

# ***ANALISI MATEMATICA II***

***Prof. Giuseppe Cardone – A.A. 2022/23***



## ***INDICE DEGLI ARGOMENTI***

### **SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI**

1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI (p. 3)
2. SERIE DI FUNZIONI (p. 9)
3. SERIE DI POTENZE (p. 13)

### **FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI**

4. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE (p. 22)
5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE (p. 26)
6. FUNZIONI IN DUE VARIABILI (p. 33)
7. LIMITI E DERIVATE DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI (p. 39)
8. DIFFERENZIABILITÀ DI UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI (p. 44)
9. DERIVATE DIREZIONALI (p. 48)
10. FUNZIONI IMPLICITE (p. 51)
11. FUNZIONI COMPOSTE (p. 55)
12. MASSIMI E MINIMI RELATIVI (p. 57)
13. MASSIMI E MINIMI VINCOLATI (p. 60)

### **CURVE, SUPERFICI E INTEGRALI MULTIPLI**

14. CURVE E INTEGRALI CURVILINEI (p. 64)
15. VETTORE TANGENTE E VETTORE NORMALE AD UNA CURVA (p. 68)
16. DOMINI NORMALI E INTEGRALI DOPPI (p. 70)
17. INTEGRALI TRIPLI (p. 77)
18. FORME DIFFERENZIALI LINEARI (p. 80)
19. FORME DIFFERENZIALI LINEARI NELLO SPAZIO (p. 87)
20. SUPERFICI REGOLARI (p. 91)
21. INTEGRALI SUPERFICIALI (p. 97)
22. SUPERFICI REGOLARI CON BORDO (p. 104)

## SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

### SUCCESSIONI DI FUNZIONI

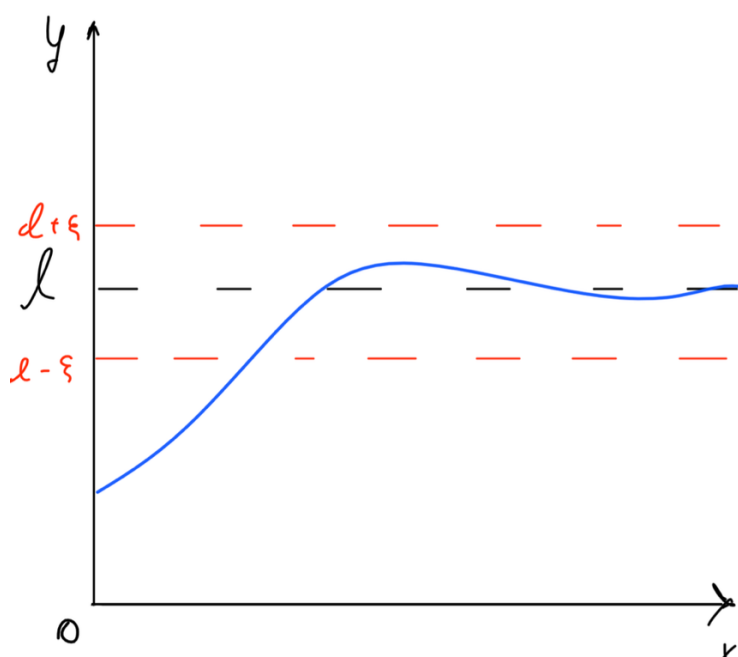
Una **successione numerica** si configura come:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$$

Si può notare che i valori della successione **dipendono** unicamente dalla variabile naturale **n**. Studiandone il limite:

$$\lim_n a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0 : \forall n > v_\varepsilon |a_n - l| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$



Anche dalla definizione di limite si può vedere che **le successioni numeriche dipendono solo da una variabile**.

Sia presa una **funzione reale di variabile reale**, definita in un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ :

$$f: x \in I \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

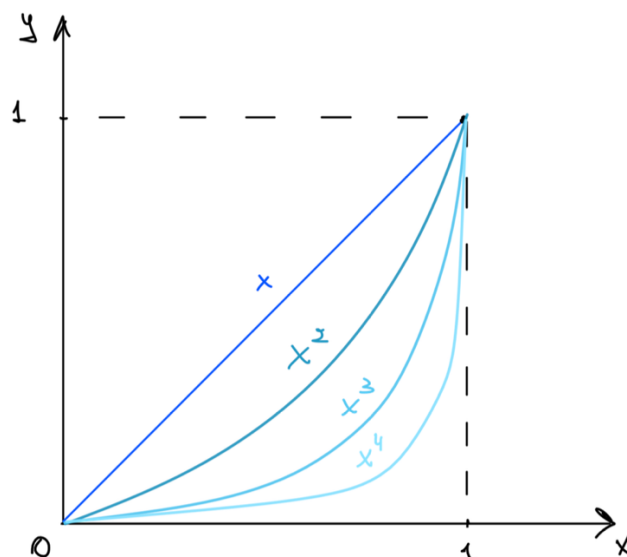
Nel momento in cui tale **funzione varia in base ad un parametro  $n \in \mathbb{N}$**  si ottiene una **successione di funzioni** che, di fatto, **dipende da due variabili**:  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in I$ :

$$f_n(x) = \{f_1(x); f_2(x); f_3(x); \dots; f_n(x)\}$$

Un esempio di successione di funzione è la seguente:

$$f_n(x) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}} = \{x^1; x^2; x^3; \dots; x^n\} \forall x \in I = [0; 1]$$

È possibile studiare una successione di funzione fissando una  $n$  e studiando tale funzione



Preso una successione di funzione  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  e un punto  $x_0 \in I$ , la successione **converge nel punto**  $x_0$  se la successione (che ora è numerica perché dipende unicamente da  $n$ )  $f_n(x_0)$  converge. Riprendendo l'esempio precedente:

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

La successione converge e, quindi, la relativa **successione di funzione converge in un punto**. Allora si dice che  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  **converge puntualmente in  $I \Leftrightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\forall x \in I$** .

$$x_0 = 0 \Rightarrow f_n(0) = (0)^n \Rightarrow \lim_n (0)^n = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow f_n(1) = (1)^n \Rightarrow \lim_n (1)^n = 1$$

Si può dire che  $f_n(x) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente in  $I = [0; 1]$ .

Come è possibile fare il limite di una successione numerica, è **possibile fare il limite di una successione di funzioni**; tuttavia, il limite **non sarà unico**, infatti se una successione numerica è composta di valori numerici, una successione di funzioni sarà composta di funzioni e, quindi, **il limite sarà una funzione**.

Si supponga che  $\forall x \in I, f_n(x) \rightarrow l_x$ , dove  $x$  è un valore fissato e  $l_x$  dipende da  $x$ . Sia:

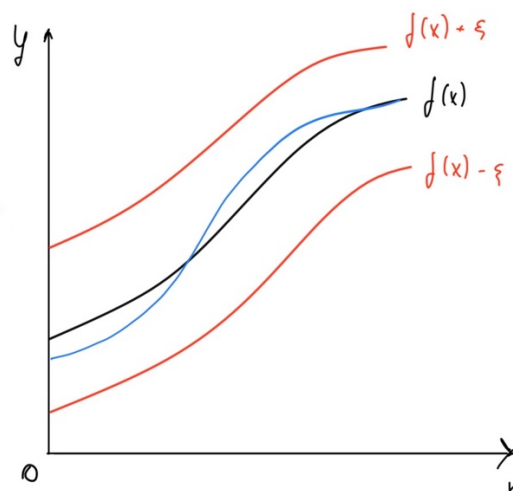
$$\lim_n f_n(x) = l_x \in \mathbb{R}$$

**La corrispondenza appena mostrata è essa stessa una funzione:**

$$f: x \in I \rightarrow l_x = \lim_n f_n(x) = f(x)$$

Tale funzione viene detta **funzione limite**. Si dice che:  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  in  $I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall x \in I \exists v_{\varepsilon x} > 0 : \forall n > v_{\varepsilon x} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , ovvero  $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

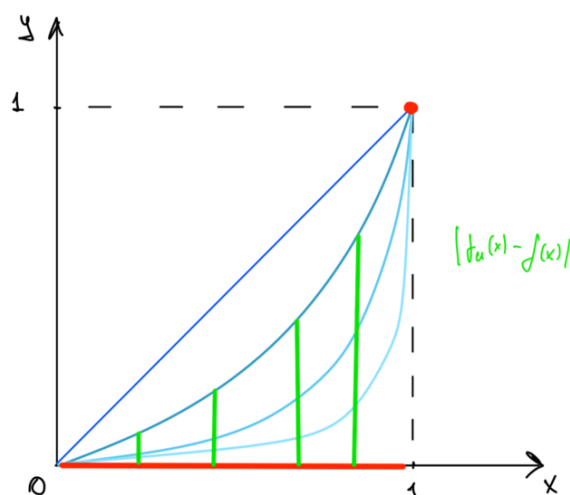


Si può notare come il parametro  $v$  è **dipendente sia da  $\varepsilon$  che da  $x$** , mentre per le successioni il limite era unicamente dipendente da  $\varepsilon$ .

Ad esempio, con la successione di funzione  $f_n(x) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $[0; 1]$ , la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x \in [0; 1) \\ 1 & \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_n |x^n - f(x)| = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x \in [0; 1) \\ 0 & \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$



Da ciò si deduce che la successione converge puntualmente a  $f$  in  $[0; 1]$

Supponendo che  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  in  $I$ , si dice che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_{\varepsilon} > 0 : \forall n > v_{\varepsilon} \forall x \in I |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . In questo caso la definizione è indipendente da  $x$ , appunto uniformemente a  $x$ , il che non avviene nella convergenza puntuale.

## DIMOSTRAZIONE CONVERGENZA UNIFORME

*Ipotesi:*

$$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

*Tesi:*

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } I \Leftrightarrow \lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

*Dimostrazione:*

Ciò equivale a dimostrare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0 : \forall n > v_\varepsilon \forall x \in I \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , ma poiché la funzione converge uniformemente vale  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  e se vale per un qualsiasi valore allora vale anche per l'elemento "maggiore".

CVD

## DIMOSTRAZIONE RELAZIONE CONVERGENZA UNIFORME E PUNTUALE

*Ipotesi:*

$f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $I$

*Tesi:*

$f_n$  converge puntualmente a  $f$  in  $I$

*Dimostrazione:*

Poiché:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

È possibile dire:

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ uniformemente in } I &\Rightarrow \lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in I \\ &\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ puntualmente in } I \end{aligned}$$

CVD

Il teorema costituisce una **semplice implicazione**, cioè **non vale il teorema inverso** e lo si può dimostrare considerando l'esempio di successione di funzione portato precedentemente,  $f_n(x) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\lim_n \sup_{x \in [0;1]} |x^n - f(x)| = 1 \neq 0$$

Ciò significa che  $f_n$  non converge uniformemente a  $f$  in  $[0; 1]$ , sebbene converga puntualmente.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA CONTINUITÀ DEL LIMITE

*Ipotesi:*

$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n$  è continua in  $I$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente in  $I$

*Tesi:*

$f$  è continua in  $I$

*Dimostrazione:*

Per la definizione di convergenza uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n > \nu_\varepsilon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Bisogna dimostrare che in corrispondenza degli stessi parametri vale la seguente disuguaglianza:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sia considerato il termine in esame e siano sottratte e sommate le stesse quantità:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Grazie alla disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Il primo e il terzo termine possono essere ridotti a  $\varepsilon$  ed anche il secondo in quanto  $f_n$  è continua:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon < \varepsilon$$

È stato dimostrato che, in corrispondenza di  $\varepsilon > 0$ , la funzione limite è continua:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

CVD

Poiché questo teorema costituisce una **condizione necessaria ma non sufficiente**, esso può essere usato come **criterio per la non convergenza di una successione di funzioni**: determinare che la funzione limite non è continua significa dire che il teorema non è valido e che, quindi, la successione non è uniformemente convergente.



## ENUNCIATO TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA

*Ipotesi:*

$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n$  è derivabile in  $I$

$f_n$  converge in un punto  $x_0 \in I$

$f'_n \rightarrow g$  uniformemente in  $I$

*Tesi:*

1.  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $I : f$  è derivabile
2.  $f'(x) = g(x)$

La seconda tesi prende il nome di passaggio al limite sotto al segno di derivata, infatti:

$$f'(x) = D \left( \lim_n f_n(x) \right) \wedge g(x) = \lim_n D(f_n(x))$$

$$f'(x) = D \left( \lim_n f_n(x) \right) = \lim_n D(f_n(x)) = g(x)$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE

*Ipotesi:*

$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n$  è continua in  $[a; b]$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente in  $[a; b]$

*Tesi:*

1.  $f$  è integrabile in  $[a; b]$
2.  $\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

*Dimostrazione:*

La seconda ipotesi prende il nome di passaggio al limite sotto al segno d'integrale. Grazie al teorema di continuità del limite è possibile dire che:

$$f_n \text{ è continua} \Rightarrow f \text{ è continua} \Rightarrow f \text{ è integrabile}$$

Sia presa in considerazione la seguente catena di relazioni:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \sup |f_n(x) - f(x)| \int_a^b dx = \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - f(x)| (b - a) \end{aligned}$$

Ma poiché la successione è uniformemente convergente, questa quantità tende a zero, il che significa:

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \rightarrow 0$$

CVD

Come per le **successioni numeriche**, anche per le **successioni di funzioni** è possibile definire un **criterio di Cauchy**. Per le successioni numeriche:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è una successione convergente } \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è una successione di Cauchy } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0: \forall n, m > v_\varepsilon, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per le successioni di funzioni si ricorre al **criterio di Cauchy uniforme**:

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente in } I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0: \forall n, m > v_\varepsilon, |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in I$$

Considerando  $p = m - n \Rightarrow m = n + p$ :

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente in } I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0: \forall n, m > v_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N}, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in I$$

## SERIE DI FUNZIONI

Sia presa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una **successione numerica** e si definisca **successione delle somme parziali**  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quella successione numerica che ad ogni termine associa la somma dei primi  $n$  termini della successione  $a_n$ :

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Si definisce **serie numerica** la coppia di successioni  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  così definita:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

**Studiare una serie** significa studiare **come evolve la successione delle somme parziali** man mano che si aumentano i termini. Dunque, una successione numerica può:

- **Divergere**, se la successione  $s_n$  diverge;
- **Convergere**, se la successione  $s_n$  converge;
- **Oscillare**, se la successione  $s_n$  ha limite indeterminato;

Se la successione  $s_n$  converge ad un valore  $s$ , tale valore si dice somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Se invece diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \infty$$

Intuitivamente si potrebbe dire che **la successione delle somme parziali diverge sempre**, in quanto si va sempre ad aggiungere qualcosa. Ciò è **sbagliato**, in quanto può accadere che con **n che va all'infinito il termine n-esimo della successione  $a_n$  tenda a 0**; in tal caso **si somma ad una quantità un qualcosa prossimo allo zero**, risultando in una somma che non varia all'aggiunta di termini.

Un discorso analogo può essere sviluppato per le successioni di funzioni; infatti, presa una **successione di funzioni**  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $I$  si dice **successione (di funzioni) delle somme parziali**  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$$

E, di conseguenza, si dice **serie di funzioni**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$$

Questa serie di funzioni può convergere puntualmente o uniformemente ad una funzione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge puntualmente in } I \Leftrightarrow s_n(x) \text{ converge puntualmente in } I$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente in } I \Leftrightarrow s_n(x) \text{ converge uniformemente in } I$$

Inoltre, se vale una di queste due condizioni  $\lim_n s_n(x) = f(x) \Rightarrow f(x)$  è la somma della serie e si può dire:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Dal momento in cui la serie di funzioni si compone come una successione di funzioni, è valido il **criterio di Cauchy uniforme**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente in } I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0 : \forall n > v_\varepsilon \forall p$$

$$\in \mathbb{N}, |s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} f_n(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in I$$

Questa relazione non è valida solo per il criterio di Cauchy; infatti, **essendo la serie di funzioni una successione di funzioni**, tutti i **teoremi** che valgono **per le successioni** di funzioni **valgono** anche **per le relative serie**.

Si definisce la **convergenza assoluta**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge assolutamente in } I \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \text{ converge puntualmente in } I$$

## DIMOSTRAZIONE RELAZIONE TRA CONVERGENZA ASSOLUTA E PUNTUALE

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge assolutamente in } I$$

*Tesi:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge puntualmente in } I$$

*Dimostrazione:*

In generale vale la seguente relazione:

$$f_n(x) \leq |f_n(x)|$$

Che comporta:

$$s_n(x) \leq |s_n(x)| = |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|$$

Tali successioni possono essere scritte come serie, ripercorrendo infatti la catena di disuguaglianze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$$

Sapendo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge assolutamente,  $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$  converge puntualmente. Ciò significa che  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge puntualmente per il criterio del confronto.

CVD

Si può, infine, definire la **convergenza totale**. Si dice che una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge totalmente in  $I$  e se è **maggiorata da una serie numerica convergente**  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ . Oppure:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge totalmente in } I \Leftrightarrow \exists (M_n)_{n \in \mathbb{N}} : |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in I \quad \forall n$$
$$M_n \in \mathbb{R} \wedge \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \text{ converge}$$

Tale definizione può essere ulteriormente **semplificata**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge totalmente in } I \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| \text{ converge}$$

Ciò è vero perché  $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$  è un **valore numerico** che non dipende da  $x$  e può essere preso come serie con cui maggiorare. Generalmente, infatti, fissato un  $n$ :

$$|f_n(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x)| \equiv M_n$$

## ENUNCIATO RELAZIONE TRA CONVERGENZA TOTALE E UNIFORME

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge totalmente in } I$$

*Tesi:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente in } I$$

## ENUNCIATO TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLA SOMMA

*Ipotesi:*

$$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n(x) \text{ è continua} \wedge \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ uniformemente in } I$$

*Tesi:*

$$f(x) \text{ è continua in } I$$

Se una somma di funzioni è finita allora è valida la seguente relazione grazie alle regole di derivazione:

$$D(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = D(f_1(x)) + D(f_2(x)) + \dots + D(f_n(x))$$

Tuttavia, tale relazione è valida solo se la somma è finita, altrimenti la relazione cessa di essere valida. Analogamente è possibile dire per l'integrazione. A tale proposito valgono i seguenti teoremi.

### ENUNCIATO TEOREMA DI INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE

*Ipotesi:*

$$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n(x) \text{ è continua in } [a; b]$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ uniformemente in } [a; b]$$

*Tesi:*

$$\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)) dx = \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

### ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

*Ipotesi:*

$$\forall (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} : f_n(x) \text{ è derivabile e la derivata è continua in } [a; b]$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ uniformemente in } [a; b]$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \text{ converge uniformemente in } [a; b]$$

*Tesi:*

1.  $f(x)$  è derivabile e la derivata è continua in  $[a; b]$ ;
2.  $D(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)) = D(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n(x))$

### SERIE DI POTENZE

Si prenda una **successione numerica**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , si dice **serie di potenza di punto iniziale (o centro)**  $x = 0$  la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Costituita dai termini:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Un esempio di serie di potenza è dato dalla **serie geometrica di ragione x**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} x \in (-1; 1) & \text{convergente} \\ x \geq 1 & \text{divergente} \\ x \leq -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

Si può osservare come una serie di potenza **può convergere** in uno dei **tre** seguenti **modi**:

1. Converge per  $x = 0$
2. Converge  $\forall x \in \mathbb{R}$
3.  $\exists \rho > 0$  : converge per  $x \in (-\rho; \rho)$  e non converge per  $x \in \mathbb{R} \setminus (-\rho; \rho)$

Per semplificare, **l'insieme di convergenza  $I$  di una serie di potenze è sempre un intervallo centrato nell'origine** del tipo  $(-\rho; \rho)$ . Si può anche osservare come **una serie di potenze sia sempre convergente nel suo centro**.

## ENUNCIATO TEOREMA SULLA CONVERGENZA TOTALE DI UNA SERIE DI POTENZE

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge in } x = \xi$$

*Tesi:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge totalmente ogni intervallo chiuso e limitato } \subseteq (-|\xi|; |\xi|)$$

Si dice raggio di convergenza  $\rho$  di una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  l'estremo superiore dell'insieme di valori per cui la serie converge:

$$\rho = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge in } x \right\}$$

Questa definizione va in accordo con quanto detto prima sulla convergenza delle serie di potenza, infatti:

- $\rho = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge in } I = \{0\}$ ;
- $\rho = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge in } \mathbb{R}$ ;
- $0 < \rho < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge in } I = (-\rho; \rho)$

## DIMOSTRAZIONE CONVERGENZA ENTRO IL RAGGIO DI CONVERGENZA

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

*Tesi:*

Ha raggio di convergenza  $\rho \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge per } |x| < \rho \text{ e diverge per } |x| > \rho$

*Dimostrazione:*

Il teorema inverso è già dimostrato per definizione di raggio di convergenza, rimane quindi da dimostrare che:

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge per } |x| < \rho$$

Poiché il raggio di convergenza è un estremo superiore, si può sfruttare la sua proprietà per cui:

$$\exists \xi > 0 : |x| < \xi \leq \rho$$

Poiché  $\xi \leq \rho$ , la serie converge per tale punto, ma per il teorema sulla convergenza totale di una serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge per } |x|$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ diverge per } |x| > \rho$$

Si supponga per assurdo che la serie converga per un certo valore  $\xi : |\xi| > \rho$  ma per il teorema sulla convergenza totale di una serie di potenze, la serie converge in ogni punto dell'intervallo  $[\rho; \xi)$  ma è un assurdo dal momento in cui  $\rho$  è l'estremo superiore dell'insieme di valori per cui la serie converge, perciò:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ diverge per } |x|$$

CVD

Gli strumenti finora mostrati per determinare la convergenza della serie cadono nel momento in cui si vuole determinare il carattere della serie di potenza in  $|x| = \rho$ , in tal caso bisogna servirsi di altri strumenti.

## **DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD**

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$$

*Tesi:*

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} \Leftrightarrow 0 < l < +\infty \\ +\infty \Leftrightarrow l = 0 \\ 0 \Leftrightarrow l = +\infty \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

La dimostrazione viene fatta solo nel primo caso ma è uguale per gli altri due. Si fissi un certo  $x \in \mathbb{R}$  con il quale la serie di potenza diventa una serie numerica e si applichi il criterio della radice:



$$\lim_n \sqrt[n]{a_n x^n} = \lim_n |x| \sqrt[n]{a_n} = |x| \lim_n \sqrt[n]{a_n} = |x|l$$

La serie converge se  $|x|l < 1$ , quindi converge se:

$$|x| < \frac{1}{l}$$

Analogamente la serie diverge se  $|x|l > 1$ , quindi diverge se:

$$|x| > \frac{1}{l}$$

Ma per definizione di raggio di convergenza,  $\frac{1}{l}$  è il raggio di convergenza  $\rho$ .

Se  $|x|l = 1$ , cioè  $|x| = \frac{1}{l}$ , non si può dire nulla sulla serie.

CVD

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI D'ALAMBERT

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \exists \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

*Tesi:*

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} \Leftrightarrow 0 < l < +\infty \\ +\infty \Leftrightarrow l = 0 \\ 0 \Leftrightarrow l = +\infty \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

La dimostrazione viene fatta solo nel primo caso ma è uguale per gli altri due. Si fissi un certo  $x \in \mathbb{R}$  con il quale la serie di potenza diventa una serie numerica e si applichi il criterio del rapporto:

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_n \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| = |x| \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|l$$

La serie converge se  $|x|l < 1$ , quindi converge se:

$$|x| < \frac{1}{l}$$

Analogamente la serie diverge se  $|x|l > 1$ , quindi diverge se:

$$|x| > \frac{1}{l}$$

Ma per definizione di raggio di convergenza,  $\frac{1}{l}$  è il raggio di convergenza  $\rho$ .

Se  $|x|l = 1$ , cioè  $|x| = \frac{1}{l}$ , non si può dire nulla sulla serie.

CVD

Finora le serie di potenza hanno avuto centro in  $x = 0$ , ma si tratta di un caso particolare. Infatti, si parla di **serie di potenza nel senso generale** quando **il centro è in un punto  $x = x_0$** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Tuttavia, **i risultati ottenuti** con una serie centrata in  $x = 0$  **valgono anche per un centro diverso**, infatti è possibile porre  $y = x - x_0$  ed ottenere una nuova serie di potenza di centro 0:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$$

Ciò che **cambia è il raggio di convergenza**; infatti, se  $\rho$  è il raggio di convergenza della serie per  $y$ , allora la serie converge per  $y \in (-\rho; \rho)$ :

$$-\rho < y < \rho$$

$$-\rho < x - x_0 < \rho$$

$$x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$x \in (x_0 - \rho; x_0 + \rho)$$

Definendo un diverso tipo di intervallo di convergenza. In generale, per una qualsiasi serie di potenza, **l'intervallo di convergenza è un intorno del suo centro ed è sempre convergente in tale centro**.

Presa una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , si dice **serie derivata** quella serie ottenuta dalla derivazione di ogni termine della serie di partenza:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1}$$

## ENUNCIATO TEOREMA SUL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DERIVATA

*Ipotesi:*

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$  è la serie derivata

*Tesi:*

Le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza

## ENUNCIATO TEOREMA DI INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \quad \forall x \in (-\rho; \rho)$$

*Tesi:*

1.  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-\rho; \rho);$
2.  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in (-\rho; \rho).$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA INFINITA DERIVABILITÀ

*Ipotesi:*

$$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x) : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ ha raggio di convergenza } \rho$$

*Tesi:*

1.  $f(x)$  è infinitamente derivabile in  $I_\rho(x_0)$ ;
2.  $f^k(x) = \sum_{h=k}^{+\infty} \frac{h!}{(h-k)!} a_h \cdot (x - x_0)^{h-k}$
3.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

*Dimostrazione:*

La seconda tesi si dimostra reiterando il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenza. I termini della derivata k-esima calcolata in  $x_0$  di tale serie si annulleranno tranne che nel caso di  $h = k$ , dove:

$$f^k(x) = \frac{k!}{(k-k)!} a_k \cdot (x - x_0)^{k-k} = k! a_k$$

Da cui si evince la terza tesi, infatti:

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$$

Detti coefficienti della funzione  $f(x)$  nell'espansione di Taylor.

CVD

Con queste informazioni è possibile chiarire il concetto che c'è alla base della **formula di Taylor**; infatti, è possibile **sostituire una funzione con un polinomio** maggiorato di una certa quantità (detta errore) infinitesima rispetto all'ordine del polinomio:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

Tale formula viene detta **formula di Taylor** e si configura come segue:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x)$$

Il resto può essere definito in base al modo in cui lo si può interpretare: **qualitativamente** si può usare la **formula di Taylor con il resto di Peano** e **quantitativamente** con il **resto di Lagrange**.

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

$$\exists \xi \in (x_0; x) : f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

In genere si prenderà in considerazione la formula di Taylor con resto di Peano e lo **sviluppo di Mac Laurin con  $x_0 = 0$** .

Se  **$n$  tende ad infinito** si configura la seguente **serie di potenza**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Che **in genere non converge a  $f(x)$** ; infatti, si distingue una **serie di Taylor** da uno **sviluppo di Taylor**. Una **serie di Taylor** di punto iniziale  $x_0$  è una **serie di funzioni**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Che non sempre coincide con  $f(x)$ , mentre si dice che **una funzione è sviluppabile in serie di Taylor se essa coincide con la relativa serie di funzioni**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

## DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

*Ipotesi:*

$\forall f : f(x)$  è infinitamente derivabile in  $(a; b)$

$\exists M, L > 0 : |f^k(x)| \leq ML^k \forall x \in (a; b) \forall k \in \mathbb{N}$ , cioè le derivate sono equilimitate

Tesi:

$\forall x_0 \in (a; b), f$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0$

Dimostrazione:

Fissato un  $n \in \mathbb{N}$  bisogna dimostrare che la serie di Taylor converge a  $f$ . Si prenda in considerazione la successione delle somme parziali della serie di Taylor:

$$s(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Tale serie converge se:

$$\lim_n f(x) - s(x) = \lim_n R(x) = 0$$

Dove  $R(x)$  è il resto nella forma di Lagrange:

$$\exists \xi \in (x_0; x) : R(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Sapendo che:

$$|R(x)| \leq \frac{|f^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

Mostrando che la serie della quantità a destra converge equivale a dimostrare che  $R(x) \rightarrow 0$ , infatti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \Rightarrow \lim_n \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = 0$$

Quindi si applica il criterio del rapporto:

$$\lim_n \left( \frac{ML^{n+1} |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{ML^n |x - x_0|^n} \right) = \lim_n \frac{ML |x - x_0|}{n+1} = 0 < 1$$

Quindi la serie converge e:

$$\lim_n \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = 0$$

Che equivale a dire che

$$\lim_n f(x) - s(x) = \lim_n R(x) = 0$$

CVD

## ENUNCIATO TEOREMA DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

*Ipotesi:*

$\forall f : f$  è infinitamente derivabile in  $(a; b)$

$\forall x_0 \in (a; b)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (a; b)$$

*Tesi:*

$f$  è sviluppabile in serie di Taylor con centro  $x_0$  nell'intervallo  $(a; b)$

## ***FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI***

### **EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE**

Un'**equazione numerica** è un tipo di equazione che coinvolge una o più **variabili numeriche**, mentre un'**equazione differenziale** è un tipo di equazione che coinvolge come **variabile indipendente** una o più **funzioni**. È chiamata così per via del **coinvolgimento delle derivate** di una stessa funzione.

Un esempio di equazione differenziale è l'**integrale**, che si propone di trovare quella funzione che derivata restituisce la funzione integrata:

$$\int f(x)dx = F(x) + c : F'(x) = f(x)$$

In questo esempio sono state scritte funzioni come  $f$  ma per convenzione, quando si risolvono equazioni differenziali, si fa riferimento alla funzione “variabile indipendente” con la  $y$ .

Un'**equazione differenziale di ordine  $n$**  è un'espressione di questo tipo:

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

Dove  $y$  è la funzione incognita, derivabile  $n$  volte nell'intervallo  $(a; b)$ . Ad esempio, è un'equazione differenziale di ordine terzo:

$$y'''(x) + 3xy''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$$

Un'**equazione differenziale** è in **forma normale** se la **derivata d'ordine massimo** di  $y$  può essere espressa come una **funzione del resto**:

$$y^n(x) = f(x, y(x), f'(x), f''(x), \dots)$$

Riprendendo l'esempio di prima:

$$y'''(x) = -3xy''(x) + 2y'(x) - y(x)$$

Una **soluzione particolare** di un'equazione differenziale di ordine  $n$  è una **funzione derivabile  $n$  volte** in  $(a; b)$  e prende il nome di **integrale particolare**; tuttavia, nella risoluzione di un'integrale si considera il termine noto come una generica costante che indica una **famiglia di funzioni** ma se la stessa operazione la si considera come **equazione differenziale** allora quella costante acquista importanza, dal momento in cui due valori diversi non denotano lo stesso risultato. Quindi si fa riferimento alla **soluzione di un'equazione differenziale** come una **famiglia di soluzioni particolari**, detta **integrale generale**.

$$\text{Integrale particolare} \in \text{Integrale generale}$$

Data un'equazione differenziale di primo ordine del tipo:

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

L'insieme delle sue soluzioni sarà l'integrale generale del tipo:

$$y(x) = y(x, c)$$

Dove  $c \in \mathbb{R}$ . Il **numero di costanti** dipende strettamente dall'**ordine dell'equazione** (che spesso sarà di primo o secondo ordine).

Può capitare che si richieda la **soluzione di un'equazione differenziale accompagnata da alcune condizioni iniziali**, ad esempio:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dove  $x_0$  è il **punto iniziale** e  $y_0$  il **valore iniziale**. Questa tipologia di problemi è detta **problema di Cauchy** o **problema ai valori iniziali**. Trovare una **soluzione del problema di Cauchy** significa **trovare**, tra la famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale (integrale generale), **quella che soddisfa le condizioni iniziali** (integrale particolare).

Un esempio di problema di Cauchy è rappresentato dalla **legge oraria del moto rettilineo uniforme**, dove bisogna risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x'(t) dt &= v_0 \int_{t_0}^t dt \\ x(t) - x(t_0) &= v_0(t - t_0) \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) \end{aligned}$$

Un'**equazione differenziale** (di primo ordine) si dice a **variabili separate** se il **secondo membro** è espresso come il **prodotto di due quantità dipendenti "separatamente" da x e y**:

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

Per risolvere questo tipo di equazione bisogna semplicemente **isolare i componenti con la stessa variabile** dividendo per la stessa quantità:

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$$

Un'**equazione differenziale** (del primo ordine) si dice **lineare** se è possibile scriverla come una **combinazione lineare** delle varie derivate di y:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

In questa forma l'equazione differenziale non è una combinazione lineare, tuttavia è possibile andare a ricavare una funzione coefficiente tale che:

$$\begin{aligned} a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) &= d(x) \\ y'(x) + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y(x) &= \frac{d(x)}{a_1(x)} \end{aligned}$$



$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Un'equazione differenziale lineare è omogenea se il termine  $b(x)$  è 0:

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare è data dalla somma dell'integrale generale  $y_0(x)$  dell'equazione differenziale omogenea associata e di un integrale particolare  $y_p(x)$  dell'equazione differenziale lineare completa:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Prendiamo quindi le due equazioni:

$$\begin{aligned}y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \\ y'(x) &= -a(x)y(x)\end{aligned}$$

### I. Calcolo dell'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata, $y_0(x)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int -a(x) dx$$

$$\ln|y(x)| = - \int a(x) dx + c_1$$

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx + c_1}$$

$$y(x) = e^{c_1} e^{-\int a(x) dx}$$

$$y_0(x) = c \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

### II. Calcolo di un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare completa

Tale calcolo si effettua utilizzando il metodo di variazione delle costanti, grazie al quale è possibile calcolare l'integrale particolare come un integrale generale dell'equazione associata dove la costante è una funzione di  $x$

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

Per risolvere il calcolo bisogna trovare la funzione  $c(x)$ . Si sostituisce tale espressione nell'equazione lineare completa sapendo che:

$$y'(x) = c'(x)e^{-\int a(x) dx} - a(x)c(x)e^{-\int a(x) dx}$$

Quindi  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  diventa:

$$c'(x)e^{-\int a(x) dx} - a(x)c(x)e^{-\int a(x) dx} + a(x)c(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x)$$

$$c'(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x)$$

$$c'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

Integrando:

$$c(x) = \int (b(x)e^{\int a(x)dx}) dx$$

Portando questa funzione nell'equazione originale,  $y(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$  diventa:

$$y_p(x) = \int (b(x)e^{\int a(x)dx}) dx \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

**III. Si sommano i risultati**, sapendo che  $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c \cdot e^{-\int a(x)dx} + \int (b(x)e^{\int a(x)dx}) dx \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \left[ c + \int (b(x)e^{\int a(x)dx}) dx \right]$$

Ottenendo l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare completa.

Un altro tipo di equazione differenziale lineare del primo ordine è del seguente tipo:

$$y'(x) = g(ax + by(x))$$

Per risolvere questa equazione differenziale non bisogna fare altro che ricondursi ad un'equazione a variabili separate. Si considera:

$$z(x) = ax + by(x)$$

$$z'(x) = a + by'(x)$$

$$y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b}$$

Sostituendo nell'equazione iniziale:

$$z'(x) - bg(z(x)) = a$$

Che risulta essere un'equazione a variabili separate. Un discorso analogo può essere fatto per l'equazione omogenea:

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

Infatti, si pone:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y'(x) = z'(x)x + z(x)$$

Sostituendo nell'equazione iniziale:

$$z'(x)x - g(z(x)) + z(x) = 0$$

Che risulta essere un'equazione a variabili separate.

Per equazione di Bernoulli si intende un'equazione del tipo:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x)$$

Che si può risolvere come segue:

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = a(x)y^{1-\alpha}(x) + b(x)$$

Sia considerata la funzione  $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ :

$$z'(x) = (1 - \alpha)y'(x)y^{-\alpha}(x)$$

$$\frac{z'(x)}{1 - \alpha} = \frac{y'(x)}{y^\alpha(x)}$$

Sostituendo nell'equazione iniziale:

$$\frac{z'(x)}{1 - \alpha} = a(x)z(x) + b(x)$$

$$z'(x) = (1 - \alpha)a(x)z(x) + (1 - \alpha)b(x)$$

Che risulta essere un'equazione lineare del primo ordine.

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Un'equazione differenziale del secondo ordine è un'equazione differenziale dove la **derivata di grado massimo** è la **derivata seconda** della funzione-incognita  $y$ . Come per il primo ordine, è possibile definire l'**equazione differenziale lineare del secondo ordine** come una **combinazione lineare delle varie derivate**:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$$

Nonostante questa non sia una vera e propria combinazione lineare, basta moltiplicare ambo i membri per uno stesso coefficiente per renderla tale (discorso analogo a quello fatto per il primo ordine).

L'**integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine** è data dalla **somma dell'integrale generale  $y_0(x)$  dell'equazione differenziale omogenea associata e di un integrale particolare  $y_p(x)$  dell'equazione differenziale lineare completa**:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

È possibile definire l'**integrale generale dell'equazione omogenea associata del secondo ordine**  $y_0(x)$  come uno **spazio vettoriale** composto da “vettori” funzione (gli integrali particolari). Tale affermazione risulta vera perché:

1.  $\forall y_1, y_2 \in y_0, y_1(x) + y_2(x) \in y_0$ ;
2.  $\forall a \in Y \forall y \in y_0, a \cdot y(x) \in y_0$

Tale proprietà è una **conseguenza della linearità dell'equazione**, infatti sostituendo le due caratteristiche dello spazio vettoriale nell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} (ay(x))'' + a_1(x)(ay(x))' + a_2(x)ay(x) &= ay''(x) + a a_1(x)y'(x) + a a_2(x)y(x) \\ &= a(y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)) \end{aligned}$$

Ma poiché si prende un  $y(x) \in y_0$ , essa è soluzione dell'equazione e quindi:

$$a(y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)) = a \cdot 0 = 0$$

Dimostrando che la funzione  $a \cdot y(x)$  è una soluzione dell'equazione e, quindi, appartiene all'insieme di integrali particolari,  $y_0$ . Di conseguenza è possibile dire che la seguente terna è uno **spazio vettoriale**:

$$(y_0, +, \cdot)$$

Dove **un'operazione è interna (+) e una esterna ( $\cdot$ )**. Si dice che **due funzioni** (vettori dello spazio vettoriale) **sono linearmente indipendenti** se l'**unica combinazione lineare uguale a zero** possibile prevede **coefficienti nulli**:

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in y_0, c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

In quanto spazio vettoriale,  $y_0$  è **dotato di una base** che è possibile affermare essere composta da **due funzioni**; di conseguenza:

$$\dim y_0 = 2$$

Da ciò si può concludere che l'**integrale generale dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine è composta da due integrali particolari**  $y_1, y_2 \in y_0$  **linearmente indipendenti**:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Siano  $y_1, y_2$  due funzioni derivabili, si dice **matrice Wronskiana di  $y_1, y_2$** , la matrice 2x2:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

Mentre si dice **determinante Wronskiano** il determinante di questa particolare matrice:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA MATRICE WRONKSIANA

*Ipotesi:*

$\forall y_1, y_2 : y_1, y_2$  sono integrali particolari dell'equazione omogenea

*Tesi:*

Sono equivalenti:

- I.  $y_1, y_2$  sono indipendenti in  $[a; b]$ ;
- II.  $\exists x_0 \in [a; b] : W(x_0) \neq 0$ ;
- III.  $W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

*Dimostrazione:*

Sia dimostrata l'implicazione  $II \Leftrightarrow I$ , in particolare si prenda il concetto di indipendenza e si derivi la relativa espressione:

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0 \end{cases}$$

Che è un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $c_1$  e  $c_2$ . Tale sistema ammette solo la soluzione banale ( $c_1 = c_2 = 0$ ) unicamente nel caso in cui il determinante dei coefficienti è diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

Che equivale a dire che il Wronskiano di  $y_1$  e  $y_2$  è diverso da zero e che le due funzioni sono indipendenti.

CVD

Si parla di **equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti** quando i **coefficienti che moltiplicano le varie derivate** della funzione incognita non sono funzioni della  $x$  ma **sono semplici numeri reali** costanti:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Si può notare la **somiglianza con un'equazione di secondo grado** in una variabile numerica:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

La **soluzione di questa equazione** viene determinata in funzione del determinante:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2$$

Individuando questi tre casi:

- $\Delta > 0$

Le soluzioni sono **due e distinte**:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

- $\Delta = 0$

Le soluzioni sono **due ma coincidenti**:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$$

- $\Delta < 0$

Le soluzioni sono **due ma complesse coniugate**:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Per comodità a queste radici ci si riferirà nel seguente modo:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

L'equazione di secondo grado in variabile numerica che ha gli stessi coefficienti dell'equazione differenziale del secondo ordine a variabili costanti è detta **equazione caratteristica**. È possibile dimostrare che **in funzione del determinante, l'equazione differenziale ha integrali generali che dipendono dalle radici della caratteristica**.

## DIMOSTRAZIONE SOLUZIONE EQUAZIONE A COEFFICIENTI COSTANTI

*Ipotesi:*

$\forall y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} : \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$  è l'equazione caratteristica

*Tesi:*

- $\Delta > 0$

Le basi sono:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \wedge y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Questi sono integrali indipendenti, quindi l'integrale generale è:

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $\Delta = 0$

Le basi sono:

$$y_1 = e^{\lambda x} \wedge y_2 = x e^{\lambda x}$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

-  $\Delta < 0$

Le basi sono:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \wedge y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Quindi l'integrale generale è:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= d_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + d_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = d_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + d_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (d_1 e^{i\beta x} + d_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x} [d_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + d_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} [(d_1 + d_2) \cos \beta x + i(d_1 - d_2) \sin \beta x] \end{aligned}$$

In altro modo, considerando le combinazioni lineari delle funzioni  $y_1$  e  $y_2$ , soluzione dell'equazione lineare:

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \wedge \frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$$

È possibile definire l'integrale generale considerando:

$$\frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}) = \frac{e^{\alpha x}}{2}(\cos \beta x + i \sin \beta x - i \sin \beta x + \cos \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Quindi:

$$y_0(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

*Dimostrazione:*

Per semplicità si dimostra unicamente il caso in cui il determinante dell'equazione caratteristica sia maggiore di zero, quindi quando le sue soluzioni sono due e distinte. Infatti, i restanti casi non sono altro che una generalizzazione di questo appena descritto.

Bisogna dimostrare che le seguenti funzioni sono basi dell'integrale generale, cioè che sono due funzioni indipendenti e che sono soluzione dell'equazione:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \wedge y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

I. Soluzione dell'equazione

Si sostituisce ognuna delle due funzioni nell'equazione differenziale:

$$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$e^{\lambda_1 x} (\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2) = 0$$

Il che è vero dal momento in cui, per ipotesi,  $\lambda_1$  è soluzione dell'equazione caratteristica. Ragionamento analogo può essere fatto per l'altra funzione.

Con tale dimostrazione è stato appena dimostrato che  $y_1$  e  $y_2$  sono due integrali particolari dell'equazione differenziale.

## II. Indipendenza

Due funzioni sono linearmente indipendenti quando il loro Wronskiano è diverso da zero, infatti:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 + \lambda_1)x} \neq 0$$

Infatti, poiché  $\Delta > 0$ , le due soluzioni sono diverse e il Wronskiano è diverso da zero.

Essendo integrali particolari dell'equazione differenziale ma essendo anche indipendenti, le due funzioni sono basi dell'integrale generale, il quale risulta essere per definizione:

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

CVD

Per **equazione differenziale del secondo ordine completa** si intende un'equazione del tipo:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x)$$

Per trovare un'integrale particolare di questa equazione bisogna **osservare la forma di  $f(x)$** ; si suppone:

$$- f(x) = e^{\gamma x} p_n(x)$$

Dove  $p_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$  e  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ , allora:

$$1. P(\gamma) \neq 0$$

Ciò significa che  $\gamma$  **non è soluzione dell'equazione caratteristica**, ciò significa che l'integrale particolare è:

$$y_p(x) = e^{\gamma x} q_n(x)$$

Dove  $q_n(x)$  è un polinomio generico di grado  $n$  da determinare.

$$2. P(\gamma) = 0$$

Ciò significa che  $\gamma$  è **radice dell'equazione caratteristica di molteplicità  $h$** , allora l'integrale particolare è del tipo:

$$y_p(x) = x^h e^{\gamma x} q_n(x)$$

$$- f(x) = e^{\gamma x} [p_m(x) \cos \mu x + q_k(x) \sin \mu x]$$

Dove  $p_m(x)$  e  $q_k(x)$  sono polinomi di grado  $m$  e  $k$ . In tale configurazione si suppone:

$$1. P(\gamma \pm i\mu) \neq 0$$



Ciò significa che  $\gamma \pm i\mu$  non è soluzione dell'equazione caratteristica e cioè che un integrale particolare dell'equazione completa è:

$$y_p(x) = e^{\gamma x} [r_j(x) \cos \mu x + s_j(x) \sin \mu x]$$

Dove  $r_j(x)$  e  $s_j(x)$  sono polinomi generici da determinare di grado  $j = \max\{m, k\}$ .

1.  $P(\gamma \pm i\mu) = 0$

Quindi  $\gamma \pm i\mu$  è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità  $h$ . Un integrale particolare dell'equazione completa può essere:

$$y_p(x) = x^h e^{\gamma x} [r_j(x) \cos \mu x + s_j(x) \sin \mu x]$$

Anche per le equazioni differenziali del secondo ordine è possibile sfruttare il metodo di variazione delle costanti.

## DIMOSTRAZIONE METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

*Ipotesi:*

$$\forall y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$$

$\forall y_1(x), y_2(x) : y_1(x), y_2(x)$  sono integrali particolari dell'equazione omogenea associata

$\forall c_1(x), c_2(x) : c_1(x), c_2(x)$  sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

*Tesi:*

$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$  è un integrale particolare dell'equazione completa

*Dimostrazione:*

Sia considerata la definizione di integrale particolare dell'equazione omogenea associata per le funzioni  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ :

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = 0$$

$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = 0$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y_0(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Al variare delle costanti si ottiene la formula espressa nella tesi:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Si calcoli la derivata prima dell'integrale particolare:

$$y'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Ma per ipotesi la somma dei primi due termini è zero, dal momento in cui le costanti sono prese in modo tale da essere soluzione del sistema elencato. Quindi:

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Derivando ulteriormente:

$$y''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

Per lo stesso motivo, i primi due termini della funzione si sommano a  $f(x)$ :

$$y''(x) = f(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

Sostituendo nell'equazione completa:

$$[f(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)] + a_1(x)[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)] + a_2(x)[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)] = f(x)$$

Semplificando e raccogliendo:

$$c_1(x)[y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2y_1(x)] + c_2(x)[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2y_2(x)] + f(x) = f(x)$$

Ma per ipotesi  $y_1(x), y_2(x)$  sono integrali particolari dell'equazione omogenea associata, quindi:

$$c_1(x) \cdot 0 + c_2(x) \cdot 0 + f(x) = f(x)$$

$$c_1(x) \cdot 0 + c_2(x) \cdot 0 = 0$$

E cioè:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

È soluzione dell'equazione completa.

CVD

## FUNZIONI IN DUE VARIABILI

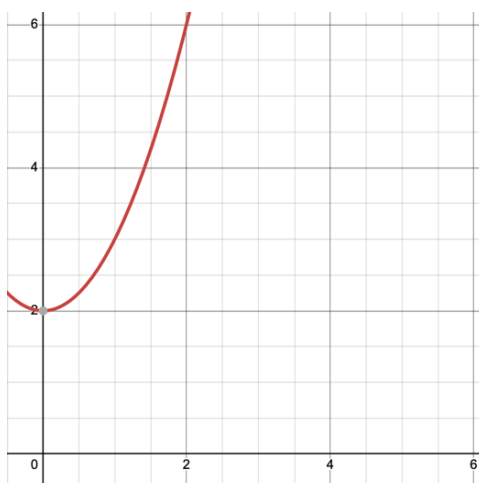
Una **funzione in una variabile** è un'applicazione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  che associa ad un valore, un altro valore seguendo una specifica legge:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Mentre **il grafico della suddetta funzione** è l'insieme di coppie ordinate che rispettano la funzione e si configura come una curva nel piano, quindi in  $\mathbb{R}^2$ :

$$G_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$



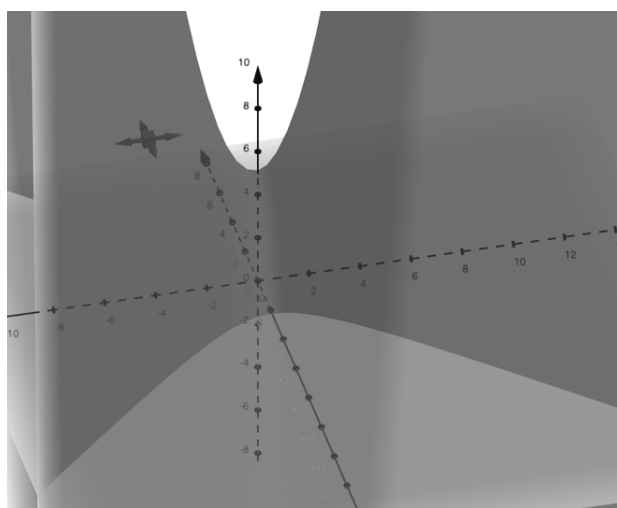
Una **funzione in più variabili** non è altro che un'applicazione che va da un **prodotto cartesiano di  $\mathbb{R}$**  (quindi a dimensione diversa da 1) **a  $\mathbb{R}$** ; infatti, si possono trovare funzioni da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ , da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$  ma anche viceversa, da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$ , da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  e così via. In questa sede si andranno a considerare unicamente le **funzioni in due variabili**, cioè:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: (x; y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

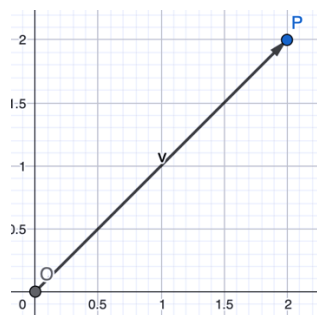
**Il dominio di questa funzione è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$** , che verranno raffigurati come **punti del piano** che hanno **immagine sull'asse z** (i cui punti sono detti **quote**, o **altezze**). Di conseguenza **il grafico** di tale funzione non sarà più una curva nel piano ma una **forma nello spazio**:

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$



È possibile considerare il **dominio di questa funzione**,  $\mathbb{R}^2$ , come uno **spazio vettoriale**:

$$\vec{v} = \overline{OP} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Ogni vettore individua un punto, in questo caso  $P \equiv (x, y)$ , e viceversa.

$$\bar{v} = (x, y) \Leftrightarrow P \equiv (x, y)$$

Di conseguenza la **distanza tra il punto individuato dal vettore e l'origine** è il **modulo** (o **norma**) del vettore:

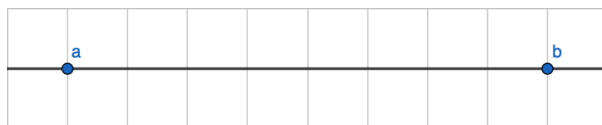
$$d(P, O) = \|\bar{v}\| = \sqrt{(x_p - 0)^2 + (y_p - 0)^2} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

Analogamente la **distanza tra due punti** (o **differenza di due vettori**):

$$d(P_1, P_2) = \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Questa definizione trova il proprio **analogo in una dimensione** quando si parla di **modulo di una differenza**, infatti:

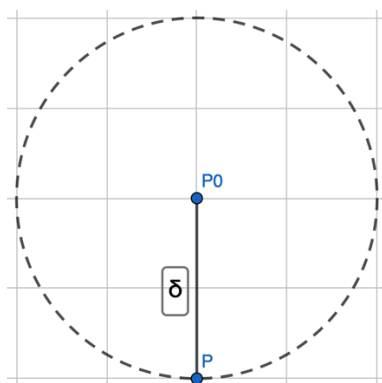
$$\forall a, b \in x, d(a, b) = |a - b|$$



La **topologia sul piano** prevede la definizione di alcuni strumenti.

Si dice **intorno circolare di un punto  $P_0$  e di raggio  $\delta$**  il cerchio aperto di centro  $P_0$  e raggio  $\delta$ :

$$I_\delta(P_0) = \{P \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < \delta\}$$



Che equivale a dire:

$$x^2 + y^2 < \delta^2$$

La cui equazione associata è:

$$x^2 + y^2 = \delta^2$$

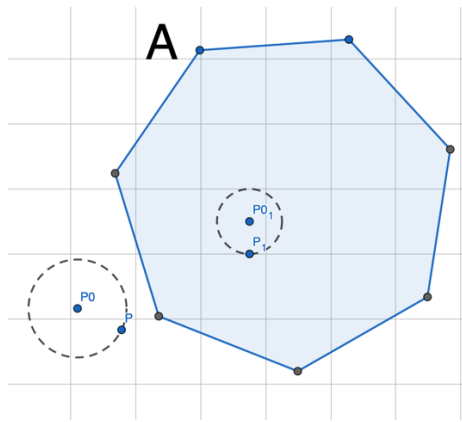
Che è la **legge di una circonferenza**.

Sia considerata una porzione di piano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  è detto **punto interno ad A** se esiste almeno un intorno circolare contenuto in A:

$$\exists I_\delta(P_0) \subset A$$

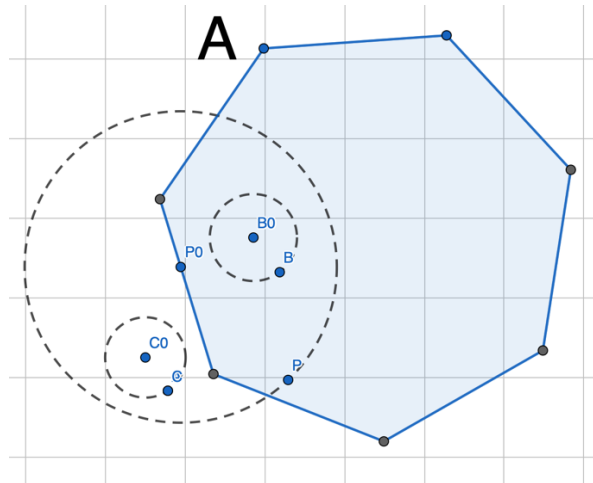
Mentre il **punto è esterno** se esiste un intorno circolare non contenuto in A:

$$\exists I_\delta(P_0) \subset \mathbb{R}^2 - A$$



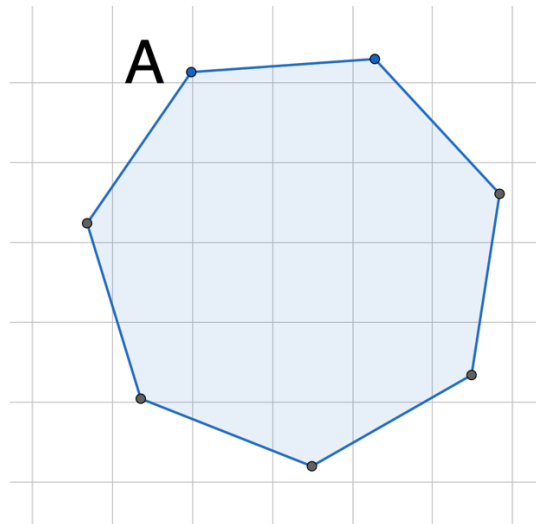
Invece, un **punto  $P_0(x_0, y_0)$  è di frontiera** se in qualsiasi intorno circolare di tale punto cadono sia punti interni che punti esterni:

$$\forall I_\delta(P_0) \exists P_1, P_2 \in I_\delta(P_0) : I_\delta(P_1) \subset A \wedge I_\delta(P_2) \subset \mathbb{R}^2 - A$$



Mentre si dice **frontiera di A** l'insieme di tutti i suoi punti di frontiera:

$$FA = \partial A = \{P_0 \in \mathbb{R}^2 : \forall I_\delta(P_0) \exists P_1, P_2 \in I_\delta(P_0) : I_\delta(P_1) \subset A \wedge I_\delta(P_2) \subset \mathbb{R}^2 - A\}$$

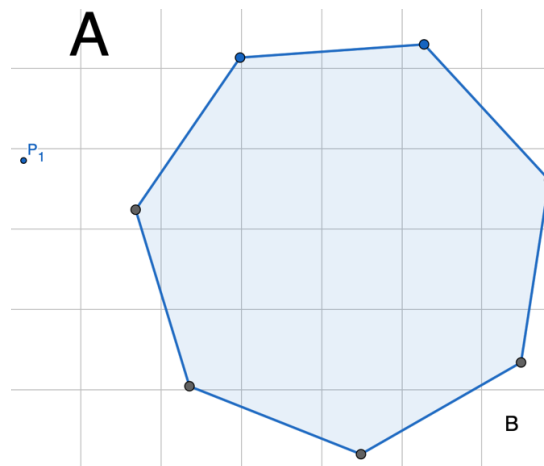


Un punto  $P_0$  si dice di accumulazione per  $A$  se in ogni suo intorno cade almeno un punto di  $A$ :

$$\forall I_\delta(P_0) \exists P \in I_\delta(P_0) : P \in A$$

Banalmente, un punto è di accumulazione per  $A$  se vicino ad esso si accumulano altri punti di  $A$ . Si potrebbe fare **confusione tra punti di frontiera e punti di accumulazione** ma la differenza sta nei **punti isolati**: un punto è isolato se esso è di frontiera ma non di accumulazione. In alternativa, è possibile affermare che **i punti di frontiera di  $A$  sono tutti i suoi punti di accumulazione più gli eventuali punti isolati**:

$$\partial A = \partial B \cup \{P_1\}$$



In questo caso,  $P_1$  è un punto isolato, tutti i punti di  $\partial B$  sono sia punti di frontiera che di accumulazione e non per tutti i punti di  $\partial A$  si può dire lo stesso.

Si dice **parte interna di  $A$** , denominata con il simbolo  $\dot{A}$ , l'insieme di tutti i punti interni di  $A$ :

$$\dot{A} = \{P_0 : \exists I_\delta(P_0) \subset A\} = A - \partial A$$

Mentre **la chiusura di  $A$** , denominata col simbolo  $\bar{A}$ , è l'unione della sua parte interna con la frontiera:

$$\bar{A} = \dot{A} \cup \partial A$$

$A$  è **aperto** se esso coincide con la sua parte interna:

$$A = \dot{A}$$

Analogamente,  $A$  è **chiuso** se coincide con la sua chiusura:

$$A = \bar{A}$$

$D$  è **dominio di**  $\mathbb{R}^2$  se è la chiusura di un aperto, cioè se:

$$\exists A = \dot{A} : D = \bar{A}$$

Queste definizioni non sono nuove ma **hanno tutte un corrispettivo nella topologia sulla retta reale**, infatti per punti di frontiera si intende l'estensione a due dimensioni degli estremi di un intervallo, per intorno circolare si intende l'estensione dell'intorno di un punto e così via.

Presa una funzione in due variabili:

$$z = f(x, y)$$

Per determinare il **campo di esistenza** di tale funzione va determinata la **porzione di piano in cui è possibile applicare la funzione** (oppure la porzione di piano che ammette una quota). Per esempio, per determinare il campo di esistenza della funzione:

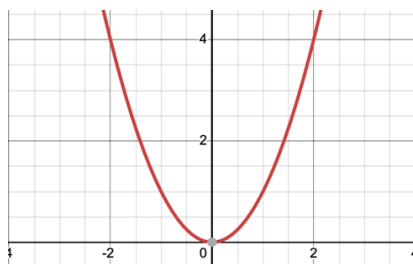
$$z = \log(x^2 - y)$$

Si vanno a considerare tutte le coppie:

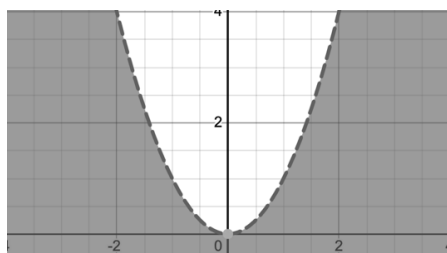
$$(x, y) : x^2 - y > 0$$

Questa disequazione in due variabili può facilmente essere risolta andando a considerare la parabola associata:

$$y = x^2$$



La disequazione ha soluzione nel semipiano inferiore individuato dalla funzione (in una variabile):



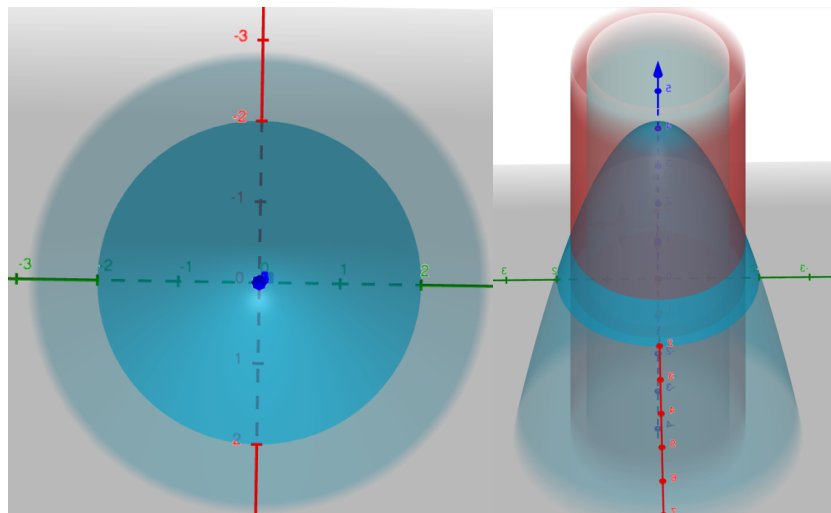
Data una funzione  $z = f(x, y)$ , si dicono **curve di livello** le curve **determinate dall'equazione**:

$$f(x, y) = \text{cost.}$$

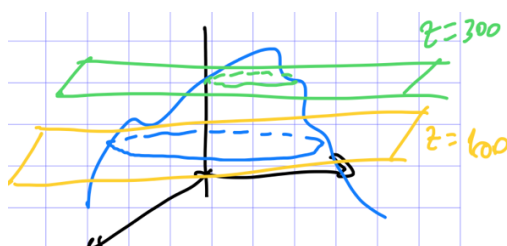
Cioè:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$$

Questa appena esplicitata è **un'equazione implicita in una variabile**, ciò significa che il suo **grafico è una curva nello spazio**. Le varie curve di livello appariranno come una serie di **piani paralleli distanziati** in funzione della costante scelta sull'asse  $z$



Dove a diversi valori della costante sono restituiti diversi piani.



## LIMITI E DERIVATE DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

Sia considerata una **funzione**:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

E sia preso un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  **di accumulazione per A**, si definisce il **limite di una funzione in due variabili** in maniera analoga al limite di una funzione in una variabile:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x,y) : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta, |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Osservando la definizione si può dire che  $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$  equivale a dire:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

E cioè che il punto in considerazione  $(x, y)$  è all'interno della circonferenza di centro  $P_0$  e raggio  $\delta$  (intorno circolare).



Proprio come per il caso in una variabile, **vale il teorema di esistenza e unicità del limite**, cioè se il limite di una funzione in due variabili esiste esso è unico; ciò significa che **in qualsiasi modo ci si avvicini al punto** di accumulazione, **il limite deve essere sempre lo stesso**.

Esistono **infiniti modi con cui ci si può avvicinare al punto di accumulazione**, ovvero considerando tutte le **infinite curve che passano per esso** (a differenza del caso in una variabile in cui gli unici modi per avvicinarsi al punto di accumulazione erano da destra o da sinistra); sia presa come esempio la funzione:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Definita in  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , dove l'origine è un punto di accumulazione. **Valutando la funzione all'avvicinarsi a quel punto**, restringendola lungo una generica retta (fascio di rette proprio)  $y = mx$ :

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4}$$

Passando al limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} = 0$$

Si può notare che **per qualsiasi retta, il limite è lo stesso**; tuttavia, **non basta** perché **può esserci una curva** (non retta) che in prossimità dell'origine restituisca un **limite diverso** da quello rilevato. È il caso della curva  $x = y^2$ :

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4}$$

Passando al limite:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Si può notare che il limite è diverso, concludendo che **il limite di tale funzione in prossimità dell'origine non esiste**:

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Una **condizione necessaria ma non sufficiente** affinché il limite di una funzione per  $P \rightarrow P_0$  sia finito è che tale limite **non deve dipendere dalla particolare curva  $\gamma$**  quando  $P \rightarrow P_0$ . Si può notare che la condizione **non è sufficiente**, quindi non si può dimostrare che il limite di una funzione è finito semplicemente affermando che non dipende dalla particolare curva; tuttavia, **si può dimostrare la non esistenza del limite sfruttando questa condizione**.

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = l \Rightarrow f(x, y) \neg \propto \gamma$$

La condizione non è sufficiente perché, ad esempio, se **il limite per  $P \rightarrow P_0$  tende a due valori diversi per due curve che tendono in  $P_0$  allora non esiste.**

Per dimostrare l'esistenza di un limite si può sfruttare il **passaggio a coordinate polari**, con il quale si trasformano le **due variabili in funzioni trigonometriche** e si valuta **il limite in funzione dell'angolo  $\vartheta$** : nel caso in cui **il limite dipenda dall'angolo, allora non esiste** (in maniera analoga al criterio delle curve). Ad esempio:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Dove:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

La funzione si trasforma in:

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} = \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\rho^2} = \rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta$$

Maggiorando la funzione:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \leq 2\rho$$

Si può notare che per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $\rho \rightarrow 0$  e quindi la funzione, il cui limite non dipende dall'angolo polare, ha limite finito e uguale a 0:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Questo procedimento può essere generalizzato, affermando che **il limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  di una funzione  $f(x, y)$  esiste ed è uguale a  $l \in \mathbb{R}$  se è possibile dimostrare una maggiorazione del tipo:**

$$|f(x, y) - l| \leq g(\rho)$$

Dove:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

**È importante che la funzione  $g(\rho)$  non dipenda dall'angolo polare  $\vartheta$ .** Fino ad ora è stato usato il passaggio a coordinate polari con il punto  $P_0(0,0)$  ma è possibile usare un qualsiasi polo al punto  $P_0(x_0, y_0)$ , con il quale le coordinate si trasformano in:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Una **funzione**, definita in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , è **continua in un punto  $(x_0, y_0)$**  se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Estendendo la definizione a tutto il dominio, si può generalizzare la continuità di una funzione.

Una **funzione**, definita e continua in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , è **derivabile parzialmente rispetto a  $x$  in un punto  $(x_0, y_0) \in A$**  se esiste e finito il limite del rapporto incrementale lungo  $x$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = D_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Analogamente, una **funzione**, definita e continua in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , è **derivabile parzialmente rispetto a  $y$  in un punto  $(x_0, y_0) \in A$**  se esiste e finito il limite del rapporto incrementale lungo  $y$ :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0) = D_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

In modo pratico, per calcolare una derivata parziale di una funzione in due variabili bisogna considerare una delle due variabili come costante e calcolare la derivata (che ora è in una variabile).

Una **funzione è non derivabile parzialmente in un punto** (lungo  $x$  o lungo  $y$ ) se **non esiste il limite del rapporto incrementale** o se **il limite da destra è diverso dal limite da sinistra**, ovvero se **non ammette la retta tangente** nel punto:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \vee \nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Traslando questa proprietà **sul piano**, dal momento in cui si parla di funzioni in due variabili, **una funzione non è derivabile quando non esiste il piano tangente** al punto  $P_0$ .

Avendo due variabili, **la derivata parziale seconda può essere di due tipi: pura**, se la prima e la seconda derivata parziale sono fatte sulla stessa variabile ( $f_{xx}$  o  $f_{yy}$ ), o **mista**, se la seconda derivata parziale è su una diversa variabile della prima ( $f_{xy}$  o  $f_{yx}$ ); tuttavia, **non è detto che le due derivate miste coincidano**. Un discorso analogo può essere fatto per le derivate di ordine superiore.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI SCHWARZ

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A$  è un aperto

$\forall P_0(x_0, y_0) \in A$

$\forall f \subseteq A : f$  è derivabile due volte in  $A$

$f_{xy}, f_{yx}$  continue in  $P_0$

*Tesi:*

$f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$

*Dimostrazione:*

Sia considerato un generico punto di A e si costruiscano le seguenti funzioni:

$$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$$

$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$$

Si applichi il teorema di Lagrange per la funzione  $F(x)$ :

$$\exists x_1 \in (x_0, x) : F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0)$$

Dove:

$$F'(x_1) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}$$

Di conseguenza:

$$F(x) - F(x_1) = F'(x_0)(x - x_0) = (f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0))(x - x_0)$$

Si riapplica il teorema di Lagrange sulla derivata parziale lungo x rispetto a y:

$$\exists y_1 \in (y_0, y) : F(x) - F(x_1) = (f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0))(x - x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)(x - x_0)$$

Allo stesso modo, è possibile applicare due volte il teorema di Lagrange alla funzione  $G(x)$ :

$$\begin{aligned} \exists y_2 \in (y_0, y), x_2 \in (x_0, x) : G(y) - G(y_0) &= G'(y_2)(y - y_0) = (f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2))(y - y_0) \\ &= f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Ma considerando che:

$$F(x) - F(x_0) = f(x, y) - f(x, y_0) - (f(x_0, y) - f(x_0, y_0))$$

$$G(y) - G(y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) - (f(x, y_0) - f(x_0, y_0))$$

È possibile dire che:

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

Quindi:

$$f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)(x - x_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2)$$

Per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , poiché la funzione è continua:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dal momento in cui  $x_1, x_2 \in (x_0, x)$  e  $y_1, y_2 \in (y_0, y)$ .

CVD

Sia presa una funzione in due variabili definita e derivabile due volte in  $A$ , si dice gradiente di  $f$  il vettore:

$$Df(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

Ed è possibile scriverlo anche usando l'operatore nabla:

$$\nabla f = \text{grad } f$$

Mentre si dice matrice Hessiana:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Si può notare che nel teorema di Schwarz, le ipotesi codificano una matrice Hessiana simmetrica.

## DIFFERENZIABILITÀ DI UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI

Sia considerato un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , un punto  $P_0(x_0, y_0) \in A$  e una funzione:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Si può dire che  $f$  è differenziabile in  $P_0(x_0, y_0)$  se:

1.  $f$  è derivabile parzialmente in  $P_0$ ;
2. Vale il limite seguente

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

In una variabile, la definizione di differenziabilità coincide con quella di derivabilità:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} &= 0 \end{aligned}$$

Dove  $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f$  e  $f'(x_0)h = df$ . Cioè:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(|h|)$$

## DIMOSTRAZIONE TOEREMA CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE

*Ipotesi:*

$f$  è differenziabile in  $P_0$

*Tesi:*

$f$  è continua in  $P_0$

*Dimostrazione:*

Per l'ipotesi di differenziabilità:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

Passando al limite per dimostrare la continuità:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0, y_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \\ &= f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

CVD

## **DIMOSTRAZIONE TOEREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE**

*Ipotesi:*

$\forall f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : A$  è un aperto

$f$  è derivabile parzialmente in  $A$

$f_x, f_y$  continue in  $(x, y) \in A$

*Tesi:*

$f$  è differenziabile in  $(x, y) \in A$

*Dimostrazione:*

Si considera la seguente differenza:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

Si somma e si sottrae per la stessa quantità:

$$[f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] + [-f(x, y) + f(x, y + k)]$$

Si applica due volte il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \in (x, x + h), y_1 \in (y, y + k) : & f(x + h) - f(x, y) \\ &= [f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] + [-f(x, y) + f(x, y + k)] \\ &= f_x(x_1, y + k)h + f_y(x, y_1)k\end{aligned}$$

Sia considerato il rapporto:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\
 &= \left| \frac{f_x(x_1, y+k)h + f_y(x, y_1)k - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\
 &\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}
 \end{aligned}$$

Poiché entrambi i membri sono moltiplicati da fattori minori di 1 è possibile effettuare la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned}
 & |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
 &\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)|
 \end{aligned}$$

Si passa al limite:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)|$$

Poiché le due derivate sono continue in  $(x, y)$  si ha che:

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$$

E il limite diventa:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| = 0$$

Riprendendo il fattore originario:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = 0$$

E quindi la funzione è differenziabile in  $(x, y) \in A$ .

CVD

Il teorema codifica una **condizione sufficiente ma non necessaria**, infatti non è possibile dire che se la funzione è differenziabile allora è continua menzionando questo teorema.

Introducendo il concetto di **classe di continuità** si può alternativamente definire questo teorema. Una funzione  $f$  è detta di classe  $C^0$  in  $A$  se è continua in tale aperto, mentre è di classe  $C^1$  in  $A$  se è derivabile in  $A$  e le derivate parziali sono continue. In genere, **una funzione è di classe  $C^k$  in  $A$  se è derivabile  $k$  volte e le derivate  $k$ -esime sono continue in  $A$ :**

$$f \in C^k(A)$$

Il teorema del differenziale totale diventa:

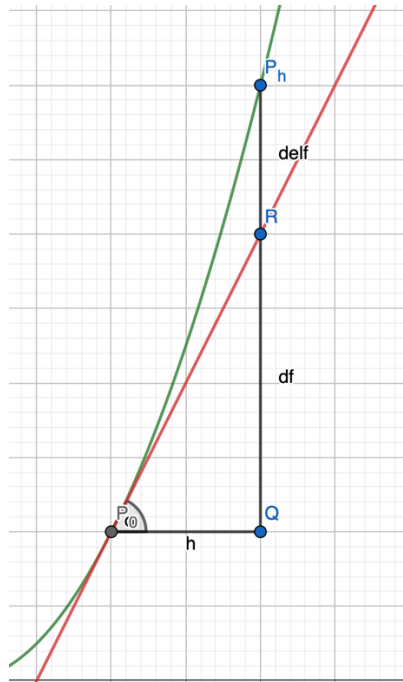
$$f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ è differenziabile}$$

Come mostrato in precedenza, **per le funzioni in una variabile** la definizione di **differentiabilità** si esprime come segue:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(|h|)$$

Che equivale a dire che **nel punto  $P_0$  esiste la retta tangente** di coefficiente angolare  $f'(x_0) = \tan \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'inclinazione di tale retta:

$$f'(x_0) \cdot h = \tan \alpha \cdot h = \overline{QR} = df(x_0)$$



Si può notare come in questo caso la continuità non implica la differentiabilità.

**Per le funzioni in due variabili**, se esiste il **differenziale** di una funzione in un punto  $P_0(x_0, y_0)$  allora **esiste il piano tangente alla funzione  $z = f(x, y)$**  nel punto. Infatti, prendendo in considerazione  $h = (x - x_0)$  e  $k = (y - y_0)$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(P_0)(x - x_0) - f_y(P_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Ovvero:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

Quando si prende un punto  $P(x, y)$  **prossimo a  $P_0(x_0, y_0)$**  la funzione  $f(x, y)$  è approssimata:

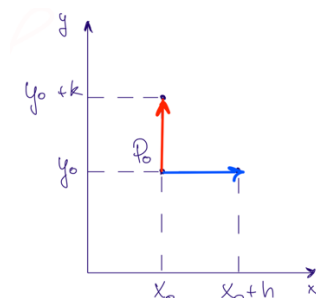
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Che è l'**equazione di un piano**, detto tangente a  $z = f(x, y)$  in  $P_0(x_0, y_0)$ .



## DERIVATE DIREZIONALI

In una **derivata parziale** lungo un'asse, **la variabile viene incrementata** di una quantità  $h$  o  $k$  **lungo l'asse stesso**. Questa operazione equivale all'incremento del punto  $P_0$  lungo uno dei due assi:



Ma **per il punto  $P_0$  passano infinite direzioni**, ed è possibile **considerare l'incremento lungo esse**. Si definisce direzione in  $\mathbb{R}^2$  un qualsiasi vettore:

$$\lambda \in \mathbb{R}^2 : \lambda = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \|\lambda\| = 1$$

Si considerino un **aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$**  e una **funzione in due variabili  $f(x, y)$  definita in  $A$** , fissata una **direzione  $\lambda = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$**  si dice che  **$f$  è derivabile in  $P_0$  lungo la direzione  $\lambda$**  se:

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Che prende il nome di **derivata direzionale di  $f$  lungo  $\lambda$  in  $P_0(x_0, y_0)$** :

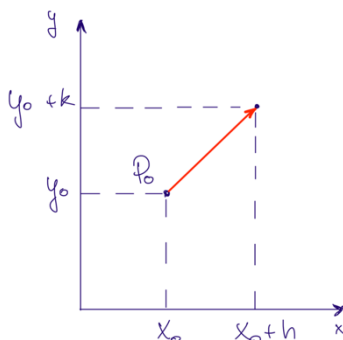
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \lambda} = D_\lambda(f(x_0, y_0))$$

**L'incremento effettuato è:**

$$P_0(x_0, y_0) \rightarrow P_t(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

Che coincide con la **retta di equazione parametrica**:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



In realtà la **derivata parziale** studiata finora non è altro che **un caso particolare di derivata direzionale**, infatti:

$$\lambda = (1,0) \rightarrow \frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\lambda = (0,1) \rightarrow \frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DERIVAZIONE DIREZIONALE

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A$  è un aperto

$f$  è differenziabile in  $P_0 \in \mathbb{R}^2$

*Tesi:*

$\forall \lambda = (\alpha, \beta), f$  è derivabile lungo  $\lambda$

$$\frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \alpha \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \langle D(f(x_0, y_0)), \lambda \rangle, \text{ cioè il loro prodotto scalare}$$

*Dimostrazione:*

Per definizione di derivata direzionale:

$$\frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Ma considerando le funzioni:

$$f(x, y) \wedge \varphi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

La derivata direzionale risulta essere il limite della funzione composta:

$$\frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y'(t)$$

Ma per il teorema di derivabilità della funzione composta:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \alpha \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Quindi:

$$\frac{\partial f(x_0, x_0)}{\partial \lambda} = \alpha \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

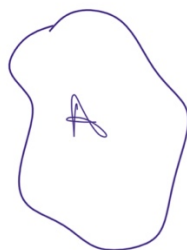
CVD

Con la definizione di derivata direzionale è possibile dare un'interpretazione geometrica al gradiente di una funzione differenziabile in un punto  $P_0(x_0, y_0)$ . Esso è la direzione e il verso di massima pendenza del grafico in  $P_0$ , se non è nullo; infatti, con il termine **derivata** si intende una misura della pendenza di una funzione che in una variabile fa riferimento alla retta tangente, mentre in due variabili al piano.

Il prodotto scalare tra due vettori (non nulli) è massimo quando essi hanno la stessa direzione e lo stesso verso, mentre è minimo se hanno verso opposto; la **derivata direzionale** non è altro che il prodotto scalare tra il gradiente della funzione e la direzione, cioè la direzione e il verso di massima pendenza del grafico.

Si dice **insieme connesso** un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  che non risulta essere l'unione di due insiemi aperti, non vuoti e disgiunti, cioè deve valere l'implicazione:

$$\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2 : \text{sono aperti} \wedge A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge A_1 \cup A_2 = A \Rightarrow A_1 = \emptyset \vee A_2 = \emptyset$$

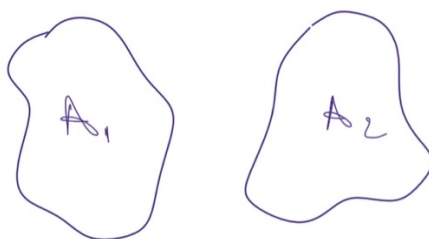


Ad esempio presi i due insiemi aperti:

$$A_1 \cup A_2 = A$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_1, A_2 \neq \emptyset$$



L'insieme A non è un connesso.

## ENUNCIATO TEOREMA DEL GRADIENTE NULLO IN UN CONNESSO

*Ipotesi:*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A \text{ è un aperto connesso}$$

$$\forall f(x, y) \subseteq A : \nabla f = 0$$

Tesi:

$f$  è costante in  $A$

Trasposto in **una variabile** questo teorema afferma che **se in un intervallo di  $\mathbb{R}$  la derivata prima di una funzione è 0 la funzione stessa è costante in quell'intervallo**, mentre il teorema inverso vale anche senza l'ipotesi dell'intervallo.

## FUNZIONI IMPLICITE

Considerato un **aperto**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , una **curva nel piano** può essere **descritta da un'equazione** del tipo:

$$F(x, y) = 0$$

Dove  $F$  è una **funzione definita in  $A$** . Questo tipo di funzione **si può sviluppare in due modi**, ad esempio:

- $F(x, y) = y - ax^2 = 0$

In questo caso  $\forall x_0 \in \mathbb{R} \exists! y_0 \in \mathbb{R} : y_0 - ax_0^2 = 0$ , ovvero **si definisce  $y$  in funzione di  $x$** . Ciò determina una funzione:

$$y = f(x) : F(x, y) = 0$$

Nell'esempio proposto si può mostrare questa proprietà osservando che **la retta  $x = x_0$  interseca un solo punto la curva**.

- $F(x, y) = x - ay^2 = 0$

In questo caso **non si può sempre definire  $y$  in funzione di  $x$** , infatti **la retta  $x = x_0$  interseca due o più punti la curva**; tuttavia, **imponendo alcune restrizioni** si può **determinare univocamente  $y$  in funzione di  $x$** . Ad esempio, preso un intorno di  $x_0$ , la retta passante per quel punto parallela a  $y$  avrà due intersezioni:

$$y_0 = \sqrt{\frac{x_0}{a}} \wedge y'_0 = -\sqrt{\frac{x_0}{a}}, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

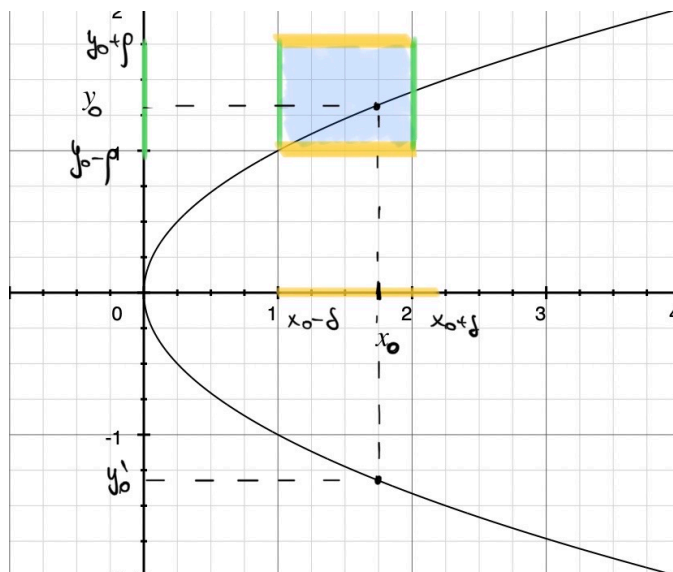
Ponendoci anche **in un intorno di  $y_0$  può accadere che  $x_0$  abbia immagine solo in  $y_0$** , ovvero che  $y'_0$  non appartenga al suddetto intorno:

$$y_0 \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho) \wedge y'_0 \notin (y_0 - \rho, y_0 + \rho) \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{x_0}{a}}$$

In questi intorni **si può definire univocamente  $y$  in funzione di  $x$** :

$$f: x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \rightarrow y \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho)$$

Che può anche essere espressa come una **funzione definita nel rettangolo**  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \times (y_0 - \rho, y_0 + \rho)$ . Questa operazione ha senso **solo se non si prende in considerazione** l'intorno rettangolare di **(0, 0)**, visto che in sua corrispondenza si troveranno sicuramente due  $y : F(x, y) = 0$ :



Sia considerata la funzione  $F(x, y)$  continua in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , **se esiste una funzione  $y = f(x) : F(x, f(x)) = 0$  ed esistono due intorni  $I$  e  $J$  tali che ad ogni  $x \in I$  sia corrisposta una e una sola  $y = f(x) \in J$  allora si dice che  $F(x, y)$  definisce una funzione implicita  $y = f(x) : \forall x \in I, F(x, f(x)) = 0$ :**

$$f: I \rightarrow J$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DINI PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE

*Ipotesi:*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : F(x, y) \in C^1(A)$$

$$\exists (x_0, y_0) \in A : F(x_0, y_0) = 0 \wedge F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

*Tesi:*

1.  $\exists \delta, \rho > 0 : F(x, y) = 0$  definisce un'unica funzione implicita :  $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
2.  $f$  è derivabile e  $f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$

*Dimostrazione:*

- $\exists \delta, \rho > 0 : F(x, y) = 0$  definisce un'unica funzione implicita :  $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

Si supponga che  $F_y(x_0, y_0) > 0$ , per il teorema della permanenza del segno:

$$\exists \rho > 0 : F_y(x, y) > 0, \forall (x, y) \in A : |x - x_0| < \rho \wedge |y - y_0| < \rho$$

Fissando  $x = x_0$ , si può considerare la funzione in una variabile:

$$y \in [y_0 - \rho, y_0 + \rho] \rightarrow F(x_0, y)$$

Poiché la derivata della  $F$  lungo  $y$  è maggiore di zero e poiché, per ipotesi,  $F(x_0, y_0) = 0$  si può affermare che la funzione appena considerata è strettamente crescente. Di conseguenza:

$$F(x_0, y_0 - \rho) < 0 \wedge F(x_0, y_0 + \rho) > 0$$

“Sbloccando” il valore di  $x$  si possono osservare le funzioni:

$$x \rightarrow F(x, y_0 - \rho)$$

$$x \rightarrow F(x, y_0 + \rho)$$

Ma per il teorema della permanenza del segno applicato alle due funzioni  $F(x, y_0 - \rho)$  e  $F(x, y_0 + \rho)$ :

$$\exists \delta > 0 : F(x, y_0 - \rho) < 0 \wedge F(x, y_0 + \rho) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Pertanto, si può concludere che  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  la funzione:

$$y \rightarrow F(x, y)$$

È strettamente crescente ed assume valori di segno opposto nell'intervallo  $(y_0 - \rho, y_0 + \rho)$  per quanto appena detto. Di conseguenza, per il teorema dei valori intermedi:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists ! y \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho) : F(x, y) = 0$$

Che equivale a dire che esiste una funzione:

$$f: x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow y \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho)$$

Per cui:

$$F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$$

$$- \quad f \text{ è derivabile e } f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists h > 0 : x + h \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Sia considerato il segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(x + h, f(x + h))$  e la funzione composta:

$$g(t) = F(x + th, f(x) + t(f(x + h) - f(x))) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Poiché  $F \in C^1(A)$ , per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per il teorema di Lagrange si ha che  $\exists(\xi, \mu) \in \overline{(x, f(x))(x + h, f(x + h))}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = g(1) - g(0) = g'(t_0) \\ &= F_x(\xi, \mu)h + F_y(\xi, \mu)[f(x + h) - f(x)] \end{aligned}$$

Dove  $t_0 \in (0,1) : x + t_0 h = \xi \wedge f(x) + t_0(f(x+h) - f(x)) = \mu \wedge g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0)$  per il teorema di Lagrange e dove lo 0 risulta dal fatto che la funzione  $f$  è definita implicitamente da  $F(x, y)$  in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Poiché  $F_y(x, y) > 0$ , si ha che  $F_y(\xi, \mu) \neq 0$  per cui è possibile dividere il risultato appena ottenuto:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(\xi, \mu)}{F_y(\xi, \mu)}$$

Per la continuità di  $f$  risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\xi, \mu) = (x, f(x))$$

Perché  $\xi \in (x, x+h)$  e  $\mu \in (f(x), f(x+h))$ ; quindi:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

CVD

Segue come **conseguenza** del teorema che  $y_0 = f(x_0)$ . La **tesi di derivabilità** della funzione implicita può essere anche **formulata genericamente** come:

$$F(x, y) \in C^k(A) \Rightarrow f \in C^k(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Geometricamente** il teorema di Dini ammette l'esistenza di un rettangolo  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \times (y_0 - \rho; y_0 + \rho)$  nel quale i punti della funzione  $F(x, y)$  costruiscono un grafico  $f(x)$ , cioè ammette che la retta  $x = x_0$  interseca l'insieme di soluzioni  $Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$  in un solo punto. Ovviamente il teorema non preclude che la retta intersechi altri punti, ma solo che non può farlo all'interno del rettangolo determinato.

Si supponga che  $F \in C^2(A)$ , che il punto  $(x_0, y_0)$  sia soluzione del sistema:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F_x(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

E che:

$$f''(x_0) = \frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} > 0$$

Allora il punto  $x_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ ; ovviamente invertendo il segno di questa disuguaglianza si codifica il minimo relativo.

Il teorema appena dimostrato fa riferimento a funzioni implicite in una variabile, ma può essere esteso anche a due.

## ENUNCIATO TEOREMA DI DINI PER LE FUNZIONI IN DUE VARIABILI

*Ipotesi:*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : F(x, y, z) \in C^1(A)$$

$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in A : F(x_0, y_0, z_0) = 0 \wedge F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

*Tesi:*

$$\exists I(x_0, y_0), \delta > 0 : \exists ! f : (x, y) \in I \rightarrow z \in (z_0 - \delta; z_0 + \delta) \wedge z_0 = f(x_0, y_0) \wedge F(x, y, f(x, y)) = 0$$

$$f \text{ ammette in } I \text{ derivate parziali prime che sono } f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \text{ e } f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$$

## FUNZIONI COMPOSTE

Sia considerato un **insieme aperto**  $A$  in cui sono definite una **funzione**  $z = f(x, y)$  e una **curva**  $\Gamma$  di equazione parametrica:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Con  $t \in [a; b]$ . Si dice **funzione composta** la **funzione**  $f$  calcolata nei punti della curva  $\Gamma$ :

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = F(t)$$

Per le funzioni in una variabile **la funzione composta può essere derivata** con la regola di derivazione ricavata dall'rispettivo teorema:

$$y = f(x) \wedge x = g(t) \Rightarrow F(t) = f(g(t)) \wedge F'(t) = f'(g(t))g'(t)$$

Per le funzioni in due variabili vale il seguente teorema.

## ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

*Ipotesi:*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A \text{ è un aperto}$$

$$\forall P_t(x(t), y(t)) \in A : x(t), y(t) \text{ sono derivabili in } t \in I$$

$$\forall f(x, y) \subseteq A : f \text{ è differenziabile in } P_t \in A$$

*Tesi:*

$$F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ è derivabile in } t \in I$$



$$F'(t) = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Questa formula può essere espressa anche come **prodotto scalare**, infatti:

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow \varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$D(f(\varphi(t))) = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y}$$

$$F'(t) = \langle D(f(\varphi(t))), \varphi'(t) \rangle = f_x(\varphi(t))x'(t) + f_y(\varphi(t))y'(t)$$

Sia considerato un **insieme aperto**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  in cui è definita una **funzione**  $f(x, y)$  e sia considerato un **incremento**  $(h, k) : (x + th, y + tk) \in A$ . Componendo queste due funzioni si ottiene:

$$F(t) = f(x + th, y + tk)$$

Supponendo che la **funzione** sia **differenziabile in A**, si può affermare che  $F(t)$  è **derivabile** e che:

$$F'(t) = f_x(x + th, y + tk)h + f_y(x + th, y + tk)k$$

Se a loro volta **le derivate parziali**  $f_x$  e  $f_y$  **sono derivabili**, e la loro derivata è **continua**,  $F(t)$  è **derivabile due volte**:

$$F''(t) = \frac{d(f_x(x + th, y + tk)h)}{dt} + \frac{d(f_y(x + th, y + tk)k)}{dt}$$

$$= f_{xx}(x + th, y + tk)h^2 + f_{xy}(x + th, y + tk)hk + f_{yx}(x + th, y + tk)kh + f_{yy}(x + th, y + tk)k^2$$

Poiché  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  sono continue, è possibile applicare il **teorema di Schwartz** per cui esse sono uguali, quindi:

$$F''(t) = f_{xx}(x + th, y + tk)h^2 + 2f_{xy}(x + th, y + tk)hk + f_{yy}(x + th, y + tk)k^2$$

Poiché  $F(t)$  è una funzione in una variabile, si può scrivere la **formula di Taylor** con il **resto di Lagrange** arrestata al **II ordine** e calcolata nel punto  $t_0 = 0$ :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\xi)t^2}{2}$$

Dove  $\xi \in (0; t)$ . Nel caso in cui  $t = 1$  si ha:

$$F(1) = f(x + h, y + k)$$

$$F(0) = f(x, y)$$

$$F'(0) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k$$

$$F''(\xi) = f_{xx}(x + \xi h, y + \xi k)h^2 + 2f_{xy}(x + \xi h, y + \xi k)hk + f_{yy}(x + \xi h, y + \xi k)k^2$$

Così si dimostra la formula di Taylor al II ordine con il resto di Lagrange; sia  $(x, y) \in A$  e  $(h, k) \rightarrow (0,0)$ , allora:

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (0,1) : f(x+h, y+k) &= f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x + \xi h, y + \xi k)h^2 + 2f_{xy}(x + \xi h, y + \xi k)hk + f_{yy}(x + \xi h, y + \xi k)k^2] \end{aligned}$$

Considerando i due **vettori**  $\underline{x} = (x, y)$  e  $\underline{h} = (h, k)$ , il **prodotto scalare** dei due vettori risulta essere:

$$\langle Df(\underline{x}), \underline{h} \rangle = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k$$

Analogamente, considerando la **matrice**:

$$D^2f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Si dice **prodotto matrice-vettore colonna** il **vettore colonna** che risulta da:

$$D^2f(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{x})h + f_{xy}(\underline{x})k \\ f_{yx}(\underline{x})h + f_{yy}(\underline{x})k \end{pmatrix}$$

Con cui si può calcolare il **prodotto scalare**:

$$\begin{aligned} \langle D^2f(\underline{x}) \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle &= f_{xx}(\underline{x}) \cdot h^2 + f_{xy}(\underline{x}) \cdot hk + f_{yx}(\underline{x}) \cdot hk + f_{yy}(\underline{x}) \cdot k^2 \\ &= f_{xx}(\underline{x}) \cdot h^2 + 2f_{xy}(\underline{x}) \cdot hk + f_{yy}(\underline{x}) \cdot k^2 \end{aligned}$$

Allora la **formula di Taylor** può essere scritta:

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2f(\underline{x} + \xi \underline{h}) \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$$

## MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Sia considerata una **funzione  $f$  definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$**  e sia considerato un suo punto  $P_0(x_0, y_0) \in A$ , si dice che  **$P_0$  è un minimo relativo per  $f$**  se:

$$\exists I_\rho(P_0) : f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I_\rho(P_0)$$

Analogamente, si dice che  **$P_0$  è un massimo relativo per  $f$**  se:

$$\exists I_\rho(P_0) : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I_\rho(P_0)$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI FERMAT

*Ipotesi:*

$\forall f$  definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  :  $f$  è derivabile in  $P_0(x_0, y_0) \in A$

$P_0$  è un punto di massimo/minimo relativo

*Tesi:*

$$Df(P_0) = \underline{0} \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

*Dimostrazione:*

La dimostrazione viene fatta assumendo  $P_0$  come punto di massimo relativo ma è analoga nel caso contrario. Per definizione di massimo relativo:

$$\exists I_\rho(P_0) : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I_\rho(P_0)$$

Fissando il valore di  $y$  a  $y_0$  la funzione diventa in una variabile, infatti:

$$y = y_0 \Rightarrow F(x) = f(x, y_0) \quad \forall x \in (x_0 - \rho; x_0 + \rho)$$

Poiché si stanno prendendo punti interni all'intorno del massimo relativo:

$$F(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = F(x_0)$$

Ciò significa che  $x_0$  è un punto di massimo relativo per la funzione in una variabile  $F(x)$ . Applicando il teorema di Fermat su funzioni in una variabile:

$$F'(x_0) = \frac{d}{dx} F(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$$

Applicando lo stesso ragionamento alla  $x$ , cioè ponendo  $x = x_0$ , si ottiene come funzione in una variabile:

$$G(y) = f(x_0, y)$$

E come derivata:

$$G'(y_0) = \frac{d}{dy} G(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

Con la quale è possibile affermare che:

$$f_x(x, y_0) = f_y(x_0, y) = 0$$

CVD

Un **punto che annulla il gradiente** di una funzione viene detto **punto critico stazionario**, questa proprietà è una **condizione necessaria affinché il punto sia un estremo relativo**. Ovviamente la necessità della condizione non implica automaticamente la veridicità dell'inverso.

## ENUNCIATO CONDIZIONE SUFFICIENTE PER MASSIMI E MINIMI RELATIVI

*Ipotesi:*

$\forall f$  definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  :  $f$  è derivabile due volte in  $A$

La derivata seconda di  $f$  è continua in  $A$

$\forall P_0 \in A$

Sia  $Hf(P_0) = \det D^2f(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$  il determinante Hessiano di  $f$  in  $P_0$

*Tesi:*

- I.  $Hf(P_0) > 0$ :
  - a.  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \wedge f_{xx}(P_0), f_{yy}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un minimo relativo per  $f$ ;
  - b.  $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \wedge f_{xx}(P_0), f_{yy}(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un massimo relativo per  $f$ ;
- II.  $Hf(P_0) < 0$ ,  $P_0$  è un punto “sella”, cioè un punto stazionario non di massimo e non di minimo;
- III.  $Hf(P_0) = 0$ , non si può dire nulla sul punto  $P_0$ .

Il **determinante Hessiano** si calcola:

$$Hf(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}(P_0)f_{yx}(P_0)$$

Ma poiché nel teorema si è **anche nelle ipotesi del teorema di Schwartz**:

$$Hf(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}(P_0)^2$$

Nel **caso I** del teorema appena enunciato, è **sufficiente** dire che le due derivate  $f_{xx}$  e  $f_{yy}$  sono **concordi**, infatti:

$$Hf(P_0) > 0 \Leftrightarrow f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}(P_0)^2 > 0 \Leftrightarrow f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) > f_{xy}(P_0)^2 > 0$$

Si consideri il caso in cui ci si trovi nelle ipotesi del teorema sopra elencato ma la valutazione della **matrice Hessiana** ha restituito un **determinante nullo**; secondo il teorema non si può dire nulla riguardo al punto in esame ma esistono alcuni procedimenti che permettono di giungere ad una conclusione. Uno di questi procedimenti è il **metodo delle rette per punti**, il quale permette di determinare se un punto è di sella ma non se è di massimo o minimo; sia considerato il punto  $P_0(x_0, y_0)$  e il fascio di rette passanti per esso:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = mx - mx_0 + y_0$$

Che restituisce **qualsiasi direzione al variare del parametro  $m$** . Fissando il valore di  $m$  a  $\bar{m}$  si può ottenere una **funzione in una variabile**:

$$g(x, mx - mx_0 + y_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si supponga che  $x_0$  è un estremo per la funzione appena ricavata; se esiste un'altra direzione  $\bar{m}$  per la quale  $x_0$  è un estremo, il punto  $P_0(x_0, y_0)$  è un punto di sella per  $f(x, y)$ .

In genere un punto critico  $P_0(x_0, y_0)$  per  $f(x, y)$  non è né un punto di massimo né un punto di minimo se su due curve passanti per  $P_0$  la funzione  $f$  presenta un minimo e un massimo.

Sia considerata una funzione  $f(x, y)$  che può essere scritta come funzione in una variabile  $g(t)$  derivabile due volte:

$$f(x, y) = g(ax + by)$$

Se  $t_0$  è un punto di massimo o minimo relativo per  $g$  la retta  $\{(x, y) : ax + by = t_0\}$  è un insieme di massimi o minimi relativi per  $f$ . Analogamente per  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  e altri casi simili.

## MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Siano  $f(x, y)$  e  $F(x, y)$  due funzioni di classe  $C^1(A)$ , dove  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è un aperto. Si supponga che  $F$  verifichi la seguente condizione:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in A$$

E sia  $Z_0 = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ , allora si dice che  $f$  ha un massimo relativo vincolato (con vincolo dato dall'equazione  $F(x, y) = 0$ ) nel punto  $(x_0, y_0) \in Z_0$  se:

$$\exists I(x_0, y_0) : f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap Z_0$$

Analogamente, si dice che  $f$  ha un minimo relativo vincolato (con vincolo dato dall'equazione  $F(x, y) = 0$ ) nel punto  $(x_0, y_0) \in Z_0$  se:

$$\exists I(x_0, y_0) : f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap Z_0$$

Le variabili da cui dipende la funzione  $f$ , per la ricerca dei massimi e minimi vincolati, non sono indipendenti ma piuttosto legate alla condizione  $F(x, y) = 0$ , detta vincolo; di conseguenza, il problema di ricerca di estremi relativi vincolati si riduce alla ricerca di estremi relativi su variabili che vengono vincolate ad una curva di equazione  $F(x, y) = 0$ , la quale può essere espressa in forma quadratica, cartesiana esplicita o, più in generale, implicita:

- Forma parametrica

È il caso più semplice, viene considerato un sostegno  $Z_0$  di una curva regolare  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  la cui equazione parametrica è:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Il problema di ricerca degli estremi relativi vincolati si riduce a trovare gli estremi della funzione composta:

$$H(t) = f(x(t), y(t)), \forall t \in [a, b]$$

Si supponga l'esistenza di un  $t_0 \in [a, b]$  :  $t_0$  è un **punto di massimo (o di minimo) relativo** per la funzione  $H(t)$ , allora  $H'(t_0) = 0$ . Per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$H'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

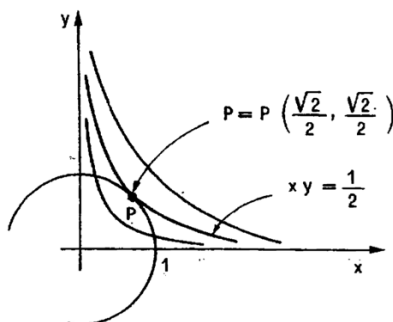
Ma considerando  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ , si ha:

$$f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = 0$$

Che, espresso in forma di **prodotto vettoriale**:

$$\langle Df(x_0, y_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

Questo modo di esprimere un massimo (o minimo) vincolato suggerisce che esso risulta essere un punto in cui **il gradiente di  $f$  è ortogonale alla curva  $\gamma(t)$** :



- **Forma cartesiana esplicita**

In questa situazione ci si ritrova quando **la curva è data in forma cartesiana esplicita come  $y = g(x)$** ; in tal caso si determinano **i punti di estremo relativo della funzione**:

$$x \rightarrow f(x, g(x))$$

- **Forma implicita**

Quando la curva è descritta da un'equazione implicita del tipo  $F(x, y) = 0$ ,  **$Z_0$  non sarà il sostegno di una curva semplice** con una determinata rappresentazione cartesiana o parametrica (ovvero l'equazione del vincolo non sarà risolvibile rispetto ad una variabile nei termini dell'altra); ciò **potrà, però, verificarsi in un intorno di un punto regolare di  $Z_0$** . Un punto  $(x_0, y_0) \in Z$  si dice che è **regolare** per  $Z$  se:

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq \underline{0}$$

Mentre il **punto** si dice **singolare** se:

$$\nabla F(x_0, y_0) = \underline{0}$$

Se si considera il punto regolare, la funzione  **$F$  soddisfa le ipotesi del teorema di Dini** e, pertanto, **la curva  $F(x, y) = 0$  definisce localmente una funzione implicita  $x = g(y)$  oppure  $y = h(x)$** .

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

*Ipotesi:*

$\forall (x_0, y_0) \in Z_0 : (x_0, y_0)$  è un punto regolare per  $F$

$(x_0, y_0)$  è un punto di massimo/minimo relativo vincolato per  $f$

*Tesi:*

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : f_x(x_0, y_0) - \lambda F_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) - \lambda F_y(x_0, y_0) = 0$

*Dimostrazione:*

Poiché  $(x_0, y_0)$  è un punto regolare  $\nabla F(x_0, y_0) \neq \underline{0}$ , che equivale a dire:

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0 \vee F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Per il teorema di Dini, l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce localmente:

$$x = g(y) : x_0 = g(y_0)$$

Oppure:

$$y = h(x) : y_0 = h(x_0)$$

Si supponga che  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  (il caso opposto è analogo), si avrà come funzione implicita:

$$y = h(x)$$

E sia  $x_0$  un estremo relativo della funzione in una variabile:

$$x \rightarrow f(x, h(x))$$

Quindi la derivata in tale punto sarà nulla:

$$f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0)) \cdot h'(x_0) = 0$$

Ma per il teorema di Dini, la derivata della funzione  $h$  è data da:

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))}$$

Quindi:

$$f_x(x_0, h(x_0)) - f_y(x_0, h(x_0)) \cdot \frac{F_x(x_0, h(x_0))}{F_y(x_0, h(x_0))} = 0$$

Se  $f_y(x_0, h(x_0)) \neq 0$  si ha:

$$\frac{F_x(x_0, h(x_0))}{F_y(x_0, h(x_0))} = \frac{f_x(x_0, h(x_0))}{f_y(x_0, h(x_0))}$$

Che equivale a dire che i vettori  $\bar{\nabla}f(x_0, y_0)$  e  $\bar{\nabla}F(x_0, y_0)$  sono paralleli:

$$\bar{\nabla}f(x_0, y_0) = \lambda \bar{\nabla}F(x_0, y_0)$$

E cioè:

$$f_x(x_0, y_0) - \lambda F_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) - \lambda F_y(x_0, y_0) = 0$$

CVD

Si deduce che gli **estremi vincolati di  $f(x, y)$  con vincolo  $F(x, y) = 0$**  corrispondono ai **punti critici** (o stazionari) **della funzione in tre variabili**:

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$$

Che viene detta **funzione Lagrangiana di  $f$** , mentre la variabile  $\lambda$  **prende il nome di moltiplicatore di Lagrange**. Il metodo per risolvere il sistema:

$$\begin{cases} H_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda F_x(x, y) = 0 \\ H_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda F_y(x, y) = 0 \\ H_\lambda(x, y, \lambda) = F(x, y) = 0 \end{cases}$$

È detto **metodo di Lagrange per la ricerca di estremi di  $f$  sotto il vincolo  $F(x, y) = 0$** .

Finora sono stati studiati i punti di massimo e minimo relativi, per quanto riguarda la **ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti di una funzione  $f$  differenziabile in un insieme  $A$  con frontiera regolare** si può:

1. Determinare i **punti critici di  $f$  nell'interno di  $A$** , quindi in  $\dot{A}$  (eventuali estremi liberi);
2. Determinare i **punti critici di  $f$  sulla frontiera di  $A$**  (eventuali estremi vincolati);
3. Supponendo che il numero di questi punti sia finito, si determina il **valore assunto dalla funzione in loro corrispondenza e si osservano il più piccolo e il più grande**, che saranno rispettivamente minimo assoluto e massimo assoluto.

Questo metodo implica che per la ricerca dei punti di estremo assoluto **non è necessario lo studio della natura dei punti critici** (cioè non interessa se essi sono liberi o vincolati) nonostante non sia vietato.

Posto il caso in cui **la funzione non sia differenziabile in un numero finito di punti di  $A$** , oppure che **la frontiera sia regolare a tratti**, per gli estremi assoluti vanno **confrontati i valori riscontrati con il valore che la funzione assume in questi punti**.



## ***CURVE, SUPERFICI E INTEGRALI MULTIPLI***

### **CURVE E INTEGRALI CURVILINEI**

Una **curva** è un'applicazione in una variabile a valori **nel piano** (o **nello spazio**):

$$\varphi: t \in [a, b] \rightarrow \varphi(t) = \varphi(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

Dove il **codominio** viene detto **sostegno della curva**:

$$\Gamma = \varphi([a, b])$$

Il sostegno ha **equazioni parametriche**:

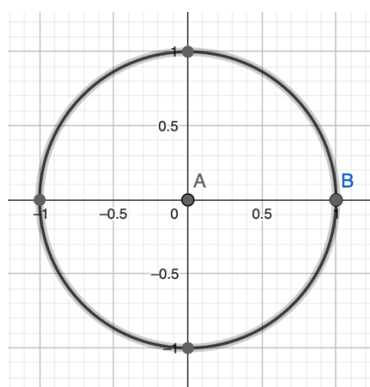
$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Infatti, pur avendo come variabile un parametro  $t$ , **una curva è sempre rappresentabile sul piano cartesiano** se dotata di equazioni parametriche; tuttavia, queste **rappresentazioni possono essere diverse**, ad esempio la circonferenza di Centro  $O(0,0)$  e raggio unitario può essere rappresentata come:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}, \forall t \in [0, 2\pi]$$

**Graficamente** queste due equazioni parametriche individuano la **stessa curva**, tuttavia **ognuna impone un verso di percorrenza** che differenzia due rappresentazioni apparentemente identiche:

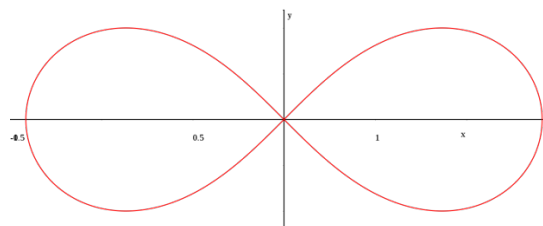


Nel primo caso la circonferenza verrà percorsa in senso antiorario, nel secondo caso in verso orario. In realtà sono già state osservate in precedenza delle **curve** ma esse erano **in forma cartesiana**; **per convertire un'equazione cartesiana in un'equazione parametrica** non bisogna fare altro che **porre la variabile indipendente come parametro**:

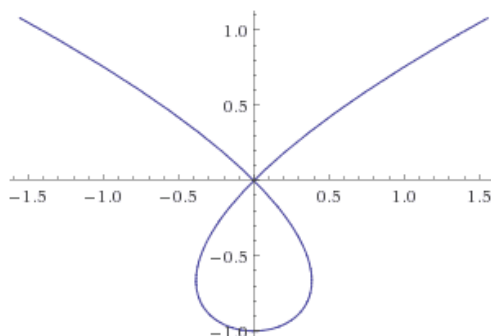
$$y = x^2 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Due esempi di curve notevoli sono la **Lemniscata** e lo **Strofoide**:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \forall t \in [0, 2\pi]$$



$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$



**Una curva**, oltre che attraverso un'espressione cartesiana e parametrica, può essere **rappresentata** da un'espressione **polare**, la cui **variabile** è un **angolo**:

$$\rho = \rho(\vartheta), \forall \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

**Per passare da un'equazione cartesiana o parametrica ad una polare** bisogna **valutare il parametro o la variabile in funzione di un polo O**; ad esempio, per la circonferenza di centro (1,0) e raggio unitario rispetto all'origine, si considera:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \wedge \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta + 2\rho \cos \vartheta = 0$$

$$\rho(\rho - 2 \cos \vartheta) = 0$$

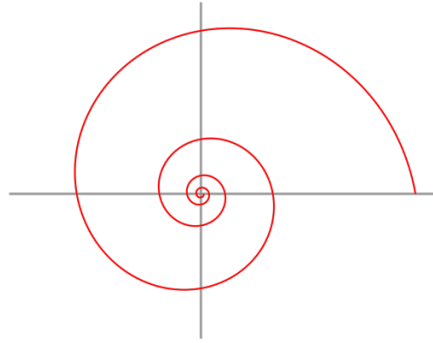
$$\rho(\vartheta) = 2 \cos \vartheta$$

In genere, **rispetto al polo  $P_0(x_0, y_0)$**  le coordinate polari risultano:

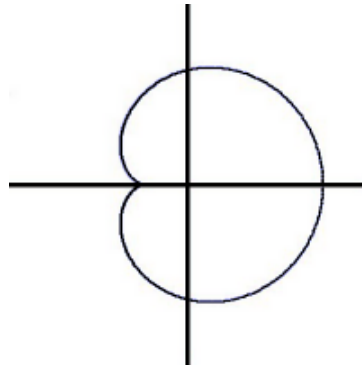
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Alcune curve notevoli espresse in forma polare sono la **Spirale Logaritmica** e il **Cardioide**:

$$\rho = ae^{-b\vartheta}, \forall a, b, \vartheta > 0$$



$$\rho = a(1 + \cos \vartheta), \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$$



Si supponga che la **legge che descrive la curva**  $\varphi(t)$  sia **derivabile**, allora si definisce il **vettore tangente** alla curva stessa in un punto  $P(x_0, y_0)$  come la **derivata della legge in quel punto**:

$$\varphi'(t_0) = \begin{cases} x_0 = x'(t_0) \\ y_0 = y'(t_0) \end{cases}$$

Mentre il **versore** si determina con il **rapporto di questa quantità per se stessa modulata**:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|} = \left( \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \right)$$

Il **versore normale**, visto che è **tangente al versore tangente**, sarà nient'altro che la **derivata di questo vettore**, pertanto:

$$N(t_0) = \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|} : \langle T(t_0), N(t_0) \rangle = 0$$

Una **curva**  $\varphi(t)$  in  $\mathbb{R}^2, \forall t \in [a, b]$ , viene detta **regolare in**  $I = [a, b]$  se:

1.  $\varphi(t)$  è **derivabile** ed ha **derivata continua** in  $I$ ;
2.  $\varphi'(t) \neq \underline{0}$ , che equivale a dire che **le componenti**  $x'(t)$  e  $y'(t)$  **non si annullano mai** oppure che  $\|\varphi'(t)\| > 0$ .

Dalla definizione si può dedurre che **in una curva regolare il versore tangente è sempre definito**, infatti esso esiste nel momento in cui è definita la derivata.

Sia presa una **curva regolare dove gli estremi sono determinati**:

$$\varphi: t \in I = [a, b] \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(a) = P_a \wedge \varphi(b) = P_b$$

Si **partizioni I in n punti** in modo che ad ogni  $t_i$  sia corrisposto un punto sulla curva:

$$P = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\} : \forall t_i \in P \exists P_i = \varphi(t_i)$$

Sia  $P_N$  la **poligonale di vertici i punti individuati da P**, la sua **lunghezza** è data dalla **somma di tutte le distanze dei vari vertici**:

$$L(P_N) = \sum_{i=1}^n \|P_{i-1} - P_i\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Mentre si dice **lunghezza della curva  $\varphi$**  l'estremo superiore dell'insieme di lunghezze di tutte le **possibili poligonali inscritte al variare della partizione di I**:

$$L(\varphi) = \sup\{L(P_N) : N \rightarrow +\infty\}$$

## ENUNCIATO TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

*Ipotesi:*

$\forall \varphi : \varphi$  è una curva regolare in  $[a, b]$

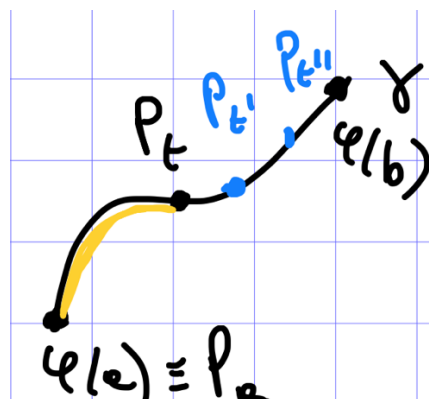
$\varphi$  ha equazione parametrica  $\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$

*Tesi:*

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Ovviamente questa operazione di calcolo della lunghezza di una curva **può essere fatta anche su porzioni della curva**, in tal caso essa prende il nome di **ascissa curvilinea**. Preso un  $r > a$ , esso individua il punto sulla curva  $P_r = \varphi(r)$  con il quale si determina la **lunghezza dell'arco  $\widehat{P_a P_r}$** :

$$L(\widehat{P_a P_r}) = s(r) = \int_a^r \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^r \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$



Sia  $\gamma \subseteq A$  una curva regolare e  $\varphi(t), \forall t \in [a, b]$  una rappresentazione parametrica di tale curva; sia considerata una funzione  $z = f(x, y)$  definita e continua in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , l'integrale curvilineo di  $f$  lungo  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Questa formula deriva dalla **formulazione dell'ascissa curvilinea**, infatti:

$$s(t) = \int_t^{t_0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Ovviamente questo risultato può essere **esteso ad una terza dimensione**. Si dice **baricentro della curva regolare  $\gamma$  di equazione parametrica  $\varphi(t), \forall t \in [a, b]$** , il punto  $P_0(x_0, y_0)$  dove:

$$x_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, y_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

L'integrale curvilineo lungo una **curva chiusa** è detto anche **circuitazione** e si indica come segue:

$$\oint_{\gamma} f ds$$

## VERSOE TANGENTE E VERSORE NORMALE AD UNA CURVA

Sia  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una curva regolare e siano  $t_0, t_1 \in (a, b)$  due punti della curva per cui la **retta passante** per essi ha equazione:

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t_1) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t_1) - y(t_0)}$$

Con  $\varphi(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$  e  $\varphi(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ . Si ha, quindi:

$$(x - x(t_0))(y(t_1) - y(t_0)) = (y - y(t_0))(x(t_1) - x(t_0))$$

Dividendo per  $t_1 - t_0$ :

$$(x - x(t_0)) \frac{(y(t_1) - y(t_0))}{t_1 - t_0} = (y - y(t_0)) \frac{(x(t_1) - x(t_0))}{t_1 - t_0}$$

Portando a **limite  $t_1 \rightarrow t_0$**  tale espressione:

$$(x - x(t_0))y'(t_0) = (y - y(t_0))x'(t_0)$$

Ma questa **retta** risulta essere **parallela al vettore**:

$$\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

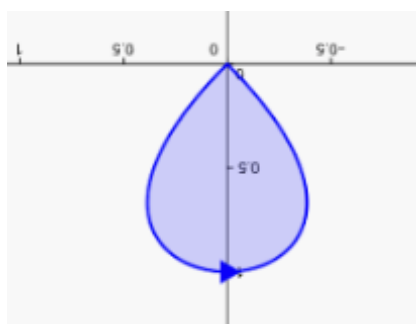
Detto **vettore tangente a  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t_0)$** ; di conseguenza, il **versore tangente** è:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|} = \left( \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \right)$$

Ma se  $\varphi$  è regolare  $\varphi'(t_0) \neq \underline{0}$  e  $\forall t_0 \in (a, b) \exists! T(t_0)$ , ovvero **la curva non presenta cuspidi o punti angolosi**.

Nello **strofoide** (o meglio nel **cappio di strofoide**, visto che per rendere la curva semplice e chiusa va ristretta a  $[-1, 1]$ ) si ha:

$$\varphi|_{[-1, 1]} = (t^3 - t, t^2 - 1)$$



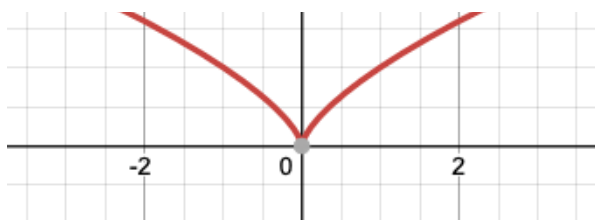
$$\varphi'_{|[-1, 1]} = (3t^2 - 1, 2t)$$

Le cui **componenti non si annullano mai contemporaneamente**, quindi rappresenta un esempio di **curva regolare**:

$$\varphi'_{|[-1, 1]} \neq \underline{0}$$

Di contro, una **curva non regolare** è  $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ , infatti:

$$\varphi'(t) = (3t^2, 2t)$$



Che **si annulla nell'origine  $\varphi'(0) = (0, 0)$** . Estrapolando l'**equazione cartesiana** dalla curva:

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

Che risulta avere una **cuspide nell'origine**. Per “**rendere regolare**” tale curva si possono **considerare le restrizioni** ad ascisse positive e negative, che sono regolari:

$$\varphi'_{|[-1, 0]} \text{ e } \varphi'_{|[0, 1]}$$

Questa proprietà rende la **curva regolare a tratti**.

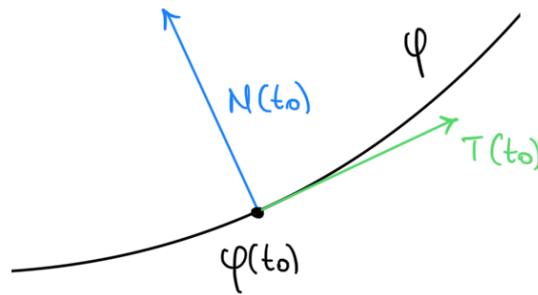
Dato un punto della curva  $t_0 \in (a, b)$ , si definisce **versore normale alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t_0)$**  il versore ottenuto dalla **rotazione di  $\pi/2$  del versore tangente** alla curva nel medesimo punto; di conseguenza, il **versore normale** sarà **ortogonale** al **versore tangente** e quindi:

$$N(t_0) = \left( \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}, -\frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \right)$$

Infatti il **prodotto scalare** dei due è zero:

$$\langle T(t_0), N(t_0) \rangle = \frac{x'(t_0)y'(t_0) - x'(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} = 0$$

In questo modo, in ogni punto della curva **la coppia di versori  $(N(t_0), T(t_0))$  è congruente ai versori  $(\underline{i}, \underline{j})$** ; infatti, con un movimento rigido (rotazione e traslazione) si può sempre sovrapporre  $N(t_0)$  con  $\underline{i}$  e  $T(t_0)$  con  $\underline{j}$ .



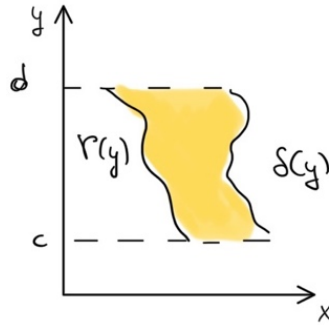
## DOMINI NORMALI E INTEGRALI DOPPI

Siano  $\alpha(x), \beta(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **funzioni continue** per cui  $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a, b]$ , si definisce **dominio normale rispetto all'asse x** un **insieme** del tipo  $D_x = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ . Analogamente, prese due **funzioni continue**  $\gamma(y), \delta(y): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  per cui  $\gamma(y) \leq \delta(y) \forall y \in [c, d]$ , si **definisce dominio normale rispetto all'asse y** un **insieme** del tipo  $D_y = \{(x, y) : c \leq y \leq d \wedge \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ .

Ovviamente, per calcolare l'**area** di questi domini basti **integrare per gli estremi** dell'intervallo:

$$area(D_x) \equiv \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx$$

$$area(D_y) \equiv \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y)) dy$$



Presa una **funzione in una variabile**  $y = f(x)$  in  $[a, b]$  e sia presa una **partizione di n intervalli**  $(x_0, x_1) \dots (x_{n-1}, x_n)$  di lunghezza  $\frac{b-a}{n}$ , è possibile esprimere **l'integrale di tale funzione tra a e b** come **limite dell'area pluri-rettangolare**  $s_n$ :

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

Dove  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ . È possibile fare un **discorso analogo con le funzioni in due variabili**, infatti presa una **funzione**  $z = f(x, y)$  continua in  $D$  normale, si può **dividere il dominio in un numero finito di domini normali**  $D_{ij} : i, j \in [1, n]$  in modo tale da costituire una **partizione di D** per la quale  $D_{ij}$  sono a due a due disgiunti:

$$D = \bigcup_{i,j=1}^n D_{ij}$$

$\forall i, j : P_{ij} \in D_{ij}$ , si considera la somma di Cauchy Riemann:

$$s_n = \sum_{i,j=1}^n f(P_{ij})\text{area}(D_{ij})$$

Dove **area** $(D_{ij})$  è l'**area del dominio normale**  $D_{ij}$  e  $f(P_{ij})$  l'**altezza del punto**  $P_{ij}$  della funzione  $z$ ; di conseguenza, il **prodotto**  $f(P_{ij})\text{area}(D_{ij})$  risulta essere il **volume del parallelepipedo sotteso alla superficie**  $z = f(x, y)$  di base  $D_{ij}$  mentre  $s_n$  è il **volume del pluri-parallelepipedo sotteso al grafico di z**.

Si dice che la funzione  $f$  è **integrabile secondo Riemann su D** se esiste finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

Il quale viene definito come **integrale doppio di f esteso a D**:

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$



Generalmente, **quando**  $f(x, y) > 0$ , l'integrale doppio viene associato al solido di base  $D$ . Gli integrali doppi rispettano le seguenti proprietà:

1.  $\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$ ;
2.  $f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$ ;
3.  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i : D_i \cap D_j = \emptyset \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$ .

Siano prese le funzioni  $\alpha(x), \beta(x)$  continue in  $[a, b]$ , tali che  $D_x$  sia il dominio normale rispetto a  $\vec{x}$ , e una funzione  $f(x, y)$  continua in  $D_x$ , allora:

$$\iint_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

Ciò significa che **per risolvere un integrale doppio si può fissare una**  $x \in [a, b]$ , **risolvere prima**  $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$  **e ottenere una funzione della**  $x$  **che verrà poi integrata**  $\int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$ .

Un **discorso analogo** può essere fatto **lungo l'asse**  $y$ , infatti se  $D_y$  è il dominio normale rispetto a  $\vec{y}$  si ha:

$$\iint_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

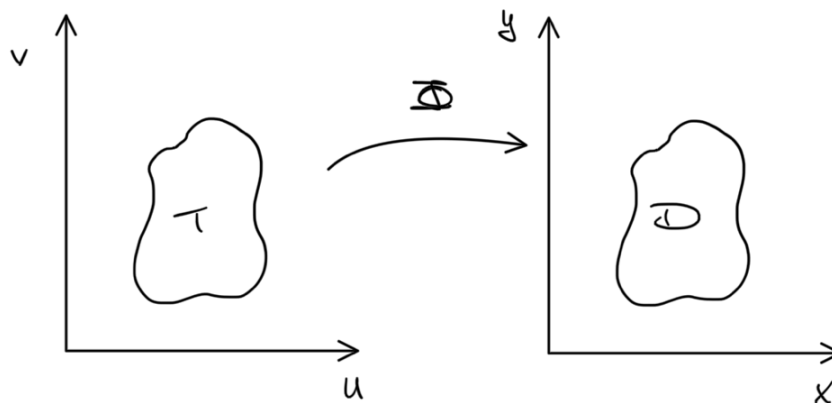
Questo procedimento prende il nome di **formula di riduzione** e fornisce un metodo rapido e semplice per la risoluzione degli integrali doppi.

Come gli integrali singoli, anche gli integrali doppi sono risolvibili con il **metodo del cambiamento di variabile**. Preso un dominio regolare  $T$  in un piano  $uv$  e la funzione:

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, (u, v) \in T$$

Definita come:

$$\Phi: (u, v) \in T \rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in D = \Phi(T)$$



Si può fare un **parallelismo** tra i due integrali, infatti  $\Phi$  corrisponde alla funzione  $g$  e  $(u, v)$  corrisponde alla variabile  $t$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

Infatti, considerando la **matrice Jacobiana** e il suo **determinante**:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

Si può enunciare il **teorema del cambiamento di variabile**.

## ENUNCIATO TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE

*Ipotesi:*

$\forall T, D \subseteq \mathbb{R}^2$ , domini regolari

$\forall \Phi: T \rightarrow D$ , invertibile e di classe  $C^1(T)$

$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

$\forall f: D = \Phi(T) \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $D$

*Tesi:*

$$\iint_{D=\Phi(T)} f(x, y) dx dy = \iint_T f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Il **cambiamento di variabile** può avvenire anche in **coordinate polari**:

$$\forall \Phi: (\rho, \vartheta) \in T \rightarrow (x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)) \in D : \Phi = \begin{cases} x = x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \\ y = y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Con  $\rho \geq 0$  e  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Ne consegue che:

$$(\rho, \vartheta) \in S = \{(\rho, \vartheta) : \rho \geq 0 \wedge \vartheta \in [0, 2\pi]\}$$

Il Jacobiano diventa:

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\vartheta \\ y_\rho & y_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho \sin^2 \vartheta + \rho \cos^2 \vartheta = \rho$$

## ENUNCIATO TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE (COORDINATE POLARI)

*Ipotesi:*

$\forall D$  dominio regolare

$\forall f$  continua in  $D$

*Tesi:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta$$

Per le **funzioni in una variabile**, per determinare la **lunghezza di un intervallo**  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  si ricorre all'**integrale lungo tale intervallo**:

$$\text{lung}(I) = m(I) = \int_a^b dx = [x]_a^b = b - a$$

Si può **analogamente dire per le funzioni in due variabili**; sia preso un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , la sua **superficie** può essere determinata dall'**integrale doppio** calcolato lungo la superficie per un **altezza**  $z = f(x, y) = 1$ :

$$\text{area}(A) = m(A) = \iint_A dx dy$$

Preso un **dominio normale**  $D$ , si può affermare che esso è **regolare** se  $\alpha(x), \beta(x)$  sono di classe  $C^1([a, b])$  (cioè derivabile con derivata continua). Un **dominio regolare** normale può essere l'**unione finita di  $n$  domini normali**:

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$\dot{D}_i \cap \dot{D}_j = \emptyset$$

Se  $D$  è **normale regolare**, la sua frontiera  $\partial D$  è l'**unione di un numero finito di curve regolari a tratti**; ciò significa che **per ogni punto di  $\partial D$  esiste il versore tangente  $T$  e quello normale  $N$**  (tranne al più in un numero finito di punti), mentre per **orientamento positivo di  $\partial D$**  si intende **quello per cui il versore normale risulti in ogni punto esterno a  $D$**  (verso antiorario, ovvero quello per cui un osservatore che percorre la frontiera lascia alla propria sinistra il dominio); l'orientamento è individuato da  $+\partial D$  e  $-\partial D$

Considerato un **dominio normale**  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  in cui è definita una **funzione**  $f(x, y) \in C^1(D)$ , valgono le **formule di Gauss-Green**:

$$\iint_D f_x(x, y) dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f_y(x, y) dx dy = \int_{-\partial D} f(x, y) dx = - \int_{+\partial D} f(x, y) dx$$

Con queste formule si può osservare come **un integrale doppio esteso a  $D$**  si possa **calcolare tramite un integrale curvilineo esteso alla frontiera  $\partial D$** .

## DIMOSTRAZIONE FORMULE DI GAUSS-GREEN PER $D$ COME UNIONE DI DOMINI NORMALI

*Ipotesi:*

$\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \subseteq \mathbb{R}^2$ : sono curve in  $\mathbb{R}^2$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall c \leq y \leq d, \gamma(y) < x < \delta(y)\}$  :  $D$  sia normale a  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$

$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

*Tesi:*

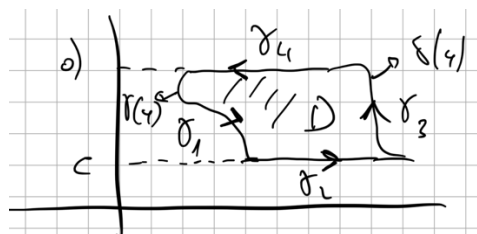
$$\iint_D f_x(x, y) dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) dy$$

*Dimostrazione:*

Per le formule di riduzione:

$$\iint_D f_x(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f_x(x, y) dx = \int_c^d (f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)) dy$$

Facendo riferimento al dominio normale:



Si può osservare che su  $\gamma_2$  e su  $\gamma_4$  le ordinate dei punti di  $\partial D$  sono costanti e uguali a  $c$  su  $\gamma_2$  e a  $d$  su  $\gamma_4$ ; allora:

$$\int_{\gamma_2} f(x, y) dy = \int_{\gamma_4} f(x, y) dy = 0$$

Dovuto al fatto che quando si calcola l'integrale di linea si tiene conto della derivata  $y'(t)$  ( $dy = dy(t) = y'(t)dt$ ). Da ciò si può desumere che:

$$\int_{+\partial D} f(x, y) dy = \int_{\gamma_1} f(x, y) dy + \int_{\gamma_3} f(x, y) dy$$

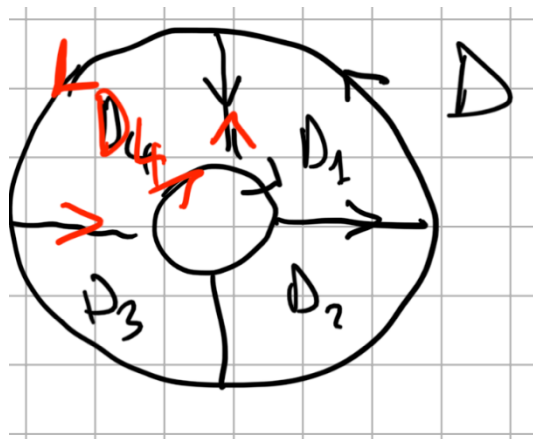
Ma su  $\gamma_1$ ,  $x = \gamma(y)$ , e su  $\gamma_3$ ,  $x = \delta(y)$ , quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(\gamma(y), y) dy + \int_c^d f(\delta(y), y) dy &= - \int_c^d f(\gamma(y), y) dy + \int_c^d f(\delta(y), y) dy \\ &= \int_c^d (f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)) dy \end{aligned}$$

Raggruppando tutti i risultati finora rilevati:

$$\begin{aligned} \iint_D f_x(x, y) dx dy &= \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f_x(x, y) dx = \int_c^d (f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)) dy \\ &= - \int_c^d f(\gamma(y), y) dy + \int_c^d f(\delta(y), y) dy = \int_a^c f(\gamma(y), y) dy + \int_c^d f(\delta(y), y) dy \\ &= \int_{\gamma_1} f(x, y) dy + \int_{\gamma_3} f(x, y) dy = \int_{+\partial D} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Ma in un dominio normale che è unione di  $n$  domini normali:



$$\iint_D f_x(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f_x(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \int_{+\partial D_i} f(x, y) dy$$

Ma poiché gli archi di curva di due domini adiacenti compaiono nella sommatoria due volte con segni opposti, essi si elidono e lasciano spazio alla sola frontiera esterna del dominio:

$$\sum_{i=1}^n \int_{+\partial D_i} f(x, y) dy = \int_{+\partial D} f(x, y) dy$$

CVD

Sia  $S$  il solido generato dalla rotazione di un angolo  $\alpha$  di un dominio normale  $D$  del piano intorno ad un asse  $r$  che non interseca il dominio; il volume di  $S$  è dato dal prodotto dell'area di  $D$  per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto nella rotazione del baricentro. Ad esempio, se  $D$  ruota di  $2\pi$  intorno all'asse  $x$ , con il punto  $(x_0, y_0)$  come baricentro, il volume di  $S$  è:

$$\text{vol}(S) = m(D) \cdot 2\pi y_0 = m(D) \cdot 2\pi \frac{1}{m(D)} \iint_D y \, dx dy = 2\pi \iint_D y \, dx dy$$

Questo teorema prende il nome di **Primo teorema di Guldino**. Un'applicazione di questo teorema può essere il **calcolo del solido di rotazione  $S$  generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  del rettangoloide**:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Infatti:

$$\text{vol}(S) = m(S) = 2\pi \iint_D y \, dx dy = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = 2\pi \int_a^b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{f(x)} dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

## INTEGRALI TRIPLI

Sia  $E$  un dominio normale in  $\mathbb{R}^3$  rispetto al piano  $xy$ , cioè  $E$  del tipo:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \wedge \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

Dove  $\alpha(x, y)$  e  $\beta(x, y)$  sono due funzioni continue in  $D$  (ovvero  $\alpha, \beta \in C^1(E)$ ) per cui  $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$  e  $D$  è un dominio normale del piano  $xy$ . Il volume del solido  $E$  è dato da:

$$\text{Vol}(E) = \iint_D [\beta(x, y) - \alpha(x, y)] dx dy$$

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $P = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  una partizione di  $E$  in domini normali regolari, considerando le seguenti somme di Cauchy-Riemann:

$$s(P) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(E_i) \cdot \min_{E_i} f$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(E_i) \cdot \max_{E_i} f$$

E siano:

$$s = \{s(P) : P \text{ è partizione di } E\}$$

$$S = \{S(P) : P \text{ è partizione di } E\}$$

Si può dimostrare che i due insiemi sono separati per qualsiasi partizione  $P$  di  $E$ , cioè:

$$\forall P \, s(P) \leq S(P)$$

Nell'ipotesi che  $f$  sia continua in  $E$ , tali insiemi sono anche congiunti, cioè:

$$\forall P \, \exists! c : s(P) \leq c \leq S(P)$$

Si dice **integrale triplo di  $f(x, y, z)$  esteso a  $E \subseteq \mathbb{R}^3$**  tale **elemento di separazione  $c$**  e si indica con:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

Anche per questa tipologia di integrale è possibile applicare le **formule di riduzione**; infatti, presa una funzione continua  $f$  in  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ :  $E$  è un dominio normale rispetto al piano  $xy$ :

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz$$

Se  $D$  è un **dominio normale rispetto a  $\vec{x}$**  (ad esempio) si ha:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz = \int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Proprio come gli integrali primi e doppi, anche con gli integrali tripli è possibile effettuare il **cambiamento di variabile**; infatti, presi due **domini regolari  $T, E \subseteq \mathbb{R}^3$**  e considerate le **funzioni**:

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

Supponendo che esse siano **di classe  $C^1(T)$**  e che la seguente **trasformazione** sia **invertibile** con un **determinante Jacobiano non nullo**:

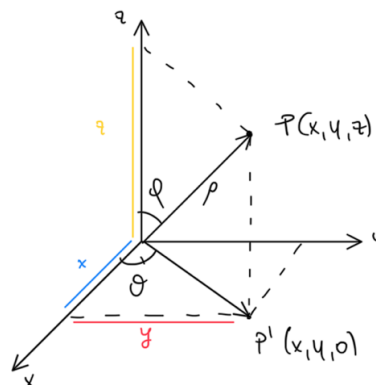
$$\Phi: (u, v, w) \in T \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in E = \Phi(T)$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Allora:

$$\iiint_{E=\Phi(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Per quanto riguarda le **coordinate sferiche (o polari)**, preso un punto  $P(x, y, z)$ :



$$x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

Dove  $\rho$  risulta essere la **distanza del punto dal centro O**:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

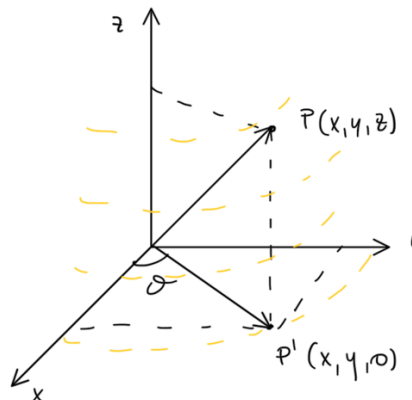
Mentre  $\vartheta$  è l'angolo tra  $OP'$  e  $\vec{x}$  (dove  $P'$  è la proiezione di  $P$  lungo il piano  $xy$ ) e  $\varphi$  l'angolo tra  $OP$  e  $\vec{z}$ . Il **determinante Jacobiano** risulta essere:

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

Di conseguenza:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\vartheta$$

Un'alternativa all'espressione in coordinate sferiche (o polari) è quella in **coordinate cilindriche**:



$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \vartheta$$

$$z = z$$

Dove il **Jacobiano**:

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \vartheta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Quindi:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \rho d\rho d\vartheta dz$$



In precedenza sono stati associati agli **integrali primi e doppi** la **lunghezza di un segmento** e l'**area di una superficie**:

$$m([a, b] \subseteq \mathbb{R}) = \int_a^b dx$$

$$m(D \subseteq \mathbb{R}^2) = \iint_D dx dy$$

Allo stesso modo all'**integrale triplo** può essere associato il **volume di un solido**:

$$Vol(E \subseteq \mathbb{R}^3) = m(E \subseteq \mathbb{R}^3) = \iiint_E dx dy dz$$

Nello spazio si possono individuare le tre **equazioni cartesiane notevoli**:

- **Cilindro** con asse di simmetria ortogonale al piano  $xy$ , passante per il punto  $P(x_c, y_c, 0)$  e di raggio  $r$  sulla circonferenza di base con centro  $C(x_c, y_c)$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

- **Cono** con asse di simmetria ortogonale al piano  $xy$  e di vertice  $V(x_v, y_v, z_v)$

$$\frac{(x - x_v)^2}{a^2} + \frac{(y - y_v)^2}{b^2} - \frac{(z - z_v)^2}{c^2} = 0$$

- **Sfera** di centro  $C(x_s, y_s, z_s)$  e raggio  $r$

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = r^2$$

Sviluppando i quadrati si può ottenere la **forma canonica**:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

Dove centro e raggio sono:

$$C\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta}$$

Si può notare che, per quanto riguarda la **sfera**, si parla di **equazione di secondo grado nelle incognite  $x, y, z$**  in cui **non figurano i prodotti misti  $xy, yz, zx$**  e dove i coefficienti dei termini quadratici  $x^2, y^2, z^2$  sono 1.

## FORME DIFFERENZIALI LINEARI

Si dice **forma differenziale** (o **campo vettoriale** nel piano/spazio) una **funzione** del tipo:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \vee F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F: (x, y) \rightarrow (F_1(x, y), F_2(x, y)) \vee F: (x, y, z) \rightarrow (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

**Dal punto di vista fisico** queste funzioni sono detti **campi vettoriali ad una forza  $\bar{F}$**  che agisce su un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , la quale avrà **tre componenti**:

$$\bar{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Una **forma differenziale nel piano** del tipo  $\omega: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si denota in genere con:

$$\begin{aligned} \omega: (x, y) \in A \rightarrow \omega(x, y) &= a(x, y)dx + b(x, y)dy = (a(x, y), b(x, y)) = a(x, y)\underline{i} + b(x, y)\underline{j} \\ &= X(x, y)dx + Y(x, y)dy \end{aligned}$$

Dove  **$a(x, y)$**  e  **$b(x, y)$**  sono detti **coefficienti della forma  $\omega$** , la quale è detta **continua** (o di classe  $C^0$ ) se lo sono i suoi coefficienti.

Sia presa in considerazione una **forma differenziale continua** definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $\gamma \subseteq A$  una **curva regolare a tratti con un proprio verso di percorrenza** dove:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

È una sua **rappresentazione parametrica tale che induca sulla curva lo stesso verso di percorrenza** prefissato, si dice **integrale curvilineo di  $\omega$  lungo  $\gamma$**  (o **integrale curvilineo di seconda specie**) l'integrale:

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Può facilmente accadere che **tale integrale non dipenda dalla particolare rappresentazione parametrica, purché il verso di percorrenza sia lo stesso**; in caso contrario, l'integrale cambia il segno. **Dal punto di vista fisico**, questo integrale curvilineo viene detto **circuitazione di  $\omega$  lungo  $\gamma$** .

Sia  **$f(x, y)$  una funzione** definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , supponendo che essa sia **differenziabile in  $A$** , il suo **differenziale** è:

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Che è una **particolare forma di differenziale lineare**. Una **forma differenziale** definita in  $A$  si dice **esatta** (o che **il campo vettoriale è conservativo**) se:

$$\exists f \in C^1(A) : df = \omega \Leftrightarrow f_x(x, y) = a(x, y) \equiv X(x, y) \wedge f_y(x, y) = b(x, y) \equiv Y(x, y)$$

Dove:

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

La funzione  **$f$  si dice primitiva di  $\omega$**  (o **potenziale del campo vettoriale conservativo**). Da queste conclusioni derivano delle particolari proprietà:

1.  $f$  è primitiva di  $\omega \Rightarrow f + c$  è primitiva di  $\omega, \forall c \in \mathbb{R}$ ;

2. Se  $A$  è aperto connesso, due primitive di  $\omega$  differiscono solo per una costante, infatti:

$$df = \omega = dg \Rightarrow df - dg = d(f - g) = 0 \Rightarrow f - g = c$$

## **DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL CALCOLO DELL'INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE**

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2: A$  è un aperto

$\forall \omega \subseteq A: \omega$  è una forma differenziale esatta e continua in  $A$

$\forall P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1) \in A$

$\forall \gamma \subseteq A: \gamma$  è una curva regolare a tratti continua in  $A$  che congiunge  $P_0$  e  $P_1$  e orientata nel verso  $\overrightarrow{P_0 P_1}$

$\forall f: f$  è una qualunque primitiva di  $\omega$

*Tesi:*

$$\int_{\gamma} \omega = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

*Dimostrazione:*

Poiché  $f$  è una primitiva di  $\omega$ :

$$df = \omega$$

Sia la seguente una rappresentazione parametrica di  $\gamma$ :

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = \int_{\gamma} f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \int_a^b [f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte applicato a  $f(x(t), y(t))$ :

$$\int_a^b \frac{d[f(x(t), y(t))]}{dt} dt = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

Ricapitolando:

$$\int_{\gamma} \omega = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

CVD

Si può notare come se  $\gamma$  è una curva regolare chiusa (cioè gli estremi  $P_0$  e  $P_1$  coincidono):

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Il teorema rappresenta una **condizione necessaria**, infatti se l'integrale lungo una curva chiusa è zero non si può dire automaticamente che la forma sia esatta; tuttavia, se l'integrale non è nullo allora la forma sicuramente non è esatta.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME DIFFERENZIALI ESATTE

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A$  è un aperto connesso

$\forall \omega : \omega$  è una forma differenziale continua in  $A$

$\forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \subseteq A$ : siano curve regolari a tratti

*Tesi:*

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1.  $\omega$  è una forma differenziale esatta in  $A$ ;
2.  $\forall \gamma \subseteq A : \gamma$  è chiusa,  $\int_{\gamma} \omega = 0$ ;
3.  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza  $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ .

*Dimostrazione:*

Il teorema si dimostra verificando la seguente catena di proposizioni:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$$

Siano considerate le seguenti implicazioni:

$$- 1 \Rightarrow 2$$

La proposizione è dimostrata dal momento in cui ha la stessa forma del teorema del calcolo dell'integrale curvilineo di seconda specie.

$$- 2 \Rightarrow 3$$

È possibile dividere la curva chiusa  $\gamma$  in due curve separate  $\gamma_1$  e  $-\gamma_2$ , le quali avranno gli stessi estremi di separazione ma verso opposto. L'integrale curvilineo prende, così, la forma:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = 0$$

Invertendo il verso di una delle due curve, cioè facendogli assumere lo stesso verso:

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

Da cui si può concludere:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

- 3  $\Rightarrow$  1

Questa dimostrazione si riduce alla verifica che una primitiva di  $\omega$  è:

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \omega$$

Dove  $\gamma$  è una curva di estremi  $P_0(x_0, y_0)$  e  $P(x, y)$  variabile la cui esistenza è garantita dal fatto che  $A$  sia connesso (se fosse l'unione di due insiemi separati non sarebbe necessariamente garantita l'esistenza di una curva appartenente ad  $A$ ).

Sia considerata  $\omega$  come:

$$\omega = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Se è esatta in un connesso  $A$ , allora:

$$\exists f \in C^1(A) : f_x(x, y) = X(x, y) \wedge f_y(x, y) = Y(x, y)$$

Integrando rispetto a  $x$ , per  $f_x(x, y) = X(x, y)$ :

$$f(x, y) = \int X(x, y)dx + c$$

Dove  $c$  è una costante, ma rispetto a  $x$ ; il che significa che è una funzione di  $y$ , la quale viene assunta come una costante quando si integra e deriva per  $x$ . Di conseguenza:

$$f(x, y) = \int X(x, y)dx + c(y)$$

Imponendo  $f_y(x, y) = Y(x, y)$  si può ottenere  $c(y)$  e dimostrare il teorema.

CVD

Questo teorema, rispetto al precedente, rappresenta una **condizione necessaria e sufficiente**; infatti, tutte le affermazioni appena dimostrate possono essere **invertite**.

Se  $\gamma$  ha rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Se  $T$  è il versore tangente in un generico punto di  $\gamma$ , allora:

$$T(t) = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

Considerando  $\omega(x, y) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ , interpretato come un **campo vettoriale di forze nel piano**, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F = \int_a^b \left[ F_1(x(t), y(t)) \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right. \\ \left. + F_2(x(t), y(t)) \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right] dt \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \int \langle F(x, y), T(x, y) \rangle ds \end{aligned}$$

Sapendo che  $dt\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = ds$ . In **fisica** questa espressione rappresenta il **lavoro compiuto dal campo vettoriale di forze  $F$  per spostare un corpo lungo  $\gamma$** .

Una forma differenziale  $\omega = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  di classe  $C^1(A)$ , dove  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è un aperto, si dice **forma differenziale chiusa in A** se:

$$X_y = Y_x$$

## **DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ESATTEZZA E CHIUSURA DI UNA FORMA DIFFERENZIALE**

*Ipotesi:*

$$\forall \omega = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2: A \text{ è un aperto}$$

$$\omega \in C^1(A)$$

*Tesi:*

$$\omega \text{ è una forma differenziale esatta} \Rightarrow \omega \text{ è una forma differenziale chiusa}$$

*Dimostrazione:*

Se  $\omega$  è una forma differenziale esatta, allora:

$$\exists f \in C^1(A) : f_x(x, y) = X(x, y) \wedge f_y(x, y) = Y(x, y)$$

Derivando la prima uguaglianza rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$ , che saranno uguali per il teorema di Schwarz:

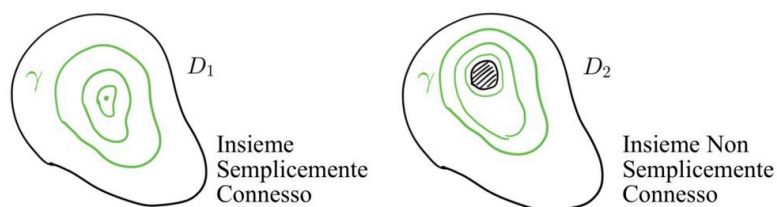
$$X_y = f_{xy} = f_{yx} = Y_x$$

CVD

Rappresentando una **condizione necessaria**, per dimostrare che una forma  $\omega$  **non è esatta si può dimostrare che non è chiusa**. Il **teorema inverso vale solo se la forma differenziale è definita in un rettangolo  $R \subseteq \mathbb{R}^2$** .

Si dice che un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è **semplicemente connesso** se:

1.  $A$  è un aperto connesso;
2. Ogni curva  $\gamma$  regolare a tratti, semplice, chiusa e contenuta in  $A$  è la frontiera di un dominio limitato  $D$  interamente contenuto in  $A$ .



Ricordando che  $D$  è un dominio se è la chiusura di un insieme aperto.

### ENUNCIATO TEOREMA PER FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO CONNESSO (LEMMA DI POINCARÉ)

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ :  $A$  è un insieme aperto semplicemente connesso

$\forall \omega \in C^1(A)$  una forma differenziale definita in  $A$

*Tesi:*

$\omega$  è chiusa in  $A \Rightarrow \omega$  è esatta in  $A$

### ENUNCIATO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DI INTEGRALI PER FORME DIFFERENZIALI

*Ipotesi:*

$\forall \omega = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ :  $A$  è un aperto

$\omega \in C^1(A)$

$\forall P_0(x_0, y_0) \in A$

Tesi:

$\omega$  è esatta  $\Rightarrow f: (x, y) \in A \rightarrow \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega$  è una primitiva di  $\omega$

$\forall g: g$  è una primitiva di  $\omega$ ,  $\int_{P_0(x_0, y_0)}^{P(x, y)} \omega = g(x, y) - g(x_0, y_0)$

Quindi, per il calcolo della primitiva di  $\omega$  basta calcolare la primitiva  $f$  data da:

$$f(x, y) - f(0, 0) = \int_{(0, 0)}^{(x, y)} \omega$$

**Lungo un qualunque segmento congiungente  $(0, 0)$  e  $(x, y)$ , perché essendo  $\omega$  esatta l'integrale non dipende dalla particolare curva che congiunge i due punti.** Prendendo il segmento di equazioni parametriche  $\gamma(tx, ty), \forall t \in [0, 1]$  allora:

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 [X(tx, ty)x + Y(tx, ty)y] dt$$

## FORME DIFFERENZIALI LINEARI NELLO SPAZIO

Una forma differenziale nello spazio è del tipo:

$$\omega(x, y, z) = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

Sia  $\gamma \subseteq A$  una curva regolare a tratti, con  $A$  un aperto, dove è fissato un verso di percorrenza; la rappresentazione parametrica di tale curva sarà:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \forall t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Supponendo che il verso indotto su  $\gamma$  da  $\varphi$  sia lo stesso di quello prefissato, allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

**In caso contrario si invertirebbe il verso dell'integrale.** Come nel caso bidimensionale, nello spazio si può dare la definizione di differenziale esatto di una forma differenziale  $\omega$  definita in un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ :

$$\exists f \in C^1(A) : f_x(x, y, z) = X(x, y, z) \wedge f_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \wedge f_z(x, y, z) = Z(x, y, z)$$

Dove  $f$  è detta primitiva di  $\omega$  in  $A$ . Ovviamente, gli stessi risultati ottenuti per le forme differenziali nel piano valgono anche nello spazio, in particolare il seguente teorema.



## ENUNCIATO TEOREMA SULLE FORME DIFFERENZIALI ESATTE

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^3$ :  $A$  è un aperto connesso

$\forall \omega(x, y, z) = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ :  $\omega$  è una forma differenziale lineare continua in  $A$

$\forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \subseteq A$ :  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  sono curve regolari a tratti

*Tesi:*

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1.  $\omega$  è esatta in  $A$ ;
2.  $\int_{\gamma} \omega = 0, \forall \gamma \subseteq A$  chiusa;
3.  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega, \forall \gamma_1, \gamma_2 \subseteq A$  aventi gli stessi estremi e stesso verso di percorrenza.

Se, inoltre,  $\omega$  è esatta, fissato un punto  $P_0 \in A$  una primitiva di  $\omega$  è data dalla funzione:

$$f(x, y, z) = \int_{\Gamma} \omega, \forall P(x, y, z) \in A$$

Dove  $\Gamma$  è una qualunque curva regolare a tratti di estremi  $P_0$  e  $P$ , orientata nel verso  $\overrightarrow{P_0 P}$ . Questo risultato consente di **calcolare semplicemente una primitiva di  $\omega$** , analogamente al caso bidimensionale.

Sia considerata una **forma differenziale**  $\omega(x, y, z) = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \in C^1(A)$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  **connesso**, si dice che  **$\omega$  è chiusa in  $A$**  se:

$$X_y = Y_x$$

$$Y_z = Z_y$$

$$X_z = Z_x$$

Preso in considerazione un **campo vettoriale**  $\omega = (X, Y, Z)$ , ovvero  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , si dice **rotore del campo**:

$$\begin{aligned} \text{rot } \omega = \nabla \times \omega &= (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \\ &= \underline{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \underline{i}(Z_y - Y_z) + \underline{j}(X_z - Z_x) + \underline{k}(Y_x - X_y) \end{aligned}$$

Per definizione, quindi, **una forma differenziale lineare  $\omega$  è chiusa quando il rotore del suo campo è nullo**:

$$\nabla \times \omega = \underline{0}$$

Che rappresenta la **condizione di irrotazionalità di un campo vettoriale**.

## ENUNCIATO TEOREMA PER FORME DIFFERENZIALI IN UN RETTANGOLO

*Ipotesi:*

$\forall R \subseteq \mathbb{R}^3$ :  $R$  è un rettangolo

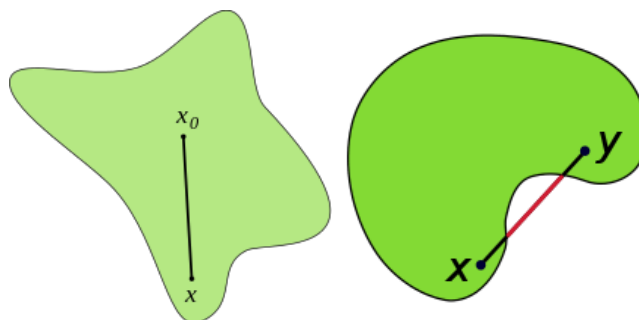
$\forall \omega = Xdx + Ydy + Zdz$  :  $\omega \in C^1(R)$

*Tesi:*

$\omega$  è chiusa in  $R \Rightarrow \omega$  è esatta

Un **insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è stellato** se  $\exists P_0 \in A$ :  $\forall P \in A, \overline{P_0 P} \subseteq A$ . Ciò significa che se **l'insieme in esame è convesso** (cioè ogni coppia di punti di  $A$  è congiungibile con un segmento tutto contenuto in  $A$ ) allora **può essere detto stellato**; viceversa, se un insieme è concavo non può essere stellato. Si può quindi affermare la veridicità di questa proposizione:

$A$  è stellato  $\Leftrightarrow A$  è convesso rispetto a un punto  $P_0$



## ENUNCIATO LEMMA DI DERIVATA SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

*Ipotesi:*

$\forall g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  :  $g \in C^1$

$G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  :  $G(x) = \int_c^d g(x, t)dt$ ,  $\forall x \in [a, b]$

*Tesi:*

$G$  è derivabile e si ha:

$$G'(x) = \int_c^d \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} dt, \forall x \in [a, b]$$

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CHIUSURA IN UN INSIEME APERTO STELLATO

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^3$ :  $A$  è un insieme aperto stellato

$\forall \omega$ :  $\omega$  è chiusa in  $A$

*Tesi:*

$\omega$  è esatta

*Dimostrazione:*

Supponendo che  $O(0,0,0) \in A$ , stellato rispetto a tale punto, e sia  $P(x, y, z) \in A$  un punto per cui  $\overline{OP} \subseteq A$ , le equazioni parametriche di questo segmento sono:

$$\gamma = \begin{cases} x = tx \\ y = ty, \forall t \in [0,1] \\ z = tz \end{cases}$$

Ponendo:

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 [X(tx, ty, tz)x + Y(tx, ty, tz)y + Z(tx, ty, tz)z] dt$$

Dimostrare il teorema si riduce a dimostrare che la funzione  $f$  è una primitiva di  $\omega$ . Sfruttando il lemma precedentemente enunciato, si calcola la derivata parziale di  $f$  lungo  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial [X(tx, ty, tz)x]}{\partial x} + Y_x(tx, ty, tz)ty + Z_x(tx, ty, tz)tz \right] dt \\ &= \int_0^1 [X_x(tx, ty, tz)tx + X(tx, ty, tz) + X_y(tx, ty, tz)ty + X_z(tx, ty, tz)tz] dt \end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato discende dall'ipotesi di chiusura, per la quale  $X_y = Y_x$  e  $X_z = Z_x$ .

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [X_x(tx, ty, tz)tx + X(tx, ty, tz) + X_y(tx, ty, tz)ty + X_z(tx, ty, tz)tz] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d[t \cdot X(tx, ty, tz)]}{dt} dt \end{aligned}$$

Infatti:

$$\frac{d[t \cdot X(tx, ty, tz)]}{dt} = X(tx, ty, tz) + t \left[ \frac{dX(tx, ty, tz)}{dt} \right]$$

Di conseguenza:

$$\int_0^1 \frac{d[t \cdot X(tx, ty, tz)]}{dt} dt = \int_0^1 d[t \cdot X(tx, ty, tz)] = [t \cdot X(tx, ty, tz)]_0^1 = X(x, y, z)$$

Ripercorrendo la catena di uguaglianza:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = f_x(x, y, z) = X(x, y, z)$$

È possibile fare un discorso analogo per le altre due componenti e dimostrare che:

$$f_x(x, y, z) = X(x, y, z)$$

$$f_y(x, y, z) = Y(x, y, z)$$

$$f_z(x, y, z) = Z(x, y, z)$$

Che equivale a dire che  $f$  è una primitiva di  $\omega$ , ovvero che  $\omega$  è esatta.

CVD

Sia  $A$  un aperto non connesso, allora esiste una famiglia finita o numerabile  $(A_i)_{i \in I}$  di aperti connessi tale che:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Dove  $A_i$  è detta componente connessa di  $A$ . Supponendo l'esistenza di una forma differenziale  $\omega$  definita in  $A$  non connesso, se la sua restrizione ad ogni  $A_i$  è esatta la forma ammette primitiva in ogni  $A_i$ ; tale primitiva non è altro che la stessa funzione  $f$  con differenti costanti  $c_1, c_2 \dots$ . La primitiva di  $\omega$  sarà:

$$F(x, y) = \begin{cases} f + c_1 & \text{in } A_1 \\ f + c_2 & \text{in } A_2 \\ \dots & \\ f + c_i & \text{in } A_i \end{cases}$$

## SUPERFICI REGOLARI

Sia  $D$  un dominio connesso di  $\mathbb{R}^2$ , si dice superficie regolare un'applicazione di classe  $C^1(D)$  del tipo:

$$\varphi: (u, v) \in D \rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

Che rispetti le seguenti proprietà:

1.  $\varphi|_D$  è **invertibile**, cioè ad ogni coppia di punti distinti interni a  $D$  corrisponde una sola coppia di punti distinti di  $\varphi(D)$ ;
2.  $\forall (u, v) \in \dot{D}$ , la **matrice Jacobiana ha rango 2**.

$$D\varphi(u, v) = \frac{\partial(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_3(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

La superficie  $\varphi$  associa ad ogni coppia di valori dei parametri  $u$  e  $v$  un punto della superficie stessa nello spazio, dove il sostegno dell'applicazione  $S = \varphi(D)$  viene detto **superficie di equazioni parametriche**:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Tuttavia, una superficie è identificata dall'applicazione  $\varphi$  e non dal suo sostegno. Considerati i **determinanti dei minori d'ordine 2** della matrice Jacobiana:

$$A(u, v) = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = A$$

$$B(u, v) = \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| = B$$

$$C(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = C$$

Dove:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

La seconda condizione enunciata, riguardante il rango della matrice Jacobiana, equivale a richiedere che:

$$\forall (u, v) \in \dot{D}, (A(u, v), B(u, v), C(u, v)) \neq \underline{0} \Leftrightarrow A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v) > 0, \forall (u, v) \in \dot{D}$$

Inoltre, la matrice Jacobiana ha rango due se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$$

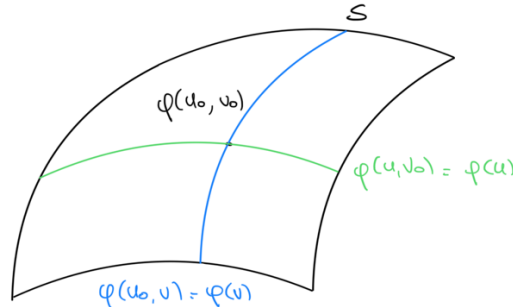
$$\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$$

**Fissando uno dei due parametri  $u_0$  o  $v_0$**  nella rappresentazione parametrica di una superficie  $\varphi(u, v)$  si ottiene la **rappresentazione parametrica di una curva passante per il punto  $(u_0, v_0) \in S$** , infatti:

$$u = u_0 \Rightarrow \varphi(u_0, v) = \bar{\varphi}(v)$$

$$v = v_0 \Rightarrow \varphi(u, v_0) = \tilde{\varphi}(u)$$

Che sono curve giacenti in  $S$  che dipendono dal solo parametro  $u/v$ , dette **linee coordinate**.



I **vettori tangenti** alle curve coordinate su  $S$  sono:

$$\frac{d\varphi(u, v_0)}{du} \Big|_{u=u_0} = \varphi_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$$

$$\frac{d\varphi(u_0, v)}{dv} \Big|_{v=v_0} = \varphi_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

Tali vettori identificano un **piano tangente a  $S$  in  $\varphi(u_0, v_0)$** , il quale sarà ben definito nel momento in cui i due vettori sono entrambi non nulli e non paralleli. Ciò viene assicurato dalla condizione:

$$\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$$

E quindi dall'ipotesi del Jacobiano di rango 2. Si dimostra che **tale piano contiene tutte le tangenti in  $\varphi(u_0, v_0)$  a una generica curva regolare passante per tale punto e giacente su  $S$** .

Il vettore risultante da un prodotto vettoriale è sempre ortogonale al piano in cui giacciono i vettori da cui deriva, quindi **il prodotto  $\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)$  è ortogonale al piano tangente a  $S$  in  $\varphi(u_0, v_0)$**  ed è detto **vettore normale**, il relativo versore è:

$$\nu(u_0, v_0) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{\|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)\|} = \left( \frac{A_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}}, \frac{B_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}}, \frac{C_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}} \right)$$

Ovviamente esso **dipenderà dall'ordine con cui si considerano i parametri  $u$  e  $v$** , e quindi dall'ordine in cui viene svolto il prodotto vettoriale.

Sia  **$P(x, y, z)$  un punto generico del piano tangente e  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  il punto in cui si calcola il piano tangente a  $S$** , il vettore  $\overrightarrow{P_0P}$  dovrà essere ortogonale al versore  $\nu(u_0, v_0)$ , cioè:

$$(P - P_0) \cdot (\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)) = 0$$

Di conseguenza, **l'equazione del piano tangente è:**

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0$$

Sia  $\varphi$  una superficie regolare definita in un dominio regolare  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  di equazioni parametriche:

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \forall (u, v) \in D$$

Si definisce **area della superficie**  $\varphi$  come quel **valore numerico** risultato da:

$$Area(\varphi) = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv$$

Dove  $A(u, v), B(u, v), C(u, v)$  sono i **minori della matrice Jacobiana di**  $\varphi$ . Questo integrale può essere scritto alternativamente, in forma compatta, considerando il prodotto vettoriale dei due vettori:

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$$

Infatti:

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (A(u, v), B(u, v), C(u, v))$$

$$Area(\varphi) = \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv$$

Parlando di **curve**  $\varphi = \varphi(t)$ , è stata individuata la **lunghezza dell'arco infinitesima**  $ds = \|\varphi'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  e allo stesso modo, per le **superfici**, è possibile definire l'**elemento di area infinitesima**:

$$d\delta = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv = \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv$$

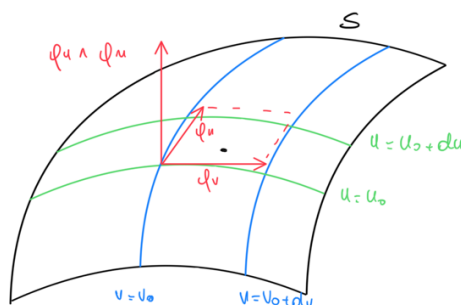
Che denota l'**area del “parallelogramma curvilineo”** che giace sulla superficie e compreso tra le quattro linee coordinate su  $S$  le cui equazioni sono ottenute fissando in  $\varphi = \varphi(u, v)$  i parametri:

$$u = u_0$$

$$v = v_0$$

$$u = u_0 + du$$

$$v = v_0 + dv$$



Tale  $d\delta$  è **approssimato dal modulo del vettore**  $\varphi_u \wedge \varphi_v$ , che rappresenta l'area del parallelogramma individuata dai vettori  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  a meno di infinitesimi di ordine superiore a  $du$  e a  $dv$ .

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare e semplice, di equazioni parametriche:

$$\gamma = \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}, \forall u \in [a, b]$$

Se  $D = [a, b] \times [c, d]$ , considerata la superficie:

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = v \end{cases}, \forall (u, v) \in D$$

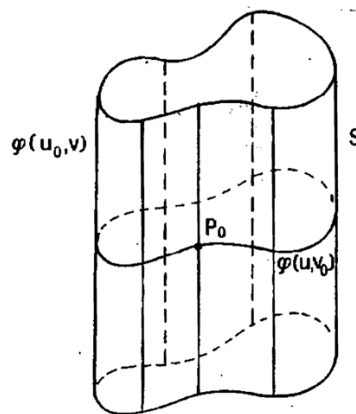
E fissato un  $v = v_0$ , la seguente curva prende il nome di **curva generatrice della superficie**:

$$u \rightarrow \varphi(u, v_0)$$

Mentre la **curva direttrice** della superficie si ottiene fissando  $u = u_0$ :

$$v \rightarrow \varphi(u_0, v) = \varphi(x(u_0), y(u_0), v)$$

Dove  $x(u_0), y(u_0) = P_0$  sono fissi; questo tipo di superficie prende il nome di **superficie cilindrica**.



Sia  $\gamma$  una curva piana e  $r$  una retta complanare ad essa, si dice **superficie di rotazione generata da  $\gamma$  attorno a  $r$**  il luogo geometrico delle traiettorie descritte dai punti di  $\gamma$  durante una rotazione attorno a  $r$  di un angolo  $\alpha$ . Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento cartesiano in  $\mathbb{R}^3$  in modo che  $Oxy$  contenga la curva  $\gamma$ , mentre l'asse di rotazione  $r$  coincide con l'asse  $z$ ; supponendo  $\gamma$  sia semplice e regolare, di equazioni parametriche:

$$\gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

La **superficie di rotazione**  $\varphi$  ha equazioni parametriche:

$$\varphi(t, \vartheta) = \begin{cases} x = x(t) \cos \vartheta \\ y = x(t) \sin \vartheta \\ z = z(t) \end{cases}, \forall (t, \vartheta) \in D = [a, b] \times [0, \alpha]$$



$\varphi$  è una superficie regolare, infatti:

$$\varphi_t = (x_t, y_t, z_t) = (x'(t) \cos \vartheta, x'(t) \sin \vartheta, z'(t))$$

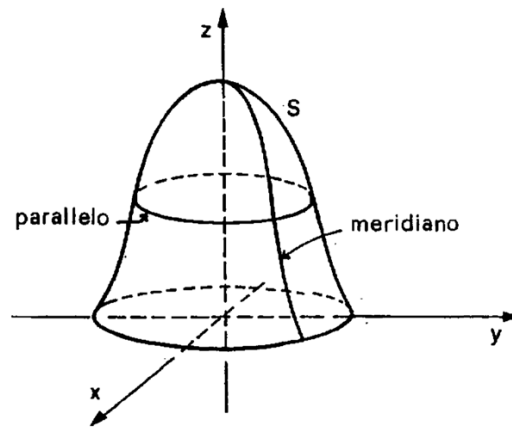
$$\varphi_\vartheta = (x_\vartheta, y_\vartheta, z_\vartheta) = (-x(t) \sin \vartheta, x(t) \cos \vartheta, 0)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t \wedge \varphi_\vartheta &= \left( \begin{vmatrix} x'(t) \sin \vartheta & z'(t) \\ x(t) \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \cos \vartheta \\ 0 & -x(t) \sin \vartheta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'(t) \cos \vartheta & x'(t) \sin \vartheta \\ -x(t) \sin \vartheta & x(t) \cos \vartheta \end{vmatrix} \right) \\ &= (-x(t)z'(t) \cos \vartheta, -x(t)z'(t) \sin \vartheta, x'(t)x(t)) \end{aligned}$$

Inoltre, poiché  $\gamma$  è regolare:

$$A^2 + B^2 + C^2 = (x(t))^2 \left[ (x'(t))^2 + (z'(t))^2 \right] > 0$$

Fissato un  $\vartheta_0$ , la curva  $t \rightarrow \varphi(t, \vartheta_0)$  viene definita **meridiano**, mentre fissato un  $t_0$ , la curva  $t \rightarrow \varphi(t_0, \vartheta)$  viene definita **parallelo**.



## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI GULDINO PER SUPERFICI DI ROTAZIONE

*Ipotesi:*

$\forall \gamma : \gamma$  è una curva regolare

$\forall 0 < \alpha \leq 2\pi : \alpha$  è l'angolo di rotazione di  $\gamma$

*Tesi:*

L'area della superficie di rotazione di  $\gamma$  è data dalla lunghezza della curva che ruota per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritta dal baricentro della curva.

*Dimostrazione:*

$\gamma$  ha equazioni parametriche:

$$\gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]: x(t) > 0$$

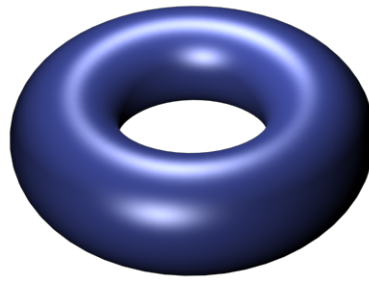
Se  $\varphi$  è la superficie di rotazione di  $\gamma$  di un angolo  $\alpha \in (0, 2\pi]$  attorno all'asse  $z$ , allora:

$$\begin{aligned}
 Area(\varphi) &= \iint_{[a,b] \times [0,\alpha]} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt d\vartheta = \int_0^\alpha d\vartheta \int_a^b \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt \\
 &= \int_0^\alpha d\vartheta \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \alpha \int_\gamma x(t) ds \\
 &= \alpha \text{lung}(\gamma) \cdot \frac{1}{\text{lung}(\gamma)} \int_\gamma x(t) ds = \text{lung}(\gamma) x_B \alpha
 \end{aligned}$$

Dove  $x_B$  è l'ascissa del baricentro di  $\gamma$

CVD

Il **toroide** è la **superficie di rotazione** ottenuta ruotando completamente una **circonferenza  $\gamma$**  attorno ad un **asse esterno** ad essa:



Presa una **circonferenza di raggio  $r$**  che **dista  $R$**  da un **ipotetico asse** di rotazione, con  $r < R$ , la **lunghezza di  $\gamma$**  è  **$2\pi r$** , mentre il suo **baricentro** è il suo **centro**, il quale **durante la rotazione** **descrive una circonferenza di raggio  $R$**  la cui **lunghezza** è  **$2\pi R$** . Per il teorema di Guldino l'area del toroide è:

$$A(\varphi) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

## INTEGRALI SUPERFICIALI

Sia  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una **superficie regolare** e  $S = \varphi(D)$  il suo **sostegno**, presa una **funzione  $f: S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$**  **continua in  $S$** . Per una curva  $\gamma$  di equazioni parametriche:

$$\gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

L'integrale di  $f$  esteso alla curva  $\gamma$  è stato definito

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Mentre si dice **integrale di  $f$  esteso alla superficie  $S$**  la quantità:

$$\begin{aligned}\int_S f d\delta &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv\end{aligned}$$

Dove:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Nelle stesse condizioni sia  $\mathbf{v}(u, v)$  il **versore normale nel punto  $\varphi(u, v)$** , che sarà dato da:

$$\mathbf{v}(u, v) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|} = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$$

Sia  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un **campo vettoriale continuo definito in  $S = \varphi(D)$** , si dice **flusso di  $F$  attraverso  $S$  nella direzione di  $\mathbf{v}(u, v)$**  l'integrale:

$$\int_S \langle F, \mathbf{v} \rangle d\delta$$

Se  $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ :

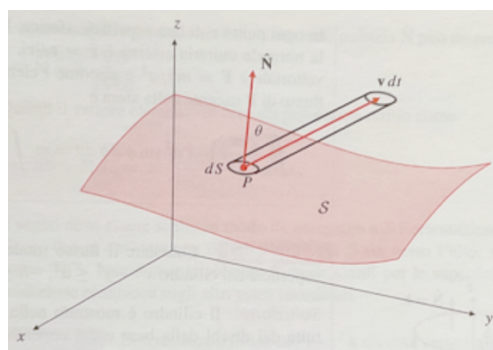
$$\int_S \langle F, \mathbf{v} \rangle d\delta = \iint_D [F_1(\varphi(u, v))A(u, v) + F_2(\varphi(u, v))B(u, v) + F_3(\varphi(u, v))C(u, v)] du dv$$

Se  $S$  è la **frontiera di un dominio  $T$  dello spazio**, si parla di **flusso entrante o uscente da  $S$**  a seconda che la normale  $\mathbf{v}$  punti verso l'esterno o l'interno di  $T$ .

Dal punto di vista **fisico**, il flusso può assumere diversi significati, il più semplice dei quali coinvolge la **meccanica dei fluidi**. Sia considerato il **flusso di un fluido incompressibile in un canale**, dove  $\underline{v}$  è il **campo di velocità** con cui il fluido si muove; il problema del flusso si riduce a **trovare il volume del fluido che attraversa, nell'unità di tempo, una data superficie ideale** (nel senso che non ostacola il moto), ovvero rilevare la **“portata” del fluido**.

Sia  $dS$  un **elemento infinitesimo della superficie  $S$**  e  $\underline{n}(P)$  il **versore normale ad un punto  $P$** , dopo un periodo  $dt$  il fluido occuperà la **posizione  $\underline{v} \cdot dt$**  e la **quantità di fluido  $dV$  che attraversa  $dS$  nell'incremento di tempo  $dt$**  occupa il cilindro di base  $dS$  e altezza uguale alla componente del vettore  $\underline{v} \cdot dt$  lungo il versore normale:

$$|\underline{v}(P)| dt \cdot |\underline{n}(P)| \cos \vartheta$$



Il volume di tale cilindro sarà:

$$dS \cdot |\underline{v}(P)| dt \cdot |\underline{n}(P)| \cos \vartheta = \langle \underline{v}(P), \underline{n}(P) \rangle dS dt$$

Di conseguenza, il volume infinitesimo di fluido che attraversa la superficie infinitesima nell'unità di tempo è:

$$\frac{dV}{dt} = \langle \underline{v}(P), \underline{n}(P) \rangle dS$$

Per ottenere il volume totale non si deve far altro che sommare tutti i contributi infinitesimi, ovvero portare l'equazione sotto integrazione:

$$\iint_S \langle \underline{v}(P), \underline{n}(P) \rangle dS$$

Questa è solo una delle possibili applicazioni fisiche del concetto di flusso, tuttavia esso assume significati diversi in base al contesto:

- **Meccanica dei fluidi**, se  $\underline{v}$  è la velocità del fluido, il flusso  $\Phi$  attraverso la superficie  $S$  è la portata;
- **Elettrodinamica**, se  $\underline{j}$  è il vettore densità di corrente, il flusso  $\Phi$  attraverso la superficie  $S$  è la corrente elettrica;
- **Termodinamica**, se  $\underline{j}$  è il vettore densità flusso di calore, il flusso  $\Phi$  attraverso la superficie  $S$  è la quantità di calore che attraversa  $S$  nell'unità di tempo;

Ma ovviamente le applicazioni sono molto più numerose.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA DIVERGENZA NEL PIANO

*Ipotesi:*

$\forall D \subseteq \mathbb{R}^2$ :  $D$  è un dominio regolare

$\forall F = (F_1, F_2): D \rightarrow \mathbb{R}^2 : F \in C^1(D)$

*Tesi:*

$$\iint_D \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\partial D} \langle F, N \rangle ds$$

*Dimostrazione:*

Sapendo che  $N$  è il versore normale a  $\partial D$  rivolto al suo esterno,  $s$  l'ascissa curvilinea e  $\nabla \cdot F$  la divergenza di  $F$ :

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Il teorema si dimostra facilmente con le formule di Gauss-Green:

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} F_1 dy$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial D} F_2 dx$$

Sommando membro a membro:

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy + \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy = \int_{+\partial D} F_1 dy - \int_{+\partial D} F_2 dx$$

$$\iint_D \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right] dx dy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy$$

$$\iint_D \nabla \cdot F dx dy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy$$

Supponendo che  $\partial D$  sia una curva regolare a tratti di equazioni parametriche:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Supponendo anche che il verso indotto dalla rappresentazione sia lo stesso di quello fissato, allora il versore normale risulta essere:

$$N(t) = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, -\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \langle F, N \rangle ds &= \int_a^b \left[ F_1(x(t), y(t)) \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right. \\ &\quad \left. - F_2(x(t), y(t)) \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t)) y'(t) - F_2(x(t), y(t)) x'(t)] dt = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx \end{aligned}$$

Raggruppando i risultati finora ottenuti è possibile affermare:

$$\iint_D \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial D} \langle F, N \rangle ds$$

Se  $D$  è un dominio la cui frontiera  $\partial D$  è unione di un numero finito di curve regolari a tratti si procede come nelle dimostrazioni delle formule di Gauss-Green.

CVD

## DIMOSTRAZIONE FORMULA DI STOKES

*Ipotesi:*

$\forall D \subseteq \mathbb{R}^2: D$  è un dominio regolare

$\forall F = (F_1, F_2): D \rightarrow \mathbb{R}^2 : F \in C^1(D)$

*Tesi:*

$$\int_{+\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

*Dimostrazione:*

Considerando  $F = (X, Y)$  la formula di Stokes diventa:

$$\int_{+\partial D} X dx + Y dy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy$$

Considerando il campo vettoriale  $(F_2, -F_1)$  e applicando il teorema della divergenza nel piano:

$$\iint_D \nabla \cdot (F_2, -F_1) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\partial D} -(-F_1) dx + F_2 dy = \int_{+\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

CVD

La **formula di Stokes** può essere usata **per dimostrare la sufficienza della condizione di chiusura per ottenere l'esattezza di una forma** in un aperto semplicemente connesso.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA PER FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO CONNESSO (LEMMA DI POINCARÉ)

*Ipotesi:*

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 : A$  è un aperto semplicemente connesso

$\forall \omega = X dx + Y dy \in C^1(A)$

*Tesi:*

$\omega$  è chiusa in  $A \Rightarrow \omega$  è esatta in  $A$

*Dimostrazione:*

Per provare l'esattezza di  $\omega$  si può dimostrare che l'integrale di  $\omega$  esteso a una qualunque curva chiusa regolare a tratti  $\gamma \subseteq A$  è nullo; per semplicità si suppone che la curva sia semplice.

Poiché  $A$  è semplicemente connesso,  $\gamma$  risulta essere la frontiera di un dominio regolare  $D \subseteq A$ ; supponendo che  $\gamma$  sia orientata in senso antiorario, per la formula di Stokes applicata a  $\omega$ :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{+\partial D} Xdx + Ydy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy = 0$$

Questo risultato deriva dal fatto che la forma differenziale è chiusa, quindi  $Y_x = X_y$ .

CVD

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio regolare in cui sono definite due funzioni  $f, g \in C^1(D)$ , allora si definiscono le **formule di integrazione per parti degli integrali doppi**:

$$\iint_D f(x, y) \cdot g_x(x, y) dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) \cdot g(x, y) dy - \iint_D f_x(x, y) \cdot g(x, y) dx dy$$

$$\iint_D f(x, y) \cdot g_y(x, y) dx dy = \int_{-\partial D} f(x, y) \cdot g(x, y) dx - \iint_D f_y(x, y) \cdot g(x, y) dx dy$$

La prima di queste due formule è **dimostrata con la prima formula di Gauss-Green**:

$$\iint_D \frac{\partial [f(x, y) \cdot g(x, y)]}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) \cdot g(x, y) dy$$

$$\iint_D [f(x, y) \cdot g_x(x, y) + f_x(x, y) \cdot g(x, y)] dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) \cdot g(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) \cdot g_x(x, y) dx dy = \int_{+\partial D} f(x, y) \cdot g(x, y) dy - \iint_D f_x(x, y) \cdot g(x, y) dx dy$$

Analogamente si può fare per il caso opposto, applicando la seconda formula di Gauss-Green.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL CALCOLO DI AREE

*Ipotesi:*

$\forall D \subseteq \mathbb{R}^2 : D$  è un dominio regolare

*Tesi:*

1.  $area(D) = m(D) = \int_{+\partial D} x dy = - \int_{+\partial D} y dx$
2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha + \beta \neq 0, m(D) = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{+\partial D} \alpha x \cdot dy - \beta y \cdot dx$

*Dimostrazione:*

Sapendo che, per definizione, l'area di un dominio regolare è:

$$area(D) = m(D) = \iint_D dx dy$$

Applicando la prima formula di Gauss-Green alla una funzione  $f(x, y) = x$ :

$$\iint_D \frac{\partial(x)}{\partial x} dx dy = \iint_D dx dy$$

$$\iint_D \frac{\partial(x)}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} x dy$$

Unendo i due risultati:

$$\iint_D dx dy = m(D) = \int_{+\partial D} x dy$$

Si può fare un discorso analogo per la  $y$  e dimostrare la tesi 1. Per quanto riguarda la tesi 2, essa risulta essere una combinazione lineare della prima, infatti:

$$\alpha m(D) = \alpha \int_{+\partial D} x dy$$

$$\beta m(D) = -\beta \int_{+\partial D} y dx$$

$$\alpha m(D) + \beta m(D) = \int_{+\partial D} \alpha x \cdot dy - \beta y \cdot dx$$

$$(\alpha + \beta)m(D) = \int_{+\partial D} \alpha x \cdot dy - \beta y \cdot dx$$

$$m(D) = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{+\partial D} \alpha x \cdot dy - \beta y \cdot dx$$

CVD

## ENUNCIATO TEOREMA DELLA DIVERGENZA NELLO SPAZIO

*Ipotesi:*

$\forall T \subseteq \mathbb{R}^3 : T$  è un dominio regolare

$\forall F: T \rightarrow \mathbb{R}^3 : F \in C^1(T)$  è un campo vettoriale

*Tesi:*

$$\iiint_T \nabla \cdot F dx dy dz = \iint_{\partial T} \langle F, \nu \rangle d\delta$$



Dove  $\nu$  è il versore normale alla frontiera  $\partial T$  orientata verso l'esterno del dominio normale, mentre:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}$$

Con  $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Questo teorema afferma che l'integrale della divergenza del campo vettoriale  $F$  è pari al flusso di  $F$  uscente da  $T$ .

## SUPERFICI REGOLARI CON BORDO

Sia  $D$  un dominio connesso, regolare del piano; si dice **superficie regolare con bordo** un'applicazione:

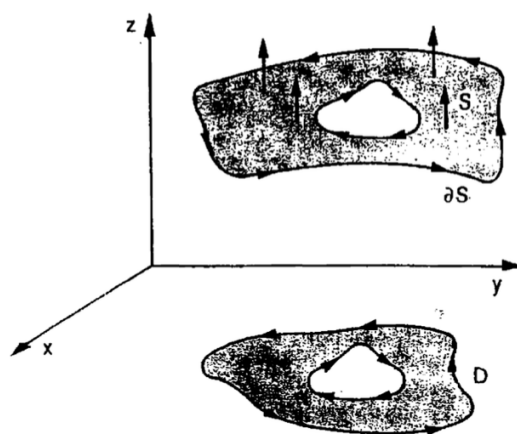
$$\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Che sia la **restrizione a  $D$  di un'applicazione di classe  $C^1$  in un aperto  $A \supset D$**  che verifica le seguenti **condizioni**:

1.  $\varphi$  è **iniettiva in  $D$** ;
2. La **matrice Jacobiana di  $\varphi$**  ha **rango 2**  $\forall (u, v) \in \dot{D}$

L'immagine della frontiera  $\partial D$  è una **curva regolare a tratti contenuta nel sostegno  $S$**  della superficie  $\varphi$ ; tale curva è detta **bordo della superficie** e viene denotata con  $\partial S$ :

$$\varphi(\partial D) = \partial S$$



Una volta fissata una rappresentazione parametrica:

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \forall (u, v) \in D$$

Si considera l'**orientamento positivo di  $\partial D$**  in modo analogo a quanto fatto per le **formule di Gauss-Green**.

La curva che ha  $\partial D$  come sostegno ha equazioni parametriche:

$$\gamma(t) = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Se il verso indotto su  $\gamma$  coincide con l'orientamento positivo fissato della frontiera  $+\partial D$  allora la seguente curva rappresenta una curva regolare orientata di  $\mathbb{R}^3$ , al crescere di  $t$  tra  $a$  e  $b$ :

$$\varphi(\gamma(t)) = \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}, \forall t \in [a, b]$$

Essa prende il nome di **bordo orientato di  $S$**  e viene indicato con  $\partial^+ S$  e risulta essere l'**orientamento positivo del bordo in corrispondenza della rappresentazione parametrica di  $\varphi$** .

Ad ogni rappresentazione parametrica di  $S$  è associato il campo dei versori normali, dove il versore in un punto  $P(u, v)$  di  $S$  è dato da:

$$\nu(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

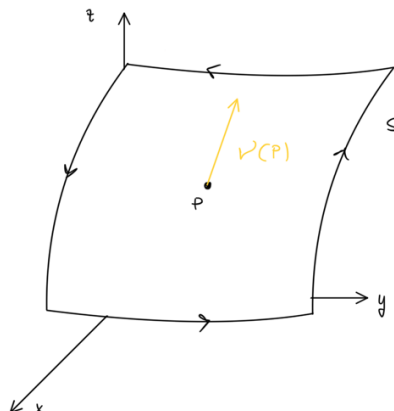
Con **direzione normale alla superficie  $S$** ; tale versore è detto **versore normale positivo**, mentre la **faccia di  $S$  rivolta nel verso di  $\nu(u, v)$  è detta faccia positiva**, denotata con  $^+S$ .

Tale campo determina e individua l'orientamento di una superficie, a sua volta indotto dalla rappresentazione parametrica  $\varphi$ . Si può osservare che l'orientamento di  $\nu(u, v)$  è coerente con l'orientamento di  $\partial S$ , cioè cambiando la rappresentazione parametrica  $\varphi$  i due o rimangono gli stessi o cambiano nello stesso momento: se la superficie  $S$  è regolare, il campo dei versori normali varia in "modo continuo" quando il punto  $P(u, v)$  varia su  $S$ , se invece è una superficie chiusa (sfera o toro) il versore normale punta sempre verso l'interno o sempre verso l'esterno in base a quale dei due parametri si associano ad  $u$  e  $v$ .

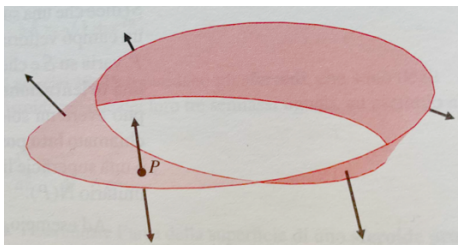
Se  $S$  è il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  il versore normale è rivolto sempre verso l'alto o sempre verso il basso, nel caso in cui:

$$\nu = \frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}}$$

$\nu$  è diretto verso l'alto e la faccia superiore è quella positiva:



Esistono **superfici che non sono orientabili (non regolari)**, ovvero che **non hanno due facce**, come il **nastro di Moebius**: una fascia avvolta su se stessa a congiungere i due estremi dove ad uno dei quali è stato fatto fare un mezzo giro. Infatti, **facendo partire un vettore normale da un punto del nastro e facendogli fare il giro della superficie, esso giungerà al punto di partenza con il proprio verso invertito**:



Presa in considerazione una **superficie regolare con bordo**  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  e un **campo vettoriale**  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1(A)$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è un aperto che contiene il sostegno della superficie  $S$ , allora la **formula di Stokes nello spazio** diventa:

$$\int_S \langle \nabla \times F, \nu \rangle d\delta = \int_{\partial^+ S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Dove  $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$  è il **campo vettoriale**,  $\nu$  è il **campo di versori normali** a  $S$  e  $\partial^+ S$  il **bordo orientato positivamente in corrispondenza dell'orientamento di  $S$** .

Nella formula, il secondo membro integrale assume la forma della **circuitazione del campo  $F$  intorno al bordo di  $S$** , che viene equiparato al **flusso del rotore attraverso la superficie**.

