Appunti di Fisica

di:

Facchini Luca

Corso tenuto dal prof. Iuppa Roberto

Università degli Studi di Trento

A.A. 2024/2025

Autore:
FACCHINI Luca
Mat. 245965
Email:luca.facchini-1@studenti.unitn.it
luca@fc-software.it

Corso:
Fisica [145011]
CDL: Laurea Triennale in Informatica
Prof. IUPPA Roberto
Email: roberto.iuppa@unitn.it

Sommario

Appunti del corso di Reti, tenuto dal prof. Iuppa Roberto presso l'Università degli Studi di Trento. Corso seguito nell'anno accademico 2024/2025.

Indice

Parte I

Meccanica

Capitolo 1

Cinematica

Nel seguente capitolo andremo ad analizzare la cinematica, ovvero la branca della fisica che si occupa di descrivere il moto di un punto nello spazio. Per fare ciò andremo ad analizzare le grandezze fisiche che descrivono il moto di un punto nello spazio e come queste siano collegate tra loro.

1.1 Nozioni Preliminari

Sistema di riferimento Un sistema di riferimento è un insieme di regole che permettono di determinare la posizione di un punto nello spazio. Un sistema di riferimento è composto da un'origine, da un insieme di assi e da un'unità di misura. Definiamo un sistema di riferimento in quattro assi: x, y, z e t dove t rappresenta il tempo.

Definizione 1.1 (Spazio-Tempo Euclideo)**.** *Lo spazio-tempo euclideo (S) è un sistema di riferimento in quattro assi, x, y, z e t, dove t rappresenta il tempo. Lo spazio-tempo euclideo è definito come:*

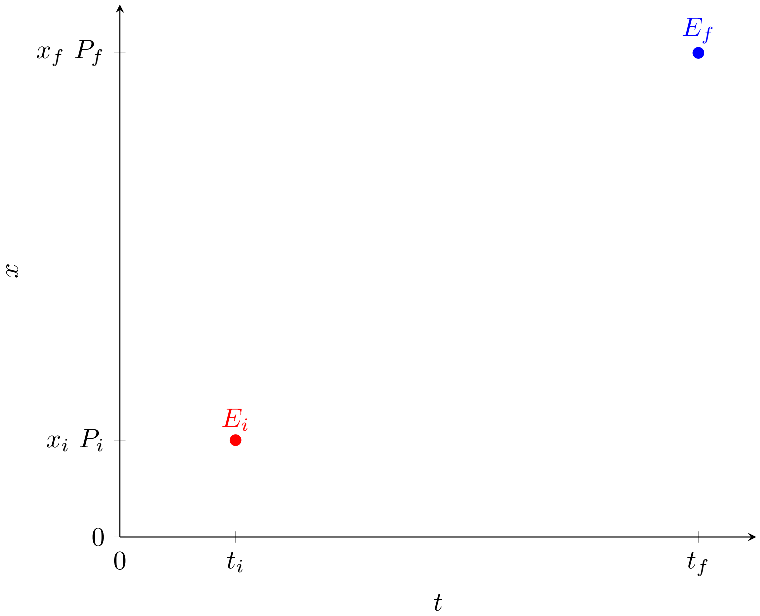
$$S(O_z, x, y, z; O_t, t)$$

dove O_z è l'origine degli assi spaziali e O_t è l'origine dell'asse temporale.

1.2 Moti in una dimensione e grafico orario

Per descrivere i moti in una dimensione possiamo utilizzare un grafico non affine, quindi non lineare, che rappresenta la posizione di un punto in funzione del tempo. Questo grafico è detto *grafico orario*.

Definizione 1.2 (Grafico Orario)**.** *Il grafico orario è un grafico cartesiano che esprime la posizione di un punto che si muove in una dimensione in funzione del tempo.*



Vediamo come al momento t_i il punto sia in posizione P_i e di verifica come l'evento E_i sia in posizione x_i. Al momento t_f il punto è in posizione P_f e l'evento E_f è in posizione x_f. Ora possiamo definite lo spostamento:

Definizione 1.3 (Spostamento)**.** *Lo spostamento è la variazione di posizione di un punto in un intervallo di tempo. Lo spostamento è definito come:*

$$S_{i\to f} = x_f - x_i$$
$$\Delta x_{i\to f} = x_f - x_i$$

Da notare come lo spostamento non descrive ne' la traiettoria ne' la distanza percorsa dal punto ma solo la variazione di posizione, infatti il punto potrebbe aver compiuto un percorso "non diretto". Inoltre nello spostamento ha un verso definito e come conseguenza scrivere $S_{i\to f} \neq S_{f\to i}$.

Definizione 1.4 (Distanza Percorsa)**.** *La distanza percorsa è la lunghezza della traiettoria percorsa da un punto in un intervallo di tempo. La distanza percorsa è definita come:*

$$d(P_i, P_f) = |x_f - x_i|$$

Notiamo come la distanza percorsa sia sempre positiva in quanto è la lunghezza della traiettoria percorsa dal punto. Inoltre la distanza percorsa non ha un verso definito, infatti $d(P_i, P_f) = d(P_f, P_i)$. Ora per descrivere il moto di un punto possiamo definire la velocità media:

Definizione 1.5 (Velocità media)**.** *La velocità media è la variazione di posizione di un punto in funzione del tempo. La velocità media è definita come:*

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{i\to f}}{\Delta t_{i\to f}}$$

Da notare come la velocità media non tiene conto del moto del punto in un intervallo di tempo, ma solo della variazione di posizione. Inoltre la velocità media ha un verso definito in quanto trattiamo lo spostamento (il quale ha un verso definito).
Per descrivere il moto di un punto in un instante t di tempo possiamo definire la velocità istantanea:

Definizione 1.6 (Velocità istantanea)**.** *La velocità istantanea è la variazione di posizione di un punto in un istante di tempo. La velocità istantanea è definita come:*

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Dal punto di vista matematico la velocità istantanea è la derivata della posizione rispetto al tempo. Dunque i punti dove si passa da un movimento "in avanti" ad un movimento "all'indietro" sono i punti in cui la velocità istantanea è nulla ovvero i punti di massimo e minimo della funzione posizione, inoltre

il punto in cui la velocità istantanea è nulla è detto punto di inversione. Inoltre la velocità istantanea è una funzione continua in quanto la derivata di una funzione continua è anch'essa continua.
È vero che in un determinato periodo di tempo io possa aumentare o diminuire la velocità, per questo motivo definiamo la funzione di accelerazione:

Definizione 1.7 (Accelerazione)**.** *L'accelerazione è la variazione di velocità di un punto in funzione del tempo. L'accelerazione è definita come:*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{i \to f}}{\Delta t_{i \to f}}$$

Da notare come l'accelerazione non tiene conto del moto del punto in un intervallo di tempo, ma solo della variazione di velocità. Inoltre l'accelerazione ha un verso definito in quanto trattiamo la variazione di velocità (la quale ha un verso definito).

Relazione tra posizione, velocità e accelerazione Come già detto la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo e l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, è vero inoltre che la posizione è l'integrale della velocità rispetto al tempo e questa è l'integrale dell'accelerazione rispetto al tempo. Dunque possiamo scrivere:

$$x(t) \text{ posizione} \tag{1.1}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ velocità} \tag{1.2}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ accelerazione} \tag{1.3}$$

Al contrario possiamo scrivere:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(T)dT \tag{1.4}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(T)dT = x_0 + \int_{t_0}^{t} dT \left[v_0 + \int_{t_0}^{T} a(\tau)d\tau \right] \tag{1.5}$$

Ora le dimensioni fisiche (e non le unità di misura) di queste grandezze sono:

$$[x] = [L]$$
$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right]$$
$$[a] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

ed le rispettive unità di misura sono:

$$[x] = [m]$$
$$[v] = \left[\frac{m}{s}\right]$$
$$[a] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

1.2.1 Esercizio sulle grandezze fisiche

Andiamo ora ad analizzare uno strumento importante per la risoluzione di esercizi fisici, ovvero l'analisi dimensionale. L'analisi dimensionale è uno strumento che ci permette di capire se un'equazione è corretta o meno e ci può suggerire come risolvere un problema. Vediamo un esempio:

Problema 1.1. *Sia un punto che si muove lungo un asse x in funzione del tempo t, questo al momento $t_0 = 0$ si trova al punto $x(t_0) = x(0) = x_0 = 0$ e la sua velocità in questo punto è $v(t_0) = v(0) = v_0 > 0$.*
La sua accelerazione è descritta dalla funzione $a(x) = -Ax - B$ con $A, B > 0$.
Determinare il momento in cui il punto si ferma(x_{stop})

Analizziamo l'equazione dell'accelerazione:

$$a(x) = -Ax - B$$

notiamo come questa abbia come dimensioni fisiche:

$$\begin{aligned} a(x) &= -Ax \qquad -B \\ \left[\frac{L}{T^2}\right] &= [?]\,[L] \quad -[?] \end{aligned}$$

da queste possiamo dedurre che A ha dimensioni fisiche $\left[\frac{1}{T^2}\right]$ e B ha dimensioni fisiche $\left[\frac{L}{T^2}\right]$. Ora l'equazione dello spazio in funzione del tempo è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Ax - B$$

dunque dobbiamo trovare una funzione $x(t)$ tale che soddisfi questa equazione differenziale, in quanto dobbiamo mantenere mantenere una funzione sullo spazio ed ottenere il parametro A all'esterno ipotizziamo che la funzione sia:

$$\begin{aligned} x(t) =& X_0 \sin\left(\sqrt{A}t + \varphi\right) = \\ =& \mathcal{A} \sin\left(\sqrt{A}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

Prima di calcolare le derivate di questa funzione verifichiamo che effettivamente questa funzione soddisfi la dimensionalità:

$$\begin{aligned} [x] &= [L] \\ [\mathcal{A}] &= [L] \\ \left[\sqrt{A}\right] &= \left[\frac{1}{T}\right] \\ [t] &= [T] \\ [\varphi] &= [1] \\ \left[\sqrt{A}t + \varphi\right] &= [1] \checkmark \\ [\mathcal{A}]\,[\sin([1])] &= [L] \checkmark \end{aligned}$$

ora verifichiamo che questa funzione soddisfi l'equazione differenziale, calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathcal{A}\sqrt{A} \cos\left(\sqrt{A}t + \varphi\right) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A \underbrace{\mathcal{A} \sin\left(\sqrt{A}t + \varphi\right)}_{x(t)} \end{aligned}$$

verifichiamo come anche queste derivate soddisfino la dimensionalità:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dt}\right] &\stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T}\right] \\ \left[\frac{L}{T}\right] &= [\mathcal{A}]\left[\sqrt{A}\right][\cos([1])] \\ \left[\frac{L}{T}\right] &= [L]\left[\frac{1}{T}\right][1] \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] &\stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T^2}\right] \\ \left[\frac{L}{T^2}\right] &= [A]\,[\mathcal{A}]\,[\sin([1])] \\ \left[\frac{L}{T^2}\right] &= \left[\frac{1}{T^2}\right][L]\,[1] \checkmark \end{aligned}$$

Dunque queste derivate soddisfano la dimensionalità, ma manca ancora il parametro $-B$ nell'equazione dell'accelerazione, dunque dobbiamo modificare la funzione $x(t)$ in modo che soddisfi anche questa condizione, partiamo dal fatto nella prima funzione possiamo aggiungere/sottrarre solo una quantità di dimensionalità $[L]$ e notiamo come in quanto $[B] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$ ed $[A] = \left[\frac{1}{T^2}\right]$ allora:

$$\left[\frac{B}{A}\right] = \left[\frac{\frac{L}{\cancel{T^2}}}{\frac{1}{\cancel{T^2}}}\right] = [L]$$

Dunque $\frac{B}{A}$ può essere aggiunto alla funzione $x(t)$ in quanto ha le stesse dimensioni fisiche di $x(t)$, dunque la funzione $x(t)$ diventa:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin\Big(\sqrt{A}t + \varphi\Big) - \frac{B}{A}$$

questo non comporta alcun cambiamento alle derivate in quanto queste sono in funzione di t ed A e B sono delle costanti. Possiamo però notare come la derivata seconda di questa può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= - A\left(\mathcal{A}\sin\Big(\sqrt{A}t + \varphi\Big)\right)\\ &= - A\left(x(t) + \frac{B}{A}\right)\\ &= - Ax(t) - B\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato la funzione $x(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale, verifichiamo che nel punto x_0 questa soddisfi le condizioni iniziali per la posizione e la velocità:

$$x(0) = \mathcal{A}\sin(\varphi) - \frac{B}{A} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v(0) = \mathcal{A}\sqrt{A}\cos(\varphi) > 0 \tag{1.7}$$

Per $\mathcal{A} > 0$ allora per 1.6 $\sin(\varphi) = \frac{B}{A\mathcal{A}}$ e per 1.7 $\cos(\varphi) > 0$ queste condizioni in aggiunta a quelle di $A, B > 0$ ci permettono di dire che

$$\begin{cases}\mathcal{A} > 0\\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

ora dobbiamo trovare il momento in cui il punto si ferma (x_{stop}), ovvero il momento in cui la velocità è nulla ($v(t_{\text{stop}}) = v_{\text{stop}} = 0$).

$$\begin{aligned}v(t_{\text{stop}}) =&\sqrt{A}\mathcal{A}\cos\Big(\sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi\Big) = 0\\ \sqrt{A}\mathcal{A} \neq 0 \Rightarrow& \cos\Big(\sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi\Big) = 0\\ \sqrt{A}t_{\text{stop}} + \varphi =& \frac{\pi}{2}\\ t_{\text{stop}} =& \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{1}{\sqrt{A}}\end{aligned}$$

ed al momento t_{stop} la posizione del punto è:

$$\begin{aligned}x_{\text{stop}} &= \mathcal{A}\sin\left[\cancel{\sqrt{A}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{A}}}\left(\frac{pi}{2} - \cancel{\varphi}\right) + \cancel{\varphi}\right] - \frac{B}{A}\\ &= \mathcal{A}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{B}{A}\\ &= \mathcal{A} - \frac{B}{A}\end{aligned}$$

Vedi A.2

1.2.2 Problema de "Il lancio del sasso" (M.R.U.A e M.R.U)

Questo classico problema viene usato per definire il Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato ed il Moto Rettilineo Uniforme

Problema 1.2. *Una coppia di amici vuole misurare l'altezza di un precipizio. Decidono di farlo lanciando un sasso verso il basso e misurando il tempo che impiega a raggiungere il fondo. Sappiamo che il tempo tra il rilascio del sasso grave*[1] *ed il rumore dell'impatto è di t_a secondi.*
Calcolare l'altezza del precipizio.

Avendo definito il sistema di riferimento con origine la cima del precipizio (dove sono gli amici) ed un verso "puntante" il fondo.
Il problema può essere diviso in due parti:

I Il moto del masso grave

II Il moto del suono

Mentre la prima parte è descritta da una accelerazione costante $a(t) = g$, una velocità iniziale nulla $v(0) = 0$, una posizione iniziale $x(0) = 0$ e una posizione finale $x(t_f) = x_f$. La seconda parte è descritta da una velocità costante $v(t) = v_s$ e una posizione iniziale $x(t) = x_f$ e una posizione finale $x(t) = 0$. Allora possiamo scrivere la posizione del masso grave come:

$$\begin{aligned}
a &= g \\
v(t) &= v_0 + \int_0^t a(T)dT \\
&= v_0 + gt \\
z(t) &= z_0 + \int_0^t v(T)dT \\
&= z_0 + \int_0^t (v_0 + gT)dT \\
&= \underbrace{z_0}_{0} + \underbrace{v_0}_{0} t + \frac{1}{2}gt^2 \\
&= \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

Da notare come tutto ciò può essere scritto solo se $t < t_f$ in quanto il masso non può andare oltre il fondo del precipizio.
Assumendo che il sasso venga lasciato perpendicolarmente al suolo allora possiamo scrivere la posizione del suono come:

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_s \\
z(t)|_{t>t_f} &= z_f + \int_{t_f}^t v_s dT \\
&= z_f + v_s(t - t_f)
\end{aligned}$$

A questo punto definendo come t_a il tempo tra il rilascio del sasso e l'impatto (amico), t_f come il tempo del fondo del precipizio e t_0 come il tempo di rilascio del sasso, e dunque definito che $\Delta t_a = \Delta t_{mg} + \Delta t_{ms}$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} Z_f = \frac{1}{2}gt_f^2 \\ \frac{1}{2}gt_f^2 - v_s(t_s - t_f) = 0 \end{cases} = \begin{cases} / \\ t_f^2 + 2\frac{v_s}{g}t_f - 2\frac{Z_f}{g} = 0 \end{cases}$$

Questa equazione di secondo grado ha come soluzione:

$$t_f = -\frac{v_s}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}}$$

la cui unica soluzione valida è:

$$t_f = -\frac{v_s}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}}$$

[1] Soggetto alla gravità

Questo è il tempo che impiega il sasso a raggiungere il fondo del precipizio, ora possiamo calcolare l'altezza del precipizio:

$$
\begin{aligned}
Z_f &= \frac{1}{2} g \left(-\frac{v_s}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} g \left(\frac{v_s}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} g \left(\frac{{v_s}^2}{g} - 2\frac{v_s}{g} \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g}} + \left(\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + 2\frac{Z_f}{g} \right) \right)
\end{aligned}
$$

1.2.3 Moto armonico

Il moto armonico è descritto dalla seguente funzione di posizione:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

dove:

- A è l'ampiezza del moto
- ω è la pulsazione del moto
- φ è la fase iniziale del moto

come conseguenza possiamo ricavare la posizione in funzione del tempo:

L	X
0	$A\sin(\varphi)$
$-\frac{\varphi}{\omega}$	$A\sin\left(\frac{\varphi}{\cancel{\varphi}}\cancel{\omega} - \varphi\right) = 0$
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$	A
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}$	0
$-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}$	$-A$

Tabella 1.1: Posizione in funzione del tempo del moto armonico

come possiamo notare dall'equazione di posizione in funzione del tempo il moto armonico è periodico con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.
Al variare del parametro φ (fase) il moto armonico può essere traslato lungo l'asse t, se invece è il parametro A (ampiezza) a variare il moto armonico può essere "allargato" o "restringo" lungo l'asse x, ovvero i massimi saranno A e i minimi $-A$. Infine se è il parametro ω (pulsazione) a variare il moto armonico può essere "allungato" o "accorciato" lungo l'asse t, ovvero la distanza (temporale) tra due massimi consecutivi sarà $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Derivate Come accennato la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

e l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Analisi dimensionale Possiamo notare come la funzione di posizione del moto armonico soddisfi la dimensionalità:

$$[A] = [x(t)] = [L]$$

$$[\omega t] = [1] \Rightarrow [w] = \left[\frac{1}{T}\right]$$

$$[\omega] = \left[\frac{1 \text{ radiante}}{\text{sec}}\right]$$

Problema 1.3 (1.26)**.** *In un moto armonico semplice, con pulsazione* $\omega = 1.55\ \frac{rad}{s}$ *e ampiezza* $A = 7\ cm$*, si osserva che al tempo* $t = 0$ *il punto si trova in posizione* $x(0) = 2.72\ cm$*.*
Calcolare:

a. la fase iniziale φ

b. il periodo d'oscillazione T

c. la velocità iniziale $v(0)$

Per prima calcoliamo la fase iniziale φ andando a sfruttare la posizione iniziale ed la legge di posizione del moto armonico:

$$\begin{aligned} x(0) &= A\sin(\varphi) \\ \frac{x(0)}{A} &= \sin(\varphi) \\ \arcsin\left(\frac{x(0)}{A}\right) &= \varphi \\ \arcsin\left(\frac{2.72}{7}\right) &= \varphi \\ \varphi &\approx 0.39 \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare il periodo d'oscillazione T andando a sfruttare la definizione di periodo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{1.55} \\ T &\approx 4.07 \text{ 4 secondi e spicci ~prof. Iuppa} \end{aligned}$$

Infine avendo calcolato la fase iniziale φ possiamo calcolare la velocità iniziale $v(0)$ andando ad utilizzare la derivata prima della posizione:

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{dx}{dt}(0) \\ &= A\omega\cos(\omega t + \varphi) \\ &= 7 \cdot 1.55\cos(0.39) \\ v(0) &\approx 10.5 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

1.3 Moti in due dimensioni

Andiamo ora ad analizzare i moti in due dimensioni, ovvero i moti di un punto nello spazio.

1.3.1 Vettori e definizioni

Per descrivere i moti in due dimensioni possiamo utilizzare i vettori, in particolare per descrivere come un punto si muove nello spazio in funzione del tempo usiamo il **vettore posizione**:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Definizione 1.8 (Vettore Posizione)**.** *Il vettore posizione* ($\vec{r}$) *è un vettore che descrive la posizione di un punto nello spazio in funzione del tempo, questo è un vettore di due dimensioni.*

Definiamo ora il **modulo** di un vettore:

Definizione 1.9 (Modulo di un vettore)**.** *Il modulo di un vettore* ($|\vec{v}|$) *è la lunghezza del vettore, ovvero la distanza tra l'origine e la coda del vettore. Questa è definita come:*

$$|\vec{v}|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

dove v_i *è la componente* i *del vettore ed* n *è la dimensione del vettore.*

Molto spesso sarà necessario avere un vettore di lunghezza unitaria, ovvero un vettore che ha modulo 1, ma che mantenga la direzione ed il verso del vettore originale, questo vettore è detto **versore**:

Definizione 1.10 (Versore)**.** *Il versore ($\hat{v}$) è un vettore di lunghezza unitaria che mantiene la direzione e il verso del vettore originale. Il versore è definito come:*

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ora possiamo definire le operazioni tra vettori:

Definizione 1.11 (Somma di vettori)**.** *La somma di due vettori ($\vec{v} + \vec{u}$) è un vettore che ha come componenti la somma delle componenti dei due vettori. La somma di due vettori è definita come:*

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{bmatrix}$$

Graficamente la somma di due vettori è la costruzione di un parallelogramma con i due vettori come lati, il vettore somma è la diagonale del parallelogramma. Questo lo possiamo fare grazie alla **regola de trasporto** ovvero la regola che ci permette di trasportare un vettore in un altro punto dello spazio mantenendo direzione e verso per poi sommarlo ad un altro vettore.

Definizione 1.12 (Prodotto scalare)**.** *Il prodotto scalare tra un vettore e uno scalare ($\vec{v} \cdot \alpha$) è un vettore che ha come componenti il prodotto delle componenti del vettore per lo scalare. Il prodotto scalare è definito come:*

$$\vec{v} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} v_x \alpha \\ v_y \alpha \end{bmatrix}$$

Questa operazione è usata per il calcolo del versore.

Definizione 1.13 (Angolo tra due vettori)**.** *L'angolo tra due vettori ($\vec{v}$ e $\vec{u}$) è l'angolo tra i due vettori, ovvero l'angolo tra i due versori. L'angolo tra due vettori è definito come:*

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|\,|\vec{u}|} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|\,|\vec{u}|}\right)$$

In questa definizione usiamo il prodotto scalare tra due vettori, questo prodotto è definito come:

Definizione 1.14 (Prodotto scalare)**.** *Il prodotto scalare tra due vettori ($\vec{v} \cdot \vec{u}$) è uno scalare che ha come valore la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori. Il prodotto scalare è definito come:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

dove v_i e u_i sono le componenti i dei due vettori ed n è la dimensione dei vettori.

Quando descriviamo il movimento del punto nello spazio possiamo descrivere il moto con il **raggio vettore**:

Definizione 1.15 (Raggio vettore)**.** *Il raggio vettore ($\vec{r}$) è un vettore che descrive la posizione di un punto nello spazio in funzione del tempo. Il raggio vettore è definito come:*

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x\hat{v}_x + y\hat{v}_y$$

Di conseguenza possiamo definire la velocità e l'accelerazione come:

Definizione 1.16 (Velocità)**.** *La velocità ($\vec{v}$) è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. La velocità è definita come:*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x\hat{v}_x + v_y\hat{v}_y$$

Definizione 1.17 (Accelerazione)**.** *L'accelerazione ($\vec{a}$) è la derivata della velocità rispetto al tempo. L'accelerazione è definita come:*

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = a_x\hat{v}_x + a_y\hat{v}_y$$

Anche per i vettori la posizione in funzione del tempo può essere scritta come l'integrale della velocità rispetto al tempo:

$$\rho(t) = \vec{\rho}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(T)dT$$

e la velocità in funzione del tempo può essere scritta come l'integrale dell'accelerazione rispetto al tempo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(T)dT$$

Coordinate Polari Le coordinate polari sono un sistema di coordinate che permette di descrivere un punto nello spazio con due coordinate: il raggio (ρ) e l'angolo (θ). Queste coordinate sono collegate alle coordinate cartesiane tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\sin(\theta) \end{aligned}$$

e le coordinate cartesiane sono collegate alle coordinate polari tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Per passare dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane usiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) \to \Big(\rho, \varphi) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big) \\ \vec{r}(x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \leftarrow (\rho, \varphi) \end{aligned}$$

Il vettore velocità può anche questo essere espresso in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho\cos(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\cos(\varphi) + \rho\left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi)\right) \\ &= \rho\cos(\varphi) - \rho(\sin\varphi)\varphi \\ \frac{d}{dt}(\rho\sin(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\sin(\varphi) + \rho\left(\frac{d}{dt}\sin(\varphi)\right) \\ &= \rho\sin(\varphi) + \rho(\cos\varphi)\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{v} = (\rho\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi), \rho\sin(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi))$$

A partire da questa possiamo calcolare l'accelerazione in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) + \rho\left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi)\right) - \rho\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)\sin(\varphi) - \rho\varphi\cos(\varphi) \\ &= \rho\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) - \rho\varphi\cos(\varphi) - \rho\varphi\cos(\varphi) \\ &= \rho\cos(\varphi) - 2\rho\varphi\sin(\varphi) - 2\rho\varphi\cos(\varphi) \\ \frac{d}{dt}(\rho\sin(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi)) &= \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\sin(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi) + \rho\left(\frac{d}{dt}\sin(\varphi)\right) + \rho\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) \\ &= \rho\sin(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) + \rho\varphi\cos(\varphi) \\ &= \rho\sin(\varphi) + 2\rho\varphi\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\rho\cos(\varphi) - 2\rho\varphi\sin(\varphi) - 2\rho\varphi\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi) + 2\rho\varphi\cos(\varphi) - \rho\varphi\sin(\varphi))$$

Tangente alla traiettoria

La tangente alla traiettoria è un vettore che ha come direzione la direzione della velocità in un punto della traiettoria, la quale è **sempre** tangente alla traiettoria in quel punto. Questo vettore è definito come:

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{dy}{\cancel{dt}}}{\frac{dx}{\cancel{dt}}} = y'(x)$$

La direzione viene espressa tramite il versore: $\hat{v}_t = \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{v}_t$

1.3.2 Accelerazione nel piano e ascissa curvilinea

Come per il moto in una dimensione l'accelerazione è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo, nel caso delle n dimensioni si verifica la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\vec{a} =& \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\vec{v}| \cdot \hat{v}_t\right) \\ =& \frac{d\,|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t + |\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v}_t}{dt}\end{aligned}$$

L'ultima parte di questa equazione, la quale corrisponde all'accelerazione, ci fà notare come nei moti su n dimensioni l'accelerazione non sia solo puramente correlata alla variazione della velocità: $\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t$ ma anche alla variazione della direzione della velocità: $|\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v}_t}{dt}$. Questa seconda parte dell'accelerazione è detta **accelerazione centripeta** che dipende dalla **velocità normale** e dalla **curvatura** della traiettoria. Definiamo quindi alcuni concetti che ci permettono di descrivere meglio il moto in due dimensioni:

Definizione 1.18 (Velocità radiale)**.** *La velocità radiale ($\vec{v_r}$) è la componente della velocità che è parallela al raggio vettore. La velocità radiale è definita come:*

$$\vec{v_r} = \vec{v} \cdot \hat{r}$$

Vettore rosso

Definizione 1.19 (Versore radiale)**.** *Il versore radiale ($\hat{r}$) è il versore che ha come direzione il raggio vettore. Il versore radiale è definito come:*

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Vettore verde

Definizione 1.20 (Versore tangente alla traiettoria)**.** *Il versore tangente alla traiettoria ($\hat{v}_t$) è il versore che ha come direzione la tangente alla traiettoria. Il versore tangente alla traiettoria è definito come:*

$$\hat{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,|\vec{v}|$$

*Questo descrive la direzione della **velocità tangenziale** in un punto della traiettoria. Vettore blu*

Definizione 1.21 (Versore tangente al versore radiale)**.** *Il versore tangente al versore radiale ($\hat{v_n}$) è il versore che ha come direzione la tangente al versore radiale. Il versore tangente al versore radiale è definito come:*

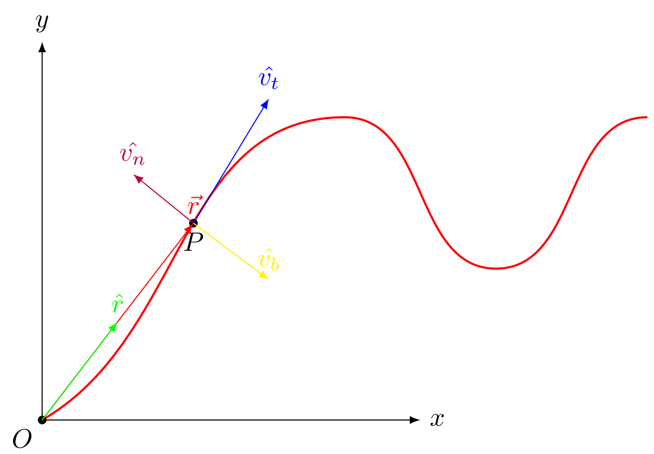
$$\hat{v_n} = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

*Questo descrive la direzione della **velocità normale** in un punto della traiettoria. Vettore viola*

Definizione 1.22 (Versore perpendicolare alla tangente della traiettoria)**.** *Il versore perpendicolare alla tangente della traiettoria ($\hat{v}_b$) è il versore che ha come direzione la perpendicolare alla tangente della traiettoria. Il versore perpendicolare alla tangente della traiettoria è definito come:*

$$\hat{v}_b = \hat{v}_t \times \hat{r}$$

*Questo descrive la direzione della **velocità perpendicolare** in un punto della traiettoria. Vettore giallo*



Dunque la **accelerazione tangenziale** in un punto è descritta dalla componente $\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}_t = \vec{a_t}$ mentre la **accelerazione normale** in un punto è descritta dalla componente $|\vec{v}| \cdot \frac{d\hat{v_t}}{dt} = \vec{a_n}$.

Ascissa curvilinea

L'ascissa curvilinea (s) è la derivata dello spazio sul tempo, ovvero approssimando per tratti infinitesimi la traiettoria come una circonferenza allora:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}|\vec{v}|$$

dove R è il **raggio di curvatura** il quale è definito come il raggio della circonferenza che meglio approssima la traiettoria in un punto.[2] Dunque in un punto da un punto della traiettoria possiamo ricavare l'accelerazione normale ed la velocità tangenziale.
Analizziamo la situazione nella quale l'accelerazione tangenziale è nulla, ovvero il modulo della velocità è costante ma la direzione cambia costantemente, in questo caso

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R}\hat{V}_n$$

Dunque v è costante, $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$ è costante e quindi R è costante, ovvero la traiettoria è una circonferenza.

1.3.3 Moto Circolare Uniforme (M.C.U.)

Nel moto circolare uniforme la velocità è costante, la direzione cambia costantemente e l'accelerazione è costante e diretta verso il centro della circonferenza. In questo moto viene definito il concetto di **velocità angolare**:

Definizione 1.23 (Velocità angolare)**.** *La velocità angolare (ω) è la velocità con la quale un punto si muove lungo la circonferenza. La velocità angolare è definita come:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

ne consegue che $ds = Rd\varphi$ e dunque $\omega = \frac{v}{R}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\omega = \frac{v}{R}$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v = \frac{v}{R} \Rightarrow v = R\omega$$

□

Il moto è descritto dalle seguenti equazioni che compongono il vettore posizione:

$$\begin{cases} x = R\cos(\varphi) = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\varphi) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

e dunque la velocità in quanto derivata della posizione rispetto al tempo è:

$$\begin{cases} v_x = -R\sin(\omega t)\cdot\omega = -R\omega\sin(\omega t) \\ v_y = R\cos(\omega t)\cdot\omega = R\omega\cos(\omega t) \end{cases}$$

e l'accelerazione in quanto derivata della velocità rispetto al tempo è:

$$\begin{cases} a_x = -R\omega\cos(\omega t)\cdot\omega = -R\omega^2\cos(\omega) \\ a_y = -R\omega\sin(\omega t)\cdot\omega = -R\omega^2\sin(\omega t) \end{cases}$$

Notiamo come le somme dei quadrati delle velocità $v_x^2 + v_y^2$ siano uguali al prodotto dei quadrati del raggio e della velocità angolare $R^2\omega^2$.

[2]Viene usata la lettera maiuscola R in quanto questo non può essere stabilito da noi ma dipende direttamente dalla traiettoria e dunque dal problema, si dice infatti che il centro della circonferenza è IMPOSTO dalla traiettoria.

Moto circolare uniforme come somma di moti armonici

Il moto circolare uniforme può essere descritto come la somma di due moti armonici ortogonali della stessa ampiezza e della stessa frequenza, infatti se:

$$\begin{cases}\varphi = \omega t \\ \rho = R\end{cases} \Rightarrow \vec{r} = R\begin{bmatrix}\cos(\omega t) \\ \sin(\omega t)\end{bmatrix}$$

[3]

1.3.4 Moto Parabolico

Anche il moto parabolico può essere descritto come la somma di due moti, in questo caso però viene sommato il moto rettilineo uniforme parallelo all'asse delle x con il moto uniformemente accelerato lungo l'asse delle y. Questo moto è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\vec{v} = \begin{cases}x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

entrambe dipendono dalla velocità iniziale la quale può essere divisa nelle sue componenti come:

$$\begin{cases}v_{0x} = |v_0|\cos(\alpha) \\ v_{0y} = |v_0|\sin(\alpha)\end{cases}$$

dove α è l'angolo che la velocità iniziale forma con l'asse delle x, ci redimo conto che ci basta conoscere la velocità iniziale e l'angolo per descrivere il moto parabolico.[4].
Scrivendo le equazioni del moto parabolico con la y in funzione del tempo possiamo ottenere la seguente equazione:

$$\begin{aligned}y =& v_{oy}\frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{ox}}\right)^2 \\ =& \underbrace{-\frac{g}{2v_{ox}^2}}_{a}x^2 + \underbrace{\frac{v_{oy}}{v_{ox}}}_{b}x + \underbrace{0}_{c}\end{aligned}$$

Questa è proprio l'equazione di una parabola, ora a sarà sempre minore di 0 a meno di un cambio del sistema di riferimento e dunque la parabola sarà sempre concava verso il basso [1].
Inoltre il $\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} y \to Indef$, ma il $\lim_{g\to 0} y \to$ M.R.U.[2], infine se la derivata prima della y fosse $= 0$ e dunque $2ax + b = 0$ allora:

$$\begin{aligned}x =& -\frac{b}{2a} \\ =& -\frac{\frac{v_{oy}}{\cancel{v_{ox}}}}{\frac{g}{v_{ox}^{\cancel{2}}}} \\ =& -\frac{v_{oy}v_{ox}}{g} \\ =& \frac{v^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} \\ =& \frac{v^2}{2g}\sin(2\alpha)\end{aligned}$$

Potrebbe essere utile la "gittata" [4] ovvero la distanza percorsa dal punto, questa la possiamo ricavare imponendo $y = 0$: ...

[3]Dimostrazione omessa
[4]Anche se nella realtà dovremmo considerare la resistenza dell'aria e la rotazione terrestre per la componente v_{0x}

Capitolo 2

Dinamica

Nel presente capitolo si analizzerà il moto di un corso a partire dai tre principi fondamentali della dinamica fino ad arrivare ad ...

2.1 I tre principi fondamentali

Andiamo ora ad enunciare i tre principi fondamentali della dinamica.

Legge 2.1 (Principio d'inerzia)**.** *In un sistema inerziale, mantiene il suo stato di moto rettilineo uniforme o quiete finché una forza esterna non agisce su questo*

Da notare come questa legge vale solo ed esclusivamente nel caso nel quale il sistema di riferimento sia inerziale. In caso contrario questo principio non si applica.

Legge 2.2 (Principio di Newton)**.** *L'accelerazione che un corpo riceve è legata a questo mediante una costante numerica* (m)

Quindi $\vec{a} = m\vec{F}$, spesso la constante m viene apposta al denominatore della formula, ottenendo $\vec{F} = m\vec{a}$. Questa è la forma più comune della legge di Newton, dove la forza (F) è uguale alla massa (m)[1], misurata in kg, per l'accelerazione (a) misurata in m/s^2.

Legge 2.3 (Principio di azione e reazione)**.** *La forza che un corpo A esercita sul corpo B è uguale alla forza che il corpo B esercita sul corpo A, ma di verso opposto.*

Questo principio è molto importante in quanto ci permette di capire come mai un corpo si muova. Infatti, se un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B eserciterà una forza uguale e di verso opposto su A, l'accelerazione d'altronde sarà diversa se le masse sono diverse.

Quantità di moto La quantità di moto è una grandezza vettoriale che descrive "quanto" movimento c'è in un sistema e dipende dalla massa e dalla velocità del corpo. È definito come segue:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Ad esempio se un corpo di massa $m = 100g$ viaggia a $v = 360km/h$ la sua quantità di moto sarà $|\vec{p}| = 0.1[kg] \cdot 100[m/s] = 10[kg \cdot m/s]$

Impulso L'impulso è una grandezza vettoriale che descrive "quanto" una forza agisce su un corpo in uno specifico istante/intervallo di tempo. È definito come segue:

$$\vec{J} = \vec{P_f} - \vec{P_i} = \Delta\vec{p} = m_f\vec{v_f} - m_i\vec{v_i}$$

In regime di conservazione della massa, allora $m_f = m_i$ e quindi $\vec{J} = m\vec{v_f} - m\vec{v_i} = m(\vec{v_f} - \vec{v_i}) = m\vec{\Delta v}$ dove $\vec{\Delta v}$ è la variazione di velocità del corpo.
Inoltre visto il secondo principio (2.2) possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

[1] Sempre positiva

Questo è anche scrivibile usando la notazione:

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

in questo caso $\vec{J} = \vec{F_{\text{imp}}}\Delta t$ dove $\vec{F_{\text{imp}}}$ è la forza impulsiva, in quanto stiamo trattando di un intervallo di tempo finito e non un infinitesimo.

Forza risultante La forza risultante è definita come la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su un corpo.

$$\vec{F_{1\to c}} + \vec{F_{2\to c}} + \cdots + \vec{F_{N\to c}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_{i\to c}} = \vec{R_{\text{c}}}$$

Dove $\vec{R_{\text{c}}}$ è la forza risultante che agisce sul corpo c, mentre $\vec{F_{i\to c}}$ è la forza che il corpo i esercita sul corpo c.
Se un corpo fosse in quiete ovvero $\vec{S_i} = \vec{S_f}$ dunque $\vec{v_i} = \vec{v_f} = 0$ allora $\vec{a_{tot}} = \vec{0}$ e quindi $\vec{R_{\text{c}}} = \vec{0}$.

2.2 Specificazione delle forze

Reazione vincolare La reazione vincolare ($\vec{N}$) è la forza che un corpo esercita su un altro corpo per impedirne il moto. Questa forza è sempre perpendicolare alla superficie di contatto tra i due corpi e diretta verso l'interno del corpo. Questa forza è sempre uguale e di verso opposto alla componente normale della forza peso. Questa forza è detta vincolare in quanto è una forza che impedisce il moto del corpo.

Forza Peso La forza peso è la forza che la Terra esercita su un corpo, questa dipende direttamente dalla massa del corpo e dalla costante gravitazionale terrestre $g = 9.81[m/s^2]$. La forza peso è definita come segue:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Dunque: $\vec{F} = m_I\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ possiamo semplificare la massa inerziale con la massa gravitazionale in quando la forza che la terra esercita sulla massa $\vec{F_{M\to m}} = -\frac{q_{12}q_{21}}{r_{12}^2}\hat{r_{12}}G$ dove G è la costante gravitazionale universale. La formula appena scritta è la formula generale con q_{12} e q_{21} che sono le cariche dei due corpi (quanto un corpo è propenso a partecipare ad una interazione) e r_{12} è la distanza tra i due corpi. Nel caso della forza peso $q_{12}q_{21} = m \cdot M$ dove M è la massa della terra e m è la massa del corpo. Dunque la formula diventa:

$$\vec{F_{M\to m}} = -\frac{m \cdot M}{r^2}\hat{r}G$$

ora la distanza tra i due corpi è la somma dei raggi dei due corpi, quindi $r = R_{\text{terra}} + h$ dove R_{terra} è il raggio della terra e h è l'altezza del corpo rispetto al suolo, dato che queste due grandezze sono molto diverse ed h è molto piccolo rispetto a R_{terra} possiamo approssimare $r \approx R_T$ e quindi la formula diventa:

$$\vec{F_{M\to m}} = -\frac{m \cdot M}{R^2}\hat{r}G$$

e quindi

$$\vec{F_{M\to m}} = -m\left(\frac{GM}{R^2}\right)\hat{r} = -m\vec{g}$$

In quanto questa è una forza allora in un sistema inerziale vale che $\vec{F} = m\vec{a}$ e quindi $m_I\vec{a} = -m\vec{g} \Rightarrow m_I = m$

Forza Elastica La forza elastica è la forza che un corpo elastico esercita su un corpo che lo comprime o lo allunga. Questa forza è definita come segue:

$$\vec{F_{\text{el}}} = -k\vec{x} = \quad -k(\vec{x_f} - \vec{x_e}q)$$

Dove k è la costante elastica del corpo e $\vec{x}$ è la deformazione del corpo rispetto alla posizione di equilibrio ($\vec{x_{eq}}$). Questa forza è sempre diretta verso la posizione di equilibrio del corpo, dunque se il corpo è compresso la forza sarà diretta verso l'esterno, se il corpo è allungato la forza sarà diretta verso l'interno, in ogni caso il segno meno viene apposto in quanto è in opposizione alla deformazione.

Forza di Attrito La forza di attrito è la forza che si oppone al moto di un corpo su una superficie. Questa forza è definita come segue:

$$\vec{F_{\text{att}}} = -\mu_s |\vec{N}| \cdot \hat{d}$$

Dove μ_s è il coefficiente di attrito statico, $\vec{N}$ è la reazione vincolare (della quale ne consideriamo il modulo) e $\hat{d}$ è il versore della direzione del moto (dove il segno meno indica che la forza è in opposizione al moto).

2.2.1 Reazione Vincolare

Un corpo soggetto alla'azione di una forza, o della risultante non nulla di più forze, rimane fermo allora l'ambiente circostante provoca su quel corpo una forza uguale e di verso opposto alla risultante delle forze che agiscono su di esso, questo in quanto vale la terza legge di Newton. Questa forza è detta **reazione vincolare** nel caso di un corpo appoggiato su una superficie piana, la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie di appoggio e diretta verso l'interno del corpo, opponendosi alla forza peso. La reazione vincolare si indica con $\vec{N}$ e se il corpo è in quiete allora $\vec{R} = \vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$.

Senzazione di peso

La reazione vincolare esercitata da un corpo, verso un altro corpo, (come un pavimento su una persona) è uguale e di verso opposto alla forza peso. È questa forza che dà la "sensazione di peso" e non la forza peso (P) in se. Quindi nel caso di un corpo grave appoggiato su una piattaforma orizzontale la quale si muove con accelerazione a allora finché il corpo è appoggiato sulla piattaforma la reazione vincolare sarà $N + P = m \cdot a$, ovvero $N + m \cdot g = m \cdot a$ e quindi $N = m \cdot (a - g)$.
Questo comporta quattro situazioni differenti:

1. a è discorde con g e (piattaforma accelera verso l'alto) N è maggiore di P e quindi la persona avrà la sensazione di peso maggiore.

2. a è concorde con g e (piattaforma accelera verso il basso) N è minore di P e quindi la persona avrà la sensazione di peso minore.

3. a è concorde e coincide esattamente con g allora $N = P$ e quindi la persona avrà la sensazione di assenza di peso.

4. a è concorde con g allora l'accelerazione sarà così elevata che il corpo "non riesce a stare dietro" e quindi ci sarà un distacco tra il corpo e la piattaforma.

2.2.2 Forza di attrito radente

Sperimentalmente si può osservare come se si provi a spingere una massa m su un piano orizzontale, questa non si muoverà per la forza F che si sta esercitando su di essa, ma si muoverà solo nel momento nel quale il modulo della forza F supera un certo valore ($\mu_S N$), il coefficiente mu_S è il coefficiente di attrito statico e questo è dipendente dalle due superfici che si stanno sfregando. Dunque:

$$\begin{cases} F \leq \mu_S N & \text{condizione di quiete} \\ F > \mu_S N & \text{condizione di moto} \end{cases}$$

Nel caso in cui il corpo non si muova, la forza di attrito sarà uguale alla forza che si sta esercitando sul corpo, in quanto il corpo non si muove e quindi la forza risultante è nulla. Dunque $F = \mu_S N$ e quindi $N = \frac{F}{\mu_S}$, inoltre la forza di attrito è sempre diretta in opposizione al moto e quindi:

$$R + F + P = 0$$

Chiamiamo $A_{\max}$ il valore massimo di F che possiamo esercitare sul corpo affinché questo non si muova, allora $A_{\max} = \mu_S N$, dove N è la reazione vincolare normale al piano. Possiamo quindi disegnare un grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata:

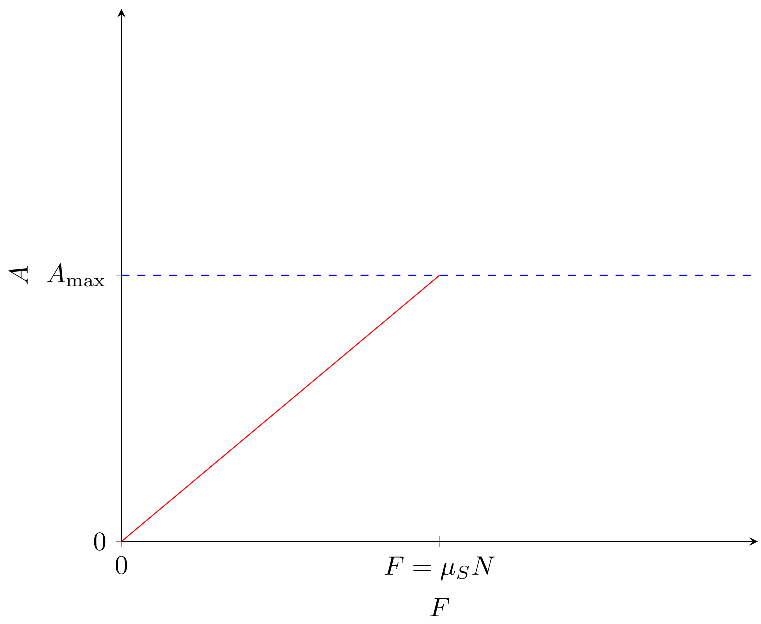


Figura 2.1: Grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata

In figura 2.1 possiamo vedere come la forza di attrito sia uguale alla forza applicata fino a quando questa non supera il valore massimo di attrito statico, in quel momento il corpo inizia a muoversi, quando questo accade continua ad esserci attrito ma il corpo si muove e quindi la forza di attrito diventa dinamica.
La forza che si oppone al movimento di un corpo mentre questo si muove su una superficie è detta forza di attrito radente dinamico, questa forza è definita come segue:

$$F_{\mathrm{ad}} = -\mu_d N = ma$$

Dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico, N è la reazione vincolare. Dalla definizione notiamo come la forza di attrito dinamico sia sempre diretta in opposizione al moto ed non è affetta dalla velocità del corpo, possiamo quindi aggiungere al grafico della Figura 2.1 la forza di attrito dinamico:

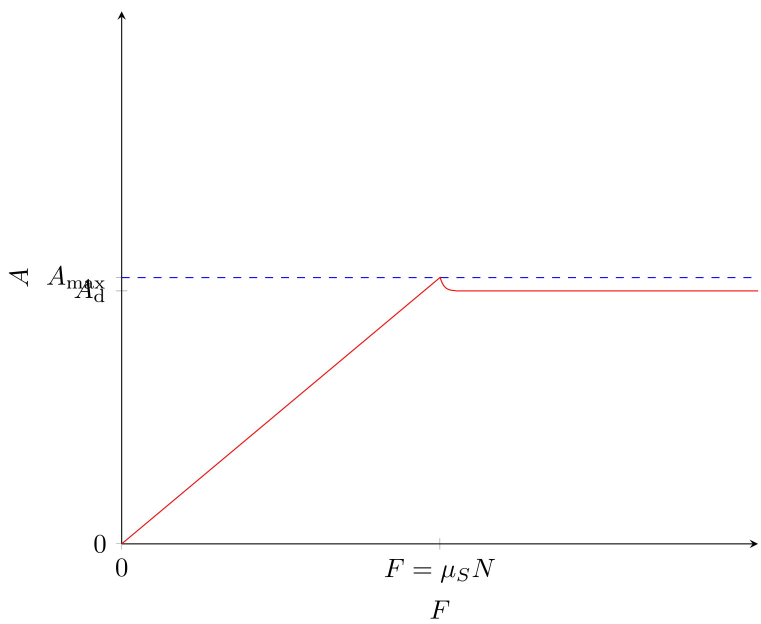


Figura 2.2: Grafico della forza di attrito in funzione della forza applicata

Notiamo come il valore di A_{d} sia minore di $A_{\max}$ in è vero per ogni superficie che il coefficiente di attrito dinamico sia minore di quello statico ($\mu_d < \mu_S$), altrimenti il corpo non si muoverebbe.

2.2.3 Piano Inclinato

Se prendiamo in considerazione un corpo di massa m assimilabile ad un punto materiale e soggetto alle forze peso, reazione vincolare e forza di attrito radente, se questo è appoggiato su una superficie inclinata di angolo θ rispetto all'orizzontale, allora se è la sola forza peso che agisce sul corpo, allora possiamo scrivere la seguente equazione:

$$P + R = m \cdot a$$

Dove P è la forza peso, R è la reazione vincolare e a è l'accelerazione del corpo, la reazione vincolare agisce solo nella direzione normale alla superficie, quindi possiamo scomporre questo come:

$$\begin{cases} -mg\cos\theta + N = 0 & \text{direzione normale} \\ -mg\sin\theta = m \cdot a & \text{direzione parallela} \end{cases}$$

Da queste due equazioni possiamo notare come tutta l'eventuale accelerazione del corpo sia diretta lungo la superficie inclinata.[2]

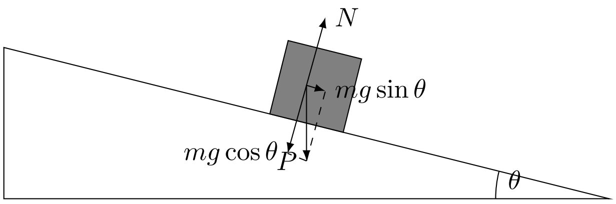


Figura 2.3: Forze che agiscono su un corpo su un piano inclinato

Ora, prendendo in considerazione anche la forza di attrito radente, distinguiamo due principali casi:

- Il corpo è in stasi rispetto al piano inclinato
- Il corpo sta scendendo (frenato) rispetto al piano inclinato

Nel primo caso ciò significa che la forza di attrito statico è uguale alla componente parallela della forza peso, quindi $F_{\text{att}} = \mu_S N = mg\sin\theta$ ed inoltre questa non eccede il valore massimo di attrito statico, quindi $\mu_S N \leq \mu_S mg\cos\theta$, dunque $mg\sin\theta = \mu_S mg\cos\theta$ e quindi $mg(\sin\theta - \mu_S\cos\theta) = 0$ e quindi $\mu_S \geq \tan\theta$.
Nel secondo caso, il corpo sta scendendo rispetto al piano inclinato, quindi viene esercitata una forza di attrito dinamico, questa forza è minore della componente parallela della forza peso, il corpo scende con accelerazione a e quindi $mg\sin\theta - F_{\text{att}} = m \cdot a$ e quindi $mg\sin\theta - \mu_d N = m \cdot a$ e quindi $mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = m \cdot a$ e quindi $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$.

2.2.4 Forza Elastica - senza attrito

Se prendiamo in considerazione un corpo di massa m ancorato ad una molla la quale a sua volta è ancorata ad un muro, allora quando il corpo viene allontanato dalla posizione di equilibrio della molla, questa eserciterà una forza elastica sul corpo, questa forza è definita come segue:

$$\vec{F} = -k\vec{x} = m\vec{a} \Rightarrow -k\vec{x} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Dove k è la costante elastica della molla, $\vec{x}$ è la deformazione della molla rispetto alla posizione di equilibrio e $\vec{a}$ è l'accelerazione del corpo secondo la seconda legge di Newton. La forza elastica è sempre diretta verso la posizione di equilibrio della molla, quindi se il corpo è compresso la forza sarà diretta verso l'esterno, se il corpo è allungato la forza sarà diretta verso l'interno, in ogni caso il segno meno viene apposto in quanto è in opposizione alla deformazione.

[2]Ancora non abbiamo preso in considerazione la forza di attrito radente

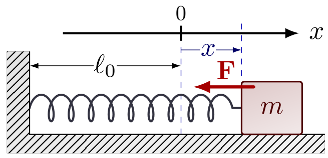


Figura 2.4: Diagramma di un corpo su una molla senza attrito

Dall'ultima equazione possiamo notare come questa possa essere scritta come:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x} \Rightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{x} = 0$$

Dal quale possiamo definire ω ovvero "la pulsazione" come:

$$\omega^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1}$$

Inoltre in quando $\vec{x} = x\hat{x}$ ed il verso $(\hat{x})$ è costante, possiamo scrivere:

$$\vec{x} \longrightarrow x \tag{2.2}$$

Ora viste le due equazioni (2.1) e (2.2) possiamo scrivere:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale del moto armonico semplice, la quale ha come soluzione:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Abbiamo già incontrato i parametri A e ϕ quando abbiamo parlato di moto armonico semplice, questi hanno lo stesso ruolo in questo caso, ovvero A è l'ampiezza del moto e ϕ è la fase iniziale del moto. Questo moto ci suggerisce che, in assenza di attrito, la molla non termina mai il suo moto, ma continua a vibrare indefinitamente con una frequenza angolare ω e un'ampiezza A, che è la distanza massima dalla posizione di equilibrio.

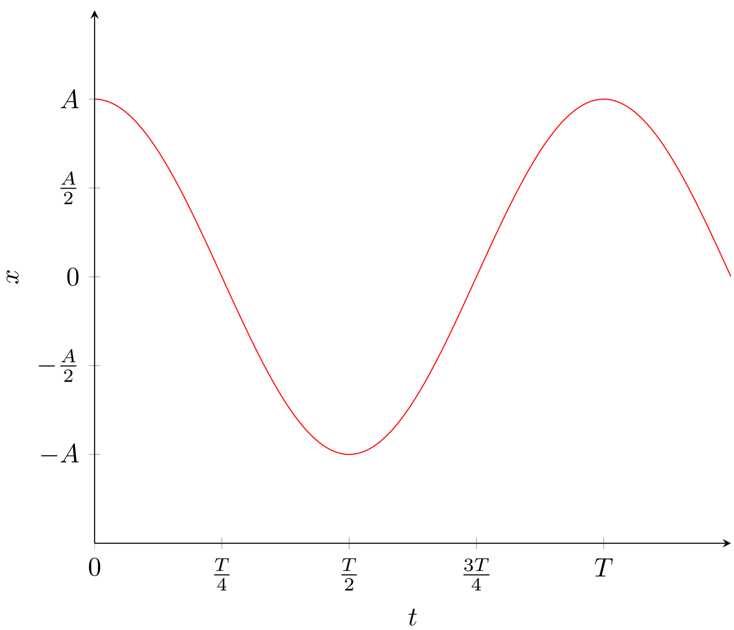


Figura 2.5: Grafico del moto armonico semplice

In figura 2.5 possiamo vedere il grafico del moto armonico semplice, dove A è l'ampiezza del moto e T è il periodo del moto. Vista l'equazione del moto il parametro A è calcolato come:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Dove x_0 è la posizione iniziale del corpo e v_0 è la velocità iniziale del corpo, se questo è in quiete allora $v_0 = 0$ e quindi $A = x_0$.

2.2.5 Moto del pendolo

Per come viene affrontato il moto del pendolo all'interno di questo corso si considerino le seguenti ipotesi:

- Non sono presenti attriti nel filo
- Il filo è inestensibile
- Il filo non ha massa
- La massa del pendolo è concentrata in un punto materiale
- Il pendolo non è soggetto alla resistenza dell'aria
- Il pendolo è situato nel vuoto
- Il pendolo è soggetto alla forza di gravità costante (g) e uniforme

Una volta definite queste ipotesi possiamo passare a definire il moto del pendolo. Il pendolo è un sistema composto da una massa m appesa ad un filo di lunghezza L, il quale è fissato ad un punto di sospensione. Se il pendolo è in quiete, la forza peso P agisce verticalmente verso il basso e la reazione vincolare N agisce lungo il filo.

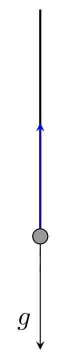


Figura 2.6: Schema delle forze che agiscono su un pendolo sulla verticale

Se invece il pendolo è in movimento, la forza peso P agisce comunque verso il basso, la tensione del filo T_f agisce lungo questo ed il pendolo è in movimento dunque per la seconda legge di Newton possiamo scrivere:

$$P + T_f = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g + T_f = m \cdot a$$

Possiamo scomporre le forze in due componenti, una normale alla direzione del pendolo e una parallela alla direzione del pendolo, in questo modo possiamo scrivere:

$$\begin{array}{rll} N: & -T_f + P_\perp & = 0 \\ \tau: & -P_\parallel & = m \cdot a_\tau \end{array} = \begin{cases} -T_f + m \cdot g \cdot \cos\theta & = 0 \\ \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\theta & = \cancel{m} \cdot a_\tau \end{cases} = \begin{cases} T_f & = m \cdot g \cdot \cos\theta \\ a_\tau & = g \cdot \sin\theta \end{cases}$$

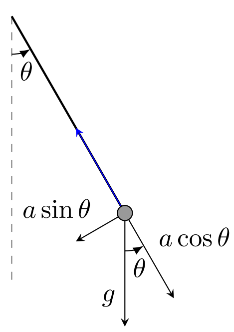


Figura 2.7: Schema delle forze che agiscono su un pendolo non sulla verticale

Dunque la tensione del filo al momento del rilascio del pendolo è uguale alla componente normale della forza peso, mentre l'accelerazione tangenziale è uguale alla componente tangenziale della forza peso. Queste però valgono solo se il pendolo è appena stato rilasciato, infatti nel momento in cui il pendolo inizia a muoversi esiste una "forza di richiamo" che "tenta" di riportare il pendolo alla posizione di equilibrio, questa forza, a differenza della molla, non ha una direzione costante, ma cambia in funzione dell'angolo θ e della lunghezza del pendolo L. Dunque nei momenti successivi al rilascio del pendolo, possiamo scomporre le forze come:

$$\left\{ -T + P_{\perp} = m \cdot a_n P_{\parallel} \quad = m \cdot a_\tau \Rightarrow \begin{cases} -T + m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot a_n \\ m \cdot g \cdot \sin\theta = m \cdot a_\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{T}{m} + g \cdot \cos\theta = a_n \\ g \cdot \sin\theta = a_\tau \end{cases} \right.$$

Per esprimere la forza di richiamo in funzione dell'angolo θ e della lunghezza del pendolo L, possiamo scrivere:

$$a_t = \frac{Rd^2\theta}{dt^2} = \frac{ld^2v}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{l} = \frac{1}{l}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{l}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{l^{\cancel{2}}}{\cancel{l}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Invertendo opportunamente i versi del sistema di riferimento possiamo scrivere:

$$\left\{ T_f - P_{\perp} = ma_n = m\frac{v^2}{l} - P_{\parallel} = ma_\tau = m\frac{d^2\theta}{dt^2} \right.$$

Ora come visto in precedenza la tensione del filo dipende dall'angolo θ, $\tau(\theta) = mg\cos\theta + m\frac{v^2(\theta)}{l}$ dunque possiamo scrivere:

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Il che significa che la massa del pendolo non influisce sul moto del pendolo, ma solo la lunghezza del pendolo e l'accelerazione di gravità. Questa è l'equazione differenziale del moto armonico semplice, la quale ha come soluzione:

$$\ddot{v} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Ora risolvere per ogni valore di θ è difficile!

Piccole oscillazioni

Prendiamo ora in considerazione un angolo θ molto piccolo ($\theta \ll 1$), in questa situazione vale che:

$$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$$

per lo sviluppo in serie di Taylor vale che:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5)$$

Si hanno correzioni nell'ordine di θ^3, ma per θ molto piccolo ($\theta = 0.17 \Rightarrow \theta^3 = 0.005$) possiamo considerare $\sin\theta \approx \theta$, quindi possiamo scrivere:

$$\ddot{v} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{v} + \omega\theta = 0$$

Dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ è la pulsazione del pendolo. Questa ci dice che per θ molto piccolo il periodo non dipende dall'angolo θ, ma solo dalla lunghezza del pendolo e dall'accelerazione di gravità, dunque siamo in situazione di **ISOCRONISMO**.

Capitolo 3

Lavoro, Energia e Momenti

L'obbiettivo di questo capitolo è quello di definire il lavoro e l'energia, e di stabilire la loro relazione, andando anche ad analizzare il concetto di momento ed analizzando alcuni esempi pratici e problemi di fisica.

3.1 Lavoro

Il lavoro W è definito come l'integrale in un certo percorso γ nel quale la forza $\vec{F}$ agisce su un corpo di massa m:

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{3.1}$$

dove $d\vec{l}$ è un elemento infinitesimo del percorso γ e $\cdot$ indica il prodotto scalare. Il lavoro è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della direzione della forza rispetto al movimento del corpo.
Prendiamo in considerazione una forza $\vec{F}$ applicata nella direzione d di un corpo di massa m appoggiato su un piano orizzontale, e che si muove di una distanza d lungo la direzione della forza. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è dato da:

$$\begin{aligned} W_{Fd} &= \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_\gamma F\hat{x} \cdot (dx\hat{x}) \\ &= \int_0^d F dx \\ &= Fd \qquad [N \cdot m] = [J] \end{aligned}$$

dove F è la forza applicata, d è la distanza percorsa dal corpo e $\hat{x}$ è il versore della direzione della forza. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è quindi dato dal prodotto della forza per la distanza percorsa dal corpo nella direzione della forza.
Ora se la forza applicata non fosse parallela alla direzione del movimento, ma formasse un angolo θ con la direzione del movimento, il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ sarebbe dato da:

$$\begin{aligned} W_{Fd} &= \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_\gamma F\hat{l} \cdot (d\vec{x}) \\ &= Fd(\hat{l} \cdot \hat{x}) \\ &= Fd\cos(\theta) \end{aligned}$$

Da questa ultima possiamo distinguere tre casi:

- $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta > 0$ Allora $W_{Fd} > 0$ e la forza $\vec{F}$ compie **Lavoro Motore** sul corpo.
- $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0$ Allora $W_{Fd} = 0$ e la forza $\vec{F}$ non compie lavoro sul corpo.
- $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \cos\theta < 0$ Allora $W_{Fd} < 0$ e la forza $\vec{F}$ compie **Lavoro Frenante** sul corpo.

Problema 1 - Massa che scivola su un piano inclinato

Consideriamo una massa m che scivola su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale.
In questo caso la forza peso $\vec{P}$ esegue un lavoro positivo sulla massa, non consideriamo al momento l'attrito, quindi la forza peso che spinge la massa lungo il piano inclinato è data da:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

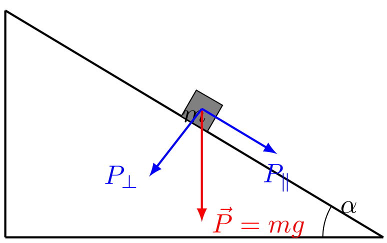
ma in quanto l'asse z sul quale è applicata la forza peso e misurata l'altezza h forma un angolo $\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{pi}{2} + \alpha$ con l'asse x, il l'infinitesimo lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{P}$ è dato da:

$$\begin{aligned} dw =& F_P \cdot \hat{l} \\ =& - mg\hat{z} \cdot (di \cdot \hat{i}) \\ =& - mg\ di\ \hat{z} \cdot \hat{i} \\ =& - mg\ di\ \cos(\theta) \\ =& + mg\ di\ \sin(\alpha) \\ =& P_{\|} di \end{aligned}$$

dove $P_{\|}$ è la componente della forza peso $\vec{P}$ lungo il piano inclinato. Dunque il lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{P}$ è dato da:

$$\begin{aligned} W_P =& \int_\gamma P_{\|} dw \\ =& mg \sin(\alpha) L \\ =& mgh \end{aligned}$$

dove L è la lunghezza del piano inclinato e h è l'altezza della massa rispetto al piano orizzontale, abbiamo sostituito L con h in quanto la lunghezza del piano inclinato moltiplicata per il seno dell'angolo α, che è l'opposto del triangolo rettangolo, è uguale all'altezza h della massa rispetto al piano orizzontale. Quindi il lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{P}$ sulla massa m è dato dal prodotto della forza peso per l'altezza della massa rispetto al piano orizzontale, dunque il lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{P}$ sulla massa m è indipendente dall'angolo α del piano inclinato, ma dipende esclusivamente dall'altezza h della massa rispetto al piano orizzontale.



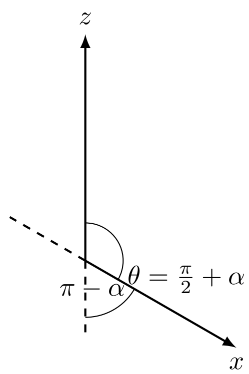


Figura 3.1: Massa su piano inclinato e rappresentazione del sistema di riferimento.

Problema 2 - Massa su piano inclinato con attrito

Consideriamo una massa m che scivola su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale, e che è soggetta ad un attrito dinamico di coefficiente μ_d.
In questo caso la forza peso $\vec{P}$ esegue un lavoro positivo sulla massa, mentre la forza di attrito $\vec{F}_{attr}$ esegue un lavoro negativo sulla massa. La forza di attrito è data da:

$$\vec{A_d} = -\mu_d \left|\vec{N}\right| \hat{v}$$

dove $\vec{N}$ è la forza normale, che in questo caso è data dalla componente della forza peso $\vec{P}$ perpendicolare al piano inclinato, e $\hat{v}$ è il versore della direzione del movimento della massa. L'infinitesimo lavoro compiuto dalla forza di attrito $\vec{A_d}$ è dato da:

$$
\begin{aligned}
dw =& F_{A_d} \cdot d\hat{l} \\
=& -\mu_d \left|\vec{N}\right| \hat{v} \cdot (dl \cdot \hat{v}) \\
=& -\mu_d mg\cos(\alpha) dl
\end{aligned}
$$

dove dl è l'infinitesimo spostamento della massa lungo il piano inclinato. Dunque il lavoro compiuto dalla forza di attrito W_{A_d} è dato da:

$$
\begin{aligned}
W_{A_d} =& \int_\gamma A_d dw \\
=& -\mu_d mg\cos(\alpha) \int_0^L dl \\
=& -\mu_d mg\cos(\alpha) L
\end{aligned}
$$

dove L è la lunghezza del piano inclinato. Quindi il lavoro compiuto dalla forza di attrito $\vec{A_d}$ sulla massa m è dato dal prodotto della forza di attrito per la lunghezza del piano inclinato, dunque il lavoro compiuto dalla forza di attrito $\vec{A_d}$ sulla massa m è dipendente, al contrario della forza peso $\vec{P}$, dall'angolo α del piano inclinato.

3.2 Teorema delle forze vive

Il teorema delle forze vive, nei sistemi inerziali, afferma che la somma dei lavori compiuti dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso. In formula:

$$
\sum W_i = \Delta K \tag{3.2}
$$

Questo è dimostrabile in quanto

$$
\begin{aligned}
\vec{F} =& m\vec{a} && \text{Seconda Legge di Newton} \\
=& m\frac{d\vec{v}}{dt} && \text{Definizione di accelerazione} \\
\vec{F}d\vec{s} =& m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} \\
=& m(d\vec{v})\frac{d\vec{s}}{dt} \\
=& m(d\vec{v})\vec{v}
\end{aligned}
$$

dunque da questa otteniamo che la somma delle forze agenti su un corpo moltiplicata per l'infinitesimo spostamento del corpo è uguale alla variazione della velocità del corpo moltiplicata per la velocità del corpo stesso. Possiamo però esprimere $\vec{v}d\vec{v}$ come:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}d\vec{v} =& v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \\
=& d\left[\frac{v_x^2}{2}\right] + d\left[\frac{v_y^2}{2}\right] + d\left[\frac{v_z^2}{2}\right] \\
=& \frac{1}{2}d\left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right] \\
=& \frac{1}{2}d\left[v^2\right]
\end{aligned}
$$

andando quindi a unire le due equazioni otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\vec{F}d\vec{s} =& \frac{1}{2}md\left[v^2\right] \\
&\downarrow \quad \text{Integrando} \\
\int_i^f dw =& \int_i^f \frac{1}{2}md\left[v^2\right]
\end{aligned}
$$

e dunque per descrivere il lavoro esercitato su un corpo da una forza $\vec{F}$ dal punto i al punto f otteniamo:

$$W_{F,i\to f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_K \tag{3.3}$$

$$E_K \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.4}$$

dove E_K è l'energia cinetica del corpo, che è definita come la metà del prodotto della massa del corpo per il quadrato della sua velocità. L'energia cinetica è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della direzione della velocità del corpo, questa è espressa in Joule $[J]$ ed ha dunque dimensionalità del lavoro $[J] = [N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s^2]$.

3.3 Forze Conservative

Le forze conservative sono forze che compiono lavoro indipendentemente dal percorso seguito dal corpo, ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso, ad esempio la forza peso $\vec{P}$ è una forza conservativa, mentre la forza di attrito $\vec{A}_d$ non lo è. Visto che dipendono solo dalla posizione iniziale e finale del corpo, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\vec{F}|_{W_{i\to f}} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{3.5}$$

Ovvero il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f è indipendente dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso.
Questo ci permette di scrivere:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{3.6}$$

considerando dunque l'Equazione 3.5 e l'Equazione 3.6 le quali sono equivalenti e semplicemente dimostrabili usando le proprietà degli integrali, possiamo definire il lavoro di una forza conservativa come:

$$W_{F,i\to f} = \mathcal{F} \tag{3.7}$$

Se l'Equazione 3.7 non risultasse verificata allora la forza $\vec{F}$ non sarebbe conservativa, e quindi il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f dipenderebbe dal percorso seguito dal corpo stesso.

3.4 Energia Potenziale

Prendiamo in considerazione una forza conservativa $\vec{F}$, dunque il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un corpo che si sposta da una posizione i ad una posizione f è indipendente dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo stesso. Fissiamo ora il punto $i \to O$ come punto di originario, e il punto $f \to P$ come punto finale del corpo stesso, quindi possiamo scrivere:

$$E_\rho(x, y, z) = E_{\rho,P} = -\int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{3.8}$$

abbiamo dunque definito l'**energia potenziale** E_ρ del punto P come il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un corpo che si sposta dal punto O al punto P. La funzione 3.8 è definita **funzione potenziale** della forza $\vec{F}$, questa descrive l'energia potenziale del corpo in funzione della sua posizione nello spazio (x, y, z). L'energia potenziale è una grandezza scalare, quindi non ha direzione, ma ha un valore numerico che può essere positivo o negativo a seconda della posizione del corpo nello spazio. L'energia potenziale è espressa in Joule $[J]$ ed ha dunque dimensionalità del lavoro $[J] = [N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s^2]$.

Proprietà Se al posto di considerare il punto O come punto di origine, considerassimo un altro punto A ed un altro punto B, allora il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ su un corpo che si sposta dal punto A al punto B sarebbe dato da:

$$\begin{aligned} W_{F,A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \\ &= \int_A^O \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \\ &= -\int_O^A \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo che:

$$W_{F,A\to B} = E_{\rho,A} - E_{\rho,B} = \Delta E_\rho \tag{3.9}$$

Da notare come nel calcolo dell'energia potenziale per qualunque punto O scelto come origine non influisce sul risultato dell'Equazione 3.9. Anche in questa si nota come per le forze conservative se il punto di inizio e il punto di fine sono gli stessi, e si vuole quindi calcolare il lavoro compiuto, questo risulterà essere nullo per l'Equazione 3.6, ciò in quanto se considerassimo un qualsiasi punto intermedio M nel percorso che inizia e termina nello stesso punto A allora "quello che guadagna il corpo nel percorso $A \to M$ lo perde nel percorso $M \to A$", dunque l+integrale chiuso risulterebbe essere nullo.

Energia potenziale forza peso

Applicando l'Equazione 3.8 alla forza peso $\vec{P}$, otteniamo:

$$E_{\rho,P} = mgz. \tag{3.10}$$

Dove z è l'altezza del corpo rispetto al piano orizzontale, e m è la massa del corpo. L'energia potenziale della forza peso è quindi direttamente proporzionale all'altezza del corpo rispetto al piano orizzontale, e alla massa del corpo stesso. Il segno dell'energia potenziale della forza peso è positivo, in quanto la forza peso compie lavoro positivo sul corpo quando questo si sposta verso l'alto, e negativo quando il corpo si sposta verso il basso.
N.B. A.3

3.5 Conservazione dell'energia meccanica

Nell'ipotesi che su una massa non agiscano forze dissipative, allora dato che valgono contemporaneamente le Equazioni 3.5 e 3.9, possiamo combinarle e scrivere:

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_K = E_{K,B} - E_{K,A} \\ W &= -\Delta E_\rho = E_{\rho,A} - E_{\rho,B} \\ E_{k,A} + E_{\rho,A} &= E_{k,B} + E_{\rho,B} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dunque se non agiscono forze dissipative: "La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un corpo è costante". Il che è il principio di conservazione dell'**energia meccanica**, che afferma che l'energia meccanica totale di un corpo è costante se non agiscono forze dissipative sul corpo stesso.
Se in un corpo agiscono allo stesso tempo forze conservative e forze dissipative, allora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo non è costante, ma varia nel tempo in funzione del lavoro compiuto dalle forze dissipative. Dunque

$$\begin{aligned} W &= W_c + W_{nc} && = E_{k,B} - E_{k,A} \\ & E_{\rho,A} - E_{\rho,B} + W_{nc} && = E_{k,B} - E_{k,A} \\ W_{nc} &= (E_{k,B} + E_{\rho,B}) - (E_{k,A} + E_{\rho,A}) \\ &= E_{m,B} - E_{m,A} \end{aligned}$$

Dove W_{nc} è il lavoro compiuto dalle forze non conservative, E_m è l'energia meccanica totale del corpo, e $E_{m,A}$ e $E_{m,B}$ sono le energie meccaniche totali del corpo nei punti A e B rispettivamente. In sostanza se agiscono forze non conservative sul corpo, allora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo varia nel tempo in funzione del lavoro compiuto dalle forze non conservative.
N.B. A.3

3.6 Potenza

La potenza è definita come il lavoro in un certo lasso di tempo, dunque:

$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} \tag{3.12}$$

Questa è definita come la potenza media del lavoro W nel tempo Δt, se al posto di questo vogliamo conoscere la "potenza istantanea", con un abuso di notazione andando a prendere l'infinitesimo lavoro dW che non ha un vero e proprio senso, scriviamo:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{3.13}$$

dimensionalmente l'unità di misura della potenza è il Watt (W) che è quindi definita come

$$[P] = \left[\frac{E}{T}\right] = \left[F \cdot \frac{L}{T}\right] = \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{L}{T}\right] = [F \cdot V]$$

Capitolo 4

Fenomeni di urto

4.1 Introduzione agli urti

Considerando l'urto tra due punti materiali, durante la collisione possono agire forze molto intense, ma di breve durata, queste sono chiamate **forze impulsive**. Dato che le forze durante l'urto sono interne al sistema considerato allora in assenza di forze esterne, la quantità di moto totale del sistema è conservata. Dunque considerando m_1 e m_2 le masse dei due punti materiali, e $v_{1,\text{in}}, v_{2,\text{in}}$ le loro velocità prima dell'urto, e $v_{1,\text{out}}, v_{2,\text{out}}$ le loro velocità immediatamente dopo l'urto, possiamo scrivere:

$$P_{\text{in}} = m_1 v_{1,\text{in}} + m_2 v_{2,\text{in}} = m_1 v_{1,\text{out}} + m_2 v_{2,\text{out}} = P_{\text{out}}$$

Dunque la quantità di moto nel centro di massa del sistema è conservata, e possiamo scrivere:

$$P = (m_1 + m_2) v_{cm} = P_{\text{in}} = P_{\text{out}} = \text{costante} \tag{4.1}$$

Dal lato opposto le quantità di moto delle masse 1 e 2 non rimangono costanti, queste sono definite come la differenza tra la velocità moltiplicata per la massa. Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,\text{out}} - m_1 v_{1,\text{in}} = J_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} F_{2,1} dt \\ m_2 v_{2,\text{out}} - m_2 v_{2,\text{in}} = J_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{1,2} dt \end{aligned}$$

Dove $J_{2,1}$ è l'impulso della massa 2 sulla massa 1, e $J_{1,2}$ è l'impulso della massa 1 sulla massa 2. Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} J_{2,1} + J_{1,2} = 0 \\ \Rightarrow J_{2,1} = -J_{1,2} \end{aligned}$$

Questo è verificato in quanto le forze agenti sulle masse 1 e 2 sono uguali e opposte, quindi l'impulso della massa 2 sulla massa 1 è uguale in modulo ma opposto in verso all'impulso della massa 1 sulla massa 2.
Inoltre anche in presenze di forze esterne se la durata dell'urto è molto breve, possiamo considerare le forze esterne come nulle in quanto vale che:

$$\Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F^{(\text{E})} dt = F_m^{(\text{E})} \tau$$

e dunque se τ è molto piccola, il ΔP è molto piccola, e quindi possiamo considerare le forze esterne come nulle, questo a meno che le $F^{(\text{E})}$ non siano impulsive nel periodo τ.
Analogamente possiamo scrivere l'impulso J come:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt = F_m \tau \tag{4.2}$$

Dove la forza F_m è la forza media durante l'intervallo di tempo τ.
Conseguenza dirette ed applicazione della conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto possiamo scrivere l'energia cinetica totale del sistema come:

$$E'_k = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Detto questo non è sempre vero che l'energia meccanica e quindi l'energia cinetica è conservata. Infatti quando analizziamo un urto solitamente distinguiamo tre casi principalmente:

Urto elastico Oltre alla conservazione della quantità di moto, è conservata anche l'energia cinetica totale del sistema.

Urto anelastico Viene conservata solo la quantità di moto, mentre l'energia cinetica totale del sistema non è conservata.

Urto completamente anelastico Un urto completamente anelastico è un caso particolare di urto anelastico, nel quale le due masse si muovono insieme dopo l'urto. In questo caso la posizione delle due masse dopo l'urto coincide con la posizione del centro di massa del sistema.

La quantità di moto, in generale, di un sistema con N masse è descritta dalla seguente equazione:

$$P = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = M v_{cm} \tag{4.3}$$

Dunque possiamo scrivere la quantità di moto totale del sistema come:

$$P = m_1 v_{1,\text{in}} + m_2 v_{2,\text{in}} = m_1 v_{1,\text{out}} + m_2 v_{2,\text{out}}$$

4.1.1 Passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa

Può essere utile passare dal sistema di riferimento generale a quello del centro di massa, in quanto in questo sistema di riferimento la quantità di moto totale del sistema è sempre nulla. Per fare questo consideriamo:

$$\begin{aligned}
x(t) \to& x'(t) = x(t) - x_{cm}(t) \\
\downarrow& \frac{d}{dt} \\
v(t) \to& v'(t) = v(t) - v_{cm}(t) \\
\downarrow& \frac{d}{dt} \\
a(t) \to& a'(t) = a(t) - a_{cm}(t)
\end{aligned}$$

In queste formule usiamo i simboli x_{cm}, v_{cm} e a_{cm} per indicare la posizione, la velocità e l'accelerazione del centro di massa del sistema, per ricavarci queste dobbiamo consideriamo la posizione del centro di massa del sistema come:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{x}_i}{\sum_1^N m_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{x}_i \tag{4.4}$$

eseguendo alcuni passaggi possiamo ricavare la velocità e l'accelerazione del centro di massa del sistema come:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{cm} =& \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{x}_i \\
\downarrow& \frac{d}{dt} \\
\vec{v}_{cm} =& \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{x}_i\right) = & \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \frac{dx_i}{dt} =& \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i \\
\downarrow& \frac{d}{dt} \\
\vec{a}_{cm} =& \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i\right) = & \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \frac{d\vec{v}_i}{dt} =& \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{a}_i
\end{aligned}$$

Oltre alla posizione, velocità e accelerazione del centro di massa del sistema, possiamo anche calcolare l'energia cinetica totale del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa. Infatti possiamo scrivere:

$$E_{k,\text{tot}} \to E'_{k,\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} E'_{k,i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \tag{4.5}$$

Il che con qualche passaggio diventa:

$$\begin{aligned}
E'_{k,\text{tot}} =& \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(v_i - v_{cm}\right)^2 \\
=& \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(v_i^2 - 2 v_i v_{cm} + v_{cm}^2\right) \\
=& \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} m_i v_i v_{cm} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 \\
=& E_{k,\text{tot}} - 2 v_{cm} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\
=& E_{k,\text{tot}} - 2 v_{cm} \cdot M v_{cm} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\
=& E_{k,\text{tot}} - M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\
=& E_{k,\text{tot}} - \frac{1}{2} M v_{cm}^2
\end{aligned}$$

Dunque l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa non è influenzata dalle singole velocità, ma solo dalla velocità del centro di massa del sistema.

4.2 Urto elastico

Come già detto, in un urto elastico oltre alla conservazione della quantità di moto, è conservata anche l'energia cinetica totale del sistema. Dunque possiamo scrivere:

$$m_1 v_{1,\text{in}} + m_2 v_{2,\text{in}} = m_1 v_{1,\text{out}} + m_2 v_{2,\text{out}} \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{out}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{out}}^2 \tag{4.7}$$

In quanto queste valgono contemporaneamente, possiamo dunque ricavarci una relazione tra le velocità di uscita e quelle di ingresso. Dalla (4.6) possiamo ricavare $v_{1,\text{out}}$ e sostituirlo nella (4.7):

$$\begin{aligned}
v_{1,\text{out}} &= \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1,\text{in}} + 2 m_2 v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2} \\
v_{2,\text{out}} &= \frac{\left(m_2 - m_1\right) v_{2,\text{in}} + 2 m_1 v_{1,\text{in}}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

Se il nostro sistema di riferimento è il centro di massa del sistema, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
v'_{1,\text{in}} &= -v'_{1,\text{out}} \\
v'_{2,\text{in}} &= -v'_{2,\text{out}}
\end{aligned}$$

Nel caso volessimo "risolvere" un urto elastico tra due masse m_1 e m_2 per prima dobbiamo determinare il numero di dimensioni del sistema, e quindi scrivere le equazioni (4.6) e (4.7) in n dimensioni. Per 3 dimensioni si avranno 4 equazioni, per 2 dimensioni si avranno 3 equazioni, e per 1 dimensione si avrà 2 equazioni, però su n dimensioni con 2 masse si hanno $2n$ incognite, dunque nel caso di 2 dimensioni con 3 equazioni abbiamo una incognita libera, mentre nel caso di 3 dimensioni con 4 equazioni abbiamo 2 incognite libere, ma con 1 dimensione abbiamo 2 equazioni e 2 incognite, quindi non abbiamo incognite libere e possiamo risolvere l'urto.

4.3 Urto (completamente) anelastico

In un urto anelastico, la quantità di moto totale del sistema è conservata, mentre l'energia cinetica totale del sistema non è conservata. Dunque possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
E'_{k,f} &\neq E'_{k,i} \\
E'_{k,i} = \frac{1}{2}m_1 v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,\text{in}}^2 &\neq \frac{1}{2}m_1 v_{1,\text{out}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,\text{out}}^2 = E'_{k,f} \\
E'_{k,i} = E_{k,i} - \cancel{\frac{1}{2}M v_{cm}^2} &\neq E'_{k,f} = E_{k,f} - \cancel{\frac{1}{2}M v_{cm}^2} \\
E_{k,i} &\neq E_{k,f}
\end{aligned}
$$

L'analisi degli anelastici o completamente anelastici risulta utile nell'esperimento del "pendolo balistico.

Pendolo balistico

Nel problema del pendolo balistico, abbiamo un proiettile di massa m_1 che colpisce un pendolo di massa m_2 e lunghezza L. Il proiettile si conficca nel pendolo, e il sistema inizia a muoversi insieme, il pendolo raggiungerà una certa altezza h con angolo θ con $\theta = \arccos\left(\frac{L-h}{L}\right)$, bisogna quindi analizzare momenti diversi, il primo è l'urto tra il proiettile e il pendolo, il quale è completamente anelastico, il secondo è il moto del pendolo, il quale è un moto di tipo conservativo.

Urto Inizialmente il pendolo è fermo (e quindi con P nulla), mentre il proiettile ha quantità di moto $P_p = m_1 v_p$ quindi la quantità di moto del sistema è $P = mv + M\prime$, questa si conserva nell'urto, denotando V la velocità del pendolo nell'istante dopo l'urto abbiamo $P = mv + M\prime = m_2 V$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \\
v &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} V
\end{aligned}
$$

Moto del pendolo Il pendolo inizia a muoversi con velocità V, e quindi ha energia cinetica $E_{k,i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$, il pendolo si alza fino ad un'altezza h e quindi ha energia potenziale $E_{p,f} = (m_1 + m_2)gh$, nel punto di massimo il pendolo non ha energia cinetica ($E_{k,f} = 0$), e nel punto di minimo il pendolo non ha energia potenziale ($E_{p,i} = 0$), vale per la conservazione dell'energia meccanica che:

$$
\begin{aligned}
E_{k,i} + E_{p,i} &= E_{k,f} + E_{p,f} \\
\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 &= 0 + (m_1 + m_2)gh \\
\frac{1}{2}V^2\cancel{(m_1 + m_2)} &= \cancel{(m_1 + m_2)}gh \\
\frac{1}{2}V^2 &= gh \\
V^2 &= 2gh
\end{aligned}
$$

Composizione Combinando le due equazioni ricavate possiamo scrivere che:

$$\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}v\right)^2 = 2gh$$
$$\frac{(m_1+m_2)^2}{2gh} = v^2$$
$$v = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)^2}{2gh}}$$
$$v = \frac{m_1+m_2}{\sqrt{2gh}}$$

il che ci permette di calcolare la velocità del proiettile in funzione della massa del pendolo, della massa del proiettile e dell'altezza raggiunta dal pendolo.

4.4 Nota Sui sistemi di riferimento, inerziali e non inerziali

Un sistema di riferimento è un insieme di punti materiali, che possono essere fissi o in movimento, rispetto ai quali si può misurare la posizione. Abbiamo visto il sistema di riferimento del centro di massa per il quale valido che la quantità di moto totale del sistema è nulla, e quindi possiamo scrivere:

$$P = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = M v_{cm} = 0$$

Se questi stessi punti materiali che costruiscono il centro di massa fossero soggetti alla forza di gravità allora rispetto al sistema "centro di massa" noteremo una forza apparente **esterna** al sistema che accelera l'intero sistema. Dunque possiamo dire che il sistema di riferimento del centro di massa in questa situazione **non è** inerziale. Se un sistema inoltre subisce più forze esterne allora la risultante di queste sarà il prodotto della massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa, la quale è nulla in un sistema inerziale:

$$\vec{R_{est}} = m\vec{a_{cm}}$$

Questa formula è il risultato considerando un sistema di riferimento "ancora più esterno" inerziale. Difatti come già visto la posizione del centro di massa rispetto ad un punto in un sistema inerziale O, considerando r_i la posizione del punto i rispetto al sistema di riferimento O e r'_i la posizione del punto i rispetto al sistema di riferimento del centro di massa, possiamo scrivere:

$$r_i = r'_i + OO'$$

Dato che

$$r'_c m = \frac{\sum_{i=1} m_i r'_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i (r_i + O'O)}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i r_i}{\sum_{i=1} m_i} + O'O' = r_{cm} + O'O'$$

come derivata della posizione otteniamo che la velocità del centro di massa è:

$$v_{cm} = \frac{dr_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1} m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i v_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{P}{m}$$

e quindi l'accelerazione del centro di massa è:

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1} m_i \frac{dv_i}{dt}}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i a_i}{\sum_{i=1} m_i} = \frac{\sum_{i=1} m_i a_i}{m}$$

Assumendo che il sistema di riferimento O sia inerziale, possiamo scrivere per ogni punto: $m_i a_i = F_i = F_i^{(\mathrm{E})} + F_i^{(\mathrm{I})}$, dove $F_i^{(\mathrm{E})}$ è la forza esterna e $F_i^{(\mathrm{I})}$ è la forza interna. Dunque possiamo scrivere:

$$ma_{CM} = \sum_i m_i a_i = \sum_i \left(F_i^{(\mathrm{E})} + F_i^{(\mathrm{I})}\right) = F^{(\mathrm{E})} + F^{(\mathrm{I})}$$

ma per definizione le forze interne si annullano, quindi possiamo scrivere:

$$ma_{CM} = F^{(\mathrm{E})}$$

Dunque possiamo dire che un sistema di riferimento è inerziale se la risultante delle forze esterne è uguale alla massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa. Se questa condizione non è soddisfatta, il sistema di riferimento non è inerziale. In un sistema di riferimento non inerziale, le forze apparenti sono forze fittizie che si manifestano a causa dell'accelerazione del sistema stesso. Queste forze non sono reali e non possono essere misurate direttamente, ma sono utili per analizzare il moto in sistemi non inerziali.

Parte II

Termodinamica

Capitolo 5

Termodinamica

Appendice A: Note delle lezioni

Di seguito sono riportate delle note delle lezioni ulteriori agli appunti stessi del corso.

A.1 24 febbraio 2025

Le tre regole del grafico orario:

- Il tempo non si ferma;
- Il tempo scorre sempre allo stesso, uniforme, modo per tutti;
- Non si può andare più veloce della luce (c), non possono esistere dunque rette con pendenza maggiore di c.
- Non esiste ancora il teletrasporto.

A.2 26 febbraio 2025

Si noti come lo scopo del problema non fosse strettamente quello di trovare il punto nel quale il punto si ferma, ma di capire come l'analisi dimensionale possa aiutarci a risolvere un problema fisico.

A.3 31 marzo 2025

La scrittura delle Sotto-Sezione 3.5 e il paragrafo riguardante l'energia potenziale della forza peso della Sotto-Sezione 3.4 non sono state scritte integrando gli appunti presi a lezione, ma interamente dal libro, ciò a causa di una mia impossibilità a prendere parte all'ultima parte della lezione svoltasi in data sopra indicata.