

Le cose della Fisica I

Luca Ceriani

Torino, 15 maggio 2017

Indice

1	Cinematica	2
1.1	Velocità	2
1.2	Accelerazione	2
1.3	Classificazione dei moti elementari	3
1.4	Moti rettilinei	3
1.5	Moti circolari	3
1.6	Moto circolare uniforme	4
1.7	Moto oscillatorio armonico	4
1.8	Moto parabolico	4
1.9	Velocità e accelerazione in coordinate polari piane	5
1.10	Problema inverso della cinematica	5
1.11	Trasformazione di velocità e di accelerazione	5
1.12	Trasformazioni di Galileo	7
2	Dinamica	8
2.1	Le tre leggi di Newton	8
2.2	Teorema delle quantità di moto	8
2.3	Legge di Hooke	9

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Velocità

Tenendo conto della definizione di derivata di un vettore, la velocità si può scrivere come

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Si consideri poi il vettore tangente alla traiettoria \hat{u}_t , esso può essere espresso come

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

e quindi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t .$$

Notare che l'espressione $\frac{ds}{dt}$ prende il nome di velocità scalare:

$$v_s = \frac{ds}{dt} .$$

1.2 Accelerazione

Conoscendo il vettore velocità $\vec{v}(t)$, si considera accelerazione la variazione di questo vettore nel tempo. In formule:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} .$$

Se ci si riferisce ad una traiettoria $\vec{s}(t)$, utilizzando le relazioni trovate in precedenza si avrà

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_t + v_s \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

1.3 Classificazione dei moti elementari

Fissando l'attenzione sull'*equazione oraria*, possiamo definire due importanti classi di moto:

1. moti uniformi ($v_s \equiv \dot{s} = cost = \dot{s}_0$);
2. moti con accelerazione tangenziale costante ($a_t \equiv \ddot{s} = cost = \ddot{s}_0$).

Dal punto di vista geometrico, i moti con traiettoria notevole sono:

1. i *moti rettilinei*, caratterizzati da $\rho \rightarrow \infty$;
2. i *moti circolari*, in cui $\rho = cost$.

Dove ρ è il raggio di curvatura.

1.4 Moti rettilinei

Moto rettilineo uniforme $x(t) = v_0 t + x_0$

Moto rettilineo uniformemente accelerato $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$
 $\dot{x}(t) = v(t) = a_0 t + v_0$

1.5 Moti circolari

Per i moti circolari si definiscono alcune grandezze. Per un generico moto circolare si può scrivere:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) .$$

dove

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{k} = \dot{\theta} \hat{k} .$$

Si può anche definire un'accelerazione angolare come segue:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{k} = \ddot{\theta} \hat{k} ,$$

e quindi

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) . \quad (1.1)$$

1.6 Moto circolare uniforme

Detto T il periodo del moto, si definisce la **pulsazione** come:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} .$$

1.7 Moto oscillatorio armonico

Si consideri un corpo che si muove lungo una retta con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

possiamo calcolare la velocità e l'accelerazione per ogni istante di t :

$$\begin{cases} v_x = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ a_x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

L'equazione differenziale del moto oscillatorio armonico, su una traiettoria qualunque vale:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (1.2)$$

1.8 Moto parabolico

In breve le formule del moto parabolico nelle componenti x e y :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos(\alpha)t) \\ y(t) = (v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2) \end{cases} ,$$

mentre la gittata, intesa come la distanza percorsa su x se il lancio è avvenuto ad altezza 0 sarà:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2 .$$

1.9 Velocità e accelerazione in coordinate polari piane

Considerando un sistema di coordinate polari, nei quali la posizione è definita da $\vec{r} = r\hat{u}_r$, si definiscono velocità e accelerazione come segue:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta\end{aligned}$$

1.10 Problema inverso della cinematica

Dato che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, si possono scrivere le relazioni inverse in termini di integrali, ovvero:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t')dt' \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t')dt'\end{aligned}$$

1.11 Trasformazione di velocità e di accelerazione

Se si suppongo lo *spazio e il tempo assoluti* e considerato $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ e $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$, allora si dimostra facilmente che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_\tau$$

dove \vec{v}_τ è detta *velocità di trascinamento*. Posto $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt}$, allora la velocità di trascinamento si potrà esprimere nella forma

$$\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)] . \quad (1.3)$$

Questo perché la velocità di trascinamento non è uguale per ogni punto di S' (qualsiasi caso di moto non puramente traslatorio). In particolare si possono distinguere due casi:

a) $\vec{\omega} = 0$

in questo caso si parla di **moto traslatorio**, tutti i punti di S' si muovono alla stessa velocità: $\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}$;

b) $\vec{\omega} \neq 0$

\vec{v}_τ varia da punto a punto, se si considera la sola componente di rotazione la (1.3) può essere riscritta come

$$\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) .$$

Si dimostra che la dipendenza tra \vec{a} e \vec{a}' è più complessa e risulta essere

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} . \quad (1.4)$$

Dove, considerando la (1.1) e la (1.4) si può scrivere:

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

e

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

1.12 Trasformazioni di Galileo

In breve, tenendo conto che $\vec{R} = \vec{V}t$, allora si dicono trasformazioni di Galileo le seguenti

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t' \\ t = t' \end{cases},$$

e per $\vec{V} = \text{costante}$ si ha:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}.$$

Capitolo 2

Dinamica

2.1 Le tre leggi di Newton

Il problema tipico della meccanica è determinare il moto di un corpo che interagisce con l'ambiente circostante caratterizzato dalla presenza di altri corpi. Newton formula le tre leggi della dinamica che recitano:

1. *“Ciascun corpo persisterà nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non è indotto a cambiare il suo stato da forze che agiscono su di esso.”*
2. *“L’accelerazione prodotta da una forza è proporzionale alla massa inerziale del corpo”:*

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

3. *“Ad ogni forza ne corrisponde una uguale e contraria.”*

2.2 Teorema delle quantità di moto

Facendo riferimento alla seconda legge di Newton, si può affermare che ogni volta che un corpo cambia la sua quantità di moto è a causa di una forza e si può scrivere la seguente relazione:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} . \quad (2.1)$$

Si definisce poi l'impulso di una forza come l'azione di quella forza nel tempo, in formule:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (2.2)$$

Data l'equazione (2.1) si può scrivere $\vec{F}dt = d\vec{p}$, da cui, considerando la (2.2) si ricava che

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{q} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 \equiv \Delta\vec{q}.$$

2.3 Legge di Hooke

Nel caso di una molla ideale la forza prodotta dalla molla segue la *Legge di Hooke* che recita come segue:

$$\vec{F}_e = -kx\hat{u}_x.$$

Partendo da questa legge è facile dimostrare che un corpo di massa m su cui agisce una forza elastica si muove di moto oscillatorio armonico, infatti

$$\vec{F}_e = -m\vec{a} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

che è esattamente l'equazione differenziale (1.2), la cui soluzione generale è del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2.4 Pendolo semplice