Departamento de Matemática

- **Trabajo Práctico N°: 3**

Función exponencial y logarítmica.
Logaritmos

Tercer Año

---

1) **Mediante tabla de valores, grafique las siguientes funciones:**

$f(x) = 2^x$
$g(x) = 2^x + 1$
$h(x) = 2^x - 4$
$r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$s(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
$t(x) = -3.2^x$
$u(x) = -1.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

- Observando todas las gráficas, identifique qué funciones son crecientes, cuáles son decrecientes. ¿Tienen máximos y/o mínimos? ¿Cuál es el dominio e imagen de cada función?
- Considerando la forma general de la función exponencial del siguiente modo: **$f(x)=k.a^x +b$**, identifique en cada una de las funciones cuáles son los valores de k, a y b e intenten sacar conclusiones acerca de la influencia de cada uno de estos parámetros en la gráfica.
- Complete:
  El valor de “b” indica………………………………… en la gráfica de la función exponencial
  Si $k > 0$ y $\begin{cases} a>1, \text{ entonces la gráfica de la función exponencial es……………….} \\ 0<a<1, \text{ entonces la gráfica de la función exponencial es……………….} \end{cases}$
- ¿Cuál es la raíz y la ordenada al origen en cada función graficada? ¿Cómo se obtienen?

2) Basándose en las conclusiones halladas en el ejercicio anterior, grafique aproximadamente las siguientes funciones hallando la ecuación de su asíntota horizontal, ordenada al origen, raíz (si existe) y hallando algún punto más si es necesario.

a) $f(x) = 3^x - 9$
b) $g(x) = 5^x + 2$
c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$
d) $i(x) = -2.3^x - 1{,}5$

3) Para hallar la raíz de la siguiente función: $f(x) = 2^x - 3$ debemos igualar la fórmula a cero, como en las funciones analizadas anteriormente, entonces nos queda la siguiente ecuación:
$2^x - 3 = 0 \;\rightarrow\; 2^x = 3$. ¿Cuánto debe valer x aproximadamente? ¿Es un valor entero, como en los ejercicios anteriores? Estimen con la calculadora el valor que crean más aproximado. ¿Habrá otra forma de hacerlo que no sea “probando”? ¿Cuál es la operación que permite despejar la “x” del exponente?

4) Resuelva aplicando la definición de logaritmo:

a. $\log_4 64 =$

b. $\log_8 8 =$

c. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) =$

d. $\log\ 0{,}001 =$

e. $\log_2 128 =$

f. $\log_2 \sqrt{2} =$

g. $\log_3 \sqrt[5]{9} =$

h. $\log_{\frac{1}{5}} 25^3 =$

i. $\log_7 \sqrt{343} =$

j. $\log_{\frac{1}{3}} 27 =$

k. $\log_6 \sqrt[4]{36} =$

l. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) =$

m. $\log_{\frac{3}{7}}\left(\frac{49}{9}\right) =$

n. $\log_{\frac{1}{4}} 16 =$

o. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) =$

p. $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\right) =$

q. $\log_5 25^3 =$

r. $\log 1000 =$

s. $\log_2 \sqrt[7]{4^3} =$

t. $\log_8 2 =$

u. $\log_{16} \sqrt[3]{4} =$

v. $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

5) Resuelva aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_2\left(4.1024.\frac{1}{8}\right) =$

b) $\log_7\left(49:\frac{1}{7}\right) =$

c) $\log_{\frac{1}{5}}\left(5.125:\frac{1}{25}\right) =$

d) $\log_3\left(9.\frac{1}{27}\right)^5 =$

e) $\log_2\left(8.\sqrt{2}:\frac{1}{16}\right) =$

f) $\log_6 (36:1296)^3 =$

g) $\log\sqrt{1000} + \log(0{,}0001) - \log(10^9.\frac{1}{10}) =$

h) $\log_{\frac{5}{3}}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}.\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\right)^2 =$

i) $\log_8\left(\dfrac{4.\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{16}{\sqrt[5]{64}}}\right) =$

j) $\log\sqrt{10} + \log(100.10^{18}) + \log(0{,}01)^{-4} =$

6) **Sabiendo que el** $\log_3 10 \cong 2{,}1$ **y** $\log_3 2 \cong 0{,}63$ **, calcula aplicando propiedades de la logaritmación**.

$a)\ \log_3 20 =$ $\quad$ $b)\ \log_3 6 =$ $\quad$ $c)\ \log_3 2{,}5 =$ $\quad$ $d)\ \log_3 0{,}4 =$

7) **Sabiendo que** $\log 2 \cong 0{,}3$ **, calcula:**

$a)\log_5 2 =$ $\quad$ $b)\log_5 \frac{1}{4} =$ $\quad$ $c)\log_{\frac{1}{2}} 20 =$ $\quad$ $d)\log_4 0{,}1 =$

8) **Calcula utilizando la calculadora y escribe el resultado con un error** $\leq 0{,}001$

$\log 10000 =$ $\quad$ $\log_4 0{,}1 =$ $\quad$ $\ln 2 =$ $\quad$ $\log_2 10 =$ $\quad$ $\log 2 =$

$\log_3 72 =$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{2}} 20 =$ $\quad$ $\log_{0,21} 0{,}35 =$ $\quad$ $\ln 500 =$ $\quad$ $\log_3 2187 =$

9) **Expresar como único logaritmo y resolver (aplicar cambio de base sólo cuando sea necesario)**

a. $\log_6 3 + \log_6 72 =$
b. $\log 5 + \log 20 - \log 10 =$
c. $\log_{\sqrt{3}} 4 + \log_3 18 - \log_9 36 =$
d. $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 32 =$
e. $\log_6 9 + \log_6 4 - 2.\log_6 2 =$
f. $\log_{\sqrt{2}} 16 + 5.\log_{\sqrt{2}} 2 - (\log_2 14 + 2\log_2 70) =$
g. $5.\log 7 - 3.\log\left(\frac{1}{2}\right) =$
h. $-3.\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{6} - 7.\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_2 20 =$
i. $\log_{\sqrt{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_3 3 =$
j. $\log_2 32 - \frac{7}{4}\log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \sqrt{2} - \log_4 13 =$

10) **Analiza las siguientes funciones exponenciales aplicando todo lo que aprendiste de las funciones exponenciales y logaritmos**

a) $f(x) = 2^x - 5$
b) $g(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x - 3$
c) u(x)= $-3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 6$
d) $q(x) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$
e) $d(x) = -\frac{1}{4}.5^x + \frac{8}{5}$
f) $p(x) = -1.2^x + 3$
g) $k(x) = 7^x + 1$

11) **Halla la función inversa de f(x)=2^x, de g(x)= $0,5^x$ y de h(x)= 2^x +3. ¿Qué operación aplicaron para poder despejar x? Grafica cada una y compara cada función con su inversa. Saca conclusiones.**

12) **Analiza y grafica las siguientes funciones logarítmicas. Halla las funciones inversas de las 3 primeras y grafícalas en un mismo sistema de ejes cartesianos.**

a) $h(x) = \log_2(x-5)$
b) $f(x) = \log_5(x+4)$
c) $r(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$
d) $q(x) = \ln(x-2)$
e) $t(x) = 2.\log_3(2x-5)$
f) $m(x) = -2.\log_5(x-\frac{3}{2})$
g) $s(x) = \log_2(-3x+9)$
h) $w(x) = -1.\log_{\frac{2}{5}}(4-x)$
i) $z(x) = -\frac{1}{2}.\log_3(4x+10)+6$

13) **Resolver las siguientes ecuaciones y verificar el resultado obtenido:**

a. $\log_3 x = 4$
b. $\log_2(x+5) = 3$
c. $\log_8(3-2x) = 0$
d. $\log_5(x^2+9) = 2$
e. $\log_{\frac{1}{2}}(-4x^2-11x+19) = -4$
f. $\log_{125} x + \log_{25} x + \log_5 x = \dfrac{22}{3}$
g. $\log_3 x + \log_3(x+8) = 2$
h. $\log_2(5-x) + \log_2(2x) = \log_2(x+7)$
i. $\log_5 3 + \log_{25}(16x^2) - \log_{\sqrt{5}} 9 = 0$
j. $\log(3x^2-1) : \log(x+5) = 2$
k. $\log_4 x^2 + \log_2(3x+5) = 3$
l. $\log_7 x + 2.\log_7(x+6) = 2.\log_7 x$
m. $\log_{27} x^3 + \log_3(2x+6) = 2$

14) **Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $4^{\frac{x}{6}} = 2$
b) $3^{x+1} = 27$
c) $2^{x+1} = \frac{1}{8}$
d) $25^{x-2} = 5^{x+3}$
e) $9^{2x-1} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x+3}$
f) $16^{\frac{x}{2}-1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{x}$
g) $3^{2x-1} = 5^{x-1}$
h) $2^{x+1} = 1{,}5^{x}$
i) $2^{x+1}.2^{3x} = 8$
j) $3^{4x-3}.9^{x} = \frac{1}{3}$
k) $5^{x}.25^{0,5x+4} = 125$
l) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}.4^{x+2} = 16^{x}$
m) $5^{x+2} + 3.5^{x+1} - 8 = 0$
n) $3^{x+3} + 2.3^{x-1} = 79$
o) $2^{2x} - 2^{x} - 6 = 0$
p) $e^{2x} - 5.(e^{x}-1) - 1 = 0$
q) $5^{2x} - 15.5^{x-1} - 3 = 7$
r) $3^{2x} - 10.(3^{x}-1) - 1 = 0$
s) $49.7^{x+1} + 7^{x+4} = 56$
t) $5^{x-1}.\left(\frac{1}{125}\right).25^{x} = 5^{x}$
u) $3.2^{x+1} + 2^{x-2} = 50$

15) **Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:**

$a)\begin{cases} 3^{2x}.9^{y} = 27 \\ 5^{x}.\sqrt{5} = 5^{y} \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log y - \log x = \log 2{,}5 \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

16) **Plantee y resuelva los siguientes problemas (en cada caso grafique la función obtenida e indique dominio e imagen de la misma):**

a) En un banco, ofrecen una tasa de interés del 1% mensual en los depósitos a plazo fijo. Se coloca un capital de $500 durante un año. ¿Cuál será el monto que se puede retirar al finalizar el año? ¿Y en dos años y 9 meses? Encuentre la función que permita calcular el monto que se puede retirar, en función de los meses transcurridos.

b) La masa de una población de bacterias aumenta un 25% por hora. En un determinado momento, se colocan 120g de bacterias en una cubeta. ¿cuántos gramos de bacterias habrá al cabo de una hora? ¿y de 2 horas? ¿y de 3 horas? ¿y de t horas?

c) Realice el problema anterior pero teniendo una población inicial de 60g y un porcentaje de aumento del 30% por hora. ¿En qué momento hay la misma cantidad de bacterias de ambas poblaciones?

d) La población de un país sudamericano ha estado creciendo exponencialmente según la fórmula: $P(t) = 50.e^{0,028t}$ donde t es la cantidad de años transcurridos y la población está expresada en millones de habitantes.

d.1) ¿Cuál es la población inicial?

d.2) ¿Qué cantidad de habitantes habrá luego de 3 años de haber empezado la observación?

d.3) ¿Luego de cuántos años la población habrá crecido un 35% respecto de la cantidad inicial?

e) Se adquiere una máquina por 15000 pesos. El valor de la máquina producto de la depreciación desde la fecha de adquisición está dada por la fórmula $D(x) = 15000.2{,}4^{-x}$ donde x es la cantidad de años posteriores a la compra.

1. Calcule el valor de la máquina luego de 5 años.
2. ¿Al cabo de cuántos años el valor de la máquina es del 40% de su valor inicial?

f) En un laboratorio se observa una sustancia radiactiva. Uno de los científicos nota que 6 días después de comenzada la observación, la masa es de 1,5 Kg., y 15 días y medio, la masa es de 950 g.

1. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la masa remanente en función del tiempo?
2. ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?
3. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por día, semana y hora?

g) Martín está buscando el banco que le dé mejores beneficios. Buscando en Internet, en la página de los bancos, encuentra que el banco “Ave” da por los depósitos un interés del 12% anual. El banco “Fénix ofrece el 1% mensual capitalizable cada mes. Fernando dice que los dos bancos ofrecen lo mismo, pero Martín dice que no. ¿Quién tiene razón? ¿Cuál sería la función en cada caso? Si depositara un capital inicial de $6000, ¿cuánto retiraría en cada banco al cabo de 3 años?

h) Una sustancia radiactiva pierde el 3% de su masa cada día. Diez días después de comenzada la observación, se tienen 150g. ¿Cuántos gramos de sustancia había al comenzar la observación? ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por hora? ¿Y por semana? ¿Después de cuánto tiempo se reduce la masa de la sustancia a la mitad?

i) El volumen de ventas de una marca de detergente disminuye después de una campaña publicitaria de acuerdo a la fórmula $V(t) = 750.1{,}3^{-t}$ donde t es el tiempo en meses y el volumen de ventas está expresado en miles. La siguiente campaña está planeada para cuando el volumen de ventas haya disminuido en un 30% de su valor inicial. ¿Cuánto tiempo pasará entre dos campañas sucesivas?