

# **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

DEFINICIÓN PREVIA:

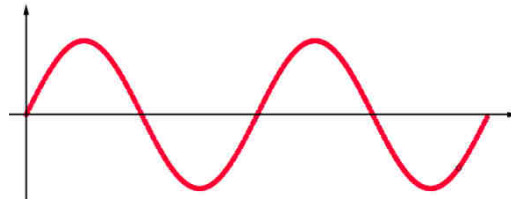
Una **función periódica** es aquella que se repite una y otra vez en una dirección horizontal.

El **periodo** de una función periódica es la longitud de un ciclo (o repetición).

$f(x)$  es una función periódica con periodo  $p$ , si para todo  $x$  se cumple:

$$f(x + p) = f(x) \quad (1)$$

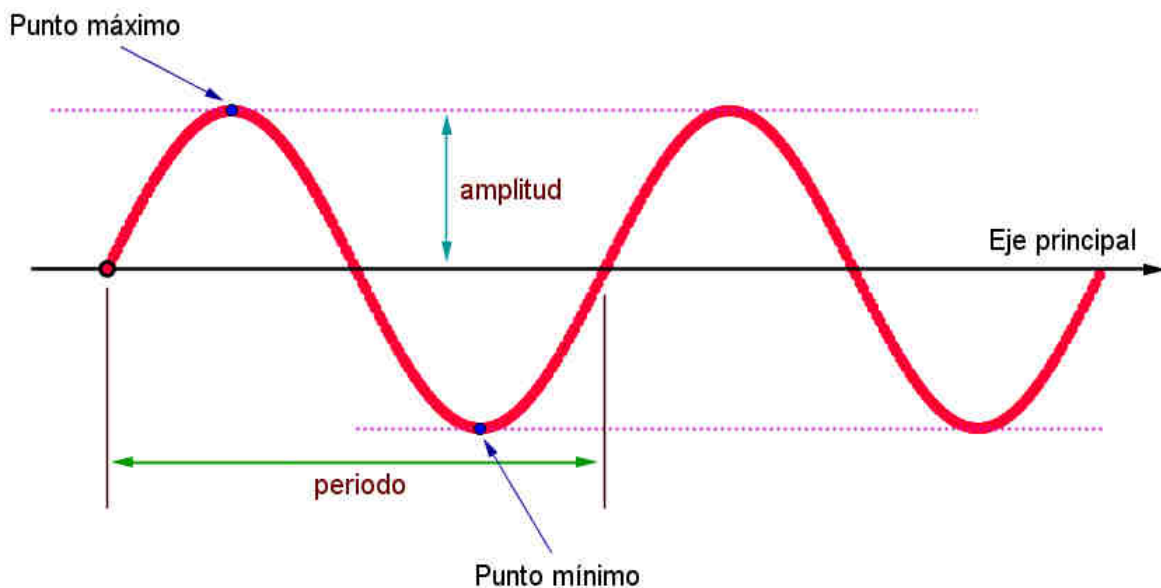
Donde  $p$  es el menor valor positivo para el cual la afirmación (1) es cierta.



## **Observando el comportamiento del periodo**

El **punto máximo** se produce en la parte superior de una cresta y un punto mínimo en la parte inferior de un canal.

La **amplitud** es la distancia entre un máximo (o mínimo) el punto y el eje principal

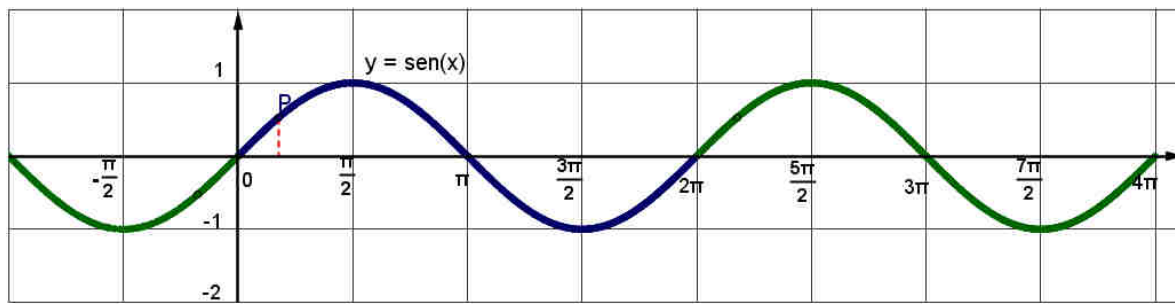


## **FUNCIÓN SENO:**

Se conoce con el nombre de función seno a la función  $F$  definida como:  $F(x) = \sin x$

La función seno es una función real de variable real, por ello se representa gráficamente en el plano cartesiano.

Haciendo una tabla de valores, podemos obtener el siguiente gráfico de la función seno:



En azul está señalado un período (ciclo) de la función.

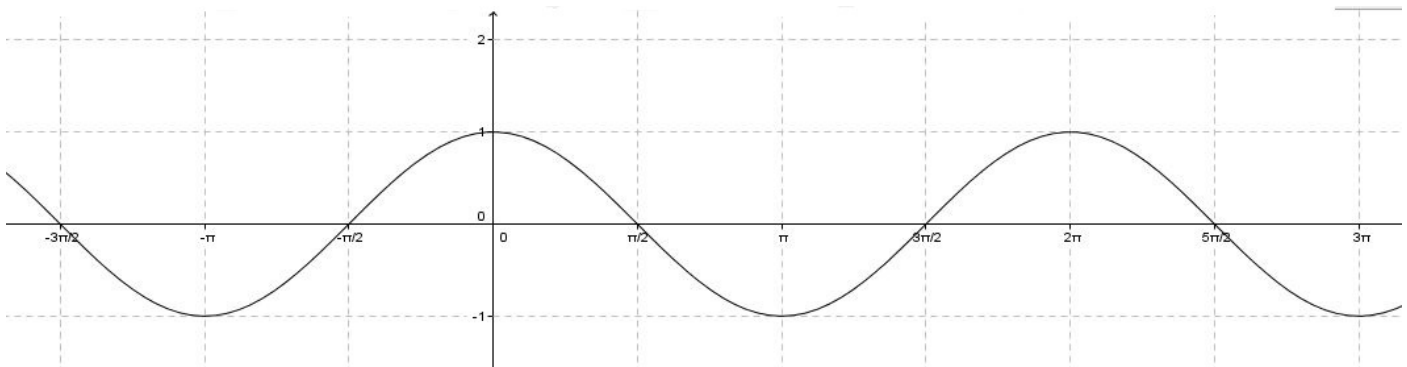
Características:

- Periodo:  $2\pi$
- Rango (imagen):  $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Amplitud: 1

## **FUNCIÓN COSENO:**

$$F(x) = \cos x$$

Posee las mismas características que la función seno, pero se puede comprobar mediante una tabla de valores que su gráfica es:

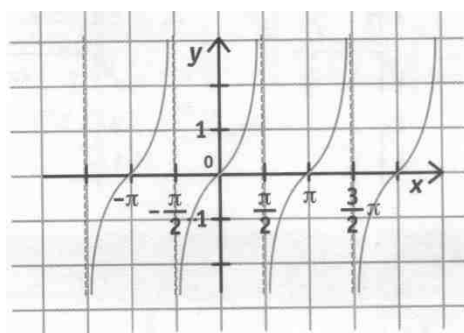


## **FUNCIÓN TANGENTE:**

La función tangente de  $x$  es:  $F(x) = \operatorname{tg} x$ .

Se puede definir como  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ . Por lo tanto no existe la función tangente para aquellos valores donde el coseno valga cero.

Veamos su gráfica:



- La representación gráfica nos permite apreciar que la función  $f(x) = \operatorname{tg} x$  no está definida para los valores de  $x$  correspondientes a ángulos cuyo lado terminal está incluido en el eje de ordenadas. Es decir que:

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{ \dots - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 3 \frac{\pi}{2}; \dots \right\}$$

- En cada uno de estos valores excluidos del dominio, la gráfica presenta una asíntota vertical.
- El período de esta función es  $T = \pi$ .
- No tiene máximo ni mínimo, y su imagen es  $\mathbb{R}$ .

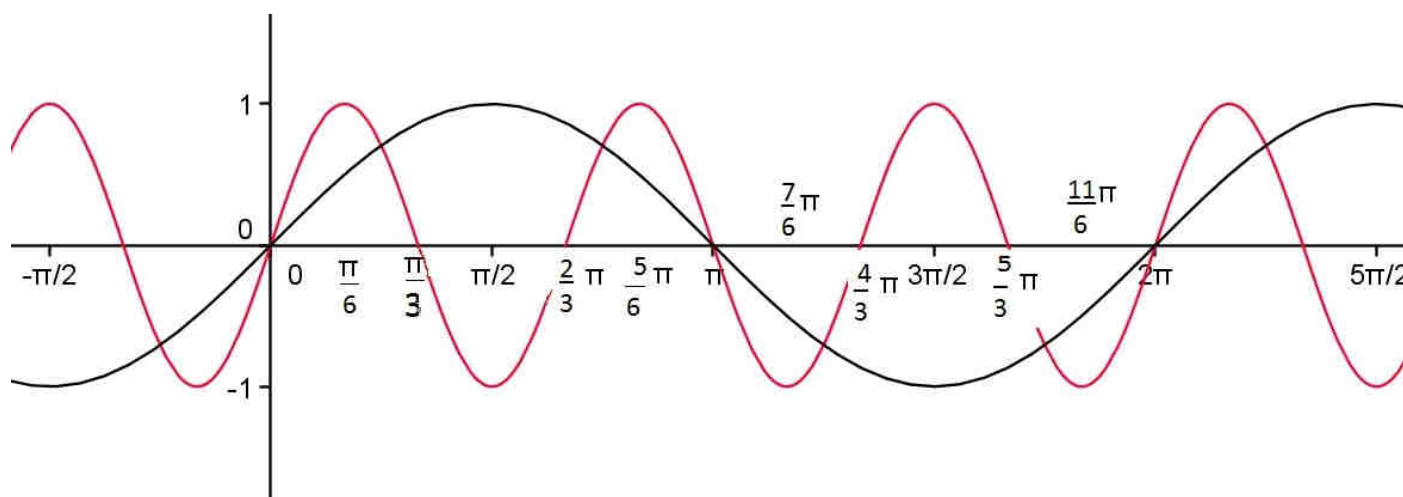
## EJEMPLOS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA INTERPRETAR/DEDUCIR LA VARIACIÓN DE PARÁMETROS:

Para los siguientes ejemplos donde vamos a ir variando los parámetros, compararemos la gráfica con la de  $f(x)=\text{sen}(x)$  para identificar las diferencias.

El primer ejemplo que analizaremos será  $g(x)=\text{sen}(3x)$ .

Para hacer su gráfico, simplemente haremos una tabla con algunos valores.

x	Y=g(x)
0	0
$\pi/6$	1
$\pi/3$	0
$\pi/2$	-1
$2\pi/3$	0
$5\pi/6$	1
$\pi$	0



(La gráfica en negro es  $f(x)=\text{sen}(x)$  y la del otro color es  $g(x)=\text{sen}(3x)$ )

Observemos que en el caso de  $g(x)$  el período es  $\frac{2}{3}\pi$ , es decir que en el intervalo  $[0; \frac{2}{3}\pi]$  pudimos graficar un ciclo completo de la función. En cambio en el caso de  $f(x)$  eso sucedía entre  $[0; 2\pi]$ .

También podemos decir que en el intervalo  $[0; 2\pi]$  cabe tres veces completas la gráfica de un ciclo completo de la función. Por lo tanto el número “3” que multiplica a la  $x$ , afecta a la gráfica en el sentido que la “contrae”. Y podemos decir que ese número “3” coincide con la cantidad de veces que cabe un ciclo completo en el intervalo  $[0; 2\pi]$ .

Ese número que multiplica a la variable  $x$  lo llamaremos “frecuencia”. Es decir si una función es del tipo  $w(x)=\text{sen}(f \cdot x)$ ,  **$f$  es la frecuencia de la función**. Y este número  $f$  nos servirá para averiguar el período de la función (es decir el intervalo mínimo en el que cabe la gráfica de un ciclo completo). El período lo definimos con la letra  $T$  y se calcula:  $T = \frac{2\pi}{f}$

Para el caso de nuestra función  $g(x)=\text{sen}(3x)$ , el período lo calculamos haciendo  $T = \frac{2\pi}{3}$  (que fue lo que ya habíamos observado en el gráfico).

Por otro lado veamos que la primer raíz positiva que observamos es  $\pi/3$ , cuyo valor es la mitad del período de la función (es decir es la mitad de  $2/3 \pi$ ). (Esto es igual que en la función  $f(x)=\sin(x)$  dado que su primer raíz positiva es  $\pi$ , que es la mitad del período  $2\pi$ ).

Y a su vez el máximo se da en el punto medio entre 0 y la primer raíz. En el caso de  $\sin(x)$  el máximo es en  $\pi/2$ , pero en el caso de  $\sin(3x)$  el máximo está en  $\pi/6$  (la mitad entre cero y  $\pi/3$ ).

El mismo razonamiento podemos hacer con los mínimos. En el caso de  $\sin(x)$  tenemos uno de los mínimos en  $3/2 \pi$  que es el punto medio entre la segunda raíz positiva  $\pi$  y  $2\pi$  (fin del período y tercera raíz positiva).

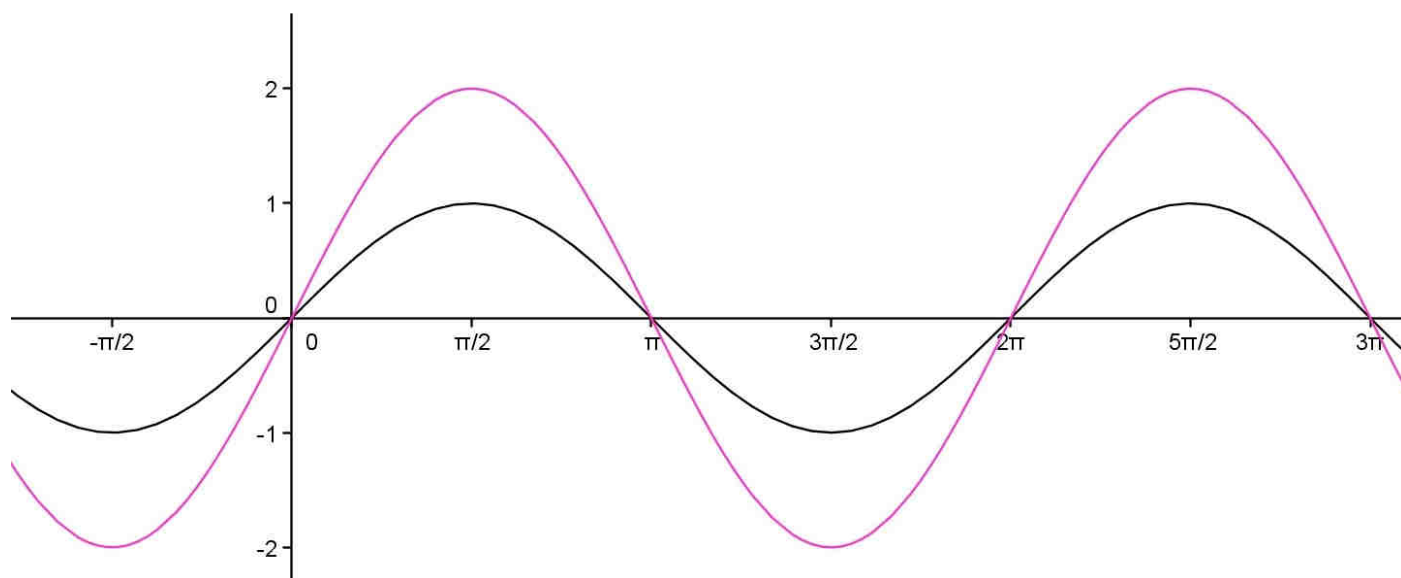
Lo mismo sucede con  $\sin(3x)$ . Uno de los mínimos está en  $\pi/2$  que es el punto medio entre  $\pi/3$  y  $2/3 \pi$  (es decir el punto medio entre la 2ª y 3ª raíz).

Observar que lo que no varió respecto de la gráfica de  $\sin(x)$  es que los valores máximos y mínimos son 1 y -1 respectivamente.

Ahora analicemos  **$h(x)=2\sin(x)$**

Otra vez, realicemos una tabla de valores para realizar su gráfico (y compararemos con  $f(x)=\sin(x)$ )

x	Y=g(x)
0	0
$\pi/2$	2
$\pi$	0
$3\pi/2$	-2
$2\pi$	0

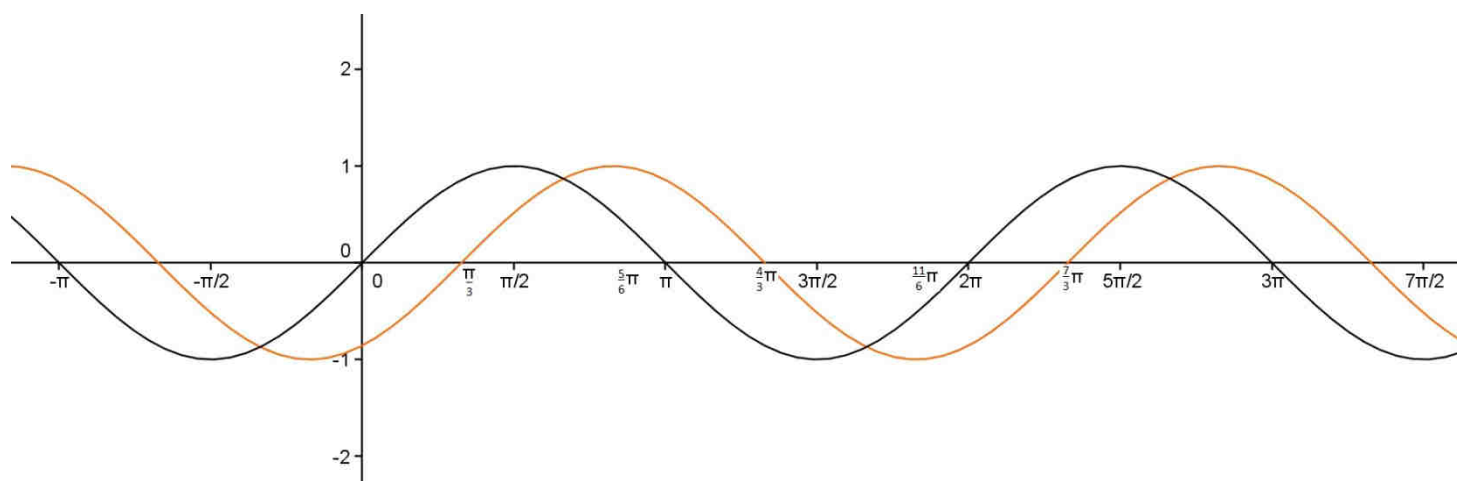


Comparando con la gráfica de  $f(x)=\sin(x)$  lo que se puede observar es que coinciden las raíces y el período (dado que en ambos caso la frecuencia es 1). También coincide que los máximos y los mínimos en el intervalo de  $[0;2\pi]$  se dan en  $\pi/2$  y en  $3/2 \pi$  respectivamente, pero los valores máximos y mínimos cambiaron. En el caso de  $h(x)$  son 2 y -2, dado que al multiplicar al  $\sin(x)$  por 2, duplicamos la y. Por lo tanto en el caso de  $h(x)=2\sin(x)$  la imagen es  $[-2;2]$ , (se “estiró” verticalmente 2 unidades). Y esto tiene que ver con el número que multiplica al  $\sin(x)$ . Dicho número lo llamaremos “amplitud” y lo que produce es un “estiramiento” o “achataamiento” de la función.  $T(x)=k.\sin(x)$ . Si  $k>1$  la función se “estirará” (como en nuestro ejemplo) pero si fuese  $0<k<1$  entonces la función se “achata”.

¿Qué sucede si  $k<0$ , decir si es negativo? En ese caso se “invierte” la gráfica. Si por ejemplo, tenemos  $p(x)=-\sin(x)$ , tendríamos primero el mínimo en  $\pi/2$  y luego el máximo en  $3/2 \pi$ .

Analicemos ahora  $i(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})$

Haciendo una tabla de valores, obtenemos la siguiente gráfica:



Observemos que es la misma gráfica que  $\text{sen}(x)$  pero desplazada  $\pi/3$  unidades hacia la derecha. Verifiquemos que las raíces y los máximos también están desplazados  $\pi/3$  unidades hacia la derecha respecto de la función  $\text{sen}(x)$ .

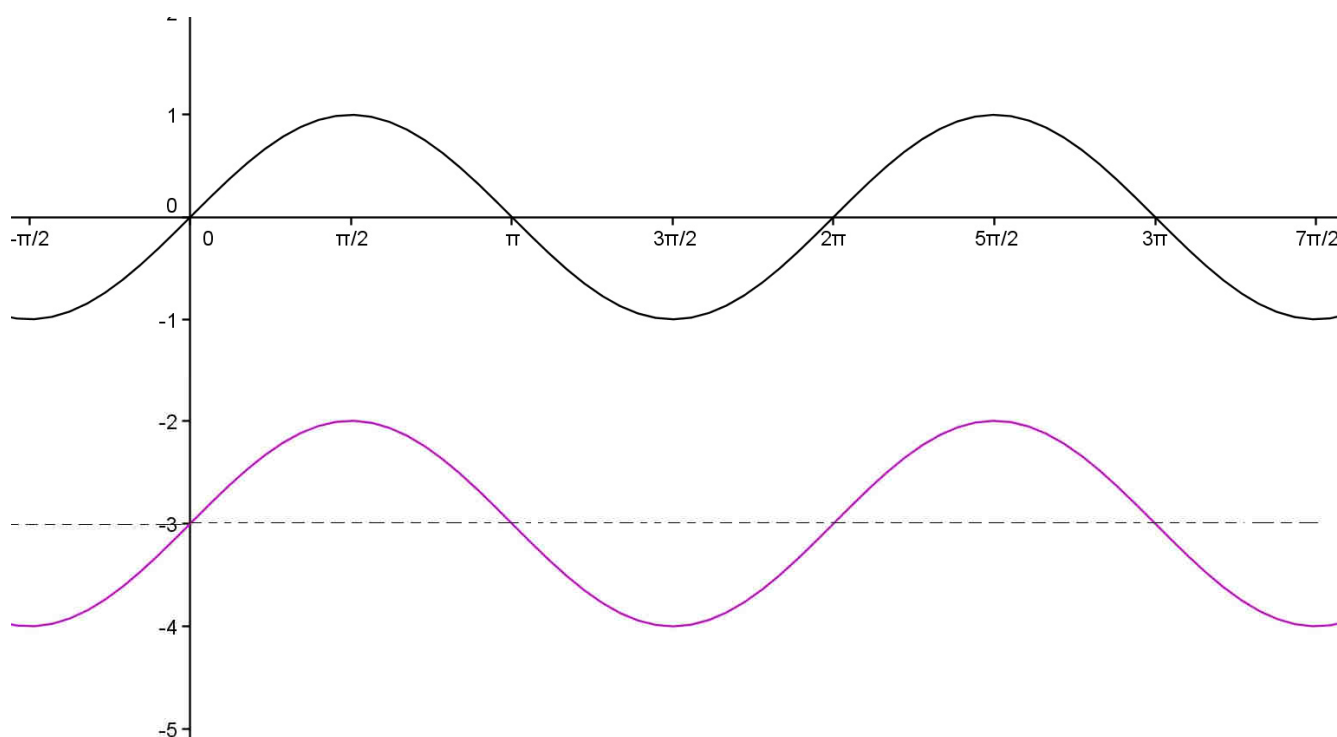
Las primeras raíces positivas de  $i(x)$  son  $\pi/3$ ,  $4\pi/3$  y  $7\pi/3$ . El primer máximo positivo se da en  $5\pi/6$  (que es  $\pi/2 + \pi/3$ ). Y lo mismo sucede con el mínimo que se da en el caso de  $i(x)$  en  $11\pi/6$  (que es  $3\pi/2 + \pi/3$ ).

El período de  $i(x)$  también es  $2\pi$  pero un ciclo completo lo vemos en el intervalo  $[\pi/3; 7\pi/3]$ , es decir que lo vemos desplazado a la derecha  $\pi/3$  unidades respecto de  $\text{sen}(x)$ .

Por lo tanto si un valor afecta a la variable  $x$  sumando o restando, lo que produce es un desplazamiento horizontal de su gráfica (siempre comparándola con  $\text{sen}(x)$ ). Ese valor lo llamamos “ángulo de fase”, y si tomamos como función genérica  $m(x) = \text{sen}(bx+c)$ , el ángulo de fase lo calculamos haciendo  $-c/b$  (verifiquenlo en este caso).

Ahora analicemos  $j(x) = \text{sen}(x) - 3$

Si hacemos una tabla de valores para graficar, observaremos que respecto de la tabla de  $f(x) = \text{sen}(x)$  todos los valores de  $y$  están desplazados hacia abajo 3 unidades y por lo tanto su representación será la siguiente:



(Se trazó una línea punteada sobre  $y=-3$  para hacer las veces de un eje imaginario similar al eje  $x$ )

Observemos que el período de la función  $j(x)$  es  $2\pi$  al igual que  $f(x)=\sin(x)$ , pero la imagen de  $j(x)$  es  $[-4;-2]$ , es decir el valor máximo es  $-2$  (o sea  $1-3$ ) y el mínimo es  $-4$  (es decir  $-1-3$ ).

Por lo tanto si una constante “ $d$ ” suma o resta al  $\sin(x)$ , la desplaza verticalmente “ $d$ ” unidades hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

---

Resumiendo todos los ejemplos analizados podemos decir que la forma general de la función seno es:

$$F(x)=k.\sin (bx+c) +d$$

Siendo  $k$  la amplitud,  $b$  la frecuencia,  $d$  las unidades de desplazamiento vertical de la función y  $-c/b$  el ángulo de fase, es decir las unidades de desplazamiento horizontal de la función.

Por último, analicemos un ejemplo en el que varían esos parámetros  $k$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

Nuestro último ejemplo por hoy será:  **$r(x)=-3.\sin (0,5x) +1$**

En este caso  $k=-3$  y  $d=1$ . Por lo tanto el eje imaginario estará en  $y=1$  y al ser  $-3$  la amplitud, el máximo estará 3 unidades por arriba de 1 y el mínimo 3 unidades por debajo. Por lo tanto la imagen de  $r(x)$  será  $[-2; 4]$ . Ahora bien, como  $k$  es negativo, la curva comienza “hacia abajo” (es decir, se invierte respecto de  $\sin(x)$ )

Como  $b=0,5$  entonces el período es  $T=2\pi/0,5$ . Es decir  $T=4\pi$ . Y como  $c=0$  no hay ángulo de fase (por lo tanto la gráfica no está desplazada horizontalmente). Y entonces el intervalo mínimo donde veremos un ciclo completo de la función  $r(x)$  será  $[0; 4\pi]$

El primer mínimo en dicho intervalo será en la cuarta parte de ese intervalo (observar que los máximos y los mínimos de  $\sin(x)$  se encuentran en la cuarta parte de intervalo  $[0; 2\pi]$ . El máximo está en  $\pi/2$  que es  $2\pi/4$  y el mínimo en  $3\pi/2$  que es la  $3/4$  parte del intervalo  $[0; 2\pi]$ )

Por lo tanto, el mínimo en el caso de  $r(x)$  estará en  $4\pi/4$ , es decir en  $\pi$ . Y el máximo en  $(3/4).4\pi$ , es decir en  $3\pi$ .

También se pueden hallar estos valores de manera analítica, planteando que si  $r(x)$  alcanza un máximo este será 4, por lo tanto si planteamos la siguiente ecuación (en el intervalo  $[0;4\pi]$ ) tenemos:

$$-3.\sin (0,5x) +1=4$$

$$\sin(0,5x)=(4-1)/-3$$

$$\sin(0,5x)=-1$$

Sabemos que el seno vale  $-1$  si el ángulo es  $3\pi/2$ . Por lo tanto si  $0,5x=3\pi/2$  y despejamos obtenemos que  $x= 3\pi$

-----

Del mismo modo podemos hacer con el mínimo, igualando  $r(x)$  a  $-2$  y así nos queda:

$$-3.\sin (0,5x) +1=-2$$

$$\sin (0,5x)=(-2-1)/-3$$

$$\sin (0,5x)=1$$

Sabemos que el seno vale 1 si el ángulo es  $\pi/2$ . Por lo tanto si  $0,5x=\pi/2$  y despejamos obtenemos que  $x= \pi$ .

---

Hallemos sus raíces:

$$-3 \cdot \text{Sen}(0,5x) + 1 = 0$$

$\text{Sen}(0,5x) = 1/3$  (como estamos buscando el valor de los ángulos cuyo seno es positivo, tendremos una solución en el primer cuadrante y otra en el segundo. La calculadora sólo nos devolverá el resultado del primer cuadrante ( $\alpha$ ), pero por propiedades vistas en clase, sabemos que el otro ángulo es  $\pi - \alpha$ . Recordar que hay que utilizar la calculadora en el modo rad)

$$0,5x = \arcsen 1/3$$

$$0,5x = 0,3398 + 2k\pi \quad (0,3398 = 0,11\pi \text{ aprox})$$

$$x = (0,11\pi + 2k\pi) : 0,5$$

$$x = \frac{11}{50}\pi + 4\pi$$

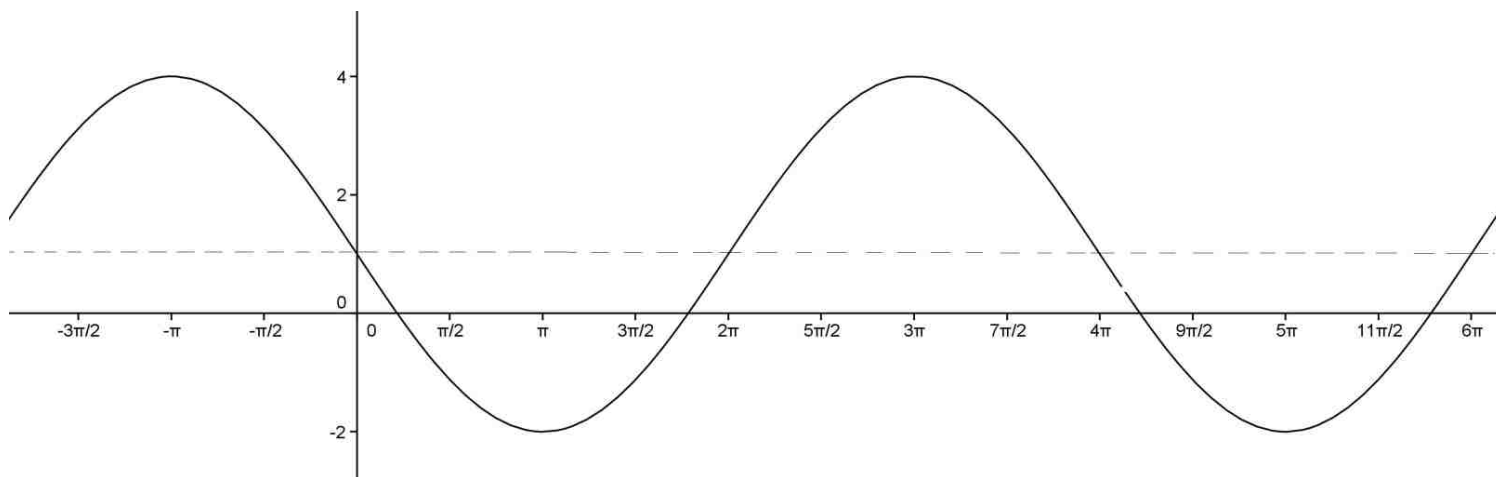
o en el segundo cuadrante:

$$0,5x = (\pi - 0,11\pi) + 2k\pi$$

$$x = (0,89\pi + 2k\pi) : 0,5$$

$$x = \frac{89}{50}\pi + 4\pi$$

Con todo lo anterior, de todos modos, podemos hacer un gráfico aproximado de la función:  $r(x) = -3 \cdot \text{Sen}(0,5x) + 1$



Análogamente en la función **coseno** se cumplen las mismas propiedades analizadas en los ejemplos anteriores para la función *seno*, pero teniendo en cuenta las características gráficas de la función  $\cos(x)$ .