# Analisi 1

Luca De Paulis

7 agosto 2020

# INDICE

# 1 FONDAMENTALI

## 1.1 RELAZIONI

**Definizione 1.1.1** **Relazione su un insieme.** Sia $X$ un insieme. Allora si dice *relazione su* $X$ un sottoinsieme $R \subseteq X \times X$.

Si indica che una coppia $(x, y)$ soddisfa $R$ scrivendo $xRy$.

**Definizione 1.1.2** **Relazione di equivalenza.** Sia $X$ un insieme e $\sim$ una relazione su $X$. Allora $\sim$ si dice *relazione di equivalenza* se valgono i seguenti assiomi:

(EQ1) La relazione $\sim$ è *riflessiva*:
per ogni $x \in X$ vale che $x \sim x$.

(EQ2) La relazione $\sim$ è *simmetrica*:
per ogni $x, y \in X$, se $x \sim y$ allora necessariamente $y \sim x$.

(EQ3) La relazione $\sim$ è *transitiva*:
per ogni $x, y, z \in X$, se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora necessariamente $x \sim z$.

**Definizione 1.1.3** **Relazione di ordinamento.** Sia $X$ un insieme e $\leqslant$ una relazione su $X$. Allora $\leqslant$ si dice *relazione di ordinamento* se valgono i seguenti assiomi:

(ORD1) La relazione $\leqslant$ è *riflessiva*:
per ogni $a \in \mathbb{K}$ vale che $a \leqslant a$.

(ORD2) La relazione $\leqslant$ è *antisimmetrica*:
per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ allora necessariamente $a = b$.

(ORD3) La relazione $\leqslant$ è *transitiva*:
per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$, se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ allora necessariamente $a \leqslant c$.

In particolare l'ordinamento si dice *totale* se vale anche che

(O4) La relazione $\leqslant$ è *totale*:
per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ vale che $a \leqslant b$ oppure $b \leqslant a$.

## 1.2 FUNZIONI

**Definizione 1.2.1** **Funzione (operativamente.)** Si dice funzione una terna $(A, B, f)$ formata da:

- un insieme $A$ detto *dominio*;
- un insieme $B$ detto *codominio*;
- una legge $f : A \to B$ che associa ad ogni $a \in A$ un elemento $f(a) \in B$.

**Definizione 1.2.2** **Grafico di una funzione.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora si dice *grafico della funzione* l'insieme

$$\operatorname{graph}(f) = \{\, (a, b) \in A \times B \,:\, b = f(a) \,\}.$$

**Definizione 1.2.3** **Funzione (rigorosamente.)** Si dice funzione da $A$ a $B$ un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

$$\forall a \in A. \quad \exists! b \in B. \quad (a, b) \in G.$$

Per ogni $a \in A$ si definisce quindi $f(a)$ come l'unico $b$ che rispetta la condizione sopra.

**Definizione 1.2.4** **Funzione composta.** Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ due funzioni. Allora si dice *funzione composta* la funzione $(g \circ f) : A \to C$ tale che per ogni $a \in A$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

### 1.2.1 Iniettività, surgettività

**Definizione 1.2.5** **Funzione iniettiva.** Sia $f : A \to B$ una funzione. La funzione $f$ si dice *iniettiva* se

$$\forall a_1, a_2 \in A. \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

o equivalentemente

$$\forall a_1, a_2 \in A. \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

**Definizione 1.2.6** **Funzione surgettiva.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora $f$ si dice *surgettiva* se

$$\forall b \in B. \quad \exists a \in A. \quad f(a) = b.$$

**Definizione 1.2.7** **Funzione bigettiva.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora $f$ si dice *bigettiva* se:

(i) $f$ è iniettiva;

(ii) $f$ è surgettiva.

In tal caso la funzione risulta *invertibile*, ovvero esiste

$$g : B \to A$$

tale che per ogni $a \in A$, $b \in B$ vale che

$$g(f(a)) = a,$$
$$f(g(b)) = b.$$

Se l'inversa esiste, allora si indica con $f^{-1} : B \to A$.

**Proposizione 1.2.8** *Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ due funzioni. Allora*

*(i) se $f, g$ sono iniettive, allora $(g \circ f)$ è iniettiva;*

*(ii) se $f, g$ sono surgettive, allora $(g \circ f)$ è surgettiva;*

*(iii) se $(g \circ f)$ è iniettiva, allora $f$ è iniettiva;*

*(iv) se $(g \circ f)$ è surgettiva, allora $g$ è surgettiva.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo le quattro affermazioni.

1. Siano $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$. Allora

$$a_1 \neq a_2 \overbrace{\implies}^{\text{f iniett.}} f(a_1) \neq f(a_2) \overbrace{\implies}^{\text{g iniett.}} g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)).$$

□

### 1.2.2 Immagine e controimmagine

**Definizione 1.2.9** **Immagine di un sottoinsieme.** Sia $f : A \to B$ una funzione e sia $E \subseteq A$. Allora si dice*immagine di* $E$ *attraverso* $f$ l'insieme

$$f(E) := \{ f(a) \, : \, a \in E \} \subseteq B$$

o equivalentemente

$$f(E) := \{ b \in B \, : \, \exists a \in E \quad b = f(a) \}.$$

**Definizione 1.2.10** **Immagine di una funzione.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora si dice *immagine di* $f$ l'insieme

$$\operatorname{Im} f := f(A) = \{ f(a) \, : \, a \in A \} \subseteq B.$$

Osservazione. Una funzione $f : A \to B$ è surgettiva se e solo se

$$\operatorname{Im} f = B.$$

**Definizione 1.2.11** **Controimmagine di un sottoinsieme.** Sia $f : A \to B$ una funzione e sia $F \subseteq B$. Allora si dice *controimmagine di* $F$ *attraverso* $f$ l'insieme

$$f^{-1}(F) := \{ a \in A \, : \, f(a) \in F \} \subseteq A.$$

## 1.3 NUMERI NATURALI E INDUZIONE

1.3.1 **Assiomi di Peano** *Si dice* insieme dei numeri naturali *l'insieme* $\mathbb{N}$ *che rispetta i seguenti 5 assiomi:*

*(P1)* *Esiste il numero naturale* $0$, *ovvero* $0 \in \mathbb{N}$.

*(P2)* *Esiste una funzione* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *detta* successore, *definita per ogni naturale.*

*(P3)* *La funzione* $\sigma$ *è iniettiva, ovvero per ogni* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ *segue che* $\sigma(n) \neq \sigma(m)$.

*(P4)* *Nessun numero ha* $0$ *come proprio successore, ovvero* $\sigma(n) \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

*(P5)* *Se* $A$ *è un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che*
  - *a)* $0 \in A$
  - *b)* $n \in A$ *implica* $\sigma(n) \in A$

  *allora* $A = \mathbb{N}$.

La terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ dove $\sigma(n) := n + 1$ è l'unica terna che rispetta gli assiomi di Peano a meno di isomorfismi: ogni altra terna $(X, a, \Sigma)$ è isomorfa ad essa.

Il quinto assioma, detto *Principio di Induzione*, può essere riformulato in modo da essere usato più comodamente nelle dimostrazioni. La formulazione alternativa è la seguente:

1.3.2 **Principio di Induzione** *Sia* $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \}$, $P : A \to \{ \mathcal{T}, \mathcal{F} \}$ *un predicato. Allora se*

*(i)* *vale* $P(n_0)$

*(ii)* $\forall n \geqslant n_0 \quad P(n) \implies P(n+1)$

*segue che* $P(n)$ *vale per ogni* $n \geqslant n_0$.

Esempio 1.3.3. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1} \qquad \forall a \neq 1. \tag{3}$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo la 2 per induzione su $n$.

**caso base** Sia $n = 0$. Allora

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{2}.$$

**passo induttivo** Supponiamo che valga la tesi per $n$ e dimostriamola per $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+1+2n^2+n)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Dunque per il principio di induzione la tesi vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

## 1.4 NUMERI REALI

### 1.4.1 Proprietà algebriche dei numeri reali

**Definizione 1.4.1** **Campo.** Sia $\mathbb{K}$ un insieme e siano $+$ (*somma*), $\cdot$ (*prodotto*) due operazioni su $\mathbb{K}$, ovvero

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K}, \\ (a,b) &\mapsto a+b, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K}. \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Allora la struttura $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si dice *campo* se valgono i seguenti assiomi:

(S1) Vale la *proprietà commutativa della somma*:
per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ vale che $a + b = b + a$.

(S2) Vale la *proprietà associativa della somma*:
per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale che $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(S3) Esiste un elemento $0 \in \mathbb{K}$ che è *elemento neutro* per la somma:
per ogni $a \in \mathbb{K}$ vale che $a + 0 = 0 + a = a$.

(S4) Ogni elemento di $\mathbb{K}$ è *invertibile* rispetto alla somma:

per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste $(-a) \in \mathbb{K}$ (detto *opposto di* $a$) tale che $a + (-a) = 0$.

(P1) Vale la *proprietà commutativa del prodotto*:

per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ vale che $a \cdot b = b \cdot a$.

(P2) Vale la *proprietà associativa del prodotto*:

per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale che $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(P3) Esiste un elemento $1 \in \mathbb{K}$ che è *elemento neutro* per il prodotto:

per ogni $a \in \mathbb{K}$ vale che $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(P4) Ogni elemento di $\mathbb{K}$ è *invertibile* rispetto al prodotto:

per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste $a^{-1} \in \mathbb{K}$ (detto *inverso di* $a$) tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

(SP) Vale la *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*:

per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale che $a(b + c) = ab + ac$.

Spesso sottointendiamo il simbolo di prodotto, scrivendo $ab$ per $a \cdot b$.

**Definizione 1.4.2** **Campo ordinato.** Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo e sia $\leqslant$ una relazione di ordine totale su $\mathbb{K}$.

Allora la struttura $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leqslant)$ si dice *campo ordinato* se valgono i seguenti assiomi:

(CO1) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$, se $a \leqslant b$ allora $a + c \leqslant b + c$.

(CO2) Per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, se $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$ allora $0 \leqslant ab$.

Esempi di campi sono $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto. Di questi soltanto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ ammettono un ordinamento totale, dunque soltanto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi ordinati.

Inoltre nei campi ordinati introduciamo l'ordinamento totale $\geqslant$ tale che per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ vale che

$$a \geqslant b \iff b \leqslant a.$$

**Proposizione 1.4.3** **Proprietà di un campo.** *Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo. Allora valgono le seguenti:*

*(i) per ogni $a \in \mathbb{K}$ vale che $a \cdot 0 = 0$,*

*(ii) per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ se $ab = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$.*

*Inoltre se $\leqslant$ è un ordinamento totale su $\mathbb{K}$ tale che $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leqslant)$ è un campo ordinato, vale che:*

*(iii) per ogni $a \in \mathbb{K}$, se $a \geqslant 0$ allora $-a \leqslant 0$,*

*(iv) per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$, se $a \leqslant b$ e $c \leqslant 0$ allora $ac \geqslant bc$,*

*(v) per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che $0 \leqslant a^2$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo le cinque proprietà separatamente.

(i) Sia $a \in \mathbb{K}$ qualsiasi. Allora

$$\begin{aligned} a0 &= a(0 + 0) && \text{(per (S3))} \\ &= a0 + a0 && \text{(per (S3))} \end{aligned}$$

Per (S3) esiste $(-a0) \in \mathbb{K}$, dunque

$$\begin{aligned} &\iff a0 - a0 = a0 + a0 - a0 && \text{(per (S4))} \\ &\iff 0 = a0. \end{aligned}$$

COMPLETA

$\square$

### 1.4.2 Valore assoluto

**Definizione 1.4.4** Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora si definisce *valore assoluto* di $a$ il massimo tra $a$ e $-a$, ovvero

$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{4}$$

**Proposizione 1.4.5** **Proprietà del valore assoluto.** *Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:*

1. *Per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *vale che* $a \leqslant |a|$, $-a \leqslant |a|$.
2. *Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *vale che* $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

### 1.4.3 Completezza dei numeri reali

**Definizione 1.4.6** **Sezione.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato e siano $A, B \subseteq \mathbb{K}$ non vuoti. Allora si dice che $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{K}$ se

(i) $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \mathbb{K}$;

(ii) $A$ sta a sinistra di $B$, ovvero per ogni $a \in A$, $b \in B$ vale che $a \leqslant b$.

**1.4.7** **Assioma di Dedekind** *Sia* $(A, B)$ *una sezione di* $\mathbb{K}$.
*Allora si dice che* $\mathbb{K}$ *è* Dedekind-completo *(o semplicemente* completo*) se esiste un unico elemento separatore per la sezione* $(A, B)$*, ovvero*

$$\exists! \xi \in \mathbb{K}. \quad a \leqslant \xi \leqslant b \qquad \forall a \in A, b \in B.$$

**Teorema 1.4.8** **Esistenza dei numeri reali.** *Esiste una struttura* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$*, detti* numeri reali*, che è un campo ordinato completo.*

**Teorema 1.4.9** **Unicità dei numeri reali.** *La struttura* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *è unica a meno di isomorfismi;*
*ovvero se* $(\mathbb{R}', +', \cdot', \leqslant')$ *è un campo ordinato completo, allora esiste una bigezione* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ *tale che per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$

*(i)* $\varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b)$,

*(ii)* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot' \varphi(b)$,

*(iii)* *se* $a \leqslant b$ *allora* $\varphi(a) \leqslant' \varphi(b)$.

### 1.4.4 Proprietà dei numeri reali

**Definizione 1.4.10** **Maggioranti e minoranti.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.
Allora si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di $A$ se

$$\forall a \in A. \quad M \geqslant a.$$

L'insieme dei maggioranti di un insieme $A$ si indica con $\mathcal{M}(A)$.

Ugualmente si dice che $m \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di $A$ se

$$\forall a \in A. \quad m \leqslant a.$$

L'insieme dei minoranti di un insieme $A$ si indica con $\mathcal{N}(A)$.

**Definizione 1.4.11** **Limitato superiormente o inferiormente.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.
Allora si dice che $A$ è *limitato superiormente* se ammette almeno un maggiorante, ovvero se $\mathcal{M}(A) \neq \varnothing$.
Ugualmente si dice che $A$ è *limitato inferiormente* se ammette almeno un minorante, ovvero se $\mathcal{N}(A) \neq \varnothing$.
Se $A$ è limitato sia superiormente che inferiormente allora si dice che $A$ è limitato.

Osservazione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A. \quad |a| \leqslant M$$

**Definizione 1.4.12** **Massimo e minimo di un insieme.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.
Allora si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il *massimo* di $A$, e si scrive $M = \max A$, se

(i) $M$ è un maggiorante di $A$, ovvero per ogni $a \in A$ vale che $M \geqslant a$

(ii) $M \in A$.

Ugualmente si dice che $m \in \mathbb{R}$ è il *minimo* di $A$, e si scrive $m = \min A$, se

(i) $m$ è un minorante di $A$, ovvero per ogni $a \in A$ vale che $m \leqslant a$

(ii) $m \in A$.

Osservazione. Massimo e minimo possono non esistere (ad esempio l'insieme $(0, 1)$ non ha né massimo né minimo) ma se esistono allora sono unici.

**Definizione 1.4.13** **Estremo superiore ed estremo inferiore.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.
Allora si definisce l'estremo superiore di $A$, in simboli $\sup A$, nel seguente modo:

$$\sup A = \begin{cases} +\infty, & \text{se } A \text{ è illimitato superiormente,} \\ \min \mathcal{M}(A) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ugualmente si definisce l'estremo inferiore di $A$, in simboli $\inf A$:

$$\inf A = \begin{cases} -\infty, & \text{se } A \text{ è illimitato inferiormente,} \\ \max \mathcal{N}(A) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Teorema 1.4.14** **Esistenza dell'estremo superiore.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $A$ limitato superiormente.*
*Allora l'insieme dei maggioranti di $A$ ammette minimo.*

**Dimostrazione.** Siccome $A$ è limitato superiormente, $\mathcal{M}(A) \neq \varnothing$.
Sia $B = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}(A)$; mostriamo che $(B, \mathcal{M}(A))$ è una sezione di $\mathbb{R}$. Ovviamente le proprietà in 1.4.6: (i) sono verificate, in quanto ogni $x \in \mathbb{R}$ è in $\mathcal{M}(A)$ oppure in $B$.
Siano ora $b \in B$ e $m \in \mathcal{M}(A)$ e mostriamo che necessariamente $b < m$. Siccome $b$ non è un maggiorante di $A$ dovrà esistere un $a \in A$ tale che $b < a$. D'altra parte $m$ è un maggiorante di $A$,

dunque $a \leqslant m$. Da ciò segue che $b < m$, che verifica la proprietà 1.4.6: (ii).

Per l'Assioma di Dedekind esiste ed è unico l'elemento separatore. Sia quindi $\xi$ l'elemento separatore della sezione: mostriamo che $\xi = \min \mathcal{M}(A)$.

Abbiamo già mostrato che $\xi \leqslant m$ per ogni $m \in \mathcal{M}(A)$, quindi dobbiamo soltanto mostrare che $\xi \in \mathcal{M}(A)$.

Supponiamo per assurdo che $\xi$ non sia in $\mathcal{M}(A)$, ovvero che $\xi$ non sia un maggiorante di $A$: allora dovrà esistere un $a \in A$ tale che $a > \xi$. Ma allora varrebbe che

$$\xi < \frac{\xi + a}{2} < a.$$

Essendo $\frac{\xi + a}{2} < a$ allora anche esso appartiene a $B$, da cui segue che $\xi$ non può essere l'elemento separatore di $(B, \mathcal{M}(A))$, il che è assurdo.

Dunque $\xi \in \mathcal{M}(A)$, ovvero $\xi = \min \mathcal{M}(A) = \sup A$. □

Si può dimostrare un analogo risultato per l'estremo inferiore:

**Teorema 1.4.15** **Esistenza dell'estremo inferiore.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $A$ limitato inferiormente.*

*Allora l'insieme dei minoranti di $A$ ammette massimo.*

**Proposizione 1.4.16** **Caratterizzazione dell'estremo superiore.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $A$ limitato superiormente.*

*Allora se $L = \sup A$ segue che*

*(i) per ogni $a \in A$ vale che $a \leqslant L$;*

*(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $a \in A$ tale che $L - \varepsilon < a$.*

**Dimostrazione.** Infatti la (i) dice che $L$ è un maggiorante di $A$; la (ii) dice che $L$ è il minimo maggiorante di $A$, ovvero che qualsiasi numero minore di $L$ non è maggiorante di $A$. □

**Proposizione 1.4.17** **Caratterizzazione dell'estremo inferiore.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $A$ limitato inferiormente.*

*Allora se $L = \inf A$ segue che*

*(i) per ogni $a \in A$ vale che $a \geqslant L$;*

*(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $a \in A$ tale che $L - \varepsilon > a$.*

### 1.4.5 Retta reale estesa

**Definizione 1.4.18** **Retta reale estesa.** Si definisce retta reale estesa l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

tali che $-\infty < a < +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

La retta reale estesa non è un campo ordinato poiché non possiamo estendere le operazioni di somma e prodotto in modo che siano consistenti. Possiamo tuttavia definirle parzialmente in questo modo:

1. $a + (+\infty) = +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;

2. $a + (-\infty) = -\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
3. $a(+\infty) = +\infty$ per ogni $a > 0$;
4. $a(+\infty) = -\infty$ per ogni $a < 0$;
5. $a(-\infty) = -\infty$ per ogni $a > 0$;
6. $a(-\infty) = +\infty$ per ogni $a < 0$.

I casi che non sono automaticamente determinati vengono chiamati *forme indeterminate* oppure *di indecisione*, e sono

$$+\infty - \infty \qquad\qquad \pm\infty \cdot 0$$

a cui si aggiungono $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nello studio dei limiti.

## 1.5 ELEMENTI DI TOPOLOGIA DELLA RETTA

**Definizione 1.5.1** **Spazio metrico e funzione distanza.** Sia $X$ un insieme.
Allora una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice *distanza* o *metrica* se rispetta le seguenti proprietà:

(d1) Per ogni $x, y \in X$ vale che $d(x, y) \geqslant 0$. In particolare, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

(d2) Per ogni $x, y \in X$ vale che $d(x, y) = d(y, x)$.

(d3) Per ogni $x, y, z \in X$ vale che $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

La struttura $(X, d)$ si dice *spazio metrico*.

La proprietà (d3) è particolarmente importante e viene chiamata *disuguaglianza triangolare*.
Se l'insieme $X$ è $\mathbb{R}^n$ possiamo definire diversi tipi di metriche $d$ che rendano la coppia $(\mathbb{R}^n, d)$ uno spazio metrico. Le più comuni sono:

- la metrica $d_1$, anche detta *metrica di Manhattan*, definita da
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$
- la metrica $d_2$, che rappresenta la comune *distanza euclidea*, definita da
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$
- la metrica $d_p$ con $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$, definita da
$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}.$$
- la metrica $d_\infty$, definita da
$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

Osservazione. L'insieme $\mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) := |x - y|$ è uno spazio metrico.

D'ora in avanti considereremo lo spazio metrico $(X, d)$ dove $X$ è un insieme e $d$ è una metrica qualunque su $X$.

**Definizione 1.5.2** **Palle aperte e chiuse.** Sia $x_0 \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Allora si dice *palla aperta centrata in* $x_0$ *di raggio* $\varepsilon$ l'insieme

$$B_\varepsilon(x_0) := \{ x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

L'insieme di tutte le palle aperte centrate in $x_0$ si denota con $\mathcal{B}(x_0)$.
Invece si dice *palla chiusa centrata in* $x_0$ *di raggio* $\varepsilon$ l'insieme

$$\overline{B}_\varepsilon(x_0) := \{ x \in X : d(x, x_0) \leqslant \varepsilon \}.$$

L'insieme di tutte le palle chiuse centrate in $x_0$ si denota con $\overline{\mathcal{B}}(x_0)$.

**Definizione 1.5.3** **Caratterizzazione dei punti di uno spazio metrico.** Sia $x \in X$, $A \subseteq X$ non vuoto. Si dice che:

1. $x$ è *interno ad* $A$ se esiste $\varepsilon > 0$ reale tale che
$$B_\varepsilon(x) \subseteq A,$$
ovvero se vi è una palla centrata in $x$ tutta contenuta in $A$.
2. $x$ è *aderente ad* $A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ reale vale che
$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing,$$
ovvero se per ogni palla centrata in $x$ c'è un punto che cade nell'insieme $A$.
3. $x$ è *sulla frontiera di* $A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ reale vale che
$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing, \quad B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing,$$
ovvero se per ogni palla centrata in $x$ c'è un punto che cade nell'insieme $A$ e un punto che cade nel suo complementare $X \setminus A$.
4. $x$ è *isolato in* $A$ se esiste $\varepsilon > 0$ reale tale che
$$B_\varepsilon(x) \cap A = \{ x \},$$
ovvero se vi è una palla centrata in $x$ in cui non cadono punti di $A$ tranne $x$.
5. $x$ è *punto di accumulazione per* $A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ reale vale che
$$B_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{ x \}) \neq \varnothing,$$
ovvero se per ogni palla centrata in $x$ c'è un punto diverso da $x$ che cade nell'insieme $A$.

**Definizione 1.5.4** **Caratterizzazione dei punti di uno spazio metrico - Insiemi.** Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Si definiscono allora

1. la parte interna di $A$, definita da
$$\mathring{A} := \{ x \in X : x \text{ è punto interno di } A \}.$$
2. la chiusura di $A$, definita da
$$\overline{A} := \{ x \in X : x \text{ è punto di aderenza per } A \}$$

3. la frontiera di $A$, definita da

$$\partial A := \{ x \in X : x \text{ è punto di frontiera per } A \}$$

4. l'insieme dei punti isolati di $A$, ovvero

$$\mathrm{Isol}(A) := \{ x \in X : x \text{ è punto isolato in } A \}.$$

5. l'insieme derivato di $A$, definito da

$$\mathcal{D}(A) := \{ x \in X : x \text{ è punto di accumulazione per } A \}.$$

Osservazione. Notiamo che tutti i punti di $A$ sono punti di aderenza per $A$ (in quanto l'intersezione tra la palla centrata nel punto e $A$ deve contenere il punto stesso, e quindi non può essere vuota); inoltre anche i punti di accumulazione sono punti di aderenza, per definizione di punto di accumulazione. Segue quindi che la chiusura di $A$ è data dall'unione di $A$ con il suo derivato. In formule

$$\overline{A} = A \cup \mathcal{D}(A).$$

**Definizione 1.5.5** **Insieme aperto.** Sia $A \subseteq X$. Allora si dice che $A$ è un *insieme aperto*, o semplicemente un *aperto*, se per ogni $x \in A$ esiste un $\varepsilon > 0$ reale tale che

$$B_\varepsilon(x) \subseteq A,$$

ovvero se tutti i punti di $A$ sono punti interni ad $A$.

**Proposizione 1.5.6** **L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è aperta.** *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi aperti.*
*Allora la loro unione $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ è un aperto.*

**Dimostrazione.** Sia $x \in \bigcup \mathcal{F}$; dunque $x \in A$ per qualche $A \in \mathcal{F}$.
Siccome $A$ è aperto deve esistere una palla centrata in $x$ tutta contenuta in $A$; dunque a maggior ragione questa palla sarà contenuta in $\mathcal{F}$, che risulterà quindi aperto. □

**Proposizione 1.5.7** **L'intersezione di due aperti è un aperto.** *Siano $A, B \subseteq X$ due aperti. Allora $A \cap B$ è aperto.*

**Dimostrazione.** Sia $x \in A \cap B$. Siccome $A$ e $B$ sono aperti, dovranno esistere $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ e reali tali che

$$B_{\varepsilon_A}(x) \subseteq A, \quad B_{\varepsilon_B}(x) \subseteq B.$$

Sia ora $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$. Allora l'intorno $B_\varepsilon(x)$ è contenuto sia in $A$ che in $B$, dunque deve essere in $A \cap B$, da cui viene la tesi. □

**Corollario 1.5.8** **L'intersezione di un numero finito di aperti è aperto.** *Siano $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ aperti. Allora la loro intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ è aperta.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n$. □

**Definizione 1.5.9** **Insieme chiuso.** Sia $D \subseteq X$. Allora $D$ si dice *chiuso* se e solo se $D$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

**Proposizione 1.5.10** **Un insieme è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.** *Sia* $D \subseteq X$. *Allora* $D$ *è chiuso se e solo se* $X \setminus D$ *è aperto.*

**Dimostrazione.** Definiamo $A := X \setminus D$ per brevità.

**(** $\Longrightarrow$ **)** Sia $x \in A$; siccome $D$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione allora $x$ non può essere punto di accumulazione per $D$. Questo significa che deve esistere una palla centrata in $x$ per cui $B_\varepsilon(x) \cap D$ è vuoto, ovvero $B_\varepsilon(x)$ è tutto contenuto nel complementare di $D$, ovvero $A$.

Dunque $x$ è un punto interno ad $A$. Per la generalità di $x$ segue che tutti i punti di $A$ sono interni, ovvero $A$ è aperto.

**(** $\Longleftarrow$ **)** Sia $x$ punto di accumulazione per $D$.

Siccome $A$ è aperto, se per assurdo $x \in A$ dovrebbe esistere una palla centrata in $x$ tale che $B_\varepsilon(x)$ è tutta contenuta in $A$. Ma questa palla non può contenere punti di $D$, il che è assurdo in quanto $x$ è un punto di accumulazione per $D$ e quindi ogni sua palla ha un punto in comune con $D$.

Segue quindi che $D$ è chiuso. □

### 1.5.1 Insiemi compatti

**Definizione 1.5.11** **Diametro.** Sia $A \subseteq X$. Allora il *diametro* di $A$ è

$$\operatorname{diam} A := \sup\{\, d(x, y) \,:\, x, y \in A \,\}.$$

**Definizione 1.5.12** **Insieme limitato.** Sia $A \subseteq X$. Allora $A$ si dice *limitato* se il suo diametro è finito.

Osservazione. Un insieme ha diametro limitato se e solo se è contenuto in una palla di raggio finito, ovvero se esiste un punto $x \in X$ e un raggio $r \in \mathbb{R}$ tali che

$$A \subseteq B_r(x)\,.$$

**Definizione 1.5.13** **Ricoprimento aperto di un insieme.** Sia $\mathcal{F} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti di $X$, $A$ un altro sottoinsieme di $X$.

Allora si dice che $\mathcal{F}$ è un *ricoprimento di* $A$ se $A$ è contenuto nell'unione degli elementi $\mathcal{F}$, ovvero se

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

La famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $X$ può essere qualunque: in particolare, può essere formata da infiniti insiemi.

**Definizione 1.5.14** **Sottoricoprimento finito di un insieme.** Sia $A$ un sottoinsieme di $X$ e sia $\mathcal{F} = \{U_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento. Sia inoltre $J \subseteq I$.

Allora si dice che $\{U_i\}_{i \in J}$ è un *sottoricoprimento finito* di $A$ se

(i) $J$ è un insieme finito (ovvero con un numero finito di elementi);

(ii) $\{U_i\}_{i \in J}$ è ancora un ricoprimento di $A$.

**Definizione 1.5.15** **Compattezza per ricoprimenti.** Sia $A \subseteq X$. Si dice che $A$ è *compatto per ricoprimenti* o semplicemente *compatto* se ogni ricoprimento di $A$ ammette un sottoricoprimento finito.

**Proposizione 1.5.16** **Un compatto è chiuso e limitato.** *Sia* $(X, d)$ *uno spazio metrico e sia* $A \subseteq X$ *compatto.*

*Allora vale che*

*(i)* $A$ *è chiuso;*

*(ii)* $A$ *è limitato.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo entrambe le proprietà degli insiemi compatti in uno spazio metrico.

**CHIUSURA.** Supponiamo per assurdo $A$ non sia chiuso. Per definizione allora dovrà esistere almeno un punto di accumulazione di $A$ che non è contenuto in $A$.

Sia $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ tale che $x_0 \notin A$. Costruiamo un ricoprimento di $A$ fatta in questo modo: per ogni punto $x \in A$ associamo ad esso una palla $B_{r_x}(x)$ dove

$$r_x = \frac{1}{2} d(x, x_0).$$

Ovviamente questa è un ricoprimento aperto di $A$, dunque siccome $A$ è compatto possiamo estrarne un sottoricoprimento finito della forma

$$B_{r_{x_1}}(x_1) \cup \ldots \cup B_{r_{x_n}}(x_n) .$$

Sia $r = \min\left\{ r_{x_1}, \ldots, r_{x_n} \right\}$. Allora la palla $B_r(x_0)$ non interseca nessuna delle palle del sottoricoprimento finito, poiché altrimenti $x_0$ sarebbe in $A$.

Dato che $x_0$ è di accumulazione per $A$ segue che in $B_r(x_0)$ devono esserci infiniti punti di $A$, il che contraddice la conclusione che il sottoricoprimento sia un ricoprimento di $A$. Dunque segue che $A$ è chiuso.

**LIMITATEZZA** Supponiamo per assurdo $A$ non limitato. Allora per ogni $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$ dovranno esistere dei punti di $A$ che non sono in $B_r(x)$.

Fisso $x \in X$. L'unione di tutte le palle di centro $x$ con raggio $n \in \mathbb{N}$ è un ricoprimento di $A$, ma da questo ricoprimento non si può estrarre un sottoricoprimento finito. Infatti se prendo un numero finito di palle centrate in $x$ e ne faccio l'unione ottengo

$$B_{n_1}(x) \cup \ldots \cup B_{n_k}(x) .$$

Sia $\bar{n} = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, allora il sottoricoprimento è uguale alla palla $B_{\bar{n}}(x)$. Ma per ipotesi $A$ è illimitato, dunque non può essere contenuto in una palla di dimensione finita $\bar{n}$.

Dunque concludiamo che $A$ è limitato. □

Nel caso specifico dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ vale anche il viceversa, come ci viene garantito dal seguente teorema.

**Teorema 1.5.17** **Teorema di Heine-Borel.** *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Allora* $A$ *è compatto per ricoprimenti se e solo se è chiuso e limitato.*

### 1.5.2 Topologia reale in una dimensione

Nel caso della retta valgono tutte le definizioni date sopra nel caso più generale di uno spazio metrico qualsiasi.

In particolare le palle aperte si dicono *intorni aperti* e sono rappresentati da intervalli aperti:

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon \} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Studiando la retta reale estesa invece sorge la necessità di definire degli *intorni di* $+\infty$ *e* $-\infty$.

Si dice *intorno di* $+\infty$ *di raggio* $M > 0$ una semiretta di $\mathbb{R}$ della forma

$$B_M(+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x > M \} = (M, +\infty).$$

Allo stesso modo si dice *intorno di* $-\infty$ *di raggio* $M > 0$ una semiretta di $\mathbb{R}$ della forma

$$B_M(-\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x < -M \} = (-\infty, -M).$$

# 2 SUCCESSIONI

## 2.1 LIMITI DI SUCCESSIONI

**Definizione 2.1.1** **Predicati veri definitivamente e frequentemente.** Sia $P$ un predicato sui numeri naturali, ovvero $P : \mathbb{N} \to \{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$.

Allora si dice che:

- $P$ è vero *definitivamente* se esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant n_0$ vale $P(n)$. In formule
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad P(n) = \mathcal{T}. \tag{definitivamente}$$
- $P$ è vero *frequentemente* se è vero per infiniti valori di $n$, ovvero se per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$ esiste un $n \geqslant n_0$ tale che vale $P(n)$. In formule
$$\forall n_0 \in \mathbb{N}. \quad \exists n \geqslant n_0. \quad P(n) = \mathcal{T}. \tag{frequentemente}$$

Introduciamo ora il concetto di successione.

**Definizione 2.1.2** **Successione.** Sia $X$ un insieme. Allora si dice *successione a valori in* $X$ una funzione
$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Non è necessario che il dominio sia $\mathbb{N}$, ma basta un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{N}$ della forma
$$A = \{ n \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant n_0 \}$$
per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Spesso si scrive $a_i$ per indicare $a(i)$; inoltre per indicare l'intera successione si usa la notazione $(a_n)_{n \in A}$ oppure semplicemente $(a_n)$ se i valori degli indici sono facilmente deducibili dal contesto.

**Definizione 2.1.3** **Limite di una successione.** Sia $(a_n)$ una successione a valori reali, definita anche solo definitivamente.

(1) Si dice che la successione tende a $l \in \mathbb{R}$, e si scrive
$$a_n \to l \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l$$
se vale che per ogni $\varepsilon > 0$ vale che $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente.

In questo caso si dice inoltre che la successione *converge* ad $l$.

(2) Si dice che la successione tende a $+\infty$, e si scrive
$$a_n \to +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
se vale che per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale che $a_n \geqslant M$ definitivamente.

In questo caso si dice inoltre che la successione *diverge positivamente*.

(3) Si dice che la successione tende a $-\infty$, e si scrive
$$a_n \to -\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$
se vale che per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale che $a_n \leqslant M$ definitivamente.

In questo caso si dice inoltre che la successione *diverge negativamente*.

(4) Si dice che la successione è *indeterminata* oppure che *non ha limite* se non rientra in nessuno dei casi precedenti.

In particolare una successione convergente a $0$ si dice *infinitesima*, mentre una successione divergente si dice *infinita*.

Da adesso in poi assumeremo che le successioni siano a valori reali (a meno che non venga specificato diversamente) e che siano definite anche solo definitivamente.

### 2.1.1 Primi teoremi sui limiti di successioni

**Teorema 2.1.4** **Permanenza del segno.** *Sia $(a_n)$ una successione. Supponiamo che valga una tra*

- $a_n \to l \in \mathbb{R}$ *per qualche* $l > 0$,
- $a_n \to +\infty$.

*Allora $a_n > 0$ definitivamente.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo i due casi separatamente.

(HP: $a_n \to l > 0$) Per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0. \quad |a_n - l| \leqslant \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Sia $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Allora

$$0 < \frac{l}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{3l}{2} \quad \text{definitivamente,}$$

da cui segue che $a_n > 0$ definitivamente.

(HP: $a_n \to +\infty$) Per definizione di limite

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad a_n \geqslant M \quad \text{definitivamente.}$$

Sia $M$ positivo, ad esempio $M = 1$. Allora

$$a_n \geqslant M = 1 > 0 \quad \text{definitivamente}$$

da cui segue che $a_n > 0$ definitivamente. □

Il teorema vale ovviamente anche per successioni che tendono ad un valore (finito o infinito) negativo: i valori assunti dalla successione saranno definitivamente negativi.

**Teorema 2.1.5** **Unicità del limite.** *Sia $(a_n)$ una successione. Allora $(a_n)$ può assumere uno e uno solo dei comportamenti descritti in 2.1.3.*

*Inoltre se $(a_n)$ converge segue che esiste un unico $l \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to l$.*

Per dimostrare il teorema dimostriamo separatamente i seguenti lemmi.

**Lemma 2.1.6** *Sia $(a_n)$ una successione. Allora se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, tale limite è unico. Inoltre $(a_n)$ non può divergere.*

**Dimostrazione.** Supponiamo che esista $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to m$ e mostriamo che necessariamente $m = l$. Per definizione di limite avremo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_1. \quad |a_n - l| < \varepsilon. \tag{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_2. \quad |a_n - m| < \varepsilon. \tag{6}$$

Sia ora $n_0 := \min\{n_1, n_2\}$. Allora per ogni $n \geqslant n_0$ dovranno valere sia la (5) che la (6), ovvero

$$|a_n - l| < \varepsilon, \quad |a_n - m| < \varepsilon.$$

Allora dovrà valere che

$$\begin{aligned} |l - m| &= |l - a_n + a_n - m| && \text{(per (d3))} \\ &< |l - a_n| + |m - a_n| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue che $l = m$.

Dimostriamo ora che $(a_n)$ non può divergere. Supponiamo per assurdo che $(a_n)$ diverga positivamente, ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_3 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_3. \quad a_n \geqslant M. \tag{7}$$

Mostriamo che questa richiesta è incompatibile con la condizione (5), che rappresenta l'ipotesi $a_n \to l \in \mathbb{R}$ e che possiamo scrivere anche nella forma $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ (definitivamente).

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = l + \varepsilon$. Allora combinando le condizioni della (5) e della (7) otteniamo che per ogni $n > \max\{n_1, n_3\}$ vale che

$$l + \varepsilon = M \overset{(7)}{\leqslant} a_n \overset{(5)}{<} l + \varepsilon$$

che è assurdo. Analogo ragionamento per dimostrare che $(a_n)$ non può divergere negativamente. □

**Lemma 2.1.7** *Sia $(a_n)$ una successione. Allora se $a_n \to +\infty$ segue che $(a_n)$ non può né convergere né divergere negativamente.*

**Dimostrazione.** È evidente che se $a_n \to +\infty$ segue che $(a_n)$ non può divergere negativamente. Infatti se per assurdo divergesse negativamente allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ varrebbe che $a_n < M$ definitivamente, mentre per ipotesi $a_n > M$ definitivamente.

Mostriamo ora che $(a_n)$ non può convergere. Supponiamo per assurdo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$; allora per definizione di successione convergente avremmo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_1. \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon. \tag{8}$$

Per l'ipotesi che $(a_n)$ diverga positivamente sappiamo inoltre che

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_2. \quad a_n \geqslant M. \tag{9}$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = l + \varepsilon$. Allora combinando le condizioni della (8) e della (9) otteniamo che per ogni $n > \max\{n_1, n_2\}$ vale che

$$l + \varepsilon = M \overset{(9)}{\leqslant} a_n \overset{(8)}{<} l + \varepsilon$$

che è assurdo, dunque la tesi. □

**Lemma 2.1.8** *Sia $(a_n)$ una successione. Allora se $a_n \to +\infty$ segue che $(a_n)$ non può né convergere né divergere positivamente.*

**Dimostrazione.** È evidente che se $a_n \to -\infty$ segue che $(a_n)$ non può divergere positivamente. Infatti se per assurdo divergesse positivamente allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ varrebbe che $a_n > M$ definitivamente, mentre per ipotesi $a_n < M$ definitivamente.

Mostriamo ora che $(a_n)$ non può convergere. Supponiamo per assurdo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$; allora per definizione di successione convergente avremmo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_1. \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon. \tag{10}$$

Per l'ipotesi che $(a_n)$ diverga negativamente sappiamo inoltre che

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \leqslant n_2. \quad a_n \leqslant M. \tag{11}$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = l - \varepsilon$. Allora combinando le condizioni della (10) e della (11) otteniamo che per ogni $n > \max\{n_1, n_2\}$ vale che

$$l - \varepsilon \overset{(10)}{<} a_n \overset{(11)}{\leqslant} M = l - \varepsilon$$

che è assurdo, dunque la tesi. □

I tre lemmi ci consentono di dimostrare il Teorema 2.1.5:

**Dimostrazione.** Per il Lemma 2.1.6 sappiamo che se una successione è convergente allora non può divergere né positivamente né negativamente. Inoltre il limite reale è unico.

Per il Lemma 2.1.7 sappiamo che se una successione è divergente positivamente allora non può né convergere né divergere negativamente.

Per il Lemma 2.1.8 sappiamo che se una successione è divergente negativamente allora non può né convergere né divergere positivamente.

Infine se una successione è indeterminata allora per definizione non ha nessuno dei precedenti tre caratteri, dunque la tesi. □

**Teorema 2.1.9** **Confronto Asintotico.** *Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni tali che $a_n \leqslant b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

*(i) se $a_n \to +\infty$ allora anche $b_n \to +\infty$;*

*(ii) se $b_n \to -\infty$ allora anche $a_n \to -\infty$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo i due casi separatamente.

(i) Supponiamo che $a_n \to +\infty$, ovvero che

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad a_n \geqslant M.$$

Inoltre per ipotesi dovrà esistere $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n \geqslant n_2$.

Allora per ogni $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ varrà che

$$b_n \geqslant a_n \geqslant M$$

ovvero $(b_n)$ diverge positivamente.

(ii) Supponiamo che $b_n \to -\infty$, ovvero che

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad b_n \leqslant M.$$

Inoltre per ipotesi dovrà esistere $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n \geqslant n_2$.
Allora per ogni $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ varrà che

$$a_n \leqslant b_n \leqslant M$$

ovvero $(a_n)$ diverge negativamente. □

**Teorema 2.1.10** **Teorema dei Carabinieri.** *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ tre successioni tali che (per qualche $l \in \mathbb{R}$)*

*(i)* $a_n \to l$,

*(ii)* $c_n \to l$,

*(iii)* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *definitivamente.*

*Allora segue che $b_n \to l$ e dunque in particolare $(b_n)$ è convergente.*

**Dimostrazione.** Per ipotesi sappiamo che

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_1. \qquad l - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant l + \varepsilon && (12)\\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_2. \qquad l - \varepsilon \leqslant c_n \leqslant l + \varepsilon && (13)\\
&\qquad\qquad \exists n_3 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_3. \qquad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n. && (14)
\end{aligned}$$

Dunque per ogni $n \geqslant \max\{n_1, n_2, n_3\}$ dovrà valere che

$$l - \varepsilon \overset{(12)}{\leqslant} a_n \overset{(14)}{\leqslant} b_n \overset{(14)}{\leqslant} c_n \overset{(13)}{\leqslant} l - \varepsilon$$

da cui segue che $b_n \to l$. □

### 2.1.2 Limitatezza

Come per gli insiemi, possiamo definire il concetto di limitatezza per le successioni.

**Definizione 2.1.11** **Successione limitata.** Sia $(a_n)$ una successione. Allora $(a_n)$ si dice

(i) *limitata superiormente* se esiste $u \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_n \leqslant u \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

(ii) *limitata inferiormente* se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_n \geqslant l \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

(iii) *limitata* se è sia limitata inferiormente che superiormente, ovvero se esistono $l, u \in \mathbb{R}$ tali che

$$l \leqslant a_n \leqslant u \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

**Proposizione 2.1.12** **Una successione convergente è limitata.** *Sia $(a_n)$ una successione tale che $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Allora $(a_n)$ è limitata.*

**Dimostrazione.** Per definizione di successione convergente sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon = 1$; sia inoltre $M = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n_0}| + |a| + 1$. Mostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $|a_n| < M$.

Se $n < n_0$ allora la disequazione è ovvia, in quanto

$$|a_n| < |a_0| + \cdots + |a_n| + \cdots + |a_{n_0}| + |a| + 1.$$

Invece se $n \geqslant n_0$ sappiamo che $|a_n - a| < 1$ (abbiamo fissato $\varepsilon = 1$), da cui segue

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a + a| \\ &< |a_n - a| + |a| \\ &< 1 + |a| \\ &< M. \end{aligned}$$

Dunque $|a_n| < M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $(a_n)$ è limitata. □

**Proposizione 2.1.13** **Comportamento del limite di una successione conv. limitata.** *Sia $(a_n)$ una successione tale che $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Allora*

- *se $(a_n)$ è limitata superiormente da $U \in \mathbb{R}$ segue che $a \leqslant U$;*
- *se $(a_n)$ è limitata inferiormente da $L \in \mathbb{R}$ segue che $a \geqslant L$;*
- *se $(a_n)$ è limitata (ovvero $L \leqslant a_n \leqslant U$) segue che $L \leqslant a \leqslant U$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo il primo caso, gli altri due sono analoghi.

Supponiamo per assurdo che $a > U$. Per definizione di successione convergente

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_1. \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Scegliamo $\varepsilon = a - U$ (che è positivo in quanto $a > U$), da cui segue che

$$a_n > a - \varepsilon = U$$

che è assurdo. Dunque deve valere che $a \leqslant U$. □

### 2.1.3 Monotonia

**Definizione 2.1.14** **Successioni monotone.** Sia $(a_n)$ una successione. Allora $(a_n)$ si dice

1. *strettamente crescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $a_{n+1} > a_n$;
2. *debolmente crescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $a_{n+1} \geqslant a_n$;
3. *strettamente decrescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $a_{n+1} < a_n$;
4. *debolmente decrescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $a_{n+1} \leqslant a_n$.

**Proposizione 2.1.15** **Comportamento di una successione crescente.** *Sia $(a_n)$ una successione debolmente crescente.*

*Allora $(a_n)$ converge oppure diverge positivamente. In entrambi i casi vale che*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{ a_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo i due casi separatamente.

- Supponiamo che $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.
  Sia $M \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dato che l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente illimitato, dovrà esistere un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \geqslant M$.
  Per ipotesi $(a_n)$ è debolmente crescente, dunque per ogni $n \geqslant n_0$ vale che
  $$a_n \geqslant a_{n_0} \geqslant M$$
  ovvero $a_n \to +\infty$.
- Supponiamo che $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l \in \mathbb{R}$.
  Per definizione di estremo superiore segue che $a_n \leqslant l$, dunque in particolare per qualsiasi $\varepsilon > 0$ dovrà valere $a_n \leqslant l + \varepsilon$.
  Per caratterizzazione dell'estremo superiore inoltre dovrà esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \geqslant l - \varepsilon$ (altrimenti $l - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante minore dell'estremo superiore). Dunque per ogni $n \geqslant n_0$ dovrà valere
  $$l - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant l + \varepsilon,$$
  ovvero $a_n \to l$. □

**Corollario 2.1.16** *Sia $(a_n)$ una successione debolmente crescente e limitata superiormente. Allora $(a_n)$ è convergente e $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione 2.1.15 sappiamo che il limite della successione $(a_n)$ è dato dal suo estremo superiore. Per ipotesi $(a_n)$ è limitata superiormente, dunque $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, da cui segue che $(a_n)$ è convergente. □

Enunciamo e dimostriamo ora le proposizioni analoghe per le successioni decrescenti.

**Proposizione 2.1.17** **Comportamento di una funzione decrescente.** *Sia $(a_n)$ una successione debolmente decrescente.*
*Allora $(a_n)$ converge oppure diverge negativamente. In entrambi i casi vale che*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo i due casi separatamente.

- Supponiamo che $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty$.
  Sia $M \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dato che l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è inferiormente illimitato, dovrà esistere un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \leqslant M$.
  Per ipotesi $(a_n)$ è debolmente crescente, dunque per ogni $n \geqslant n_0$ vale che
  $$a_n \leqslant a_{n_0} \leqslant M$$
  ovvero $a_n \to +\infty$.
- Supponiamo che $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l \in \mathbb{R}$.
  Per definizione di estremo inferiore segue che $a_n \geqslant l$, dunque in particolare per qualsiasi $\varepsilon > 0$ dovrà valere $a_n \geqslant l - \varepsilon$.
  Per caratterizzazione dell'estremo inferiore inoltre dovrà esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \leqslant l + \varepsilon$ (altrimenti $l + \varepsilon$ sarebbe un minorante maggiore dell'estremo inferiore). Dunque per ogni $n \geqslant n_0$ dovrà valere
  $$l - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant l + \varepsilon,$$
  ovvero $a_n \to l$. □

**Corollario 2.1.18** *Sia $(a_n)$ una successione debolmente decrescente e limitata inferiormente. Allora $(a_n)$ è convergente e $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione 2.1.17 sappiamo che il limite della successione $(a_n)$ è dato dal suo estremo inferiore. Per ipotesi $(a_n)$ è limitata inferiormente, dunque $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, da cui segue che $(a_n)$ è convergente. □

### 2.1.4 Numero di Nepero

Consideriamo la successione $(e_n)$ definita da

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Proposizione 2.1.19** *La successione $(e_n)$*

1. *verifica $2 \leqslant e_n \leqslant 3$ per ogni $n \geqslant 1$,*
2. *è strettamente crescente.*

**Dimostrazione.** Dimostro inizialmente che $e_n \geqslant 2$ per ogni $n \geqslant 1$. □

## 2.2 CALCOLO DI LIMITI DI SUCCESSIONI

### 2.2.1 Teoremi algebrici

Presentiamo ora i vari teoremi sull'algebra dei limiti.

**Proposizione 2.2.1** **Limite della somma di successioni convergenti.** *Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni convergenti, e siano $a, b \in \mathbb{R}$ rispettivamente i loro limiti. Allora la successione $(a_n + b_n)$ converge e*

$$a_n + b_n \to a + b.$$

**Dimostrazione.** Per definizione di successione convergente

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_a \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_a. \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{18}$$
$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_b \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_b. \quad |b_n - b| < \varepsilon. \tag{19}$$

Fissiamo $\varepsilon$; allora per $n \geqslant \max\{n_a, n_b\}$ dovrà valere che

$$\begin{aligned} &|a_n + b_n - (a + b)| && \text{(per (d3))} \\ &< |a_n - a| + |b_n - b| && \text{(per (18) e (19))} \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

dunque la successione $(a_n + b_n)$ è convergente e $a_n + b_n \to a + b$. □

Osservazione. Ovviamente questo teorema vale anche per la differenza tra successioni convergenti:

$$a_n - b_n \to a - b.$$

**Proposizione 2.2.2** **Limite del prodotto di successioni convergenti.** *Siano* $(a_n), (b_n)$ *due successioni convergenti, e siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *rispettivamente i loro limiti.*

*Allora la successione* $(a_n \cdot b_n)$ *converge e*

$$a_n \cdot b_n \to ab.$$

**Dimostrazione.** Siccome $(a_n)$ è convergente, per la Proposizione 2.1.12 $(a_n)$ è limitata, ovvero esiste $M > 0$ reale tale che

$$|a_n| \leqslant M.$$

Inoltre per definizione di limite sappiamo che

$$\forall \eta > 0. \quad \exists n_a \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_a. \quad |a_n - a| < \eta. \tag{20}$$
$$\forall \eta > 0. \quad \exists n_b \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_b. \quad |b_n - b| < \eta. \tag{21}$$

Allora per ogni $n \geqslant \max\{n_a, n_b\}$ varrà che

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| && \text{(per (d3))} \\
&< |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| && \text{($(a_n)$ è limitata)} \\
&< M|b_n - b| + |b||a_n - a| && \text{(per (20) e (21))} \\
&< M\eta + |b|\eta \\
&= \eta(M + |b|).
\end{aligned}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ qualunque. Fissiamo $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M + |b|}$, da cui segue che

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &< \frac{\varepsilon}{M + |b|}(M + |b|) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

ovvero la successione $(a_n \cdot b_n)$ converge e $a_n b_n \to ab$. □

**Proposizione 2.2.3** **Limite del reciproco di una successione convergente.** *Sia* $(a_n)$ *una successione convergente tale che* $a_n \to a$ *con* $a \neq 0$*. Supponiamo inoltre che* $a_n \neq 0$ *definitivamente.*

*Allora la successione* $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ *è convergente e*

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}.$$

**Dimostrazione.** Innanzitutto mostro che $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ è limitata. Per definizione di successione convergente sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_a \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_a. \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{22}$$

Sia $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$. Allora segue che

$$\begin{aligned}
|a| &= |a - a_n + a_n| && \text{(per (d3))} \\
&= |a - a_n| + |a_n| && \text{(per (22))} \\
&< \frac{|a|}{2} + |a_n| \\
\iff |a_n| &> |a| - \frac{|a|}{2} \\
&= \frac{|a|}{2}.
\end{aligned}$$

Per ipotesi $a_n \neq 0$ definitivamente, ovvero per ogni $n \geqslant n_0$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$. Dunque per ogni $n \geqslant \max\{n_0, n_a\}$ otteniamo che

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{|a|}. \tag{23}$$

Allora (sempre per ogni $n \geqslant \max\{n_0, n_a\}$) varrà che

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a - a_n}{a \cdot a_n}\right| \\ &= \frac{|a_n - a|}{|a||a_n|} && \text{(per la (23) e la (22))} \\ &< \frac{2\varepsilon}{|a|}, \end{aligned}$$

ovvero la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ converge e $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$. □

**Proposizione 2.2.4** **Limite del rapporto di successioni convergenti.** *Siano* $(a_n), (b_n)$ *due successione convergente rispettivamente ad* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Supponiamo inoltre che* $b_n \neq 0$ *definitivamente.*

*Allora la successione* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *è convergente e*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

**Dimostrazione.** Possiamo scrivere la successione come $\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$: allora dato che la successione $(b_n)$ verifica le ipotesi della Proposizione 2.2.3, dunque $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Dunque la successione originale verifica le ipotesi della Proposizione 2.2.2, da cui segue che $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$. □

Questo esclude tutti i casi in cui una delle due successioni (o entrambe) siano divergenti. Le prossime tre proposizioni si occupano di studiare questi casi.

**Proposizione 2.2.5** **Algebra degli Infiniti - Successione divergente positivamente.** *Siano* $(a_n), (b_n)$ *due successioni,* $a_n \to +\infty$.

*(i) Se* $(b_n)$ *è limitata inferiormente, allora* $a_n + b_n \to +\infty$.

*(ii) Se* $(b_n)$ *converge a* $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, *allora* $a_n b_n \to +\infty$.

*(iii) Se* $(b_n)$ *converge a* $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$, *allora* $a_n b_n \to -\infty$.

**Dimostrazione.** Siccome $(a_n)$ diverge positivamente, per definizione abbiamo che:

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad a_n \geqslant M. \tag{24}$$

Dimostriamo separatamente le tre affermazioni.

(i) Siccome $(b_n)$ è limitata inferiormente allora dovrà esistere $L \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \geqslant L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Sia $N \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Fisso $M = N - L$, da cui segue che definitivamente

$$a_n + b_n \geqslant M + L = N - L + L = N,$$

dunque per l'arbitrarietà di $N$ segue che $a_n + b_n \to +\infty$.

(ii) Siccome $b_n \to b > 0$ allora per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_b \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_b. \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$

Fisso $\varepsilon := \frac{b}{2}$, da cui segue che per ogni $n \geqslant n_b$

$$0 < \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}.$$

Sia $N \in \mathbb{R}$ qualsiasi; fisso $M := N\frac{2}{b}$. Allora per ogni $n \geqslant \max\{n_0, n_b\}$ vale che

$$\begin{aligned} a_n &\geqslant M && \text{(sappiamo che } b_n > 0) \\ \implies a_n b_n &\geqslant M b_n && (b_n > \tfrac{b}{2}) \\ &> M\frac{b}{2} \\ &= N\frac{2}{b}\frac{b}{2} \\ &= N, \end{aligned}$$

dunque per arbitrarietà di $N$ segue che $a_n b_n \to +\infty$.

(iii) Siccome $b_n \to b < 0$ allora per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_b \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_b. \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$

Fisso $\varepsilon := -\frac{b}{2}$, da cui segue che per ogni $n \geqslant n_b$

$$\frac{3b}{2} < b_n < \frac{b}{2} < 0.$$

Sia $N \in \mathbb{R}$ qualsiasi; fisso $M := N\frac{2}{b}$. Allora per ogni $n \geqslant \max\{n_0, n_b\}$ vale che

$$\begin{aligned} a_n &\geqslant M && \text{(sappiamo che } b_n < 0) \\ \implies a_n b_n &\leqslant M b_n && (b_n < \tfrac{b}{2}) \\ &< M\frac{b}{2} \\ &= N\frac{2}{b}\frac{b}{2} \\ &= N, \end{aligned}$$

dunque per arbitrarietà di $N$ segue che $a_n b_n \to -\infty$. □

**Proposizione 2.2.6** **Algebra degli Infiniti - Successione divergente negativamente.** *Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni, $a_n \to -\infty$.*

*(i) Se $(b_n)$ è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$.*

*(ii) Se $(b_n)$ converge a $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$.*

*(iii) Se $(b_n)$ converge a $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$.*

**Proposizione 2.2.7** **Algebra degli Infiniti - Reciproci.** *Sia $(a_n)$ una successione.*

*(i) Se $(a_n)$ diverge (positivamente o negativamente), allora $\frac{1}{a_n} \to 0$.*

*(ii) Se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora $\frac{1}{|a_n|} \to +\infty$.*
*In particolare*

- *se $a_n > 0$ definitivamente, allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$,*

- *se* $a_n < 0$ *definitivamente, allora* $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

**Dimostrazione.** Dimostriamo i vari casi separatamente.

(i) Se $(a_n)$ diverge allora il suo modulo dovrà divergere positivamente, ovvero

$$\forall M \in \mathbb{R}. \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad |a_n| > M.$$

Per il Permanenza del segno (2.1.4) $a_n > 0$ definitivamente, dunque $a_n \neq 0$ definitivamente. Allora dovrà valere (definitivamente)

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M}$$

Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Fisso $M := \frac{1}{\varepsilon}$, da cui segue

$$\iff \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon,$$

ovvero $\dfrac{1}{a_n} \to 0$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

(ii) Per definizione di successione convergente (a 0)

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_a \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_a. \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Siccome $a_n \neq 0$ definitivamente e $\varepsilon > 0$ possiamo passare al reciproco:

$$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualsiasi; fisso allora $\varepsilon := \frac{1}{|M|}$, da cui segue

$$\frac{1}{|a_n|} > |M|, \tag{25}$$

ovvero $\dfrac{1}{|a_n|} \to +\infty$.

Consideriamo ora i due casi particolari. Possiamo scrivere la (25) equivalentemente come

$$\frac{1}{a_n} < -|M|, \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{a_n} > |M|. \tag{26}$$

- Se $a_n > 0$ definitivamente allora anche il suo reciproco sarà definitivamente positivo, dunque non potrà essere minore di $-|M|$ che è negativo. Segue quindi che

$$\frac{1}{a_n} > |M| \quad \text{definitivamente,}$$

dunque $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$.

- Se $a_n < 0$ definitivamente allora anche il suo reciproco sarà definitivamente negativo, dunque non potrà essere maggiore di $|M|$ che è positivo. Segue quindi che

$$\frac{1}{a_n} < -|M| \quad \text{definitivamente,}$$

dunque $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$. □

**Proposizione 2.2.8** **Infinitesima per limitata è infinitesima.** *Sia* $(a_n)$ *una successione infinitesima (ovvero* $a_n \to 0$*) e* $(b_n)$ *una successione limitata.*

*Allora la successione* $(a_n b_n)$ *è infinitesima.*

**Dimostrazione.** Siccome $(a_n)$ è infinitesima deve valere che

$$\forall \eta > 0. \quad \exists n_a \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_a. \quad |a_n| < \eta.$$

Inoltre $(b_{n\,n})$ è limitata, dunque deve esistere un $L \in \mathbb{R}$ positivo tale che $|b_n| < L$.

Moltiplicando la prima equazione per la seconda otteniamo che (per ogni $n \geqslant n_a$)

$$|a_n b_n| < \eta \cdot L.$$

Sia $\varepsilon > 0$ qualunque. Allora fisso $\eta := \frac{\varepsilon}{L}$, da cui segue che

$$\begin{aligned} |a_n b_n| &< \frac{\varepsilon}{L} \cdot L \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ovvero $a_n b_n \to 0$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$. □

**2.2.9** **Teorema del Confronto a 2 per successioni** *Siano* $(a_n)$, $(b_n)$ *due successioni convergenti tali che* $a_n \to a$, $b_n \to b$.*Allora*

*(i) se* $a < b$ *allora vale che* $a_n < b_n$ *definitivamente.*

*(ii) se* $a_n \leqslant b_n$ *definitivamente segue che* $a \leqslant b$.

**Dimostrazione.** Dimostriamo i due punti separatamente.

(i) Consideriamo la successione $c_n := b_n - a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per Proposizione 2.2.1 segue che $c_n \to b - a > 0$, dunque per il Permanenza del segno (2.1.4) vale che $c_n > 0$ definitivamente, da cui segue che $a_n < b_n$ definitivamente.

(ii) Supponiamo per assurdo che $a > b$. Allora per il punto precedente dovrebbe essere $a_n > b_n$ definitivamente, il che è contrario all'ipotesi che $a_n \leqslant b_n$ definitivamente. Dunque $a \leqslant b$. □

### 2.2.2 Limiti di successioni elementari

Presentiamo ora alcuni limiti di successioni elementari.

**SUCCESSIONE COSTANTE** Consideriamo la successione definita da $a_n = k$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Mostriamo che $a_n \to k$.

Sia $\varepsilon > 0$ generico. Siccome $a_n = k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora la successione è sempre compresa tra $k - \varepsilon$ e $k + \varepsilon$, qualunque sia il valore di $\varepsilon$.

**SUCCESSIONE LINEARE** Consideriamo la successione definita da $a_n = n$. Mostriamo che $a_n \to +\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$ generico: allora sicuramente per ogni $n > M$ vale che $a_n = n > M$, dunque $a_n \to +\infty$.

**SUCCESSIONE ESPONENZIALE** Consideriamo la successione definita da $a_n = b^n$ per qualche $b \in \mathbb{R}$ costante, $b > 0$, $b \neq 1$. Mostriamo che

$$a_n \to \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leqslant a < 1. \end{cases}$$

**(CASO $b > 1$)** Siccome $b > 1$ per la disuguaglianza di Bernoulli vale che

$$b^n = (1 + (b-1))^n \geqslant 1 + (b-1)n.$$

Il membro destro tende a $+\infty$ per il teorema algebrico, dunque per il Confronto Asintotico (2.1.9) segue che $b_n \to +\infty$.

**(CASO $0 < b < 1$)** Sia $c := \frac{1}{b}$ con $c > 1$. Dunque

$$b^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{c^n} \to 0$$

per la Proposizione 2.2.7, in quanto $c^n \to +\infty$ per il caso precedente.

**RADICE $n$-ESIMA** Consideriamo la successione definita da $a_n = \sqrt[n]{b}$ per qualche $b \in \mathbb{R}$ costante, $b > 0$. Mostriamo che $a_n \to 1$ qualunque sia $b$.

Consideriamo la disuguaglianza di Bernoulli con termine generico $x$ e applichiamo la radice $n$-esima ad entrambi i membri:

$$1 + x \geqslant \sqrt[n]{1 + nx}$$

che sostituendo a $x$ il valore $\dfrac{b-1}{n}$ diventa

$$1 + \frac{b-1}{n} \geqslant \sqrt[n]{b}.$$

Distinguiamo ora due casi:

**(CASO $b \geqslant 1$)** Dato che la radice $n$-esima è strettamente crescente, avremo che

$$1 = \sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{b} \leqslant 1 + \frac{b-1}{n}.$$

Ma il membro di destra tende a $1$, dunque per il Teorema dei Carabinieri (2.1.10) vale che $\sqrt[n]{b} \to 1$.

**(CASO $0 < b < 1$)** Sia $c := \frac{1}{b}$ con $c > 1$. Allora

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \to 1$$

per la Proposizione 2.2.3, in quanto $\sqrt[n]{c} \to 1$ per il caso precedente.

### 2.2.3 Criteri per le successioni

**Proposizione 2.2.10** **Criterio del rapporto.** *Sia $(a_n)$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Sia inoltre*

$$l := \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}.$$

*Allora*

*(i) se $0 \leqslant l < 1$ allora $a_n \to 0$,*

*(ii) se $l > 1$ allora $a_n \to +\infty$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo separatamente i due casi.

**($0 \leqslant l < 1$)** Sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $l < m < 1$.

Siccome $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ deve valere che (per ogni $\varepsilon > 0$) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant l + \varepsilon$ definitivamente. In particolare poniamo $\varepsilon = m - l$ (che è positivo in quanto $m > l$), ottenendo che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant m \text{ per ogni } n \geqslant n_0.$$

Dunque partendo da $n_0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leqslant m && \text{(moltiplicando per } a_{n_0} > 0) \\ \iff &a_{n_0+1} \leqslant m \cdot a_{n_0} \\ \iff &a_{n_0+2} \leqslant m \cdot a_{n_0+1} \leqslant m^2 \cdot a_{n_0} \end{aligned}$$

Dunque per induzione si può mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\iff a_{n_0+k} \leqslant m^k \cdot a_{n_0}.$$

Sia $k$ tale che $n = n_0 + k$, ovvero $k = n - n_0$. Allora

$$0 \overset{\text{Hp.}}{<} a_n \leqslant m^n \cdot m^{-n_0} a_{n_0}.$$

Ma $m^n \cdot m^{-n_0} a_{n_0}$ è il prodotto di una successione infinitesima per una costante, dunque tende a $0$.

Per il Teorema dei Carabinieri 2.1.10 segue che $a_n \to 0$.

($l > 1$ **REALE**) Sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $1 < m < l$.
Siccome $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ deve valere che (per ogni $\varepsilon > 0$) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant l - \varepsilon$ definitivamente. In particolare poniamo $\varepsilon = l - m$ (che è positivo in quanto $m < l$), ottenendo che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant m \text{ per ogni } n \geqslant n_0.$$

Dunque partendo da $n_0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geqslant m && \text{(moltiplicando per } a_{n_0} > 0) \\ \iff &a_{n_0+1} \geqslant m \cdot a_{n_0} \\ \iff &a_{n_0+2} \geqslant m \cdot a_{n_0+1} \geqslant m^2 \cdot a_{n_0} \end{aligned}$$

Dunque per induzione si può mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\iff a_{n_0+k} \geqslant m^k \cdot a_{n_0}.$$

Sia $k$ tale che $n = n_0 + k$, ovvero $k = n - n_0$. Allora

$$a_n \geqslant m^n \cdot m^{-n_0} a_{n_0}.$$

Ma $m^n \cdot m^{-n_0} a_{n_0}$ è il prodotto di una successione che divergente positivamente per una costante positiva, dunque tende a $+\infty$.

Per il Teorema del Confronto Asintotico 2.1.9 segue che $a_n \to +\infty$.

($l = +\infty$) Si dimostra analogamente al caso precedente scegliendo un $M > 1$ qualsiasi. □

**Proposizione 2.2.11** **Criterio della radice.** *Sia $(a_n)$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Sia inoltre*

$$l := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

*Allora*

*(i) se $0 \leqslant l < 1$ allora $a_n \to 0$,*

*(ii) se $l > 1$ allora $a_n \to +\infty$.*

**Dimostrazione.** $(0 \leqslant l < 1)$ Sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $l < m < 1$.

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \to l$ deve valere che (per ogni $\varepsilon > 0$) $\sqrt[n]{a_n} \leqslant l + \varepsilon$ definitivamente. In particolare poniamo $\varepsilon = m - l$ (che è positivo in quanto $m > l$), ottenendo che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant m \text{ per ogni } n \geqslant n_0.$$

Eleviamo entrambi i membri alla $n$, ottenendo che

$$0 \overset{\text{Hp.}}{\leqslant} a_n \leqslant m^n.$$

Ma $m^n \to 0$ in quanto $m < 1$, da cui segue per il Teorema dei Carabinieri (2.1.10) che $a_n \to 0$.

$(l > 1$ REALE$)$ Sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $1 < m < l$.

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \to l$ deve valere che (per ogni $\varepsilon > 0$) $\sqrt[n]{a_n} \geqslant l - \varepsilon$ definitivamente. In particolare poniamo $\varepsilon = l - m$ (che è positivo in quanto $m < l$), ottenendo che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant m \text{ per ogni } n \geqslant n_0.$$

Eleviamo entrambi i membri alla $n$, ottenendo che

$$a_n \geqslant m^n.$$

Ma $m^n \to +\infty$ poiché $m > 1$, dunque per il Confronto Asintotico (2.1.9) vale che $a_n \to +\infty$.

$(l = +\infty)$ Si dimostra analogamente al caso precedente scegliendo un $M > 1$ qualsiasi. □

**Proposizione 2.2.12** **Rapporto implica radice.** *Sia $(a_n)$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Allora se esiste $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$l := \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*segue che la successione $(\sqrt[n]{a_n})$ è convergente e*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

**Dimostrazione.** Dato che $a_n > 0$ definitivamente segue che $l \geqslant 0$.

CASO (I) Supponiamo inizialmente $l \in [0, +\infty)$.

Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Per ipotesi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant l + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \forall n \geqslant n_0$$

Moltiplicando tutto per $a_n > 0$ otteniamo

$$a_n \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Partendo da $n = n_0$ si può mostrare per induzione su $k$ che

$$a_{n_0} \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \leqslant a_{n_0+k} \leqslant a_{n_0} \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

Sia $k := n - n_0$; segue che

$$a_{n_0} \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant a_n \leqslant a_{n_0} \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Facendo la radice $n$-esima di tutti i membri

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{a_{n_0}\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_0}} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{a_{n_0}\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_0}}.$$

Il membro destro tende a $l+\frac{\varepsilon}{2}$ per $n \to +\infty$, dunque sarà definitivamente minore di $l+\varepsilon$. Analogamente il membro sinistro sarà definitivamente maggiore di $l-\varepsilon$. Dunque

$$l-\varepsilon \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant l+\varepsilon \quad \text{definitivamente},$$

da cui concludiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

**CASO (II)** Supponiamo invece $l = +\infty$.
Sia $M > 0$ qualsiasi; per ipotesi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant M. \quad \forall n \geqslant n_0$$

Moltiplicando entrambi i membri per $a_n > 0$ otteniamo

$$a_{n+1} \geqslant M a_n.$$

Per la stessa induzione del caso (i) possiamo mostrare che

$$a_n \geqslant M^n \cdot a_{n_0} M^{-n_0}.$$

Il membro destro tende a $+\infty$, dunque per il Confronto Asintotico (2.1.9) vale che $a_n \to +\infty = l$. □

## 2.3 SOTTOSUCCESSIONI

**Definizione 2.3.1** **Successione di indici.** Sia $(a_n)$ una successione a valori in $\mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora $(a_n)$ si dice *successione di indici*.

Ad esempio le successioni $a_n := 2n$ (numeri pari) e $b_n := 2n+1$ sono successioni di indici.

**Definizione 2.3.2** **Sottosuccessione estratta.** Siano $(a_n)$, $(b_n)$ due successioni.
Allora si dice che la successione $(b_n)$ è una *sottosuccessione estratta* da $(a_n)$ (o semplicemente *sottosuccessione* di $(a_n)$) se esiste una successione di indici $(n_k)$ tale che

$$b_n = a_{n_k}.$$

**Proposizione 2.3.3** **Le sottosucc. hanno lo stesso limite della successione originale.** *Sia $(a_n)$ una successione e $(b_n)$ una sua sottosuccessione.*
*Allora se $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ segue che $b_n \to l$.*

**Dimostrazione.** Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Allora per definizione di limite avremo che

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad \forall |a_n - l| < \varepsilon.$$

Siccome $(b_n)$ è una sottosuccessione di $(a_n)$ dovrà esistere una successione di indici $(k_n)$ tale che $b_n = a_{k_n}$. Dato che $(k_n)$ è crescente varrà che $k_n \geqslant n$; dunque se $n \geqslant n_0$ a maggior ragione $k_n \geqslant n_0$, per cui

$$b_n = a_{k_n} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon),$$

ovvero $b_n \to l$.
Analogo ragionamento nei casi $a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$. □

**Corollario 2.3.4** *Sia* $(a_n)$ *una successione e* $(b_n), (c_n)$ *due sottosuccessioni estratte. Se*

$$b_n \to \beta, \quad c_n \to \gamma$$

*con* $\beta \neq \gamma$ *allora vale che* $(a_n)$ *non ha limite.*

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che $a_n \to \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora le sottosuccessioni estratte $(b_n), (c_n)$ dovrebbero convergere ad $\alpha$ per la Proposizione 2.3.3, il che è assurdo poiché convergono a due numeri diversi, dunque la tesi. □

## 2.4 LIMITE SUPERIORE E INFERIORE DI SUCCESSIONI

**Definizione 2.4.1** **Maggioranti e minoranti definitivi.** Sia $(a_n)$ una successione.

Allora si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante definitivo di* $(a_n)$ se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leqslant M \quad \text{per ogni } n \geqslant n_0. \tag{27}$$

Allo stesso modo si dice che $N \in \mathbb{R}$ è un *minorante definitivo di* $(a_n)$ se

$$a_n \geqslant N \quad \text{per ogni } n \geqslant n_0. \tag{28}$$

L'insieme dei maggioranti definitivi si indica con $\mathcal{M}^{(a)}$, mentre l'insieme dei minoranti definitivi si indica con $\mathcal{N}^{(a)}$.

Notiamo che se una successione è limitata superiormente, ovvero $\{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$ ammette un maggiorante $M$, allora tale maggiorante è anche un maggiorante definitivo: infatti $a_n \geqslant M$ per ogni $n$, dunque lo sarà anche definitivamente. Non vale necessariamente il contrario: ad esempio la successione definita da $a_n := \dfrac{10}{n}$ ammette 1 come maggiorante definitivo (in quanto $a_n \leqslant 1$ per $n \geqslant 10$) ma non come maggiorante (poiché la disuguaglianza non vale per $n < 10$).

**Definizione 2.4.2** **Limite superiore e inferiore.** Sia $(a_n)$ una successione e siano $\mathcal{M}^{(a)}, \mathcal{N}^{(a)}$ gli insiemi dei maggioranti e minoranti defininitivi. Allora definisco

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (a_n) \text{ è illimitata superiormente,} \\ \inf \mathcal{M}^{(a)}, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{29}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (a_n) \text{ è illimitata inferiormente,} \\ \sup \mathcal{N}^{(a)}, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{30}$$

Osservazione. Vale sempre che il limite inferiore è minore o uguale del limite superiore.

Vediamo alcune caratterizzazioni alternative del limite superiore e inferiore.

**Proposizione 2.4.3** **Caratterizzazione I di limite superiore e inferiore.** *Sia* $(a_n)$ *una successione limitata.*

*Allora vale che*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{ a_k : k \geqslant n \}. \tag{31}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{ a_k : k \geqslant n \}. \tag{32}$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo la (32); la dimostrazione della (31) è analoga.

Sia $\left(I_n^{(a)}\right)$ la successione definita da

$$I_n^{(a)} := \inf\{\, a_k \,:\, k \geqslant n \,\}.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ dovrà valere che $I_n^{(a)}$ è un minorante definitivo (infatti $a_k \geqslant I_n^{(a)}$ per ogni $k \geqslant n$, ovvero definitivamente). Da ciò segue che

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \geqslant I_n^{(a)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque, siccome $\liminf a_n$ è un maggiorante dell'insieme $\left\{\, I_n^{(a)} \,:\, n \in \mathbb{N} \,\right\}$ allora dovrà essere maggiore o uguale all'estremo superiore dell'insieme, ovvero

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} I^{(a_n)}.$$

Dimostriamo ora l'uguaglianza opposta. Sia $N$ un minorante definitivo di $\left(I_n^{(a)}\right)$. Allora per definizione dovrà esistere un intero positivo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_k \geqslant N$ per ogni $k \geqslant n_0$.

Siccome $N$ è minore o uguale ad ogni $a_k$ dovrà essere minore o uguale all'estremo inferiore dell'insieme, ovvero

$$N \leqslant \inf_{k\geqslant n_0} a_k = I_{n_0}^{(a)} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} I_n^{(a)}.$$

Ma questa disuguaglianza vale per qualsiasi minorante definitivo $N$, dunque

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} I_n^{(a)}.$$ □

Osservazione. La successione $\left(I_n^{(a)}\right)$ definita nella dimostrazione precedente è debolmente crescente (stiamo calcolando l'estremo inferiore di un insieme via via più piccolo, ed in particolare sempre contenuto nei precedenti), dunque per il Corollario 2.1.16 vale che

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^{(a)} = \sup\left\{\, I_n^{(a)} \,:\, n \in \mathbb{N} \,\right\} = \liminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Similmente definiendo la successione $\left(S_n^{(a)}\right)$ tale che

$$S_n^{(a)} := \sup\{\, a_k \,:\, k \geqslant n \,\}.$$

notiamo che essa è debolmente decrescente, dunque per la Corollario 2.1.18 ammette limite reale e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(a)} = \inf\left\{\, S_n^{(a)} \,:\, n \in \mathbb{N} \,\right\} = \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Dunque si può questa definizione alternativa di limite superiore e limite inferiore:

**Corollario 2.4.4** **Caratterizzazione II di limite superiore e inferiore.** *Sia* $(a_n)$ *una successione. Allora vale che*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (a_n) \text{ è illim. sup.,} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(a)}, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{33}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (a_n) \text{ è illim. inf.,} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} I_n^{(a)}, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{34}$$

*dove* $\left(S_n^{(a)}\right), \left(I_n^{(a)}\right)$ *sono due successioni tali che*

$$S_n^{(a)} = \sup\{a_k : k \geqslant n\}, \quad I_n^{(a)} = \inf\{a_k : k \geqslant n\}.$$

Diamo una terza e ultima caratterizzazione dei limiti superiori ed inferiori.

**Proposizione 2.4.5** **Caratterizzazione III del limite superiore.** *Sia* $(a_n)$ *una successione. Allora* $L \in \mathbb{R}$ *è il limite superiore della successione* $(a_n)$ *se e solo se*

*(i) per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $a_n < L + \varepsilon$ *definitivamente;*

*(ii) per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $a_n > L - \varepsilon$ *frequentemente.*

*Invece nel caso la successione non sia limitata abbiamo che*

- $\limsup a_n = +\infty$ *se e solo se per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *vale che* $a_n > M$ *frequentemente;*
- $\limsup a_n = -\infty$ *se e solo se per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *vale che* $a_n < M$ *definitivamente, ovvero se* $a_n \to -\infty$*.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo separatamente i casi in cui il limite superiore è un numero reale, è $+\infty$ oppure è $-\infty$.

**LIMITE SUPERIORE REALE** La (i) equivale ad affermare che ogni numero maggiore di L è un maggiorante definitivo, ovvero che $L \geqslant \limsup a_n$

La (ii) invece equivale ad affermare che ogni numero minore di L non è un maggiorante definitivo, in quanto $L - \varepsilon < a_n$ per infiniti valori di $n$ (ovvero frequentemente), dunque $L \leqslant \limsup a_n$.

Concludiamo quindi che

$$L = \limsup_{n \to +\infty} a_n.$$

**LIMITE SUPERIORE** $+\infty$ Questo equivale ad affermare che la successione $a_n$ non è limitata superiormente per definizione, ovvero per ogni $M \in \mathbb{R}$ deve valere che $a_n > M$ per almeno un valore di $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia se ciò accadesse un numero finito di volte la successione avrebbe massimo, ma ciò è assurdo in quanto la successione non è limitata superiormente, dunque $a_n > M$ per infiniti valori di $n$ (ovvero frequentemente).

**LIMITE SUPERIORE** $-\infty$ Per definizione di limite superiore sappiamo che $\limsup a_n = -\infty$ se e solo se $\inf \mathcal{M}^{(a)} = -\infty$, ovvero se e solo se ogni $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante definitivo. Ma questo significa che $a_n \leqslant M$ definitivamente, ovvero $a_n \to -\infty$. □

Analogamente la proposizione per i limiti inferiori:

**Proposizione 2.4.6** **Caratterizzazione III del limite inferiore.** *Sia* $(a_n)$ *una successione. Allora* $L \in \mathbb{R}$ *è il limite inferiore della successione* $(a_n)$ *se e solo se*

*(i) per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $a_n > L + \varepsilon$ *definitivamente;*

*(ii) per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $a_n < L - \varepsilon$ *frequentemente.*

*Invece nel caso la successione non sia limitata abbiamo che*

- $\liminf a_n = -\infty$ *se e solo se per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *vale che* $a_n < M$ *frequentemente;*

- $\liminf a_n = +\infty$ *se e solo se per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *vale che* $a_n > M$ *definitivamente, ovvero se* $a_n \to +\infty$.

**Teorema 2.4.7** **Regolarità tramite limite inferiore e superiore.** *Sia* $(a_n)$ *una successione. Allora* $(a_n)$ *è regolare se e solo se esiste* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *tale che*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = l.$$

*In particolare varrà che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

**Dimostrazione.** Mostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

($\Longleftarrow$) Se $a_n \to +\infty$ allora la funzione è illimitata superiormente (dunque $\limsup a_n = +\infty$) e l'insieme dei minoranti definitivi è tutto $\mathbb{R}$, dunque $\liminf a_n = \sup \mathcal{N}^{(a)} = +\infty$ da cui la tesi.
Analogo ragionamento se $a_n \to -\infty$.
Supponiamo quindi che $a_n \to l \in \mathbb{R}$. Allora per definizione di limite esisterà $\varepsilon > 0$ tale che

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Ma questo significa che $l + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo e $l - \varepsilon$ è un minorante definitivo, dunque

$$l - \varepsilon < \liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} a_n < l + \varepsilon,$$

da cui segue che

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = l.$$

($\Longrightarrow$) Se $l = +\infty$ allora per la Proposizione 2.4.6 segue che $a_n \to +\infty$. Analogamente se $l = -\infty$ per la Proposizione 2.4.5 segue che $a_n \to -\infty$.
Supponiamo ora che $l \in \mathbb{R}$. Siccome $l$ è il limite superiore, allora per il Proposizione 2.4.5 segue che per ogni $\varepsilon > 0$

$$a_n < l + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Allo stesso modo, siccome $l$ è il limite inferiore, per la Proposizione 2.4.6 varrà che per ogni $\varepsilon > 0$

$$a_n > l - \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Dunque

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

ovvero $a_n \to l$. □

### 2.4.1 Teoremi in versione limite superiore/inferiore

**Teorema 2.4.8** **Teorema del Confronto.** *Siano* $(a_n), (b_n)$ *due successioni tali che* $a_n \leqslant b_n$ *definitivamente. Allora valgono le seguenti:*

*(i)* $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} b_n$

*(ii)* $\limsup_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} b_n$

**Dimostrazione.** Supponiamo per semplicità che le successioni siano limitate. Per il Corollario 2.4.4 possiamo considerare le successioni $\left(S_n^{(a)}\right)$ e $\left(S_n^{(b)}\right)$.

Per ipotesi $a_n \leqslant b_n$, dunque dovrà valere definitivamente che $S_n^{(a)} \leqslant S_n^{(a)}$, ovvero facendo i limiti a $+\infty$ per il 2.2.9 segue che

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Analoga dimostrazione per il limite inferiore. □

**Teorema 2.4.9** **Teorema dei Due Carabinieri.** *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ tre successioni tali che $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ definitivamente. Allora vale che*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} c_n.$$

**Dimostrazione.** Abbiamo già osservato che $\liminf b_n \leqslant \limsup b_n$. Per il Teorema 2.4.8 avremo allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} b_n \qquad \text{(siccome } a_n \leqslant b_n\text{)}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} c_n. \qquad \text{(siccome } b_n \leqslant c_n\text{)}$$

da cui segue che

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} c_n.$$ □

# 3 FUNZIONI DI VARIABILE REALE

## 3.1 FUNZIONI DI VARIABILE REALE

Studieremo nel seguito principalmente funzioni di variabile reale, ovvero funzioni definite da un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}$ non vuoto in $\mathbb{R}$.
Studiamo le proprietà fondamentali delle funzioni di variabile reale.

**Definizione 3.1.1** **Monotonia di una funzione.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : A \to \mathbb{R}$.
Allora $f$ si dice

(1) *strettamente crescente* se per ogni $x, y \in A$, $y > x$ vale che $f(y) > f(x)$;

(2) *debolmente crescente* se per ogni $x, y \in A$, $y > x$ vale che $f(y) \geqslant f(x)$;

(3) *strettamente decrescente* se per ogni $x, y \in A$, $y > x$ vale che $f(y) < f(x)$;

(4) *debolmente decrescente* se per ogni $x, y \in A$, $y > x$ vale che $f(y) \leqslant f(x)$;

Se $f$ è strettamente crescente o decrescente si dice anche che è *strettamente monotona*; invece se è debolmente crescente o decrescente si dice anche *debolmente monotona*.

**Definizione 3.1.2** **Simmetrie di una funzione.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : A \to \mathbb{R}$.
Allora la funzione $f$ si dice

- *pari* se per ogni $x \in A$ vale che $f(-x) = f(x)$,
- *dispari* se per ogni $x \in A$ vale che $f(-x) = -f(x)$.

**Definizione 3.1.3** **Periodicità.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : A \to \mathbb{R}$.
Allora la funzione $f$ si dice *periodica* se esiste almeno un $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ tale che

$$f(x + T) = f(x)$$

per ogni $x \in A$. Ogni $T$ che soddisfa la precedente equazione si dice *periodo di* $f$.
Se esiste un minimo $T^*$ che la soddisfa, $T^*$ si dice *minimo periodo di* $f$.

## 3.2 LIMITI DI FUNZIONI

**Definizione 3.2.1** **Limite di funzione.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.
Allora si dice che il *limite di* $f(x)$ *per* $x$ *che tende a* $x_0$ *è* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \text{oppure} \quad f(x) \to l \text{ (per } x \to x_0)$$

se vale che per ogni intorno $\mathcal{U}$ di $l$ esiste un intorno $\mathcal{V}$ di $x_0$ tale che per ogni $x$ in $\mathcal{V} \cap A \setminus x_0$ vale che $f(x) \in \mathcal{U}$. In simboli

$$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{B}(l). \quad \exists \mathcal{V} \in \mathcal{B}(x_0). \quad \forall x \in \mathcal{V} \cap A \setminus \{x_0\}. \quad f(x) \in \mathcal{U}.$$

Osservazione. L'insieme derivato di $A$ può anche includere i punti $\pm\infty$, dunque possiamo fare i limiti per $x$ che tende ad infinito se $\pm\infty \in \mathcal{D}(A)$.

La definizione topologica (ovvero per intorni) è equivalente alla definizione tramite $\varepsilon$ e $\delta$. Ad esempio nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ abbiamo che il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ è $l$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists \delta > 0. \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}. \quad f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Tuttavia dato che gli intorni di $\pm\infty$ sono diversi dagli intorni dei punti di $\mathbb{R}$ dovremmo dare nove definizioni diverse di limite, mentre la definizione topologica è uguale in tutti i casi ed è quindi più comoda.