Permutazioni

- Coniugio in S_n

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) \qquad \tau = (1\ 3\ 5) \quad \text{in } S_7$$

$$\underbrace{\sigma\tau\sigma^{-1}}_{\text{so già che è un 3-ciclo}} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & \xmapsto{\sigma^{-1}} & 7 & \xmapsto{\tau} & 7 & \xmapsto{\sigma} & 1 \\ 2 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 4 \\ 3 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 5 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 5 \\ 6 & \longmapsto & 5 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 2 \\ 7 & \longmapsto & 6 & \longmapsto & 6 & \longmapsto & 7 \end{array} \right\} = (2\ 4\ 6) = (\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5))$$

OSS: la permutazione $\sigma\tau\sigma^{-1}$ non agisce su $1, 3, 5$, ma su $\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5)$: infatti

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(i)) = (\sigma\tau)(i) \begin{cases} \sigma(i) & \text{cioè quello che avevo} \quad (\tau \text{ non agisce su } i) \\ \underline{\sigma\tau(i)} & (\tau \text{ agisce su } i) \end{cases}$$

In generale

$$\tau = (c_{11}, \dots, c_{1e_1})(\dots)(c_{k1}, \dots, c_{ke_k})$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(c_{11}), \dots, \sigma(c_{1e_1}))(\dots)(\sigma(c_{k1}), \dots, \sigma(c_{ke_k}))$$

Infatti (i) la scrittura finale è una decomposizione in cicli perché se i c_{ij} erano tutti i numeri $\{1, \dots, n\}$ allora i $\sigma(c_{ij})$ saranno ancora tutti i numeri $\{1, \dots, n\}$ una e una sola volta

(ii) $\sigma\tau\sigma^{-1}$ e la perm. a dx sono uguali se le loro imm. sono uguali $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, ma $\forall j\ \exists i : j = \sigma(i)$, dunque lo controllo su $\sigma(i)$

SX: $(\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(i)) = (\sigma\tau)(i)$

DX: i deve essere uno dei c_{ab} $\Rightarrow$

$$(\text{cicli})(\sigma(c_{ab})) = \sigma(c_{a\,b+1}) = \sigma\tau(c_{ab}) = \sigma\tau(i) \quad \checkmark$$

Studio di S_5

(1) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ $\qquad \tau = (2\ 5)(3\ 4)$

$$H = \langle \sigma, \tau \rangle \qquad H_1 = \langle \sigma \rangle \qquad H_2 = \langle \tau \rangle$$
$$\qquad\qquad\qquad \underset{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{\wr\wr} \qquad\qquad \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\wr\wr}$$

Intanto H ha ordine multiplo di 10

Inoltre H contiene tutti i prodotti $\sigma^{i_1} \tau^{i_2} \sigma^{i_3} \dots$

Però $\tau\sigma\underset{\tau^{-1}}{\tau} = ?$ $\qquad \sigma\tau\sigma = ?$

$\Rightarrow$ τ normalizza σ? Cioè, $\tau \in N_{S_5}(H_1)$?

Se sì $\to$ $H_1 H_2$ è un sottogruppo

$\qquad\to$ $\tau\sigma\tau^{-1} \in \{1, \sigma, \dots, \sigma^4\}$

Usando la formula, $\tau\sigma\tau = \tau\sigma\tau^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2) = \sigma^{-1}$

$\Rightarrow$ ogni scrittura di $\langle \sigma, \tau \rangle \ni \sigma^i \tau^j \sigma^k \dots$

può essere scritta come $\underset{H_1 H_2}{\underset{\cap}{\sigma^n \tau^m}}$ perché $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$

OSS: questo è il motivo per cui se $H_2 < N_{S_5}(H_1)$ segue che $H_1 H_2$ è sgrp.

$\Rightarrow \tau \in N_{S_5}(\langle \sigma \rangle)$

Dovrei verificare: $\forall g \in \langle \sigma \rangle\ \exists h \in \langle \sigma \rangle : \tau g \tau^{-1} = h$

$\iff \forall i\ \exists j$ t.c. $\tau\sigma^i\tau^{-1} \overset{?}{=} \sigma^j$

$$\tau\sigma^i\tau^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})^i$$

$\iff \exists k$ t.c. $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^k$ $\quad \checkmark$

Lemma: $H_1 H_2$ è sgrp di S_5

$$H_1, H_2 \subseteq H_1 H_2 \Rightarrow \langle H_1, H_2 \rangle = H \subseteq H_1 H_2$$

D'altro canto H ha ordine multiplo di 10, e

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = 10$$

$\Rightarrow H = H_1 H_2$

Infine ha 10 elementi e i gruppi con $\overset{2p}{\overset{\shortparallel}{10}}$ elementi sono

$$\mathbb{Z}/_{10}\mathbb{Z} \quad e \quad D_5$$

- ma questo non è abeliano $\Rightarrow$ è D_5

oppure

- $\mathbb{Z}/_{10}\mathbb{Z}$ ha un el. di ordine 10, e in S_5 non ci sono el. di ordine 10 (dovrebbero essere 10-cicli oppure almeno $2+5$ $\rightsquigarrow$ non ci stanno)

oppure

- $H_1 H_2 = \langle \sigma, \tau \rangle$ con $\sigma^5 = \tau^2 = id$ e $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$
  $\Rightarrow D_5$

(2) Determinare $Z_{S_5}(\sigma) := Z_{S_5}(\langle\sigma\rangle) = \{g \in S_5 : g\sigma = \sigma g\}$.

OSS: considero l'azione di S_5 su se stesso per coniugio:

$$\tau_1 \cdot \tau_2 := \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}$$

$$\mathrm{Orb}(\sigma) = \{\tau\sigma\tau^{-1} : \tau \in S_n\} = \{5\text{-cicli di } S_5\}$$

$$\Rightarrow \# \mathrm{Orb}(\sigma) = \#\{5\text{-cicli di } S_5\} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$$

$$\mathrm{Stab}_{S_5}(\sigma) = \{g \in S_5 : g\sigma g^{-1} = \sigma\} = Z_{S_5}(\sigma)$$

$\Rightarrow$ Lemma Orbita - Stab: $\# \mathrm{Orb}(\sigma) = \dfrac{\# S_5}{\# \mathrm{Stab}_{S_5}(\sigma)}$

$$\Rightarrow \# \mathrm{Stab}_{S_5}(\sigma) = \# Z_{S_5}(\sigma) = \frac{\# S_5}{\# \mathrm{Orb}(\sigma)} = \frac{5!}{4!} = 5$$

Ma $\langle\sigma\rangle \leq Z_{S_5}(\sigma) \Rightarrow Z_{S_5}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.

(3) $N_{S_5}(\sigma) =: N$?

Sicuramente $\tau, \sigma \in N \Rightarrow \langle\tau,\sigma\rangle \leq N$.

Siccome $\langle\sigma\rangle \trianglelefteq N$ posso considerare

$$\begin{aligned} \Phi : N &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle) \\ n &\longmapsto \varphi_n|_{\langle\sigma\rangle} \end{aligned}$$

$$\ker\Phi = \{n \in N : \varphi_n|_{\langle\sigma\rangle} = id\} = \{n \in N : n\sigma n^{-1} = \sigma\}$$
$$= Z_{S_5}(\sigma)$$

LEMMA $H \trianglelefteq N$. Allora ho un omomorfismo

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \mathrm{Aut}(H) \\ n &\longmapsto \varphi_n|_H \end{aligned}$$

con nucleo il centralizzatore di H.

Tornando al nostro caso

$$N \longrightarrow \mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^{\times} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

Per il 1° Teor. di Omom. si ha che

$$N/Z_{S_5}(\sigma) \text{ è } \simeq \text{ ad un sogrp. di } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow |N| \mid 4|Z|^{=5}$. D'altro canto $\#\langle\tau,\sigma\rangle \mid |N|$

$\Rightarrow 10 \mid |N| \mid 20 \Rightarrow \#N \in \{10, 20\}$.

Più precisamente: $\dfrac{\#N^{\to 10/20}}{\#Z_{\to 5}} = \underbrace{\#\mathrm{Im}\,\Phi}_{2 \text{ o } 4}$ e vogliamo capire se

$\# \operatorname{Im} \Phi$ ha 2 o 4 elementi.

Se è 4, $\exists n \in N$ t.c.

$$\Phi(n) = \varphi_n = (\sigma \mapsto \sigma^2)$$

$$\iff \quad n \sigma n^{-1} = \sigma^2$$

Ricordiamo che $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5) \Rightarrow \sigma^2 = (1, 3, 5, 2, 4)$

Allora $n \sigma n^{-1} = (n(1), \ldots, n(5))$, dunque

$$n = (1)(2\;3\;5\;4) = (2\;3\;5\;4)$$

Dunque $n \in N_{S_5}(\sigma)$ e $\Phi(n) = (\sigma \mapsto \sigma^2)$.

Si conclude perché $\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ e quindi N ha 20 elementi.

$$\Rightarrow N = \langle \sigma, (2\;3\;5\;4) \rangle \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

ovvio $\rightarrow$ mi serve un el. di ordine 4

(4) Quanti sogp. isomorfi a D_5 ci sono in S_5?

Mi serve un sottogruppo di ordine 5 e poi per ognuno conto i D_5 contenuti nel normalizzatore del sogp. di ordine 5.

¿PERCHÉ? Perché sicuramente preso due sogp. H di ordine 5 diversi, questi corrispondono a D_5 diversi. Inoltre $H \triangleleft D_5$, cioè il D_5 scelto normalizza H, cioè $D_5 \subseteq N_{S_5}(H)$

$\Rightarrow$ Per ogni H conto i D_5 contenuti in $N_{S_5}(H)$

Per contare i sogp. di ordine 5 osservo che sono l'orbita di $\langle \sigma \rangle$

sotto l'azione di S_5 sui suoi sottogruppi data dal coniugio:

$$\rho \cdot H := \rho H \rho^{-1}$$

Dunque per orb-stab:

$$\#\,Orb(\langle\sigma\rangle) = \frac{|S_5|}{|Stab_{S_5}(\langle\sigma\rangle)|}$$

$$\#\,Orb(\langle\sigma\rangle) = \#\{H < S_5 : |H| = 5\}$$

$$|Stab_{S_5}(\langle\sigma\rangle)| = \#\{g \in S_5 : g\langle\sigma\rangle g^{-1} = \langle\sigma\rangle\} = \# N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$$

- Il normalizzatore l'abbiamo già calcolato e ha 20 elementi

$\Rightarrow \#\,Orb(\langle\sigma\rangle) = 6 \rightsquigarrow 6$ sogp. di ordine 5

- Al contrario però se non sapessi $|N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)|$ potrei usare la formula per calcolarlo, a patto di saper calcolare direttamente il n° di sogp. di ord 5

Come faccio? Ogni sogp. di ordine 5 ha
- id
- 4 el di ordine 5

Inoltre due tali sogp. si intersecano banalmente: infatti se avessero un el. in comune oltre all'identità avrebbero un generatore in comune $\Rightarrow$ sarebbero uguali

(equiv: $H_1 \cap H_2 < H_1, H_2 \Rightarrow$ ha ord 1 o 5
$\Rightarrow$ è $\{id\}$ oppure è $H_1 \cap H_2 = H_1 = H_2$)

$\Rightarrow$ Prendo tutti gli el. di ordine 5 e osservo che ognuno di essi ha 4 di questi elementi (tutti diversi)

$$\Rightarrow \#\text{ sogp ord } 5 = \frac{\#\text{ n° el. di ord 5}}{\#\text{ n° el di ordine 5 in ogni sogp}} = \frac{24}{4} = 6 \quad \checkmark$$

Dato ora $N = N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$, quanti sottogr. di N sono $\simeq D_5$?

OSS La risposta non cambia scegliendo $\langle \overset{\text{ord } 5}{\sigma'} \rangle$ invece di $\langle\sigma\rangle$: infatti $N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$ e $N_{S_5}(\langle\sigma'\rangle)$ sono coniugati e quindi isomorfi.

DIM: Abbiamo dim che se due el. sono nella stessa orbita allora gli stab. sono coniugati. In questo caso l'azione è il coniugio su sottogr., $\langle\sigma\rangle$ e $\langle\sigma'\rangle$ sono nella stessa orbita e dunque gli stab, cioè $N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$ e $N_{S_5}(\langle\sigma'\rangle)$ sono coniugati. ∎

$$\langle\sigma\rangle < \overset{\simeq D_5}{G} < N = N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$$

$$\text{e } \langle\sigma\rangle \trianglelefteq N$$

$\Rightarrow$ CORRISP! I sottogruppi di N contenenti $\langle\sigma\rangle$ sono in biy. con i sottogruppi di $\dfrac{N}{\langle\sigma\rangle}$

Al punto (3) abbiamo dim che $\dfrac{N}{Z_{S_5}(\langle\sigma\rangle)} \simeq \mathbb{Z}/_{4}\mathbb{Z}$

e al punto (2) abbiamo dim che $Z_{S_5}(\langle\sigma\rangle) = \langle\sigma\rangle$

$\Rightarrow \dfrac{N}{\langle\sigma\rangle} \simeq \mathbb{Z}/_{4}\mathbb{Z}$. I sottogruppi di $\mathbb{Z}/_{4}\mathbb{Z}$ sono

$$\{0\}\ ,\ \langle 2\rangle = \{0, 2\}\ ,\ \mathbb{Z}/_{4}\mathbb{Z}$$

Ora $\overset{\simeq D_5}{G}$ ha 10 el. e $\langle\sigma\rangle$ ne ha 5 $\Rightarrow \pi(G) = G/_{\langle\sigma\rangle}$ ha 2 elementi $\Rightarrow$ è $\langle 2\rangle$

Dunque esiste un solo D_5 in $N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$!

Dato che ci sono 6 scelte per il "sottogruppo delle rotazioni" $\langle\sigma\rangle$ ho in tutto 6 D_5 in S_5. ∎

PICCOLA MIA IMPRECISIONE: so che c'è un solo sgrp. di ordine 10 in $N(\langle\sigma\rangle)$ ma non so se sia eff. D_5!
In effetti uno ce n'è perché l'abbiamo trovato al punto 1
$\Rightarrow$ ce n'è esattamente 1!

CONCLUSIONE: $\forall R < S_5$, $|R| = 5$ $\exists!\, G_R < S_5$ con $R \triangleleft G_R$ e $G_R \simeq D_5$

CLASSI DI CONIUGIO IN A_5

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in A_5$. Descrivere $\mathcal{C}l(\sigma)$ in A_5.

A_5 agisce su A_5 per coniugio e $\mathcal{C}l(\sigma) = \mathrm{Orb}(\sigma)$

$$\Rightarrow |\mathcal{C}l(\sigma)| = \frac{|A_5|}{\#\mathrm{Stab}_{A_5}(\sigma)} = \frac{5!/2}{|Z_{S_5}(\sigma) \cap A_5|} = \frac{60}{|\langle\sigma\rangle \cap A_5|}$$

$\hookrightarrow$ ma ogni potenza di σ è pari!

$$= \frac{60}{|\langle\sigma\rangle|} = \frac{60}{5} = 12$$

$\Rightarrow$ È diversa dalla classe in S_5! Esistono 5-cicli non coniugati a σ in A_5!

CLAIM: Sostengo che $\sigma_2 := \underset{\tau}{(1\ 2)}(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2)$ non sia coniugato a σ in A_5.

Mi sto chiedendo se $\exists \rho \in A_5$ t.c. $\rho\sigma_2\rho^{-1} = \sigma$, cioè

$$\rho\tau\sigma\tau^{-1}\rho^{-1} = \sigma, \text{ cioè}$$

$$(\rho\tau)\sigma(\rho\tau)^{-1} = \sigma, \text{ cioè}$$

$$\rho\tau \in Z_{S_5}(\sigma) = \langle\sigma\rangle, \text{ cioè}$$

$$\exists i \text{ t.c. } \rho\tau = \sigma^i.$$

Ma $\mathrm{sgn}(\rho\tau) = \mathrm{sgn}(\rho)\,\mathrm{sgn}(\tau) = -1$, mentre $\mathrm{sgn}(\sigma^i) = 1$.

FATTO GENERALE: Sia $\sigma \in A_n$. Allora vale una delle seguenti:

(*) $\mathcal{Cl}_{A_n}(\sigma) = \mathcal{Cl}_{S_n}(\sigma) = \{\sigma' \in S_n : \sigma \text{ e } \sigma' \text{ hanno lo stesso tipo}\}$

(*) $\mathcal{Cl}_{S_n}(\sigma)$ è l'unione delle classi di coniugio in A_n di σ e $(1\,2)\,\sigma\,(1\,2)$, ovvero

$$\mathcal{Cl}_{S_n}(\sigma) = \mathcal{Cl}_{A_n}(\sigma) \sqcup \mathcal{Cl}_{A_n}\big((1\,2)\,\sigma\,(1\,2)\big)$$

Il secondo caso accade se e solo se $Z_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$.

"DIM" $\quad \#\mathcal{Cl}_{A_n}(\sigma) = \dfrac{\#A_n}{\#(Z_{S_n}(\sigma) \cap A_n)} = \dfrac{\frac{1}{2}\#S_n}{\#(Z_{S_n}(\sigma) \cap A_n)}$

e $\quad |Z_{S_n}(\sigma) \cap A_n| \in \left\{ |Z_{S_n}(\sigma)|, \tfrac{1}{2}|Z_{S_n}(\sigma)| \right\}$

Nel secondo caso $\#\mathcal{Cl}_{A_n}(\sigma) = \dfrac{\#S_n}{\#Z_{S_n}(\sigma)} = \#\mathcal{Cl}_{S_n}(\sigma)$.

TUTTE LE CLASSI DI CONIUGIO IN A_5!

In S_5	CONTO	PARITÀ	IN A_5
$\{id\}$	1	pari	$\{id\}$
2-cicli	$\binom{5}{2} = 10$	dispari	×
2+2	$\binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{2!} = 15$	pari	2+2 : rimane singola perché $Z((1\,2)(3\,4))$ contiene $(1\,2)$ che è dispari
3-cicli	$\binom{5}{3}\cdot\frac{3!}{3} = 30$	pari	3 : " " perché $Z((1\,2\,3))$ contiene $(4\,5)$
3+2	$\binom{5}{3}\cdot\frac{3!}{3}\binom{2}{2} = 20$	dispari	×
4 cicli	$\binom{5}{4}\frac{4!}{4} = 30$	dispari	×
5 cicli	$\binom{5}{5}\frac{5!}{5} = 24$	pari	$\mathcal{Cl}((1\,2\,3\,4\,5)) \sim 12$ elementi; $\mathcal{Cl}((2\,1\,3\,4\,5)) \sim 12$ elementi

A_5 è SEMPLICE.

Sia $H \triangleleft A_5$. Allora $H = \{id\}$ oppure $H = A_5$.

DIM: Se H contiene σ, allora contiene la sua intera classe di coniugio:

un sottogr. normale è sempre unione di classi di coniugio.

Allora sicuramente $H \ni \{id\}$, $\#H \mid \#A_5 = 60$, e $\#H$ deve essere

somma di alcuni di $\{1, 20, 15, 12, 12\}$

Ma nessuna delle somme contenenti 1 è un divisore di 60 $(\neq 1, 60)$

$\Rightarrow H$ è $\{id\}$ o A_5. ■

ALTRO MODO:

OSS Sia $N \triangleleft G$. Se $p \nmid [G:N]$, allora tutti gli el. di ordine p sono in N.

DIM $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$, $g \in G$ di ordine p.

Allora $\pi(g)$ ha ordine che divide $\# G/N$ e $ord(g) \Rightarrow ord\, \pi(g) = 1$

$\Rightarrow g \in N$. ■

Con questa osservazione possiamo escludere che $\#H$ sia 15 ad es:

Se $\#H = 15$ allora $[G:H] = 4 \Rightarrow$ tutti i 3 e 5 cicli sono in H

$\Rightarrow H$ dovrebbe avere al meno 44 elementi, ASSURDO.

Stessa cosa per 20, ... tranne il caso $\#H = 2$

Però se $\#H = 2$ normale allora $H = \{e, \rho\}$ con $\rho \in Z(A_5)$

(infatti $g\rho g^{-1} \in \{e, \rho\}$ ma non può venire e $\Rightarrow g\rho = \rho g$)

ma $Z(A_5) = \{e\}$. ■