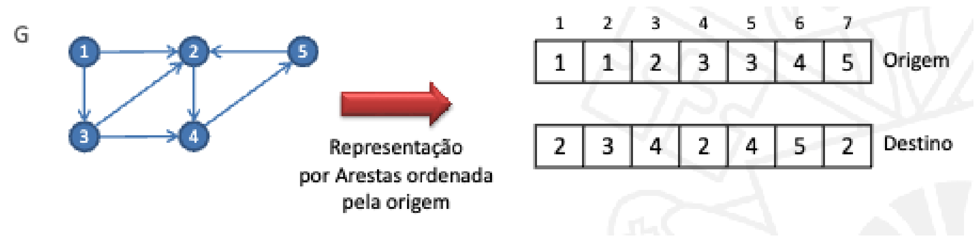
</td>
</tr>
<tr>
<td>Propriedades da lista de adjacência</td>
<td>

As listas de adjacência representam um grafo G sem ambiguidade;
Um grafo G pode ser representado por diferentes listas de adjacência pois os elementos podem aparecer em qualquer ordem nas listas;
Para grafos direcionados, deve-se optar por armazenar os sucessores ou os predecessores dos vértices (ou dobrar o custo de armazenamento);
A consulta é mais cara para se determinar a existência de aresta incidente a um vértice - $O(n)$ para grafo denso;
Ocupa um espaço proporcional a $O(n + m)$.

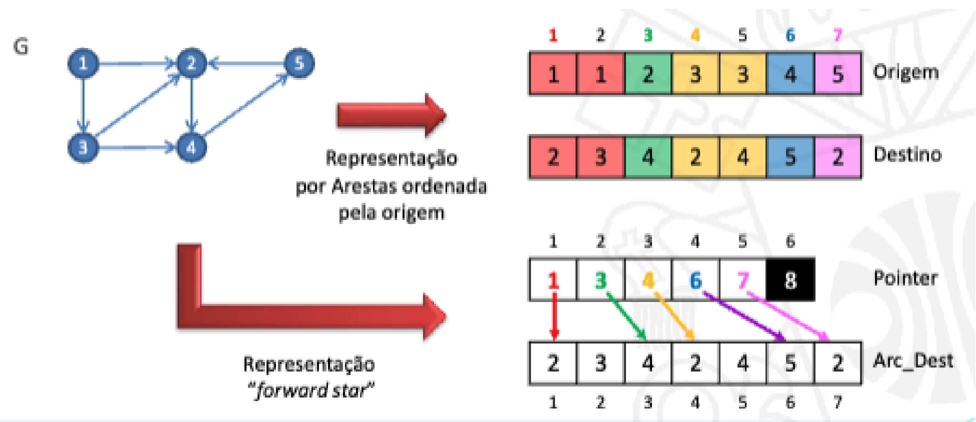
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Lista de adjacência por meio de vetores (foward star)</td>
<td>
Um grafo direcionado pode ser representado por uma lista de adjacência construída por meio de vetores.

Para a construção da lista de adjacência por meio de vetores, é preciso criar dois vetores, $Origem$ e $Destino$, que juntos representam as arestas do grafo. Em seguida, esses vetores devem ser ordenados pela **origem**.



Neste momento, o vetor $Origem$ pode ser descartado, e um novo vetor, intitulado $Pointer$, deve ser criado. Cada índice v deste vetor representa um vértice do vetor $Origem$, e o valor contido na posição v representa o índice do vetor $Destino$ em que se inicia a sequência dos sucessores de v.

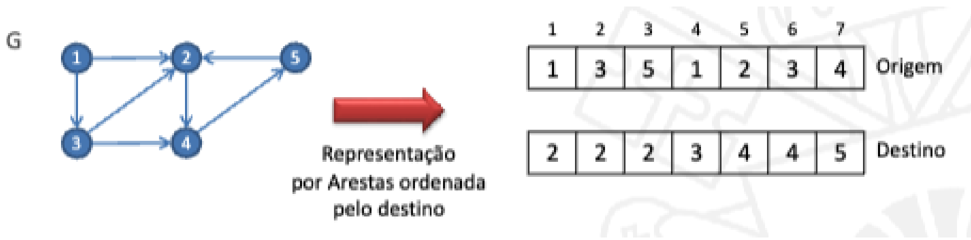


Lê-se da seguinte forma: dado um grafo $G(V, E)$, o valor contido na posição v do vetor pointer indica o índice do vetor $Destino$ em que se inicia o conjunto dos sucessores de v.

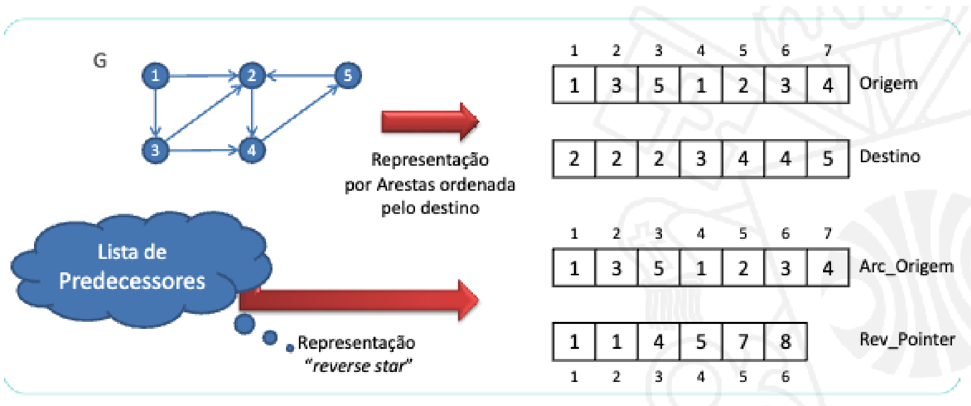
Observação: Na imagem, $Arc\_dest \ = \ Destino$.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Lista de adjacência por meio de vetores (reverse star)</td>
<td>
Um grafo direcionado pode ser representado por uma lista de adjacência construída por meio de vetores.

Para a construção da lista de adjacência por meio de vetores, é preciso criar dois vetores, $Origem$ e $Destino$, que juntos representam as arestas do grafo. Em seguida, esses vetores devem ser ordenados pelo destino.



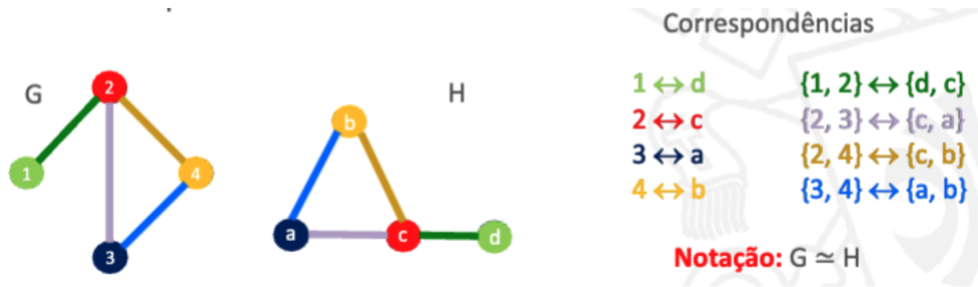
Neste momento, o vetor $Destino$ pode ser descartado, e um novo vetor, intitulado $Pointer$, deve ser criado. Cada índice v deste vetor representa um vértice do vetor $Destino$, e o valor contido na posição v representa o índice do vetor $Origem$ em que se inicia a sequência dos predecessores de v.



Lê-se da seguinte forma: dado um grafo $G(V, E)$, o valor contido na posição v do vetor pointer indica o índice do vetor $Origem$ em que se inicia o conjunto dos predecessores de v.

Observação: Na imagem, $Arc\_Origem = Origem$.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Isomorfismo e Subgrafos</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Grafos isomorfos</td>
<td>
Dois grafos são ditos isomorfos se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência sejam preservadas.



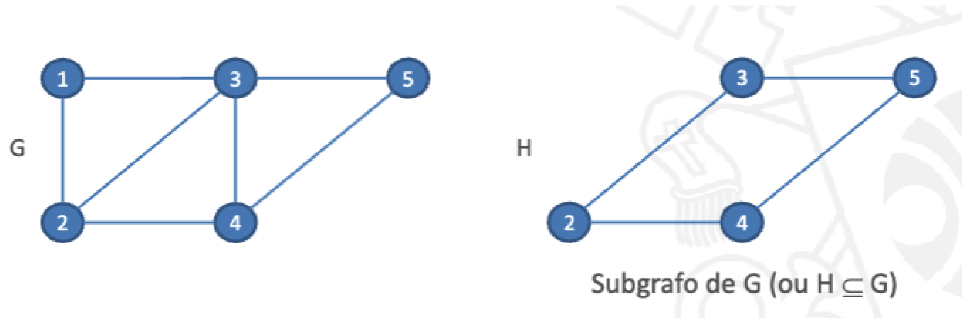
Condições necessárias (mas não suficientes):

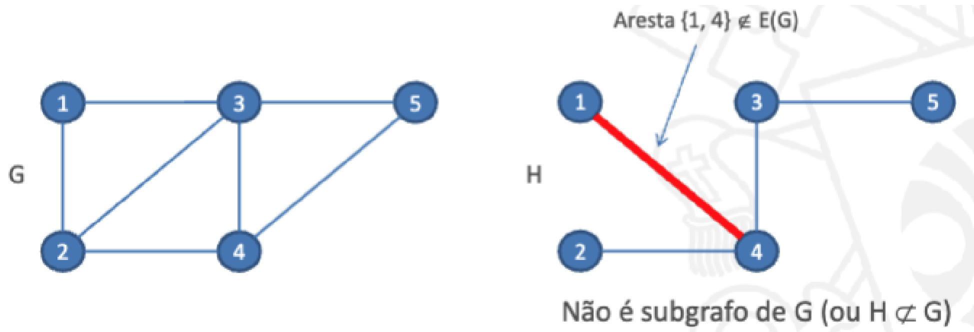
1. Ter o mesmo número de vértices;
2. Ter o mesmo número de arestas;
3. Ter o mesmo número de componentes;
4. Ter o mesmo número de vértices com o mesmo grau.

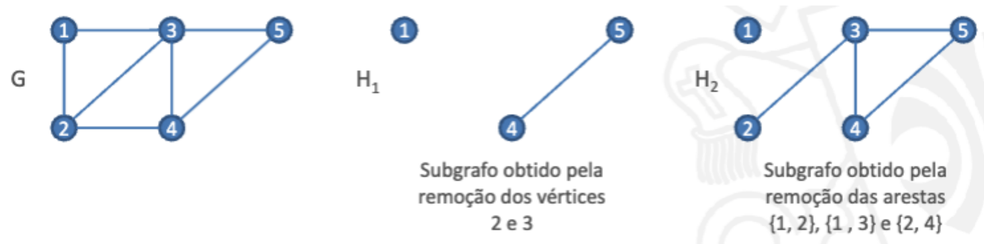
A condição 4 pode ser verificada mais facilmente por meio da criação de uma sequência dos graus de todos os vértices dos dois grafos. Após ordenadas, estas sequências devem ser iguais.

Não há algoritmo eficiente para determinar se dois grafos são isomorfos ou não.
</td>
</tr>
</table>

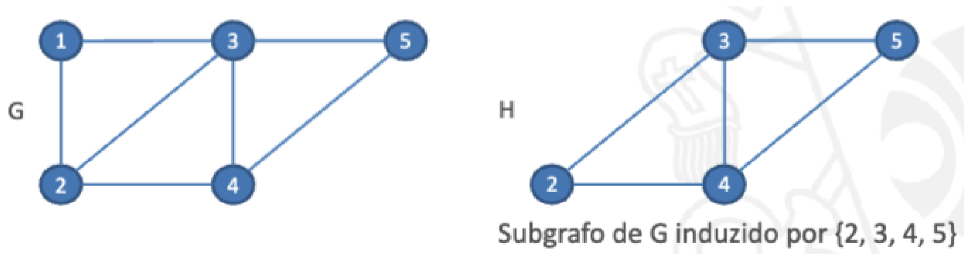
<table>
<tr>
<td>Subgrafo</td>
<td>
Um grafo G é dito subgrafo de H quando o conjunto dos vértices de G está contido no conjunto de vértices de H e o conjunto de arestas de G está contido no conjunto de arestas de H.



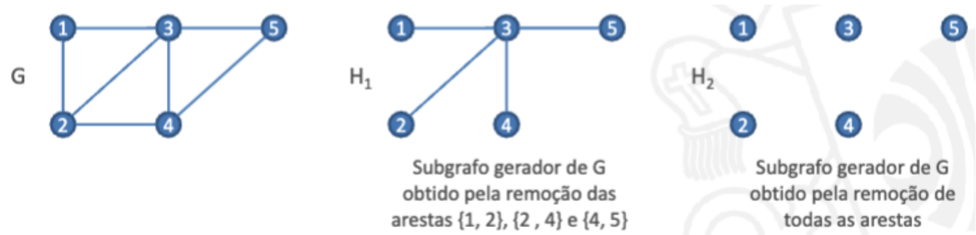
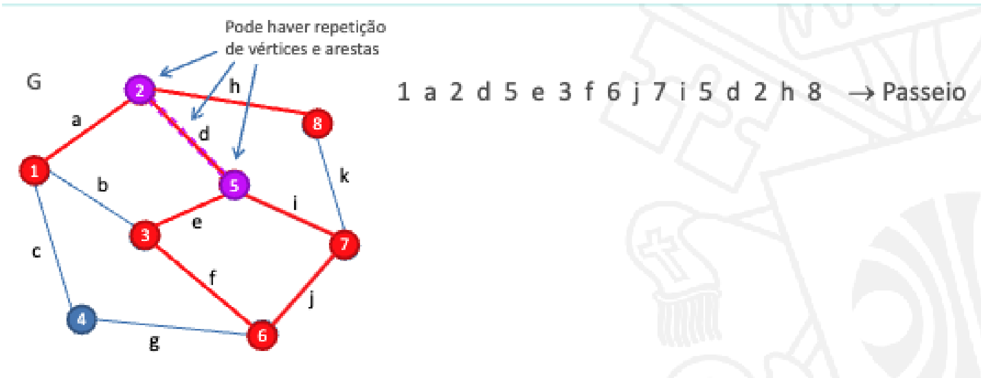


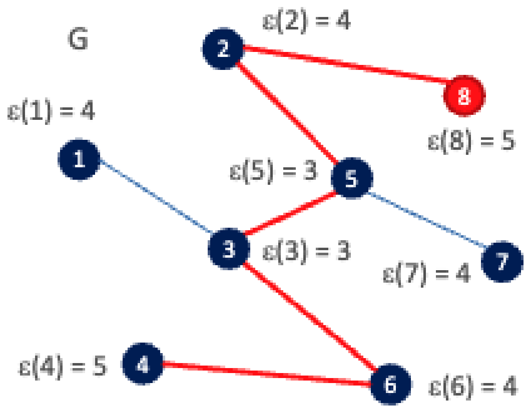
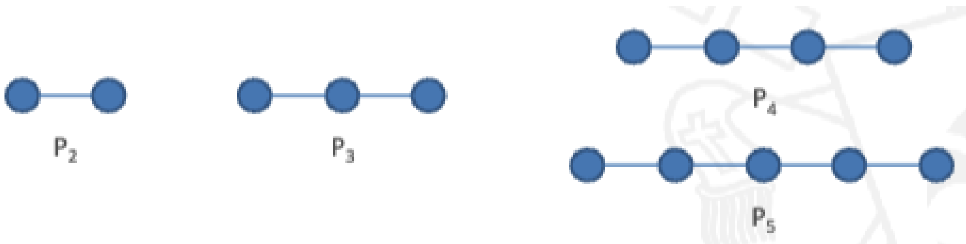
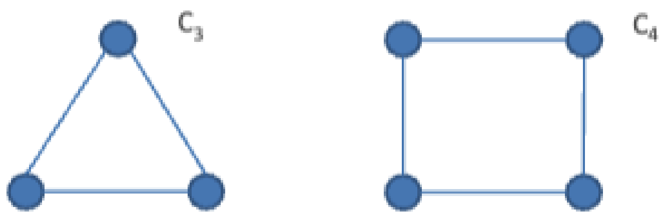


</td>
</tr>
<tr>
<td>Subgrafo induzido</td>
<td>
Subgrafo obtido a partir da remoção de vértices, mas não de arestas. Ou seja, todas as conexões entre os vértices do subconjunto selecionado são mantidas.



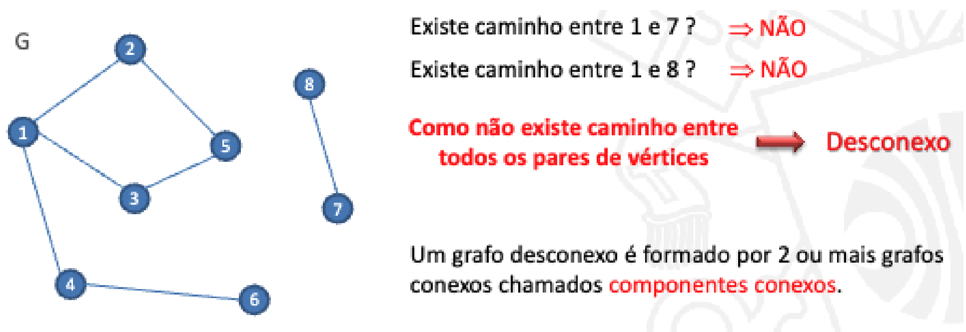
Caso o vértice {3, 4} não existisse em H, por exemplo, H não seria um subgrafo induzido, porque não mantém as relações originais dos vértices escolhidos.
</td>
</tr>
</table>

Subgrafo gerador	Um grafo H é dito subgrafo gerador de G quando contém todos os vértices de G, mas não todas as arestas. 
Caminhos	
Passeio	Sequência alternante de vértices e arestas (começando e terminando em vértices) com v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k em que v_i representa um vértice e e_j uma aresta. Cada aresta da sequência é incidente ao vértice que precede e ao vértice que a segue. Em um grafo simples, pode-se representar o passeio apenas pela sequência de vértices, pois existe no máximo uma aresta entre cada par de vértices. 
Passeio aberto	Passeio em que o vértice de origem é **diferente** do vértice de término.
Passeio fechado	Passeio em que o vértice de origem é **igual** ao vértice de término.
Trajeto ou cadeia	Passeio em que não há repetição de arestas.
Caminho	Trajeto em que não há repetição de vértices entre a origem e o destino (exclusivo).
Caminho aberto	Caminho em que o vértice de origem é **diferente** do vértice de término.
Caminho fechado (ou ciclo)	Caminho em que o vértice de origem é **igual** ao vértice de término. Em grafos direcionados, também pode ser chamado de "circuito".
Tamanho de um caminho	Número de arestas de um caminho.
Distância entre dois vértices (ou distância geodésica)	Menor caminho entre dois vértices. **Notação:** $d(v, w)$

Excentricidade de um vértice	Distância deste vértice para o vértice mais distante dele. Na imagem, está representada a excentricidade do vértice 8. **Notação:** $\varepsilon(v)$ 
Raio de um grafo	Menor excentricidade entre todos os vértices do grafo.
Diâmetro de um grafo	Maior excentricidade entre todos os vértices do grafo.
Grafo linear ou grafo caminho	Um grafo com pelo menos 1 vértice é dito linear quando possui apenas dois vértices de grau 1 e os demais vértices possuem grau 2 e estão no caminho entre os vértices de grau 1. Um grafo com apenas um vértice também pode ser dito linear. **Notação:** P_n, onde n é o número de vértices. 
Grafo ciclo (ou circular)	Um grafo com pelo menos dois vértices é dito grafo ciclo quando consiste de um único ciclo passando por todos os seus vértices. **Notação:** C_n, onde n é o número de vértices. 

<table>
<tr>
<td>Grafo não direcionado conexo</td>
<td>Grafo em que existe pelo menos um caminho para todo par de vértices. Ou seja, todos os vértices estão conectados por meio de pelo menos um caminho.

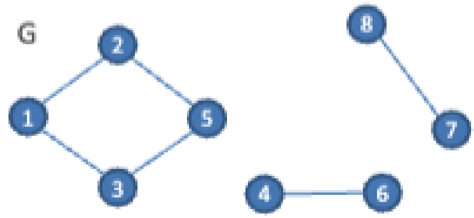
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grafo não direcionado desconexo</td>
<td>Grafo em que não existe um caminho entre algum par de vértices. Ou seja, um grafo em que há dois ou mais componentes.



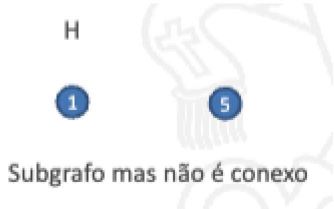
</td>
</tr>
</table>

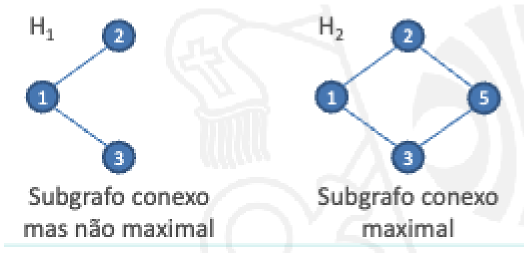
<table>
<tr><td>Subgrafo maximal conexo (ou componente conexo)</td><td>Subgrafo conexo que não tenha mais como crescer sem se tornar desconexo.

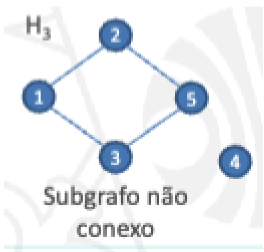
Considerando o grafo abaixo…

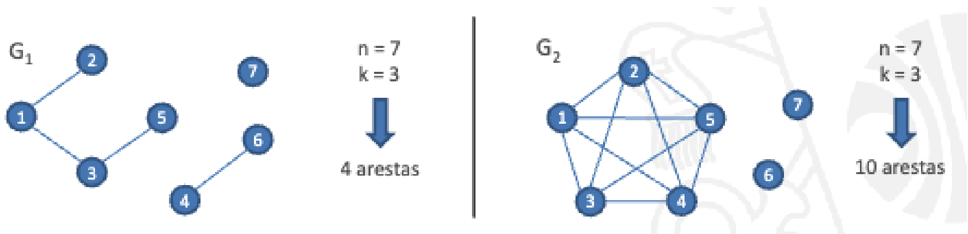


Confira os exemplos:



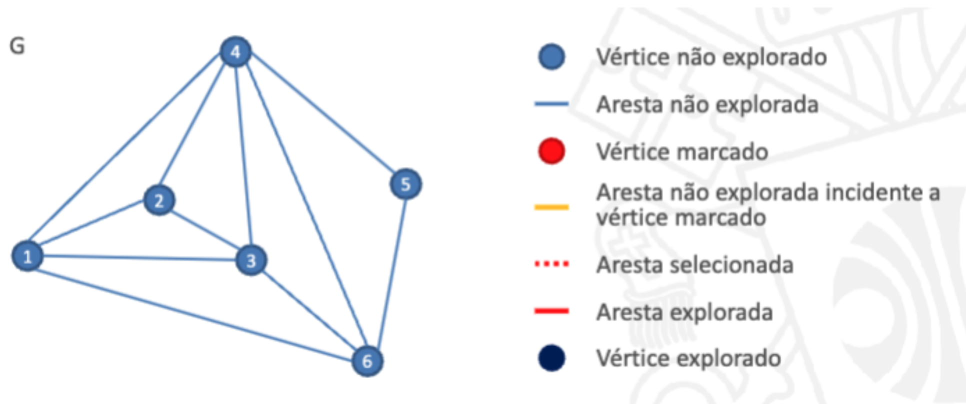



</td></tr>
<tr><td>Limites do número de arestas de um grafo</td><td>Dado um grafo simples, com n vértices e k componentes, o número mínimo de arestas é igual a $n - k$, enquanto o número máximo de arestas é igual a $(n - k) \times (n - k + 1)$.


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Busca em Grafos</td></tr>
<tr><td>Busca em grafo</td><td>Processo sistemático para examinar vértices e arestas de um grafo.</td></tr>
<tr><td>Vértice desmarcado (ou não explorado)</td><td>Vértice que ainda não foi visitado pela busca. É o estado inicial de todos os vértices em uma busca.</td></tr>
<tr><td>Vértice marcado</td><td>Vértice que já foi visitado pela busca.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Vértice explorado</td><td>Vértice que já teve toda a sua lista de adjacências explorada.</td></tr>
<tr><td>Aresta não explorada</td><td>Aresta que ainda não foi visitada pela busca.</td></tr>
<tr><td>Aresta explorada</td><td>Aresta que já foi visitada pela busca.</td></tr>
<tr><td>Busca genérica</td><td>

1. Desmarcar todos os vértices
2. Escolher e marcar um vértice inicial
3. **<u>enquanto</u>** existir algum vértice v que seja marcado e incidente a uma aresta $\{v,\ w\}$ não explorada **<u>efetuar</u>**
    a. Escolher vértice marcado v
    b. Escolher e explorar uma aresta $\{v,\ w\}$
    c. se o vértice w é não marcado então
        i. Marcar o vértice w



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Busca em Profundidade</td></tr>
</table>

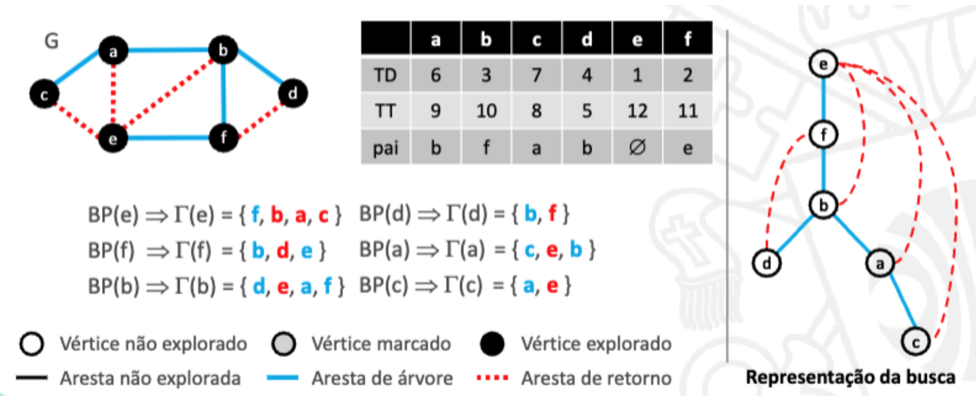
Busca em profundidade em grafo não direcionado

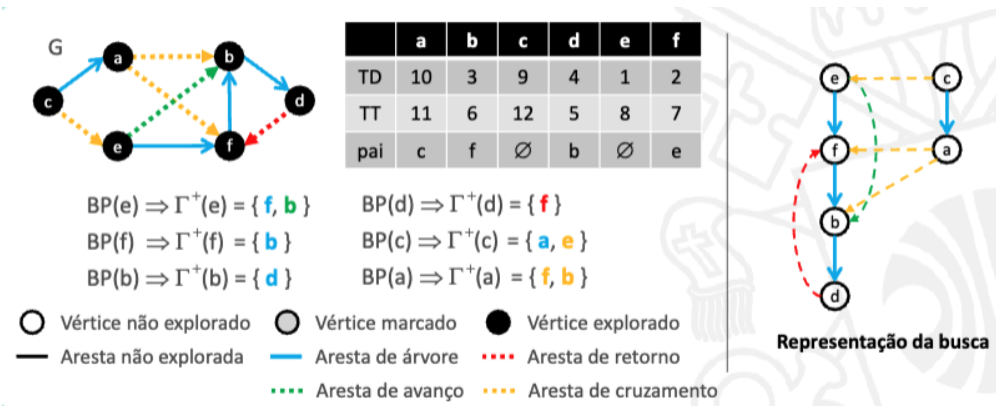
Chamada inicial:

1. t = 0
2. **<u>para</u>** todo vértice $v \in V(G)$ **<u>faça</u>**
   a. TD[v] = 0
   b. TT[v] = 0
   c. pai[v] = null
3. **<u>enquanto</u>** existir vértice v tal que TD[v] = 0 **<u>efetuar</u>**
   a. Busca_Profundidade(v)

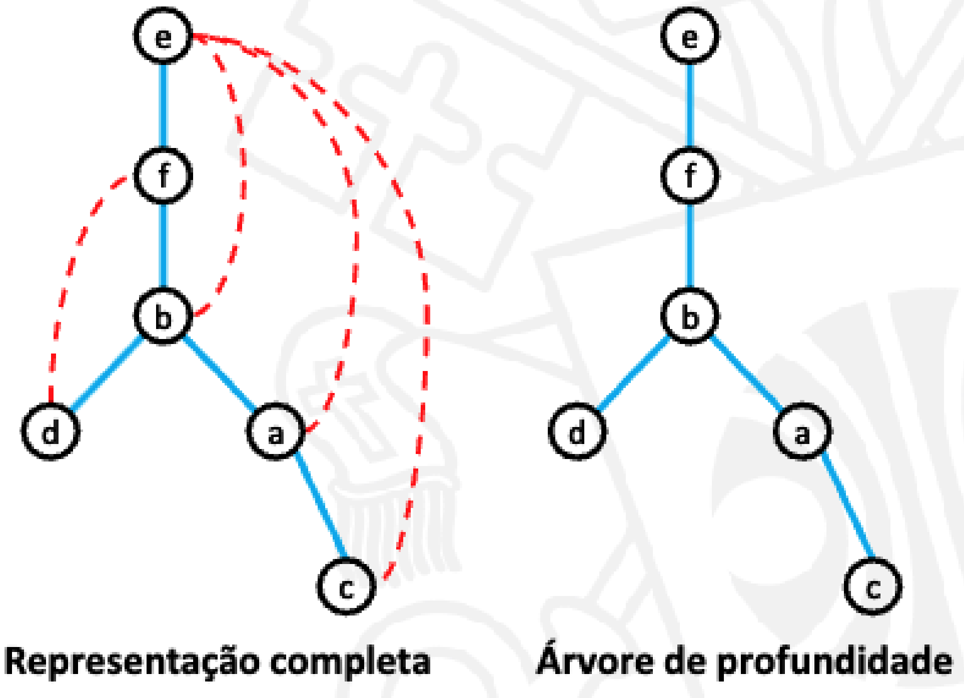
Busca_Profundidade(v):

1. TD[v] = ++t;
2. **<u>para</u>** todo vértice $w \in \Gamma(G)$ **<u>faça</u>**
   a. **<u>se</u>** TD[w] = 0 **<u>então</u>**
      i. <u>Visitar aresta {v, w}</u> // árvore
      ii. pai[w] = v
      iii. Busca_Profundidade(w)
   b. **<u>senão</u>** se TT[w] = 0 e w != pai[v] **<u>então</u>**
      i. Visitar aresta {v, w} // retorno
3. TT[v] = ++t

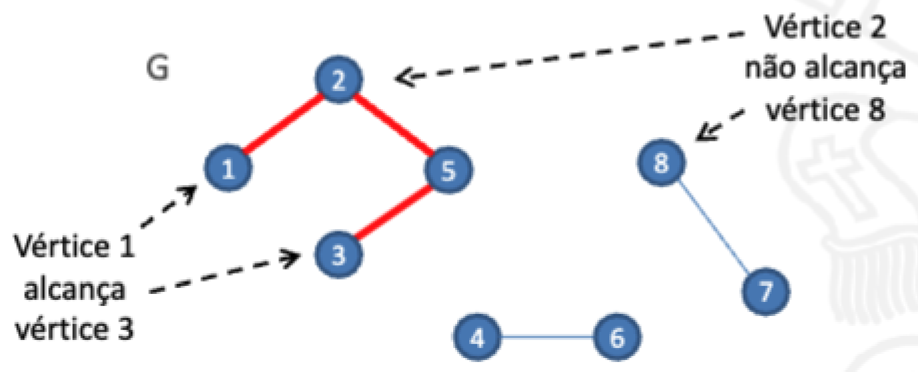


Busca em profundidade em grafo direcionado	Chamada inicial:
	1. t = 0
	2. **para** todo vértice $v \in V(G)$ **faça**
	    a. TD[v] = 0
	    b. TT[v] = 0
	    c. pai[v] = null
	3. **enquanto** existir algum vértice v tal que TD[v] = 0 **efetuar**
	    a. Busca_Profundidade(v)
	Busca_Profundidade(v):
	1. TD[v] = ++t
	2. **para** todo vértice $w \in \Gamma^{+}(v)$ **faça**
	    a. **se** TD[w] = 0 **então**
	        i. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // árvore
	        ii. pai[w] = v
	        iii. Busca_Profundidade(w)
	    b. senão
	        i. se TT[w] = 0 **então**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // retorno
	        ii. **senão** se TD[v] < TD[w] **então**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // avanço
	        iii. senão
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // cruzamento
	3. TT[v] = ++t
	

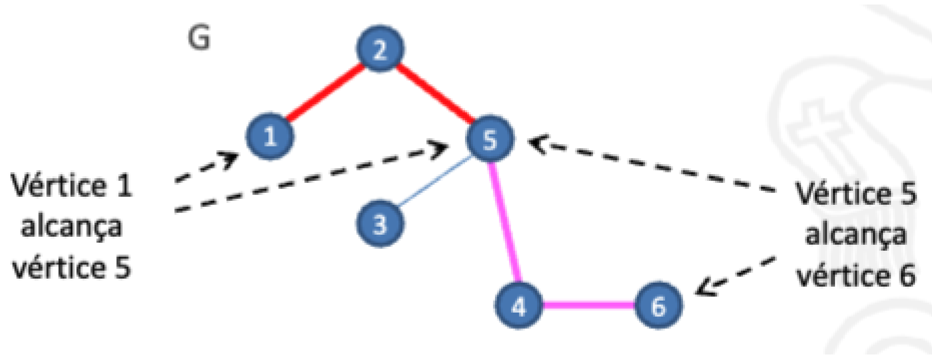
Aresta de árvore	Uma aresta $\{v,\ w\}$ é dita de árvore quando esta é usada para visitar um vértice pela primeira vez.

Aresta de retorno	Uma aresta $\{v,\ w\}$ é dita de retorno quando o w já tiver sido marcado, porém w não é predecessor (ou pai) de v na busca.
Aresta de avanço	Uma aresta $\{v,\ w\}$ é dita de avanço quando w é descendente de v, mas v não é pai de w.
Aresta de cruzamento	Uma aresta $\{v,\ w\}$ é dita de cruzamento quando w não é descendente de v e v também não é descendente de w.
Propriedades da busca em profundidade	• A representação formada por todos os vértices e apenas as arestas de árvore formam uma árvore de profundidade; • Caso o grafo seja desconexo, a busca irá produzir várias árvores de profundidade; • As arestas de retorno sempre representam um ciclo no grafo original. • A busca pode não ser única, portanto pode-se obter mais de uma árvore de profundidade para o mesmo grafo. 
Busca em Largura	

Busca em largura em grafo não direcionado	Chamada inicial:
	
	1. t = 0
	2. Fila = ∅
	3. **<u>para</u>** todo vértice $v \in V(G)$ **<u>faça</u>**
	    a. L[v] = 0 // equivalente ao TD da busca em profundidade
	    b. nível[v] = 0
	    c. pai[v] = null
	4. **<u>enquanto</u>** existir algum vértice v tal que L[v] = 0 **<u>efetuar</u>**
	    a. L[v] = ++t
	    b. Fila.Inserir(v)
	    c. Busca_Largura()
	
	Busca_Largura():
	
	1. **<u>enquanto</u>** **<u>not</u>** Fila.Vazia() **<u>efetuar</u>**
	    a. v = Fila.Remover()
	    b. **<u>para</u>** todo vértice $w \in \Gamma(v)$ **<u>faça</u>**
	        i. **<u>se</u>** L[w] = 0 **<u>então</u>**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // árvore ou pai
	            2. pai[w] = v
	            3. nível[w] = nível[v] + 1;
	            4. L[c] = ++t
	            5. Fila.Inserir(w)
	        ii. **<u>senão</u>** **<u>se</u>** nível[w] = nível[v] + 1 **<u>então</u>**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // tio
	        iii. **<u>senão</u>** **<u>se</u>** nível[w] = nível[v] **<u>e</u>** pai[v] = pai[w] **<u>e</u>** L[w] > L[v] **<u>então</u>**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // irmão
	        iv. **<u>senão</u>** **<u>se</u>** nível[w] = nível[v] **<u>e</u>** pai[v] != pai[w] **<u>e</u>** L[w] > L[v] **<u>então</u>**
	            1. Visitar aresta $\{v,\ w\}$ // primo

	
Aresta de árvore (ou pai)	Uma aresta é dita de árvore quando: nível[w] = nível[v] + 1 && L[w] = 0
Aresta tio	Uma aresta é dita tio quando: nível[w] = nível[v] + 1 && L[w] != 0
Aresta irmão	Uma aresta é dita irmão quando: nível[w] = nível[v] && pai[v] = pai[w]
Aresta primo	Uma aresta é dita primo quando: nível[w] = nível[v] && pai[v] != pai[w]
Propriedades da busca em largura em grafo não direcionado	• A representação formada por todos os vértices e apenas as arestas de árvore (ou pai) formam uma árvore de largura; • Caso o grafo seja desconexo, a busca irá produzir várias árvores de largura.
Conectividade e Separabilidade	
Alcançabilidade	Se existe um caminho de um vértice v para um vértice w em um grafo G, então se diz que v alcança w, ou ainda, que w está ao alcance de v, ou ainda, que w é acessível a partir de v. A relação de alcançabilidade é **transitiva**, isto é, se v alcança w e w alcança x, então v alcança x. 

<table>
<tr>
<td>Transitividade</td>
<td>A relação de alcançabilidade é transitiva, isto é, se v alcança w e w alcança x, então v alcança x.

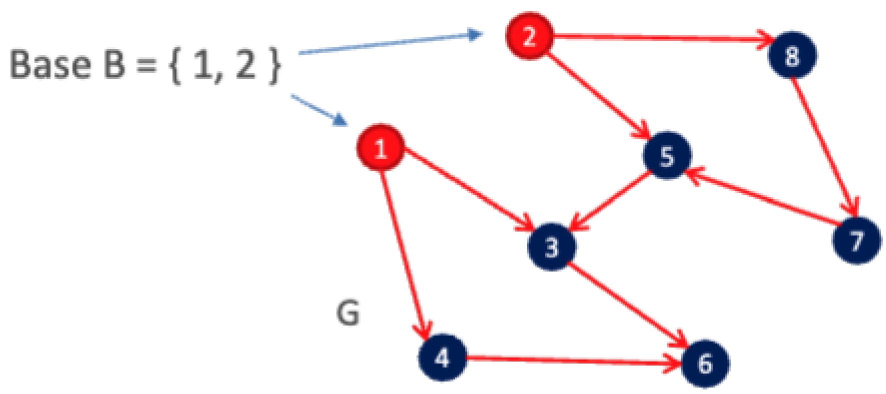


</td>
</tr>
<tr>
<td>Fecho transitivo de um vértice em um grafo não direcionado</td>
<td>O fecho transitivo de um vértice v é o conjunto dos vértices alcançáveis a partir de v, incluindo o próprio v.

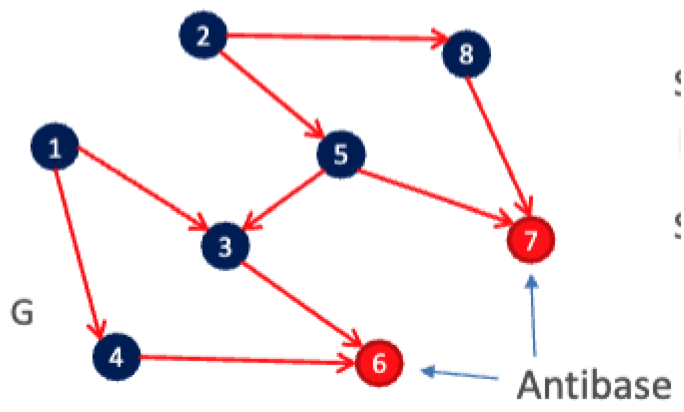
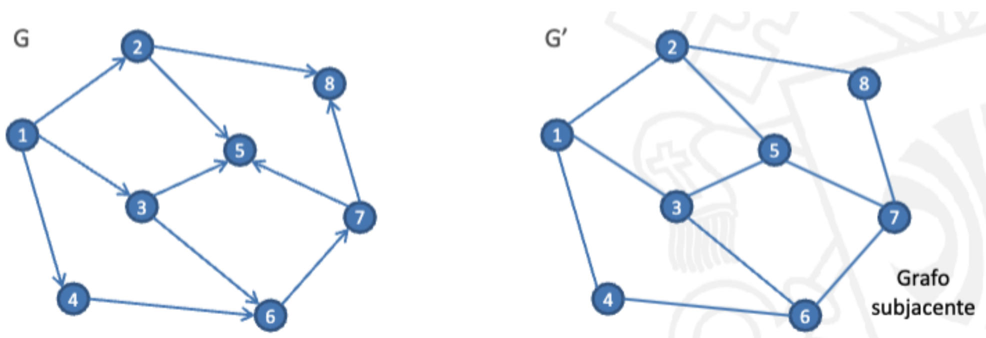
Notação: $\widehat{\Gamma}(v)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Fecho transitivo direto de um vértice em grafo direcionado</td>
<td>O fecho transitivo direto de um vértice v é o conjunto dos vértices alcançáveis a partir de v, incluindo o próprio v.

Notação: $\widehat{\Gamma}^{+}(v)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Fecho transitivo inverso de um vértice em um grafo direcionado</td>
<td>O fecho transitivo inverso de um vértice v é o conjunto dos vértices que alcançam v, incluindo o próprio v.

Notação: $\widehat{\Gamma}^{-}(v)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Base de um grafo direcionado</td>
<td>Dado um grafo direcionado $G = (V, E)$, uma base de G é um subconjunto $B \subseteq V$ tal que não há caminhos entre os elementos de B e todo vértice não pertencente a B pode ser alcançado por algum vértice de B.

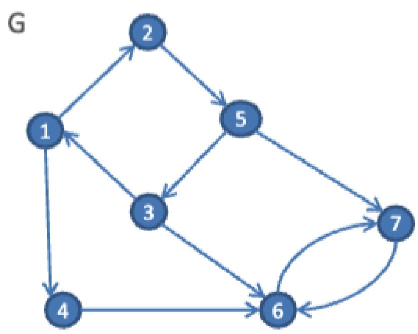


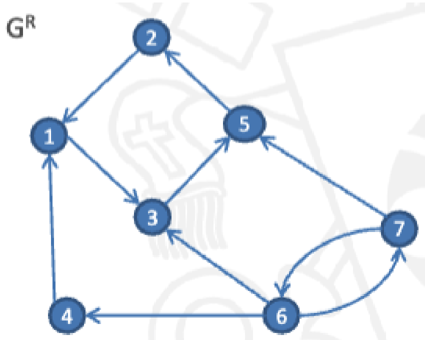
Na imagem, os vértices 1 e 2 não se alcançam, mas alcançam todos os demais vértices do grafo.</td>
</tr>
</table>

Antibase de um grafo direcionado	Dado um grafo direcionado $G = (V, E)$, uma antibase de G é um subconjunto $A \subseteq V$ tal que não há caminhos entre os elementos de A e todo vértice não pertencente a A pode alcançar algum vértice de A.  Na imagem, os vértices 6 e 7 não se alcançam, mas há pelo menos um vértice que alcança cada vértice da antibase.
Raiz de um grafo	Se a base de um grafo for um conjunto unitário (ou seja, contiver apenas um vértice), então ela é dita raiz do grafo.
Antirraiz de um grafo	Se a antibase de um grafo for um conjunto unitário (ou seja, contiver apenas um vértice), então ela é dita antirraiz do grafo.
Grafo direcionado conexo	Grafo em que todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro. Ou ainda, quando o fecho transitivo de qualquer vértice é igual ao conjunto dos vértices.
Grafo direcionado desconexo	Grafo em que não existe caminho entre algum par de vértices. Ou ainda, quando o fecho transitivo de algum vértice for diferente do conjunto de vértices do grafo.
Grafo subjacente	Dado um grafo direcionado, seu grafo subjacente é aquele obtido pela troca de cada aresta por outra não direcionada. **Notação:** G' 
Grafo S-Conexo (simplesmente conexo)	Dado um grafo direcionado conexo, este é dito S-Conexo quando o grafo subjacente for conexo.
Grafo SF-Conexo (semi fortemente conexo)	Dado um grafo direcionado conexo, este é dito SF-Conexo quando, para todo par de vértices, pelo menos um deles é alcançável a partir do outro. Todo grafo SF-Conexo é S-Conexo.
Grafo F-Conexo (fortemente conexo)	Dado um grafo direcionado conexo, este é dito F-Conexo quando todos os vértices são mutuamente alcançáveis. Todo grafo F-Conexo é SF-Conexo.

<table>
<tr>
<td>Grafo reverso (ou grafo transposto)</td>
<td>Dado um grafo direcionado, seu grafo reverso é o resultado da reversão de todas as suas arestas.

Notação: G^R




</td>
</tr>
<tr>
<td>Método de Kosaraju</td>
<td>O método/algoritmo de Kosaraju permite encontrar os componentes fortemente conexos de um grafo direcionado.

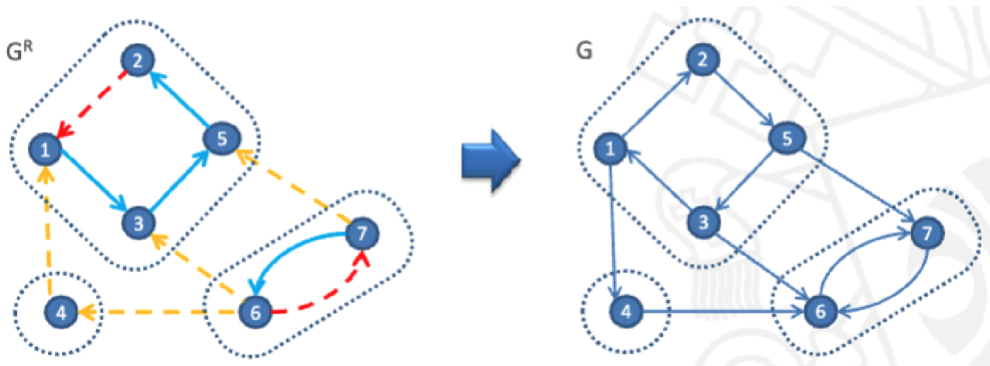
Dado um grafo direcionado G:

1. Fazer busca em profundidade em G (salvar tempos de término em TT)

2. Construir grafo G^R (grafo reverso de G)

3. Fazer busca em profundidade em G^R em ordem decrescente de TT

Cada árvore da floresta de profundidade corresponde a um componente F-Conexo.


</td>
</tr>
</table>