FUNCIÓN EXPONENCIAL

Esta función tiene a la variable x como exponente, de ahí recibe su nombre.

En general son del tipo $\boxed{f(x) = k.a^x + b}$, con k, a y b números reales, pero $k \neq 0$ y $a > 0, a \neq 1$.
Para estudiarla mejor, la analizaremos teniendo en cuenta como pueden variar los coeficientes k, a y b.

La función exponencial $f(x) = a^x$ con base mayor que 1

Se iniciará el estudio de las funciones exponenciales con aquellas en las que la base es un número real mayor que 1.

No se consideran como funciones exponenciales $f(x) = 1^x$, porque $1^x = 1$ para cualquier valor de x (la función es constante) ni las que tienen base negativa o cero, porque no presentan regularidades destacadas: $f(x) = (-2)^x$ alterna resultados positivos con negativos si x es entero y no tiene resultado en valores como $x = \frac{1}{2}$.

Problema 2

Graficar la función $f(x) = 2^x$.

Al no conocer aún las características de este tipo de funciones, se puede construir una tabla de valores para obtener una aproximación a la forma del gráfico. Para esto hay que preguntarse primero, *¿qué valores están permitidos para x?*

Como la operación es una potenciación con base positiva, 2^x dará un resultado para cualquier número real que se elija. Dom $(f) = \mathbb{R}$

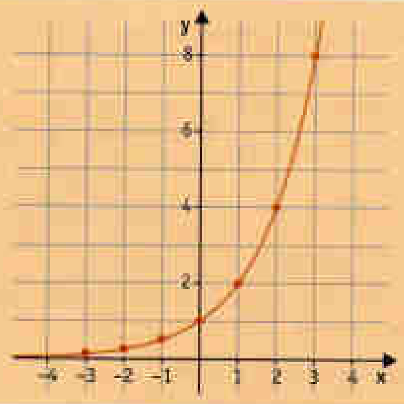
Una tabla con algunos valores positivos y otros negativos permitirá obtener datos para realizar un gráfico aproximado de la función:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

En la tabla puede observarse que si hay diferencia de 1 entre los valores de x, cada valor de y es el doble del anterior o que, en las mismas condiciones, cada valor de y es el 200% del valor del anterior valor de y. Ese 200% está expresado en la fórmula de la exponencial, no como porcentaje sino como número racional porque: $200\ \% \Leftrightarrow \frac{200}{100} = 2$, que es la base de la exponencial.

Con la tabla anterior puede trazarse un gráfico aproximado de la función:



El análisis que se acaba de realizar puede hacerse también para una función exponencial cualquiera con $a > 1$.

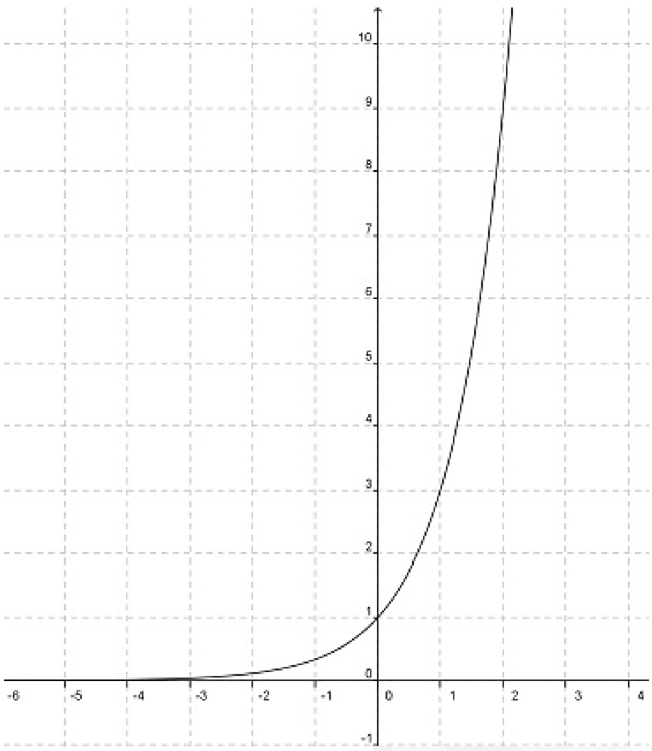
La función $f(x) = a^x$, con $a > 1$ tiene por gráfica una curva porque su fórmula no se corresponde con la de una función lineal. Como a es un número positivo, el resultado de hacer a^x es siempre positivo y nunca vale 0, ya que la única base que puede dar 0 como resultado es 0. Luego, la función no tiene raíces. $C^+ = \mathbb{R}$, $C^- = \emptyset$, $C^0 = \emptyset$.

Además, a medida que crece x también lo hace a^x ya que las potencias de base mayor que 1 verifican que si $x > y \Rightarrow a^x > a^y$.

Como $a^0 = 1$ resulta que para toda función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ la ordenada al origen es 1.

Veamos otro ejemplo de una función exponencial con base mayor a 1, es decir $a > 1$.

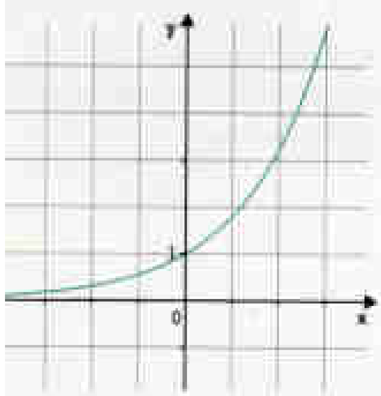
$g(x) = 3^x$ (También se puede obtener haciendo una tabla similar a la del ejemplo anterior)



En ambos caso observar que hay una asíntota horizontal en y=0, ya que si los valores de x son "tan pequeños como queramos" (es decir, cuando se acercan a -∞, los valores de "y" son cada vez más próximos a cero, pero en ningún momento llega a "dar cero").

Entonces tanto para el primer como para el segundo ejemplo, la imagen es (0;+∞)

Todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 1$ tienen por gráfico una curva con la misma forma.



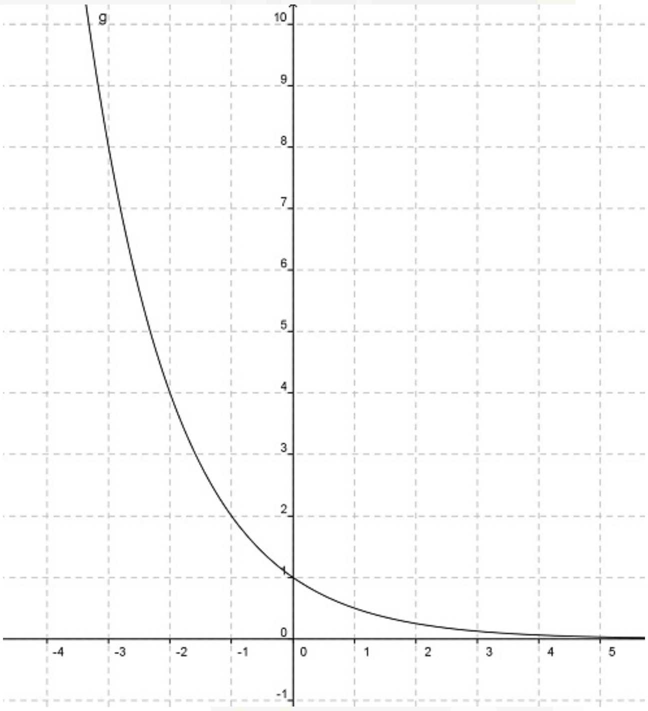
Es decir, son siempre ***crecientes.***

La función exponencial $f(x) = a^x$ con base entre 0 y 1

Algunas características de la función exponencial con base mayor que 1 no se repiten en las que tienen base entre 0 y 1 y éste es el motivo por el que se estudian por separado.

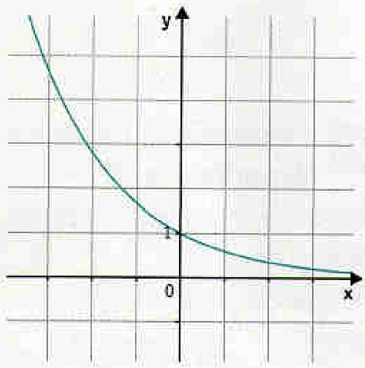
Por ejemplo, veamos la función exponencial $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼
3	1/8



Veamos que en este caso, la función es ***decreciente*** ya que a medida que los valores de x son mayores, los valores de "*y*" son cada vez más pequeños y cercanos a cero (es por eso que también se observa una asíntota horizontal en y=0.

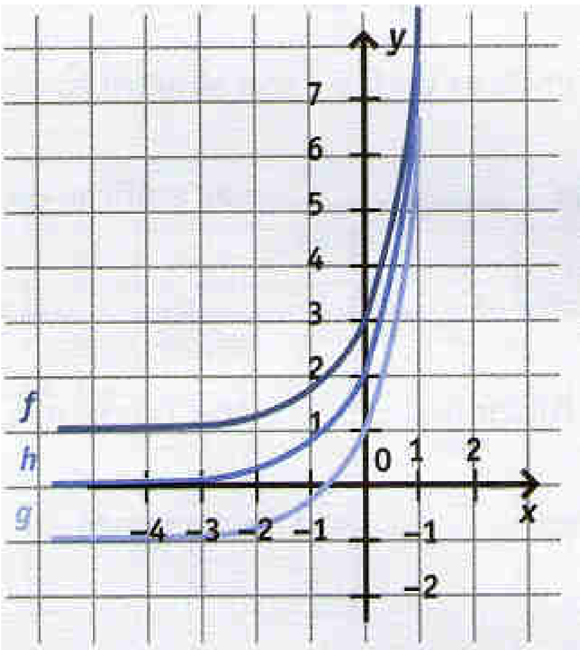
Todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$ tienen por gráfico una curva con la misma forma.



Dom $(f) = \mathbb{R}$;
Im $(f) = (0; +\infty)$;
$C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}$ y $C^- = \emptyset$;
Estas funciones son decrecientes

En todos los ejemplos analizados, observar que k=1 (es decir un número positivo) y b=0.

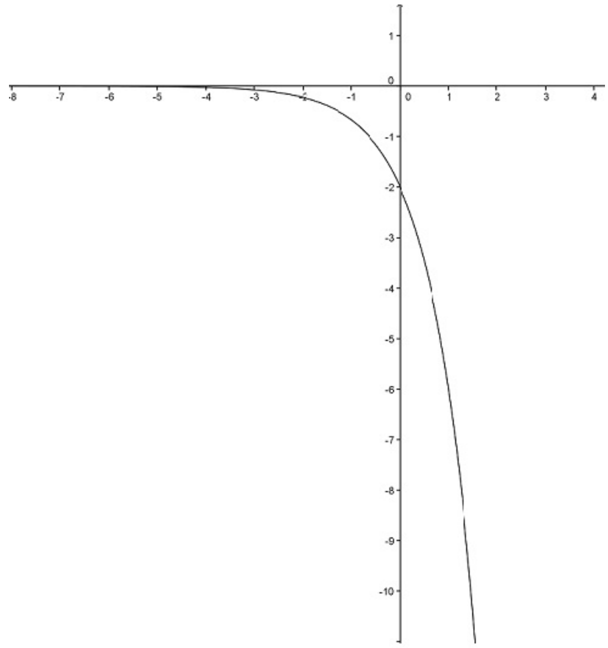
Veamos, ahora tres ejemplos donde k y b varían. En especial veamos, como varía la gráfica si las funciones son: $h(x) = 2.3^x$, $f(x) = 2.3^x + 1$ y $g(x) = 2.3^x - 1$.



Observar que en este caso, para la función h(x) la asíntota horizontal es y=0, pero para la función f(x) la asíntota horizontal es y=1, y para la función g(x) la asíntota es y= -1. Y en los tres casos el valor de la asíntota horizontal coincide con el valor de b (es decir el termino independiente que suma o resta ala potencia). ***En conclusión, siempre el valor de b indicará cuál es la asíntota horizontal de la función.*** Y es por eso que en los primeros ejemplos, cuyo valor de b era cero, la asíntota horizontal era y=0.

Además, veamos que en los tres casos el valor de k=2, número positivo y el valor de a=3, es decir mayor a 1. Y la gráfica se mantuvo creciente en los tres casos. Es decir, siempre que la base a, esté multiplicada por un número positivo, se mantiene el tipo de crecimiento (o decrecimiento, si la base es un número entre 0 y 1).

Pero si en vez de tener la función $h(x) = 2\,.\,3^x$, tenemos por ejemplo, la función $t(x) = -2\,.\,3^x$, la gráfica quedará decreciente.



Entonces si k es un número negativo, es decir, k<0, cambia el tipo de crecimiento de la función (del mismo modo si tenemos una función del tipo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que es decreciente, cuyo valor de k=1, la modificamos multiplicando por ejemplo por k=-1, la función será creciente, es decir, cambia el tipo de crecimiento. Sugerencia: hágalo usted mismo! Y compruébelo!)

Sabiendo estas características, y hallando la ordenada al origen y la raíz (si existe), alcanza para hacer el gráfico de cualquier exponencial, sin necesidad de hacer una tabla de valores.

Por ejemplo, sea la función: $r(x) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

Con sólo ver su fórmula sabemos que tiene una asíntota horizontal en y=-2. También sabemos que es decreciente dado que la base es un número entre cero y uno, en este caso a= ½ y está multiplicado por un k positivo, en este caso es k=4.
Entonces busquemos la ordenada al origen y la raíz para graficar aproximadamente la función.

$r(0) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2 = 4.1 - 2 = 2$, es decir esta función corta al eje *y* en y=2.

$$r(x) = 0$$

$$4.\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

Entonces, esta función corta al eje x en x=1. Por lo tanto, el gráfico es: