

Appunti di Fisica

di:

Facchini Luca

Corso tenuto dal prof. Iuppa Roberto

Università degli Studi di Trento

A.A. 2024/2025

Autore:

FACCHINI Luca

Mat. 245965

Email: luca.facchini-1@studenti.unitn.it

luca@fc-software.it

Corso:

Fisica [145011]

CDL: Laurea Triennale in Informatica

Prof. IUPPA Roberto

Email: roberto.iuppa@unitn.it

Sommario

Appunti del corso di Reti, tenuto dal prof. Iuppa Roberto presso l'Università degli Studi di Trento. Corso seguito nell'anno accademico 2024/2025.

Indice

I	Meccanica	1
1	Cinematica	3
1.1	Nozioni Preliminari	3
1.2	Moti in una dimensione e grafico orario	3
1.2.1	Esercizio sulle grandezze fisiche	5
1.2.2	Problema de “Il lancio del sasso” (M.R.U.A e M.R.U)	7
1.2.3	Moto armonico	9
1.3	Moti in due dimensioni	10
1.3.1	Vettori e definizioni	10
1.3.2	Accelerazione nel piano e ascissa curvilinea	13
1.3.3	Moto Circolare Uniforme (M.C.U.)	14
1.3.4	Moto Parabolico	15
2	Dinamica	17
2.1	I tre principi fondamentali	17
2.2	Specificazione delle forze	18
2.2.1	Reazione Vincolare	19
2.2.2	Forza di attrito radente	19
2.2.3	Piano Inclinato	21
2.2.4	Forza Elastica - senza attrito	21
2.2.5	Moto del pendolo	23
3	Lavoro, Energia e Momenti	25
3.1	Lavoro	25
3.2	Teorema delle forze vive	27
3.3	Forze Conservative	28
3.4	Energia Potenziale	28
3.5	Conservazione dell’energia meccanica	29
3.6	Potenza	30
4	Fenomeni di urto	31
4.1	Introduzione agli urti	31
4.1.1	Passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa	32
4.2	Urto elastico	33
4.3	Urto (completamente) anelastico	34
4.4	Nota Sui sistemi di riferimento, inerziali e non inerziali	35
II	Termodinamica	37
5	Termodinamica	39
5.1	Calore	40
5.2	Stato Termodinamico	40
5.2.1	Trasformazioni termodinamiche	41
5.2.2	Altre leggi che regolano la termodinamica	43
5.3	Lavoro termodinamico e energia interna	44
5.3.1	Lavoro dei gas ideali	44

5.3.2	Lavoro termodinamico	45
5.3.3	Energia interna ai gas	45
5.4	Trasformazioni gas ideali	46
5.4.1	Trasformazioni adiabatiche	46
5.4.2	Trasformazioni isoterme	47
5.4.3	Trasformazioni isocore	47
5.4.4	Trasformazioni isobare, Entalpia	47
5.4.5	Riassumendo	48
5.4.6	Trasformazioni politropiche e generali	48
5.5	Trasformazioni Cicliche	49
5.5.1	Ciclo di Carnot	50
5.5.2	Ciclo di Otto - Motori Diesel	51
6	Seconda legge della termodinamica	53
6.1	Teorema di Carnot	54
6.2	Entropia	54
	Appendice A: Note delle lezioni	57
A.1	24 febbraio 2025	57
A.2	26 febbraio 2025	57
A.3	31 marzo 2025	57

Parte I

Meccanica

Capitolo 1

Cinematica

Nel seguente capitolo andremo ad analizzare la cinematica, ovvero la branca della fisica che si occupa di descrivere il moto di un punto nello spazio. Per fare ciò andremo ad analizzare le grandezze fisiche che descrivono il moto di un punto nello spazio e come queste siano collegate tra loro.

1.1 Nozioni Preliminari

Sistema di riferimento Un sistema di riferimento è un insieme di regole che permettono di determinare la posizione di un punto nello spazio. Un sistema di riferimento è composto da un'origine, da un insieme di assi e da un'unità di misura. Definiamo un sistema di riferimento in quattro assi: x , y , z e t dove t rappresenta il tempo.

Definizione 1.1 (Spazio-Tempo Euclideo). *Lo spazio-tempo euclideo (S) è un sistema di riferimento in quattro assi, x , y , z e t , dove t rappresenta il tempo. Lo spazio-tempo euclideo è definito come:*

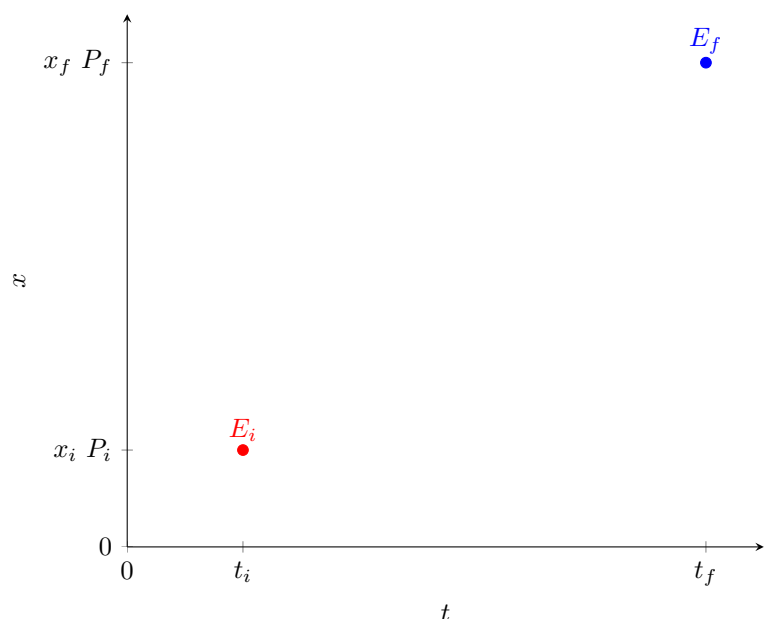
$$S(O_z, x, y, z; O_t, t)$$

dove O_z è l'origine degli assi spaziali e O_t è l'origine dell'asse temporale.

1.2 Moti in una dimensione e grafico orario

Per descrivere i moti in una dimensione possiamo utilizzare un grafico non affine, quindi non lineare, che rappresenta la posizione di un punto in funzione del tempo. Questo grafico è detto *grafico orario*.

Definizione 1.2 (Grafico Orario). *Il grafico orario è un grafico cartesiano che esprime la posizione di un punto che si muove in una dimensione in funzione del tempo.*



Vediamo come al momento t_i il punto sia in posizione P_i e di verifica come l'evento E_i sia in posizione x_i . Al momento t_f il punto è in posizione P_f e l'evento E_f è in posizione x_f . Ora possiamo definire lo spostamento:

Definizione 1.3 (Spostamento). *Lo spostamento è la variazione di posizione di un punto in un intervallo di tempo. Lo spostamento è definito come:*

$$S_{i \rightarrow f} = x_f - x_i$$

$$\Delta x_{i \rightarrow f} = x_f - x_i$$

Da notare come lo spostamento non descrive né la traiettoria né la distanza percorsa dal punto ma solo la variazione di posizione, infatti il punto potrebbe aver compiuto un percorso "non diretto". Inoltre nello spostamento ha un verso definito e come conseguenza scrivere $S_{i \rightarrow f} \neq S_{f \rightarrow i}$.

Definizione 1.4 (Distanza Percorsa). *La distanza percorsa è la lunghezza della traiettoria percorsa da un punto in un intervallo di tempo. La distanza percorsa è definita come:*

$$d(P_i, P_f) = |x_f - x_i|$$

Notiamo come la distanza percorsa sia sempre positiva in quanto è la lunghezza della traiettoria percorsa dal punto. Inoltre la distanza percorsa non ha un verso definito, infatti $d(P_i, P_f) = d(P_f, P_i)$. Ora per descrivere il moto di un punto possiamo definire la velocità media:

Definizione 1.5 (Velocità media). *La velocità media è la variazione di posizione di un punto in funzione del tempo. La velocità media è definita come:*

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{i \rightarrow f}}{\Delta t_{i \rightarrow f}}$$

Da notare come la velocità media non tiene conto del moto del punto in un intervallo di tempo, ma solo della variazione di posizione. Inoltre la velocità media ha un verso definito in quanto trattiamo lo spostamento (il quale ha un verso definito).

Per descrivere il moto di un punto in un istante t di tempo possiamo definire la velocità istantanea:

Definizione 1.6 (Velocità istantanea). *La velocità istantanea è la variazione di posizione di un punto in un istante di tempo. La velocità istantanea è definita come:*

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Dal punto di vista matematico la velocità istantanea è la derivata della posizione rispetto al tempo. Dunque i punti dove si passa da un movimento "in avanti" ad un movimento "all'indietro" sono i punti in cui la velocità istantanea è nulla ovvero i punti di massimo e minimo della funzione posizione, inoltre

il punto in cui la velocità istantanea è nulla è detto punto di inversione. Inoltre la velocità istantanea è una funzione continua in quanto la derivata di una funzione continua è anch'essa continua. È vero che in un determinato periodo di tempo io possa aumentare o diminuire la velocità, per questo motivo definiamo la funzione di accelerazione:

Definizione 1.7 (Accelerazione). *L'accelerazione è la variazione di velocità di un punto in funzione del tempo. L'accelerazione è definita come:*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{i \rightarrow f}}{\Delta t_{i \rightarrow f}}$$

Da notare come l'accelerazione non tiene conto del moto del punto in un intervallo di tempo, ma solo della variazione di velocità. Inoltre l'accelerazione ha un verso definito in quanto trattiamo la variazione di velocità (la quale ha un verso definito).

Relazione tra posizione, velocità e accelerazione Come già detto la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo e l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, è vero inoltre che la posizione è l'integrale della velocità rispetto al tempo e questa è l'integrale dell'accelerazione rispetto al tempo. Dunque possiamo scrivere:

$$x(t) \text{ posizione} \quad (1.1)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ velocità} \quad (1.2)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ accelerazione} \quad (1.3)$$

Al contrario possiamo scrivere:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(T) dT \quad (1.4)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(T) dT = x_0 + \int_{t_0}^t dT \left[v_0 + \int_{t_0}^T a(\tau) d\tau \right] \quad (1.5)$$

Ora le dimensioni fisiche (e non le unità di misura) di queste grandezze sono:

$$\begin{aligned} [x] &= [L] \\ [v] &= \left[\frac{L}{T} \right] \\ [a] &= \left[\frac{L}{T^2} \right] \end{aligned}$$

ed le rispettive unità di misura sono:

$$\begin{aligned} [x] &= [m] \\ [v] &= \left[\frac{m}{s} \right] \\ [a] &= \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{aligned}$$

1.2.1 Esercizio sulle grandezze fisiche

Andiamo ora ad analizzare uno strumento importante per la risoluzione di esercizi fisici, ovvero l'analisi dimensionale. L'analisi dimensionale è uno strumento che ci permette di capire se un'equazione è corretta o meno e ci può suggerire come risolvere un problema. Vediamo un esempio:

Problema 1.1. *Sia un punto che si muove lungo un asse x in funzione del tempo t , questo al momento $t_0 = 0$ si trova al punto $x(t_0) = x(0) = x_0 = 0$ e la sua velocità in questo punto è $v(t_0) = v(0) = v_0 > 0$. La sua accelerazione è descritta dalla funzione $a(x) = -Ax - B$ con $A, B > 0$. Determinare il momento in cui il punto si ferma (x_{stop})*

Analizziamo l'equazione dell'accelerazione:

$$a(x) = -Ax - B$$

notiamo come questa abbia come dimensioni fisiche:

$$\begin{aligned} a(x) &= -Ax - B \\ \left[\frac{L}{T^2} \right] &= [?] [L] - [?] \end{aligned}$$

da queste possiamo dedurre che A ha dimensioni fisiche $\left[\frac{1}{T^2} \right]$ e B ha dimensioni fisiche $\left[\frac{L}{T^2} \right]$. Ora l'equazione dello spazio in funzione del tempo è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Ax - B$$

dunque dobbiamo trovare una funzione $x(t)$ tale che soddisfi questa equazione differenziale, in quanto dobbiamo mantenere una funzione sullo spazio ed ottenere il parametro A all'esterno ipotizziamo che la funzione sia:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \sin(\sqrt{A}t + \varphi) = \\ &= \mathcal{A} \sin(\sqrt{A}t + \varphi) \end{aligned}$$

Prima di calcolare le derivate di questa funzione verifichiamo che effettivamente questa funzione soddisfi la dimensionalità:

$$\begin{aligned} [x] &= [L] \\ [\mathcal{A}] &= [L] \\ [\sqrt{A}] &= \left[\frac{1}{T} \right] \\ [t] &= [T] \\ [\varphi] &= [1] \\ [\sqrt{A}t + \varphi] &= [1] \checkmark \\ [\mathcal{A}] [\sin([1])] &= [L] \checkmark \end{aligned}$$

ora verifichiamo che questa funzione soddisfi l'equazione differenziale, calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathcal{A} \sqrt{A} \cos(\sqrt{A}t + \varphi) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A \underbrace{\mathcal{A} \sin(\sqrt{A}t + \varphi)}_{x(t)} \end{aligned}$$

verifichiamo come anche queste derivate soddisfino la dimensionalità:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dt} \right] &\stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T} \right] \\ \left[\frac{L}{T} \right] &= [\mathcal{A}] [\sqrt{A}] [\cos([1])] \\ \left[\frac{L}{T} \right] &= [L] \left[\frac{1}{T} \right] [1] \checkmark \\ \left[\frac{d^2x}{dt^2} \right] &\stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T^2} \right] \\ \left[\frac{L}{T^2} \right] &= [A] [\mathcal{A}] [\sin([1])] \\ \left[\frac{L}{T^2} \right] &= \left[\frac{1}{T^2} \right] [L] [1] \checkmark \end{aligned}$$

Dunque queste derivate soddisfano la dimensionalità, ma manca ancora il parametro $-B$ nell'equazione dell'accelerazione, dunque dobbiamo modificare la funzione $x(t)$ in modo che soddisfi anche questa condizione, partiamo dal fatto nella prima funzione possiamo aggiungere/sottrarre solo una quantità di dimensionalità $[L]$ e notiamo come in quanto $[B] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$ ed $[A] = \left[\frac{1}{T^2}\right]$ allora:

$$\left[\frac{B}{A}\right] = \left[\frac{\frac{L}{T^2}}{\frac{1}{T^2}}\right] = [L]$$

Dunque $\frac{B}{A}$ può essere aggiunto alla funzione $x(t)$ in quanto ha le stesse dimensioni fisiche di $x(t)$, dunque la funzione $x(t)$ diventa:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\sqrt{A}t + \varphi) - \frac{B}{A}$$

questo non comporta alcun cambiamento alle derivate in quanto queste sono in funzione di t ed A e B sono delle costanti. Possiamo però notare come la derivata seconda di questa può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -A \left(\mathcal{A} \sin(\sqrt{A}t + \varphi) \right) \\ &= -A \left(x(t) + \frac{B}{A} \right) \\ &= -Ax(t) - B \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato la funzione $x(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale, verifichiamo che nel punto x_0 questa soddisfi le condizioni iniziali per la posizione e la velocità:

$$x(0) = \mathcal{A} \sin(\varphi) - \frac{B}{A} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v(0) = \mathcal{A}\sqrt{A} \cos(\varphi) > 0 \quad (1.7)$$

Per $\mathcal{A} > 0$ allora per 1.6 $\sin(\varphi) = \frac{B}{A\mathcal{A}}$ e per 1.7 $\cos(\varphi) > 0$ queste condizioni in aggiunta a quelle di $A, B > 0$ ci permettono di dire che

$$\begin{cases} \mathcal{A} > 0 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ora dobbiamo trovare il momento in cui il punto si ferma (x_{stop}), ovvero il momento in cui la velocità è nulla ($v(t_{\text{stop}}) = v_{\text{stop}} = 0$).

$$\begin{aligned} v(t_{\text{stop}}) &= \sqrt{A}\mathcal{A} \cos(\sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi) = 0 \\ \sqrt{A}\mathcal{A} &\neq 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi) = 0 \\ \sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi &= \frac{\pi}{2} \\ t_{\text{stop}} &= \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

ed al momento t_{stop} la posizione del punto è:

$$\begin{aligned} x_{\text{stop}} &= \mathcal{A} \sin \left[\sqrt{A} \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \varphi \right] - \frac{B}{A} \\ &= \mathcal{A} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{B}{A} \\ &= \mathcal{A} - \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Vedi A.2

1.2.2 Problema de “Il lancio del sasso” (M.R.U.A e M.R.U)

Questo classico problema viene usato per definire il Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato ed il Moto Rettilineo Uniforme

Problema 1.2. Una coppia di amici vuole misurare l'altezza di un precipizio. Decidono di farlo lanciando un sasso verso il basso e misurando il tempo che impiega a raggiungere il fondo. Sappiamo che il tempo tra il rilascio del sasso grave¹ ed il rumore dell'impatto è di t_a secondi. Calcolare l'altezza del precipizio.

Avendo definito il sistema di riferimento con origine la cima del precipizio (dove sono gli amici) ed un verso "puntante" il fondo.

Il problema può essere diviso in due parti:

I Il moto del masso grave

II Il moto del suono

Mentre la prima parte è descritta da una accelerazione costante $a(t) = g$, una velocità iniziale nulla $v(0) = 0$, una posizione iniziale $x(0) = 0$ e una posizione finale $x(t_f) = x_f$. La seconda parte è descritta da una velocità costante $v(t) = v_s$ e una posizione iniziale $x(t) = x_f$ e una posizione finale $x(t) = 0$. Allora possiamo scrivere la posizione del masso grave come:

$$\begin{aligned} a &= g \\ v(t) &= v_0 + \int_0^t a(T) dT \\ &= v_0 + gt \\ z(t) &= z_0 + \int_0^t v(T) dT \\ &= z_0 + \int_0^t (v_0 + gT) dT \\ &= \underbrace{z_0}_0 + \underbrace{v_0}_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Da notare come tutto ciò può essere scritto solo se $t < t_f$ in quanto il masso non può andare oltre il fondo del precipizio.

Assumendo che il sasso venga lasciato perpendicolarmente al suolo allora possiamo scrivere la posizione del suono come:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_s \\ z(t)|_{t>t_f} &= z_f + \int_{t_f}^t v_s dT \\ &= z_f + v_s(t - t_f) \end{aligned}$$

A questo punto definendo come t_a il tempo tra il rilascio del sasso e l'impatto (amico), t_f come il tempo del fondo del precipizio e t_0 come il tempo di rilascio del sasso, e dunque definito che $\Delta t_a = \Delta t_{mg} + \Delta t_{ms}$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} Z_f = \frac{1}{2}gt_f^2 \\ \frac{1}{2}gt_f^2 - v_s(t_s - t_f) = 0 \end{cases} = \begin{cases} / \\ t_f^2 + 2\frac{v_s}{g}t_f - 2\frac{Z_f}{g} = 0 \end{cases}$$

Questa equazione di secondo grado ha come soluzione:

$$t_f = -\frac{v_s}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}}$$

la cui unica soluzione valida è:

$$t_f = -\frac{v_s}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}}$$

¹Soggetto alla gravità

Questo è il tempo che impiega il sasso a raggiungere il fondo del precipizio, ora possiamo calcolare l'altezza del precipizio:

$$\begin{aligned} Z_f &= \frac{1}{2}g \left(-\frac{v_s}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}g \left(\frac{v_s}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}g \left(\frac{v_s^2}{g^2} - 2\frac{v_s}{g} \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} + \left(\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g} \right) \right) \end{aligned}$$

1.2.3 Moto armonico

Il moto armonico è descritto dalla seguente funzione di posizione:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

dove:

- A è l'ampiezza del moto
- ω è la pulsazione del moto
- φ è la fase iniziale del moto

come conseguenza possiamo ricavare la posizione in funzione del tempo:

L	X
0	$A \sin(\varphi)$
$-\frac{\varphi}{\omega}$	$A \sin\left(\frac{\varphi}{\omega}\omega - \varphi\right) = 0$
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$	A
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}$	0
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}$	$-A$

Tabella 1.1: Posizione in funzione del tempo del moto armonico

come possiamo notare dall'equazione di posizione in funzione del tempo il moto armonico è periodico con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Al variare del parametro φ (fase) il moto armonico può essere traslato lungo l'asse t , se invece è il parametro A (ampiezza) a variare il moto armonico può essere “allargato” o “restringo” lungo l'asse x , ovvero i massimi saranno A e i minimi $-A$. Infine se è il parametro ω (pulsazione) a variare il moto armonico può essere “allungato” o “accorciato” lungo l'asse t , ovvero la distanza (temporale) tra due massimi consecutivi sarà $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Derivate Come accennato la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

e l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Analisi dimensionale Possiamo notare come la funzione di posizione del moto armonico soddisfi la dimensionalità:

$$\begin{aligned} [A] &= [x(t)] = [L] \\ [\omega t] &= [1] \Rightarrow [\omega] = \left[\frac{1}{T} \right] \\ [\omega] &= \left[\frac{1 \text{ radiante}}{\text{sec}} \right] \end{aligned}$$

Problema 1.3 (1.26). In un moto armonico semplice, con pulsazione $\omega = 1.55 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e ampiezza $A = 7 \text{ cm}$, si osserva che al tempo $t = 0$ il punto si trova in posizione $x(0) = 2.72 \text{ cm}$.

Calcolare:

- la fase iniziale φ
- il periodo d'oscillazione T
- la velocità iniziale $v(0)$

Per prima calcoliamo la fase iniziale φ andando a sfruttare la posizione iniziale ed la legge di posizione del moto armonico:

$$\begin{aligned}x(0) &= A \sin(\varphi) \\ \frac{x(0)}{A} &= \sin(\varphi) \\ \arcsin\left(\frac{x(0)}{A}\right) &= \varphi \\ \arcsin\left(\frac{2.72}{7}\right) &= \varphi \\ \varphi &\approx 0.39\end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare il periodo d'oscillazione T andando a sfruttare la definizione di periodo:

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{1.55} \\ T &\approx 4.07 \text{ s}\end{aligned}$$

Infine avendo calcolato la fase iniziale φ possiamo calcolare la velocità iniziale $v(0)$ andando ad utilizzare la derivata prima della posizione:

$$\begin{aligned}v(0) &= \frac{dx}{dt}(0) \\ &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ &= 7 \cdot 1.55 \cos(0.39) \\ v(0) &\approx 10.5 \text{ cm/s}\end{aligned}$$

1.3 Moti in due dimensioni

Andiamo ora ad analizzare i moti in due dimensioni, ovvero i moti di un punto nello spazio.

1.3.1 Vettori e definizioni

Per descrivere i moti in due dimensioni possiamo utilizzare i vettori, in particolare per descrivere come un punto si muove nello spazio in funzione del tempo usiamo il **vettore posizione**:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Definizione 1.8 (Vettore Posizione). Il vettore posizione (\vec{r}) è un vettore che descrive la posizione di un punto nello spazio in funzione del tempo, questo è un vettore di due dimensioni.

Definiamo ora il **modulo** di un vettore:

Definizione 1.9 (Modulo di un vettore). Il modulo di un vettore ($|\vec{v}|$) è la lunghezza del vettore, ovvero la distanza tra l'origine e la coda del vettore. Questa è definita come:

$$|\vec{v}|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

dove v_i è la componente i del vettore ed n è la dimensione del vettore.

Molto spesso sarà necessario avere un vettore di lunghezza unitaria, ovvero un vettore che ha modulo 1, ma che mantenga la direzione ed il verso del vettore originale, questo vettore è detto **versore**:

Definizione 1.10 (Versore). *Il versore (\hat{v}) è un vettore di lunghezza unitaria che mantiene la direzione e il verso del vettore originale. Il versore è definito come:*

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ora possiamo definire le operazioni tra vettori:

Definizione 1.11 (Somma di vettori). *La somma di due vettori ($\vec{v} + \vec{u}$) è un vettore che ha come componenti la somma delle componenti dei due vettori. La somma di due vettori è definita come:*

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{bmatrix}$$

Graficamente la somma di due vettori è la costruzione di un parallelogramma con i due vettori come lati, il vettore somma è la diagonale del parallelogramma. Questo lo possiamo fare grazie alla **regola de trasporto** ovvero la regola che ci permette di trasportare un vettore in un altro punto dello spazio mantenendo direzione e verso per poi sommarlo ad un altro vettore.

Definizione 1.12 (Prodotto scalare). *Il prodotto scalare tra un vettore e uno scalare ($\vec{v} \cdot \alpha$) è un vettore che ha come componenti il prodotto delle componenti del vettore per lo scalare. Il prodotto scalare è definito come:*

$$\vec{v} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} v_x \alpha \\ v_y \alpha \end{bmatrix}$$

Questa operazione è usata per il calcolo del versore.

Definizione 1.13 (Angolo tra due vettori). *L'angolo tra due vettori (\vec{v} e \vec{u}) è l'angolo tra i due vettori, ovvero l'angolo tra i due versori. L'angolo tra due vettori è definito come:*

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|} \right)$$

In questa definizione usiamo il prodotto scalare tra due vettori, questo prodotto è definito come:

Definizione 1.14 (Prodotto scalare). *Il prodotto scalare tra due vettori ($\vec{v} \cdot \vec{u}$) è uno scalare che ha come valore la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori. Il prodotto scalare è definito come:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n v_i u_i$$

dove v_i e u_i sono le componenti i dei due vettori ed n è la dimensione dei vettori.

Quando descriviamo il movimento del punto nello spazio possiamo descrivere il moto con il **raggio vettore**:

Definizione 1.15 (Raggio vettore). *Il raggio vettore (\vec{r}) è un vettore che descrive la posizione di un punto nello spazio in funzione del tempo. Il raggio vettore è definito come:*

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x\hat{v}_x + y\hat{v}_y$$

Di conseguenza possiamo definire la velocità e l'accelerazione come:

Definizione 1.16 (Velocità). *La velocità (\vec{v}) è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. La velocità è definita come:*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x \hat{v}_x + v_y \hat{v}_y$$

Definizione 1.17 (Accelerazione). *L'accelerazione (\vec{a}) è la derivata della velocità rispetto al tempo. L'accelerazione è definita come:*

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = a_x \hat{v}_x + a_y \hat{v}_y$$

Anche per i vettori la posizione in funzione del tempo può essere scritta come l'integrale della velocità rispetto al tempo:

$$\rho(t) = \vec{\rho}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(T) dT$$

e la velocità in funzione del tempo può essere scritta come l'integrale dell'accelerazione rispetto al tempo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(T) dT$$

Coordinate Polari Le coordinate polari sono un sistema di coordinate che permette di descrivere un punto nello spazio con due coordinate: il raggio (ρ) e l'angolo (θ). Queste coordinate sono collegate alle coordinate cartesiane tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

e le coordinate cartesiane sono collegate alle coordinate polari tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Per passare dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane usiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &\rightarrow (\rho, \varphi) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)) \\ \vec{r}(x, y) &= (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \leftarrow (\rho, \varphi) \end{aligned}$$

Il vettore velocità può anche questo essere espresso in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho \cos(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right) \cos(\varphi) + \rho \left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi)\right) \\ &= \rho \cos(\varphi) - \rho(\sin \varphi)\varphi \\ \frac{d}{dt}(\rho \sin(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right) \sin(\varphi) + \rho \left(\frac{d}{dt}\sin(\varphi)\right) \\ &= \rho \sin(\varphi) + \rho(\cos \varphi)\varphi \\ \vec{v} &= (\rho \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi), \rho \sin(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

A partire da questa possiamo calcolare l'accelerazione in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right) \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) + \rho \left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi)\right) - \rho \left(\frac{d}{dt}\varphi\right) \sin(\varphi) - \rho\varphi \cos(\varphi) \\ &= \rho \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) - \rho\varphi \cos(\varphi) - \rho\varphi \cos(\varphi) \\ &= \rho \cos(\varphi) - 2\rho\varphi \sin(\varphi) - 2\rho\varphi \cos(\varphi) \\ \frac{d}{dt}(\rho \sin(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right) \sin(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi) + \rho \left(\frac{d}{dt}\sin(\varphi)\right) + \rho \left(\frac{d}{dt}\varphi\right) \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) \\ &= \rho \sin(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) + \rho\varphi \cos(\varphi) \\ &= \rho \sin(\varphi) + 2\rho\varphi \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi) \\ \vec{a} &= (\rho \cos(\varphi) - 2\rho\varphi \sin(\varphi) - 2\rho\varphi \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi) + 2\rho\varphi \cos(\varphi) - \rho\varphi \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Tangente alla traiettoria

La tangente alla traiettoria è un vettore che ha come direzione la direzione della velocità in un punto della traiettoria, la quale è **sempre** tangente alla traiettoria in quel punto. Questo vettore è definito come:

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = y'(x)$$

La direzione viene espressa tramite il versore: $\hat{v}_t = \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{v}_t$

1.3.2 Accelerazione nel piano e ascissa curvilinea

Come per il moto in una dimensione l'accelerazione è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo, nel caso delle n dimensioni si verifica la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \cdot \hat{v}_t) \\ &= \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t + |\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v}_t}{dt}\end{aligned}$$

L'ultima parte di questa equazione, la quale corrisponde all'accelerazione, ci fa notare come nei moti su n dimensioni l'accelerazione non sia solo puramente correlata alla variazione della velocità: $\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t$ ma anche alla variazione della direzione della velocità: $|\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v}_t}{dt}$. Questa seconda parte dell'accelerazione è detta **accelerazione centripeta** che dipende dalla **velocità normale** e dalla **curvatura** della traiettoria. Definiamo quindi alcuni concetti che ci permettono di descrivere meglio il moto in due dimensioni:

Definizione 1.18 (Velocità radiale). La velocità radiale (\vec{v}_r) è la componente della velocità che è parallela al raggio vettore. La velocità radiale è definita come:

$$\vec{v}_r = \vec{v} \cdot \hat{r}$$

Vettore rosso

Definizione 1.19 (Versore radiale). Il versore radiale (\hat{r}) è il versore che ha come direzione il raggio vettore. Il versore radiale è definito come:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Vettore verde

Definizione 1.20 (Versore tangente alla traiettoria). Il versore tangente alla traiettoria (\hat{v}_t) è il versore che ha come direzione la tangente alla traiettoria. Il versore tangente alla traiettoria è definito come:

$$\hat{v}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} |\vec{v}|$$

Questo descrive la direzione della **velocità tangenziale** in un punto della traiettoria. Vettore blu

Definizione 1.21 (Versore tangente al versore radiale). Il versore tangente al versore radiale (\hat{v}_n) è il versore che ha come direzione la tangente al versore radiale. Il versore tangente al versore radiale è definito come:

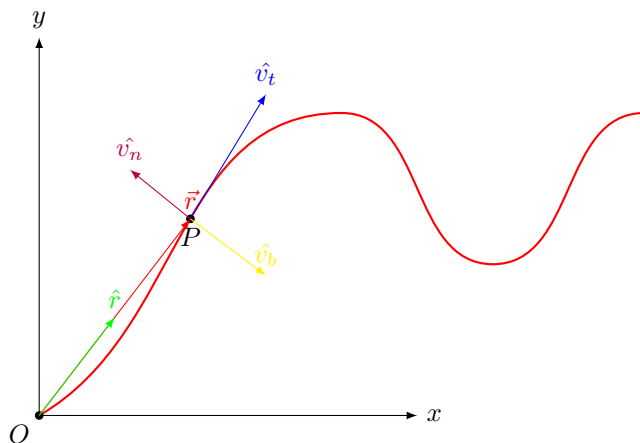
$$\hat{v}_n = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

Questo descrive la direzione della **velocità normale** in un punto della traiettoria. Vettore viola

Definizione 1.22 (Versore perpendicolare alla tangente della traiettoria). Il versore perpendicolare alla tangente della traiettoria (\hat{v}_b) è il versore che ha come direzione la perpendicolare alla tangente della traiettoria. Il versore perpendicolare alla tangente della traiettoria è definito come:

$$\hat{v}_b = \hat{v}_t \times \hat{r}$$

Questo descrive la direzione della **velocità perpendicolare** in un punto della traiettoria. Vettore giallo



Dunque la **accelerazione tangenziale** in un punto è descritta dalla componente $\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t = \vec{a}_t$ mentre la **accelerazione normale** in un punto è

descritta dalla componente $|\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v}_t}{dt} = \vec{a}_n$.

Ascissa curvilinea

L'ascissa curvilinea (s) è la derivata dello spazio sul tempo, ovvero approssimando per tratti infinitesimi la traiettoria come una circonferenza allora:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} |\vec{v}|$$

dove R è il **raggio di curvatura** il quale è definito come il raggio della circonferenza che meglio approssima la traiettoria in un punto.² Dunque in un punto da un punto della traiettoria possiamo ricavare l'accelerazione normale ed la velocità tangenziale.

Analizziamo la situazione nella quale l'accelerazione tangenziale è nulla, ovvero il modulo della velocità è costante ma la direzione cambia costantemente, in questo caso

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R} \hat{V}_n$$

Dunque v è costante, $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$ è costante e quindi R è costante, ovvero la traiettoria è una circonferenza.

1.3.3 Moto Circolare Uniforme (M.C.U.)

Nel moto circolare uniforme la velocità è costante, la direzione cambia costantemente e l'accelerazione è costante e diretta verso il centro della circonferenza. In questo moto viene definito il concetto di **velocità angolare**:

Definizione 1.23 (Velocità angolare). *La velocità angolare (ω) è la velocità con la quale un punto si muove lungo la circonferenza. La velocità angolare è definita come:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

ne consegue che $ds = R d\varphi$ e dunque $\omega = \frac{v}{R}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\omega = \frac{v}{R}$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v = \frac{v}{R} \Rightarrow v = R\omega$$

□

Il moto è descritto dalle seguenti equazioni che compongono il vettore posizione:

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi) = R \cos(\omega t) \\ y = R \sin(\varphi) = R \sin(\omega t) \end{cases}$$

e dunque la velocità in quanto derivata della posizione rispetto al tempo è:

$$\begin{cases} v_x = -R \sin(\omega t) \cdot \omega = -R\omega \sin(\omega t) \\ v_y = R \cos(\omega t) \cdot \omega = R\omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

e l'accelerazione in quanto derivata della velocità rispetto al tempo è:

$$\begin{cases} a_x = -R\omega \cos(\omega t) \cdot \omega = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y = -R\omega \sin(\omega t) \cdot \omega = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Notiamo come le somme dei quadrati delle velocità $v_x^2 + v_y^2$ siano uguali al prodotto dei quadrati del raggio e della velocità angolare $R^2\omega^2$.

²Viene usata la lettera maiuscola R in quanto questo non può essere stabilito da noi ma dipende direttamente dalla traiettoria e dunque dal problema, si dice infatti che il centro della circonferenza è IMPOSTO dalla traiettoria.

Moto circolare uniforme come somma di moti armonici

Il moto circolare uniforme può essere descritto come la somma di due moti armonici ortogonali della stessa ampiezza e della stessa frequenza, infatti se:

$$\begin{cases} \varphi = \omega t \\ \rho = R \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = R \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

3

1.3.4 Moto Parabolico

Anche il moto parabolico può essere descritto come la somma di due moti, in questo caso però viene sommato il moto rettilineo uniforme parallelo all'asse delle x con il moto uniformemente accelerato lungo l'asse delle y . Questo moto è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\vec{v} = \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

entrambe dipendono dalla velocità iniziale la quale può essere divisa nelle sue componenti come:

$$\begin{cases} v_{0x} = |v_0| \cos(\alpha) \\ v_{0y} = |v_0| \sin(\alpha) \end{cases}$$

dove α è l'angolo che la velocità iniziale forma con l'asse delle x , ci redimo conto che ci basta conoscere la velocità iniziale e l'angolo per descrivere il moto parabolico.⁴

Scrivendo le equazioni del moto parabolico con la y in funzione del tempo possiamo ottenere la seguente equazione:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 \\ &= \underbrace{-\frac{g}{2v_{0x}^2}}_a x^2 + \underbrace{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}}_b x + \underbrace{0}_c \end{aligned}$$

Questa è proprio l'equazione di una parabola, ora a sarà sempre minore di 0 a meno di un cambio del sistema di riferimento e dunque la parabola sarà sempre concava verso il basso [1].

Inoltre il $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} y \rightarrow \text{Indef}$, ma il $\lim_{g \rightarrow 0} y \rightarrow \text{M.R.U.}$ [2], infine se la derivata prima della y fosse = 0 e dunque $2ax + b = 0$ allora:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}}{-\frac{g}{2v_{0x}^2}} \\ &= -\frac{v_{0y}v_{0x}}{g} \\ &= \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \\ &= \frac{v^2}{2g} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Potrebbe essere utile la “gittata” [4] ovvero la distanza percorsa dal punto, questa la possiamo ricavare imponendo $y = 0$: ...

³Dimostrazione omessa

⁴Anche se nella realtà dovremmo considerare la resistenza dell'aria e la rotazione terrestre per la componente v_{0x}

Capitolo 2

Dinamica

Nel presente capitolo si analizzerà il moto di un corpo a partire dai tre principi fondamentali della dinamica fino ad arrivare ad ...

2.1 I tre principi fondamentali

Andiamo ora ad enunciare i tre principi fondamentali della dinamica.

Legge 2.1 (Principio d'inerzia). *In un sistema inerziale, mantiene il suo stato di moto rettilineo uniforme o quiete finché una forza esterna non agisce su questo*

Da notare come questa legge vale solo ed esclusivamente nel caso nel quale il sistema di riferimento sia inerziale. In caso contrario questo principio non si applica.

Legge 2.2 (Principio di Newton). *L'accelerazione che un corpo riceve è legata a questo mediante una costante numerica (m)*

Quindi $\vec{a} = m\vec{F}$, spesso la costante m viene apposta al denominatore della formula, ottenendo $\vec{F} = m\vec{a}$. Questa è la forma più comune della legge di Newton, dove la forza (F) è uguale alla massa (m)¹, misurata in kg , per l'accelerazione (a) misurata in m/s^2 .

Legge 2.3 (Principio di azione e reazione). *La forza che un corpo A esercita sul corpo B è uguale alla forza che il corpo B esercita sul corpo A , ma di verso opposto.*

Questo principio è molto importante in quanto ci permette di capire come mai un corpo si muova. Infatti, se un corpo A esercita una forza su un corpo B , il corpo B eserciterà una forza uguale e di verso opposto su A , l'accelerazione d'altronde sarà diversa se le masse sono diverse.

Quantità di moto La quantità di moto è una grandezza vettoriale che descrive “quanto” movimento c'è in un sistema e dipende dalla massa e dalla velocità del corpo. È definito come segue:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Ad esempio se un corpo di massa $m = 100g$ viaggia a $v = 360km/h$ la sua quantità di moto sarà $|\vec{p}| = 0.1[kg] \cdot 100[m/s] = 10[kg \cdot m/s]$

Impulso L'impulso è una grandezza vettoriale che descrive “quanto” una forza agisce su un corpo in uno specifico istante/intervallo di tempo. È definito come segue:

$$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{p} = m_f\vec{v}_f - m_i\vec{v}_i$$

In regime di conservazione della massa, allora $m_f = m_i$ e quindi $\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = m\Delta\vec{v}$ dove $\Delta\vec{v}$ è la variazione di velocità del corpo.

Inoltre visto il secondo principio (2.2) possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

¹Sempre positiva

Questo è anche scrivibile usando la notazione:

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

in questo caso $\vec{J} = F_{\text{imp}} \Delta t$ dove F_{imp} è la forza impulsiva, in quanto stiamo trattando di un intervallo di tempo finito e non un infinitesimo.

Forza risultante La forza risultante è definita come la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su un corpo.

$$F_{1 \rightarrow c} + F_{2 \rightarrow c} + \dots + F_{N \rightarrow c} = \sum_{i=1}^N F_{i \rightarrow c} = \vec{R}_c$$

Dove \vec{R}_c è la forza risultante che agisce sul corpo c , mentre $F_{i \rightarrow c}$ è la forza che il corpo i esercita sul corpo c .

Se un corpo fosse in quiete ovvero $\vec{S}_i = \vec{S}_f$ dunque $\vec{v}_i = \vec{v}_f = 0$ allora $a_{\text{tot}} = \vec{0}$ e quindi $\vec{R}_c = \vec{0}$.

2.2 Specificazione delle forze

Reazione vincolare La reazione vincolare (\vec{N}) è la forza che un corpo esercita su un altro corpo per impedirne il moto. Questa forza è sempre perpendicolare alla superficie di contatto tra i due corpi e diretta verso l'interno del corpo. Questa forza è sempre uguale e di verso opposto alla componente normale della forza peso. Questa forza è detta vincolare in quanto è una forza che impedisce il moto del corpo.

Forza Peso La forza peso è la forza che la Terra esercita su un corpo, questa dipende direttamente dalla massa del corpo e dalla costante gravitazionale terrestre $g = 9.81[m/s^2]$. La forza peso è definita come segue:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Dunque: $\vec{F} = m_I \vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ possiamo semplificare la massa inerziale con la massa gravitazionale in quanto la forza che la terra esercita sulla massa $F_{M \rightarrow m} = -\frac{q_{12}q_{21}}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} G$ dove G è la costante gravitazionale universale. La formula appena scritta è la formula generale con q_{12} e q_{21} che sono le cariche dei due corpi (quanto un corpo è propenso a partecipare ad una interazione) e r_{12} è la distanza tra i due corpi. Nel caso della forza peso $q_{12}q_{21} = m \cdot M$ dove M è la massa della terra e m è la massa del corpo. Dunque la formula diventa:

$$F_{M \rightarrow m} = -\frac{m \cdot M}{r^2} \hat{r} G$$

ora la distanza tra i due corpi è la somma dei raggi dei due corpi, quindi $r = R_{\text{terra}} + h$ dove R_{terra} è il raggio della terra e h è l'altezza del corpo rispetto al suolo, dato che queste due grandezze sono molto diverse ed h è molto piccolo rispetto a R_{terra} possiamo approssimare $r \approx R_T$ e quindi la formula diventa:

$$F_{M \rightarrow m} = -\frac{m \cdot M}{R^2} \hat{r} G$$

e quindi

$$F_{M \rightarrow m} = -m \left(\frac{GM}{R^2} \right) \hat{r} = -m\vec{g}$$

In quanto questa è una forza allora in un sistema inerziale vale che $\vec{F} = m\vec{a}$ e quindi $m_I \vec{a} = -m\vec{g} \Rightarrow m_I = m$

Forza Elastica La forza elastica è la forza che un corpo elastico esercita su un corpo che lo comprime o lo allunga. Questa forza è definita come segue:

$$\vec{F}_{\text{el}} = -k\vec{x} = -k(\vec{x}_f - \vec{x}_e q)$$

Dove k è la costante elastica del corpo e \vec{x} è la deformazione del corpo rispetto alla posizione di equilibrio (\vec{x}_{eq}). Questa forza è sempre diretta verso la posizione di equilibrio del corpo, dunque se il corpo è compresso la forza sarà diretta verso l'esterno, se il corpo è allungato la forza sarà diretta verso l'interno, in ogni caso il segno meno viene apposto in quanto è in opposizione alla deformazione.

Forza di Attrito La forza di attrito è la forza che si oppone al moto di un corpo su una superficie. Questa forza è definita come segue:

$$\vec{F}_{\text{att}} = -\mu_s |\vec{N}| \cdot \hat{d}$$

Dove μ_s è il coefficiente di attrito statico, \vec{N} è la reazione vincolare (della quale ne consideriamo il modulo) e \hat{d} è il versore della direzione del moto (dove il segno meno indica che la forza è in opposizione al moto).

2.2.1 Reazione Vincolare

Un corpo soggetto alla azione di una forza, o della risultante non nulla di più forze, rimane fermo allora l'ambiente circostante provoca su quel corpo una forza uguale e di verso opposto alla risultante delle forze che agiscono su di esso, questo in quanto vale la terza legge di Newton. Questa forza è detta **reazione vincolare** nel caso di un corpo appoggiato su una superficie piana, la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie di appoggio e diretta verso l'interno del corpo, opponendosi alla forza peso. La reazione vincolare si indica con \vec{N} e se il corpo è in quiete allora $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$.

Sensazione di peso

La reazione vincolare esercitata da un corpo, verso un altro corpo, (come un pavimento su una persona) è uguale e di verso opposto alla forza peso. È questa forza che dà la “sensazione di peso” e non la forza peso (P) in se. Quindi nel caso di un corpo grave appoggiato su una piattaforma orizzontale la quale si muove con accelerazione a allora finché il corpo è appoggiato sulla piattaforma la reazione vincolare sarà $N + P = m \cdot a$, ovvero $N + m \cdot g = m \cdot a$ e quindi $N = m \cdot (a - g)$.

Questo comporta quattro situazioni differenti:

1. a è discorde con g e (piattaforma accelera verso l'alto) N è maggiore di P e quindi la persona avrà la sensazione di peso maggiore.
2. a è concorde con g e (piattaforma accelera verso il basso) N è minore di P e quindi la persona avrà la sensazione di peso minore.
3. a è concorde e coincide esattamente con g allora $N = P$ e quindi la persona avrà la sensazione di assenza di peso.
4. a è concorde con g allora l'accelerazione sarà così elevata che il corpo “non riesce a stare dietro” e quindi ci sarà un distacco tra il corpo e la piattaforma.

2.2.2 Forza di attrito radente

Sperimentalmente si può osservare come se si provi a spingere una massa m su un piano orizzontale, questa non si muoverà per la forza F che si sta esercitando su di essa, ma si muoverà solo nel momento nel quale il modulo della forza F supera un certo valore ($\mu_s N$), il coefficiente μ_s è il coefficiente di attrito statico e questo è dipendente dalle due superfici che si stanno sfregando. Dunque:

$$\begin{cases} F \leq \mu_s N & \text{condizione di quiete} \\ F > \mu_s N & \text{condizione di moto} \end{cases}$$

Nel caso in cui il corpo non si muova, la forza di attrito sarà uguale alla forza che si sta esercitando sul corpo, in quanto il corpo non si muove e quindi la forza risultante è nulla. Dunque $F = \mu_s N$ e quindi $N = \frac{F}{\mu_s}$, inoltre la forza di attrito è sempre diretta in opposizione al moto e quindi:

$$R + F + P = 0$$

Chiamiamo A_{max} il valore massimo di F che possiamo esercitare sul corpo affinché questo non si muova, allora $A_{\text{max}} = \mu_s N$, dove N è la reazione vincolare normale al piano. Possiamo quindi disegnare un grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata:

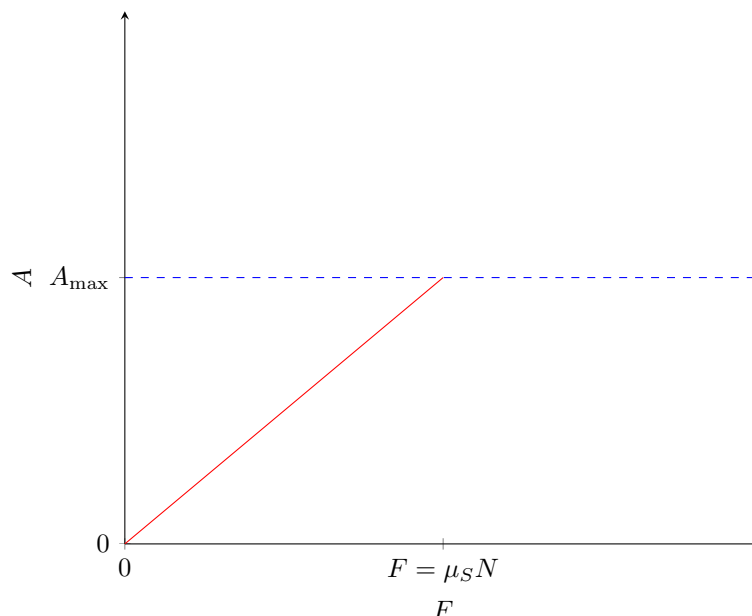


Figura 2.1: Grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata

In figura 2.1 possiamo vedere come la forza di attrito sia uguale alla forza applicata fino a quando questa non supera il valore massimo di attrito statico, in quel momento il corpo inizia a muoversi, quando questo accade continua ad esserci attrito ma il corpo si muove e quindi la forza di attrito diventa dinamica.

La forza che si oppone al movimento di un corpo mentre questo si muove su una superficie è detta forza di attrito radente dinamico, questa forza è definita come segue:

$$F_{ad} = -\mu_d N = ma$$

Dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico, N è la reazione vincolare. Dalla definizione notiamo come la forza di attrito dinamico sia sempre diretta in opposizione al moto ed non è affetta dalla velocità del corpo, possiamo quindi aggiungere al grafico della Figura 2.1 la forza di attrito dinamico:

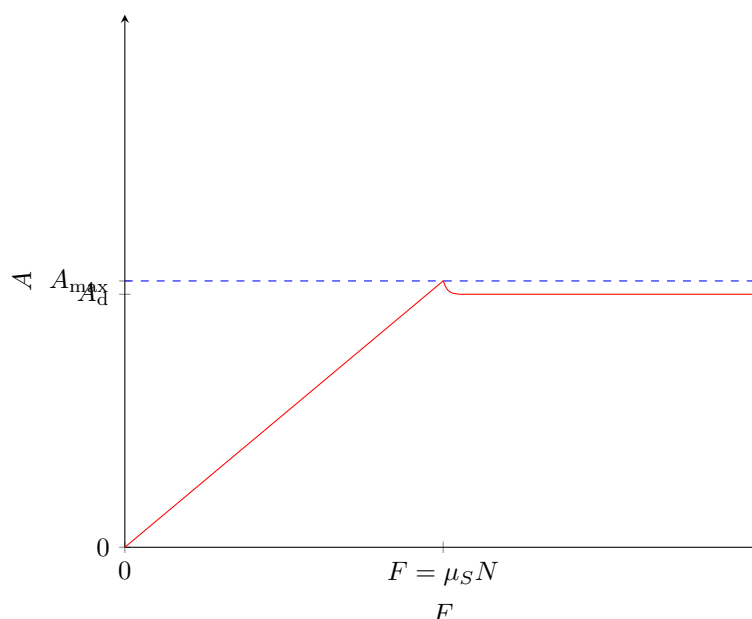


Figura 2.2: Grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata

Notiamo come il valore di A_d sia minore di A_{max} in è vero per ogni superficie che il coefficiente di attrito dinamico sia minore di quello statico ($\mu_d < \mu_s$), altrimenti il corpo non si muoverebbe.

2.2.3 Piano Inclinato

Se prendiamo in considerazione un corpo di massa m assimilabile ad un punto materiale e soggetto alle forze peso, reazione vincolare e forza di attrito radente, se questo è appoggiato su una superficie inclinata di angolo θ rispetto all'orizzontale, allora se è la sola forza peso che agisce sul corpo, allora possiamo scrivere la seguente equazione:

$$P + R = m \cdot a$$

Dove P è la forza peso, R è la reazione vincolare e a è l'accelerazione del corpo, la reazione vincolare agisce solo nella direzione normale alla superficie, quindi possiamo scomporre questo come:

$$\begin{cases} -mg \cos \theta + N = 0 & \text{direzione normale} \\ -mg \sin \theta = m \cdot a & \text{direzione parallela} \end{cases}$$

Da queste due equazioni possiamo notare come tutta l'eventuale accelerazione del corpo sia diretta lungo la superficie inclinata.²

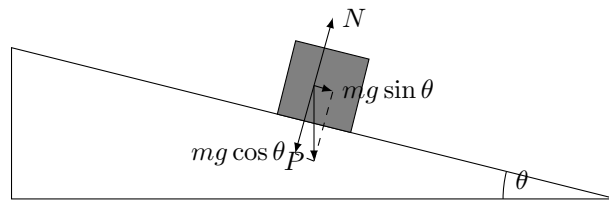


Figura 2.3: Forze che agiscono su un corpo su un piano inclinato

Ora, prendendo in considerazione anche la forza di attrito radente, distinguiamo due principali casi:

- Il corpo è in stasi rispetto al piano inclinato
- Il corpo sta scendendo (frenato) rispetto al piano inclinato

Nel primo caso ciò significa che la forza di attrito statico è uguale alla componente parallela della forza peso, quindi $F_{\text{att}} = \mu_s N = mg \sin \theta$ ed inoltre questa non eccede il valore massimo di attrito statico, quindi $\mu_s N \leq \mu_s mg \cos \theta$, dunque $mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$ e quindi $mg(\sin \theta - \mu_s \cos \theta) = 0$ e quindi $\mu_s \geq \tan \theta$.

Nel secondo caso, il corpo sta scendendo rispetto al piano inclinato, quindi viene esercitata una forza di attrito dinamico, questa forza è minore della componente parallela della forza peso, il corpo scende con accelerazione a e quindi $mg \sin \theta - F_{\text{att}} = m \cdot a$ e quindi $mg \sin \theta - \mu_d N = m \cdot a$ e quindi $mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = m \cdot a$ e quindi $a = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$.

2.2.4 Forza Elastica - senza attrito

Se prendiamo in considerazione un corpo di massa m ancorato ad una molla la quale a sua volta è ancorata ad un muro, allora quando il corpo viene allontanato dalla posizione di equilibrio della molla, questa eserciterà una forza elastica sul corpo, questa forza è definita come segue:

$$\vec{F} = -k\vec{x} = m\vec{a} \Rightarrow -k\vec{x} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Dove k è la costante elastica della molla, \vec{x} è la deformazione della molla rispetto alla posizione di equilibrio e \vec{a} è l'accelerazione del corpo secondo la seconda legge di Newton. La forza elastica è sempre diretta verso la posizione di equilibrio della molla, quindi se il corpo è compresso la forza sarà diretta verso l'esterno, se il corpo è allungato la forza sarà diretta verso l'interno, in ogni caso il segno meno viene apposto in quanto è in opposizione alla deformazione.

²Ancora non abbiamo preso in considerazione la forza di attrito radente

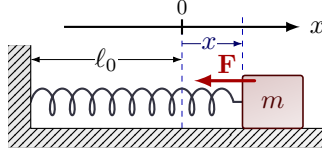


Figura 2.4: Diagramma di un corpo su una molla senza attrito

Dall'ultima equazione possiamo notare come questa possa essere scritta come:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -k \vec{x} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{x} = 0$$

Dal quale possiamo definire ω ovvero "la pulsazione" come:

$$\omega^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

Inoltre in quando $\vec{x} = x\hat{x}$ ed il verso (\hat{x}) è costante, possiamo scrivere:

$$\vec{x} \longrightarrow x \quad (2.2)$$

Ora viste le due equazioni (2.1) e (2.2) possiamo scrivere:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \implies \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale del moto armonico semplice, la quale ha come soluzione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Abbiamo già incontrato i parametri A e ϕ quando abbiamo parlato di moto armonico semplice, questi hanno lo stesso ruolo in questo caso, ovvero A è l'ampiezza del moto e ϕ è la fase iniziale del moto. Questo moto ci suggerisce che, in assenza di attrito, la molla non termina mai il suo moto, ma continua a vibrare indefinitamente con una frequenza angolare ω e un'ampiezza A , che è la distanza massima dalla posizione di equilibrio.

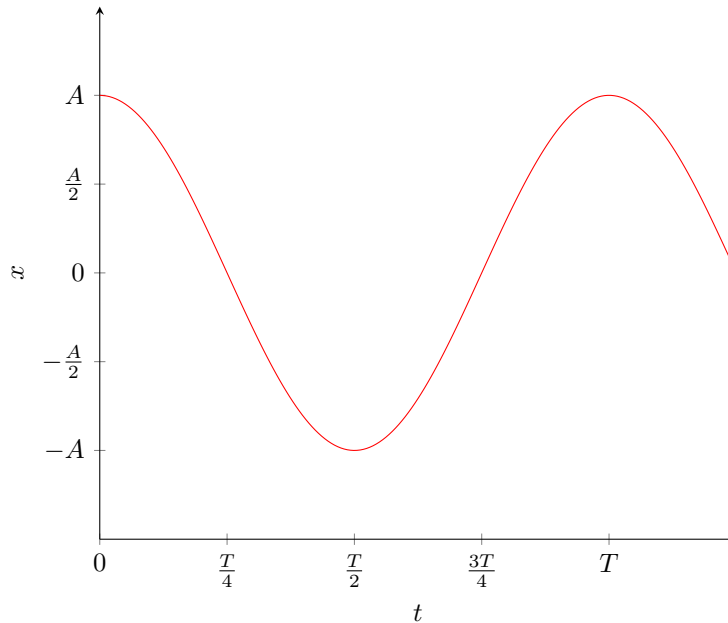


Figura 2.5: Grafico del moto armonico semplice

In figura 2.5 possiamo vedere il grafico del moto armonico semplice, dove A è l'ampiezza del moto e T è il periodo del moto. Vista l'equazione del moto il parametro A è calcolato come:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Dove x_0 è la posizione iniziale del corpo e v_0 è la velocità iniziale del corpo, se questo è in quiete allora $v_0 = 0$ e quindi $A = x_0$.

2.2.5 Moto del pendolo

Per come viene affrontato il moto del pendolo all'interno di questo corso si considerino le seguenti ipotesi:

- Non sono presenti attriti nel filo
- Il filo è inestensibile
- Il filo non ha massa
- La massa del pendolo è concentrata in un punto materiale
- Il pendolo non è soggetto alla resistenza dell'aria
- Il pendolo è situato nel vuoto
- Il pendolo è soggetto alla forza di gravità costante (g) e uniforme

Una volta definite queste ipotesi possiamo passare a definire il moto del pendolo. Il pendolo è un sistema composto da una massa m appesa ad un filo di lunghezza L , il quale è fissato ad un punto di sospensione. Se il pendolo è in quiete, la forza peso P agisce verticalmente verso il basso e la reazione vincolare N agisce lungo il filo.



Figura 2.6: Schema delle forze che agiscono su un pendolo sulla verticale

Se invece il pendolo è in movimento, la forza peso P agisce comunque verso il basso, la tensione del filo T_f agisce lungo questo ed il pendolo è in movimento dunque per la seconda legge di Newton possiamo scrivere:

$$P + T_f = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g + T_f = m \cdot a$$

Possiamo scomporre le forze in due componenti, una normale alla direzione del pendolo e una parallela alla direzione del pendolo, in questo modo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} N : \quad -T_f + P_{\perp} &= 0 \\ \tau : \quad -P_{\parallel} &= m \cdot a_{\tau} \end{aligned} = \begin{cases} -T_f + m \cdot g \cdot \cos \theta &= 0 \\ m \cdot g \cdot \sin \theta &= m \cdot a_{\tau} \end{cases} = \begin{cases} T_f &= m \cdot g \cdot \cos \theta \\ a_{\tau} &= g \cdot \sin \theta \end{cases}$$

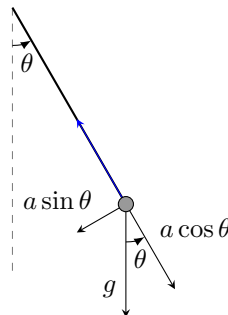


Figura 2.7: Schema delle forze che agiscono su un pendolo non sulla verticale

Dunque la tensione del filo al momento del rilascio del pendolo è uguale alla componente normale della forza peso, mentre l'accelerazione tangenziale è uguale alla componente tangenziale della forza peso. Queste però valgono solo se il pendolo è appena stato rilasciato, infatti nel momento in cui il pendolo inizia a muoversi esiste una “forza di richiamo” che “tenta” di riportare il pendolo alla posizione di equilibrio, questa forza, a differenza della molla, non ha una direzione costante, ma cambia in funzione dell'angolo θ e della lunghezza del pendolo L . Dunque nei momenti successivi al rilascio del pendolo, possiamo scomporre le forze come:

$$\begin{cases} -T + P_{\perp} = m \cdot a_n \\ P_{\parallel} = m \cdot a_{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + m \cdot g \cdot \cos \theta = m \cdot a_n \\ m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{T}{m} + g \cdot \cos \theta = a_n \\ g \cdot \sin \theta = a_{\tau} \end{cases}$$

Per esprimere la forza di richiamo in funzione dell'angolo θ e della lunghezza del pendolo L , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{R d^2 \theta}{dt^2} = \frac{l d^2 v}{dt^2} \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{l} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{l^{\frac{1}{2}}}{l} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Invertendo opportunamente i versi del sistema di riferimento possiamo scrivere:

$$\begin{cases} T_f - P_{\perp} = m a_n = m \frac{v^2}{l} - P_{\parallel} = m a_{\tau} = m \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

Ora come visto in precedenza la tensione del filo dipende dall'angolo θ , $\tau(\theta) = mg \cos \theta + m \frac{v^2(\theta)}{l}$ dunque possiamo scrivere:

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Il che significa che la massa del pendolo non influisce sul moto del pendolo, ma solo la lunghezza del pendolo e l'accelerazione di gravità. Questa è l'equazione differenziale del moto armonico semplice, la quale ha come soluzione:

$$\ddot{v} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ora risolvere per ogni valore di θ è difficile!

Piccole oscillazioni

Prendiamo ora in considerazione un angolo θ molto piccolo ($\theta \ll 1$), in questa situazione vale che:

$$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$$

per lo sviluppo in serie di Taylor vale che:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5)$$

Si hanno correzioni nell'ordine di θ^3 , ma per θ molto piccolo ($\theta = 0.17 \Rightarrow \theta^3 = 0.005$) possiamo considerare $\sin \theta \approx \theta$, quindi possiamo scrivere:

$$\ddot{v} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{v} + \omega \theta = 0$$

Dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ è la pulsazione del pendolo. Questa ci dice che per θ molto piccolo il periodo non dipende dall'angolo θ , ma solo dalla lunghezza del pendolo e dall'accelerazione di gravità, dunque siamo in situazione di **ISOCRONISMO**.

Capitolo 3

Lavoro, Energia e Momenti

L'obiettivo di questo capitolo è quello di definire il lavoro e l'energia, e di stabilire la loro relazione, andando anche ad analizzare il concetto di momento ed analizzando alcuni esempi pratici e problemi di fisica.

3.1 Lavoro

Il lavoro W è definito come l'integrale in un certo percorso γ nel quale la forza \vec{F} agisce su un corpo di massa m :

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3.1)$$

dove $d\vec{l}$ è un elemento infinitesimo del percorso γ e \cdot indica il prodotto scalare. Il lavoro è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della direzione della forza rispetto al movimento del corpo.

Prendiamo in considerazione una forza \vec{F} applicata nella direzione d di un corpo di massa m appoggiato su un piano orizzontale, e che si muove di una distanza d lungo la direzione della forza. Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} è dato da:

$$\begin{aligned} W_{Fd} &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{\gamma} F \hat{x} \cdot (dx \hat{x}) \\ &= \int_0^d F dx \\ &= Fd \quad [N \cdot m] = [J] \end{aligned}$$

dove F è la forza applicata, d è la distanza percorsa dal corpo e \hat{x} è il versore della direzione della forza. Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} è quindi dato dal prodotto della forza per la distanza percorsa dal corpo nella direzione della forza.

Ora se la forza applicata non fosse parallela alla direzione del movimento, ma formasse un angolo θ con la direzione del movimento, il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} sarebbe dato da:

$$\begin{aligned} W_{Fd} &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{\gamma} F \hat{l} \cdot (d\vec{x}) \\ &= Fd(\hat{l} \cdot \hat{x}) \\ &= Fd \cos(\theta) \end{aligned}$$

Da questa ultima possiamo distinguere tre casi:

- $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta > 0$ Allora $W_{Fd} > 0$ e la forza \vec{F} compie **Lavoro Motore** sul corpo.
- $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = 0$ Allora $W_{Fd} = 0$ e la forza \vec{F} non compie lavoro sul corpo.
- $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \cos \theta < 0$ Allora $W_{Fd} < 0$ e la forza \vec{F} compie **Lavoro Frenante** sul corpo.

Problema 1 - Massa che scivola su un piano inclinato

Consideriamo una massa m che scivola su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale. In questo caso la forza peso \vec{P} esegue un lavoro positivo sulla massa, non consideriamo al momento l'attrito, quindi la forza peso che spinge la massa lungo il piano inclinato è data da:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

ma in quanto l'asse z sul quale è applicata la forza peso e misurata l'altezza h forma un angolo $\theta = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ con l'asse x , il l'infinitesimo lavoro compiuto dalla forza peso \vec{P} è dato da:

$$\begin{aligned} dw &= F_P \cdot \hat{l} \\ &= -mg \hat{z} \cdot (d\mathbf{i} \cdot \hat{i}) \\ &= -mg d\mathbf{i} \cdot \hat{z} \cdot \hat{i} \\ &= -mg d\mathbf{i} \cos(\theta) \\ &= +mg d\mathbf{i} \sin(\alpha) \\ &= P_{\parallel} d\mathbf{i} \end{aligned}$$

dove P_{\parallel} è la componente della forza peso \vec{P} lungo il piano inclinato. Dunque il lavoro compiuto dalla forza peso \vec{P} è dato da:

$$\begin{aligned} W_P &= \int_{\gamma} P_{\parallel} d\mathbf{i} \\ &= mg \sin(\alpha) L \\ &= mgh \end{aligned}$$

dove L è la lunghezza del piano inclinato e h è l'altezza della massa rispetto al piano orizzontale, abbiamo sostituito L con h in quanto la lunghezza del piano inclinato moltiplicata per il seno dell'angolo α , che è l'opposto del triangolo rettangolo, è uguale all'altezza h della massa rispetto al piano orizzontale. Quindi il lavoro compiuto dalla forza peso \vec{P} sulla massa m è dato dal prodotto della forza peso per l'altezza della massa rispetto al piano orizzontale, dunque il lavoro compiuto dalla forza peso \vec{P} sulla massa m è indipendente dall'angolo α del piano inclinato, ma dipende esclusivamente dall'altezza h della massa rispetto al piano orizzontale.

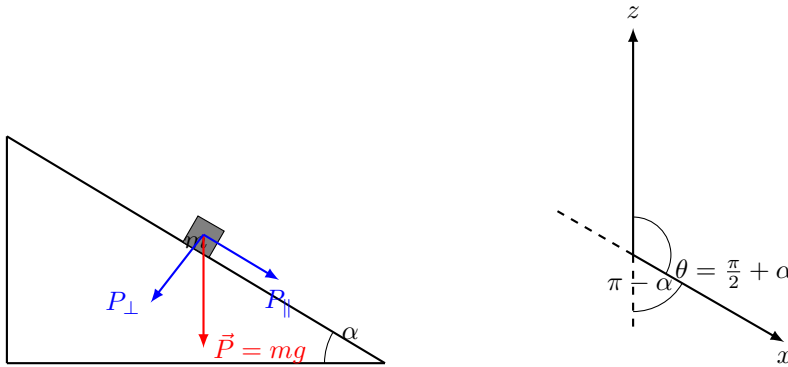


Figura 3.1: Massa su piano inclinato e rappresentazione del sistema di riferimento.

Problema 2 - Massa su piano inclinato con attrito

Consideriamo una massa m che scivola su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale, e che è soggetta ad un attrito dinamico di coefficiente μ_d .

In questo caso la forza peso \vec{P} esegue un lavoro positivo sulla massa, mentre la forza di attrito \vec{F}_{attr} esegue un lavoro negativo sulla massa. La forza di attrito è data da:

$$\vec{A}_d = -\mu_d |\vec{N}| \hat{v}$$

dove \vec{N} è la forza normale, che in questo caso è data dalla componente della forza peso \vec{P} perpendicolare al piano inclinato, e \hat{v} è il versore della direzione del movimento della massa. L'infinitesimo lavoro

compiuto dalla forza di attrito \vec{A}_d è dato da:

$$\begin{aligned} dw &= F_{A_d} \cdot d\hat{l} \\ &= -\mu_d \left| \vec{N} \right| \hat{v} \cdot (d\vec{l} \cdot \hat{v}) \\ &= -\mu_d mg \cos(\alpha) dl \end{aligned}$$

dove dl è l'infinitesimo spostamento della massa lungo il piano inclinato. Dunque il lavoro compiuto dalla forza di attrito W_{A_d} è dato da:

$$\begin{aligned} W_{A_d} &= \int_{\gamma} A_d dw \\ &= -\mu_d mg \cos(\alpha) \int_0^L dl \\ &= -\mu_d mg \cos(\alpha) L \end{aligned}$$

dove L è la lunghezza del piano inclinato. Quindi il lavoro compiuto dalla forza di attrito \vec{A}_d sulla massa m è dato dal prodotto della forza di attrito per la lunghezza del piano inclinato, dunque il lavoro compiuto dalla forza di attrito \vec{A}_d sulla massa m è dipendente, al contrario della forza peso \vec{P} , dall'angolo α del piano inclinato.

3.2 Teorema delle forze vive

Il teorema delle forze vive, nei sistemi inerziali, afferma che la somma dei lavori compiuti dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso. In formula:

$$\sum W_i = \Delta K \quad (3.2)$$

Questo è dimostrabile in quanto

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} && \text{Seconda Legge di Newton} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} && \text{Definizione di accelerazione} \\ \vec{F} d\vec{s} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} \\ &= m(d\vec{v}) \frac{d\vec{s}}{dt} \\ &= m(d\vec{v})\vec{v} \end{aligned}$$

dunque da questa otteniamo che la somma delle forze agenti su un corpo moltiplicata per l'infinitesimo spostamento del corpo è uguale alla variazione della velocità del corpo moltiplicata per la velocità del corpo stesso. Possiamo però esprimere $\vec{v}d\vec{v}$ come:

$$\begin{aligned} \vec{v}d\vec{v} &= v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \\ &= d \left[\frac{v_x^2}{2} \right] + d \left[\frac{v_y^2}{2} \right] + d \left[\frac{v_z^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} d [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] \\ &= \frac{1}{2} d [v^2] \end{aligned}$$

andando quindi a unire le due equazioni otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{F} d\vec{s} &= \frac{1}{2} m d [v^2] \\ &\downarrow \text{Integrando} \\ \int_i^f dw &= \int_i^f \frac{1}{2} m d [v^2] \end{aligned}$$

e dunque per descrivere il lavoro esercitato su un corpo da una forza \vec{F} dal punto i al punto f otteniamo:

$$W_{F,i \rightarrow f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_K \quad (3.3)$$

$$E_K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.4)$$

dove E_K è l'energia cinetica del corpo, che è definita come la metà del prodotto della massa del corpo per il quadrato della sua velocità. L'energia cinetica è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della direzione della velocità del corpo, questa è espressa in Joule $[J]$ ed ha dunque dimensionalità del lavoro $[J] = [N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s^2]$.

3.3 Forze Conservative

Le forze conservative sono forze che compiono lavoro indipendentemente dal percorso seguito dal corpo, ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso, ad esempio la forza peso \vec{P} è una forza conservativa, mentre la forza di attrito \vec{A}_d non lo è. Visto che dipendono solo dalla posizione iniziale e finale del corpo, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\vec{F}|_{W_{i \rightarrow f}} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (3.5)$$

Ovvero il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f è indipendente dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso.

Questo ci permette di scrivere:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.6)$$

considerando dunque l'Equazione 3.5 e l'Equazione 3.6 le quali sono equivalenti e semplicemente dimostrabili usando le proprietà degli integrali, possiamo definire il lavoro di una forza conservativa come:

$$W_{F,i \rightarrow f} = \mathcal{F} \quad (3.7)$$

Se l'Equazione 3.7 non risultasse verificata allora la forza \vec{F} non sarebbe conservativa, e quindi il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f dipenderebbe dal percorso seguito dal corpo stesso.

3.4 Energia Potenziale

Prendiamo in considerazione una forza conservativa \vec{F} , dunque il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f è indipendente dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso. Fissiamo ora il punto $i \rightarrow O$ come punto di originario, e il punto $f \rightarrow P$ come punto finale del corpo stesso, quindi possiamo scrivere:

$$E_p(x, y, z) = E_{p,P} = - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (3.8)$$

abbiamo dunque definito l'**energia potenziale** E_p del punto P come il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} su un corpo che si sposta dal punto O al punto P . La funzione 3.8 è definita **funzione potenziale** della forza \vec{F} , questa descrive l'energia potenziale del corpo in funzione della sua posizione nello spazio (x, y, z) . L'energia potenziale è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della posizione del corpo nello spazio. L'energia potenziale è espressa in Joule $[J]$ ed ha dunque dimensionalità del lavoro $[J] = [N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s^2]$.

Proprietà Se al posto di considerare il punto O come punto di origine, considerassimo un altro punto A ed un altro punto B , allora il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} su un corpo che si sposta dal punto A al punto B sarebbe dato da:

$$\begin{aligned} W_{F,A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo che:

$$W_{F,A \rightarrow B} = E_{\rho,A} - E_{\rho,B} = \Delta E_{\rho} \quad (3.9)$$

Da notare come nel calcolo dell'energia potenziale per qualunque punto O scelto come origine non influisce sul risultato dell'Equazione 3.9. Anche in questa si nota come per le forze conservative se il punto di inizio e il punto di fine sono gli stessi, e si vuole quindi calcolare il lavoro compiuto, questo risulterà essere nullo per l'Equazione 3.6, ciò in quanto se considerassimo un qualsiasi punto intermedio M nel percorso che inizia e termina nello stesso punto A allora “quello che guadagna il corpo nel percorso $A \rightarrow M$ lo perde nel percorso $M \rightarrow A$ ”, dunque l'integrale chiuso risulterebbe essere nullo.

Energia potenziale forza peso

Applicando l'Equazione 3.8 alla forza peso \vec{P} , otteniamo:

$$E_{\rho,P} = mgz. \quad (3.10)$$

Dove z è l'altezza del corpo rispetto al piano orizzontale, e m è la massa del corpo. L'energia potenziale della forza peso è quindi direttamente proporzionale all'altezza del corpo rispetto al piano orizzontale, e alla massa del corpo stesso. Il segno dell'energia potenziale della forza peso è positivo, in quanto la forza peso compie lavoro positivo sul corpo quando questo si sposta verso l'alto, e negativo quando il corpo si sposta verso il basso.

N.B. A.3

3.5 Conservazione dell'energia meccanica

Nell'ipotesi che su una massa non agiscano forze dissipative, allora dato che valgono contemporaneamente le Equazioni 3.5 e 3.9, possiamo combinarle e scrivere:

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_K = E_{K,B} - E_{K,A} \\ W &= -\Delta E_{\rho} = E_{\rho,A} - E_{\rho,B} \\ E_{K,A} + E_{\rho,A} &= E_{K,B} + E_{\rho,B} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dunque se non agiscono forze dissipative: “La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un corpo è costante”. Il che è il principio di conservazione dell'**energia meccanica**, che afferma che l'energia meccanica totale di un corpo è costante se non agiscono forze dissipative sul corpo stesso.

Se in un corpo agiscono allo stesso tempo forze conservative e forze dissipative, allora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo non è costante, ma varia nel tempo in funzione del lavoro compiuto dalle forze dissipative. Dunque

$$\begin{aligned} W &= W_c + W_{nc} & &= E_{K,B} - E_{K,A} \\ E_{\rho,A} - E_{\rho,B} + W_{nc} & & &= E_{K,B} - E_{K,A} \\ W_{nc} &= (E_{K,B} + E_{\rho,B}) - (E_{K,A} + E_{\rho,A}) \\ &= E_{m,B} - E_{m,A} \end{aligned}$$

Dove W_{nc} è il lavoro compiuto dalle forze non conservative, E_m è l'energia meccanica totale del corpo, e $E_{m,A}$ e $E_{m,B}$ sono le energie meccaniche totali del corpo nei punti A e B rispettivamente. In sostanza se agiscono forze non conservative sul corpo, allora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo varia nel tempo in funzione del lavoro compiuto dalle forze non conservative.

N.B. A.3

3.6 Potenza

La potenza è definita come il lavoro in un certo lasso di tempo, dunque:

$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad (3.12)$$

Questa è definita come la potenza media del lavoro W nel tempo Δt , se al posto di questo vogliamo conoscere la “potenza istantanea”, con un abuso di notazione andando a prendere l’infinitesimo lavoro dW che non ha un vero e proprio senso, scriviamo:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.13)$$

dimensionalmente l’unità di misura della potenza è il Watt (W) che è quindi definita come

$$[P] = \left[\frac{E}{T} \right] = \left[F \cdot \frac{L}{T} \right] = \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{L}{T} \right] = [F \cdot V]$$

Capitolo 4

Fenomeni di urto

4.1 Introduzione agli urti

Considerando l'urto tra due punti materiali, durante la collisione possono agire forze molto intense, ma di breve durata, queste sono chiamate **forze impulsive**. Dato che le forze durante l'urto sono interne al sistema considerato allora in assenza di forze esterne, la quantità di moto totale del sistema è conservata. Dunque considerando m_1 e m_2 le masse dei due punti materiali, e $v_{1,in}, v_{2,in}$ le loro velocità prima dell'urto, e $v_{1,out}, v_{2,out}$ le loro velocità immediatamente dopo l'urto, possiamo scrivere:

$$P_{in} = m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,out} + m_2 v_{2,out} = P_{out}$$

Dunque la quantità di moto nel centro di massa del sistema è conservata, e possiamo scrivere:

$$P = (m_1 + m_2) v_{cm} = P_{in} = P_{out} = \text{costante} \quad (4.1)$$

Dal lato opposto le quantità di moto delle masse 1 e 2 non rimangono costanti, queste sono definite come la differenza tra la velocità moltiplicata per la massa. Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,out} - m_1 v_{1,in} &= J_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} F_{2,1} dt \\ m_2 v_{2,out} - m_2 v_{2,in} &= J_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{1,2} dt \end{aligned}$$

Dove $J_{2,1}$ è l'impulso della massa 2 sulla massa 1, e $J_{1,2}$ è l'impulso della massa 1 sulla massa 2. Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} J_{2,1} + J_{1,2} &= 0 \\ \Rightarrow J_{2,1} &= -J_{1,2} \end{aligned}$$

Questo è verificato in quanto le forze agenti sulle masse 1 e 2 sono uguali e opposte, quindi l'impulso della massa 2 sulla massa 1 è uguale in modulo ma opposto in verso all'impulso della massa 1 sulla massa 2.

Inoltre anche in presenza di forze esterne se la durata dell'urto è molto breve, possiamo considerare le forze esterne come nulle in quanto vale che:

$$\Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F^{(E)} dt = F_m^{(E)} \tau$$

e dunque se τ è molto piccola, il ΔP è molto piccola, e quindi possiamo considerare le forze esterne come nulle, questo a meno che le $F^{(E)}$ non siano impulsive nel periodo τ .

Analogamente possiamo scrivere l'impulso J come:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt = F_m \tau \quad (4.2)$$

Dove la forza F_m è la forza media durante l'intervallo di tempo τ .

Conseguenza diretta ed applicazione della conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto possiamo scrivere l'energia cinetica totale del sistema come:

$$E'_k = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

Detto questo non è sempre vero che l'energia meccanica e quindi l'energia cinetica è conservata. Infatti quando analizziamo un urto solitamente distinguiamo tre casi principalmente:

Urto elastico Oltre alla conservazione della quantità di moto, è conservata anche l'energia cinetica totale del sistema.

Urto anelastico Viene conservata solo la quantità di moto, mentre l'energia cinetica totale del sistema non è conservata.

Urto completamente anelastico Un urto completamente anelastico è un caso particolare di urto anelastico, nel quale le due masse si muovono insieme dopo l'urto. In questo caso la posizione delle due masse dopo l'urto coincide con la posizione del centro di massa del sistema.

La quantità di moto, in generale, di un sistema con N masse è descritta dalla seguente equazione:

$$P = \sum_{i=1}^N m_i v_i = M v_{cm} \quad (4.3)$$

Dunque possiamo scrivere la quantità di moto totale del sistema come:

$$P = m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,out} + m_2 v_{2,out}$$

4.1.1 Passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa

Può essere utile passare dal sistema di riferimento generale a quello del centro di massa, in quanto in questo sistema di riferimento la quantità di moto totale del sistema è sempre nulla. Per fare questo consideriamo:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x'(t) = x(t) - x_{cm}(t) \\ &\downarrow \frac{d}{dt} \\ v(t) &\rightarrow v'(t) = v(t) - v_{cm}(t) \\ &\downarrow \frac{d}{dt} \\ a(t) &\rightarrow a'(t) = a(t) - a_{cm}(t) \end{aligned}$$

In queste formule usiamo i simboli x_{cm} , v_{cm} e a_{cm} per indicare la posizione, la velocità e l'accelerazione del centro di massa del sistema, per ricavarci queste dobbiamo considerare la posizione del centro di massa del sistema come:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{x}_i}{\sum_1^N m_i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{x}_i \quad (4.4)$$

eseguendo alcuni passaggi possiamo ricavare la velocità e l'accelerazione del centro di massa del sistema come:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{cm} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{x}_i \\ &\downarrow \frac{d}{dt} \\ \vec{v}_{cm} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{x}_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{v}_i \\ &\downarrow \frac{d}{dt} \\ \vec{a}_{cm} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{a}_i \end{aligned}$$

Oltre alla posizione, velocità e accelerazione del centro di massa del sistema, possiamo anche calcolare l'energia cinetica totale del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa. Infatti possiamo scrivere:

$$E_{k,\text{tot}} \rightarrow E'_{k,\text{tot}} = \sum_{i=1}^N E'_{k,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (4.5)$$

Il che con qualche passaggio diventa:

$$\begin{aligned} E'_{k,\text{tot}} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - v_{cm})^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i^2 - 2v_i v_{cm} + v_{cm}^2) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N m_i v_i v_{cm} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 \\ &= E_{k,\text{tot}} - 2v_{cm} \sum_{i=1}^N m_i v_i + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\ &= E_{k,\text{tot}} - 2v_{cm} \cdot M v_{cm} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\ &= E_{k,\text{tot}} - M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\ &= E_{k,\text{tot}} - \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \end{aligned}$$

Dunque l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa non è influenzata dalle singole velocità, ma solo dalla velocità del centro di massa del sistema.

4.2 Urto elastico

Come già detto, in un urto elastico oltre alla conservazione della quantità di moto, è conservata anche l'energia cinetica totale del sistema. Dunque possiamo scrivere:

$$m_1 v_{1,\text{in}} + m_2 v_{2,\text{in}} = m_1 v_{1,\text{out}} + m_2 v_{2,\text{out}} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{out}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{out}}^2 \quad (4.7)$$

In quanto queste valgono contemporaneamente, possiamo dunque ricavarci una relazione tra le velocità di uscita e quelle di ingresso. Dalla (4.6) possiamo ricavare $v_{1,\text{out}}$ e sostituirlo nella (4.7):

$$\begin{aligned} v_{1,\text{out}} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1,\text{in}} + 2m_2 v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,\text{out}} &= \frac{(m_2 - m_1) v_{2,\text{in}} + 2m_1 v_{1,\text{in}}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Se il nostro sistema di riferimento è il centro di massa del sistema, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} v'_{1,\text{in}} &= -v'_{1,\text{out}} \\ v'_{2,\text{in}} &= -v'_{2,\text{out}} \end{aligned}$$

Nel caso volessimo “risolvere” un urto elastico tra due masse m_1 e m_2 per prima dobbiamo determinare il numero di dimensioni del sistema, e quindi scrivere le equazioni (4.6) e (4.7) in n dimensioni. Per 3 dimensioni si avranno 4 equazioni, per 2 dimensioni si avranno 3 equazioni, e per 1 dimensione si avrà 2 equazioni, però su n dimensioni con 2 masse si hanno $2n$ incognite, dunque nel caso di 2 dimensioni con 3 equazioni abbiamo una incognita libera, mentre nel caso di 3 dimensioni con 4 equazioni abbiamo 2 incognite libere, ma con 1 dimensione abbiamo 2 equazioni e 2 incognite, quindi non abbiamo incognite libere e possiamo risolvere l'urto.

4.3 Urto (completamente) anelastico

In un urto anelastico, la quantità di moto totale del sistema è conservata, mentre l'energia cinetica totale del sistema non è conservata. Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 E'_{k,f} &\neq E'_{k,i} \\
 E'_{k,i} &= \frac{1}{2}m_1v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,\text{in}}^2 \neq \frac{1}{2}m_1v_{1,\text{out}}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,\text{out}}^2 = E'_{k,f} \\
 E'_{k,i} &= E_{k,i} - \cancel{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2} \neq E'_{k,f} = E_{k,f} - \cancel{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2} \\
 E_{k,i} &\neq E_{k,f}
 \end{aligned}$$

L'analisi degli anelastici o completamente anelastici risulta utile nell'esperimento del "pendolo balistico".

Pendolo balistico

Nel problema del pendolo balistico, abbiamo un proiettile di massa m_1 che colpisce un pendolo di massa m_2 e lunghezza L . Il proiettile si conficca nel pendolo, e il sistema inizia a muoversi insieme, il pendolo raggiungerà una certa altezza h con angolo θ con $\theta = \arccos\left(\frac{L-h}{L}\right)$, bisogna quindi analizzare momenti diversi, il primo è l'urto tra il proiettile e il pendolo, il quale è completamente anelastico, il secondo è il moto del pendolo, il quale è un moto di tipo conservativo.

Urto Inizialmente il pendolo è fermo (e quindi con P nulla), mentre il proiettile ha quantità di moto $P_p = m_1v_p$ quindi la quantità di moto del sistema è $P = mv + Mv$, questa si conserva nell'urto, denotando V la velocità del pendolo nell'istante dopo l'urto abbiamo $P = mv + Mv = m_2V$ e quindi:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{m_1v}{m_1 + m_2} \\
 v &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} V
 \end{aligned}$$

Moto del pendolo Il pendolo inizia a muoversi con velocità V , e quindi ha energia cinetica $E_{k,i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$, il pendolo si alza fino ad un'altezza h e quindi ha energia potenziale $E_{p,f} = (m_1 + m_2)gh$, nel punto di massimo il pendolo non ha energia cinetica ($E_{k,f} = 0$), e nel punto di minimo il pendolo non ha energia potenziale ($E_{p,i} = 0$), vale per la conservazione dell'energia meccanica che:

$$\begin{aligned}
 E_{k,i} + E_{p,i} &= E_{k,f} + E_{p,f} \\
 \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 &= 0 + (m_1 + m_2)gh \\
 \frac{1}{2}V^2 \cancel{(m_1 + m_2)} &= \cancel{(m_1 + m_2)}gh \\
 \frac{1}{2}V^2 &= gh \\
 V^2 &= 2gh
 \end{aligned}$$

Composizione Combinando le due equazioni ricavate possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}v\right)^2 &= 2gh \\ \frac{(m_1 + m_2)^2}{2gh} &= v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2}{2gh}} \\ v &= \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{2gh}}\end{aligned}$$

il che ci permette di calcolare la velocità del proiettile in funzione della massa del pendolo, della massa del proiettile e dell'altezza raggiunta dal pendolo.

4.4 Nota Sui sistemi di riferimento, inerziali e non inerziali

Un sistema di riferimento è un insieme di punti materiali, che possono essere fissi o in movimento, rispetto ai quali si può misurare la posizione. Abbiamo visto il sistema di riferimento del centro di massa per il quale valido che la quantità di moto totale del sistema è nulla, e quindi possiamo scrivere:

$$P = \sum_{i=1}^N m_i v_i = M v_{cm} = 0$$

Se questi stessi punti materiali che costruiscono il centro di massa fossero soggetti alla forza di gravità allora rispetto al sistema “centro di massa” noteremo una forza apparente **esterna** al sistema che accelera l'intero sistema. Dunque possiamo dire che il sistema di riferimento del centro di massa in questa situazione **non** è inerziale. Se un sistema inoltre subisce più forze esterne allora la risultante di queste sarà il prodotto della massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa, la quale è nulla in un sistema inerziale:

$$\vec{R}_{est} = m \vec{a}_{cm}$$

Questa formula è il risultato considerando un sistema di riferimento “ancora più esterno” inerziale. Difatti come già visto la posizione del centro di massa rispetto ad un punto in un sistema inerziale O , considerando r_i la posizione del punto i rispetto al sistema di riferimento O e r'_i la posizione del punto i rispetto al sistema di riferimento del centro di massa, possiamo scrivere:

$$r_i = r'_i + OO'$$

Dato che

$$r'_c m = \frac{\sum_{i=1} m_i r'_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i (r_i + O'O)}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i r_i}{\sum_{i=1} m_i} + O'O = r_{cm} + O'O'$$

come derivata della posizione otteniamo che la velocità del centro di massa è:

$$v_{cm} = \frac{dr_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1} m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i v_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{P}{m}$$

e quindi l'accelerazione del centro di massa è:

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1} m_i \frac{dv_i}{dt}}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i a_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i a_i}{m}$$

Assumendo che il sistema di riferimento O sia inerziale, possiamo scrivere per ogni punto: $m_i a_i = F_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$, dove $F_i^{(E)}$ è la forza esterna e $F_i^{(I)}$ è la forza interna. Dunque possiamo scrivere:

$$m a_{CM} = \sum_i m_i a_i = \sum_i (F_i^{(E)} + F_i^{(I)}) = F^{(E)} + F^{(I)}$$

ma per definizione le forze interne si annullano, quindi possiamo scrivere:

$$ma_{CM} = F^{(E)}$$

Dunque possiamo dire che un sistema di riferimento è inerziale se la risultante delle forze esterne è uguale alla massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa. Se questa condizione non è soddisfatta, il sistema di riferimento non è inerziale. In un sistema di riferimento non inerziale, le forze apparenti sono forze fittizie che si manifestano a causa dell'accelerazione del sistema stesso. Queste forze non sono reali e non possono essere misurate direttamente, ma sono utili per analizzare il moto in sistemi non inerziali.

Parte II

Termodinamica

Capitolo 5

Termodinamica

Passiamo ora a studiare la termodinamica, che è la branca della fisica che studia le trasformazioni di energia e il calore. Quando trattiamo di termodinamica solitamente ci riferiamo a sistemi macroscopici, cioè sistemi composti da un numero molto elevato di particelle, questo numero è ben descritto dalla costante di Avogadro ($N_A = 6 \cdot 10^{23}$) questo è un numero puro. Il numero di Avogadro è il numero di atomi o molecole contenuti in un grammo di sostanza dunque se abbiamo N particelle in un sistema allora $N \rightarrow n = \frac{N}{N_A}$ è il numero di moli (mol). Le moli sono una grandezza fondamentale per indicare la quantità di sostanza. Altre grandezze fondamentali quando trattiamo di termodinamica sono la densità di massa $\rho = \frac{m}{V}$ misurata in $\left[\frac{M}{L^3}\right] = \frac{kg}{m^3}$, la densità molare $m \stackrel{def}{=} \frac{n}{V}$ misurata in $\left[\frac{M}{L^3}\right] = \frac{mol}{m^3}$, la pressione che è una quantità scalare che indica la forza esercitata su una superficie, è definita come il rapporto tra la forza e l'area su cui essa agisce, $P \stackrel{def}{=} \frac{|\vec{F}_{\perp, s}|}{S}$, misurata in $\left[\frac{M}{L^2 T^2}\right] = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$. La pressione oltre ad avere dimensionalità di $\left[\frac{F}{L^2}\right]$ può essere espressa come *Pascal* ($\frac{1}{1} \frac{N}{m^2} = 1 \text{ Pa}$ dato che tale quantità è insignificante sono state istituite le misure di 1 bar = 10^5 Pa e 1 atm = 1013.25 bar). Infine l'ultima grandezza fisica che necessita un'introduzione prima di passare al capitolo è la temperatura, questa può essere espressa in Kelvin (K) o Celsius ($^{\circ}C$) e la conversione tra le due scale è data da $T(K) = t(^{\circ}C) + 273.15$.

Calcolo della pressione

Assumiamo di voler calcolare la pressione esercitata da un'insieme di particelle su una parete che le contiene. Per prima cosa dobbiamo assumere che:

1. $m_i \leftrightarrow m_j$ non interagiscono tra di loro per ogni $i, j \in [1, N]$.
2. Gli urti tra particella e parete sono perfettamente elastici, inoltre la massa della parete è molto maggiore di quella delle particelle ($M \gg m$)
3. Il raggio della particella è trascurabile

Avendo assunto tutto ciò chiameremo " $P''_{\text{lungo } x}$ " la pressione esercitata dalle particelle lungo l'asse x , la pressione che una singola particella esercita sulla parete è data da: $P_{\text{lungo } x} = \frac{F_{\text{lungo } x}}{L_y \cdot L_z}$, dove $F_{\text{lungo } x}$ è la forza esercitata dalla particella sulla parete e $L_y \cdot L_z$ è l'area della parete. La forza esercitata dalla particella sulla parete è una forza impulsiva dunque si dovrebbe calcolare come $-\frac{J}{\Delta t}$ dato che l'intervallo di tempo da considerare nella situazione di impulso è molto piccolo, consideriamo equivalentemente Δt come il periodo tra due urti sulla stessa parete, questa sarà $\Delta t = \frac{2L_x}{v_x}$ che è il tempo per percorrere due volte la lunghezza L_x con componente della velocità v_x . Passano al denominatore l'impulso J è dato da $J = (P_{f,x} - P_{i,x}) \cdot \hat{x}$ ma dato che $P_{f,x} = -P_{i,x}$ visto che gli urti sono completamente elastici ed la massa della superficie è molto maggiore rispetto alla massa della particella, dunque " $F''_{\text{lungo } x} = \frac{mv_x^2}{L_x}$ " il che significa che la pressione lungo la superficie $L_y \cdot L_z$ è $P_{\text{lungo } x} = \frac{\frac{mv_x^2}{L_x}}{L_y \cdot L_z} = \frac{m_i v_x^2}{L_x L_y L_z} = \frac{m_i v_x^2}{V}$. Questo vale solo per una particella, sommando l'insieme delle particelle otteniamo:

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_{x,i}^2}{V} = \frac{m}{V} N \frac{\sum_{i=1}^N v_{x,i}^2}{N} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

Notiamo come N, m, V siano uguali per tutti gli assi e l'unico parametro che cambi sia la velocità di tutte le particelle sull'asse x tuttavia dato che il sistema complessivamente è isotropo possiamo dire che $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ e quindi possiamo scrivere la pressione totale come:

$$P = \frac{2}{3} \frac{N \langle E_x \rangle}{V} \quad (5.1)$$

dove $\langle E_x \rangle$ è l'energia cinetica media lungo l'asse x e N è il numero di particelle.

5.1 Calore

Abbiamo accennato alla temperatura, possiamo dire che la differenza di temperatura sia proporzionale alla massa del materiale combustibile usato, ($\Delta T \propto m_{comb}$), infatti logicamente più combustibile abbiamo più calore possiamo generare per una stessa quantità da scaldare. Inoltre se la massa del corpo da scaldare è proporzionale alla massa del combustibile, ($M_{scaldato} \propto m_{comb}$) infatti con più massa da scaldare abbiamo bisogno di più calore per scaldarlo della stessa temperatura. Infine possiamo dire che il calore Q è proporzionale alla differenza di temperatura (ΔT) e alla massa del corpo da scaldare ($M_{scaldato}$), quindi possiamo scrivere:

$$Q = cm\Delta T$$

Dove c è il calore specifico, che è una costante che dipende dal materiale e dalla temperatura. Il calore specifico è definito come la quantità di calore necessaria per aumentare la temperatura di un'unità di massa di un materiale di un grado Celsius. La sua unità di misura è $\frac{J}{kg \cdot K}$. Il calore ha la stessa dimensionalità dell'energia, infatti viene misurato in Joule (J).

Esperimento di Joule

Prendiamo in considerazione un contenitore isolato termicamente, nel quale è presente un pistone ed un liquido in esso. Il pistone è collegato tramite delle carrucole ideali ad un peso P che scende di un'altezza h . Dunque il lavoro compiuto dal peso è $W = -P \cdot (h_f - h_i)$ in quanto $E_{pot,i} = -P \cdot h_i$ e $E_{pot,f} = -P \cdot h_f$ e quindi dato che $h_f < h_i$ allora $mgh_i > mgh_f$ dunque $\Delta U_m = mg(h_f - h_i) < 0$. È quindi compiuto un lavoro dal peso sul liquido il quale ne aumenta l'energia potenziale dunque $\Delta U_{H_2O} > 0$ per questo possiamo dire che:

$$W = \Delta U \propto \Delta T_{H_2O} \quad (5.2)$$

$$Q = m_{H_2O} c_{H_2O} \Delta T_{H_2O} \quad (5.3)$$

$$\Delta U_{H_2O} = Q - W \quad (5.4)$$

L'equazione 5.4 è nota come prima legge della termodinamica, essa afferma che l'energia interna di un sistema è uguale alla somma del calore fornito al sistema e del lavoro compiuto sul sistema. Essa è una legge fondamentale della termodinamica e rappresenta il principio di conservazione dell'energia applicato ai sistemi termodinamici.

Per convenzione si considera il calore fornito al sistema come positivo e il lavoro compiuto sul sistema come positivo, di conseguenza il calore ceduto dal sistema e il lavoro compiuto dal sistema sono considerati negativi. La prima legge della termodinamica può essere espressa in forma differenziale come:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

non possiamo usare il simbolo d per il calore e il lavoro perché non sono funzioni di stato, ma dipendono dal "percorso" seguito dal sistema per passare da uno stato all'altro.

Se quindi viene eseguito un lavoro sul sistema e il calore viene fornito al sistema, l'energia interna del sistema aumenta. Se invece il sistema compie lavoro e cede calore, l'energia interna del sistema diminuisce. La prima legge della termodinamica è una legge fondamentale della fisica e ha molte applicazioni in ingegneria, chimica e fisica. Essa è alla base della termodinamica e delle sue applicazioni pratiche, come i motori a combustione interna, le turbine a gas e le pompe di calore.

5.2 Stato Termodinamico

Un sistema termodinamico è definito da un insieme di variabili macroscopiche che descrivono il suo stato. Queste variabili sono chiamate variabili di stato e includono grandezze come la temperatura, la

pressione, il volume e la massa del sistema, ma anche altre. Lo stato del sistema viene espresso come $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ dove v_i sono le variabili del sistema termodinamico. L'uguaglianza a zero sta ad indicare che il sistema è in equilibrio termodinamico, se non fosse così il sistema non sarebbe in equilibrio e quindi il suo stato non sarebbe definito, infatti nelle trasformazioni termodinamiche si passa da uno stato s_1 ad uno stato s_2 ($s_1 \rightarrow s_2$) e quindi il sistema non è più in equilibrio.

Equilibrio Termodinamico Un sistema è in equilibrio termodinamico se sono vere tre condizioni:

1. Sussiste un equilibrio meccanico medio tra le particelle del sistema.
2. Sussiste un equilibrio chimico tra le particelle del sistema.
3. Sussiste un equilibrio termico medio tra le particelle del sistema.

I punti 1 e 3 sono stati definiti *equilibrio medio* poiché non è necessario che ogni singola particella del sistema sia in equilibrio, ma è sufficiente che nel complesso il sistema sia “fermo” o a “temperatura costante”. In particolare, l'equilibrio termico medio implica che la temperatura del sistema sia uniforme e costante nel tempo. Se il sistema non è in equilibrio, le variabili di stato possono variare nel tempo e il sistema può subire trasformazioni termodinamiche. In questo caso, le variabili di stato non sono più costanti e il sistema non è più in equilibrio, l'equazione di stato non sarà più valida.

5.2.1 Trasformazioni termodinamiche

Andiamo ora a definire le trasformazioni termodinamiche, esse sono i processi attraverso i quali un sistema termodinamico passa da uno stato iniziale a uno stato finale. Le trasformazioni termodinamiche possono essere classificate in base a diverse caratteristiche, come la natura del processo (reversibile o irreversibile), la variazione di temperatura (isoterma, adiabatica, isocora, isobara) e la variazione di energia interna (isocora, isobara).

Trasformazioni Adiabatiche

Le trasformazioni adiabatiche sono processi in cui non c'è scambio di calore tra il sistema e l'ambiente circostante. Ovvero $Q = 0$ e quindi $\Delta U = -W$. In questo caso, l'energia interna del sistema può variare solo a causa del lavoro compiuto sul sistema o dal sistema. Le trasformazioni adiabatiche sono caratterizzate da una variazione di temperatura e pressione, ma non da una variazione di calore. Un esempio di trasformazione adiabatica è l'espansione rapida di un gas in un cilindro, in cui il gas si espande senza scambiare calore con l'ambiente circostante.

Trasformazioni non-adiabatiche

Le trasformazioni dove c'è scambio di calore tra il sistema e l'ambiente circostante sono dette non-adiabatiche. Un oggetto o un sistema può essere scaldato o raffreddato in diversi modi

Conduzione di calore La conduzione di calore è il processo attraverso il quale il calore viene trasferito da un corpo a un altro attraverso il contatto diretto. In questo caso il calore è proporzionale alla superficie di contatto: $S \propto Q$, al tempo per il quale il calore viene trasferito: $\delta t \propto Q$, alla differenza di temperatura tra i due corpi: $\Delta T \propto Q$ ed infine ad un coefficiente di conduzione del materiale: $k \propto Q$ il quale oltre a dipendere dal materiale dipende anche dalla temperatura. Dunque possiamo scrivere:

$$Q = h(T_2 - T_1)S\Delta t \quad (5.5)$$

portando l'equazione in forma differenziale otteniamo:

$$dQ = -\frac{dT}{dm} ds dt k \quad (5.6)$$

dove dQ è il calore trasferito, dm è la massa del materiale, ds è lo spessore del materiale e dt è il tempo di conduzione. L'equazione 5.6 è nota come legge di Fourier per la conduzione del calore. Essa descrive il flusso di calore attraverso un materiale in funzione della differenza di temperatura, dello spessore del materiale e del tempo di conduzione. La legge di Fourier è alla base della termodinamica e ha molte applicazioni pratiche, come l'isolamento termico degli edifici e la progettazione di scambiatori di calore.

Convezione La convezione è il processo attraverso il quale il calore viene trasferito da un corpo a un altro attraverso il movimento di un fluido. Non andremo ad analizzare nel dettaglio questo processo poiché questo è molto complesso e non rientra nello scopo del corso.

Irraggiamento L'irraggiamento è il processo attraverso il quale il calore viene trasferito da un corpo a un altro attraverso l'emissione di radiazioni elettromagnetiche. Questo processo avviene senza contatto diretto tra i corpi e senza la necessità di un fluido intermedio. L'irraggiamento è responsabile del trasferimento di calore dal Sole alla Terra e da un corpo caldo a uno freddo. La legge di Stefan-Boltzmann descrive come il calore trasferito ϵ da un corpo a un altro attraverso l'irraggiamento è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo emittente, e all'efficienza del corpo ricevente ℓ :

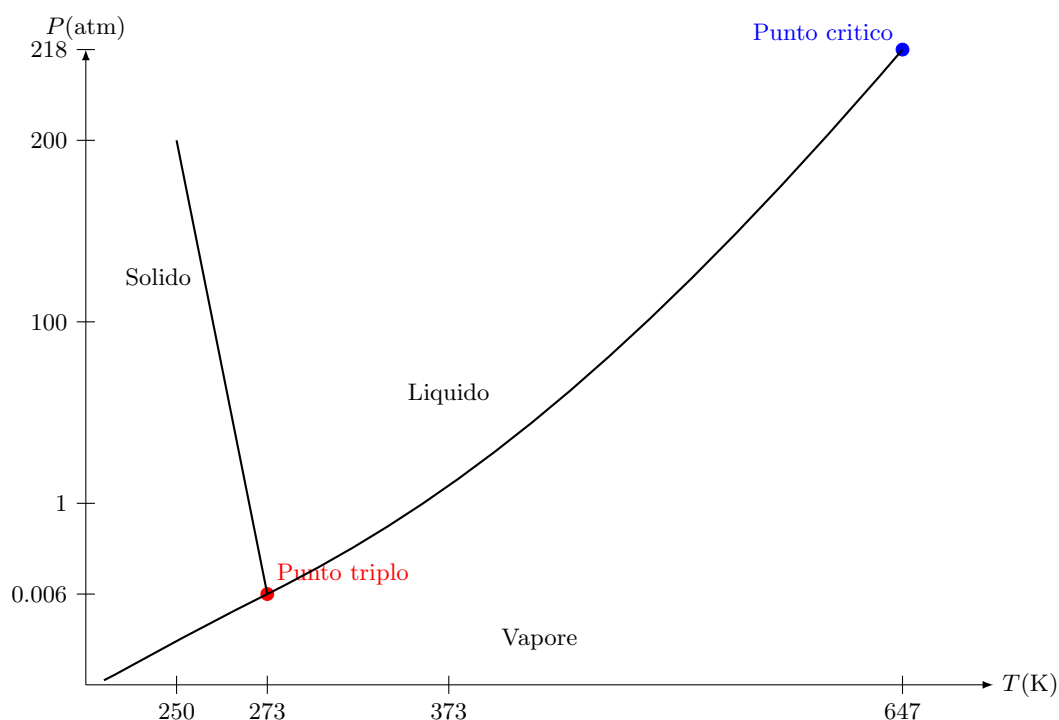
$$\epsilon = \ell \cdot \sigma \cdot (T^4)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, che ha un valore di circa $5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$. La legge di Stefan-Boltzmann è alla base della termodinamica e ha molte applicazioni pratiche, come la progettazione di pannelli solari e il riscaldamento degli edifici

Cambi di fase

Un caso particolare nel quale una variazione di calore non comporti una variazione di temperatura è il passaggio di stato, ovvero il passaggio da uno stato fisico a un altro. Ad esempio, quando si riscalda dell'acqua, essa passa dallo stato solido (ghiaccio) a quello liquido (acqua) e poi a quello gassoso (vapore). Durante questo processo, la temperatura dell'acqua rimane costante fino a quando tutto il ghiaccio non si è sciolto e poi rimane costante fino a quando tutto l'acqua non è evaporata. Questo fenomeno è dovuto al fatto che il calore fornito al sistema viene utilizzato per rompere i legami tra le molecole del ghiaccio o dell'acqua, piuttosto che per aumentare la temperatura del sistema. Il calore necessario per il passaggio di stato è chiamato calore latente e dipende dalla sostanza, dalla temperatura e dalla pressione. Il calore latente di fusione è il calore necessario per passare dallo stato solido a quello liquido, mentre il calore latente di vaporizzazione è il calore necessario per passare dallo stato liquido a quello gassoso.

Il grafico dello stato della materia Lo stato di un materiale può essere riassunto in un grafico nel quale sull'asse "x" la temperatura e sull'asse "y" la pressione. In questo grafico è presente un punto denominato punto triplo (T_{tr}) che è il punto in cui coesistono i tre stati della materia (solido, liquido e gassoso).



Il grafico mostra le diverse fasi della materia in funzione della temperatura e della pressione. La linea che separa il solido dal liquido è chiamata linea di fusione, mentre la linea che separa il liquido dal vapore è chiamata linea di vaporizzazione. La linea che separa il solido dal vapore è chiamata linea di sublimazione. Il punto critico è il punto oltre il quale non è possibile distinguere tra liquido e vapore, e oltre il quale il materiale si comporta come un fluido supercritico. Inoltre al disotto di una certa pressione e temperatura non si può avere dell'acqua intesa come H_2O ma la materia si decompone in idrogeno e ossigeno.

Cambio di fase analiticamente Analiticamente il cambio di fase può essere descritto come:

$$-\lambda m = Q \quad (5.7)$$

Dove come già accennato λ è il calore latente di fusione o vaporizzazione e m è la massa del materiale da scalare/raffreddare.

5.2.2 Altre leggi che regolano la termodinamica

Rimanendo nel campo dello stato termodinamico nel corso degli anni sono state formulate delle leggi che ne regolano il comportamento. Oltre alla prima legge della termodinamica abbiamo la legge di Avogadro, la legge di Boyle e le leggi di Gay-Lussac che regolano il comportamento dei gas ideali.

Definizione 5.1 (Legge di Avogadro - Gas Ideali). *Il numero di moli di un gas ideale è dipendente dalla pressione, dal volume e dalla temperatura del gas stesso.*

Nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, volumi uguali di gas diversi contengono lo stesso numero di molecole.

Definizione 5.2 (Legge di Boyle - Gas Ideali). *La legge di Boyle afferma che a temperatura costante, il prodotto pressione-volume di un gas ideale è costante. In altre parole, se la temperatura di un gas ideale rimane costante, un aumento della pressione del gas comporta una diminuzione del volume e viceversa.*

$$PV = \text{costante} \quad (5.8)$$

Definizione 5.3 (1° Legge di Gay-Lussac - Gas Ideali). *A pressione costante, il volume di un gas ideale è dipende dalla temperatura.*

$$P = \text{costante} \Rightarrow V(t) = V_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5.9)$$

Definizione 5.4 (2° Legge di Gay-Lussac - Gas Ideali). *A volume costante, la pressione di un gas ideale è dipendente dalla temperatura.*

$$V = \text{costante} \Rightarrow P(t) = P_0 [1 + \beta(T - T_0)] \quad (5.10)$$

Queste quattro leggi sono alla base della termodinamica e sono utilizzate per descrivere il comportamento dei gas ideali. Unendole quindi possiamo ricavarci l'equazione di stato per i gas ideali:

$$PV = nRT \quad (5.11)$$

dove P è la pressione, V è il volume, n è il numero di particelle (solitamente in moli) e R è la costante universale dei gas ideali, che ha un valore di circa $8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$ ed infine T è la temperatura in Kelvin. L'equazione di stato dei gas ideali (5.11) scritta in formato molare è:

$$PV = Mk_B T \quad (5.12)$$

la quale sfrutta la costante naturale di Boltzmann (k_B) che ha un valore di circa $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ e M è la massa molare del gas in $\frac{kg}{mol}$. A differenza del numero di Avogadro (N_A) che è un numero puro arbitrario e non ha unità di misura, la costante di Boltzmann è una costante fisica fondamentale che ha un valore specifico e una dimensione fisica.

Gas Ideali

Un gas ideale è un modello teorico di un gas che segue le leggi prima descritte ed è caratterizzato dall'equazione di stato $PV - nRT = 0$. Per essere ideale un gas "generalmente" deve essere rarefatto, ovvero le particelle devono essere distanti tra di loro e non devono interagire tra di loro. Inoltre vanno trascurate le forze intermolecolari e le dimensioni delle particelle. In questo modo possiamo descrivere una teoria cinetica dei gas, che ci permette di calcolare la pressione, il volume e la temperatura del gas in funzione delle sue proprietà microscopiche.

Densità dell'aria Dato che come accennato l'aria è un gas ideale possiamo calcolarne la densità usando l'equazione di stato dei gas ideali. Questa sarà data da:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V} \\ &= \frac{m_{\text{particella}} N}{V} \\ &= \frac{m_{\text{particella}} P \cancel{V}}{\cancel{V} k_B T} \\ &= \frac{m_{\text{particella}} P}{k_B T}\end{aligned}$$

Sapendo che la massa di una singola particella di aria è $m_{\text{particella}} = 28.8 \cdot 10^{-3} \text{kg}$ e che la pressione atmosferica è $P = 101325 \text{Pa}$ e che la temperatura media dell'aria è $T = 293 \text{K}$ possiamo calcolare la densità dell'aria:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{28.8 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot 101325 \text{Pa}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K} \cdot 293 \text{K}} \\ &= 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

5.3 Lavoro termodinamico e energia interna

5.3.1 Lavoro dei gas ideali

In senso meccanico il lavoro è definito come il prodotto tra la forza e lo spostamento ($dw = \vec{F} \cdot d\vec{s}$) ma come abbiamo visto in precedenza il lavoro nel senso termodinamico viene definito come il prodotto tra la pressione e il volume ($dW = P \cdot dV$) dimostriamo ora che i due lavori sono equivalenti con l'ausilio di un pistone.

Dimostrazione. Consideriamo un pistone isolato termicamente, nel quale è presente un gas ideale, sperimentalmente osserviamo che il pistone non si muove e dunque la risultante delle forze a lui applicate è nulla.

Dunque la forza peso del pistone stesso è contrastata dalla forza che il gas esercita su di esso ($R = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gas}} = \vec{0}$). Ora sembrerebbe che sussista una accelerazione del gas sull'asse z in quanto questa dovrebbe contrastare la forza peso del pistone stesso, tuttavia ciò andrebbe contro l'assunzione che sia presente un gas ideale. Infatti con un gas ideale sussiste l'isotropia delle forze e quindi la forza peso del pistone non può essere contrastata da una forza che agisce solo lungo l'asse z ma deve essere contrastata da una forza che agisce lungo tutti gli assi. Sapendo che la velocità media del gas ideale su una superficie è $\langle v^2 \rangle = 630 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ed inoltre che questa è opposta ad una accelerazione g della gravità, possiamo dire che la velocità finale dopo un istante t_1 è:

$$v_f = v_0 + gt_1$$

dove v_0 è la velocità iniziale del gas ideale. Sappiamo inoltre che la posizione finale del gas ideale è:

$$s_f = s_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$$

dove s_0 è la posizione iniziale del gas ideale. Dunque la forza peso del pistone è contrastata dalla forza che il gas esercita su di esso ($R = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gas}} = \vec{0}$) e quindi possiamo scrivere:

$$R = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gas}} = \vec{0}$$

Ora assumendo che venga aggiunto un peso di massa m al pistone, allora il pistone si muoverà di una distanza l lungo l'asse z , viene quindi compiuto un lavoro W sul sistema (dato che il pistone si abbassa) e quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}dw &= \vec{F}_{\text{gas}} \cdot d\vec{l} \\ &= \vec{F}_{\perp}^{\text{gas}} \cdot d\vec{l} \\ &= p \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l} \\ &= p \cdot dV\end{aligned}$$

è stato possibile eseguire il passaggio da F_{gas} a $p \cdot S$ in quanto la definizione di pressione è data da $P = \frac{F}{S}$ e quindi $F = P \cdot S$. Inoltre il passaggio da $p \cdot S \cdot d\vec{l}$ a $p \cdot V$ è dovuto al fatto che il pistone si muove lungo l'asse z e quindi la variazione di volume del gas ideale è data da $V = S \cdot d\vec{l}$. \square

5.3.2 Lavoro termodinamico

Il lavoro termodinamico è il lavoro compiuto da un sistema termodinamico per passare da uno stato iniziale a uno stato finale. Il lavoro termodinamico viene preso, a differenza del lavoro inteso in senso meccanico, come l'integrale della variazione di pressione rispetto alla variazione di volume del sistema. Il lavoro termodinamico è dato da:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_A^B p(V) dV \quad (5.13)$$

quindi intrinsecamente stiamo considerando la somma di tutti i piccolissimi lavori compiuti dal sistema per passare da uno stato iniziale a uno stato finale, dunque in teoria potremmo considerare ognuno di questi inter-stati come uno stato di equilibrio. Tuttavia in certe circostanze non è possibile considerare il sistema "in equilibrio" in certi stati intermedi. Quando, invece, il sistema è in equilibrio in ogni stato intermedio chiameremo la trasformazione **quasi-statica** dato che ogni micro stato è in equilibrio. Dunque dato che $p = \frac{mRT}{V}$ possiamo definire:

$$W_{a \rightarrow b} \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B mRT \cdot \frac{dV}{V} \quad (5.14)$$

5.3.3 Energia interna ai gas

Sperimentalmente consideriamo un contenitore isolato termicamente, nel quale è presente un gas ideale in equilibrio in una metà del contenitore e il vuoto nell'altra metà. Se ora andiamo a rompere il setto che divide le due metà, il gas si espanderà nella metà vuota del contenitore. Durante questo processo il volume che il gas occupa raddoppia, osserviamo che la pressione di questo gas dimezza ma la temperatura rimane costante. Notiamo come nessun lavoro è stato compiuto sul gas e nessun calore è stato scambiato con l'ambiente circostante. Ma in quanto sia la pressione che il volume sono cambiati allora possiamo dire che l'energia interna del sistema dipende solo dalla temperatura e non dal volume o dalla pressione. Dunque possiamo scrivere:

$$\left. \begin{array}{l} U_i = U_f \\ T_i = T_f \end{array} \right\} \Rightarrow U = U(T)$$

Dunque possiamo dire che l'energia interna di un gas ideale è una funzione della temperatura e non del volume o della pressione.

Altra osservazione che possiamo fare sul sistema è quella che l'energia interna del sistema è una funzione di stato, ovvero non dipende dal percorso seguito dal sistema per passare da uno stato iniziale a uno stato finale, ciò a differenza del lavoro e del calore che sono funzioni di percorso. Infatti se consideriamo due stati A e B del sistema, possiamo passare da A a B in diversi modi, ad esempio attraverso una trasformazione isocora o isobara. Tuttavia l'energia interna del sistema sarà sempre la stessa, indipendentemente dal percorso seguito ma non sarà mai la stessa per il lavoro e il calore. Dunque possiamo scrivere:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

al posto di usare la notazione infinitesimale errata per il calore e il lavoro.

Relazione di Mayer

La relazione di Mayer è una relazione che descrive, in una trasformazione isocora, la variazione di energia interna di un gas ideale in funzione della sua temperatura e del suo volume. Essa viene ricavata a partire dall'equazione di stato dei gas ideali e dalla definizione di energia interna:

$$nc_p dT = nc_v dT + PdV$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali

$$pdV + Vdp = nRdT$$

Dato che in trasformazione isobara $dp = 0$

$$nc_p dT = nc_V dT + nRdT \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow c_p - c_V = R \quad (5.16)$$

ovvero c_p , il calore specifico a pressione costante, è maggiore del calore specifico a volume costante c_V di una quantità pari alla costante universale dei gas ideali R .

5.4 Trasformazioni gas ideali

Come dalla relazione di Mayer, possiamo considerare “gas ideali” quei gas che hanno $c_p > c_V$ e che questi siano indipendenti dalla temperatura.

5.4.1 Trasformazioni adiabatiche

Il contenitore isolato termicamente è un sistema chiuso, in cui non c'è scambio di calore con l'ambiente circostante. In questo caso solo il lavoro può essere compiuto nel sistema (tramite una parete mobile) e quindi, tra due punti di equilibrio A e B , possiamo scrivere:

$$W_{AB} = -\Delta U = -nc_V(T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_a V_a - p_b V_b) \quad (5.17)$$

dove $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante.

Trasformazione reversibile Se la trasformazione è reversibile, possiamo scrivere:

$$dQ = dU + dW = nc_V dT + pdV = 0$$

in quanto la trasformazione è reversibile, possiamo usare l'equazione di stato per ognuno degli stati intermedi e dunque la pressione è esprimibile come $p = \frac{nRT}{V}$ e quindi:

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

usando l'equazione 5.16 possiamo scrivere:

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dv}{V} + \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dv}{V} + \frac{dT}{T} = 0$$

È quindi questa l'equazione che regola ogni coordinata delle trasformazioni adiabatiche reversibili. Integrando da A a B otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{T_A}^{T_B} (\gamma - 1) \frac{dv}{V} &= -\frac{dT}{T} \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} &= \frac{c_V}{c_p} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) \\ T_A V_A^{\gamma-1} &= T_B V_B^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Dunque si hanno tre equazioni che legano le tre variabili T , V e p :

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (5.18)$$

$$pV^\gamma = \text{costante} \quad (5.19)$$

$$Tp^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{costante} \quad (5.20)$$

Queste tre equazioni sono note come equazioni per le trasformazioni adiabatiche reversibili e descrivono il comportamento dei gas ideali durante le trasformazioni adiabatiche.

5.4.2 Trasformazioni isoterme

Le trasformazioni isoterme sono processi in cui la temperatura del sistema rimane costante. In questo caso, l'energia interna del sistema non varia e quindi possiamo scrivere:

$$dU = 0 \Rightarrow dQ = dW$$

Dunque il calore fornito al sistema è uguale al lavoro compiuto dal sistema. In questo caso, l'equazione di stato dei gas ideali diventa:

$$p_A V_A = p_B V_B$$

Vista la definizione di lavoro termodinamico, e considerando che il sistema è in equilibrio, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= - \int_A^B p dV = - \int_A^B \frac{nRT}{V} dV \\ &= nRT \int_A^B \frac{1}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \end{aligned}$$

dunque il calore scambiato dal sistema non sarà mai nullo in quanto se così fosse allora $T = 0$ il che è impossibile.

Notare come nell'esperimento di *Joule*, descritto in precedenza la trasformazione avvenuta è sia adiabatica che isoterma, questo solo perché la trasformazione è irreversibile. Infatti se la trasformazione fosse stata reversibile, non sarebbe stato possibile avere una trasformazione sia adiabatica che isoterma.

5.4.3 Trasformazioni isocore

Le trasformazioni isocore sono processi in cui il volume del sistema rimane costante e il lavoro compiuto dal sistema è nullo. In questo caso, l'energia interna del sistema varia solo a causa del calore fornito al sistema, il che ci porta a:

$$Q = nC_V(T_B - T_A)$$

il che si traduce in:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_a}{T_a} = \frac{p_b}{T_b}$$

Dunque il rapporto tra le pressioni è sempre uguale al rapporto tra le temperature, se ne aumenta una aumenta anche l'altra e viceversa. Quando vuol cedere calore al gas allora ne verrà aumentata la temperatura e quindi la pressione, solitamente ciò viene fatto scaldando una parte del recipiente in cui è contenuto il gas, in questo modo però la trasformazione è irreversibile in quanto non c'è equilibrio termico tra il gas e il sistema. Se invece vengono messi a contatto due recipienti contenenti gas a temperature diverse, allora il sistema è in equilibrio termico e quindi la trasformazione è reversibile.

5.4.4 Trasformazioni isobare, Entalpia

Le trasformazioni isobare sono processi in cui la pressione del sistema rimane costante, dunque l'equazione di stato dei gas ideali diventa:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b}$$

Dunque sia lavoro che calore possono essere scambiati ed espressi come:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -nR(T_B - T_A) \\ Q &= nc_p(T_B - T_A) \end{aligned}$$

Notiamo come entrambe le quantità dipendano dalla temperatura, ma il lavoro dipende dalla costante universale dei gas ideali R mentre il calore dipende dal calore specifico a pressione costante c_p . Dunque possiamo definire una nuova grandezza fisica chiamata **entalpia** (H) che è definita come:

$$H = U + pV \quad (5.21)$$

questa è può essere vista come una funzione di stato del sistema, in quanto sia U che pV dipendono solo dalle coordinate termodinamiche del sistema, ovvero la temperatura (in un gas ideale) in quanto pV grazie alla funzione di stato dei gas ideali è esprimibile come nRT , il che ci porta a concludere che l'entalpia dei gas ideali è funzione solo della temperatura ($H = H(T)$). Possiamo definire una trasformazione infinitesima dell'entalpia come:

$$dH = dU + d(pV) = nc_V dT + nR dT = nc_p dT$$

ed usando la relazione di Mayer possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta H &= n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT \\ \Delta H &= nc_p(T_B - T_A) \text{ se } c_p \text{ costante}\end{aligned}\quad (5.22)$$

Nel caso delle trasformazioni isobare, la variazione di entalpia è uguale al calore scambiato dal sistema mentre nelle trasformazioni isocore la variazione di entalpia è uguale alla differenza dell'energia interna del sistema.

5.4.5 Riassumendo

Riporto qui di seguito una tabella riassuntiva delle trasformazioni dei gas ideali, in modo da avere un quadro generale delle trasformazioni che possono avvenire in un sistema termodinamico.

Trasformazione	Lavoro	Calore	Energia interna
Adiabatica	$W_{AB} = \frac{1}{\gamma-1} (p_A v_A - p_B v_B)$	$Q = 0$	$\Delta U = -W_{AB}$
Isoterma	$W_{AB} = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$	$Q = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$	$\Delta U = 0$
Isocora	$W_{AB} = 0$	$Q = nc_V(T_B - T_A)$	$\Delta U = nc_V(T_B - T_A)$
Isobara	$W_{AB} = -nR(T_B - T_A)$	$Q = nc_p(T_B - T_A)$	$\Delta U = nc_V(T_B - T_A)$

Di seguito il grafico delle trasformazioni volume/pressione di un gas ideale:

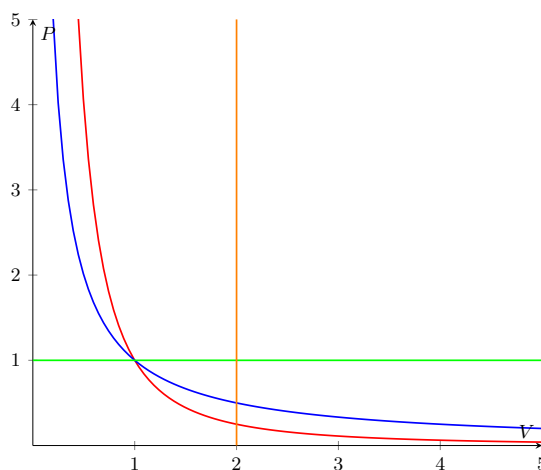


Figura 5.1: Trasformazioni dei gas ideali

La curva rossa rappresenta la trasformazione adiabatiche, la curva blu rappresenta la trasformazione isoterma, la retta verde rappresenta la trasformazione isocora e la retta arancione rappresenta la trasformazione isobara.

5.4.6 Trasformazioni politropiche e generali

Le trasformazioni politropiche sono tali che per tutta la loro durata il calore specifico rimane costante (c_k) e quindi per la prima legge della termodinamica possiamo scrivere:

$$nc_v dT = nc_k dT - p dV$$

definiamo ora la costante k come la somma del rapporto tra la costante R ed la differenza tra i calori specifici c_v e c_k con 1 ($k = \frac{R}{c_v - c_k} + 1$) e quindi scriviamo:

$$PV^k = \text{costante}$$

per le altre trasformazioni generali ricorriamo al primo principio della termodinamica (5.4).

5.5 Trasformazioni Cicliche

Come visto in precedenza in una trasformazioni la differenza di energia interna è data dalla differenza dell'energia interna finale e quella iniziale, in una trasformazione ciclica questa è nulla ($\Delta U = U_f - U_i = 0$) in quanto il punto finale coincide con quello iniziale. Non possiamo dire lo stesso per il lavoro e il calore, abbiamo già accennato che mentre l'energia interna è una funzione di stato, il lavoro e il calore sono funzioni di percorso. Possiamo quindi scrivere il lavoro compiuto dal sistema come:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \oint_C dW = W_C$$

dove C è il percorso chiuso che il sistema compie per tornare al punto iniziale. Ora considerando il grafico P/V verrà eseguito del “lavoro positivo”, ovvero il sistema compie lavoro sul sistema esterno, se il circuito è in senso orario, mentre il lavoro compiuto dal sistema esterno sul sistema è negativo se il circuito è in senso antiorario.

Dunque in caso di lavoro positivo ci troviamo davanti un ciclo termico, o macchina termica, dove il calore viene trasformato in parte in lavoro meccanico ed in parte dissipato nell'ambiente. In caso di lavoro negativo ci troviamo davanti un ciclo frigorifero, o macchina frigorifera, dove il lavoro meccanico viene trasformato in calore e quindi il sistema assorbe calore dall'ambiente.

Rendimento Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro compiuto dalla macchina e il calore assorbito dalla sorgente calda. Esso è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_{tot} - \overbrace{\Delta U}^{=0}}{Q_A} = \frac{Q_{tot}}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} \quad (5.23)$$

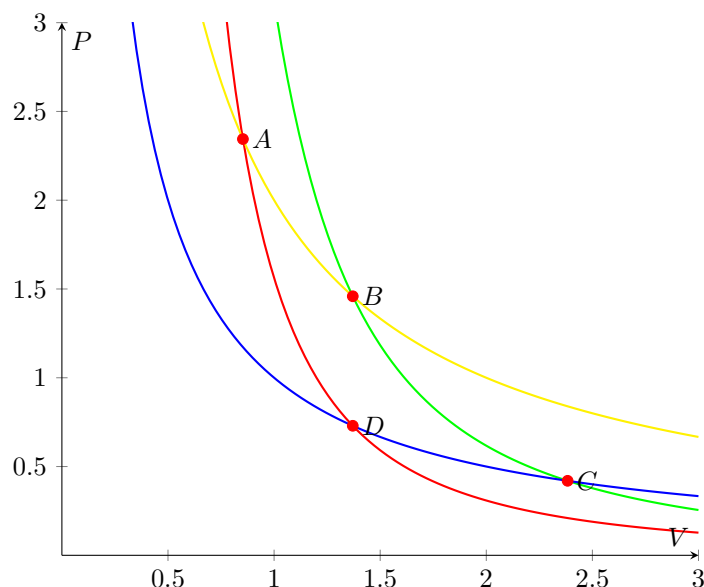
dove Q_A è il calore assorbito dalla sorgente calda e Q_{tot} è il totale del calore (assorbito e ceduto) dalla macchina termica. Notiamo dunque che il rendimento di una macchina termica non può mai essere superiore a 1 in quanto il calore ceduto è una quantità negativa (per la convenzione di segno) e quindi il rendimento è sempre minore di 1.

Il rendimento di una macchina frigorifera è definito come:

$$CoP = \frac{Q_A}{W_\epsilon} = \frac{Q_A}{|W_{NEED}|} \quad (5.24)$$

5.5.1 Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo termodinamico ideale in quattro fasi, può essere rappresentato graficamente come segue:



questo ciclo è composto da due trasformazioni adiabatiche e due trasformazioni isoterme. Le trasformazioni isoterme sono rappresentate dalle curve blu e gialla, mentre le trasformazioni adiabatiche sono rappresentate dalle curve rosse e verdi.

In questo ciclo il lavoro è dato dall'area racchiusa tra le curve, per calcolarne il valore dobbiamo calcolare il lavoro svolto dalle diverse trasformazioni, il quale sarà dato da:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= nRT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \\ W_{BC} &= -mc_V(T_1 - T_2) \\ W_{CD} &= nRT_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \\ W_{DA} &= -mc_V(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

Ciò in quanto la trasformazione da A a B è una trasformazione espansiva isoterma a temperatura T_1 , la trasformazione da B a C è una trasformazione espansiva adiabatica da T_1 a T_2 , la trasformazione da C a D è una trasformazione isoterma compressiva a temperatura T_2 e infine la trasformazione da D a A è una trasformazione adiabatica compressiva da T_2 a T_1 . Andando a sommare i vari lavori compiuti dal sistema otteniamo:

$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \\ &= nRT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) - \cancel{mc_V(T_1 - T_2)} + nRT_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) - \cancel{mc_V(T_2 - T_1)} \\ &= nR \left(T_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + T_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \right) \end{aligned}$$

Ma in quanto $\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$ è una quantità positiva dato che il volume finale è maggiore di quello iniziale, mentre $\ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right)$ è una quantità negativa dato che il volume finale è minore di quello iniziale allora diciamo che nella prima avviene un lavoro positivo mentre nella seconda avviene un lavoro negativo, conseguentemente il calore Q_A assorbito dalla sorgente calda sarà uguale al lavoro W_{AB} compiuto dal sistema e il calore Q_C ceduto alla sorgente fredda sarà uguale al lavoro W_{CD} compiuto dal sistema.

L'efficienza di questo ciclo è data da:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{nR \left(T_1 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \right)}{nR \left(T_2 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \right)}$$

Il che in quanto $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_C}$ dato che sono in gioco le trasformazioni isoterme che generano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} p_d V_d = p_a V_a \\ p_b V_b = p_c V_c \\ p_a V_a = p_b V_b \\ p_c V_c = p_d V_d \end{cases} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_C}$$

visto che il logaritmo di un rapporto uguale è uguale al logaritmo del rapporto stesso, possiamo scrivere:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

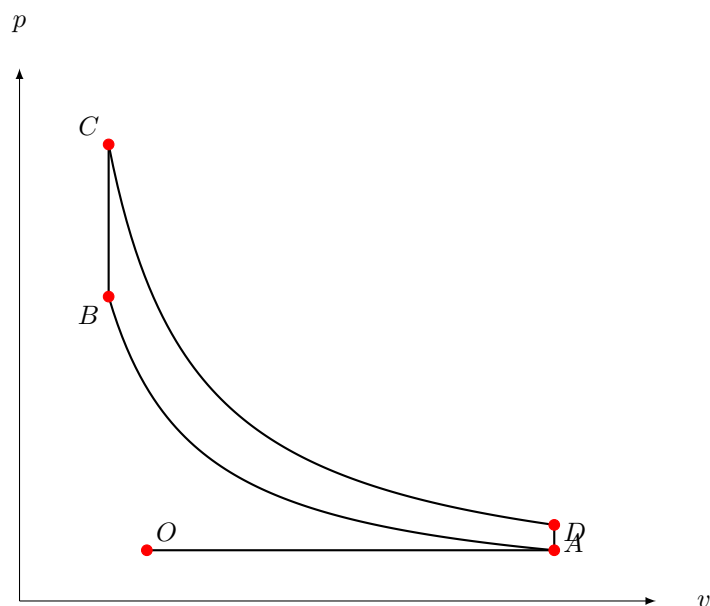
dunque il rendimento nel ciclo di Carnot è dato dalla differenza tra la temperatura della sorgente calda e quella della sorgente fredda. Se questa differenza si avvicina a 0 allora il rapporto tende a 1 e quindi il rendimento tende a 0, se invece la differenza è molto alta tale per cui il rapporto tende a 0 ($T_2 \ll T_1$) allora il rendimento tende a 1.

5.5.2 Ciclo di Otto - Motori Diesel

Il ciclo di Otto è un ciclo termodinamico ideale che descrive il funzionamento dei motori a combustione interna, in particolare i motori a benzina. Esso è composto da sei trasformazioni termodinamiche:

- $O \rightarrow A$ - Espansione reversibile isobara
- $A \rightarrow B$ - Compressione reversibile adiabatiche
- $B \rightarrow C$ - Trasformazione isocora
- $C \rightarrow D$ - Espansione reversibile adiabatiche
- $D \rightarrow E$ - Trasformazione isocora
- $E \rightarrow O$ - Compressione reversibile isocora

Il ciclo di Otto può essere rappresentato graficamente come segue:



Nella prima fase del ciclo si osserva una espansione isobara, nella quale il pistone si espande permettendo l'ingresso di una miscela di aria e benzina nel cilindro, il tutto a pressione costante (valvola aperta). Poi si ha una compressione adiabatiche, in cui il pistone si muove verso l'alto comprimendo la miscela di aria e benzina (valvola chiusa, sistema isolato). Poi avviene la fase di scoppio della miscela di aria e benzina, in cui la miscela viene accesa da una scintilla e quindi si verifica un improvviso ed irreversibile aumento di pressione e temperatura (valvola chiusa), questo fenomeno porta negli istanti successivi ad una espansione del volume del gas, il quale compie lavoro sul pistone (valvola chiusa). Quando il gas si trova al massimo volume viene espulso aprendo la valvola di scarico (valvola aperta) e diminuendo irreversibilmente la pressione. Viene infine chiusa la valvola e compresso il pistone fino a tornare alla posizione iniziale (valvola chiusa).

Il ciclo di Otto è un ciclo ideale, in quanto non tiene conto delle perdite di calore e del lavoro compiuto dal sistema. Tuttavia, possiamo notare come il lavoro viene compiuto dal sistema unicamente nella fase da C a D , nelle altre o è necessario compiere lavoro sul sistema o il lavoro è nullo. Un motore di questo genere ha un rendimento attorno al 20% idealmente, ma in realtà il rendimento è molto più basso a causa delle perdite di calore e del lavoro compiuto dal sistema.

Capitolo 6

Seconda legge della termodinamica

La seconda legge della termodinamica è divisa in due enunciati: l'enunciato di Kelvin recita:

Non è possibile costruire una macchina il cui unico risultato sia il calore trasferito da una sorgente in lavoro

(Kelvin - Planck)

mentre il secondo principio di Claus recita:

Non esiste alcuna trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da una sorgente ad una più calda.

(Claus)

In quanto principi non è possibile dimostrare la loro verità, ma è possibile dimostrare che questi sono equivalenti

Dimostrazione. Da Claus a Kelvin - Planck: Si prenda una macchina termica che violi il principio di Claus, ovvero che trasferisca calore da una sorgente a temperatura T_1 ad una sorgente a temperatura T_2 con $T_1 < T_2$, questa assorbe calore Q_1 dalla superficie T_1 e cede calore Q_2 alla superficie T_2 . In generale è possibile costruire una macchina che assorba la stessa quantità di calore che la macchina che viola il principio di Claus, (\mathcal{C}), cede alla sorgente a temperatura T_2 , questa seconda macchina produce lavoro W e cede calore Q_1^{DISI} alla sorgente a temperatura T_1 e assorbe calore $|Q_2^{DISI}| = |Q_2|$ dalla sorgente a temperatura T_2 . Ora combinando le due macchine si ottiene che il calore scambiato dalla sorgente a temperatura T_1 è: $Q_1 - Q_1^{DISI}$, il calore scambiato dalla sorgente a temperatura T_2 è $Q_2 - Q_2^{DISI} = 0$ e il lavoro prodotto è W . Quindi abbiamo costruito una macchina che produce lavoro assorbendo calore $(Q_1 - Q_1^{DISI})$ dalla sorgente a temperatura T_1 e non cede calore alla sorgente a temperatura T_2 . Questa macchina è in contraddizione con il principio di Kelvin - Planck, quindi il principio di Claus è equivalente al principio di Kelvin - Planck. (La quantità $Q_1 - Q_1^{DISI}$ è positiva in quanto visto che la macchina DISI produce lavoro allora $-Q_1^{DISI} + Q_2 - W = 0$ e dato che $W > 0$ allora $Q_1^{DISI} < Q_2$ e dato che nella prima macchina l'energia interna è data da $Q_1 - Q_2 = 0$ allora $Q_1 = Q_2$ e quindi $Q_1 - Q_1^{DISI} = Q_2 - Q_1^{DISI} > 0$).

Da Kelvin - Planck a Claus: Si prenda una macchina termica che violi il principio di Kelvin - Planck, ovvero che produca lavoro W assorbendo calore Q_1 dalla sorgente a temperatura T_2 e non ceda calore a nessuna sorgente a temperatura T_2 . Consideriamo dunque una macchina che dallo stesso lavoro prodotto W e tramite una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$ ceda una certa quantità di calore $-|Q_2^{DISI}|$ alla superficie T_2 e assorba una certa quantità di calore Q_1^{DISI} dalla sorgente a temperatura T_1 . Ora combinando le due macchine si ottiene che questa macchina non produce né assorbe lavoro, inoltre assorbe del calore $|Q_1^{DISI}|$ dalla sorgente a temperatura T_1 e scambia del calore $Q_2 - |Q_2^{DISI}|$ alla sorgente a temperatura T_2 . Questa ultima quantità scambiata è uguale in modulo a Q_1^{DISI} , cioè in quanto $Q_2 = W$ visto che la prima macchina produce solamente lavoro, inoltre vale che $Q_1^{DISI} - Q_2^{DISI} - (-W) = 0$ e dunque $W = -Q_1^{DISI} + Q_2^{DISI}$, sostituendo si ottiene che: $-Q_1^{DISI} + Q_2^{DISI} - Q_2^{DISI}$ dunque la quantità di calore scambiata dalla sorgente a temperatura T_1 è Q_1^{DISI} e la quantità di calore scambiata dalla sorgente a temperatura T_2 è $-Q_1^{DISI}$. Quindi abbiamo costruito una macchina che non produce/assorbe lavoro e che assorbe calore dalla sorgente a temperatura $T_1 < T_2$ e cede calore alla sorgente a temperatura T_2 . Questa macchina è in contraddizione con il principio di Claus, quindi il principio di Kelvin - Planck è equivalente al principio di Claus. \square

6.1 Teorema di Carnot

Il teorema di Carnot afferma che:

Teorema 6.1 (Teorema di Carnot). *Preso una qualsiasi macchina termica x che lavori tra due sorgenti a temperatura T_1 e T_2 con $T_1 > T_2$ questa avrà rendimento η_x minore o uguale a quello di una macchina reversibile r che lavora tra le stesse sorgenti. In particolare il rendimento sarà minore se la macchina x non è reversibile e uguale se la macchina x è reversibile.*

$$\eta_{x,(T_1,T_2)} \leq \eta_{r,(T_1,T_2)} \quad (6.1)$$

In particolare sarà vero, per la definizione di rendimento che $1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$, quindi che $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che esista una macchina x che lavora tra le sorgenti a temperatura T_1 e $T_2 > T_1$ con rendimento η_x maggiore di quello di una macchina reversibile r che lavora tra le stesse sorgenti. Prendiamo dunque in considerazione questa macchina r e la impostiamo in modo che il lavoro prodotto sia uguale a quello prodotto dalla macchina x , quindi $W_x = W_r$. Ora invertiamo la macchina r in modo che questa funzioni da macchina frigorifera questa assorbirà calore dalla sorgente a temperatura T_1 e cederà calore alla sorgente a temperatura T_2 assorbendo lavoro W . Consideriamo la combinazione delle due macchine, la risultante non scambia lavoro in quanto $W_x = W_r$ per costruzione, inoltre scambia calore $|Q_1^r| - |Q_1^x|$ con la sorgente a temperatura T_1 e $|Q_2^x| - |Q_2^r|$ con la sorgente a temperatura T_2 . Queste due quantità di calore si equivalgono per costruzione della macchina r e quindi si ha che $|Q_1^r| - |Q_1^x| = |Q_2^x| - |Q_2^r|$. Chiamiamo la quantità $|Q_1^r| - |Q_1^x| = -|Q_{abs}|$. L'ipotesi di assurdo implica che $\eta_x > \eta_r$ e quindi che $\frac{W}{Q_2^x} > \frac{W}{Q_2^r}$, quindi $Q_2^x < Q_2^r$, il che implica che $Q_2^x - Q_2^r < 0$. Quindi in quanto $Q_2^x - Q_2^r = |Q_{abs}|$ si ha che $|Q_{abs}| < 0$, il che significherebbe che in assenza di lavoro la superficie a temperatura T_1 cede calore alla sorgente a temperatura T_2 , il che è in contraddizione con il principio di Claus. Quindi l'ipotesi di partenza è falsa e quindi il teorema di Carnot è vero per qualsiasi macchina termica x che lavora tra due sorgenti a temperatura T_1 e T_2 con $T_1 > T_2$.¹ \square

Questo teorema implica che il rendimento di una macchina termica lavora con un rendimento limitato superiormente da $1 - \frac{T_1}{T_2}$, quindi il rendimento di una macchina termica non può essere uguale a 1, anzi anche se fosse reversibile il rendimento sarebbe comunque minore di 1 in quanto il rendimento dipende dalla temperatura delle sorgenti.

Teorema di Clausius Il teorema di Clausius è una estensione del teorema di Carnot, esso afferma che per N sorgenti termiche T_1, T_2, \dots, T_N con le quali una macchina termica x scambia calore Q_1, Q_2, \dots, Q_N rispettivamente, allora la somma $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} < 0$. La stessa cosa vale su ∞ sorgenti termiche, quindi

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

6.2 Entropia

A partire dalla seconda legge della termodinamica ed il teorema di clausius e considerando infinite sorgenti di un ciclo **reversibile** allora possiamo scrivere:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

¹La dimostrazione per il caso nel quale la macchina x è reversibile è immediata in quanto è possibile replicare la seguente dimostrazione invertendo la macchina x in modo che questa funzioni da macchina frigorifera e infine mettendo a sistema i due risultati ottenuti.

Dunque prendendo due qualunque stati del ciclo A, B ed i percorsi del ciclo I e II che collegano gli stati A e B si ha che:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A,I \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T} + \int_{A,II \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\int_{A,I \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T} = - \int_{A,II \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T}$$

$$\int_{A,I \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,II \text{ Rev.}}^B \frac{dQ}{T} \stackrel{\text{def.}}{=} F(B) - F(A)$$

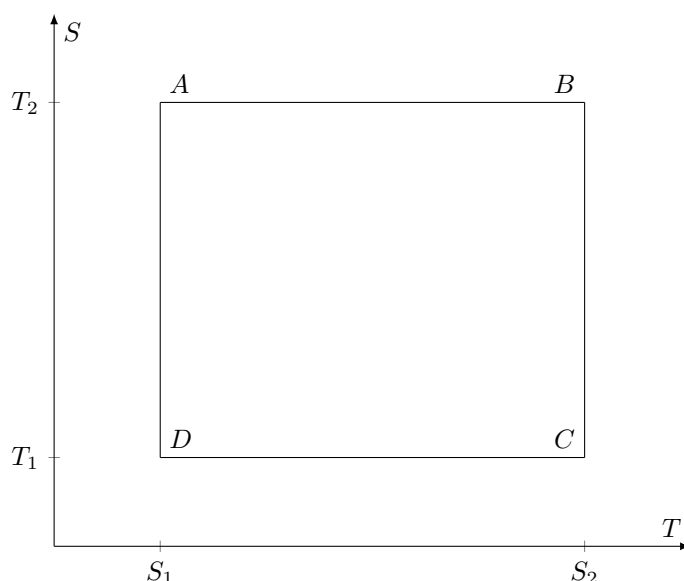
Visto che il risultato non dipende dal percorso scelto visto che $I_{Rev.}$ e $II_{Rev.}$ sono entrambi reversibili, allora la funzione primitiva dell'integrale $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ è una funzione di stato, la quale descrive il cambiamento di calore tra due stati A e B in un ciclo reversibile ad una data temperatura T . Questa funzione di stato è chiamata **entropia** e viene indicata con S , formalmente si ha che:

$$S|\Delta S_{A \rightarrow B} \stackrel{\text{def.}}{=} S_B - S_A = \int_{A, \text{Rev}}^B \frac{dQ}{T} \quad (6.2)$$

$$dS \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{Rev.}} \quad (6.3)$$

Notiamo come l'entropia non sia definita (al momento) come assoluta ma bensì solo come differenza di entropia tra due stati. Inoltre questa ha dimensionalità di $[S] = \left[\frac{E}{T}\right] = \frac{J}{K}$. Questa sta a significare che cedere una certa quantità di calore ad una certa temperatura **non** equivale all'opposto di assorbire la stessa quantità di calore ad una temperatura diversa.

Entropia e ciclo di Carnot Avendo definito l'entropia possiamo applicare questa nozione al ciclo di Carnot, possiamo dunque considerare il grafico T/S del ciclo di Carnot, in esso le due isoterme verranno rappresentate come rette orizzontali, mentre le due adiabatichie come rette verticali, in quanto nelle prime non avviene una variazione di temperatura, mentre nelle seconde non avviene una variazione di entropia in quanto non avviene scambio di calore.



Mentre nel grafico P/V l'area compresa tra le curve rappresenta il lavoro prodotto dalla macchina, nel grafico T/S l'area compresa tra le curve rappresenta il calore scambiato dalla macchina. Calcoliamo

dunque l'entropia scambiata dalla macchina durante il ciclo di Carnot, essa è data da:

$$\begin{aligned}\Delta S_o &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} \\ &= \Delta S_{AB} + 0 + \Delta S_{CD} + 0 \\ &= \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_C^D \frac{dQ}{T} + 0 \\ &= \int_A^B \frac{nR\mathcal{T}d[\ln V]}{\mathcal{T}} + \int_C^D \frac{nR\mathcal{T}d[\ln V]}{\mathcal{T}} \\ &= nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + nR \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \\ &= nR \left[\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \right]\end{aligned}$$

ma visto che $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$, e dunque $\frac{V_B}{V_A} = -\frac{V_D}{V_C}$, allora si ha che:

$$nR \left[\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \right] = 0$$

questo è indipendente dalla temperatura, quindi l'entropia scambiata dalla macchina durante il ciclo di Carnot è nulla, abbiamo quindi dimostrato che il ciclo di Carnot è un ciclo reversibile.

Entropia nei sistemi isolati Considerando un sistema isolato, esso non scambia calore con l'esterno, inoltre non scambia lavoro con l'esterno, quindi il suo stato non cambia al variare del tempo, quindi il suo stato è stazionario. Dato che il sistema universo è per eccellenza un sistema isolato, allora **l'entropia dell'universo non può diminuire** il che $\frac{dS_U}{dt} \geq 0$, quindi l'entropia nell'universo è positiva. Possiamo definire **l'entropia assoluta** di un sistema come: $S = k_B \ln[N_{pr}]$ dove N_{pr} è il numero di possibili realizzazioni del sistema considerato! In questo modo l'entropia è sempre positiva, inoltre l'entropia di un sistema isolato non può diminuire, quindi l'entropia di un sistema isolato è sempre crescente. Questo ci permette di stabilire quando il nostro universo è stato originato, visto che il tempo non è assoluto ma relativo all'osservatore.

Appendice A: Note delle lezioni

Di seguito sono riportate delle note delle lezioni ulteriori agli appunti stessi del corso.

A.1 24 febbraio 2025

Le tre regole del grafico orario:

- Il tempo non si ferma;
- Il tempo scorre sempre allo stesso, uniforme, modo per tutti;
- Non si può andare più veloce della luce (c), non possono esistere dunque rette con pendenza maggiore di c .
- Non esiste ancora il teletrasporto.

A.2 26 febbraio 2025

Si noti come lo scopo del problema non fosse strettamente quello di trovare il punto nel quale il punto si ferma, ma di capire come l'analisi dimensionale possa aiutarci a risolvere un problema fisico.

A.3 31 marzo 2025

La scrittura delle Sotto-Sezione 3.5 e il paragrafo riguardante l'energia potenziale della forza peso della Sotto-Sezione 3.4 non sono state scritte integrando gli appunti presi a lezione, ma interamente dal libro, ciò a causa di una mia impossibilità a prendere parte all'ultima parte della lezione svoltasi in data sopra indicata.