Dim. che $\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{(x^2-y^2)}$ non è esprimibile come prodotto di anelli comm. con 1 non banali.

Per il punto 1 è sufficiente dimostrare che le uniche soluzioni dell'eq. $\varepsilon^2=\varepsilon$ in $A := \frac{\mathbb{Q}[\bar{x},y]}{(x^2-y^2)}$ sono $\varepsilon = 0, 1$.

Osserviamo che in A si ha che $\bar{y}^2 = y^2+(x^2-y^2) = x^2+(x^2-y^2) = \bar{x}^2$, dunque ogni pol. ha al massimo grado in y uguale 1, cioè (raccogliendo i termini contenenti $\bar{y}$) ogni pol. si esprime come

$$p_1(\bar{x}) + p_2(\bar{x})\cdot\bar{y}$$

dove $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}[x]$.

Allora $(p_1(\bar{x})+p_2(\bar{x})\bar{y})^2 = (p_1(\bar{x}))^2 + (p_2(\bar{x}))^2\bar{y}^2 + 2p_1(\bar{x})p_2(\bar{x})\bar{y}$

$$= (p_1(\bar{x}))^2 + (p_2(\bar{x}))^2\bar{x}^2 + 2p_1(\bar{x})p_2(\bar{x})\bar{y}$$

Quindi un polinomio $\varepsilon \in A$ soddisfa $\varepsilon^2=\varepsilon$ se

$$\begin{cases} p_1(\bar{x}) = (p_1(\bar{x}))^2 + (p_2(\bar{x}))^2\bar{x}^2 \\ p_2(\bar{x}) = 2p_1(\bar{x})p_2(\bar{x}) \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Q}[\bar{x}]$$

La seconda equivale a $p_2(\bar{x})(2p_1(\bar{x})-1) = 0$ in $\mathbb{Q}[x]$, ma essendo quest'ultimo un dominio segue che $p_2 = 0$ oppure $p_1(\bar{x}) = \frac{1}{2}$

Nel primo caso: $p_1(\bar{x}) = (p_1(\bar{x}))^2$ e questo vale se $p_1(x) \in \{0,1\}$ poiché $\mathbb{Q}[x]$ è dominio e quindi un'eq. di secondo grado ha al più due soluzioni (e 0, 1 sono entr. soluzioni)

Nel secondo caso $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + p_2(\bar{x})\bar{x}^2$ e ciò è assurdo, in quanto il membro sinistro ha grado 0 e il destro ha grado 2.

$\rightsquigarrow$ Le uniche due soluzioni di $\varepsilon^2=\varepsilon$ in A sono $\varepsilon = 0, 1$. $\blacksquare$

YEEE