COMPONENTI FORTEMENTE CONNESSE di un grafo

Luca Bindini

1 Introduzione

In questa relazione si andrà ad analizzare l'algoritmo per trovare le componenti fortemente connesse di un grafo orientato testandolo su grafi casuali con dimensione e probabilità di avere archi crescenti.

2 Componenti fortemente connesse

Una componente fortemente connessa o SCC (Strongly Connected Component) di un grafo orientato è un insieme massimale di vertici tale che per ogni coppia di vertici u e v appartenenti a questo insieme si ha che $u \leadsto v$ e $v \leadsto u$; ovvero u e v sono raggiungibili l'uno dall'altro. Per trovare le SCC di un grafo orientato si usa un algoritmo diviso in 4 step:

1. Si chiama l'algoritmo DFS per calcolare i tempi di completamento $v.f$ per ogni vertice v.

2. Si calcola il grafo trasposto.

3. Si chiama nuovamente DFS sul grafo trasposto. Nel ciclo principale dell'algoritmo si considerano i vertici in ordine decrescente di completamento calcolati al punto 1.

4. Le componenti fortemente connesse sono gli alberi della foresta DF prodotta al punto 3 dall'algoritmo DFS.

3 DFS (Depth-First Search)

L'algoritmo DFS su un grafo orientato, ispeziona l'intero grafo andando a scoprire uno alla volta tutti i nodi. Ogni nodo u avrà quindi due attributi: il tempo di scoperta ($u.d$) e il tempo di completamento ($u.f$). Al termine dell'esecuzione l'algoritmo darà come output un insieme di alberi (Foresta DF), questo perchè la visita (DFS-VISIT) potrebbe essere ripetuta più volte se non tutti i nodi erano raggiungibili dal nodo "sorgente" originario. Il costo dell'algoritmo DFS è $\Theta(V + E)$ poiché esplora ogni nodo e ogni arco del grafo.

4 Test su algoritmo DFS e Componenti Fortemente Connesse

I test che sono stati condotti mirano a evidenziare come all'aumentare della probabilità di avere un arco tra i vari nodi del grafo diminuisca il numero di componenti connesse cioè il numero di alberi della foresta DF del secondo attraversamento. Sono state eseguite 10 prove (con dimensione del grafo fissa) per ogni probabilità (espressa in percentuale) e fatta una media tra queste prove. Successivamente i test sono stati ripetuti con una diversa dimensione del grafo (10,100,500).

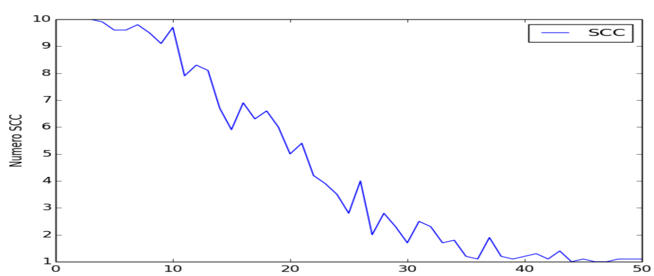

Figura 1: Andamento componenti fortemente connesse in un grafo di dimensione 10.

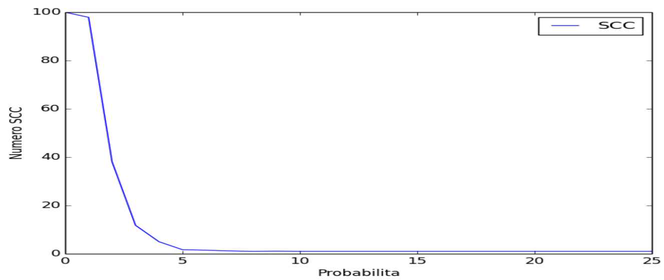

Figura 2: Andamento componenti fortemente connesse in un grafo di dimensione 100.

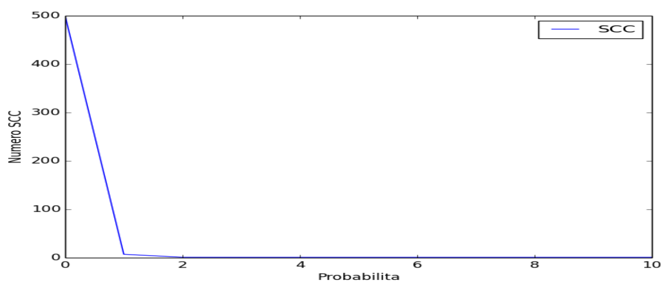

Figura 3: Andamento componenti fortemente connesse in un grafo di dimensione 500.

Come è possibile notare dai grafici all'aumentare della probabilità di avere archi il numero delle SCC tende velocemente a 1. Inoltre è possibile notare come all'aumentare della dimensione, a parità di probabilità di avere archi, il numero delle SCC tenda a diminuire.

Man mano che la probabilità di avere degli archi aumenta oltre a diminuire il numero di SCC diminuisce anche il numero di radici nell'albero DF del primo attraversamento DFS come è possibile notare dal grafico sottostante.

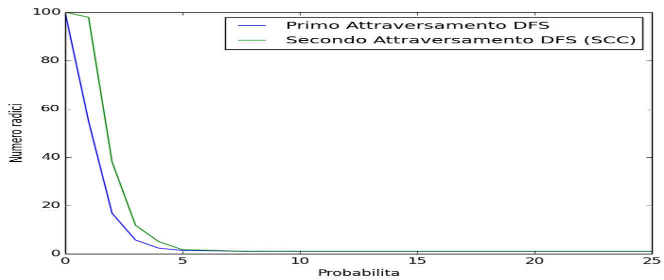

Figura 4: Numero di radici nella foresta DF del primo attraversamento a confronto col numero delle SCC.

5 Conclusioni

Analizzando i dati raccolti si può notare come all'aumentare della dimensione del grafo e della probabilità di avere archi, il numero delle radici nella foresta DF, sia al primo che al secondo attraversamento (num. SCC), diminuisce tendendo ad 1. Questo risultato è proprio quello atteso dalla teoria in quanto più archi vi sono e più è probabile che ogni nodo sia raggiungibile da un altro, cioè l'intero grafo è un'unica componente fortemente connessa. [1]

[1] I test sono stati effettuati su una piattaforma con le seguenti specifiche:

1. Processore: 2,9 GHz Intel Core i5
2. Ram: 8 GB 2133 MHz LPDDR3
3. SO: Mac OS 10.14.5 Mojave