LEZIONE 04 - 11 - 20

Automorfismi di $S_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} =: G$

(i) $\{id\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, $S_3 \times \{id\} \times \{id\}$ sono caratteristici in G

OSS: fissato $K \in G$, $S := \{g^K : g \in G\}$ è stabile per automorfismi $\left(\varphi(g^K) = \varphi(g)^K \right)$

$\Rightarrow \langle S \rangle$ è caratteristico

· Per $K=2$ si trova che $\underbrace{\langle (1\,2\,3) \rangle \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ è caratteristico.

Infatti $(\sigma, a, b)^2 = (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{è id o} \\ \text{un 3 ciclo}}}{\sigma^2}, 2a, 2b)$ ↳ sono tutti gli el di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

⌈Questo sogg. è caratteristico anche perché
- è l'unico 3-Sylow
- è l'unione degli el il cui ordine divide 3 ⌋

· Per $K=3$ si trova che $\langle g^3 : g \in G \rangle$ è caratteristico

$$\{(\sigma, a, b)^3 : \sigma \in S_3,\ a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\} = \{(\sigma^3, 0, 0) : \sigma^3 \in S_3\} = \langle \sigma^3 \in S_3 \rangle \times \{0\} \times \{0\}$$

Ma se σ è una trasp., $\sigma^3 = \sigma \Rightarrow \langle \sigma^3 \in S_3 \rangle \supseteq \langle \text{trasposizioni} \rangle = S_3$

$\Rightarrow \langle g^3 : g \in G \rangle = S_3 \times \{0\} \times \{0\}$ è caratteristico.

· Sia ora $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$. Quali sono le possibilità per $\varphi((id, 1, 0))$?

È di ordine 3 : $\varphi((id, 1, 0)) = (\sigma, a, b)$

con $\mathrm{mcm}(\mathrm{ord}\,\sigma, \mathrm{ord}\,1, \mathrm{ord}\,0) = 3 \Rightarrow \mathrm{ord}\,\sigma \mid 3 \Rightarrow \sigma$ 3-ciclo o id.

Come dimostro che $\mathrm{ord}\,\sigma = 1$? S_3 non è abeliano, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ sì!

Sia τ una trasp. di S_3. allora

- $(\tau, 0, 0) \xmapsto{\varphi} (\tau', 0, 0)$
- $(\tau, 0, 0)(id, 1, 0) = (id, 1, 0)(\tau, 0, 0)$

$\Rightarrow \varphi((\tau, 0, 0))\, \varphi((id, 1, 0)) = \varphi((id, 1, 0))\, \varphi((\tau, 0, 0))$

$\Rightarrow (\tau', 0, 0)(\sigma, a, b) = (\sigma, a, b)(\tau', 0, 0)$

$\Rightarrow \tau'\sigma = \sigma\tau' \Rightarrow \sigma$ non può essere un 3 ciclo!

$\Rightarrow \sigma = id$.

Dunque $(id, 1, 0) \xmapsto{\varphi} (id, a, b)$. Analog. $(id, 0, 1) \xmapsto{\varphi} (id, a', b')$

$\Rightarrow \varphi(\{id\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2) \subseteq \{id\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$

da cui $\{id\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ è caratteristico.

OSS: molto più semplicemente $\{id\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ è $Z(G)$, che è caratteristico.

(ii) $|\mathrm{Aut}(G)|$?

$$\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}\left(S_3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i fattori sono} \\ \text{caratteristici}}}{\simeq} \mathrm{Aut}(S_3) \times \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2\right)$$

$$\overset{S_3 \simeq D_3}{\simeq} \Big((\underbrace{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{\text{unico sgrp non abeliano di ordine 6}}) \times GL_2(\mathbb{F}_3)\Big) \simeq S_3 \times GL_2(\mathbb{F}_3)$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Aut}(G)| = 6 \cdot (3^2-1)(3^2-3) = 6 \cdot 8 \cdot 6.$$

Sottogruppi di S_n

$$H = \langle \underset{\sigma}{(1\,2\,3\,4\,5\,6)}, \underset{\tau}{(1\,4)} \rangle \leq S_6.$$

Smanettiamo un pò: $\sigma\tau\sigma^{-1} = (2\,5)$ $\quad \sigma^2\tau\sigma^{-2} = (3\,6)$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\text{12} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3}}{\langle (1\,4), (2\,5), (3\,6) \rangle} \leq H$$

(i) Dimostrare che $24 \mid \# H$.

Sicuramente $\underset{\hookrightarrow \text{ sgrp di ord 8}}{8 \mid |H|}$, ma anche $\underset{\hookrightarrow \text{ el di ordine 6}}{6 \mid |H|}$ $\Rightarrow \mathrm{mcm}(8,6) = 24 \mid |H|$.

(ii) $\rho := (1\,4)(2\,5)(3\,6)$. Allora $\rho \in Z(H)$.

Basta far vedere che commuta con i generatori: mostrando che σ, τ commutano con ρ è come dire che $\sigma, \tau \in Z_H(\rho) \iff \langle \sigma, \tau \rangle \leq Z_H(\rho) \leq \langle \sigma, \tau \rangle \iff Z_H(\rho) = H$

$\iff \rho \in Z(H)$.

Ma $\tau\rho\tau^{-1} = (4\,1)(2\,5)(3\,6) = \rho$, $\quad \sigma\rho\sigma^{-1} = (2\,5)(3\,6)(1\,4) = \rho$.

[Dunque $H \lneq S_6$, perché $Z(S_6) = \{id\}$]

(iii) $H \leq Z_{S_6}(\rho)$. Trovare $Z_{S_6}(\rho)$.

Per orb.-stab. (azione di coniugio di S_6 a S_6)

$$\# Z_{S_6}(\rho) = \frac{\# S_6}{\# \mathrm{orb}(\rho)} = \frac{6!}{\binom{6}{2\,2\,2} \cdot \frac{1}{3!}} = \frac{\cancel{6!}\, 3!}{\frac{\cancel{6!}}{2!\,2!\,2!}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 8 \cdot 6 = 48;$$

Ma $H \leq Z_{S_6}(\rho)$ e H ha un multiplo di 24 el $\Rightarrow H = Z_{S_6}(\rho)$ oppure $\# H = \frac{1}{2} \# Z_{S_6}(\rho)$.

(v) $K := Z_{S_6}(\rho)$ come gruppo astratto?

$$K \geq \langle (1\,4), (2\,5), (3\,6) \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

Perché $(1\,4) \in K$? Perché $(1\,4)\,(1\,4)(2\,5)(3\,6)\,(1\,4)^{-1} = (1\,4)(1\,4)\cancel{(1\,4)^{-1}}(2\,5)(3\,6) = \rho$

Invece $\sigma(1\,4)(2\,5)(3\,6)\sigma^{-1} = \sigma(1\,4)\sigma^{-1} \cdot \sigma(2\,5)\sigma^{-1} \cdot \sigma(3\,6)\sigma^{-1}$

$$= (2\,5) \cdot (3\,6) \cdot (1\,4)$$

$\rightsquigarrow$ permuta ciclicamente le tre trasp.

Se prendiamo $\mu := (1\,2)(4\,5)$ allora $\mu\rho\mu^{-1}$ permuta $(1\,4)$ e $(2\,5)$ tra loro

Osserviamo che $\mu \notin \langle (1\,4), (2\,5), (3\,6) \rangle$

Inoltre possiamo prendere $\nu := (1\,2\,3)(4\,5\,6)$ allora $\nu\rho\nu^{-1} = (2\,5)(3\,6)(1\,4) = \rho$.

Abbiamo quasi finito! K ha ord. $3 \cdot 2^4$ e abbiamo dim che

$$K = \langle \underbrace{\underbrace{(1\,4), (2\,5), (3\,6)}_{\text{sgrp. di ord } 8},\ (1\,2)(4\,5)}_{\text{sgrp di ord } 16},\ \underbrace{(1\,2\,3)(4\,5\,6)}_{\text{sgrp di ord } 3} \rangle$$

Chiamiamo $L := \langle (1\,4), (2\,5), (3\,6) \rangle$. Allora $L \trianglelefteq K$: basta verificarlo sui generatori di K

(*) i primi 3 commutano (sono proprio i gen. di L)

(*) $\mu(1\,4)\mu^{-1} = (2\,5) \in L$, $\mu(2\,5)\mu^{-1} = (1\,4)$, $\mu(3\,6)\mu^{-1} = (3\,6)$ ✓

(*) $\nu(1\,4)\nu^{-1} = (2\,5)$, $\nu(2\,5)\nu^{-1} = (3\,6)$, $\nu(3\,6)\nu^{-1} = (1\,4)$ ✓

A maggior ragione, $L \trianglelefteq H$.

CLAIM: $K \simeq L \rtimes \langle \mu, \nu \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$

Innanzitutto, $\langle \mu, \nu \rangle \simeq S_3$? Gli ordini combaciano; inoltre

$$\mu\nu\mu^{-1} = (2\,1\,3)(5\,4\,6) = (1\,3\,2)(4\,6\,5) = \nu^{-1}. \quad ✓$$

Dunque $\cdot\ L \trianglelefteq K \quad \cdot\ |L| \cdot |\langle \mu, \nu \rangle| = 8 \cdot 6 = 48 = |K|$

$\cdot\ |K| = |L\langle \mu, \nu \rangle| = \dfrac{|L| \cdot |\langle \mu, \nu \rangle|}{|L \cap \langle \mu, \nu \rangle|} \iff |L \cap \langle \mu, \nu \rangle| = 1 \iff L \cap \langle \mu, \nu \rangle = \{id\}$.

Segue che K è il prod. semidiretto di L e $\langle \mu, \nu \rangle$.

Dato che $H \geq L$, per corrispondenza deve corrispondere ad un sottogruppo di

$$\frac{L \rtimes S_3}{L} \simeq S_3$$

L'isomorfismo è $L \rtimes S_3 \xrightarrow{\pi} S_3$, $(\ell, \sigma) \longmapsto \sigma$.

Infatti: $\operatorname{Ker} \pi = L$ ovviamente, ma per di più è omom., perché $\pi((\ell_1, \sigma)(\ell_2, \tau)) = \pi((\ell_1 \varphi(\sigma)(\ell_2), \sigma\tau)) = \sigma\tau = \pi((\ell_1, \sigma)) \cdot \pi((\ell_2, \tau))$

e questo accade perché l'op. nel fattore non normale è la normale op. di S_3!

$L \rtimes S_3 \twoheadrightarrow L$, $(\ell, \sigma) \longmapsto \ell$ non sarebbe omom.

Il sgrp. di S_3 a cui corrisponde H è $\simeq$ agli autom. di L indotti dal coniugio per el. di H.

WHAT? $L \rtimes_\varphi S_3$, $\varphi : S_3 \longrightarrow \operatorname{Aut}(L) \simeq \operatorname{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3)$

$\operatorname{Im} \varphi$ è l'insieme degli autom. di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ dato dalla permutazione delle coordinate.

$H \subseteq L \rtimes S_3$ contiene $L \times \{id\}$ $\Rightarrow$ $H \simeq L \rtimes D$ per qualche $D \leq S_3$ e devo decidere chi sia D. Ma $\# H = 24$ o 48 $\Rightarrow$ D ha indice 1 o 2 in S_3

$\Rightarrow D \simeq S_3$ oppure A_3

Basta quindi determinare quali permutazioni di $L \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sono indotte dal coniugio per el. di H

cioè vogliamo determinare $\varphi(D)$.

Ora osservo che $(1,2,3,4,5,6)$ agisce su L come una permutazione ciclica delle 3 trasposizioni,

mentre $(1,4)$ agisce su L BANALMENTE (commuta con i generatori)

$\Rightarrow$ $\varphi(D) \subseteq Aut(L)$ e $\varphi(D)$ contiene solo le permutazioni cicliche

$\Rightarrow D \simeq A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $|H| = 24$ e $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes A_3$. $\square$

DIM PIÙ DIRETTA: basterebbe trovare in H un sgp. di ordine 8 e un sgp. di ordine 3

cioè un el. di ordine 3. Ma $\sigma \in H$ ed ha ord 6 $\Rightarrow$ $\sigma^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$ ha ord 3

Rimane da dimostrare che

- $\underbrace{L \triangleleft H}_{\text{già fatto}}$ $\quad$ • $\langle L, \sigma^2 \rangle = H$ $\quad$ • $\underbrace{L \cap \langle \sigma^2 \rangle = \{id\}}_{\text{ovvio per card.}}$

Sottogruppi di S_n di indice n

$H < S_n$, $[S_n : H] = n$ $\Rightarrow$ $H \simeq S_{n-1}$.

DIM Osserviamo che $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\} < S_n$ è di indice n ed è $\simeq S_{n-1}$

(perché sono le perm. su $\{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$)

IDEA: considero l'azione di moltiplicazione a sx Φ di S_n su $S_n/H =: X$, con $|X| = n$

$$\Phi : S_n \longrightarrow S(X) \simeq S_n.$$
$$\sigma \longmapsto (\tau H \longmapsto \sigma\tau H)$$

Osserviamo che $\operatorname{Ker} \Phi \triangleleft S_n$ e per $n \geq 5$ abbiamo che $\operatorname{Ker}\Phi \in \{\{id\}, A_n, S_n\}$.

Inoltre tale azione è transitiva (partendo dalla classe banale H al variare di $\sigma \in S_n$ ottengo tutte le classi $\sigma H \in S_n/H$ $\Rightarrow$ transitiva)

dunque Φ non può essere banale, cioè $\operatorname{Ker}\Phi \neq S_n$.
↳ ogni el. sarebbe in una propria orb.

Inoltre se $\operatorname{Ker}\Phi \simeq A_n$ allora $\operatorname{Im}\Phi \simeq S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; ma avendo solo due el. nell'im. di Φ segue che potremmo portare la classe banale H solo in se stessa e in un'altra classe, il che va contro la transitività.

Dunque Φ è iniettiva, dunque è un automorfismo di S_n.

Com'è fatto $\Phi(H)$? È un sottogruppo di $S(X)$ e si ha che

$$\Phi(H) \le \{\sigma \in S(X) : \sigma(H) = H\}$$

perché $\Phi(H) = \{\sigma H \overset{X \to X}{\longmapsto} h\sigma H : h \in H\}$ e quindi $\forall h \in H$ la permutazione $\Phi(h)$ fissa H $(H \mapsto hH = H)$.

Ma $|\{\sigma \in S(X) : \sigma(H) = H\}| = |\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}| = (n-1)! = \frac{n!}{n} = \#H$.

Dunque $H \simeq \Phi(H) \simeq \{\sigma \in S(X) : \sigma(H) = H\} \simeq S_{n-1}$. $\square$

OSS Per $n \neq 6$ un sottogruppo H come sopra è della forma $\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$ per qualche i.
Il punto è che per $n \neq 6$ $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n)$ e quindi ogni autom. è un coniugio; ma $\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$ è uno stabilizzatore e il coniugato di uno stab. è uno stab.

Centri dei gruppi di ordine 75.

$|G| = 75 = 3 \cdot 5^2 \implies |Z(G)| \in \{1; 3; \overset{\times}{5}; \overset{\times}{15}; \overset{\times}{25}; \overset{✓}{75}\}$

Se $|Z(G)|$ fosse $5, 15, 25$ allora $G/Z(G)$ avrebbe ordine risp. $15, 5, 3$, da cui $G/Z(G)$ sarebbe ciclico e quindi $Z(G)$ banale, assurdo.

$G = \mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$ allora il suo centro è tutto $G \implies |Z(G)| = 75$ si può fare.

Facciamo lo studio dei Sylow: $n_3 \mid 25$ e $n_3 \equiv 1\ (3) \implies n_3 \in \{1, 25\}$

$n_5 \mid 3$ e $n_5 \equiv 1\ (5) \implies n_5 = 1$

Per i soliti ragionamenti $G \simeq P_5 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $P_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ o $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$

- Se $P_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ → ha $\phi(25) = 20$ elementi
  $\implies \varphi$ è banale! $\implies G \simeq \mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$
- Se $P_5 \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2) \simeq GL_2(\mathbb{F}_5)$ → ha ordine $24 \cdot 20$

BRTT :(

Mio tentativo di conclusione dopo fivem hint: Se $|Z(G)| = 3$ allora $Z(G)$ è un 3-Syl, ma $Z(G)$ è caratteristico $\implies$ normale, dunque $G \simeq P_5 \times P_3$ il che è assurdo perché questo gruppo è abeliano.

YEEE GIUSTO

Manca solo $|Z(G)| = 1$. Ma i prodotti semidiretti $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono non abeliani (altrimenti $\varphi = id$, ma abbiamo visto che ci sono tante possibilità per $\varphi \neq id$) e le uniche cardinalità non escluse per $|Z(G)|$ sono 1 e $75 \implies$ deve essere 1. $\square$

E se non mi fosse venuta in mente la storia del $Z(G)$ e Syl_3?

Prendiamo $G := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ con $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{F}_5)$ non banale.

Sia $(v, b) \in G$. Esso è $\in Z(G)$ se e solo se commuta con i generatori

$$\begin{cases} (v, b)(w, 0) = (w, 0)(v, b) \\ (v, b)(0, 1) = (0, 1)(v, b) \end{cases}$$

Analizzo solo le prime comp. tanto le seconde commutano sempre

$$\Rightarrow \begin{cases} v + \varphi(b)(w) = w + \varphi(0)(v) = w + v \\ v + \cancel{\varphi(b)(0)} = 0 + \varphi(1)(v) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(b)(w) = w \\ \varphi(1)(v) = v \end{cases}$$ ma questo deve valere $\forall w \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(b) = id \Rightarrow b \in \operatorname{Ker}\varphi, \text{ Ma } \operatorname{Ker}\varphi \triangleleft \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e non è } \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ perché } \varphi \text{ è non banale} \Rightarrow b = 0 \\ v \text{ è autovettore di } \varphi(1) \text{ di autovalore } 1 \end{cases}$$

So che $M := \varphi(1)$ ha ord 3, cioè $M^3 = I \Rightarrow$ pol. minimo di $M \mid t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$

Siccome M ha autovalore 1, $(t-1) \mid \mu(t) \mid (t-1)(t^2+t+1) \Rightarrow \mu(t) \in \{t-1, t^3-1\}$

Ma $\mu(t)$ ha grado ≤ 2 perché $\mu(t)$ divide il pol. caratt. che ha grado 2 (siamo in $GL_2(\mathbb{F}_5)$)

$\Rightarrow \mu(t) = t - 1. \Rightarrow M = I \Rightarrow G$ è abeliano.

???

A_4 è l'unico sottogr. di S_4 di indice 2

Sia $H \overset{2}{\leq} S_4$, ragiono al quoziente $\pi : S_4 \twoheadrightarrow S_4/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Tutti gli el. di ordine dispari devono allora appartenere a $\operatorname{Ker}\pi = H$ (perché $\operatorname{ord}\pi(g) \mid \operatorname{ord} g$)

$\Rightarrow$ tutti i 3-cicli $\in H$, ma $\forall n$ il sottogr. di S_n generato dai 3-cicli è A_n (*)

$\Rightarrow A_n < H \Rightarrow$ per card. $A_n = H$.

(*) Sappiamo che $A_n = \langle (a,b)(c,d) \rangle$, quindi basta dire che i 3-cicli generano le perm. 2+2

Oss. che $(a, b, c) = (a, b)(b, c)$

Allora $(a,b)(c,d) = \begin{cases} (a,b)(b,d) = (a,b,d) & \text{se } b = c \\ (a,b)(b,c)(b,c)(c,d) = (a,b,c)(b,c,d) \end{cases}$ ✓