Progetto Programmazione e Calcolo Scientifico 2024

19 maggio 2024

1 Piano passante per un poligono

Dati N poligoni con n_i vertici ciascuno, denominiamo con $\mathbf{P}_j^{(i)}$ il vertice j del poligono i. I range di valori sono, quindi, $i = 0, \ldots, N-1$ e $j = 0, \ldots, n_i - 1$. Pertanto, per ogni poligono i, abbiamo una n_i-upla $(\mathbf{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathbf{P}_{n_i-1}^{(i)})$. Cerchiamo l'equazione cartesiana del piano π contenente il poligono, dando per assunto che effettivamente i vertici forniti appartengono tutti ad uno stesso piano e che, quindi, corrispondano effettivamente a un poligono nello spazio tridimensionale. Per semplicità di notazione omettiamo nelle trattazioni successive l'apice (i), sottointendendo che ci stiamo riferendo al poligono i-esimo. Vogliamo arrivare a una scrittura di π del tipo

$$ax + by + cz = d.$$

Se denotiamo con $\mathbf{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ il vettore congiungente $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, un generico punto $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ appartiene al piano passante per i punti $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ se vale che

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P} = 0, \tag{1}$$

cioè il vettore che congiunge $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}$ deve essere ortogonale al vettore normale al piano (detto giacitura) $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$. La (1) equivale a porre nullo il determinante della matrice avente per righe le componenti dei 3 vettori rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante con la regola di Laplace rispetto alla prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

dove

$$a = \det \begin{pmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix},$$

$$b = -\det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix},$$

$$c = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}.$$

Esplicitiamo i prodotti a primo membro dell'equazione (2)

$$
\begin{aligned}
&a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0,\\
&ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0,\\
&ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Chiamiamo

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

Così facendo abbiamo ricavato l'equazione cartesiana del piano cercato

$$ax + by + cz + d = 0,$$

con a, b, c non tutti nulli, non essendo tutti e tre i punti allineati.

2 Retta di intersezione tra piani

Dati due poligoni diversi i e j, grazie a quanto detto sopra, riusciamo a trovare l'equazione cartesiana dei due piani contenenti i poligoni. Nel caso in cui i due piani non siano paralleli, ci proponiamo di ricavare l'equazione in forma parametrica della retta r che si genera dall'intersezione dei due piani; siamo, cioè, in cerca di una scrittura del tipo

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + t\mathbf{v},$$

con t parametro reale e $\mathbf{v}$ la direzione della retta. Scriviamo in un sistema le equazioni per i due piani in questo modo:

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1\\
a_2x + b_2y + c_2z = d_2
\end{cases}
$$

dove i pedici indicano il piano rappresentato. Per i due piani definiamo con

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{P}'_0\mathbf{P}'_1 \wedge \mathbf{P}'_0\mathbf{P}'_2$$

le due giaciture. La direzione individuata dalla retta di intersezione è data dal vettore normale a entrambe le giaciture dei piani:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2.$$

Al fine di trovare $\mathbf{Q}$, se $c_1, c_2 \neq 0$, battezziamo z come parametro libero e, ponendolo pari a 0, risolviamo il sistema lineare

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y = d_1\\
a_2x + b_2y = d_2
\end{cases}
$$

trovando $\mathbf{OQ} = (\overline{x}, \overline{y}, 0)$. Allora la retta di intersezione r è data in forma parametrica da

$$
\begin{cases}
x = \overline{x} + tv_x\\
y = \overline{y} + tv_y\\
z = tv_z.
\end{cases}
$$

3 Punti di intersezione

Per ogni coppia di vertici consecutivi $\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_{j+1}$ scriviamo la retta passante per entrambi r_j attraverso l'ascissa curvilinea s in questo modo:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_j + s\mathbf{P}_j\mathbf{P}_{j+1},$$

pertanto solo per valori di s in $(0, 1)$ otteniamo un punto del lato del poligono. Consideriamo adesso due poligoni, attraverso i punti 1 e 2 troviamo i piani che li contengono e la retta di intersezione (se esiste) tra i due.

Per ogni coppia di vertici consecutivi del primo poligono intersechiamo la retta r di intersezione e la retta r_j:

$$\begin{cases} \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + t\mathbf{v} \\ \mathbf{OP} = \mathbf{OP}_j + s\mathbf{P}_j\mathbf{P}_{j+1} \end{cases}$$

per cui abbiamo

$$\mathbf{OQ} + t\mathbf{v} = \mathbf{OP}_j + s\mathbf{P}_j\mathbf{P}_{j+1},$$

ossia un sistema di 3 equazioni nelle incognite t, s. Riscriviamolo in tal modo:

$$\begin{cases} v_x t - (x_{j+1} - x_j)s = x_j - \overline{x} \\ v_y t - (y_{j+1} - y_j)s = y_j - \overline{y} \\ v_z t - (z_{j+1} - z_j)s = z_j - \overline{z} \end{cases} \tag{3}$$

Potrebbe succedere che il sistema non ammetta soluzioni, in tal caso le due rette non si intersecano, cioè la traccia non attraversa il lato $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_{j+1}$. Altrimenti, in caso di sistema determinato otterremo la coppia (s, t). Se $s \in [0, 1]$ otteniamo effettivamente che il punto di intersezione giace sul lato $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_{j+1}$ del primo poligono. Iteriamo il processo per tutti gli n_i vertici del poligono e troveremo due punti $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$, trovati attraverso l'intersezione tra r e due lati distinti del poligono.

Alla stessa maniera, effettuiamo questi calcoli per il secondo poligono, trovando o intersezione nulla per ogni lato o due altri due punti $\mathbf{Q}_3$ e $\mathbf{Q}_4$.

Nel caso in cui troviamo i 4 punti di intersezione, associamo ad ognuno il valore di t corrispondente trovato nel sistema (3) e costruiamo due intervalli dell'asse reale ordinando i valori dei parametri: otteniamo allora (a, b) e (c, d), dove $a, b \in \{t_1, t_2\}$ e $c, d \in \{t_3, t_4\}$. Se poniamo $a = \min\{t_1, t_2\}$, $b = \max\{t_1, t_2\}$, $c = \min\{t_3, t_4\}$ e $d = \max\{t_3, t_4\}$, attraverso una funzione che calcoli l'intersezione tra questi due intervalli, verifichiamo che

(i) se $(a, b) \cap (c, d) = (a, c)$, allora si tratta di una frattura non passante e i suoi vertici sono $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_3$;

(ii) se $(a, b) \cap (c, d) = (a, b)$, allora si tratta di una frattura passante per il poligono 1 e i suoi vertici sono $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$;

(iii) se $(a, b) \cap (c, d) = (b, d)$, allora si tratta di una frattura non passante e i suoi vertici sono $\mathbf{Q}_2$ e $\mathbf{Q}_4$;

(iv) se $(a, b) \cap (c, d) = (c, d)$, allora si tratta di una frattura passante per il poligono 2 e i suoi vertici sono $\mathbf{Q}_3$ e $\mathbf{Q}_4$.

Negli altri casi (come ad esempio $a = t_2$ e $b = t_1$) dobbiamo tener conto che i valori dei parametri associati hanno un ordinamento diverso. Attraverso questo algoritmo abbiamo trovato i vertici delle tracce, il loro valore di **Tips** e anche le intersezioni dei prolungamenti di esse sui poligoni, il che risulterà molto utile in seguito.

4 Determinazione dei sotto-poligoni generati per ogni frattura

Per ogni poligono $j = 1, \dots, N$, consideriamo inizialmente tutte le fratture passanti per lo stesso e, attraverso i valori di t trovati nelle sezioni precedenti (ossia i valori scartati dopo l'intersezione dei due intervalli), identifichiamo i vertici dei nuovi sotto-poligoni sempre allo stesso modo, ossia:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + t^*\mathbf{v},$$

dove t^* è il valore del parametro reale corrispondente a un punto che giace su un lato del poligono e sulla retta contenente la traccia. Per ordinare i punti in senso antiorario dobbiamo ricordare che l'intersezione tra la retta r_j e la retta r è avvenuta prendendo i vertici $\mathbf{P}_j$ e $\mathbf{P}_{j+1}$, che sono già ordinati in senso antiorario. Nel momento in cui r ed r_j risultano in un'intersezione per cui effettivamente il punto $\mathbf{Q}$ giace sul lato (e, quindi, il valore associato $s \in [0, 1]$), scartiamo tutti i vertici $\mathbf{P}_{j+1}, \dots, \mathbf{P}_{j+k}$, dove $\mathbf{P}_{j+k}$ è il vertice del lato $\mathbf{P}_{j+k}\mathbf{P}_{j+k+1}$ per cui avviene che l'altra intersezione con la retta r è ammissibile. Il nuovo sotto-poligono generato avrà gli stessi vertici del poligono originale, esclusi i vertici $\mathbf{P}_{j+1}, \dots, \mathbf{P}_{j+k}$, che verranno sostituiti dai due punti della retta contenente la traccia giacenti sui lati del poligono.