LEZIONE 7-10-2020

ES Sia G un p-gruppo, $H \lneq G$. Dimostrare che $N_G(H) \supsetneq H$.

CONSEGUENZA: $H_0 = H$, $H_{i+1} := N_G(H_i)$

Allora $H_0 \underset{\neq}{\trianglelefteq} H_1 \underset{\neq}{\trianglelefteq} H_2 \underset{\neq}{\trianglelefteq} \dots \underset{\neq}{\trianglelefteq} H_k = G$.

DIM Ricordiamo che essendo G un p-gruppo, $Z(G) \neq \{id\}$.

(*) Se $Z(G) \not\subseteq H$ il problema è facile: infatti in tal caso $\exists\, z \in Z(G) \setminus H$, e questo el rispetta $zHz^{-1} = H$ $\Rightarrow z \in N_G(H) \setminus H \Rightarrow N_G(H) \supsetneq H$.

(*) Caso "difficile": $Z(G) \subseteq H$.

IDEA: quoziento per $Z(G)$: siccome $H \supseteq Z(G)$ c'è anche il teorema di corr.

Per induzione su n (dove n è t.c. $|G| = p^n$)

[CASO BASE] $n=1 \Rightarrow |G| = p \Rightarrow$ l'unico sottogruppo $H \lneq G$ è $\{e\}$ e $N_G(\{e\}) = G \supsetneq H$.

[INDUZIONE] Supponiamo $|G| = p^{n+1}$, $H \lneq G$. Allora

(*) se $Z(G) \not\subseteq H$ visto sopra.

Supponiamo allora che $Z(G) \subseteq H$ e consideriamo $H/Z(G) < G/Z(G)$,

$$\pi : G \twoheadrightarrow G/Z$$

Siccome i p-gruppi hanno centro non banale segue che $|G/Z| = p^r$ con $r < n$. Il sottogruppo $\pi(H) = H/Z(G)$ è un sottogruppo proprio di $G/Z(G)$ per il teorema di corrispondenza: H contiene $Z(G)$, ma $H \neq G$ e l'unico sottogruppo di G contenente $Z(G)$ che corrisponde a tutto $G/Z(G)$ è G stesso.

Siamo quindi nelle ipotesi dell'Hp. Ind.: esiste $a Z(G) \in G/Z(G)$

che appartiene a $N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$ ma non a $H/Z(G)$.

SPERANZA: magari $a \in N_G(H) \setminus H$.

Innanzitutto se $a \in H$ allora $\pi(a) = aZ(G) \in \pi(H) = H/Z(G)$, ma non è così. a normalizza H?

So che $\pi(a)\pi(H)\pi(a)^{-1} \subseteq \pi(H)$

Questo significa che $\forall h \in H$: $\pi(a)\pi(h)\pi(a)^{-1} \in \pi(H)$

$\iff \forall h \in H ; \exists h' \in H : \pi(a)\pi(h)\pi(a)^{-1} = \pi(h')$

$, \quad // \quad // \quad ; \quad \pi(aha^{-1}) = \pi(h')$

$\iff \forall h \in H \; \exists h' \in H, z \in Z(G) \subseteq H$ t.c.

$$aha^{-1} = \underbrace{h'z}_{\in H}$$

$\implies \forall h \in H \; \exists h'' \in H$ t.c.

$$aha^{-1} = h''$$

$\iff \forall h \in H : aha^{-1} \in H$

$\iff aHa^{-1} \subseteq H \iff a \in N_G(H)$. ☒

OSS Abbiamo dim che: se G gruppo, $K \trianglelefteq G$, $K < H < G$.
Allora $N_{G/K}(H/K) = \pi(N_G(H))$.

CLASSIFICARE I GRUPPI DI ORDINE $2p$, $p \neq 2$

OSS: ci sono almeno $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ e D_p.

Mostriamo che questi sono gli unici due gruppi di tale ordine.

Sia G di ordine $2p$. Da Cauchy sappiamo che $\exists g \in G$ di ordine p,
$h \in G$ di ordine 2.

Sia $H = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: è normale in G poiché di indice 2.

Inoltre $\langle g, h \rangle = G$.
↳ ha ordine multiplo di 2 e di p $\implies$ multiplo di $2p$ $\implies$ è G

Se $gh = hg$ avremmo $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(g)\,\mathrm{ord}(h) = 2p$.

Vogliamo capire: hgh^{-1} è g oppure cos'altro è?

$$\begin{array}{ccccccc} \langle h \rangle & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/_{p-1}\mathbb{Z} \\ \wr\!\wr & & x & \longmapsto & \psi_x & \longmapsto & \psi_x|_H \\ \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} & & & & & & \end{array}$$

Se capiamo $\psi_h|_H$ capiamo in particolare $\psi_h|_H(g) = hgh^{-1}$

Dove possiamo mandare h in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$? Dato che h ha ordine 2, possiamo mandarlo in el. il cui ordine divide 2

$\Rightarrow$ può finire in 1 oppure -1

$\ulcorner$ $\{b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times : \mathrm{ord}(b) \mid 2\} = \{b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times : b^2 \equiv 1 \ (p)\}$

$$\Updownarrow$$

$$b \equiv \pm 1 \ (p) \quad \lrcorner$$

Ricordiamo l'isomorfismo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

$$(x \mapsto x^k) \longleftarrow\!\shortmid \ k$$

Abbiamo due casi:

(*) $\psi_h|_H = id_H$ e quindi $hgh^{-1} = \psi_h(g) = g \Rightarrow hg = gh$

$$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/_{2p}\mathbb{Z}$$

(x) $\psi_h|_H = (x \mapsto x^{-1})$, quindi

$$hgh^{-1} = \psi_h(g) = g^{-1}.$$

Mostriamo che nel secondo caso $G \simeq D_p$.

[A MANO] $\Phi : D_p \longrightarrow G$

$r^a \longmapsto g^a$

$sr^b \longmapsto hg^b$

Tale mappa è certamente surg. ed è fra insiemi della stessa card. $\Rightarrow$ è bigettiva.

È omom? È perlomeno ben definita? - - - - -

CHE NOIA

[PRESENTAZIONI] $\Phi : \langle r, s \mid r^r = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle \longrightarrow G$

$$r \longmapsto g$$
$$s \longmapsto h$$

Le immagini soddisfano le relazioni $\Rightarrow$ è omom.

$Aut(\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}) \simeq GL(2, \mathbb{F}_2)$

A quale altro gruppo è isomorfo? $\# G = (2^2-1)(2^2-2) = 6$

$\Rightarrow$ è $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ oppure $S_3 \simeq D_3$ (per l'esercizio di prova)

Quale dei due è?

$$G = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{ord\ 2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{ord\ 2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{ord\ 3}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{ord\ 3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{ord\ 2} \right\}$$

$\Rightarrow$ ci sono 2 el. di ordine 3 $\rightarrow$ in $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ ci sono $\phi(2) = 1$ el. di ord. 2

$\Rightarrow G \simeq S_3$

TEOREMA DI POINCARÉ

Sia G un gruppo, $H < G$ di indice n. Allora $\exists N \triangleleft G$ t.c.

(i) $N < H$ (ii) $N \triangleleft G$ (iii) $n \mid [G:N] \mid n!$.

DIM Consideriamo l'azione di G su $X = G/_H$: $g \cdot xH = gxH$.

Questo equivale a specificare un omomorfismo

$$\Psi : G \longrightarrow S(X) \simeq S_n$$

Prendo $N = Ker \Psi$ ((ii) è verificata).

$$G/_N \simeq G/_{Ker \Psi} \simeq Im \Psi < S_n$$

$$\Rightarrow [G:N] \mid n!$$

(i) $\operatorname{Ker}\Psi < H$: infatti se $x \in G$ agisce banalmente su $X = G/H$, in particolare dovrà fissare H, cioè $x \cdot H = xH = H$, cioè $x \in H$.

Infine dato che $N < H < G$ segue che $[G:H] = n \mid [G:N]$.

$\bar{\pi} : G \twoheadrightarrow G/N$, $|\bar{\pi}(H)| = |H|/|N| \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{[G:N]}{[G:H]} = \frac{|G|/|N|}{|G|/|H|} = \frac{|H|}{|N|} \in \mathbb{Z}.$$

APPLICAZIONE

Se $\# G = 44$ allora G contiene un sottogr. di ord 11 normale.

DIM: Sicuramente per Cauchy esiste $g \in G$ di ord 11. Sia $H := \langle g \rangle$.
Applichiamo Poincaré: esiste $N \trianglelefteq G$ tale che $N < H < G$ e

$$\underset{\substack{\parallel \\ 4}}{[G:H]} \mid [G:N] \mid \underset{\substack{\parallel \\ 24}}{[G:H]!}$$

Inoltre $[G:N] \mid 44 = 4 \cdot 11$, dunque $[G:N] \mid (44, 24) = 4$.

Ma allora $[G:N] = 4 \Rightarrow N = H$. ∎

$|G| = 2d$ con d dispari $\Rightarrow \exists H < G$ con $[G:H] = 2$.

Ricordiamo il Teorema di Cayley: se G ha ordine n allora

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow S(G) \simeq S_n \\ \lambda &\longmapsto (g \mapsto \lambda g) \end{aligned}$$

Nel caso specifico consideriamo $\Psi : G \hookrightarrow S_{2d}$. Dato $g \in G$,
come è fatta la struttura in cicli di $\Psi(g)$?

$$\Psi(g) = (h, gh, g^2h, \ldots, g^{k_1}h)(h', gh', \ldots, g^{k_2}h')(\ldots)$$

OSS Tutti i cicli hanno lunghezza ord g: infatti il ciclo si conclude quando $g^k h = h \Rightarrow g^k = id \Rightarrow k = \operatorname{ord}(g)$.

Segue che il n° di cicli è $\frac{|G|}{\mathrm{ord}(g)}$

Per trovare $H \trianglelefteq G$ di indice 2 è sufficiente trovarlo in $\Psi(G) \simeq G$.
Visto che voglio che l'indice sia 2, considero $\Psi(G) \cap A_{2d}$.

$$A_{2d} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{sgn} : S_{2d} \longrightarrow \{\pm 1\}\right)$$

$$\Rightarrow \Psi(G) \cap A_{2d} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{sgn}|_{\Psi(G)} : \Psi(G) \longrightarrow \{\pm 1\}\right)$$

$$|\Psi(G) \cap A_{2d}| = \left|\mathrm{Ker}\ \mathrm{sgn}|_{\Psi(G)}\right| = \frac{|\Psi(G)|}{\left|\mathrm{Im}\ \mathrm{sgn}|_{\Psi(G)}\right|}$$

questo è 1 o 2 perché è immagine di una funzione con codominio $\{\pm 1\}$

Per concludere basta mostrare che

$\left|\mathrm{Im}\ \mathrm{sgn}|_{\Psi(G)}\right| = 2$, cioè che in $\Psi(G)$
c'è almeno un elemento di segno -1.

In generale $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau_1 \cdots \tau_n) = \mathrm{sgn}(\tau_1) \cdots \mathrm{sgn}(\tau_n) = (-1)^n$
$\Rightarrow$ si calcola contando le trasposizioni

Dunque vogliamo un el. che si scrive come prodotto di un numero dispari di trasposizioni

Prendiamo $x \in G$ di ordine 2

$\Rightarrow \Psi(x)$ è un prodotto di $\frac{|G|}{2} = d$ trasp. disgiunte.

$\Rightarrow \mathrm{sgn}\,\Psi(x) = (-1)^d = -1$. ■

Quindi $\Psi(G) \cap A_{2d} \trianglelefteq \Psi(G)$ di indice 2, possiamo riportarlo in G con l'isomorfismo.