Le cose della Fisica I

Luca Ceriani

Torino, 25 maggio 2017

Indice

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Velocità

Tenendo conto della definizione di derivata di un vettore, la velocità si può scrivere come

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Si consideri poi il vettore tangente alla traiettoria $\hat{u}_t$, esso può essere espresso come

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

e quindi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t \ .$$

Notare che l'espressione $\frac{ds}{dt}$ prende il nome di velocità scalare:

$$v_s = \frac{ds}{dt} \ .$$

1.2 Accelerazione

Conoscendo il vettore velocità $\vec{v}(t)$, si considera accelerazione la variazione di questo vettore nel tempo. In formule:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \ .$$

Se ci si riferisce ad una traiettoria $\vec{s}(t)$, utilizzando le relazioni trovate in precedenza si avrà

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_t + v_s \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

1.3 Classificazione dei moti elementari

Fissando l'attenzione sull'*equazione oraria*, possiamo definire due importanti calssi di moto:

1. moti uniformi ($v_s \equiv \dot{s} = cost = \dot{s}_0$);

2. moti con accelerazione tangenziale costante ($a_t \equiv \ddot{s} = cost = \ddot{s}_0$).

Dal punto di vista geometrico, i moti con traiettoria notevole sono:

1. i *moti rettilinei*, caratterizzati da $\rho \to \infty$;

2. i *moti circolari*, in cui $\rho = cost$.

Dove ρ è il raggio di curvatura.

1.4 Moti rettilinei

Moto rettilineo uniforme	$x(t) = v_0 t + x_0$
Moto rettilineo uniformemente accelerato	$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$
	$\dot{x}(t) = v(t) = a_0 t + v_0$

1.5 Moti circolari

Per i moti circolari di definiscono alcune grandezze. Per un generico moto circolare si può scrivere:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \ .$$

dove

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\hat{k} = \dot{\theta}\hat{k} \ .$$

Si può anche definire un'**accelerazione angolare** come segue:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{k} = \ddot{\theta}\hat{k} \ ,$$

e quindi

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \ . \tag{1.1}$$

1.6 Moto circolare uniforme

Detto T il periodo del moto, si definisce la **pulsazione** come:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \ .$$

1.7 Moto oscillatorio armonico

Si consideri un corpo che si muove lungo una retta con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ ,$$

possiamo calcolare la velocità e l'accelerazione per ogni instante di t:

$$\begin{cases} v_x = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ a_x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

L'equazione differenziale del moto oscillatorio armonico, su una traiettoria qualunque vale:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{1.2}$$

1.8 Moto parabolico

In breve le formule del moto parabolico nelle componenti x e y:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos(\alpha) t) \\ y(t) = (v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2) \end{cases} \ ,$$

mentre la gittata, intesa come la distanza percorsa su x se il lancio è avvenuto ad altezza 0 sarà:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \ .$$

1.9 Velocità e accelerazione in coordinate polari piane

Considerando un sistema di coordinate polari, nei quali la posizione è definita da $\vec{r} = r\hat{u}_r$, si definiscono velocità e accelerazione come segue:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta \end{aligned}$$

1.10 Problema inverso della cinematica

Dato che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, si possono scrivere le relazioni inverse in termini di integrali, ovvero:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \end{aligned}$$

1.11 Trasformazione di velocità e di accelerazione

Se si suppongo lo *spazio e il tempo assoluti* e considerato $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ e $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$, allora si domostra facilmente che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_\tau}$$

dove $\vec{v_\tau}$ è detta *velocità di trascinamento*. Posto $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt}$, allore la velocità di trascinamento si potrà esprimere nella forma

$$\vec{v_\tau}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)] \ . \tag{1.3}$$

Questo perché la velocità di trascinamento non è uguale per ogni punto di S' (qualsiasi caso di moto non puramente traslatorio). In particolare si possono dietinguere due casi:

a) $\vec{\omega} = 0$
in questo caso si parla di **moto traslatorio**, tutti i punti di S' si muovono alla stessa velocità: $\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}$;

b) $\vec{\omega} \neq 0$
$\vec{v}_\tau$ varia da punto a punto, se si considera la sola coponente di rotazione la (1.3) può essere riscritta come

$$\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \ .$$

Si dimostra che la dipendenza tra $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ è più conmplessa e risulta essere

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} \ . \tag{1.4}$$

Dove, considerando la (1.1) e la (1.4) si può scrivere:

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

e

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

1.12 Trasformazioni di Galileo

In breve, tenendo conto che $\vec{R} = \vec{V}t$, allora si dicono trasformazioni di Galielo le seguenti

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t' \\ t = t' \end{cases} ,$$

e per $\vec{V} = costante$ si ha:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases} .$$

Capitolo 2

Dinamica

2.1 Le tre leggi di Newton

Il problema tipico della meccanica è determinare il moto di un corpo che interagisce con l'ambiente circostante caratterizzato dalla presenza di altri corpi. Newton formula le tre leggi della dinamica che recitano:

1. *"Ciascun corpo persisterà nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non è indotto a cambiare il suo stato da forze che agiscono su di esso."*
2. *"L'accelerazione prodotta da una forza è proporzionale alla massa inerziale del corpo"*:
$$\vec{F} = m\vec{a} \ .$$
3. *"Ad ogni forza ne corrisponde una uguale e contraria."*

2.2 Teorema delle quantità di moto

Facendo riferimento alla seconda legge di Newton, si può affermare che ogni volta che un corpo cambia la sua quantità di moto è a causa di una forza e si può scrivere la seguente relazione [1]

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ . \tag{2.1}$$

Si definisce poi l'impulso di una forza come l'azione di quella forza nel tempo, in formule:

$$\vec{J} = \int_{t1}^{t2} \vec{F}(t)dt \tag{2.2}$$

Data l'equazione (2.1) si può scrivere $\vec{F}dt = d\vec{p}$, da cui, considerando la (2.2) si ricava che

$$\vec{J} = \int_{t1}^{t2} d\vec{q} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 \equiv \Delta\vec{q} \ .$$

2.3 Legge di Hooke

Nel caso di una molla ideale la forza prodotta dalla molla segue la *Legge di Hooke* che recita come segue:

$$\vec{F}_e = -kx\hat{u}_x \ .$$

Partendo da questa legge è facile dimostrare che un corpo di massa m su cui agisce una forza elastica si muove di moto oscillatorio armonico, infatti

$$\vec{F}_e = -m\vec{a} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ ,$$

che è esattamente l'equazione differenziale (1.2), la cui soluzione generale è del tipo

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

2.4 Pendolo semplice

Le uniche forze che agiscono su di un pendolo semplice sono la forza di gravità e la reazione vincolare del filo. Per determinare l'equazione del moto, si può quindi scrivere

$$\vec{F}_g + \vec{R} = m\vec{a} \ .$$

Utilizzando le coordinate intrinseche per descrivere la posizione del pendolo e tenuto conto dell'accelerazione centripeta, l'equazione del moto diventa:

$$\begin{cases} -mg\sin(\theta) = m\ddot{s} \\ -mg\cos(\theta) + R = m\dfrac{\dot{s}^2}{L} \end{cases}$$

Ricordandosi che $\theta = \dfrac{s}{L}$, la prima equazione diventa:

$$\ddot{s} + g\sin\left(\frac{s}{L}\right) = 0 \ ,$$

che, per oscillazioni piccole si può riscrivere come

$$\ddot{s} + \frac{g}{L}s = 0$$

che è la nota equazione del moto oscillatorio armonico di pulsazione $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$. L'oscillazione ha periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \ .$$

2.5 Attrito radente statico

Se si definisce con $\vec{R}_t$ la forza d'attrito che si oppone la moto, il valore massimo dell'attrito può essere scritto come $R_t^{max} = \mu_s N$ e la legge dell'attrito risulta

$$R_t \leq \mu_s N$$

2.6 Attrito randente dinamico

Come l'attrito statico, l'attrito dinamico si presenta nella forma $R_t = \mu_d R_n$. La forza $\vec{R}_t$ è doretta in verso opposto al versore $\hat{u}_v$ della velocità relativa v tra le due superfici di contatto, per cui:

$$\vec{R}_t = -\mu_d N \hat{u}_v$$

Capitolo 3

Energia e lavoro

3.1 Lavoro di una forza

Per una forza$\vec{F}$ che non varia da punto a punto si definisce il lavoro di quella forza come prodotto tra la forza e lo spostamento:

$$W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \vec{AB} \equiv \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \ ,$$

che, in modulo, diventa

$$W = F\Delta r \cos(\theta) \ .$$

Si definisce lavoro elementare di una forza $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, integrando si ottiene:

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

3.2 Energia cinetica

Si definisce l'energia cinetica associata a un corpo di massa m e di velocità v come

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \ .$$

Si può dimostrare facilmente che

$$L_{A\to B} = E_k^A - E_k^B \tag{3.1}$$

scrivendo

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot \vec{a}dt$$

e poiché l'energia cinetica E_k può essere scritta come $\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$, risulta

$$dE_k = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = m\vec{v} \cdot \vec{a}dt \ ,$$

quindi

$$dL = dE_k$$

che, interegrando diventa la (3.1).

3.3 Forze conservative

Una forza si dice conservativa se e solo se il lavoro che essa compie su un oggetto generico dipende solo dalla posizione iniziale e quella finale indipendentemente dalla traiettoria seguita.
È ovvio che quindi che lungo un camminco chiuso, nel quale la posizione di partenza P_1 e la posizione di arrivo P_2 coincidano il lavoro svolto è nullo, questa relazione si puù scrivere come:

$$\oint_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv 0 \ ,$$

questa relazione prende il nome di *circuitazione*

3.4 Energia potenziale

Se una forza è conservativa, possiamo associare ad esse una quantità E_p che prende il nome di *energia potenziale*, che dipende soltanto dalla posizione della particella, in modo tale che valga:

$$W_{(P_1,P_2)} = E_p(P_1) - E_p(P_2) \ .$$

Nel caso di una forza conservativa, la relazione precedente può essere scritta come

$$W_{(P_1,P_2)} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = E_{k,2} - E_{k,1} \ .$$

Se si definisce l'*energia meccanica totale* come $E \equiv E_k + E_p$, essa si conserva durante il moto della particella

$$E \equiv E_p + E_k = E_p + \frac{1}{2}mv^2 = costante \ .$$

Note

[1] $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$