Le cose della Fisica I

Luca Ceriani

Torino, 12 maggio 2017

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Velocità

Tenendo conto della definizione di derivata di un vettore, la velocità si può scrivere come

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Si consideri poi il vettore tangente alla traiettoria $\hat{u}_t$, esso può essere espresso come

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

e quindi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t \ .$$

Notare che l'espressione $\frac{ds}{dt}$ prende il nome di velocità scalare:

$$v_s = \frac{ds}{dt} \ .$$

1.2 Accelerazione

Conoscendo il vettore velocità $\vec{v}(t)$, si considera accelerazione la variazione di questo vettore nel tempo. In formule:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \ .$$

Se ci si riferisce ad una traiettoria $\vec{s}(t)$, utilizzando le relazioni trovate in precedenza si avrà

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_t + v_s \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

1.3 Classificazione dei moti elementari

Fissando l'attenzione sull'*equazione oraria*, possiamo definire due importanti calssi di moto:

1. moti uniformi ($v_s \equiv \dot{s} = cost = \dot{s}_0$);
2. moti con accelerazione tangenziale costante ($a_t \equiv \ddot{s} = cost = \ddot{s}_0$).

Dal punto di vista geometrico, i moti con traiettoria notevole sono:

1. i *moti rettilinei*, caratterizzati da $\rho \to \infty$;
2. i *moti circolari*, in cui $\rho = cost$.

Dove ρ è il raggio di curvatura.

1.4 Moti rettilinei

Moto rettilineo uniforme	$x(t) = v_0 t + x_0$
Moto rettilineo uniformemente accelerato	$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$
	$\dot{x}(t) = v(t) = a_0 t + v_0$

1.5 Moti circolari

Per i moti circolari di definiscono alcune grandezze. Per un generico moto circolare si può scrivere:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\ .$$

dove

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\hat{k} = \dot{\theta}\hat{k}\ .$$

Si può anche definire un'**accelerazione angolare** come segue:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{k} = \ddot{\theta}\hat{k} \ ,$$

e quindi

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \ . \tag{1.1}$$

1.6 Moto circolare uniforme

Detto T il periodo del moto, si definisce la **pulsazione** come:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \ .$$

1.7 Moto oscillatorio armonico

Si consideri un corpo che si muove lungo una retta con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ ,$$

possiamo calcolare la velocità e l'accelerazione per ogni instante di t:

$$\begin{cases} v_x = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ a_x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

L'equazione differenziale del moto oscillatorio armonico, su una traiettoria qualunque vale:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

1.8 Moto parabolico

In breve le formule del moto parabolico nelle componenti x e y:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos(\alpha) t) \\ y(t) = (v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2) \end{cases} ,$$

mentre la gittata, intesa come la distanza percorsa su x se il lancio è avvenuto ad altezza 0 sarà:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \ .$$

1.9 Velocità e accelerazione in coordinate polari piane

Considerando un sistema di coordinate polari, nei quali la posizione è definita da $\vec{r} = r\hat{u}_r$, si definiscono velocità e accelerazione come segue:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta \end{aligned}$$

1.10 Problema inverso della cinematica

Dato che $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, si possono scrivere le relazioni inverse in termini di integrali, ovvero:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \end{aligned}$$

1.11 Trasformazione di velocità e di accelerazione

Se si suppongo lo *spazio e il tempo assoluti* e considerato $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ e $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$, allora si domostra facilmente che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_\tau}$$

dove $\vec{v_\tau}$ è detta *velocità di trascinamento*. Posto $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$, allore la velocità di trascinamento si potrà esprimere nella forma

$$\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)] \ . \tag{1.2}$$

Questo perché la velocità di trascinamento non è uguale per ogni punto di S' (qualsiasi caso di moto non puramente traslatorio). In particolare si possono dietinguere due casi:

a) $\vec{\omega} = 0$
   in questo caso si parla di **moto traslatorio**, tutti i punti di S' si muovono alla stessa velocità: $\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}$;

b) $\vec{\omega} \neq 0$
   $\vec{v}_\tau$ varia da punto a punto, se si considera la sola coponente di rotazione la (1.2) può essere riscritta come

$$\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \ .$$

Si dimostra che la dipendenza tra $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ è più conmplessa e risulta essere

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} \ . \tag{1.3}$$

Dove, considerando la (1.1) e la (1.3) si può scrivere:

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

e

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

1.12 Trasformazioni di Galileo

In breve, tenendo conto che $\vec{R} = \vec{V}t$, allora si dicono trasformazioni di Galielo le seguenti

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t' \\ t = t' \end{cases} ,$$

e per $\vec{V} = costante$ si ha:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases} .$$

Capitolo 2

Dinamica