Aufgabenblatt 2

Ben Engelhard Sarah Walden

1) a) (i)

$$\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x) \tag{1}$$

"p(x) gilt nicht für alle x" ist logisch äquivalent zu "es gibt ein x für das p(x) falsch ist"

(ii)

$$\neg\exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x) \tag{2}$$

"Es gibt kein x bei dem p(x) wahr ist" ist logisch äquivalent zu "für alle x ist p(x) falsch"

b)

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x \in X \exists y \in Y : p(x,y) \wedge q(x,y) \\
&\equiv \exists x \in X \neg(\exists y \in Y : p(x,y) \wedge q(x,y)) \\
&\equiv \exists x \in X \forall y \in Y : \neg(p(x,y) \wedge q(x,y)) \\
&\equiv \exists x \in X \forall y \in Y : \neg p(x,y) \vee \neg q(x,y)
\end{aligned} \tag{3}$$

c) (i)

$$\exists x p(x) \vee \exists x q(x) \equiv \exists x p(x) \vee q(x) \tag{4}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\exists x p(x) \vee \exists x q(x) \equiv \exists x p(x) \vee q(x) \\
\Leftrightarrow\ &\neg(\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \equiv \neg(\exists x p(x) \vee q(x)) \\
\Leftrightarrow\ &\forall x \neg p(x) \wedge \forall x \neg q(x) \equiv \forall x \neg p(x) \wedge \neg q(x)
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}
&\forall x \neg p(x) \wedge \forall x \neg q(x) \\
&\Rightarrow \neg p(x), \neg q(x) \\
&\Rightarrow \forall x \neg p(x) \wedge \neg q(x)
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned}
&\forall x \neg p(x) \wedge \neg q(x) \\
&\Rightarrow \neg p(x), \neg q(x) \\
&\forall x \neg p(x) \wedge \forall x \neg q(x)
\end{aligned}$$

$\square$

(ii)

$$\exists x p(x) \wedge \exists q(x) \equiv \exists x p(x) \wedge q(x) \tag{5}$$

Wiederlegen durch Gegenbeispiel. Sei M={a,b} und p(a) = w, q(a) = f, p(b) = f, q(b) = w
Dann ist $\exists x p(x)$ wahr, $\exists x q(x)$ wahr und $\exists x p(x) \wedge \exists x p(x)$ wahr. $\exists x p(x) \wedge q(x)$ ist aber falsch, da entweder immer p(x) oder q(x) für jedes Element falsch ist.
d.h. die beiden Seiten der Aussage sind nicht äquivalent □

2)
a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
b) $A \cap B = \{b, c\}$
c) $A \backslash B = \{a\}$
d) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{a, d\}$
e) $A \times B$ = {(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d) }
f) $P(A) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$
g) $A \cap C = \emptyset$
h) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

3) a)

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) \tag{6}$$

Beweis durch Fallunterscheidung. Fall 1: $A \cap B = \emptyset$

$$P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$$
$$P(A \cap B) = \{\emptyset\}$$

✓

Fall 2: $A = B$

$$A \cap B = A = B$$
$$P(A \cap B) = P(A) = P(B) = P(A) \cap P(B)$$

✓

Fall 3: $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

$$P(A \cap B) = \{C | C \subset A \cap B\}$$
$$P(A) = \{A^* | A^* \subset A\}$$
$$P(B) = \{B^* | B \subset B\}$$

□

b)
$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \tag{7}$$

Wiederlegen durch Gegenbeispiel. Sei A={1} und B={2}
Dann ist:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\ P(A) &= \{\emptyset, \{1\}\} \\ P(B) &= \{\emptyset, \{2\}\} \\ P(A) \cup P(B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \end{aligned}$$

$P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$ □

4)
$$\exists p^\star T(p^\star) \Rightarrow \forall p T(p) \tag{8}$$

Wiederlegen durch Gegenbeispiel.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Fall 1: Alle $p \in P$ trinken:

$$\begin{gathered} \exists p^\star T(^\star) = wahr \\ \forall p T(p) = wahr \\ \exists p^\star T(^\star) \Rightarrow \forall p T(p) = wahr \\ \checkmark \end{gathered}$$

Fall 2: Eine $p \in P$ trinkt nicht: Wenn $\exists p \in P$ nicht trinkt, ist $\forall p \in P$ falsch, obwohl $\exists p^\star T(^\star)$ immer noch wahr ist.

$$\exists p^\star T(^\star) \not\Rightarrow \forall p T(p) \tag{9}$$

□