GEOMETRIA E ALGEBRA

Prof. Giovanna Ilardi – A.A. 2022/23

INDICE DEGLI ARGOMENTI

ALGEBRA LINEARE

GEOMETRIA ANALITICA

ALGEBRA LINEARE

INSIEMISTICA

L'**insiemistica** è quella disciplina matematica che si basa sul concetto di insieme. **Un insieme è definito dagli elementi che lo costituiscono**, essi vengono indicati con le lettere minuscole (a differenza degli insiemi che sono elencati con le maiuscole) e possono essere rappresentati in due modi:

- Per **elencazione**, elencando uno ad uno gli elementi costitutivi dell'insieme;

$$S = \{a; b; c; d\}$$

- Per **proprietà caratteristica**, cioè indicando la proprietà che accomuna tutti gli elementi dell'insieme.

$$S = \{x: P(x)\}$$

Dove $\boldsymbol{P(x)}$ **è la proprietà di cui gode** $\boldsymbol{x}$. Quando un elemento è in un insieme si può dire che esso **appartiene ad un insieme**, al contrario **non appartiene**:

$$s \in S \vee s \notin S$$

Quando **gli elementi di un insieme sono dei numeri**, esso si definisce **insieme numerico**. Tra gli insiemi numerici più usati si trovano:

- Insieme dei **numeri naturali**, cioè numeri interi positivi;

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

- Insieme dei **numeri naturali compreso lo zero**;

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- Insieme dei **numeri relativi**, cioè numeri interi;

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2: -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- Insieme dei **numeri razionali**, cioè numeri come rapporto di numeri interi;

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m}: n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

- Insieme dei **numeri reali**;

$$\mathbb{R} = \{x: x \text{ è reale}\}$$

- Insieme dei **numeri complessi**.

$$\mathbb{C} = \{x + iy: x, y \ \in \mathbb{R}\}$$

Tra due insiemi è possibile instaurare una **relazione di inclusione**; presi due insiemi A e B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

In genere, si dice che **due insiemi sono uguali** se sono **reciprocamente inclusi**:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Ogni insieme **A non vuoto ha certamente almeno tre sottoinsiemi**:

1. $\emptyset$;
2. A;
3. $\{x\}$, un **singleton**, un insieme costituito da un solo elemento.

I primi due sono detti **sottoinsiemi impropri** di A, mentre tutti gli altri sono **sottoinsiemi propri**. Quando **esiste almeno un elemento di A che non appartiene ad un suo sottoinsieme** si parla di **inclusione stretta**:

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists x \in A: x \notin B$$

Si dice **insieme delle parti di A** l'insieme che contiene tutti i possibili sottoinsiemi di A:

$$A = \{a; b; c\} \Longrightarrow P(A) = \big\{\emptyset; A; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{b; c\}; \{a; c\}\big\}$$

Esistono altre relazioni che possono essere instaurate tra due insiemi, A e B:

- **Inclusione**, $A \cup B := \{x: x \in A \vee x \in B\}$;
- **Intersezione**, $A \cap B := \{x: x \in A \wedge x \in B\}$;

Quando l'intersezione tra due insiemi è il vuoto, $A \cap B = \emptyset$, si dicono disgiunti.

- **Differenza**, $A \backslash B = A - B := \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$;

Se $B \subseteq A$, allora la differenza A/B si dice complemento di B rispetto ad A.

Queste tre operazioni godono delle seguenti proprietà:

- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- $A - \emptyset = A$;
- $A - A = \emptyset$;
- $A \cap A = A$, anche iterato;
- $A \cup A = A$, anche iterato.

Inoltre, esse godono delle proprietà:

Commutativa dell'intersezione: $A \cap B = B \cap A$;
Commutativa dell'unione: $A \cup B = B \cup A$;
Associativa dell'intersezione: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
Associativa dell'unione: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
1° legge di assorbimento: $A \cap (A \cup B) = A$;
2° legge di assorbimento: $A \cup (A \cap B) = A$;
1° relazione di De Morgan: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
2° relazione di De Morgan: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
Distributiva dell'unione rispetto all'intersezione: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
Distributiva dell'intersezione rispetto all'unione: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

DIMOSTRAZIONE LEGGI DI ASSORBIMENTO

Ipotesi:

$\forall A, B$

Tesi:

$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

Dimostrazione:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \land x \in A \cup B$$

Un elemento appartiene ad un insieme se appartiene ad un insieme e all'unione dell'insieme con un altro insieme.

Analogamente si dimostra la seconda legge di assorbimento

CVD

DIMOSTRAZIONE LEGGI DI DE MORGAN

Ipotesi:

$\forall A, B, C$

Tesi:

$A - (B \cup C) = (A - C) \cap (A - B)$

$A - (B \cap C) = (A - C) \cup (A - B)$

Dimostrazione:

Va dimostrata la doppia inclusione dei relativi insiemi. Si consideri l'inclusione verso destra:

$$x \in A \land x \notin B \cup C \Longrightarrow x \in A - B \land x \in A - C$$

Significa che x è un elemento della differenza tra A e B e tra A e C. Considerando l'inclusione verso sinistra:

$$x \in A - B \land x \in A - C \Longrightarrow x \in A \land x \notin B \cup C$$

Ciò significa che x è un elemento di A che non è presente né in B né in C, quindi appartiene ad A e non appartiene all'unione di B e C

CVD

Si dice **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B:

$$A \times B := \{(a; b): a \in A \wedge b \in B\}$$

Cioè l'**insieme di coppie ordinate** dove la prima componente appartiene ad A e la seconda a B. Il prodotto cartesiano non è un operazione commutativa, infatti:

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

Il prodotto cartesiano **può essere fatto anche su più insiemi**. Estendendo tale operazione a n si ottiene un prodotto cartesiano che è l'**insieme delle n-uple** in cui la coordinata a_i appartiene all'insieme A_i:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \ldots, a_n \in A_n\}$$

RELAZIONI

Una **relazione** tra due insiemi è un **sottoinsieme del loro prodotto cartesiano**:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Quando una coppia si trova in relazione è possibile scrivere:

$$\forall (a; b) \in A \times B: (a: b) \in \mathcal{R} \Longrightarrow a\mathcal{R}b$$

Se una relazione è un **sottoinsieme di un prodotto cartesiano di un insieme per se stesso**, essa è una **relazione binaria**:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Questo tipo di relazione può essere:

- **Riflessiva**;

$$\forall x \in A, x\mathcal{R}x$$

- **Antiriflessiva**;

$$\forall x \in A\ x \neg \mathcal{R}x$$

- **Simmetrica**

$$\forall x, y \in A\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

- **Antisimmetrica**;

$$\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$$

- **Transitiva**;

$$\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

Una relazione si dice **relazione d'ordine usuale** se essa gode delle proprietà **riflessiva**, **antisimmetrica** e **transitiva**. Ad esempio:

$$\mathcal{R} \subseteq Z \times Z: (x; y) \in \mathcal{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}_0$$

Una relazione è **d'ordine stretto usuale** se gode solo delle proprietà **antisimmetrica** e **transitiva**, ad esempio:

$$\mathcal{R} \subseteq Z \times Z: (x; y) \in \mathcal{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}_0$$

Siano presi due insiemi A e B tali che, altri due insiemi C e D siano:

$$C \subseteq A \wedge D \subseteq B$$

E sia:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Si dice **relazione indotta da R sugli insiemi C e D** l'insieme **ottenuto dall'intersezione** $\boldsymbol{\mathcal{R} \cap C \times D}$.

Una relazione si dice **relazione di equivalenza** se essa è **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**; un modo alternativo di dire una relazione di equivalenza è con il simbolo ≡. Si dice **classe di equivalenza di x su R** (dove R è una relazione di equivalenza) l'insieme di y in relazione con x:

$$[x]_R = \bar{x}_R := \{y \in S : x \equiv y\}$$

Si definisce l'**insieme di classi di equivalenza** di un insieme S:

$$S \backslash R := \{[x]_R : x \in S\}$$

Sia presa un'applicazione che va da un x appartenente ad S alla sua classe di equivalenza contenuta nell'insieme di classi di equivalenza di S, essa sarà sicuramente suriettiva, in quanto ogni elemento di $S \backslash R$ ha una x tale che la relazione di equivalenza di x vi appartenga. Questo tipo di suriettività è detta **suriettività canonica**.

Sia definito F l'**insieme di parti di S**, i cui elementi saranno **partizioni di S**. Essi godono delle seguenti proprietà:

- Ogni elemento di F è una parte **non vuota** di S ($\forall A \in F, A \neq \emptyset \wedge A \subseteq S$);
- Due elementi qualsiasi di F si **intersecano nel vuoto** ($\forall A, B \in F,\ A, B \subseteq S \wedge\ A \cap B = \emptyset$);
- **L'unione** di tutti gli elementi di F **è S** ($\sum A_i = S, A_i \in F$).

ENUNCIATO TEOREMA PARTIZIONAMENTO DELLA CLASSE DI EQUIVALENZA

Ipotesi:

$\forall R \subseteq S \times S: S \neq \emptyset$

Tesi:

R è una relazione di equivalenza $\Leftrightarrow$ $S \backslash R$ è un insieme di parti di S

APPLICAZIONI

Una **funzione**, o **applicazione**, *f* di un insieme A su B **è una legge** che associa ad **ogni elemento di A uno e un solo elemento di B**:

$$f: A \to B$$

$$f: x \to y$$

Simbolicamente una funzione è chiamata come segue:

$$y = f(x)$$

Dove $y \in B$ è l'**immagine** di $x \in A$, mentre l'insieme A è detto **dominio** della funzione e B **codominio**. La definizione di funzione si può quindi formalizzare:

$$\forall x \in A \; \exists! \; y \in B : y = f(x)$$

Una funzione può essere di diversi tipi:

- **Iniettiva**;

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Suriettiva**;

$$\forall y \in B \; \exists x \in A: y = f(x)$$

- **Biiettiva**, ovvero se essa è sia iniettiva che suriettiva.

$$\forall y \in B \; \exists! \, x \in A: y = f(x)$$

Siano presi due insiemi S e T, un sottoinsieme di S (A) e un'applicazione da S a T, $\forall S, T \; \forall A \subseteq S, f: S \to T$, la **restrizione della funzione *f* su A** è la funzione:

$$f_A: A \to T : f_A(x) = f(x)$$

Mentre f è detta **prolungamento di f_A su S**:

$$f: S \to T : f(x) = f_A(x)$$

Siano considerati due insiemi e un applicazione per essi; sia poi preso un sottoinsieme del dominio, $\forall S, T, f: S \to T \; \forall A \subseteq S \; \wedge B \subseteq T$, viene definito **immagine di A per mezzo di *f*** il sottoinsieme del codominio:

$$f(A) := \{y = f(x) \in T : \; x \in A \} \subseteq T$$

E **immagine inversa di B per mezzo di *f*** il sottoinsieme del dominio:

$$f^{-1}(B) := \{x \in S : y = f(x) \in B\} \subseteq S$$

Allargando queste definizioni all'intero dominio, si parla di **immagine** e **controimmagine** di *f*. Se $|\mathcal{Im}(f)| = 1$ la funzione è costante.

Di seguito sono proposte delle condizioni soddisfatte dalla controimmagine per cui un'applicazione è iniettiva/suriettiva/biiettiva, $\forall y \in T$:

- f è **iniettiva** $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} \{y \in T\}, \text{un singleton} \\ \emptyset \end{cases}$;
- f è **suriettiva** $\Leftrightarrow f^{-1}(y) \neq \emptyset$;
- f è **biiettiva** $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \{y \in T\}$, un singleton.

Siano presi tre insiemi e due applicazioni del tipo:

$$\forall S, T, V, f: S \to T, g: T \to V$$

Si definisce **applicazione composta** da g e da f:

$$h: S \to V$$

Dove $h(x) = g(f(x))$. La **composizione** di due funzioni si denota come $g \circ f$, essa **gode di proprietà associativa** ma **non di proprietà commutativa**. Definendo la funzione identità:

$$I_A: A \to A : I_A(x) = x$$

È possibile notare che, $\forall f: A \to B$:

$$f \circ I_A = f = I_B \circ f$$

DIMOSTRAZIONE FUNZIONE BIETTIVA

Ipotesi:

$\forall A, B, f: A \to B$

Tesi:

f è biettiva $\Leftrightarrow \exists!\, g: B \to A : g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$

Dimostrazione:

La dimostrazione del teorema passa per la dimostrazione dell'esistenza e la dimostrazione dell'unicità della funzione inversa g.

Si considerino le due implicazioni:

- f è biiettiva $\Longrightarrow \exists!\, g: B \to A : g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$

Poiché la funzione è biiettiva:

$$\forall y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y$$

Sia considerata l'applicazione:

$$g: B \to A$$

$$g(y) = x$$

E la si componga ad f:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x = I_A$$

Analogamente si può dimostrare la composizione opposta.

- $\exists!\, g: B \to A : g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B \implies f$ è biiettiva

Avendo a disposizione l'applicazione g, è possibile dire che f è suriettiva:

$$B \ni y = I_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y) \in A)$$

Ciò significa che per ogni elemento di B esiste un elemento dell'insieme A tale che esso è immagine attraverso l'applicazione f. L'applicazione f è anche iniettiva, infatti presi $f(x_1) = f(x_2)$:

$$x_1 = I_A(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f)(x_2) = I_A(x_2) = x_2$$

Resta da dimostrare l'unicità di tale funzione. Ragionando per assurdo, si supponga che esistano due funzioni diverse che rispettano il teorema:

$$g_2 = I_A \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ I_B = g_1$$

Si raggiunge l'assurdo, che desume dall'aver supposto l'esistenza di due applicazioni diverse che rispettino il teorema.

CVD

In relazione a tale teorema, è possibile dire **applicazione invertibile** $f: A \to B : f$ è biiettiva e **applicazione inversa** $g: B \to A$, denotata anche con f^{-1}. Il teorema è invertibile, infatti si può notare che anche f^{-1} è biiettiva, quindi esiste un'applicazione inversa dell'inversa:

$$(f^{-1})^{-1}: A \to B$$

$$f: A \to B$$

Sia considerata un'applicazione $f: A \to B$, si dice **grafico della funzione *f*** la **relazione** (sottoinsieme del prodotto cartesiano di A e B):

$$G(f) \coloneqq \{(x; y) \in A \times B : f(x) = y\}$$

DIMOSTRAZIONE GRAFICO DI UNA FUNZIONE COME RELAZIONE

Ipotesi:

$\forall f: A \to B\ \forall G(f), \mathcal{R} \subseteq A \times B$

Tesi:

$\mathcal{R} = G(f) \Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists!\, y \in B : x\mathcal{R}y$

Dimostrazione:

Si considerino le due implicazioni:

- $\mathcal{R} = G(f) \Longrightarrow \forall x \in A\ \exists!\, y \in B : x\mathcal{R}y$

Poiché l'applicazione *f* associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B, consegue che $f(x) = y$ e:

$$(x; y) \in G(f) \Longrightarrow (x; y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x\mathcal{R}y$$

- $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B : x\mathcal{R}y \Longrightarrow \mathcal{R} = G(f)$

Si costruisca l'applicazione in modo che ad ogni elemento di A corrisponda un solo elemento di B tale che:

$$x\mathcal{R}y$$

Da ciò si evince che $x\mathcal{R}y$ corrisponde a dire $f(x) = y$ e quindi:

$$\mathcal{R} = G(f)$$

CVD

Il teorema appena dimostrato permette di dare una **definizione di applicazione** leggermente **diversa**, che prende in considerazione anche il concetto di relazione. Siano A e B due insiemi, l'**applicazione** $f: A \to B$ è una **terna ordinata** $(A, B, \mathcal{R})$ dove $\mathcal{R} = G(f)$ e per cui $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = f(x)$.

GRUPPI

Preso un insieme S non vuoto e sia considerata un'**operazione interna** ⊥ come **applicazione**:

$$\perp: S \times S \to S$$

Dove ad ogni coppia ordinata $(x; y) \in S \times S$ si associa un elemento di S risultato dall'operazione $x \perp y$ (detta *x composto y*). Un esempio di questo tipo di operazione è l'**addizione**, operazione interna ai numeri naturali che si comporta come una funzione da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

L'operazione gode delle **proprietà**:

- **Associativa**, $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$;
- **Commutativa**, $x \perp y = y \perp x$.

Si definisce *u* l'**elemento neutro** di S rispetto all'operazione ⊥:

$$u \in S: \forall x \in S\ x \perp u = x = u \perp x$$

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ ELEMENTO NEUTRO

Ipotesi:

$\forall S, \perp: S \times S \to S$

$\exists u \in S: \forall x \in S \; u \perp x = x$

Tesi:

$\exists! \, u \in S$

Dimostrazione:

Ragionando per assurdo, si supponga l'esistenza di due elementi neutri diversi:

$$u_1 = u_1 \perp u_2 = u_2$$

Si raggiunge l'assurdo, che desume dal fatto che si è supposta l'esistenza di due elementi neutri diversi

CVD

Si definisce inoltre **simmetrico** di un elemento di S rispetto all'operazione ⊥:

$$x' \in S: x \perp x' = u = x' \perp x$$

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ DELL'ELEMENTO SIMMETRICO

Ipotesi:

$\forall S, \perp: S \times S \to S$

$\exists x' \in S: x \perp x' = u = x' \perp x$

$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$

Tesi:

$\exists! \, x' \in S$

Dimostrazione:

Ragionando per assurdo, si supponga l'esistenza di due elementi simmetrici diversi:

$$x_1 = x_1 \perp u = x_1 \perp (x \perp x_2) = (x_1 \perp x) \perp x_2 = u \perp x_2 = x_2$$

Si raggiunge l'assurdo, che desume dall'aver supposto l'esistenza di due elementi simmetrici diversi.

CVD

Si definisce **struttura algebrica** la **coppia** composta da un **insieme non vuoto** S e un'**operazione interna** $\perp$ definita nell'insieme S:

$$(S, \perp)$$

Tale struttura algebrica $(S, \perp)$ è detta **gruppo** se essa gode delle seguenti proprietà:

- $\perp$ è un'operazione **associativa** (significa che l'elemento simmetrico è unico);
- **Esiste l'elemento neutro** rispetto all'operazione $\perp$;
- Ogni elemento di S è dotato di (un solo) **simmetrico** rispetto all'operazione $\perp$;

Se l'operazione $\perp$ è anche **commutativa**, il gruppo si dice **gruppo abeliano**.

Si dice che è stata adottata la **notazione additiva** quando l'operazione interna è l'addizione e il **simbolo** $+$; in tal caso l'elemento neutro è 0 e il simmetrico di x è $-x$. Mentre si dice che è stata adottata la **notazione moltiplicativa** quando l'operazione interna è la **moltiplicazione** e il **simbolo** $\cdot$; in tal caso l'elemento neutro è 1 e il simmetrico di x è x^{-1}.

Si prenda in considerazione l'**insieme** e l'**operazione interna**:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots + a_n + b_n)$$

La struttura algebrica $(\mathbb{R}^n, +)$ **è un gruppo abeliano** in cui l'elemento neutro è $(0; 0; \dots; 0)$, l'opposto di un elemento $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ è $(-a_1; -a_2; \dots; -a_n)$, vale la proprietà associativa e la proprietà commutativa:

$$\begin{aligned}(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) &= (b_1; b_2; \dots; b_n) + (a_1; a_2; \dots; a_n) \\ &= (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots + a_n + b_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n)] + (c_1; c_2; \dots; c_n) \\ &\quad = (a_1; a_2; \dots; a_n) + [(b_1; b_2; \dots; b_n) + (c_1; c_2; \dots; c_n)] \\ &\quad = (a_1 + b_1 + c_1; a_2 + b_2 + c_2; \dots + a_n + b_n + c_n)\end{aligned}$$

Analogamente, è possibile considerare l'**insieme di matrici di m righe e n colonne** e l'**operazione interna**:

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & a_{i,j} & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{R} \wedge i \in [1; m]\ j \in [1; n]\}$$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ed è possibile dimostrare la struttura algebrica $(\boldsymbol{M_{m,n}}(\mathbb{R}), +)$ **è un gruppo abeliano**.

CAMPI E SPAZI VETTORIALI

Sia preso in considerazione un **insieme** munito di **due operazioni**, $+$ e $\cdot$ (che verranno detti somma e prodotto), si dice **campo** $(K, +, \cdot)$ quella **struttura algebrica** per cui:

1. $(K, +)$ è un gruppo abeliano;
2. Esiste, nell'insieme $K - \{0\}$ un elemento neutro (1) rispetto al prodotto;
3. Il prodotto è associativo e commutativo;
4. Ogni elemento diverso da zero ha inverso;
5. Per ogni terna numerica $a, b, c \in K$ vale $a(b + c) = ab + ac$.

Questa definizione può essere **semplificata** nel seguente modo. La terna $(K, +, \cdot)$ si dice campo se:

1. $(K, +)$ è un gruppo abeliano;
2. $(K - \{0\}, \ \cdot)$ è un gruppo abeliano;
3. Per ogni terna numerica $a, b, c \in K$ vale $a(b + c) = ab + ac$.

Questa alternativa è dovuta al fatto che se **due numeri sono diversi da zero** allora **il loro prodotto sarà** anch'esso **diverso da zero**.

Per semplicità si indica un campo specificando solo l'insieme da cui è costituito, in realtà però si fa riferimento sempre alla terna costituita da insieme e due operazioni.

DIMOSTRAZIONE ZERO COME ELEMENTO DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

Ipotesi:

$\forall K, +, \ \cdot : \ (K, +, \cdot)$ è un campo

Tesi:

$\forall a \in K, a0 = 0$

Dimostrazione:

Sia presa in considerazione la proprietà associativa del prodotto (proprietà 3 del campo) in relazione allo 0 come elemento di annullamento della somma:

$$ab = a(b + 0) = ab + a0 \Leftrightarrow a0 = 0$$

CVD

DIMOSTRAZIONE CONSEGUENZA ZERO COME ELEMENTO DI ANNULLAMENTO

Ipotesi:

$\forall K, +, \ \cdot : \ (K, +, \cdot)$ è un campo

Tesi:

$\forall a, b \in K, ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$

Dimostrazione:

Si prendano in considerazione le due implicazioni:

- $a = 0 \lor b = 0 \Longrightarrow ab = 0$

Ciò è vero per il teorema precedentemente dimostrato

- $ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \lor b = 0$

Se $a = 0$ il teorema è dimostrato grazie al precedente, quindi si supponga $a \neq 0$; in tal caso a ammette elemento inverso (proprietà 4 del campo):

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$

Ma la seconda quantità è uguale a zero per quanto dimostrato precedentemente, quindi:

$$(a^{-1}a)b = 0$$

$$b = 0$$

CVD

Siano considerati:

- $(K, +, \cdot)$ un campo i cui elementi sono detti scalari;
- Un insieme V i cui elementi sono detti vettori;
- L'operazione interna all'insieme V detta addizione:

$$+: V \times V \to V$$

$$+: (u, v) \to u + v$$

- L'operazione esterna all'insieme V detta moltiplicazione:

$$*: K \times V \to V$$

$$*: (\alpha, u) \to \alpha * u$$

Si definisce **spazio vettoriale** la **struttura algebrica** costituita dalla **quaterna** $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K}, +, *)$ che rispetti le seguenti proprietà:

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano;
2. $a * u + a * v = a * (u + v)\ \forall a \in K\ \forall u, v \in V$;
3. $a * u + b * u = u * (a + b)\ \forall a, b \in K\ \forall u \in V$;
4. $(ab) * u = a * (b * u)\ \forall a, b \in K\ \forall u \in V$;
5. $1 * u = u$ con 1 unità del campo K e $\forall u \in V$.

Si applicano le seguenti **convenzioni**:

- Lo spazio vettoriale sul campo K viene indicato con V;
- Per indicare il prodotto $a \cdot b$ si usa ab;
- Per indicare la moltiplicazione $u * v$ si usa uv.

Sia considerato l'insieme di n-uple e le due operazioni, + interna e $*$ esterna:

$$K^n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n): a_i \in K\}$$

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots + a_n + b_n)$$

$$\alpha * (a_1; a_2; \dots; a_n) = (\alpha a_1; \alpha a_2; \dots; \alpha a_n)$$

Con operazioni che arrivano nel campo K. La proprietà 1 è valida dal momento in cui è stato fatto vedere precedentemente come $(K^n;\ +)$ sia un gruppo abeliano; inoltre:

$$\alpha(a_1; a_2; \dots; a_n) + \alpha(b_1; b_2; \dots; b_n) = (\alpha a_1; \alpha a_2; \dots; \alpha a_n) + (\alpha b_1; \alpha b_2; \dots; \alpha b_n)$$
$$= (\alpha a_1 + \alpha b_1; \alpha a_2 + \alpha b_2; \dots + \alpha a_n + \alpha b_n)$$

$$\alpha[(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n)] = \alpha[(a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots + a_n + b_n)]$$
$$= (\alpha a_1 + \alpha b_1; \alpha a_2 + \alpha b_2; \dots + \alpha a_n + \alpha b_n)$$

Quindi vale la proprietà 2. Analogamente vale la proprietà 3 e la proprietà 4. Infine, è possibile dimostrare che:

$$1(a_1; a_2; \dots; a_n) = (1a_1; 1a_2; \dots; 1a_n) = (a_1; a_2; \dots; a_n)$$

Dal momento in cui 1 è l'unità del campo K, vale anche la proprietà 5. Da ciò si conclude che **$\boldsymbol{K^n}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo *K***.

Con un procedimento analogo è possibile dimostrare anche che, dato l'insieme e le due operazioni, + interna e $*$ esterna:

$$M_{m,n}(K) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in K\ \wedge i \in [i; m], j \in [1; n]\}$$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\beta * A = \beta * (a_{ij}) = (\beta a_{ij})$$

$\boldsymbol{M_{m,n}(K)}$ è detto spazio vettoriale delle matrici di dimensione *mn* sul campo K.

DIMOSTRAZIONE ZERO COME ELEMENTO DI ANNULLAMENTO VETTORIALE

Ipotesi:

$\forall \alpha \in K\ \forall v \in V: V$ è spazio uno vettoriale definito su un campo K

Tesi:

$0v = \underline{0}$

$\alpha \underline{0} = \underline{0}\ \forall \alpha \in K$

Dimostrazione:

Si prenda in considerazione la proprietà associativa della moltiplicazione (operazione esterna) e si consideri lo zero come elemento di annullamento della somma:

$$\forall \alpha \in K, \alpha v = v(\alpha + 0) = \alpha v + 0v \Leftrightarrow 0v = \underline{0}$$

Per la seconda tesi si sfrutta un ragionamento analogo:

$$\forall v \in V \; \alpha v = \alpha\left(v + \underline{0}\right) = \alpha v + \alpha \underline{0} \Leftrightarrow \alpha \underline{0} = \underline{0}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE CONSEGUENZA ZERO COME ELEMENTO DI ANNULLAMENTO

Ipotesi:

$\forall \alpha \in K \; \forall v \in V: V$ è spazio uno vettoriale definito su un campo K

Tesi:

$\alpha v = \underline{0} \Leftrightarrow a = 0 \vee v = \underline{0}$

Dimostrazione:

Si considerino le seguenti implicazioni:

- $\alpha v = \underline{0} \Rightarrow a = 0 \vee v = \underline{0}$

Si supponga $\alpha \neq 0$ (altrimenti il teorema è dimostrato per quanto detto in precedenza) e si moltiplichi αv per il suo inverso α^{-1} (che esiste in quanto proprietà del campo):

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\underline{0}$$

$$(\alpha^{-1}\alpha)v = \underline{0}$$

$$v = \underline{0}$$

- $a = 0 \vee v = \underline{0} \Rightarrow \alpha v = \underline{0}$

La dimostrazione è immediata grazie al teorema precedente

CVD

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DEGLI INVERSI

Ipotesi:

$\forall \alpha \in K \; \forall v \in V: V$ è spazio uno vettoriale definito su un campo K

Tesi:

$-(\alpha v) = (-\alpha)v = \alpha(-v)$

Dimostrazione:

Sapendo che $\alpha v - \alpha v = \underline{0}$:

$$\alpha v + (-\alpha)v = v(\alpha - \alpha) = \underline{0}$$

$$\alpha v + \alpha(-v) = \alpha(v - v) = \underline{0}$$

Ma ciò accade solo se:

$$-\alpha v = \alpha(-v) = (-\alpha)v$$

CVD

Si consideri **V** uno **spazio vettoriale definito su un campo K** e $\boldsymbol{H \subseteq V}$ **un sottoinsieme non vuoto di V**. Si definisce **sottospazio vettoriale H di V**, quello spazio vettoriale per cui:

1. $\forall u, v \in H, u + v \in H$;
2. $\forall a \in K\ \forall u \in H, au \in H$;

E verrà indicato con $\boldsymbol{H \leq V}$, potendo anche dire che **H è stabile** in V. Con questa definizione è possibile dire che ogni sottospazio vettoriale contiene il vettore nullo $\underline{0}$, dal momento in cui:

1. H deve essere non vuoto, quindi almeno $\underline{0} \in H$;
2. $\forall u \in H\ u\underline{0} = \underline{0} \in H$;
3. $\forall u \in H\ u + \underline{0} = u \in H$.

Si definiscono **sottospazi banali** quei sottospazi di V gli spazi costruiti sugli insiemi:

$$H = \{\underline{0}\} \text{ e } H = V$$

LINEARE DIPENDENZA E BASI

Sia V uno spazio vettoriale definito sul campo K e siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ n vettori di V e $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ n scalari di K, si dice **combinazione lineare dei vettori** $\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n}$ **rispetto agli scalari** $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ (detti coefficienti della combinazione lineare):

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Questa quantità **è a sua volta un vettore**, il quale viene detto **dipendente linearmente da** $\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n}$, in quanto su di essi costruito.

DIMOSTRAZIONE INSIEME DI COMBINAZIONI LINEARI COME SOTTOSPAZIO

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale definito sul campo K

$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$H = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n : a_i \in K \ \forall i \in [i; n]\} \subseteq V$

Tesi:

$H \leq V$

Dimostrazione:

Il teorema mostra come l'insieme di combinazioni lineari di n vettori di uno spazio vettoriale è un sottospazio dello stesso spazio vettoriale.

Per dimostrare tale teorema si prendano in considerazione due vettori dell'insieme H:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \in H$$

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n \in H$$

Si mostra come la somma sia un elemento dell'insieme stesso:

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n) \\ &= (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (a_n + b_n) v_n \in H \end{aligned}$$

Infatti, il vettore somma è sempre una combinazione lineare degli n vettori. Inoltre:

$$\forall c \in K \ cu = c(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = (ca_1 v_1 + ca_2 v_2 + \cdots + ca_n v_n) \in H$$

Dimostrare queste due proprietà equivale a dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di V.

CVD

La relazione tra H e V può anche essere definita in altro modo; infatti, il **sottospazio vettoriale H di V composto dalle combinazioni lineari** di n vettori di V è detto anche **sottospazio generato dai vettori $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$** e si indica:

$$H := \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

D'altro canto, il sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è detto **sistema di generatori per lo spazio vettoriale V** quando:

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Che equivale a dire che **per ogni vettore dello spazio V esistono dei coefficienti del campo K per i quali i vettori possono essere espressi come combinazione lineare**:

$$\forall v \in V\ \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K : v = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \in V$$

Lo spazio vettoriale V è detto **finitamente generato** nel momento un **numero finito di vettori** può **generare tutti gli altri** con una combinazione lineare.

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono detti **linearmente indipendenti** quando l'unico modo per comporre il vettore nullo tramite una combinazione lineare è usare tutti coefficienti nulli:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in K: a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \underline{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Nel momento in cui esistono scalari $a_1, a_2, \dots, a_n$ non nulli tali che $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \underline{0}$ allora i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono detti **linearmente dipendenti**.

DIMOSTRAZIONE LINEARE DIPENDENZA COME DIPENDENZA DI UN VETTORE DAGLI ALTRI

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale definito sul campo K

$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

Tesi:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di essi dipende dai rimanenti

Dimostrazione:

Si considerino le due implicazioni:

- $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ uno di essi dipende dai rimanenti

Si considerino $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tali che:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \underline{0}$$

Se i vettori sono linearmente dipendenti allora esiste almeno un coefficiente non nullo, estraendo il relativo addendo:

$$a_iv_i = -a_1v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+i}v_{i+1} - \cdots - a_nv_n$$

Si moltiplichino entrambi i membri per l'inverso di tale coefficiente:

$$a_i^{-1}a_iv_i = a_i^{-1}(-a_1v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+i}v_{i+1} - \cdots - a_nv_n)$$

$$v_i = -a_i^{-1}a_1v_1 - a_i^{-1}a_2v_2 - \cdots - a_i^{-1}a_{i-1}v_{i-1} - a_i^{-1}a_{i+i}v_{i+1} - \cdots - a_i^{-1}a_nv_n$$

Ma chiamando $b_j = -a_i^{-1}a_j\ \forall j \in [1; n]\backslash\{i\}$ si ottiene:

$$v_i = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+i}v_{i+1} + \cdots + b_nv_n$$

In questo modo si scrive un vettore come la combinazione lineare dei restanti.

- uno di essi dipende dai rimanenti $\Longrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti

Dire che un vettore dipende da altri vettori equivale a dire:

$$v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Ma portando tutti i termini a destra:

$$\underline{0} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + (-1) v_i + \cdots + a_n v_n$$

Che è una combinazione lineare dove i vettori sono linearmente dipendenti.

CVD

Questa dimostrazione permette di fornire anche un **criterio di indipendenza lineare**, semplicemente negando l'enunciato:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Longleftrightarrow$ nessuno di essi dipende dai rimanenti

Inoltre, il teorema appena dimostrato porta con se una serie di corollari.

ENUNCIATO COROLLARIO 1

Ipotesi

$\forall u, v \in V - \{\underline{0}\}$

Tesi:

u, v sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow v = au \ \forall a \in K^*$

ENUNCIATO COROLLARIO 2

Ipotesi:

$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$\exists i \in [0; n] : v_i = \underline{0}$

Tesi:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti

ENUNCIATO COROLLARIO 3

Ipotesi:

$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$\exists i, j \in [0; n] : j \neq i \ \wedge \ v_i = a v_j$

Tesi:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti

Grazie al corollario 2 è possibile dire che tutti i sistemi di vettori che contengono il vettore nullo sono linearmente dipendenti per $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, cioè i sistemi del tipo:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n, \underline{0}\}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI STEINIZ

Ipotesi:

$\forall\ V : V$ è uno spazio vettoriale definito sul campo K

$\forall S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} : S$ e T sono sistemi di vettori

I vettori di S sono linearmente indipendenti e ognuno di essi dipende dai vettori di T

Tesi:

$m = |S| \leq |T| = n$

Dimostrazione:

Il teorema si dimostra per induzione, quindi si seguono i tre seguenti step:

- Si dimostra il teorema valido per $n = 1$

Se $n = 1$ significa che T è composto solo da un vettore, allora S sarà composto da al più un vettore. Si ragioni per assurdo e si neghi tale tesi: si supponga che S contiene due elementi che, per ipotesi, devono dipendere dall'unico elemento di T:

$$u_1 = av \wedge u_2 = bv$$

Da ciò consegue che:

$$v = a^{-1} u_1$$

Inserendo questo risultato nel secondo vettore di S:

$$u_2 = b a^{-1} u_1$$

Ma ciò va in contraddizione con l'ipotesi secondo cui tutti gli elementi di S sono linearmente indipendenti, quindi S contiene al più un elemento.

- Si supponga il teorema vero per $n-1$ e lo si dimostri per $n>1$

Dal momento in cui ogni vettore di S dipende dai vettori di T:

$$u_1 = a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots a_{1,n}v_n$$

$$u_2 = a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots a_{2,n}v_n$$

...

$$u_m = a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots a_{m,n}v_n$$

Con $a_{ij} \in K$ scalari. In ognuna di queste combinazioni lineari l'indice i fa riferimento al vettore di S di cui si sta esprimendo la combinazione e j fa riferimento al vettore di T che compone la combinazione.

Dal momento in cui il sistema S è linearmente indipendente, si ha necessità di avere almeno un $a_{ij} \neq 0$ in quanto altrimenti si avrebbe un vettore $u_i = \underline{0}$ e il sistema sarebbe linearmente dipendente. Prendendo in considerazione il termine $a_{1,1}$ (il ragionamento può essere fatto per qualsiasi termine) e lo si estragga dall'uguaglianza:

$$a_{1,1}v_1 = u_1 - a_{1,2}v_2 - \cdots - a_{1,n}v_n$$

Moltiplicando entrambi i membri per $a_{1,1}^{-1}$:

$$v_1 = a_{1,1}^{-1}u_1 - a_{1,1}^{-1}a_{1,2}v_2 - \cdots - a_{1,1}^{-1}a_{1,n}v_n$$

Raccogliendo i coefficienti sotto un unico termine:

$$v_1 = a_{1,1}^{-1}u_1 - b_{1,2}v_2 - \cdots - b_{1,n}v_n$$

Avendo estrapolato il vettore $v_1 \in T$, lo si inserisce negli altri vettori di S:

$$u_2 = a_{2,1}\left(a_{1,1}^{-1}u_1 - b_{1,2}v_2 - \cdots - b_{1,n}v_n\right) + a_{2,2}v_2 + \cdots a_{2,n}v_n$$

...

$$u_m = a_{m,1}\left(a_{1,1}^{-1}u_1 - b_{1,2}v_2 - \cdots - b_{1,n}v_n\right) + a_{m,2}v_2 + \cdots a_{m,n}v_n$$

Per semplicità si raccolgono i coefficienti e si spostano i termini di S a sinistra:

$$u_2 - c_{2,1}u_1 = d_{2,2}v_2 + \cdots + d_{2,n}v_n$$

...

$$u_m - c_{m,1}u_1 = d_{m,2}v_2 + \cdots + d_{m,n}v_n$$

Costruendo i vettori $w_i = u_i - c_{i,1}u_1 \ \forall i \in [2;m]$:

$$w_2 = d_{2,2}v_2 + \cdots + d_{2,n}v_n$$

$$\dots$$

$$w_m = d_{m,2}v_2 + \cdots + d_{m,n}v_n$$

È possibile fare alcune considerazioni sul sistema di vettori $S' = \{w_2, \dots, w_m\}$:

- Il sistema è linearmente indipendente, se così non fosse significherebbe che un vettore di S' dipende dai restanti e cioè che un vettore di S dipende dai restanti, il che non è possibile per ipotesi;
- Ogni vettore di S' dipende linearmente dai vettori $\{v_2, v_3, \dots, v_n\} : v_i \in T$.

Ciò significa che, per ipotesi induttiva, la cardinalità del sistema S' è minore o uguale della cardinalità di T:

$$m - 1 \leq n - 1$$

Che dimostra il teorema per induzione:

$$m \leq n$$

CVD

DIMOSTRAZIONE RIMOZIONE DI UN VETTORE DAI GENERATORI

Ipotesi:

$\forall\, V : V$ è uno spazio vettoriale definito sul campo K

$\exists v_1, v_2, \dots, v_n \in V : \ H = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \wedge n \in N$

$\exists v_i \in V : v_i$ dipende linearmente dagli altri

Tesi:

$H = \langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$

Dimostrazione:

Il teorema afferma che un sottospazio finitamente generato da un sistema di vettori può essere generato dallo stesso sistema meno il vettore che dipende linearmente dagli altri.

Per semplicità si supponga che sia il vettore v_1 a dipendere dagli altri:

$$v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Il teorema di dimostra con la doppia inclusione:

- $H \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$

Si consideri un vettore di H e si scriva la sua combinazione lineare:

$$u_1 = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

$$u_1 = b_1(a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) + b_2v_2 + \cdots b_nv_n$$

Sciogliendo la parentesi e raccogliendo a fattor comune:

$$u_1 = c_2v_2 + \cdots c_nv_n$$

Da ciò si conclude che u_1 è una combinazione lineare dei vettori del sistema $\{v_2, \dots, v_n\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} - \{v_1\}$

- $H \supseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$

Scrivendo la combinazione lineare di un vettore di $\{v_2, \dots, v_n\}$:

$$u = b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

Che può anche essere scritta:

$$u = 0v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

Che è una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, dove il coefficiente di v_1 è nullo. Segue che $u \in H = \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle$.

In conclusione:

$$H \subseteq \langle\, v_2, \dots, v_n\rangle \subseteq H$$

E quindi:

$$H = \langle\, v_2, \dots, v_n\rangle$$

CVD

Iterando più volte questo **teorema**, cioè eliminando tutti gli elementi che siano dipendenti dagli altri, è possibile ottenere sempre un **sistema di generatori** ma tale che i **vettori** costituenti sono **linearmente indipendenti**. Con ciò che è stato appena detto è possibile definire una **base dello spazio vettoriale** V un **sistema di generatori linearmente indipendenti**.

Ad esempio, si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e il sistema di vettori $\{(2;1), (0;2)\}$; è possibile dimostrare che tale sistema è un sistema di vettori linearmente indipendenti, infatti presa una combinazione lineare dei due vettori:

$$a_1(2,1) + a_2(0,2) = \underline{0} \Leftrightarrow (2a_1; a_1 + 2a_2) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Inoltre, preso un generico vettore $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ si può osservare che:

$$(a; b) = \frac{a}{2}(2;1) + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right)(0;2)$$

Ciò significa che il sistema di vettori è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, perché ogni vettore di tale spazio è scritto come una combinazione lineare dei vettori del sistema. Ma poiché il sistema di generatori è anche linearmente indipendente, esso è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Si può concludere dicendo che ogni base è un sistema di generatori ma non tutti i sistemi di generatori sono delle basi.

DIMOSTRAZIONE UGUALE CARDINALITÀ DELLE BASI DI UNO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\exists \mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} : \mathcal{B}$ è una base di cardinalità n

Tesi:

$\forall \mathcal{B} : \mathcal{B}$ è una base $\Longrightarrow |\mathcal{B}| = n$

Dimostrazione:

Con tale teorema si afferma che tutte le basi di uno spazio vettoriale contengono lo stesso numero di elementi, hanno la stessa cardinalità.

Si consideri una seconda base $\mathcal{B}'$ che, per definizione, è un sistema di vettori linearmente indipendenti; tuttavia, i vettori di tale base sono dipendenti linearmente dai vettori della base $\mathcal{B}$, quindi è possibile applicare il teorema di Steinitz e dire che:

$$|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$$

Analogamente, i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti ma dipendono linearmente dai vettori di $\mathcal{B}'$, quindi:

$$|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$$

Ma:

$$|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \land |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| \Leftrightarrow |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$$

CVD

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato le cui **basi** hanno **cardinalità n**. È possibile definire n come la **dimensione dello spazio vettoriale** (finita, almeno in questa sede) e viene espresso come segue:

$$\dim V := n$$

DIMOSTRAZIONE DIPENDENZA DI UN VETTORE DA UN SISTEMA INDIPENDENTE

Ipotesi:

$\forall S = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$: S è linearmente dipendente

$S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: S' è linearmente indipendente

Tesi:

$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K : w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$

Dimostrazione:

Per ipotesi, il sistema S è linearmente dipendente, pertanto:

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n, a \in K: a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + aw = \underline{0}$$

Si supponga per assurdo che $a = 0$, la relazione precedente si aggiornerebbe in:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \underline{0}$$

Ma dal momento in cui i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

E si avrebbe:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = 0$$

Ma ciò dimostrerebbe che il sistema di vettori S è linearmente indipendente, che è un assurdo per ipotesi. Quindi $a \neq 0$ e segue:

$$aw = -a_1v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_nv_n$$

$$w = -a^{-1}a_1v_1 - a^{-1}a_2v_2 - \cdots - a^{-1}a_nv_n$$

Indicando $b_n = -a^{-1}a_n$:

$$w = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

In tal modo il vettore w è espresso come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$.

CVD

DIMOSTRAZIONE MASSIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI DI UNO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall V$: V è uno spazio vettoriale

Tesi:

$\dim V = n \Leftrightarrow n$ è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiede V

Dimostrazione:

Siano considerate le due implicazioni:

- $\dim V = n \Longrightarrow n$ è il massimo numero di vettori linearmente dipendenti che possiede V

Sia considerata una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ di cardinalità n e si considerino m vettori di V linearmente indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Poiché ognuno di questi vettori è linearmente dipendente dai vettori della base, è possibile applicare il teorema di Steinitz:

$$m \leq n$$

Che equivale a dire che non esiste alcun sistema di vettori linearmente indipendenti con cardinalità maggiore della dimensione dello spazio vettoriale

- n è il massimo numero di vettori linearmente dipendenti che possiede V$\Longrightarrow \dim V = n$

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ n vettori linearmente indipendenti. È possibile prendere un vettore $w \neq v_i$ per cui il sistema:

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$$

Abbia cardinalità $n + 1 > n$. Il sistema di vettori S dovrà necessariamente essere linearmente dipendente, perché la sua cardinalità supera il massimo numero di vettori linearmente indipendenti; inoltre, grazie al teorema precedente, è possibile esprimere w come una combinazione lineare degli altri vettori:

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K : w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Questo risultato vale per qualsiasi vettore $w \in V : w \neq v_i \ \forall i \in [1; n]$.

Dal momento in cui anche il singolo vettore $v_i \ \forall i \in [1; n]$ è linearmente dipendente da $v_1, v_2, \dots, v_n$, il sistema di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ è un sistema di generatori di V; essendo però un sistema di vettori linearmente indipendenti esso è definito come base di V, la cui cardinalità è n. Segue che:

$$\dim V = n$$

CVD

ENUNCIATO COSTRUZIONE DI UNA BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\dim V = n$

$\forall u_1, u_2, \dots, u_m : m < n$ siano m vettori linearmente indipendenti

Tesi:

$\exists u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n : \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ è una base di V

Tale enunciato permette la **costruzione di una base** di uno spazio vettoriale **a partire da un sistema di vettori linearmente indipendente**, di **cardinalità minore** della dimensione dello spazio stesso, semplicemente aggiungendo $n - m$ elementi in modo tale che il risultato aderisca alla definizione di base.

Praticamente per costruire una base si procede nel seguente modo:

- Sia **preso un vettore non nullo $\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{V}$ e il sottospazio generato da tale vettore $\boldsymbol{H_1} = \langle \boldsymbol{u_1} \rangle$**; può accadere:
  - $H_1 = V$, allora $\{u_1\}$ **è una base** di V;
  - $H_1 \subset V$, allora $\exists \boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{V}: \boldsymbol{u_2} \notin \boldsymbol{H_1}$.
- Si consideri il **sottospazio generato dai vettori $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{H} = \langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \rangle$**, sapendo che il sistema di vettori $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ **è linearmente indipendente** (grazie al teorema di dipendenza di un vettore da un sistema indipendente), può accadere:
  - $H_2 = V$, allora $\{u_1, u_2\}$ **è una base** di V;
  - $H_2 \subset V$, allora $\exists \boldsymbol{u_3} \in \boldsymbol{V}: \boldsymbol{u_3} \notin \boldsymbol{H_1}$.
- Si consideri il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3, $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

Si può **reiterare** il procedimento finché non si trova una base di V.

Si consideri **un insieme e un suo sottoinsieme**, entrambi **non vuoti**, $X \subseteq S$, e sia considerata una certa **proprietà *P***. Si dice che **il sottoinsieme X è munito della proprietà *P*** se:

$$\forall x \in S, x \in X \Leftrightarrow P(x)$$

Si dice che **il sottoinsieme X è massimale rispetto alla proprietà *P*** se:

$$\forall Y \subseteq S : X \subset Y \Longrightarrow Y \text{ non ha la proprietà } P$$

In sostanza equivale a dire che il sottoinsieme Y, costruito dall'aggiunta di un elemento di S ad X, non gode della proprietà *P*

Si dice che **il sottoinsieme X è minimale rispetto alla proprietà *P*** se:

$$\forall Y \subseteq S : Y \subset X \Longrightarrow Y \text{ non ha la proprietà } P$$

In sostanza equivale a dire che il sottoinsieme Y, costruito dalla rimozione di un elemento di X da se stesso, non gode della proprietà *P*.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DI UNA BASE

Ipotesi:

$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} : S$ è un sistema di vettori dello spazio vettoriale V

Siano considerate le seguenti proprietà:

1. S è una base;
2. S è massimale rispetto alla proprietà di essere indipendente;
3. S è minimale rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori;
4. S è un sistema indipendente di cardinalità massima;
5. S è un sistema di generatori di cardinalità minima.

Tesi:

1. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 2;
2. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 3;
3. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 4;
4. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 5.

Dimostrazione:

Siano considerate le tesi singolarmente e le relative singole implicazioni:

1. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 2;
   1.1. Proprietà 1 $\Rightarrow$ Proprietà 2;

Per ipotesi S è una base, quindi i vettori $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti. Sia preso un vettore $w \in V$ che, per definizione di base, sarà una combinazione lineare di $u_1, u_2, \dots, u_n$. Ciò significa che il sistema:

$$S' = \{u_1, u_2, \dots, u_n, w\}$$

È linearmente dipendente $\forall w \in V$. Ciò significa che S è un sistema massimale rispetto all'essere indipendente.

   1.2. Proprietà 2 $\Rightarrow$ Proprietà 1;

Grazie al concetto di massimalità, è possibile dire che $\forall w \in V, S' = \{u_1, u_2, \dots, u_n, w\}$ è un sistema dipendente, cioè w è una combinazione lineare di $u_1, u_2, \dots, u_n$; ciò vale per qualsiasi w, segue quindi che S è un sistema di generatori linearmente indipendenti, e quindi una base.

2. Proprietà 1 $\Leftrightarrow$ Proprietà 3;
   2.1. Proprietà 1 $\Rightarrow$ Proprietà 3;

Si privi S di un elemento i-esimo, risultando nel sistema di vettori:

$$S' = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$$

Che non è più un sistema di generatori, infatti u_i non può essere generato come combinazione lineare di $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ perché S è linearmente indipendente. Ciò equivale a dire che S è minimale rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori

   2.2. Proprietà 3 $\Rightarrow$ Proprietà 1;

Bisogna dimostrare che S è un sistema di vettori linearmente indipendente, se altrimenti fosse significa che un elemento u_i si potrebbe scrivere come combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$, ma per il teorema di rimozione di un vettore dai generatori:

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$$

Ovvero, $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori, che va in contraddizione con l'ipotesi di minimalità rispetto alla proprietà di essere un sistema di generatori.

3. Proprietà 1 ⟺ Proprietà 4;

Per dimostrare questa tesi è sufficiente richiamare il teorema di massimo numero di vettori indipendenti in uno spazio.

4. Proprietà 1 ⟺ Proprietà 5;
   4.1. Proprietà 1 ⟹ Proprietà 5;

In quanto base, S è un sistema di generatori. Se esistessero m vettori generanti lo spazio vettoriale V, per il teorema di Steinitz si avrebbe $n < m$. In conclusione, n esprime la minima cardinalità di un sistema di generatori, che equivale a dire che S ha la minima cardinalità

   4.2. Proprietà 5 ⟹ Proprietà 1;

Si supponga per assurdo che S è un sistema di vettori linearmente dipendenti, per il teorema di rimozione di un vettore dai generatori:

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$$

Che equivale a dire che $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori nonostante la sua cardinalità sia $n - 1 < n$; tuttavia ciò è un assurdo per l'ipotesi di minima cardinalità.

CVD

Tale teorema può essere riassunto come segue:

Se **V è uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione dim $\boldsymbol{V = n}$, allora n è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti ed il numero minimo di vettori generatori per V**.

Per riassumere il concetto di base si prenda in considerazione lo spazio vettoriale generato dal campo K, K^n, di dimensione $\dim K^n = n$. Per costruire una sua base bisogna considerare n vettori linearmente indipendenti, come e_i : l'i-esima componente sia 1 e le restanti 0:

$$e_i = (0,0, \dots 0,1,0 \dots ,0)$$

Si può facilmente osservare che i vettori $e_1, e_2, \dots e_n$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, n è il numero minimo di vettori generatori dello spazio:

$$\langle e_1, e_2, \dots e_n \rangle = K^n$$

Si può quindi concludere che il sistema $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ è una base per K^n. Una base di questo tipo è detta **base canonica di $\boldsymbol{K^n}$**, mentre **i vettori $\boldsymbol{e_1, e_2, \dots e_n}$ sono detti vettori canonici dello spazio vettoriale $\boldsymbol{K^n}$**.

OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI

Sia **V uno spazio vettoriale** di **dimensione $\dim \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$** e siano **H e T due sottospazi** di V, $H, T \leq V$ si definisce l'**operazione di intersezione tra due sottospazi** come un **sottospazio di V**:

$$H \cap T \leq V$$

DIMOSTRAZIONE INTERSEZIONE TRA SOTTOSPAZI

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall H, T \leq V$

Tesi:

$H \cap T \leq V$

Dimostrazione:

Sfruttando le proprietà dei due sottospazi coinvolti e considerando la definizione stessa di sottospazio:

1. Prima proprietà

$$\forall u, v \in H \cap T \Longrightarrow u, v \in H \wedge u, v \in T \Longrightarrow u + v \in H \wedge u + v \in T \Longrightarrow u + v \in H \cap T$$

2. Seconda proprietà

$$\forall a \in K, \forall u \in H \cap T \Longrightarrow u \in H \wedge u \in T \Longrightarrow au \in H \wedge au \in T \Longrightarrow au \in H \cap T$$

È possibile dire che $H \cap T$ è un sottospazio di V.

CVD

Tale operatore viene eseguito in funzione di due soli sottospazi ma la sua definizione può essere **ampliata ad una famiglia di sottospazi**:

$$\mathcal{H} = \{H : H \leq V\} \Longrightarrow \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \leq V$$

Che equivale a dire che **l'intersezione tra qualsiasi due sottospazi di V è essa stessa un sottospazio di V**. Tale assunzione può essere fatta perché sicuramente $\boldsymbol{\mathcal{H}} \neq \emptyset$, infatti esso contiene necessariamente i due **sottospazi banali** $\{\emptyset\}$ **e V**.

DIMOSTRAZIONE GENERALIZZAZIONE DELL'INTERSEZIONE TRA SOTTOSPAZI

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall \mathcal{H} = \{H: H \leq V\}$

Tesi:

$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \leq V$

Dimostrazione:

Come per la dimostrazione precedente, bisogna mostrare la validità delle due proprietà di un sottospazio:

1. Prima proprietà

$(\forall u, v \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \Longrightarrow u, v \in H) \land (\forall H \in \mathcal{H} \Longrightarrow u + v \in H) \Longrightarrow (\forall H \in \mathcal{H} \Longrightarrow u + v \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H)$;

2. Seconda proprietà

$(\forall a \in K\ \forall u \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \Longrightarrow u \in H) \land (\forall H \in \mathcal{H} \Longrightarrow au \in H) \Longrightarrow (\forall H \in \mathcal{H} \Longrightarrow au \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H)$;

CVD

Questa proprietà appena dimostrata **non è certamente valida con l'unione**, infatti l'unione di due sottospazi di V **non è necessariamente un sottospazio** di V.

Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ siano presi i due sottospazi:

$$H = \{(a; 0) \in \mathbb{R}^2: a \in \mathbb{R}\} \land T = \{(0; b) \in \mathbb{R}^2: b \in \mathbb{R}\}$$

La loro unione sarebbe:

$$H \cup T = \{(a; b) \in \mathbb{R}^2: a = 0 \lor b = 0\}$$

Siano considerati i vettori:

$$(1; 0) \in H \land (0; 1) \in T \Longrightarrow (1; 0) + (0; 1) = (1; 1) \notin H \cup T$$

Viene meno la prima proprietà caratteristica di un sottospazio.

Sia considerato uno spazio vettoriale V di dimensione $\dim \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$, un sottoinsieme $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{V}$ non vuoto di tale spazio e l'insieme di sottospazi di V contenenti il sottoinsieme X, $\boldsymbol{\mathcal{H}_X} =$ $\{H: X \subseteq H \leq V\}$; risulta $\mathcal{H}_X \neq \emptyset$ dal momento in cui esso contiene il sottospazio banale V.

Si definisce **sottospazio generato dal sottoinsieme X l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti X**:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H$$

DIMOSTRAZIONE SOTTOSPAZIO GENERATO

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale $\wedge\, X \subseteq V$

$\forall \mathcal{H}_X = \{H : X \subseteq H \leq V\} : \langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H$

Tesi:

$\langle X \rangle$ è il più piccolo sottospazio che contiene X, ovvero ogni sottospazio che contiene X deve contenere il sottospazio generato $\langle X \rangle$

Dimostrazione:

Per definizione risulta:

$$X \subseteq \langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H$$

Sia considerato un sottospazio di V, $T \leq V : X \subseteq T$. Allora:

$$T \in \mathcal{H}_X$$

E dunque:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_X} H \subseteq T$$

CVD

DIMOSTRAZIONE SOTTOSPAZIO DI VETTORI SOMMA

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall H, T \leq V$

$L = \{a + b : a \in H \wedge b \in T\}$

Tesi:

$L \leq V$

Dimostrazione:

Come fatto in precedenza, va dimostrata la validità delle due proprietà caratteristiche dei sottospazi:

1. Prima proprietà

$$\forall u = a + b, v = a' + b' \in L, u + v = (a + a') + (b + b') = a'' + b'' \in L \Leftrightarrow a'' \in H, b'' \in T$$

2. Seconda proprietà

$$\forall \alpha \in K\ \forall u = a + b \in L \Rightarrow \alpha u = \alpha a + \alpha b \in L \Leftrightarrow \alpha a \in H, \alpha b \in T$$

CVD

DIMOSTRAZIONE L COME SOTTOSPAZIO GENERATO

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall H, T \leq V$

$L = \{a + b : a \in H \land b \in T\} \leq V$

Tesi:

$L = \langle H \cup T \rangle$

Dimostrazione:

Si può notare che, nonostante $H \cup T$ non sia un sottospazio (come mostrato precedentemente), è possibile considerare il sottospazio generato da tale unione $\langle H \cup T \rangle$.

Va dimostrato che L è il più piccolo sottospazio contenente $H \cup T$; si può osservare come per ogni vettore a di H e b di T:

$$a = a + \underline{0} \in L \Leftrightarrow a \in H \land \underline{0} \in T$$

$$b = \underline{0} + b \in L \Leftrightarrow \underline{0} \in H \land b \in T$$

Sia considerato un sottospazio che contenga l'unione:

$$H \cup T \subseteq J \leq V$$

Per ogni vettore di H e di V si ha che:

$$a, b \in H \cup T \subseteq J \Rightarrow a, b \in J$$

Ma poiché J è un sottospazio:

$$a + b \in J$$

Da ciò si può concludere che:

$$a + b \in J \Rightarrow L \subseteq J$$

CVD

Il **sottospazio generato dall'unione dei sottospazi** H e T, $\langle H \cup T \rangle$, è chiamato **sottospazio congiungente**, indicato come:

$$H + T$$

Le operazioni sui sottospazi hanno **conseguenze sulle dimensioni** degli spazi coinvolti.

DIMOSTRAZIONE FORMULA DI GRASSMANN

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$

$\forall \mathcal{H} = \{H: H \leq V\} \wedge \forall H, T \in \mathcal{H}$

Tesi:

1. $H \subseteq T \Longrightarrow \dim H \leq \dim T$;
2. $H \subset T \Longrightarrow \dim H < \dim T$;
3. $\dim(H + T) = \dim H + \dim T - \dim(H \cap T)$

Dimostrazione:

Le prime due tesi sono facilmente dimostrabili, pertanto ci si concentrerà sulla terza tesi, propriamente detta Formula di Grassmann.

- Se $H \subseteq T$ allora:

$$H \cup T = T \wedge H \cap T = H$$

Da ciò segue che:

$$\dim(H + T) = \dim T$$

$$\dim H + \dim T - \dim(H \cap T) = \dim H - \dim H + \dim T = \dim T$$

Da cui si deduce la validità della formula.

- Si supponga che nessuno dei due sottospazi sia contenuto nell'altro, allora si diranno:

$$\dim H = h; \dim T = t$$

E le basi di H e T rispettivamente:

$$\mathcal{B}_H = \{u_1, u_2, \dots, u_h\}$$

$$\mathcal{B}_T = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$$

Mentre il sistema di vettori ottenuto dall'unione delle due basi è:

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_h, v_1, v_2, \dots, v_t\}$$

- $H \cap T = \{\underline{0}\}$

Si dimostri che:

$$\mathcal{B} \text{ è base di } H + T$$

1. Lineare indipendenza

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_h u_h) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_t v_t) = a + b = \underline{0}$$

Poiché a è combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_H$ e b dei vettori della base $\mathcal{B}_T$, si può affermare che:

$$a \in H \wedge b \in T$$

Inoltre, la precedente combinazione diverrà:

$$a + b = \underline{0} \Rightarrow a = -b$$

Per definizione di spazio vettoriale, anche $-b \in T$; ciò implica che:

$$a, b \in H \cap T$$

Ma per ipotesi $H \cap T = \{\underline{0}\}$, quindi:

$$a = \underline{0} = b$$

Ovvero:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_h u_h = 0 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_t v_t$$

Ma poiché $\mathcal{B}_T$ e $\mathcal{B}_H$ sono basi, i rispettivi vettori sono linearmente indipendenti, quindi si conclude:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_h = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_t = 0$$

Di conseguenza, $\mathcal{B}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di $H + T$.

2. Sistema di generatori

Si consideri un vettore $v \in H + T$, di conseguenza:

$$\exists a \in H, b \in T : v = a + b$$

Ma dal momento in cui a e b sono risultate dalla combinazione lineare dei vettori delle rispettive basi:

$$v = a + b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_h u_h + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_t v_t$$

Che equivale a dire che v è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$; per la generalità del vettore $v \in H + T$ è possibile dire che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $H + T$.

Si può concludere che, nel caso in cui $H \cap T = \{\underline{0}\}$, e cioè che $\dim(H \cap T) = 0$, una base di $H + T$ è ottenuta come unione delle rispettive basi di H e di T. Ciò implica che:

$$\dim(H+T) = \dim H + \dim T$$

Da cui segue la validità della formula.

- $H \cap T \neq \{\underline{0}\}$

In corrispondenza di questa configurazione si suppone $\dim(H \cap T) = q \neq 0$. Si consideri una base di $H \cap T$:

$$\mathcal{B}_{H\cap T} = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$$

Ma dato che valgono le seguenti relazioni:

$$H \cap T \subseteq H \Longrightarrow \dim(H \cap T) \leq \dim H$$

$$H \cap T \subseteq T \Longrightarrow \dim(H \cap T) \leq \dim T$$

Per il teorema di costruzione di una base di uno spazio vettoriale è possibile aggiungere alla base $\mathcal{B}_{H\cap T}$ rispettivamente $h-q$ vettori per completarla ad una base di H, scegliendo i vettori in $H - (H \cap T)$, e $t-q$ vettori per completarla ad una base di T, scegliendo i vettori in $T - (H \cap T)$

Ottenendo il sistema:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_q, u_{q+1}, \dots, u_h, v_{q+1}, \dots, v_t\}$$

Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $H+T$.

1. Lineare indipendenza

Si consideri:

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \dots + \alpha_h u_h) + (\beta_{q+1} v_{q+1} + \dots + \beta_t v_t) = \underline{0}$$

$$a + b = \underline{0}$$

Dal momento in cui a e b sono combinazioni delle basi $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$ è possibile dire:

$$a \in H \wedge b \in T$$

Poiché, però, a può essere detto in funzione di b e poiché per definizione di spazio vettoriale anche l'opposto di un vettore appartiene allo spazio:

$$a = -b \Longrightarrow a, b \in H \cap T$$

Sia considerata la base $\mathcal{B}_{H\cap T}$:

$$\beta_{q+1} v_{q+1} + \dots + \beta_t v_t = b = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_q e_q$$

Cioè:

$$\beta_{q+1} v_{q+1} + \dots + \beta_t v_t - \delta_1 e_1 - \dots - \delta_q e_q = \underline{0}$$

Ma essendo $\mathcal{B}_T$ e $\mathcal{B}_{H\cap T}$ basi, i vettori saranno linearmente indipendenti, quindi:

$$\beta_{q+1} = \cdots = \beta_t = \delta_1 = \cdots = \delta_q = 0$$

Ma se è valida questa affermazione allora la somma di a e b precedentemente esposta diverrà:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \cdots + \alpha_h u_h = \underline{0}$$

Ma poiché i vettori della base $\mathcal{B}_H$ sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \alpha_{q+1} = \cdots = \alpha_h = 0$$

E cioè:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \alpha_{q+1} = \cdots = \alpha_h = \beta_{q+1} = \cdots = \beta_t = 0$$

È stato appena dimostrato come il sistema $\mathcal{B}$ sia linearmente indipendente.

2. Sistema di generatori

Sia considerato un vettore $v \in H + T$, allora:

$$\exists a \in H \ \exists b \in T : v = a + b$$

Questi vettori sono combinazioni lineari delle relative basi $\mathcal{B}_H$ e $\mathcal{B}_T$:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \cdots + \alpha_h u_h$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_q e_q + \beta_{q+1} v_{q+1} + \cdots + \beta_t v_t$$

Ponendo $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$ per $i \in [1; q]$, il vettore v si scrive:

$$v = \delta_1 e_1 + \cdots + \delta_q e_q + \alpha_{q+1} u_{q+1} + \cdots + \alpha_h u_h + \beta_{q+1} v_{q+1} + \cdots + \beta_t v_t$$

Che risulta essere una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Segue che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $H \cap T$ e, di conseguenza, una base per tale spazio. Segue di conseguenza:

$$\dim H + T = q + h - q + t - q = h + t - q = \dim H + \dim T - \dim H \cap T$$

CVD

Sia **V uno spazio vettoriale di dimensione $\boldsymbol{\dim V = n}$** e siano $\boldsymbol{H, T \leq V}$ **due sottospazi di V**, essi si dicono **supplementari** se:

- $H \cap T = \{\underline{0}\}$;
- $H + T = V$.

DIMOSTRAZIONE SPAZI SUPPLEMENTARI GENERATI DA UNA BASE

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$

$\forall H, T \leq V$

$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} : \mathcal{B}$ è una base di V

$H = \langle u_1, u_2, \dots, u_t \rangle \wedge T = \langle u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_n \rangle$

Tesi:

H e T sono sottospazi supplementari

Dimostrazione:

Siano dimostrate singolarmente le due proprietà caratteristiche di un sottospazio supplementare:

- $H \cap T = \{\underline{0}\}$

Sia considerato un vettore $v \in H \cap T$, esso può essere espresso come combinazione lineare di una base di H e di una base di T perché appartiene ad entrambi:

$$v \in H \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$$

$$v \in T \Rightarrow v = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_n u_n$$

Il che significa:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t - \alpha_{t+1} u_{t+1} - \dots - a_n u_n = \underline{0}$$

Ma poiché $\mathcal{B}$ è una base, è un sistema di vettori linearmente indipendenti e quindi:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_t = \alpha_{t+1} = \dots a_n = 0$$

Il che vale per ogni vettore di tale intersezione, quindi $H \cap T = \{\underline{0}\}$

- $H + T = V$

Si consideri un vettore $v \in V$, consapevoli del fatto che $\mathcal{B}$ è una base:

$$v = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) + (\alpha_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_n u_n) = a + b$$

Dove $a \in H$ e $b \in T$. Dal momento in cui a è espresso come combinazione lineare dei vettori generatori di H e b come combinazione lineare dei vettori generatori di T, ogni vettore di V è espresso come somma di un vettore di H e di un vettore di T, quindi $v \in H + T$. Da ciò consegue che $H + T = V$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA INVERSO SPAZI SUPPLEMENTARI GENERATI DA UNA BASE

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall H, T : H, T$ sono spazi supplementari a V

$\dim H = t \wedge \dim T = n - t$

$\mathcal{B}_H = \{u_1, \dots, u_t\}$ è una base di H

$\mathcal{B}_T = \{u_{t+1}, \dots, u_n\}$ è una base di T

Tesi:

$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di V

Dimostrazione:

Va dimostrata la definizione di base, quindi:

- Lineare indipendenza

Siano considerati n scalari $\alpha \in K$ tali che:

$$(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t) + (\alpha_{t+1} u_{t+1} + \cdots + \alpha_n u_n) = \underline{0}$$

Ponendo $a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t \in H$ e $b = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \cdots + \alpha_n u_n \in T$:

$$a + b = \underline{0}$$

Poiché a è espresso come combinazione dei vettori di $\mathcal{B}_H$ e b dei vettori di $\mathcal{B}_T$:

$$a = -b$$

Ma poiché T è un sottospazio, $-b = a \in T$. Da ciò consegue che:

$$a = b \in H \cap T = \{\underline{0}\}$$

Quindi:

$$a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t = \underline{0} = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \cdots + \alpha_n u_n = b$$

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = \alpha_{t+1} = \cdots \alpha_n = 0$$

Che dimostra la lineare indipendenza di $\mathcal{B}$.

- Sistema di generatori

Per ipotesi si ha che $V = H + T$ (sottospazi supplementari), il che significa che:

$$v \in V \Leftrightarrow v \in H + T$$

Dunque:

$$\exists a \in H \; \exists b \in T : v = a + b$$

Ma a e b possono essere espressi come combinazione lineare delle rispettive basi:

$$a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t$$

$$b = \alpha_{t+1} u_{t+1} + \cdots + \alpha_n u_n$$

E cioè:

$$v = (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t) + (\alpha_{t+1} u_{t+1} + \cdots + \alpha_n u_n)$$

Con cui è possibile affermare che v può essere espresso come una combinazione lineare del sistema di vettori $\mathcal{B}$, dimostrando che esso è un sistema di generatori per di V.

In quanto sistema di vettori linearmente indipendenti e sistema di generatori per v, $\mathcal{B}$ è una base per V.

CVD

Sia considerato uno **spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$** e un **sottospazio $\boldsymbol{H \leq V}$**, è **sempre possibile costruire un sottospazio *T* supplementare**, cioè tale che:

- $H \cap T = \{\underline{0}\}$;
- $H + T = V$.

DIMOSTRAZIONE ESISTENZA E UNICITÀ COMPONENTI SUPPLEMENTARI DI V

Ipotesi:

$\forall V : V$ è uno spazio vettoriale

$\forall H, T \leq V : H, T$ sono supplementari a V

Tesi:

$\forall v \in V \; \exists! \, a \in H \; \exists! \, b \in T : v = a + b$

Dimostrazione:

Si supponga per assurdo che tali valori non siano unici:

$$a + b = v = a' + b'$$

Ciò implica automaticamente che:

$$a - a' \in H \cap T$$

$$b - b' \in H \cap T$$

Ma poiché per ipotesi l'intersezione di H e T è costituita solo dal vettore nullo:

$$H \cap T = \{\underline{0}\} \Longrightarrow a - a' = b - b' = \underline{0}$$

E cioè:

$$a = a' \wedge b = b'$$

CVD

Sia preso in considerazione uno **spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ di dimensione $\boldsymbol{\dim V = n}$** e siano $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}}$ **e** $\boldsymbol{\mathcal{B}' = \{u'_1, \dots, u'_n\}}$ **due basi di $\boldsymbol{V}$**, per **definizione di base** ogni vettore di $\mathcal{B}'$ si scriverà come una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} u'_1 = a_{11}u_1 + \dots + a_{n1}u_n \\ \dots \\ u'_n = a_{1n}u_1 + \dots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

Mentre la **matrice** che ha **come colonne le coordinate dei vettori $\boldsymbol{u'_i}$** $\forall i \in [1, n]$ è detta **matrice di passaggio** (o **matrice di cambiamento di base**):

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La **relazione tra i vettori delle basi $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** appena mostrata può essere semplificata come segue:

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n)\mathcal{P}$$

DIMOSTRAZIONE INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE DI PASSAGGIO

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$

$\forall \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$: sono basi di V

Tesi:

$\mathcal{P}$ è invertibile

Dimostrazione:

Ai fini del teorema bisogna dimostrare che $\det \mathcal{P} \neq 0$.

Il sottospazio generato $\langle u'_1, \dots, u'_n \rangle$ di V ha dimensione pari al rango della matrice $\mathcal{P}$, ma poiché i vettori $u'_1, \dots, u'_n$ costituiscono una base, allora:

$$\dim(\langle u'_1, \dots, u'_n \rangle) = n \Longrightarrow \rho(\mathcal{P}) = n \Longrightarrow \det \mathcal{P} \neq 0$$

CVD

DIMOSTRAZIONE ESISTENZA DELLA MATRICE DI PASSAGGIO INVERSA

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$

$\forall \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$: sono basi di V

$\mathcal{P}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$

Tesi:

$\mathcal{P}^{-1}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$

Dimostrazione:

Per l'ipotesi di $\mathcal{P}$ come matrice di passaggio, si desume la relazione:

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n)\mathcal{P}$$

Ma poiché $\mathcal{P}$ è invertibile:

$$(u'_1, \dots, u'_n)\mathcal{P}^{-1} = (u_1, \dots, u_n)$$

Che equivale a dire che $\mathcal{P}^{-1}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

CVD

Si può osservare come, presa **una base canonica $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{K^n}$ e una base $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ dello stesso spazio**, **la matrice di passaggio $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ avrà come colonne i vettori $\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}$**:

$$\mathcal{P} = (u_1, \dots, u_n)$$

MATRICI E DETERMINANTI

Sia ***K* un campo** e siano ***n* e *m* due numeri interi positivi**, si definisce **matrice** una **tabella i cui elementi, appartenenti al campo *K*, sono disposti ordinatamente lungo *m* righe e *n* colonne**, come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La stessa matrice si può scrivere in forma abbreviata:

$$A = \left(a_{ij}\right) \forall a_{ij} \in K, \forall i \in [1,m], j \in [1,n]$$

Per un campo $\boldsymbol{K}$ non esiste un'unica matrice, piuttosto un **insieme di matrici di tipo $\boldsymbol{m \times n}$** i cui elementi sono definiti sul campo stesso, denominato $\mathbb{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})$. Siano prese due matrici appartenenti a tale insieme, $A = (a_{ij})$ e $B = \left(b_{ij}\right) \forall i \in [1,m], j \in [1,n]$, **si definiscono le operazioni** di:

- **Somma**

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \forall i \in [1,m], j \in [1,n]$$

- **Prodotto per uno scalare**

$$\lambda A = \lambda\left(a_{ij}\right) = \left(\lambda a_{ij}\right), \forall \lambda \in K, i \in [1,m], j \in [1,n]$$

La matrice di tipo $\boldsymbol{m \times n}$ caratterizzata come segue è detta matrice nulla ed è l'**elemento neutro** rispetto all'operazione di **somma**:

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$$

Inoltre, presa la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$, si dice **matrice opposta $-\boldsymbol{A}$** la matrice **i cui elementi sono $-\boldsymbol{a_{ij}}$** tale che:

$$A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$$

Le due operazioni appena definite, con le proprietà che conseguono da queste considerazioni, rientrano nella **definizione di spazio vettoriale** per la quale si può affermare che $\mathbb{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})$ **è uno spazio vettoriale di dimensione dim $\mathbb{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{mn}$**.

È possibile definire l'**operazion**e di prodotto tra due matrici a patto che **la prima abbia un numero di colonne pari al numero di righe della seconda**:

$$\forall A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{M}_{m,n}(K), B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{M}_{n,p}(K), A \cdot B = C = (c_{hk}) \in \mathbb{M}_{m,p} : c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + \cdots + a_{hn}b_{nk}$$

Dove $h \in [1,m]$ e $k \in [1,p]$. Prese le matrici $A \in \mathbb{M}_{m,n},, B \in \mathbb{M}_{n,p}$ e $C \in \mathbb{M}_{p,q}$, il loro prodotto **gode della proprietà associativa** ma **non della proprietà commutativa**:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot B \neq A \cdot B$$

In tal caso cadrebbe l'ipotesi di uguaglianza di colonne e righe necessaria per la definizione dell'operazione.

Presa in considerazione una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$ del tipo $m \times n$, si parla di **matrice trasposta** $A^t \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$ quando si fa riferimento alla **matrice ottenuta da A in cui ogni riga si scambia con la rispettiva colonna**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Sulle **matrici composte** è possibile individuare **tre proprietà**, $\forall A, A' \in \mathbb{M}_{m,n}(K), \forall B \in \mathbb{M}_{n,p}(K), \forall \lambda \in K$:

1. $(A + A')^t = A^t + A'^t$
2. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
3. $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$

Si parla, invece, di **matrice quadrata di ordine *n*** con riferimento a **tutte le matrici dell'insieme $\mathbb{M}_{n,n}(K)$, denominato anche $M_n(K)$**, dove gli elementi a_{ii} $\forall i \in [1, n]$ **compongono la diagonale principale della matrice**. Un particolare tipo di matrice quadrata è la **matrice identica**, cioè quella **formata da tutti 0 ad eccezione della diagonale principale, dove si trovano tutti 1**:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un modo più sintetico di indicare questa matrice è usando il **simbolo di Kronecker**:

$$I_n = (\delta_{ij}) \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow i \neq j \\ 1 \Leftrightarrow i = j \end{cases}, \forall i, j \in [1, n]$$

Poiché per il prodotto di due matrici **non vale la proprietà commutativa**, **l'elemento neutro non sarà lo stesso se posto a destra o a sinistra**; dunque, presa una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$ si parla di:

- **Elemento neutro a sinistra** rispetto all'operazione di prodotto tra due matrici

$$I_m \cdot A = A$$

- **Elemento neutro a destra** rispetto all'operazione di prodotto tra due matrici

$$A \cdot I_n = A$$

Una **matrice quadrata** $A \in M_n(K)$ è detta **invertibile** se esiste una matrice $B \in M_n(K)$ per cui:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Considerato lo **spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine *n***, $M_n(K)$, **ad ogni matrice** $A \in M_n(K)$ **è possibile associare uno scalare chiamato determinante della matrice** ($|A|$ o $\det A$):

- $n = 1$

$$A = (a_{11}) \Rightarrow |A| = a_{11}$$

- $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Per definire il **determinante di matrici di ordine superiore a 2**, si può considerare l'elemento a_{hk} e definire il **minore complementare** ad esso, ovvero il determinante della matrice A_{hk} (ottenuta dalla matrice A eliminando la riga h e la colonna k); da questa matrice si ottiene il **complemento algebrico dell'elemento $\boldsymbol{a_{hk}}$**:

$$\Gamma_{hk} = (-1)^{h+k}|A_{hk}|$$

Da cui segue il teorema.

ENUNCIATO SVILUPPO DI LAPLACE PER RIGHE PER IL CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE [risp PER COLONNE]

Ipotesi:

$\forall 1 \leq i \leq n$ fissato $[\text{risp.}\, 1 \leq j \leq n\,]$

Tesi:

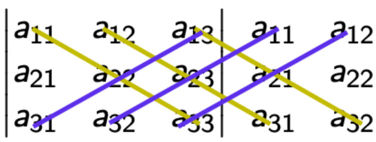
$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$ $\left[\text{risp } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}\right]$

La scelta di seguire lo sviluppo di Laplace secondo una riga piuttosto che una colonna va indirizzata **laddove siano presenti più 0**, perché il calcolo può semplificarsi notevolmente.

Solo per le matrici di ordine 3, oltre allo sviluppo di Laplace, si può individuare un **ulteriore metodo per calcolare il determinante**, che prende il nome di **regola di Sarrus**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33})$$

Questa regola si ottiene facendo **traslare le prime due colonne oltre la matrice** e sommando i seguenti prodotti incrociati:



Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ una **matrice quadrata di ordine n a scalari reali** e si consideri la **matrice di ordine n ottenuta da A sostituendo l'elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ con il suo complemento algebrico $\boldsymbol{\Gamma_{ij}}$**:

$$A^* = (\Gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

Da cui segue che **una matrice è invertibile se il suo determinante non è nullo e tale inversa è**:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^t$$

Sia presa in considerazione una **matrice di ordine $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$**, $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$, e **si distinguono le m righe e le n colonne**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$r_i = (a_{i1} \quad \dots \quad a_{in})$$

$$c_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Supponendo di aver **individuato nella matrice un numero $\boldsymbol{p}$ di righe** (per convenzione le prime p) **per cui valgono le seguenti proprietà**:

1. $\boldsymbol{r_1} \dots \boldsymbol{r_p}$ **sono indipendenti**;
2. **Ogni altra riga è combinazione lineare di $\boldsymbol{r_1} \dots \boldsymbol{r_p}$.**

Siano $\boldsymbol{r_{i_1}} \dots \boldsymbol{r_{i_t}}$ (con $i_1 \dots i_t \neq 1 \dots p$) **t righe della matrice che sono linearmente indipendenti tra loro**, segue dalle proposizioni appena mostrate che **esse dipendono da $\boldsymbol{r_1} \dots \boldsymbol{r_p}$** e, per il lemma di Steinitz, $\boldsymbol{t \leq p}$. Con ciò si dimostra che **il numero massimo di righe indipendenti della matrice è *p*** e che individuare in essa un gruppo di righe che risponde alle due proprietà sopra elencate equivale a determinare quale sia questo numero *p*.

La definizione può essere estesa anche alle colonne, infatti **si può individuare un numero *s* di colonne** (per convenzione le prime *s*) **per cui valgono le seguenti proprietà**:

1. $\boldsymbol{c_1} \dots \boldsymbol{c_p}$ **sono indipendenti**;
2. **Ogni altra colonna è combinazione lineare di $\boldsymbol{c_1} \dots \boldsymbol{c_p}$.**

Siano $\boldsymbol{c_{j_1}} \dots \boldsymbol{c_{j_t}}$ (con $j_1 \dots j_t \neq 1 \dots s$) **t colonne della matrice che sono linearmente indipendenti tra loro**, segue dalle proposizioni appena mostrate che **esse dipendono da $\boldsymbol{c_1} \dots \boldsymbol{c_p}$** e, per il lemma di Steinitz, $\boldsymbol{t \leq s}$. Con ciò si dimostra che **il numero massimo di colonne indipendenti della matrice è *s*** e che individuare in essa un gruppo di colonne che risponde alle due proprietà sopra elencate equivale a determinare quale sia questo numero *s*.

Il numero massimo di colonne indipendenti coincide con il numero massimo di righe indipendenti e viene definito rango della matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})$:

$$0 \leq \rho(A) \leq \min\{m, n\}$$

Tuttavia, **solo in un caso $\boldsymbol{\rho(A) = 0}$, ovvero quando *A* è la matrice nulla**, mentre quando $\boldsymbol{\rho(A) = \min\{m, n\}}$ la matrice si dice che ha **rango massimo**.

In una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$ **si scelgano h righe $\boldsymbol{r_{i_1}} \dots \boldsymbol{r_{i_h}}$ e h colonne $\boldsymbol{c_{j_1}} \dots \boldsymbol{c_{j_h}}$**, un **minore d'ordine *h* di *A*** è una sua **sottomatrice *H* i cui elementi sono quelli che si trovano contemporaneamente**

sulle righe e sulle colonne scelte: la prima riga di *H* sarà costituita dagli elementi della riga r_{i_1} che occupano i posti $j_1 \dots j_h$, la riga h-esima sarà costituita dagli elementi della riga r_{i_h} che occupano i posti $j_1 \dots j_h$:

$$H = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_h} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & \dots & a_{i_h j_h} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, scegliendo le righe 1 e 3 e le colonne 4 e 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Si fissi una riga $\boldsymbol{r_i}$ con $\boldsymbol{i \neq i_1 \dots i_h}$ e una colonna $\boldsymbol{c_j}$ con $\boldsymbol{j \neq j_1 \dots j_h}$ della matrice *A*, si parla di **orlato del minore *H*** facendo riferimento al **minore $\boldsymbol{H_{ij}}$ d'ordine $\boldsymbol{h+1}$ ottenuto scegliendo le righe $\boldsymbol{r_{i_1} \dots r_{i_h}, r_i}$ e le colonne $\boldsymbol{c_{j_1} \dots c_{j_h}, c_j}$** della matrice A:

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & \dots & a_{i_h j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Riprendendo l'esempio precedente e scegliendo la riga 2 e la colonna 1:

$$H_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ENUNCIATO TEOREMA DEGLI ORLATI

Ipotesi:

$\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$

$\forall H$: è un minore di ordine *h* di *A* ottenuto scegliendo le righe $r_{i_1} \dots r_{i_h}$ e le colonne $c_{j_1} \dots c_{j_h}$

$\det H \neq 0 \wedge \det H_{ij} = 0, \forall i \neq i_1 \dots i_h, j \neq j_1 \dots j_h$

Tesi:

Le righe $r_{i_1} \dots r_{i_h}$ sono linearmente indipendenti ed ogni altra riga è loro combinazione lineare, le colonne $c_{j_1} \dots c_{j_h}$ sono linearmente indipendenti ed ogni altra colonna è loro combinazione lineare e $\rho(A) = h$.

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Un **sistema di equazioni lineari** è un sistema **costituito da *m* equazioni in *n* incognite dove i coefficienti $\boldsymbol{a_{ij}}$ e $\boldsymbol{c_i}$ sono elementi di un dato campo *K***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Questo tipo di sistema può essere scritto in **forma matriciale**:

$$AX = C$$

Dove **A (la matrice dei coefficienti), X (la colonna delle incognite) e C (la colonna dei termini noti)** si configurano come:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(K)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m,1}(K)$$

Dato un sistema di equazioni lineari $S: AX = C$, una sua **soluzione è un vettore** $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y_1} \ldots \boldsymbol{y_n}) \in \mathbb{M}_{1,n}(K)$ tale che $AY = C$, cioè:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = c_m \end{cases}$$

Quando un sistema di questo tipo ha **almeno una soluzion**e è detto **compatibile**, mentre se **non ha alcuna soluzione** è **incompatibile**.

Siano considerati, **nell'ambito di un sistema di equazioni lineari**, le due **matrici**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m,(n+1)}(K)$$

Dove ***A* è detta matrice incompleta**, ovvero la **matrice dei coefficienti**, e ***A'* matrice completa**, **ottenuta dalla matrice incompleta con l'aggiunta della colonna dei termini noti**.

Il sistema *S* in considerazione può essere espresso **in forma vettoriale** considerando le ***n*** **colonne della matrice A**:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \to A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^1 x_1 + A^2 x_2 + \cdots + A^n x_n = C$$

Si può affermare che **se $\boldsymbol{Y = (y_1 \dots y_n)}$ è una soluzione del sistema**, allora **il vettore *C* dei termini noti è una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{A^1, A^2, \dots, A^n}$**; quindi, **il sistema $\boldsymbol{S}$ ha soluzioni se e soltanto se il vettore *C* dei termini noti si può ottenere come combinazione lineare di tali vettori colonna**.

Un sistema di equazioni lineari ha **tante soluzioni quante sono tali combinazioni lineari**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ROUCHÈ-CAPELLI

Ipotesi:

$$\forall S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Tesi:

S ha soluzioni $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A')$

Dimostrazione:

Si considerino le due implicazioni:

- $\rho(A) = \rho(A') = p \Longrightarrow S$ ha soluzioni

Siano $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_p}$ le p colonne indipendenti della matrice *A*. Tali colonne sono anche colonne indipendenti della matrice *A*' e, dato che $\rho(A') = p$, sono di numero massimo. Ciò significa che ogni altra colonna di *A'* è combinazione lineare delle colonne prese in esame, in particolare la colonna dei termini noti, C; questa sarà dipendente anche da tutte le colonne di *A*, pertanto il sistema *S* ammette soluzioni.

- S ha soluzioni $\Longrightarrow \rho(A) = \rho(A')$

Supponendo $\rho(A) = p$, siano $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_p}$ le p colonne indipendenti della matrice *A* tali che ogni altra colonna della stessa matrice è una loro combinazione lineare. Poiché la matrice *A'* è costituita dalle colonne della matrice *A* con l'aggiunta della colonna dei termini noti, una qualunque colonna di *A'*, che non sia la colonna *C*, dipende da $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_p}$ perché è anche una colonna di *A*, mentre *C* dipende a sua volta da esse per l'ipotesi di esistenza delle soluzioni. Dunque, ogni colonna della matrice *A'* dipende linearmente dalle colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_p}$ e, dato che sono colonne indipendenti di *A*, sono indipendenti anche in *A'*. Si può quindi concludere che il rango delle due matrici coincida, cioè $\rho(A) = \rho(A') = p$

CVD

Si consideri il **sistema di equazioni lineari costituito da *n* equazioni in *n* incognite e le relative matrici incompleta e completa di rango $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho'}$**:

$$A \in M_n(K)$$

$$A' \in \mathbb{M}_{n,(n+1)}(K)$$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

Se risulta **$\det A \neq 0$ il sistema ha soluzione**, dal momento in cui $\boldsymbol{\rho = \rho' = n}$ (grazie al teorema di Rouchè-Capelli); in particolare, **il sistema ha una sola soluzione**. Infatti, scrivendo il sistema in forma matriciale $AX = C$, nell'ipotesi di $\det A \neq 0$, **la matrice *A* ammette inversa $\boldsymbol{A^{-1}}$**; dunque:

$$X = CA^{-1}$$

La matrice **$\boldsymbol{A^{-1}}$ ha nella riga i-esima i complementi algebrici degli elementi della i-esima colonna di *A*, divisi ciascuno per $\boldsymbol{\det A}$.** Esplicitando la forma matriciale ottenuta dalla matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Segue, di conseguenza:

$$\forall i = 1, \ldots, n \; x_i = \frac{A_{1i}c_1 + \cdots + A_{ni}c_n}{\det A}$$

Si indichi con **$\boldsymbol{B^i}$ la matrice che si ottiene dalla matrice *A* sostituendo la sua i-esima colonna con la colonna dei termini noti**:

$$B^i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & c_1 & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & c_n & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le matrici **$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B^i}$ differiscono solo nella i-esima colonna**, quindi **i complementi algebrici** degli elementi dell'i-esima colonna di B^i saranno **uguali** agli omonimi di *A*. Ne segue che al numeratore del rapporto rilevato ciascun c_i dell'i-esima colonna di B^i è moltiplicato per il suo complemento algebrico, quindi **il numeratore stesso è $\boldsymbol{\det B^i}$**, per lo sviluppo di Laplace. Segue la definizione di Regola di Cramer.

ENUNCIATO REGOLA DI CRAMER

Ipotesi:

$\forall S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$ è un sistema di *n* equazioni in *n* incognite

$\det A \neq 0$

Tesi:

Il sistema ha una sola soluzione $Y = (y_1 \dots y_n): y_i = \frac{\det B^i}{\det A}, \forall i \in [1, n]$, indicando con B^i la matrice che si ottiene dalla matrice *A* sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti.

Sia considerato il seguente **sistema di equazioni lineari**:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha = 0 \end{cases}$$

Si supponga che **una delle equazioni di *S* sia una combinazione lineare di tutte le altre**:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha \\ &\quad = \lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1) + \dots \\ &\quad + \lambda_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m) \end{aligned}$$

Si consideri il **sistema ottenuto dalla rimozione di questa equazione da *S***:

$$S': \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \end{cases}$$

Poiché l'equazione rimossa è combinazione lineare di tutte le equazioni di *S'*, allora **$(y_1 \dots y_n)$ è soluzione di *S* $\Leftrightarrow$ $(y_1 \dots y_n)$ è soluzione di *S'***.

Per **determinare le soluzioni di un sistema *S* compatibile**, ci si può limitare a **considerare solo le sue equazioni indipendenti e tali che ogni altra equazione sia una loro combinazione lineare**, proprio come fatto nel caso precedente. Sia assegnato un **sistema compatibile**:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m = 0 \end{cases}$$

E siano ***A* e *A'*, rispettivamente, la matrice incompleta e completa del sistema**; poiché *S* è compatibile, come conseguenza del teorema di Rouchè-Capelli, le due matrici hanno lo **stesso rango** ρ. Se ***H* è la sottomatrice quadrata di ordine ρ di *A* con determinante non nullo** (ma con tutti i suoi orlati aventi determinante nullo), allora **le ρ righe di *A* coinvolte nella formazione di *H* sono un sistema massimo di righe indipendenti**; si può osservare come le stesse **costituiscono anche nella matrice *A'* un sistema massimo di righe indipendenti**. In conclusione, **le equazioni corrispondenti a tali righe sono indipendenti ed ogni altra equazione è una loro combinazione lineare**.

Si prendano in considerazione **tre casi**:

1. $m = n \wedge \det A = 0$

Il rango ρ di *A* è minore di *n* e quindi si hanno ρ equazioni indipendenti in *n* incognite, con $\rho < n$.

2. $m > n$

Poiché il rango di *A* esprime il massimo numero di colonne indipendenti risulta $\rho \leq n$, ovvero:

- $\rho = n$, segue dalla regola di Cramer;
- $\rho < n$, per il quale si hanno ρ equazioni indipendenti in *n* incognite;

3. $m < n$

Poiché il rango di *A* esprime il massimo numero di righe indipendenti risulta $\rho \leq m < n$, quindi si hanno ρ equazioni indipendenti in *n* incognite, con $\rho < n$.

In conclusione, **nel sistema *S* di *m* equazioni in *n* incognite vi sono $\boldsymbol{\rho}$ equazioni indipendenti, con $\boldsymbol{\rho \leq n}$**.

Si consideri un **sistema compatibile con $\boldsymbol{\rho}$ equazioni indipendenti ed *n* incognite**, con $\rho < n$:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \dots \\ a_{\rho 1}x_1 + a_{\rho 2}x_2 + \cdots + a_{\rho n}x_n + c_\rho = 0 \end{cases}$$

La **matrice incompleta** del sistema ha **rango $\boldsymbol{\rho}$**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho 1} & \dots & a_{\rho n} \end{pmatrix}$$

Vi è una **sottomatrice quadrata *H* di ordine $\boldsymbol{\rho}$, con $\boldsymbol{\det H \neq 0}$, corrispondente a $\boldsymbol{\rho}$ colonne indipendenti di *A*** (per semplicità composta dalle prime ρ colonne di *A*):

$$A = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho 1} & \dots & a_{\rho\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1(\rho+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho(\rho+1)} & \dots & a_{\rho n} \end{bmatrix} \right)$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho 1} & \dots & a_{\rho\rho} \end{pmatrix}$$

Si assegnino alle incognite $(x_{\rho+1} \dots x_n)$ i valori $(y_{\rho+1} \dots y_n)$, il sistema ***S* assume la forma**:

$$S': \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1\rho}x_\rho = -a_{1(\rho+1)}y_{\rho+1} \dots - a_{1n}y_n - c_1 \\ \dots \\ a_{\rho 1}x_1 + \cdots a_{\rho\rho}x_\rho = -a_{\rho(\rho+1)}y_{\rho+1} \dots - a_{\rho n}y_n - c_\rho \end{cases}$$

Si può notare che **$\boldsymbol{S'}$ è costituito da $\boldsymbol{\rho}$ equazioni in $\boldsymbol{\rho}$ incognite e con la matrice *H* dei suoi coefficienti avente $\boldsymbol{\det H \neq 0}$**. Per la regola di Cramer, **il sistema ha una sola soluzione** $(y_1 \dots y_\rho)$; di conseguenza, **la n-upla $\boldsymbol{\underline{\zeta} = (y_1 \dots y_\rho, y_{\rho+1} \dots y_n)}$** è una **soluzione** del sistema *S*. **I primi $\boldsymbol{\rho}$ valori della soluzione $\boldsymbol{\underline{\zeta}}$ sono determinati dai valori che $\boldsymbol{\underline{\zeta}}$ ha nei suoi ultimi $\boldsymbol{n - \rho}$** posti, ovvero $(y_{\rho+1} \dots y_n)$; ciò significa che **due soluzioni $\boldsymbol{\underline{\zeta}}$ e $\boldsymbol{\underline{\eta}}$ che hanno eguali valori di posto $\boldsymbol{\rho + 1 \dots n}$ coincidono**.

Indicando con **Σ l'insieme delle soluzioni del sistema *S***, la seguente **funzione** è **biettiva**:

$$f: (y_{\rho+1} \dots y_n) \in K^{n-\rho} \to (y_1 \dots y_\rho, y_{\rho+1} \dots y_n) \in \Sigma$$

Grazie a questa proprietà si può affermare che $|\boldsymbol{K^{n-\rho}}| = |\boldsymbol{\Sigma}|$, che equivale a dire che **le soluzioni del sistema *S* sono tante quante le $\boldsymbol{n-\rho}$-uple ordinate di elementi di *K***; Se ***K* è infinito**, si dice che il sistema *S* ha $\infty^{\boldsymbol{n-\rho}}$ **soluzioni**.

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un **sistema di equazioni lineari** viene detto **omogeneo** quando **i termini noti delle equazioni che lo compongono sono tutti nulli**; segue dalla definizione che **esiste almeno una soluzione del sistema**, cioè la **soluzione banale** $(\mathbf{0} \dots \mathbf{0})$, inoltre si può affermare che **le matrici *A* e *A'* hanno lo stesso rango $\boldsymbol{\rho}$** come conseguenza del teorema di Rouchè-Capelli. Nel momento in cui $\boldsymbol{\rho = n}$ **il sistema ammette una sola soluzione**, quella banale, mentre se $\boldsymbol{\rho < n}$ **il sistema ammette $|\boldsymbol{K^{n-\rho}}|$ soluzioni**, denotando con **Σ l'insieme di** queste **soluzioni**.

DIMOSTRAZIONE Σ COME SOTTOSPAZIO DI K^n DI DIMENSIONE $\boldsymbol{n-\rho}$

Ipotesi:

$\forall S$: è un sistema di equazioni lineari omogeneo

Σ è l'insieme di soluzioni di *S*

Tesi:

Σ è un sottospazio di K^n di dimensione $n - \rho$

Dimostrazione:

Il sistema in forma matriciale è:

$$AX = \underline{0}$$

Mentre Σ si configura come:

$$\Sigma = \{Y \in K^n : AY = \underline{0}\}$$

Per dimostrare la tesi si dimostra la definizione di sottospazio:

1. $\forall\, Y, Z \in \Sigma : AY = AZ = \underline{0}, Y + Z \in \Sigma$

Cioè:

$$A(Y + Z) = AY + AZ = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

2. $\forall\, \lambda \in K\ \forall Y \in \Sigma, \lambda Y \in \Sigma$

$$A(\lambda Y) = \lambda(AY) = \lambda\underline{0} = \underline{0}$$

Poiché sono verificate le due proprietà caratteristiche di un sottospazio è possibile affermare che Σ è un sottospazio di K^n.

Dimostrata la proprietà di sottospazio non resta altro che determinare la dimensione di Σ e verificare che sia quella ipotizzata. Poiché la matrice *A* ha rango ρ, si suppone che le prime ρ righe e ρ colonne siano indipendenti, quindi il seguente sistema omogeneo è equivalente a *S*:

$$S': \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{\rho 1}x_1 + a_{\rho 2}x_2 + \cdots + a_{\rho n}x_n = 0 \end{cases}$$

Ogni soluzione di *S'* è determinata sulla base dei valori $y_{\rho+1} \dots y_n$ assegnate alle incognite $x_{\rho+1} \dots x_n$, allora si ha:

- $\zeta_{\rho+1} = (\alpha_1 \dots \alpha_\rho, 1,0, \dots, 0)$ la soluzione di *S'* ottenuta associando alle incognite $x_{\rho+1} \dots x_n$ i valori $(1,0, \dots, 0)$;
- $\zeta_{\rho+2} = (\beta_1 \dots \beta_\rho, 0,1, \dots, 0)$ la soluzione di *S'* ottenuta associando alle incognite $x_{\rho+1} \dots x_n$ i valori $(0,1, \dots, 0)$;
- …
- $\zeta_n = (\gamma_1 \dots \gamma_\rho, 0,0, \dots, 1)$ la soluzione di *S'* ottenuta associando alle incognite $x_{\rho+1} \dots x_n$ i valori $(0,0, \dots, 1)$;

Il sistema di vettori $\{\zeta_{\rho+1} \dots \zeta_n\}$ è un sistema di $n - \rho$ vettori linearmente indipendenti, in quanto sono indipendenti i valori numerici:

$$(1,0, \dots, 0)(0,1, \dots, 0) \dots (0,0, \dots, 1)$$

Sia considerata la soluzione del sistema *S*, $Y = (y_1 \dots y_\rho, y_{\rho+1} \dots y_n) \in \Sigma$. Poiché Σ è un sottospazio, risulta anche:

$$y_{\rho+1}\zeta_{\rho+1} \dots y_n\zeta_n \in \Sigma$$

Ma anche:

$$\zeta = y_{\rho+1}\zeta_{\rho+1} + y_{\rho+2}\zeta_{\rho+2} + \cdots + y_n\zeta_n \in \Sigma$$

Questa soluzione è così caratterizzata:

$$\zeta = (\dots, y_{\rho+1} \dots y_n)$$

Che, per quanto detto in precedenza, equivale a dire $\zeta = Y$. Da ciò si può concludere che $\{\zeta_{\rho+1} \dots \zeta_n\}$ è un sistema di $n - \rho$ vettori linearmente indipendenti ed un sistema di generatori per lo spazio Σ, ovvero una sua base, quindi:

$$\dim \Sigma = n - \rho$$

CVD

Prendendo in considerazione un **sistema $\boldsymbol{S}$ di equazioni lineari non omogeneo** e **ponendo le costanti a zero** si ottiene il **sistema $\boldsymbol{S_0}$ di equazioni lineari omogeneo associato**:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

$$S_0:\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = 0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE SOLUZIONI DI *S* COME SOMMA DELLE SOLUZIONI DI $\boldsymbol{S_0}$

Ipotesi:

$\forall S$: è un sistema di equazioni lineari e S_0 e il sistema omogeneo associato

Tesi:

Tutte soluzioni di *S* si ottengono sommando ad una sua soluzione tutte le soluzioni di S_0

Dimostrazione:

Scrivendo i due sistemi in forma matriciale:

$$AX = C$$

$$AX = \underline{0}$$

Si indica con Σ l'insieme di soluzioni del sistema *S* e con Σ_0 il sottospazio delle soluzioni del sistema S_0 omogeno associato. Si ha:

$$(\zeta \in \Sigma \Rightarrow A\zeta = C) \wedge \left(\eta \in \Sigma_0 \Rightarrow A\eta = \underline{0}\right) \Rightarrow A(\zeta + \eta) = A\zeta + A\eta = C + \underline{0} = C \Rightarrow \zeta + \eta \in \Sigma$$

Con questo risultato si dimostra che sommando ad una soluzione di *S* una soluzione di S_0 si ottiene ancora una soluzione di *S*. Inoltre:

$$(\zeta \in \Sigma \Rightarrow A\zeta = C) \wedge (\zeta' \in \Sigma \Rightarrow A\zeta' = C) \Rightarrow A(\zeta' - \zeta) = A\zeta' - A\zeta = C - C = \underline{0} \Rightarrow \zeta' - \zeta \in \Sigma_0$$

Con questo risultato si dimostra che la soluzione $\eta = \zeta' - \zeta$ sommata a ζ fornisce la soluzione ζ'. Concludendo, si può affermare che sommando a $\zeta \in \Sigma$ tutte le soluzioni $\eta \in \Sigma_0$ si ottengono tutte le soluzioni di *S*.

CVD

APPLICAZIONI LINEARI

Siano assegnati **due spazi vettoriali, *V* e *W*, su un sostegno *K***, si definisce **applicazione lineare una funzione *f* tra i due spazi** che rispetti le seguenti proprietà:

$$f: V \to W$$

$$v \to w = f(v)$$

1. $\forall u, v \in V, \boldsymbol{f(u+v) = f(u) + f(v)}$
2. $\forall a \in K, \forall u \in V, \boldsymbol{f(au) = af(u)}$

Che possono essere riassunte in **un'unica proprietà**:

$$\forall u, v \in V \ \forall a, b \in K, f(au + bv) = af(u) + bf(v)$$

DIMOSTRAZIONE LINEARITÀ DI UN'APPLICAZIONE CON I VETTORI NULLI

Ipotesi:

$\forall V, W$: sono spazi vettoriali definiti sul sostegno *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Siano $\underline{0}_V$ e $\underline{0}_W$ i vettori nulli di *V* e *W*

Tesi:

$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

Dimostrazione:

Sia considerato il vettore $v \in V$, allora:

$$f(v) = f(v + \underline{0}_V) = f(v) + f(\underline{0}_V)$$

Ciò implica che:

$$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

CVD

Per comodità si indicheranno i vettori nulli dei rispettivi spazi vettoriali con una nomenclatura comune:

$$\underline{0}_V = \underline{0}_W = \underline{0}$$

Considerata un'applicazione lineare *f* tra due spazi vettoriali:

- Se f è **iniettiva**, è chiamata **monomorfismo**;
- Se f è **suriettiva**, è chiamata **epimorfismo**;
- Se f è **biettiva**, è chiamata **isomorfismo**.

Sia V **uno spazio vettoriale sul campo K di dimensione n** e si consideri una sua **base ordinata** (cioè un riferimento):

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

Per definizione, per ogni vettore $v \in V$:

$$\exists!\, a_1, \dots, a_n: v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$$

La n-upla di scalari $(\boldsymbol{a_1} \dots \boldsymbol{a_n}) \in \boldsymbol{K^n}$, univocamente determinata per esprimere la combinazione lineare del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$, **è detta n-upla delle coordinate del vettore rispetto alla base assegnata**. Si può costruire, quindi, la seguente funzione:

$$f: V \to K^n$$

$$f: v \to (a_1 \dots a_n)$$

Come conseguenze dell'unicità di questa n-upla, **la funzione è biettiva**; inoltre:

$$\begin{cases} f(v) = (a_1 \dots a_n) \\ f(w) = (b_1 \dots b_n) \end{cases} \Rightarrow f(v) + f(w) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$$

$$v + w = (a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) + (b_1u_1 + \cdots + b_nu_n) = (a_1 + b_1)u_1 + \cdots + (a_n + b_n)u_n$$

Di conseguenza:

$$f(v + w) = f(v) + f(w)$$

E sia considerato lo scalare $\alpha \in K$:

$$\alpha v = \alpha a_1u_1 + \cdots \alpha a_nu_n \wedge \alpha f(v) = (\alpha a_1 \dots \alpha a_n) \Rightarrow f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

In conclusione, **si può affermare che la funzione f è un isomorfismo**, chiamato **coordinazione dello spazio vettoriale V nel riferimento fissato $\mathcal{B}$**. In generale, **ogni spazio vettoriale V sul campo K di dimensione finita $\dim V = n$ è isomorfo allo spazio vettoriale numerico K^n**.

Si considerino gli **spazi vettoriali V (di dimensione n), W (di dimensione m), e Z (di dimensione r) e le applicazioni lineari $f: V \to W$ e $g: W \to Z$**, l'applicazione composta di g e f è anch'essa un'applicazione lineare $\forall v \in V$, infatti:

$$(g \circ f)(v) = g\big(f(v)\big)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, (g \circ f)(v_1 + v_2) = g\big(f(v_1 + v_2)\big) = g\big(f(v_1) + f(v_2)\big) = g\big(f(v_1)\big) + g\big(f(v_2)\big) \\ = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)$$

$$\forall a \in K, \forall v \in V, (g \circ f)(av) = g\big(f(av)\big) = g(a\big(f(v)\big) = ag\big(f(v)\big) = a(g \circ f)(v)$$

Con questo ragionamento si può concludere che **la composizione di applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DETERMINAZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K* di dimensione *n*

$\forall \mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$: è una base dello spazio vettoriale *V*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K* di dimensione *m*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

f è determinata quando si conoscono i valori che assume sulla base $\mathcal{B}$ di *V*, ovvero se sono noti $f(e_1) \dots f(e_n)$

Dimostrazione:

Preso un generico vettore $v \in V$, poiché $\mathcal{B}$ è una sua base:

$$\exists!\, a_1 \dots a_n \in K^n : v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Sfruttando la definizione di applicazione lineare:

$$f(v) = f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 f(e_1) + \dots + a_n f(e_n)$$

Pertanto, per conoscere il valore dell'applicazione lineare in qualsiasi elemento di *V*, basta calcolarne il valore di *f* in ogni elemento della base $\mathcal{B}$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DIPENDENZA DEI VETTORI ATTRAVERSO L'APPLICAZIONE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

f trasforma i vettori dipendenti di *V* in vettori dipendenti di *W*

Dimostrazione:

Considerati *h* vettori dipendenti di *V*, $v_1, \dots, v_h$,per i quali esistono degli scalari $a_1, \dots, a_h \in K$ tali che:

$$a_1v_1 + \cdots + a_hv_h = \underline{0}$$

Applicando la funzione *f* ad entrambi i membri:

$$f(a_1v_1 + \cdots + a_hv_h) = f(\underline{0})$$

$$a_1f(v_1) + \cdots + a_hf(v_h) = \underline{0}$$

Che equivale a dire che esiste una combinazione lineare dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_h) \in W$ a scalari non tutti nulli che esprime il vettore nullo $\underline{0}$; di conseguenza tali vettori sono linearmente dipendenti in *W*.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INDIPENDENZA DEI VETTORI ATTRAVERSO UN MONOMORFISMO

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare monomorfica

Tesi:

f trasforma i vettori indipendenti di *V* in vettori indipendenti di *W*

Dimostrazione:

Considerati *h* vettori linearmente indipendenti di *V*, $v_1, \dots, v_h$, si vuole dimostrare che le loro immagini attraverso *f* siano vettori linearmente indipendenti di *W*; in particolare, si vuole dimostrare che la seguente combinazione lineare è valida solo se a scalari tutti nulli:

$$a_1f(v_1) + \cdots + a_hf(v_h) = \underline{0}$$

Sfruttando la definizione di applicazione lineare:

$$a_1f(v_1) + \cdots + a_hf(v_h) = \underline{0} = f(\underline{0}) \Leftrightarrow f(a_1v_1 + \cdots + a_hv_h) = f(\underline{0})$$

Poiché l'applicazione lineare è un monomorfismo, essa è iniettiva e quindi:

$$a_1v_1 + \cdots + a_hv_h = \underline{0}$$

Ma poiché i vettori $v_1, \dots, v_h$ sono linearmente indipendenti, segue che gli scalari $a_1, \dots, a_h$ sono tutti nulli.

CVD

Il teorema porta con sé un **corollario**, secondo cui **un'applicazione isomorfa trasforma tutti i vettori linearmente dipendenti di V in vettori linearmente dipendenti di W e tutti i vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W**, con la sua inversa.

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare tra i due spazi vettoriali V e W, allora si possono definire:

- **Nucleo** dell'applicazione ($\ker f$) il sottoinsieme di V composto dai vettori le cui immagini sono il vettore nullo

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = \underline{0}\} \subseteq V$$

- **Immagine** dell'applicazione ($\Im f$) il sottoinsieme di W composto dai vettori che hanno una controimmagine in V

$$\Im f = \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$$

Si può facilmente provare che questi due insiemi sono **sottospazi dei rispettivi spazi vettoriali**; inoltre, poiché $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$, si può affermare che $\underline{0} \in \ker f$ e $\underline{0} \in \Im f$.

DIMOSTRAZIONE CARATTERIZZAZIONE DEL MONOMORFISMO

Ipotesi:

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

f è un monomorfismo $\Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$

Dimostrazione:

Si considerino le seguenti implicazioni:

- f è un monomorfismo $\Rightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$

Se $v \in V - \{\underline{0}\}$ è un vettore non nullo, allora per l'iniettività si ha $f(v) \neq f(\underline{0}) = \underline{0}$. Di conseguenza l'unico vettore presente nel nucleo dell'applicazione è il vettore nullo.

- $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ è un monomorfismo

Siano considerati due vettori $v, v' \in V : f(v) = f(v')$, si deve dimostrare che i due vettori devono necessariamente coincidere:

$$f(v) - f(v') = \underline{0} \Leftrightarrow f(v - v') = \underline{0}$$

Che equivale a dire $v - v' \in \ker f$, ma poiché nel nucleo c'è solo il vettore nullo:

$$v - v' = \underline{0}$$

Ovvero:

$$v = v'$$

CVD

DIMOSTRAZIONE CARATTERIZZAZIONE DELL'EPIMORFISMO

Ipotesi:

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

f è un epimorfismo $\Leftrightarrow \Im f = W$

Dimostrazione:

Si considerino le seguenti implicazioni:

- f è un epimorfismo $\Rightarrow \Im f = W$

Poiché per definizione $\Im f \subseteq W$, bisogna solo dimostrare che $W \subseteq \Im f$. Considerato un vettore $w \in W$, per definizione di suriettività esiste un vettore $v \in V: f(v) = w$, cioè $w \in \Im f$; poiché la definizione di suriettività si estende a tutto lo spazio vettoriale:

$$W \subseteq \Im f$$

- $\Im f = W \Rightarrow f$ è un epimorfismo

Sia considerato un vettore $w \in W$, bisogna dimostrare che esiste un vettore $v \in V: f(v) = w$, ma per ipotesi $\Im f = W$ quindi esisterà sempre un vettore di questo tipo e la funione può essere detta suriettiva, ovvero epimorfa.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL SISTEMA DI GENERATORI DA UN'APPLICAZIONE LINEARE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$e_1 \dots e_n$ è un sistema di generatori di *V*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

$f(e_1) \dots f(e_n)$ è un sistema di generatori di $\Im f$

Dimostrazione:

Si consideri un vettore $w \in \Im f$ per cui esiste un vettore $v \in V: f(v) = w$, ma poiché $V = \langle e_1 \dots e_n \rangle$:

$$\exists!\, a_1, \dots, a_n \in K: v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

$$w = f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$$

Il che significa che ogni vettore $w \in \Im f$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $f(e_1) \dots f(e_n)$

CVD

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO DELLA TRASFORMAZIONE DELLE BASI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare isomorfica

$\forall \mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$: è una base di *V*

Tesi:

$\mathcal{B}' = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ è una base di *W*

Dimostrazione:

Per il corollario del teorema di indipendenza, un isomorfismo trasforma un sistema di vettori linearmente indipendenti di V in un sistema di vettori linearmente indipendenti di *W*, quindi $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, per il teorema appena dimostrato *f* trasforma un sistema di generatori di *V* in un sistema di generatori per $\Im f$, il quale, poiché *f* è un caso particolare di epimorfismo, coincide con *W*. Di conseguenza $f(e_1), \dots, f(e_n)$ è un sistema di generatori di *W*.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K* di dimensione $\dim V = n$

$\forall W$: è uno spazio vettoriale sul campo *K*

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

Tesi:

$\dim(\ker f) + \dim(\Im f) = n$

Dimostrazione:

Se il nucleo dell'applicazione fosse un sottospazio banale di *V* si avrebbe:

- $\ker f = \{\underline{0}\}$, quindi $\dim(\ker f) = 0 \wedge \dim(\Im f) = n$;
- $\ker f = V$, quindi ogni vettore $v \in V$ ha immagine nulla $f(v) = \underline{0}$, ovvero $\Im f = \{\underline{0}\}$, che risulta in $\dim(\ker f) = n \wedge \dim(\Im f) = 0$.

In entrambi i casi, segue la validità della tesi. Si supponga che $\ker f$ sia un sottospazio proprio di *V*, $\ker f < V$, e che abbia dimensione $\ker f = m < n$; si consideri una sua base:

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \{e_1, \dots, e_m\}$$

E la si completi ad una base di *V* aggiungendo $n - m$ vettori:

$$\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots, e_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

Bisogna dimostrare che $\mathcal{B}_{\Im f} = \{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base per $\Im f$, proseguendo per i seguenti step:

- Lineare indipendenza

Si consideri la combinazione lineare:

$$a_{m+1} f(v_{m+1}) + \dots + a_n f(v_n) = \underline{0}$$

Sfruttando la linearità dell'applicazione segue:

$$f(a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n) = \underline{0} \Rightarrow a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n \in \ker f$$

Ma poiché $\mathcal{B}_{\ker f}$ è una base, quindi in particolare un sistema di generatori, $a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $e_1, \dots, e_m$:

$$a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$$

$$a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n - a_1 e_1 - \dots - a_m e_m = \underline{0}$$

Ma poiché $\mathcal{B}_V$ è una base, quindi in particolare un sistema di vettori linearmente indipendenti:

$$a_1 = \dots = a_n = a_{m+1} = \dots = a_m = 0$$

Dimostrando che $\mathcal{B}_{\Im f}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

- Sistema di generatori

Si consideri un vettore $w \in \Im f$ per il quale esiste un vettore $v \in V: f(v) = w$; poiché $\mathcal{B}_V$ è una base per *V*, il vettore *v* è una combinazione lineare dei vettori $e_1, \dots, e_m, v_{m+1}, \dots, v_n$:

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m + a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n$$

Sfruttando la linearità dell'applicazione e tenendo in considerazione che $e_1, \dots, e_m \in \ker f$:

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m + a_{m+1} v_{m+1} + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 f(e_1) + \cdots + a_m f(e_m) + a_{m+1} f(v_{m+1}) + \cdots + a_n f(v_n) \\ &= a_{m+1} f(v_{m+1}) + \cdots + a_n f(v_n) \end{aligned}$$

Infatti $f(e_1) = f(e_m) = \underline{0}$; in conclusione, i vettori $f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\Im f$.

Si può, quindi, affermare che $\mathcal{B}_{\Im f} = \{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base per $\Im f$, da cui risulta:

$$\dim(\Im f) = n - m = n - \dim(\ker f) \Leftrightarrow \dim(\Im f) + \dim(\ker f) = n$$

CVD

DIMOSTRAZIONE UGUAGLIANZA DELLE DIMENSIONI DI DUE CAMPI ISOMORFI

Ipotesi:

$\forall V, W$: sono spazi vettoriali sul campo K

Tesi:

V e K sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Dimostrazione:

Siano considerate le due implicazioni:

- V e K sono isomorfi $\Rightarrow \dim V = \dim W$

Poiché i due spazi sono isomorfi, esiste un isomorfismo tra di essi, $f: V \to W$, ma per il corollario della trasformazione delle basi una base di V si trasforma in una base di W, comportando che $\dim V = \dim W$.

- $\dim V = \dim W \Rightarrow V$ e K sono isomorfi

Siano considerate le due basi di V e di W:

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}, \mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Si considerino la coordinazione dello spazio V nel riferimento fissato $\mathcal{B}_V$ e la coordinazione dello spazio W nel riferimento fissato $\mathcal{B}_W$:

$$f: V \to K^n$$

$$g: W \to K^n$$

Considerando l'applicazione inversa di g, $g^{-1}: K^n \to W$ (che è ancora un isomorfismo), e componendo le due applicazioni:

$$g^{-1} \circ f: V \to W$$

La composizione di isomorfismi è ancora un isomorfismo, quindi i due spazi vettoriali *V* e *W* risultano isomorfi.

CVD

Viene definito **endomorfismo** un'**applicazione lineare** del tipo $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$, dove ***V* è uno spazio vettoriale sul campo *K* e di dimensione** $\dim \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$. Assegnata una **base per *V*,** $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$, per il teorema di determinazione di un'applicazione lineare **si determina l'endomorfismo *f* se si conoscono le rispettive immagini dei vettori della base**, ovvero $f(u_1), \dots, f(u_n)$; per definizione di base si ha:

$$f(u_1) = a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n$$

$$f(u_n) = a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n$$

Disponendo i coefficienti ottenuti lungo le colonne di una matrice:

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice $\boldsymbol{A_f}$ **è chiamata matrice associata all'endomorfismo *f***; assegnata una **base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dello spazio vettoriale *V* e note le rispettive immagini** $\boldsymbol{f(u_1)}, \dots, \boldsymbol{f(u_n)}$, allora **la matrice associata $\boldsymbol{A_f}$ resta determinata**, **viceversa** assegnata una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale *V* e nota la matrice associata A_f, restano determinate le immagini $f(u_1), \dots, f(u_n)$ (ovvero l'endomorfismo *f*). Un discorso **analogo** può essere fatto con **un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale *V* di dimensione *n* in uno spazio vettoriale *W* di dimensione *m***; infatti assegnando due basi di *V* e *W* rispettivamente, è possibile associare all'applicazione una matrice di tipo $m \times n$.

Si considerino una **matrice quadrata di ordine *n*** e lo **spazio vettoriale numerico $\boldsymbol{K^n}$ sul campo *K*** di dimensione *n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si definisca l'**applicazione lineare *F*: $\boldsymbol{K^n} \rightarrow \boldsymbol{K^n}$** come segue:

$$F(v) = Av, \forall v \in K^n$$

Dove $\boldsymbol{Av}$ **è il prodotto righe per colonne tra la matrice *A* e il vettore *v***. Si considerino **i vettori della base canonica di $\boldsymbol{K^n}$**:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinando **le rispettive immagini dei vettori $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ attraverso l'applicazione *F* si ottiene**:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a^1, F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a^2, \dots, F(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a^n$$

Dove $\boldsymbol{a^1}, \dots, \boldsymbol{a^n}$ **sono i vettori colonna della matrice** A. Poiché i vettori $e_1, \dots, e_n$ costituiscono un **sistema di generatori**, allora, grazie al teorema del sistema di generatori da un'applicazione lineare, **le rispettive immagini $\boldsymbol{a^1}, \dots, \boldsymbol{a^n}$ costituiscono un sistema di generatori per $\boldsymbol{\Im F}$**. Ne consegue:

$$\rho(A) = p \Longrightarrow \dim(\Im F) = p \wedge \dim(\ker F) = n - p$$

$$\rho(A) = n \Longrightarrow F \text{ è un isomorfismo}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale sul campo *K* di dimensione *n*

$\forall \mathcal{B}$: è una base di *V*

$\forall F: K^n \to K^n$ la funzione definita $F(v) = Av, \forall v \in K$ e dove $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

Tesi:

La funzione *F* trasforma le coordinate di $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in coordinate di $f(v) \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione:

Siano considerate le coordinate di *v* e le coordinate di $f(v)$:

$$(x_1, \dots, x_n) \wedge (y_1, \dots, y_n)$$

Bisogna dimostrare che:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Siano considerati i vettori della base canonica di K^n:

$$e_1, \dots, e_n$$

In base a quanto detto prima:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a^1, F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a^2, \dots, F(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a^n$$

Ne consegue che:

$$F(v) = \big(F(e_1), \dots, F(e_n)\big)v$$

Questa forma riprende la definizione di matrice associata:

$$f(u_1) = a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n$$

$$f(u_n) = a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n$$

Dalla quale si può validare il teorema

CVD

Un discorso analogo può essere fatto quando si considera **un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale *V* di dimensione *n* in uno *W* di dimensione *m***, avendo la matrice che collega i coefficienti di *v* ai coefficienti di $f(v)$.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELL'ISOMORFISMO DELLA FUNZIONE INVERSA

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$: è una base di *V*

$\forall f: V \to V$: è un isomorfismo

$\forall A$: è la matrice associata all'isomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$

Tesi:

f^{-1} è un isomorfismo e A^{-1} è la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$

Dimostrazione:

Una funzione è isomorfa se è biettiva ma visto che f^{-1} è una funzione inversa, deve necessariamente esserlo.

Poiché *f* è un isomorfismo, la matrice associata non può essere degenere, ovvero $\det A \neq 0$, quindi è invertibile.

CVD

ENUNCIATO TEOREMA DI COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LIEARI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall W$: è uno spazio vettoriale di dimensione *m*

$\forall Z$: è uno spazio vettoriale di dimensione *r*

$\forall \mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$: è una base di V

$\forall \mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$: è una base di W

$\forall \mathcal{B}_Z = \{z_1, \dots, z_n\}$: è una base di Z

$\forall f: V \to W$: è un'applicazione lineare

$\forall g: W \to Z$: è un'applicazione lineare

$\forall A \in M_{m,n}$: è la matrice associata di *f* rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$

$\forall B \in M_{r,m}$: è la matrice associata di *f* rispetto alle basi $\mathcal{B}_W$ e $\mathcal{B}_Z$

Tesi:

La composizione $g \circ f: V \to Z$ è un'applicazione lineare la cui matrice associata è il prodotto tra le matrici BA

PRODOTTO SCALARE

Sia considerato uno **spazio vettoriale *V* di dimensione finita *n*** definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, un **prodotto scalare definito positivo** in *V* è **un'applicazione** del tipo:

$$s: V \times V \to \mathbb{R}$$

Che gode delle seguenti proprietà:

- **Simmetrica**

$$\forall u, v \in V \; s(u, v) = s(v, u)$$

- **Lineare** (si richiede la linearità a sinistra)

$$\forall u, v, w \in V \; \forall a, b \in \mathbb{R} \; s(au + bv, w) = as(u, w) + bs(v, w)$$

- **Definita positiva**

$$s(u, u) \geq 0$$

$$s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \underline{0}$$

Un prodotto scalare di V **soddisfa anche le seguenti proprietà**:

$$\forall u \in V \; s(\underline{0}, u) = 0$$

$$\forall u, v, w \in V \; \forall a, b \in \mathbb{R} \; s(u, av + bw) = as(u, v) + bs(u, w)$$

Siano considerati **due vettori dello spazio vettoriale** $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, il loro **prodotto scalare** sarà:

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

E si può facilmente verificare l'aderenza alle proprietà appena mostrate. Questo tipo di applicazione è un **prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}^n$**, meglio detto come **prodotto scalare euclideo** (o **canonico**); con esso **è possibile definire in ogni spazio vettoriale V un prodotto scalare definito positivo**, infatti considerando uno spazio vettoriale V di dimensione n, una sua base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, due vettori $v, w \in V$ con le loro componenti $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e la coordinazione determinata da tale base $c: V \to \mathbb{R}^n$, si può definire la seguente applicazione:

$$g: V \times V \to \mathbb{R} : g(v, w) = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n = \langle c(v), c(w) \rangle$$

Che può essere considerata un prodotto scalare definito positivo coincidente, in termini di coordinate, con il prodotto scalare euclideo.

Siano considerati uno **spazio vettoriale V di dimensione n, una sua base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, due vettori $v, w \in V$ con le loro componenti $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$** nella base $\mathcal{B}$, la **coordinazione determinata da tale base $c: V \to \mathbb{R}^n$** e un **prodotto scalare definito positivo $s: V \times V \to \mathbb{R}$,** si ha:

$$s(v, w) = s\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j (e_i e_j)$$

Segue che i valori della base $\mathcal{B}$ seguono le seguenti proprietà:

$$s(e_i, e_i) = 1 \; \forall i \in [1, n]$$

$$s(e_i, e_j) = 0 \; \forall i \neq j$$

Allora si ha:

$$s(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle c(v), c(w) \rangle$$

Queste considerazioni **giustificano l'importanza di determinare nello spazio vettoriale V delle basi $\mathcal{B}$ che, rispetto ad un dato prodotto scalare, abbiano le proprietà sopra mostrate**, ma per risolvere questo problema vengono in aiuto delle definizioni.

Si dice che due vettori sono **ortogonali** se il loro **prodotto scalare è nullo**:

$$\forall u, v \in V \; u \perp v \Leftrightarrow s(u, v) = 0$$

Si definisce **norma** del vettore la **grandezza**:

$$\forall v \in V \ \|v\| = \sqrt{s(v,v)}$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato di prodotto scalare euclideo questa grandezza viene descritta come un **numero reale non negativo**:

$$\|v\| = \sqrt{s(v,v)} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Preso in considerazione uno **spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare definito positivo ed un insieme di suoi vettori $\{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$**, tale insieme viene detto **ortonormale** se:

$$s(u_i, u_j) = 0 \ \forall i, j \in [1, n] \wedge i \neq j$$

$$\|u_i\| = 1 \ \forall i \in [1, n]$$

In generale si può mostrare come in uno spazio vettoriale del tipo $\mathbb{R}^n$ dotato di prodotto scalare canonico **la base canonica sia una base ortonormale**. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$, dove le basi canoniche sono $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$:

$$s((1,0), (0,1)) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

DIMOSTRAZIONE LINEARE DIPENDENZA DI UN SISTEMA DI VETTORI A DUE A DUE ORTOGONALI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare definito positivo

$\forall v_1, \dots, v_n \in V : \ v_i \neq \underline{0} \ \wedge$ a due a due ortogonali

Tesi:

$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione:

Supponendo che $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \underline{0}$, per la proprietà di bilinearità del prodotto scalare:

$$\forall j \in [1, n] \ s\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, , v_j\right) = s(\underline{0}, v_j) = a_j s(v_j, v_j) = 0$$

Poiché il prodotto scalare è definito positivo $a_j = 0$ è l'unica soluzione possibile, il che dimostra la lineare indipendenza dei vettori $v_1, \dots, v_n$.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI COSTRUZIONE DI UN VETTORE

Ipotesi:

$\forall W = \{w_1, \dots, w_t\}$: è un sistema di *t* vettori non nulli e a due a due ortogonali, con $t < n$

Tesi:

$\exists w_{t+1}$: è un vettore non nullo ed ortogonale a tutti i vettori di *W*

Dimostrazione:

Sia v_{t+1} un vettore non appartenente allo spazio $V_t = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$ generato dai *t* vettori indipendenti di *W*, allora il vettore w_{t+1} è dato da:

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \frac{s(v_{t+1}, w_1)}{s(w_1, w_1)} w_1 - \dots - \frac{s(v_{t+1}, w_t)}{s(w_t, w_t)} w_t$$

Tale vettore è non nullo, perché v_{t+1} non appartiene a V_t ed è ortogonale perché, $\forall j \in [1, t]$:

$$s(w_{t+1}, w_j) = s(v_{t+1}, w_j) - \frac{s(v_{t+1}, w_j)}{s(w_j, w_j)} s(w_j, w_j) = 0$$

CVD

Dalla proposizione appena dimostrata si può dedurre che **nello spazio vettoriale *V* di dimensione *n* è possibile costruire una base ortogonale**, dalla quale è possibile poi **ricavare una base ortonormale**; sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonale di *V*, il sistema $\{w_1, \dots, w_n\}$ composto dai vettori:

$$w_i = \frac{e_i}{\|e_i\|} \ \forall i \in [1, n]$$

È la **base ortonormale di *V*** in questione.

Si considerino uno **spazio vettoriale *V* dotato di un prodotto scalare definito positivo** e **un sottospazio $W \leq V$**, si definisce **complemento ortogonale di *W* in *V* l'insieme**:

$$W^\perp = \{u \in V : s(u, v) = 0 \ \forall v \in W\}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL COMPLEMENTO ORTOGONALE COME SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Ipotesi:

$\forall V, W : W \leq V$ sono spazi vettoriali, dove in *V* è definito un prodotto scalare definito positivo

Tesi:

$W^{\perp} \leq V$

Dimostrazione:

Siano $v_1, v_2 \in W^{\perp}$, per la definizione di complemento ortogonale $\forall w \in W$:

$$s(v_1, w) = 0 = s(v_2, w)$$

Prendendo in considerazione una combinazione lineare di questi due vettori, $a_1v_1 + a_2v_2$, e sfruttando la definizione di prodotto scalare, per ogni vettore $w \in W$:

$$s(a_1v_1 + a_2v_v, w) = a_1s(v_1, w) + a_2s(v_2, w) = 0$$

Ciò significa che $a_1v_1 + a_2v_2 \in W^{\perp}$, dimostrando le proprietà caratterizzanti un sottospazio vettoriale.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI SOTTOSPAZI SUPPLEMENTARI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale con assegnato un prodotto scalare definito positivo

$\forall W : W \leq V$

Tesi:

W e $W^{\perp}$ sono sottospazi supplementari

Dimostrazione:

Si supponga che $\dim W = t$ e che $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_t\}$ sia una base ortonormale di *W*; si completi tale base in una base ortonormale di *V* (di dimensione *n*) con l'aggiunta dei vettori $e_{t+1}, \dots, e_n$. Il teorema sarà dimostrato nel momento in cui si prova che $W^{\perp} = \langle e_{t+1}, \dots, e_n \rangle$.

Ogni vettore *b* dello spazio $\langle e_{t+1}, \dots, e_n \rangle$ è del tipo:

$$b = a_{t+1}e_{t+1} + \cdots + a_ne_n$$

Ed appartiene allo spazio $W^{\perp}$, infatti per ogni vettore di *W* $h_1e_1 + \cdots + h_te_t$ si ha (tenendo presente che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale):

$$s(a_{t+1}e_{t+1} + \cdots + a_ne_n, h_1e_1 + \cdots + h_te_t) = 0$$

Viceversa sia *b* un vettore di $W^{\perp}$, poiché $e_1, \dots, e_n$ è una base, risulta:

$$b = m_1e_1 + \cdots + m_te_t + m_{t+1}e_{t+1} + \cdots + m_ne_n$$

Ma poiché $e_1, \dots, e_t$ sono vettori di *W*:

$$s(b, e_1) = m_1 = 0$$

$$s(b, e_2) = m_2 = 0$$

$$...$$

$$s(b, e_t) = m_t = 0$$

Da ciò si deduce che b è un vettore di $\langle e_{t+1}, \dots, e_n \rangle$.

Si può osservare che, grazie al teorema precedente, $W^{\perp}$ e W sono due sottospazi vettoriali supplementari dello spazio vettoriale V.

CVD

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Si considerino uno **spazio vettoriale V sul campo K di dimensione n** e un **endomorfismo $F: V \to V$**, un vettore $v \in V - \{\underline{0}\}$ **si dice autovettore dell'endomorfismo F se esiste uno scalare λ per cui**:

$$F(v) = \lambda v$$

Lo scalare $\lambda \in K$ in questione è chiamato **autovalore relativo all'autovettore non nullo $v \in V$**; è possibile anche considerare il **sottoinsieme dello spazio vettoriale V di tutti gli autovettori di F che hanno $\lambda \in K$ come autovalore**:

$$V_\lambda = \{v \in V - \{\underline{0}\} : F(v) = \lambda v\} \subset V$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELL'INSIEME DI AUTOVETTORI COME SOTTOSPAZIO

Ipotesi:

$\forall F: V \to V$: è un endomorfismo sullo spazio vettoriale V

$\forall \lambda \in K$: è un autovalore per l'endomorfismo F

Tesi:

$V_\lambda \cup \{\underline{0}\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale V

Dimostrazione:

Siano considerati due autovettori $u, v \in V_\lambda$, si dimostri che $u + v \in V_\lambda$:

$$F(u + v) = F(u) + F(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$$

Siano considerati $a \in K$ e $v \in V_\lambda$, si dimostri che $av \in V_\lambda$:

$$F(av) = aF(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$$

Segue per definizione che $V_\lambda \cup \{\underline{0}\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale *V*

CVD

Il sottospazio vettoriale $\boldsymbol{V_\lambda}$ **di *V* è chiamato autospazio corrispondente all'autovalore** $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}$ la cui **dimensione** è chiamata **molteplicità geometrica dell'autovalore** $\boldsymbol{\lambda}$, indicata con $m_g(\lambda)$; poiché **tutti gli autovettori non sono nulli**, segue necessariamente che $\boldsymbol{m_g(\lambda) \geq 1}$.

Sia considerato uno **spazio vettoriale *V* di dimensione** $\boldsymbol{n}$, un suo **endomorfismo** $\boldsymbol{F\colon V \to V}$, una sua **base** $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}}$ e la **matrice** $\boldsymbol{A \in M_n(K)}$ **associata all'endomorfismo rispetto alla base** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, l'endomorfismo $\boldsymbol{F}$ **si dice diagonalizzabile se esiste la base** $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}}$ **tale che la matrice associata,** $\boldsymbol{A}$**, è una matrice diagonale**. Per stabilire la diagonalizzabilità di un endomorfismo è importante osservare la seguente proposizione:

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÁ DI DIAGONALIZZABILITÀ

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$: è una base di *V*

$\forall A \in M_n(K)$: è la matrice associata all'endomorfismo *F* rispetto alla base $\mathcal{B}$

Tesi:

A diagonale $\Leftrightarrow \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di autovettori per *F*

Dimostrazione:

Si prendano in considerazione le seguenti implicazioni:

- A diagonale $\Longrightarrow \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di autovettori per *F*

La matrice *A* collega i vettori della base $\mathcal{B}$ con i suoi trasformati, in particolare:

$$(u_1, \dots, u_n)A = \left(F(u_1), \dots, F(u_n)\right)$$

Se la matrice *A* è una diagonale allora sarà del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda_i & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ne consegue che:

$$(u_1, \dots, u_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda_i & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \big(F(u_1), \dots, F(u_n)\big)$$

Cioè:

$$F(u_i) = \lambda_i u_i \ \forall i \in [1, n]$$

Ciò significa che $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono autovettori.

- $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di autovettori per $F \Longrightarrow A$ diagonale

Poiché $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono autovettori allora vale:

$$F(u_i) = \lambda_i u_i \ \forall i \in [1, n]$$

Che equivale a dire che la matrice che rappresenta *F* nella base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda_i & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INDIPENDENZA DI AUTOVETTORI ASSOCIATI AD AUTOVALORI DISTINTI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

$\forall v_1, v_2$: sono autovettori di *f* associati ad autovalori distinti λ_1, λ_2

Tesi:

$\{v_1, v_2\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti

Dimostrazione:

Si ragioni per assurdo e si supponga che i due autovettori sono proporzionali:

$$a v_1 = v_2$$

Da ciò si desume:

$$\lambda_2 v_2 = f(v_2) = f(a v_1) = a f(v_1) = a \lambda_1 v_1 = \lambda_1 a v_1 = \lambda_1 v_2$$

$$\lambda_1 v_2 = \lambda_2 v_2 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = \underline{0}$$

Ma questo rapporto ha senso solo se:

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

Che, per ipotesi, raggiunge l'assurdo. Quindi è dimostrato che i due vettori siano linearmente indipendenti.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA GENERALIZZATO DI INDIPENDENZA DI AUTOVETTORI ASSOCIATI AD AUTOVALORI DISTINTI

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

$\forall v_1, \dots, v_k$: sono autovettori di *f* associati ad autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

Tesi:

$\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti

Dimostrazione:

Si dimostra la tesi ragionando per induzione sull'intero $k \geq 2$, infatti:

- $k = 2$, il teorema è dimostrato con la dimostrazione precedente;
- $k > 2$

Si supponga l'asserto dimostrato per $k - 1$, ovvero si supponga che i vettori $v_1, \dots, v_{k-1}$ siano linearmente indipendenti, e si proceda a dimostrare per k; si ragioni per assurdo e siano i vettori $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ linearmente dipendenti, segue che il vettore v_k può essere combinazione lineare degli altri:

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}$$

Applicando l'endomorfismo ad entrambi i membri e sfruttando la linearità e la definizione di autovettore:

$$f(v_k) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1})$$

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

Si prenda in considerazione la combinazione lineare di v_k e la si moltiplichi per il relativo autovalore:

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_k v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_k v_{k-1}$$

Sottraendo entrambe le combinazioni lineari ottenute:

$$\underline{0} = a_1(\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1}$$

Per la lineare indipendenza dei vettori $v_1, \dots, v_{k-1}$, si ha:

$$a_i(\lambda_k - \lambda_i) = 0 \ \forall i \in [1, k-1]$$

Ma poiché gli autovalori sono distinti, allora:

$$a_i = 0 \ \forall i \in [1, k-1]$$

Ma ciò significherebbe che $v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} = \underline{0}$, che non può accadere visto che è un autovettore. Si è raggiunto l'assurdo, che desume dal fatto che sono stati supposti i vettori $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ linearmente dipendenti.

Per il principio di induzione si può affermare che $\forall k \geq 2 \ \{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

CVD

Questo teorema porta con sé un **corollario**, il quale afferma che **in uno spazio vettoriale *V* di dimensione *n* l'endomorfismo $\boldsymbol{f: V \to V}$ ha al più *n* autovalori distinti**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DIAGONALIZZABILITÀ IN PRESENZA DI UNA BASE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

Tesi:

f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$: è una base di autovettori

Dimostrazione:

Si considerino le seguenti implicazioni:

- f è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$: è una base di autovettori

Sia considerata una base $\mathcal{B}$ di *V*, poiché per ipotesi l'endomorfismo è diagonalizzabile allora, per definizione, la matrice *A* associata rispetto alla base è una matrice diagonale e per la proprietà di diagonalizzabilità i vettori di $\mathcal{B}$ sono autovettori.

- $\exists \mathcal{B}$: è una base di autovettori $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile

Se esiste una base di autovettori per l'endomorfismo *f* allora la matrice *A* associata a tale base è una matrice diagonale per la proprietà di diagonalizzabilità.

CVD

Si considerino due **matrici quadrate di ordine *n* sul campo $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M_n(K)}$**, esse si dicono **simili** se **esiste almeno una matrice $\boldsymbol{\mathcal{P}} \in \boldsymbol{M_n(K)}$ non degenere ($\det \boldsymbol{\mathcal{P}} \neq 0$) tale che**:

$$B = \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}$$

Che si indica con $\boldsymbol{A \sim B}$.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI SIMILITUDINE DELLE MATRICI CHE RAPPRESENTANO L'ENDOMORFISMO

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}, \mathcal{B}' = \{u_1', \dots, u_n'\}$: sono due basi di V

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

Tesi:

Le matrici che rappresentano l'endomorfismo *f* nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente sono simili

Dimostrazione:

Si indichino le matrici in questione:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Per definizione di matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base assegnata:

$$\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big) = (u_1, \dots, u_n)A$$

$$\big(f(u_1'), \dots, f(u_n')\big) = (u_1', \dots, u_n')B$$

Sia considerata la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} : (u_1', \dots, u_n') = (u_1, \dots, u_n)\mathcal{P}$$

Applicando l'endomorfismo ad ambo i membri e sfruttando la linearità:

$$\big(f(u_1'), \dots, f(u_n')\big) = \big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)\mathcal{P}$$

Sostituendo con quanto rilevato finora:

$$(u_1', \dots, u_n')B = (u_1, \dots, u_n)A\mathcal{P}$$

Ma tenuto conto della definizione di matrice di passaggio:

$$(u_1, \dots, u_n)\mathcal{P}B = (u_1, \dots, u_n)A\mathcal{P}$$

Ma grazie alla lineare indipendenza dei vettori $u_1, \dots, u_n$, è possibile dividere per essi:

$$\mathcal{P}B = A\mathcal{P}$$

Moltiplicando a sinistra per l'inversa di $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}$$

$$B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}$$

Ricordando che il prodotto di due matrici non è commutativo.

CVD

Una conseguenza diretta di questo teorema è la proposizione seguente:

$$\forall A \in M_n(K), D : \text{è matrice diagonale}, A \text{ è diagonalizzabile } \Leftrightarrow A \sim D$$

Sia $\boldsymbol{A = (a_{ij}) \in M_n(K)}$ **e** $\boldsymbol{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}$. L'equazione $\boldsymbol{Ax = \lambda x}$ **può essere alternativamente scritta**:

$$(A - \lambda I)x = \underline{0}$$

Dove ***I* è la matrice identica**. L'equazione rappresentata è un **sistema lineare omogeneo** che, affinché ammetta soluzioni non nulle, **deve avere il determinante della matrice dei coefficienti pari a zero**; il determinante $\boldsymbol{|A - \lambda I|}$ **è un polinomio di grado *n* nella variabile** $\boldsymbol{\lambda}$ ed è chiamato **polinomio caratteristico**:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Dove **gli autovalori della matrice *A* sono radici del polinomio**:

$$\lambda_0 \text{ è autovalore di A } \Leftrightarrow p_A(\lambda_0) = 0$$

Preso un autovalore λ di *A*, si definisce la sua **molteplicità algebrica** ($m_a(\lambda)$) come **la molteplicità di $\boldsymbol{\lambda}$ in quanto radice del polinomio caratteristico**, mentre **un autovalore è detto semplice se** $\boldsymbol{m_a(\lambda) = 1}$. In generale, **la molteplicità algebrica è maggiore o uguale a quella geometrica**:

$$m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$$

Ne consegue che **ogni autovalore semplice della matrice *A* è tale che** $\boldsymbol{m_g(\lambda) = m_a(\lambda)}$, infatti:

$$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) = 1 \Longrightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INDIPENDENZA DALLA BASE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale

$\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}'$: sono basi di V

$\forall A, A'$: sono le matrici associate all'applicazione *f* rispetto alle basi date

Tesi:

$p_A(\lambda)$ è indipendente dalla base scelta per rappresentare *f*

Dimostrazione:

Per il teorema di similitudine delle matrici, A e A' sono simili; esiste allora una matrice non degenere $\mathcal{P} \in M_n(K)$:

$$A' = \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}$$

Si ha allora:

$$|A' - \lambda I| = |\mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P} - \lambda I| = |\mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P} - \mathcal{P}^{-1} \lambda I \mathcal{P}| = |\mathcal{P}^{-1}(A - \lambda I)\mathcal{P}|$$

Ma per il teorema di Binet, poiché $|\mathcal{P}^{-1}| \cdot |\mathcal{P}| = 1$:

$$|\mathcal{P}^{-1}(A - \lambda I)\mathcal{P}| = |\mathcal{P}^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |\mathcal{P}| = |A - \lambda I|$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INTERSEZIONE DEGLI AUTOSPAZI

Ipotesi:

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m$: sono *m* autovalori distinti di *f*

$\forall V_1, \ldots, V_m$: sono gli autospazi generati dai suddetti autovalori

Tesi:

$\forall i \in [1, m], V_i \cap \langle V_1 \cup \ldots \cup V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup \ldots \cup V_m \rangle = \{\underline{0}\}$

Dimostrazione:

Con questo teorema si vuole dimostrare che ciascun autospazio interseca nel solo vettore nullo lo spazio generato dai rimanenti autospazi.

Si dimostri, per esempio, che $V_1 \cap \langle V_2 \cup \ldots \cup V_m \rangle = \{\underline{0}\}$ ragionando per assurdo: *b* è un vettore non nullo appartenente a questa intersezione, allora:

$$b \in V_1 \cap \langle V_2 \cup \dots \cup V_m \rangle \Longrightarrow b = b_2 + \cdots + b_m$$

Riducendo il numero degli addendi, si può supporre che sia $b_2 \neq 0 \dots b_m \neq 0$. Dalla relazione appena mostrata, segue, applicando *f*:

$$\lambda_1 b = \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m$$

Invece, moltiplicando *b* per λ_1 si ottiene:

$$\lambda_1 b = \lambda_1 b_2 + \cdots + \lambda_1 b_m$$

Sottraendo membro a membro:

$$\underline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2) b_2 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_m) b_m$$

Ma per il teorema di indipendenza di autovettori associati ad autovalori distinti, $b_2, \dots, b_m$ sono linearmente indipendenti, quindi:

$$\lambda_1 - \lambda_i = 0, \forall i \in [2, m]$$

Ma ciò risulta un assurdo in quanto per ipotesi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono autovalori distinti; di conseguenza la tesi è dimostrata dal momento in cui è stato raggiunto l'assurdo.

CVD

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

Ipotesi:

$\forall V$: è uno spazio vettoriale di dimensione *n*

$\forall f: V \to V$: è un endomorfismo

Tesi:

f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici nel campo e ciascuna con $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

Dimostrazione:

Supponendo che il polinomio caratteristico abbia tutte le radici nel campo e siano esse $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, con molteplicità algebrica uguale a quella geometrica:

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = s_i, \forall i \in [1, t]$$

In particolare si ha che:

$$\dim V_{\lambda_i} = s_i, \forall i \in [1, t]$$

Con $s_1 + \cdots + s_t = n$. Sia $\mathcal{B}_i$ una base di V_{λ_i}, il sistema di vettori $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}_i$ ha cardinalità *n* ed è una base di autovettori per *f* grazie al teorema precedentemente dimostrato. Dunque, per il teorema di diagonalizzabilità in presenza di una base, *f* è diagonalizzabile.

Viceversa, supponendo che *f* sia diagonalizzabile, per lo stesso teorema appena menzionato esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ fatta da autovettori, i cui autovalori sono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si indichino con $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_t$ gli autovalori distinti che figurano tra $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e si supponga che $\bar{\lambda}_i$ figuri s_i volte tra di essi. Di conseguenza si ha:

$$s_1 + \cdots + s_t = n$$

Definendo $h_1, \dots, h_t$ le molteplicità algebriche delle radici $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_t$, poiché l'autospazio $V_{\bar{\lambda}_i}$ contiene s_i vettori di $\mathcal{B}$, si ha:

$$s_i \leq \dim V_{\bar{\lambda}_i}, \forall i \in [1, t]$$

Inoltre, per la proprietà delle molteplicità precedentemente introdotta:

$$\dim V_{\bar{\lambda}_i} \leq h_i, \forall i \in [1, t]$$

Da cui segue:

$$s_i \leq \dim V_{\bar{\lambda}_i} \leq h_i, \forall i \in [1, t]$$

Si ottiene:

$$n = s_1 + \cdots + s_t = \dim V_{\bar{\lambda}_1} + \cdots + \dim V_{\bar{\lambda}_t} \leq h_1 + \cdots + h_t \leq n$$

Ne consegue che:

$$h_1 + \cdots + h_t = n \wedge s_i = h_i, \forall i \in [1, t]$$

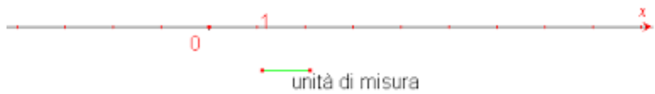
Quindi $\dim V_{\bar{\lambda}_i} = h_i, \forall i \in [1, t]$, che equivale a dire che $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_t$ sono tutte le radici del polinomio caratteristico di *f*, ciascuna con molteplicità geometrica uguale a quella algebrica.

CVD

GEOMETRIA ANALITICA

SISTEMI DI RIFERIMENTO

Si consideri una **retta orientata**, x, e si fissi un **verso di percorrenza** con la punta di una freccia, su tale retta sia **fissato un punto O, chiamato origine**, e si stabilisca un'**unità di misura**; fissando un **punto P sulla retta x** si individua il **segmento $\overline{OP}$**, il quale permetterà di **associare al punto P un valore reale, x_P,** che rappresenta **il numero di volte che l'unità di misura entra nel segmento** individuato. Lavorando su una retta orientata di questo genere, per convenzione, **si associano valori reali positivi ai punti fissati dopo l'origine O** e **si associano valori negativi ai punti fissati prima dell'origine O**:



L'applicazione che associ il punto al rispettivo valore reale è un **isomorfismo**:

$$P \in x \to x_P \in \mathbb{R}$$

Quanto appena descritto viene definito **sistema di riferimento su una retta x**.

Dato un **piano π**, si considerino **due rette orientate e non parallele, x e y**, indicando con **O il loro punto di intersezione**; **su ciascuna delle due rette** si stabilisca una **unità di misura**, fissando nel piano un punto P:

- Conducendo **dal punto P la retta parallela a y**, questa **interseca la retta x in un punto P_x**. Individuato il **segmento $\overline{OP_x}$** non resta altro che **individuare il valore reale x_P associato**;
- Conducendo **dal punto P la retta parallela a x**, questa **interseca la retta y in un punto P_y**. Individuato il **segmento $\overline{OP_y}$** non resta altro che **individuare il valore reale y_P associato**.

Con queste considerazioni è possibile **associare ad un punto nel piano P una coppia di numeri reali**, andando ad individuare l'applicazione isomorfica:

$$P \in \pi \to (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$$

Quanto appena descritto viene definito **sistema di riferimento in un piano π**, dove **le rette orientate, x e y, si chiamano assi delle ascisse e delle ordinate**, mentre **O è l'origine del sistema**. Analiticamente, un sistema di riferimento di questo tipo è **indicato con $\pi(O, x, y, u_x, u_y)$**, dove **u_x e u_y sono le unità di misura fissate sui rispettivi assi**.

La coppia di valori reali, $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$**, associata ad un punto $P \in \pi$ prende il nome di coordinate del punto** in questione. Qualora **gli assi si intersechino nel punto O perpendicolarmente**, il **sistema di riferimento** viene detto **ortogonale**, mentre qualora **si utilizzi la stessa unità di misura per entrambi gli assi, cioè $u_x = u_y$, il sistema è detto monometrico ($\pi(O, x, y, u)$)**.

Dato uno **spazio euclideo S**, si considerino t**re rette orientate e non parallele a due a due, x, y e z, indicando con O il loro punto di intersezione**. Si individuano i **tre piani** generati dalle omonime rette:

$$xy, yz, xz$$

Su ciascuna delle tre rette si stabilisca un'unità di misura, fissando un punto *P* nello spazio:

- Conducendo **dal punto P il piano parallelo al piano** yz, questo i**nterseca la retta x in un punto P_x**. Individuato il **segmento $\overline{OP_x}$** non resta altro che **individuare il valore reale x_P associato**;
- Conducendo **dal punto P il piano parallelo al piano zx,** questo **interseca la retta y in un punto P_y**. Individuato il **segmento $\overline{OP_y}$** non resta altro che **individuare il valore reale y_P associato**;
- Conducendo **dal punto P il piano parallelo al piano** yx, questo **interseca la retta z in un punto P_z**. Individuato il **segmento $\overline{OP_z}$** non resta altro che **individuare il valore reale z_P associato**.

Dunque, **ad un punto P dello spazio è possibile associare una terna di numeri reali**, considerando l'applicazione isomorfica:

$$P \in S \to (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

Analogamente al piano, tale sistema di riferimento si indica con $S(O, x, y, z, u_x, u_y, u_z)$, la terna dei valori reali $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ **associata ad un punto $P \in S$ prende il nome di coordinate del punto**, il **sistema** è detto **ortogonale** se all'intersezione O **le tre rette** ci arrivano **perpendicolarmente a due a due** ($x \perp y, y \perp x, y \perp z$), ed è detto **monometrico se su tutti e tre gli assi è usata la stessa unità di misura** (in tal caso $S(O, x, y, z, u)$).

RETTA NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Si fissi in un **piano euclideo π** un **sistema di riferimento ortogonale e monometrico**, $\pi(0, x, y, u)$, e si fissino i **due punti A e B con le rispettive coordinate**, (x_A, y_A) **e** (x_B, y_B). Si individui il vettore $\overrightarrow{AB}$ che giace **sulla retta** *r*, di esso si determinano le **componenti lungo gli assi** date dai numeri reali:

$$\lambda = x_B - x_A$$

$$\mu = y_B - y_A$$

La coppia di numeri reali non entrambi nulli (λ, μ) **è chiamata coppia di numeri direttori della retta r, determinati a meno di un fattore di proporzionalità**; infatti, se **si considerano altri due punti C e D su r** resta determinato il **vettore $\overrightarrow{CD}$** e, poiché esso **giace sulla stessa retta di $\overrightarrow{AB}$**, ne sarà **proporzionale**:

$$\exists \rho > 0: \overrightarrow{CD} = \rho \overrightarrow{AB}$$

Considerando le componenti di $\overrightarrow{CD}$ lungo gli assi:

$$\lambda' = x_D - x_C$$

$$\mu' = y_D - y_C$$

Queste componenti **sono proporzionali a quelle del vettore $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$**, proprio come i due vettori:

$$(\lambda', \mu') = \rho(\lambda, \mu)$$

Di conseguenza **anche le componenti singole sono proporzionali**:

$$\begin{cases} \lambda' = \rho\lambda \\ \mu' = \rho\mu \end{cases}$$

Fatta la considerazione su due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$, dove ***P* è il punto di coordinate $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$**:

$$\begin{cases} x - x_A = \rho\lambda \\ y - y_A = \rho\mu \end{cases}$$

Data una **retta *r*, determinata dai direttori $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$**, le seguente equazioni sono dette **equazioni parametriche della retta nel piano**:

$$\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \end{cases}$$

Poiché i **vettori** in esame sono **proporzionali** essi saranno **linearmente dipendenti**, ovvero **la matrice che ha per righe le rispettive componenti ha determinante nullo**:

$$\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti, **sviluppando il determinante**:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \Longrightarrow ax + by + c = 0$$

Dove:

- $a = y_B - y_A$, ovvero μ;
- $b = x_A - x_B$, ovvero $-\lambda$;
- $c = y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)$.

In conclusione, **tutti i punti della retta *r* hanno le coordinate che soddisfano l'equazione cartesiana**:

$$ax + by + c = 0$$

Con questa equazione **si possono anche definire i direttori in maniera alternativa**, infatti:

$$(\lambda, \mu) = (-b, a)$$

I seguenti teoremi vanno a stabilire le **condizioni di parallelismo e perpendicolarità** di due rette, *r* e *r'* di equazioni cartesiane:

$$r: \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda' \\ y = y_A + \rho\mu' \end{cases}$$

I cui direttori sono (λ, μ) e (λ', μ').

ENUNCIATO TEOREMA DI PARALLELISMO TRA DUE RETTE NEL PIANO

Ipotesi:

$\forall r$ e r' : sono due rette determinate dai direttori (λ, μ) e (λ', μ')

Tesi:

$r \parallel r' \Leftrightarrow \exists \gamma \neq 0 : \ (\lambda, \mu) = \gamma(\lambda', \mu')$

ENUNCIATO TEOREMA DI PERPENDICOLARITÀ TRA DUE RETTE NEL PIANO

Ipotesi:

$\forall r$ e r' : sono due rette determinate dai direttori (λ, μ) e (λ', μ')

Tesi:

$r \perp r' \Leftrightarrow \lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$

Questi due teoremi possono essere riletti considerando la **forma cartesiana di una retta**, infatti considerando:

$$r: ax + by + c = 0 \text{ generato da } (-b, a)$$

$$r': a'x + b'y + c' = 0 \text{ generato da } (b, a)$$

Si possono alternativamente definire **parallelismo** e **perpendicolarità**:

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (a, b) = \gamma(a', b')$$

$$r \perp r' \Leftrightarrow bb' + aa' = 0$$

La dimostrazione di queste due proposizioni è semplice e verrà omessa.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA RETTA GENERATA DA DUE RETTE PASSANTI PER UN PUNTO P

Ipotesi:

$\forall \pi(0, x, y, u)$

$\forall P(x_0, y_0) \in \pi$

$\forall r: ax + by + c = 0, r': a'x + b'y + c' = 0 : P \in r \wedge P \in r'$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: non sono entrambi nulli e $\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$

Tesi:

$\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$ è ancora una retta passante per il punto P al variare dei parametri α *e* β e ogni altra retta passante per *P* si scrive come combinazione lineare delle due rette *r* e *r'*

Dimostrazione:

Le coordinate del punto P soddisfano la combinazione lineare delle due equazioni:

$$\alpha(ax_0 + by_0 + c) + \beta(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0$$

$$\alpha 0 + \beta 0 = 0$$

Di conseguenza, la retta in questione è ancora passante per il punto P. Si prenda in considerazione una terza retta in forma cartesiana che passi per *P*:

$$r'': a''x + b''y + c'' = 0 : P \in r''$$

Si metta a sistema tale retta con le due ipotizzate:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo di (*m*) 3 equazioni in (*n*) 2 incognite compatibile, visto che ammette soluzione in *P*, e la matrice completa ha lo stesso rango di quella incompleta:

$$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ b' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ b' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Poiché il determinante è nullo, le righe del sistema sono linearmente dipendenti; in particolare le prime due sono linearmente indipendenti e la terza dipende dalle prime. Per semplicità è possibile considerare le due rette parallele ai rispettivi assi:

$$x - x_0 = 0 \wedge y - y_0 = 0$$

La cui combinazione lineare:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

Al variare dei parametri α e β si determinano tutte le retti passanti per il punto.

CVD

L'equazione in questione è detta **equazione del fascio di rette di centro *P***:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

Si fissi in uno spazio euclideo S un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, $S(O, x, y, z, u)$, e si fissino **due punti *A* e *B* con le rispettive coordinate (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B)**; resta individuato il **vettore $\overrightarrow{AB}$ che giace sulla retta *r***. Di tale vettore si determinano le **componenti** distinte lungo gli assi date dai numeri reali:

$$\lambda = x_B - x_A, \mu = y_B - y_A, \nu = z_B - z_A$$

La terna dei numeri reali non tutti nulli (λ, μ, ν) è chiamata **terna dei numeri direttori della retta *r***. Essi sono **determinati a meno di un fattore di proporzionalità**, infatti **considerando altri due punti**, *C* e *D*, **sulla retta *r***, resta determinato il **vettore $\overrightarrow{CD}$** e poiché **i due vettori in esame giacciono sulla stessa retta sono proporzionali**:

$$\exists\rho > 0: \overrightarrow{CD} = \rho\overrightarrow{AB}$$

Considerando le componenti di $\overrightarrow{CD}$ lungo gli assi:

$$\lambda' = x_D - x_C$$

$$\mu' = y_D - y_C$$

$$\nu' = z_D - z_C$$

Queste componenti **sono proporzionali a quelle del vettore $\overrightarrow{AB}$**, proprio come i due vettori:

$$(\lambda', \mu', \nu') = \rho(\lambda, \mu, \nu)$$

Di conseguenza **anche le componenti singole sono proporzionali**:

$$\begin{cases} \lambda' = \rho\lambda \\ \mu' = \rho\mu \\ \nu' = \rho\nu \end{cases}$$

Fatta la considerazione su due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$, dove ***P* è il punto di coordinate (x, y, z)**:

$$\begin{cases} x - x_A = \rho\lambda \\ y - y_A = \rho\mu \\ z - z_A = \rho\nu \end{cases}$$

Data una **retta *r*, determinata dai direttori (λ, μ)**, le seguente equazioni sono dette **equazioni parametriche della retta nello spazio**:

$$\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}$$

I seguenti teoremi vanno a stabilire le **condizioni di parallelismo e perpendicolarità** di due rette, *r* e *r'* di equazioni cartesiane:

$$r:\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}$$

$$r':\begin{cases} x = x_A + \rho\lambda' \\ y = y_A + \rho\mu' \\ z = z_A + \rho\nu' \end{cases}$$

I cui direttori sono (λ, μ, ν) e (λ', μ', ν').

ENUNCIATO TEOREMA DI PARALLELISMO TRA DUE RETTE NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall r$ e r' : sono due rette determinate dai direttori (λ, μ, ν) e (λ', μ', ν')

Tesi:

$r \parallel r' \Leftrightarrow \exists\gamma \neq 0 : \ (\lambda, \mu, \nu) = \gamma(\lambda', \mu', \nu')$

ENUNCIATO TEOREMA DI PERPENDICOLARITÀ TRA DUE RETTE NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall r$ e r' : sono due rette determinate dai direttori (λ, μ, ν) e (λ', μ', ν')

Tesi:

$r \perp r' \Leftrightarrow \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$

PIANO NELLO SPAZIO

Si fissi **in uno spazio euclideo S un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, $S(O, x, y, z, u)$**, si prenda **un piano π e tre punti ad esso appartenenti, A, B e C**, i quali individuano i **vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ di componenti**:

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Sia considerato un **punto P di coordinate (x, y, z), appartenente al piano π**, e si individui il **vettore $\overrightarrow{AP}$**; poiché **i tre vettori rilevati giacciono sullo stesso piano** essi sono **linearmente indipendenti**, in particolare le componenti lungo gli assi:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_c - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante e raccogliendo i termini che dipendono dalle tre incognite x, y e z si ottiene l'**equazione cartesiana del piano** $\boldsymbol{\pi}$ **nello spazio euclideo** $\boldsymbol{S}$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

La terna di numeri $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ **è detta terna di numeri direttori del piano** $\boldsymbol{\pi}$. Seguono i teoremi che stabiliscono i **criteri di parallelismo e perpendicolarità** fra due piani:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

ENUNCIATO TEOREMA DI PARALLELISMO TRA DUE PIANI NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall \pi, \pi'$: sono due piani generati dai direttori (a, b, c) e (a', b', c')

Tesi:

$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \exists \gamma > 0 : \ (a, b, c) = \gamma(a', b', c')$

ENUNCIATO TEOREMA DI PERPENDICOLARITÀ TRA DUE PIANI NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall \pi, \pi'$: sono due piani generati dai direttori (a, b, c) e (a', b', c')

Tesi:

$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

Siano **messe a sistema le equazioni dei due piani** in questione:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Il quale risulta essere un **sistema lineare omogeneo di (*m*) due equazioni in (*n*) tre incognite**, considerando la matrice completa e la matrice incompleta associata al sistema al fine di discuterne la compatibilità:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Si possono **distinguere ed analizzare i seguenti casi**:

- $\boldsymbol{\rho(A) = 1}$, in tal caso si determina il rango della matrice *A'* analizzando due casi:

- $\boldsymbol{\rho(A') = 1}$, in tal caso **i ranghi sono uguali** e **il sistema è compatibile**, ammettendo $\infty^{3-1} = \infty^{\mathbf{2}}$ **soluzioni**. I due piani, in questa configurazione, si dicono **paralleli impropriamente**, perché **ogni punto di $\boldsymbol{\pi}$ è anche punto di $\boldsymbol{\pi}$'**, ovvero i due piani coincidono.
- $\boldsymbol{\rho(A') = 2}$, in tal caso i due ranghi non sono uguali e **il sistema è incompatibile**. I due piani, in questa configurazione, si dicono **paralleli propriamente**, perché **non si intersecano in alcun punto**;

- $\boldsymbol{\rho(A) = 2}$, in tal caso **i due ranghi coincidono**, **il sistema è compatibile** ammettendo $\infty^{3-2} = \infty^{\mathbf{1}}$ **soluzioni**. I due piani, in questa configurazione, **si intersecano in una retta**.

L'equazione della retta *r* data dall'intersezione di due piani nello spazio euclideo è chiamata **equazione cartesiana**:

$$r\colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Considerando una **retta** di questo tipo e **due suoi punti**, *A* e *B* di coordinate (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B), essi **soddisfano le equazioni del sistema**:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ a'x_A + b'y_A + c'z_A + d' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ a'x_B + b'y_B + c'z_B + d' = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le rispettive equazioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B) = 0 \\ a'(x_A - x_B) + b'(y_A - y_B) + c'(z_A - z_B) = 0 \end{cases}$$

Da cui è possibile ricavare i **direttori della retta $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$** in quanto soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ a'\lambda + b'\mu + c'\nu = 0 \end{cases}$$

Che è ancora un **sistema lineare omogeneo di (*m*) due equazioni in (*n*) tre incognite**, le cui soluzioni possono essere calcolate come segue:

$$\left(\lambda = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \mu = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \nu = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$$

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTA E PIANO

Si consideri uno **spazio euclideo con un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\boldsymbol{S(O, x, y, z, u)}$** in cui sono assegnati una **retta** ed un **piano** dei quali si vogliono studiare le **reciproche posizioni**:

$$r\colon \begin{cases} x = x_A + \rho\lambda \\ y = y_A + \rho\mu \\ z = z_A + \rho\nu \end{cases}, \pi\colon ax + by + cz + d = 0$$

Preso un **punto generico *P* della retta *r* di coordinate $(\boldsymbol{x_A + \rho\lambda, y_A + \rho\mu, z_A + \rho\nu})$, sostituendole nell'equazione del piano $\boldsymbol{\pi}$**:

$$a(x_A + \rho\lambda) + b(y_A + \rho\mu) + c(z_A + \rho\nu) + d = 0$$

Sviluppando e **raccogliendo per $\boldsymbol{\rho}$**:

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)\rho + (ax_A + by_A + cz_A + d) = 0$$

Che risulta un'**equazione di primo grado nell'incognita $\boldsymbol{\rho}$**:

$$A\rho + B = 0$$

Si analizzano i **vari casi**:

- $\boldsymbol{A \neq 0}$, in tal caso **l'equazione ammette una sola soluzione $\boldsymbol{\rho}$**, quindi vi è **un solo punto di intersezione tra retta e piano**, ovvero il punto *P*;
- $\boldsymbol{A = 0}$, si distinguono due casi:
  - $\boldsymbol{B \neq 0}$, **l'equazione è impossibile**, quindi **non ci sono punti di intersezione tra retta *r* e piano $\boldsymbol{\pi}$**, i quali vengono definiti **paralleli propriamente**;
  - $\boldsymbol{B = 0}$, **l'equazione è indeterminata**, quindi **ci sono infiniti punti di intersezione** il che vuol dire che **la retta *r* giace sul piano $\boldsymbol{\pi}$**, ovvero che sono **paralleli impropriamente**.

In funzione di quanto appena detto, **la condizione di parallelismo** (impropria e propria) **tra retta e piano è determinata da $\boldsymbol{A = 0}$**, ovvero $\boldsymbol{a\lambda + b\mu + c\nu = 0}$. Da questo asserto si possono sviluppare i **criteri di parallelismo e perpendicolarità** di retta e piano.

ENUNCIATO TEOREMA DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall \pi, r$: sono una un piano e una retta generati dai direttori (a, b, c) e (λ, μ, ν)

Tesi:

$r \parallel \pi \Leftrightarrow a\lambda + b\mu + c\nu = 0$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI PERPENDICOLARITÀ TRA RETTA E PIANO NELLO SPAZIO

Ipotesi:

$\forall \pi, r$: sono una un piano e una retta generati dai direttori (a, b, c) e (λ, μ, ν)

Tesi:

$r \perp \pi \Leftrightarrow \exists \gamma > 0 : (a, b, c) = \gamma(\lambda, \mu, \nu)$

Dimostrazione:

Sia considerato il piano π' parallelo a π e passante per l'origine:

$$ax + by + cz = 0$$

Si considerino i punti $A(a, b, c)$ e un generico $P(x, y, z) \in \pi'$. Si prendano i vettori:

- $\overrightarrow{OP}$, che giace sul piano π';
- $\overrightarrow{OA}$, vettore che risulta perpendicolare a $\overrightarrow{OP}$ in quanto $ax + by + cz = 0$.

Allora la retta che segue la direzione di $\overrightarrow{OA}$ è perpendicolare a $\overrightarrow{OP}$ il quale, giacendo sul piano, rende $\overrightarrow{OA}$ perpendicolare anche al piano π'. I numeri direttori della retta sono proporzionali ai numeri direttori del piano π' ma dato che una retta perpendicolare ad un piano è perpendicolare a qualsiasi altro piano ad esso parallelo, si conclude che la retta è parallela a π. Si può quindi dedurre la validità della tesi:

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \exists \gamma > 0 : \ (a, b, c) = \gamma(\lambda, \mu, \nu)$$

CVD

FASCI E STELLA DI PIANI

Sia considerato uno **spazio euclideo e un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\boldsymbol{S(O, x, y, z, u)}$**, in esso sia fissata una **retta con la sua equazione cartesiana generata da due piani π e π'**:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Si definisce **fascio di piani con asse la retta *r* l'insieme di piani passanti per *r***. Preso in considerazione un **punto della retta, $\boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)}$, le cui coordinate soddisfano le equazioni del sistema**:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL PIANO GENERATO DA UNA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO P

Ipotesi:

$\forall r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$: è una retta generata da due piani π e π'

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: non sono entrambi nulli

$\forall P(x_0, y_0, z_0) \in S$

Tesi:

$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$ è ancora un piano passante per la retta *r* al variare di $\alpha\ e\ \beta$ e ogni altro piano passante per *r* si scrive come combinazione lineare dei due piani π e π'

Dimostrazione:

Si può intuitivamente affermare che $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$ è l'equazione di un piano; sostituendo le coordinate di *P* nella combinazione lineare, visto che *P* è un punto di *r*:

$$\alpha(ax_0+by_0+cz_0+d)+\beta(a'x_0+b'y_0+c'z_0+d')=0$$

$$\alpha 0+\beta 0=0$$

Passando per un punto di *r*, il piano in questione passa per tutta la retta al variare dei parametri $\alpha\ e\ \beta$. Sia considerato un piano $\pi'': a''x+b''y+c''z+d''=0$ passante per la retta *r* e si mettano a sistema le equazioni dei tre piani in esame:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

Che è un sistema di (*m*) tre equazioni in (*n*) due incognite che ammette ∞^1 soluzioni, visto che i tre piani si intersecano nella retta *r*; di conseguenza:

$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}=2$$

Le prime due righe del sistema risultano essere linearmente indipendenti perché rappresentano l'equazione cartesiana di *r*, mentre la terza riga è linearmente dipendente dalle altre, quindi è combinazione lineare dei piani π e π'.

CVD

L'equazione $\boldsymbol{\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0}$ **è detta equazione del fascio di piani con asse la retta *r*.**

Si consideri uno **spazio euclideo in cui è fissato un sistema di riferimento ortogonale e monometrico $\boldsymbol{S(O,x,y,z,u)}$**, in esso siano esaminati i **piani**:

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$
$$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$$
$$\pi'': a''x+b''y+c''z+d''=0$$

Che **si intersecano in un punto $\boldsymbol{P(x_0,y_0,z_0)}$**, quindi **le coordinate soddisfano il sistema lineare**:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0 \\ a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + d'' = 0 \end{cases}$$

Si definisce **stella di piani di centro il punto *P* l'insieme di piani passanti per il punto *P*** in questione.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL PIANO GENERATO DAI PIANI PASSANTI PER IL PUNTO P

Ipotesi:

$\forall P(x_0, y_0, z_0) \in S$

$$\forall \begin{matrix} \pi: ax + by + cz + d = 0 \\ \pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{matrix}$$: sono tre piani passanti per il punto *P*

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: sono tutti non nulli

Tesi:

$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') + \gamma(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$ è ancora un piano passante per il punto *P* al variare dei parametri α, β e γ, e ogni altro piano passante per *P* si scrive come combinazione lineare di π, π' e π''.

Dimostrazione:

Risulta chiaro che $\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') + \gamma(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$ è ancora un'equazione di un piano; inoltre, sostituendo le coordinate del punto in comune *P* nella combinazione lineare:

$$\alpha(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \beta(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d') + \gamma(a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + d'') = 0$$

$$\alpha 0 + \beta 0 + \gamma 0 = 0$$

Sia considerato un piano $\bar{\pi}: \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$ passante per il punto *P*. Si mettano a sistema le equazioni dei quattro piani:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di (*m*) quattro equazioni in (*n*) tre incognite, compatibile perché il punto *P* è un comune a tutte e quattro le equazioni. Ne consegue che il sistema ammette una sola soluzione:

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = 3$$

La prima, la seconda e la terza riga sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è linearmente dipendente dalle altre. In conclusione, il piano $\bar{\pi}$ è una combinazione lineare dei piani π, π' e π''.

CVD

Si può osservare che **per un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ passano i piani paralleli ai piani *xy*, *xz* e *yz***:

$$x - x_0 = 0, y - y_0 = 0, z - z_0 = 0$$

Dunque si può considerare una loro **combinazione lineare**:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

Che rappresenta **tutti i piani passanti per il punto *P* al variare dei parametri α, β e γ**. In base a quanto detto e dimostrato finora, **l'equazione appena mostrata è detta equazione della stella dei piani di centro *P***.

LE CONICHE

Si consideri un **piano euclideo π** in cui è fissato un **sistema di riferimento ortogonale e monometrico, $\pi(O, x, y, u)$**, in cui si determini una **proprietà $\mathcal{P}$**; un **luogo geometrico rispetto alla proprietà $\mathcal{P}$** è definito come **l'insieme dei punti del piano che soddisfano tale proprietà**:

$$\mathcal{L} = \{P \in \pi : P \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

Più in particolare risulta che:

$$\forall P \in \pi, P \text{ soddisfa } \mathcal{P} \Leftrightarrow P \in \mathcal{L}$$

Ad esempio, **il luogo geometrico dei punti *P* equidistanti da due punti *A* e *B* è definito come asse del segmento $\overline{AB}$**:

$$\mathcal{L} = \{P \in \pi : d(P, A) = d(P, B)\}$$

Le coniche sono ottenute tramite l'intersezione di un cono circolare retto con un piano; si possono definire tutte come **luoghi geometrici** e, di conseguenza, è possibile **ricavare l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano**. Esse sono:

- **Circonferenza**

La circonferenza si ottiene **tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse**. Sia fissato un **punto *C* di coordinate (x_0, y_0) e un numero reale $r > 0$**, sia assegnata la seguente proprietà:

$$d(P, C) = r, \forall P \in \pi$$

L'insieme:

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi : d(P, C) = r\}$$

È un **luogo geometrico** che prende il nome di **circonferenza di centro C e raggio r**. Sia preso un **punto P appartenente alla circonferenza** e ne si calcoli $d(P, C)$:

$$d(P,C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Sviluppando i calcoli:

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 - r^2 = 0$$

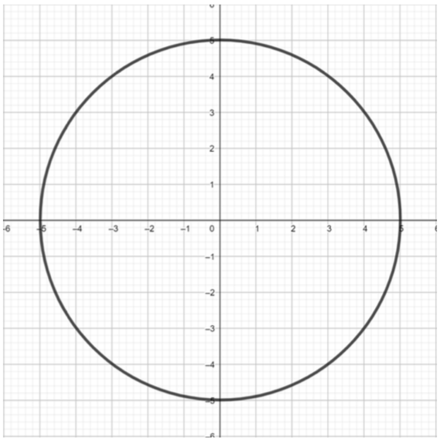
Raccogliendo nei termini $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, si ottiene la **forma cartesiana dell'equazione di una circonferenza**:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Dalle sostituzioni effettuate si possono **ricavare il centro ed il raggio**, infatti:

$$x_0 = -\frac{a}{2}, y_0 = -\frac{b}{2}, r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Il **grafico di una circonferenza Γ nel piano cartesiano** è:



Sia $\boldsymbol{P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma}$, dove la criconferenza è rappresentata dalla sua equazione cartesiana, allora **la tangente a Γ in P** è rappresentata dall'equazione:

$$\bar{x}x + \bar{y}y + a\frac{\bar{x} + x}{2} + b\frac{\bar{y} + y}{2} + c = 0$$

La stessa circonferenza che viene descritta da un'equazione cartesiana in un riferimento monometrico ortogonale ha anche la **rappresentazione parametrica**:

$$\Gamma: \begin{cases} x - x_0 = r\cos\vartheta \\ y - y_0 = r\sin\vartheta \end{cases}$$

- Ellisse

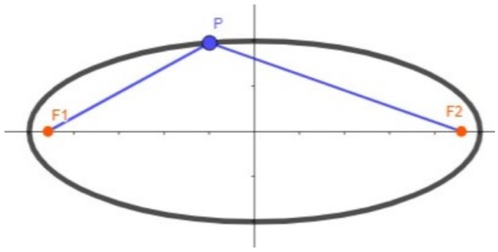
In un **sistema di riferimento monometrico e ortogonale siano considerati due punti $\boldsymbol{F_1, F_2 \in \pi}$ ed una distanza $\boldsymbol{d(F_1, F_2) = 2c}$**, si definisce **ellisse il luogo $\boldsymbol{\gamma}$ dei punti di $\boldsymbol{\pi}$ tali che la somma delle loro distanze da $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ sia un numero reale assegnato $\boldsymbol{2a > 2c}$**. I due punti in questione, **$\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$, sono chiamati fuochi**, mentre **$\boldsymbol{2c}$ è la distanza focal**e e la quantità $\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$ **l'eccentricità**

dell'ellisse. Se $c = 0$ **l'ellisse si configura come una circonferenza di raggio** a **e centro coincidente con i due fuochi** $F_1 = F_2$; in avanti si supporrà che $c > 0$.

Nel sistema di riferimento prefissato, si considerino i due fuochi, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, sull'asse delle ascisse (il discorso è analogo sull'asse delle ordinate), un punto $P \in \gamma$ è tale che:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Geometricamente, questa proprietà è raffigurata come segue:



Analiticamente, si può giungere all'**equazione cartesiana** partendo dalla definizione di ellisse:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = \left[2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-2xc = 4a^2 + 2xc - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + xc)^2$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + x^2c^2 + 2a^2xc$$

$$a^2(x^2 + c^2 + 2cx + y^2) = a^4 + x^2c^2 + 2a^2xc$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

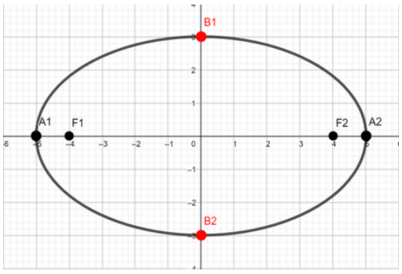
Denotando $b^2 = a^2 - c^2$:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Che è l'**equazione canonica dell'ellisse**, il cui **grafico nel piano cartesiano** è:



Anche l'ellisse, come la circonferenza, è dotata di una **rappresentazione parametrica**:

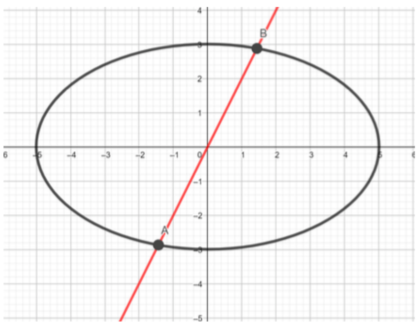
$$\gamma:\begin{cases} x = a\cos\vartheta \\ y = b\sin\vartheta \end{cases}$$

L'ellisse ha le seguenti caratteristiche:

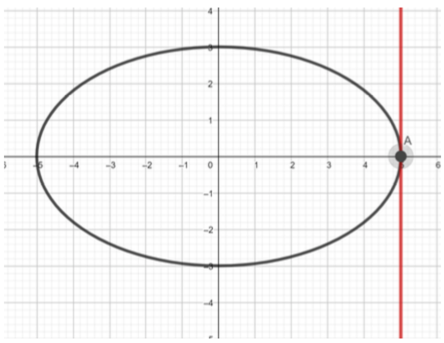
- È una **curva chiusa**;
- Ha un **centro di simmetria**, chiamato centro di γ, ed è il punto medio dell'asse $\overline{F_1F_2}$;
- Ha **due assi di simmetria ortogonali**, chiamati assi di γ;
- Ciascuno degli assi cartesiani interseca γ in due punti, chiamati **vertici**, indicati con A_1, A_2 quelli dell'asse dei fuochi e B_1, B_2 quelli dell'altro asse;
- Ha $d(A_1, A_2) = 2a$ e $d(B_1, B_2) = 2b$ mentre i relativi segmenti prendono il nome di **asse maggiore ($\overline{A_1A_2}$) e asse minore ($\overline{B_1B_2}$)** di γ.

Dati **un'ellisse γ ed una retta *r***, questa può essere:

- **Secante**, intersecando l'ellisse in due punti



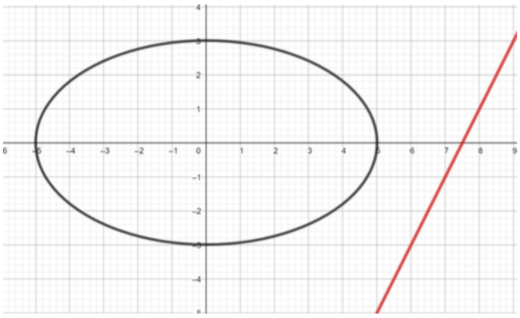
- **Tangente**, intersecando l'ellisse in un punto



Se il punto di tangenza è $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma$ allora la retta tangente ha equazione:

$$\frac{x\bar{x}}{a^2} + \frac{y\bar{y}}{b^2} - 1 = 0$$

- **Esterna**, non intersecando mai l'ellisse



- **Parabola**

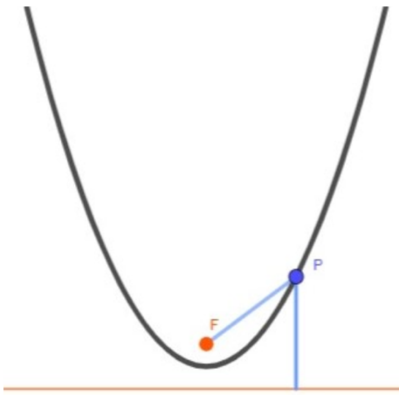
Sia ***F*** **un punto** e sia ***d*** **una retta non passante per** ***F***, entrambi **nel piano** $\boldsymbol{\pi}$. Si definisce **parabola il luogo** $\boldsymbol{\gamma}$ **dei punti di** $\boldsymbol{\pi}$ **equidistanti da** ***F*** **e da** ***d***, dove il primo è detto **fuoco** e il secondo **direttrice**.

Sia ***p*** **la distanza prefissata di** ***F*** **e** ***d***, ovvero il **parametro di** $\boldsymbol{\gamma}$, nel riferimento si impone **l'asse y perpendicolare per** ***F*** **a** ***d*** **ed orientata in modo che la semiretta positiva non passi per** ***d*** **e l'asse x parallela a** ***d*** **ed equidistante da** ***F*** **e da** ***d***, comunque orientata.

Sia considerata la **parabola con il fuoco** $\boldsymbol{F = \left(0, \frac{p}{2}\right)}$ e **direttrice di equazione** $\boldsymbol{d: y = -\frac{p}{2}}$; considerato un punto $P(x, y) \in \gamma$, per definizione si ha:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

Che, graficamente risulta:



In particolare:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

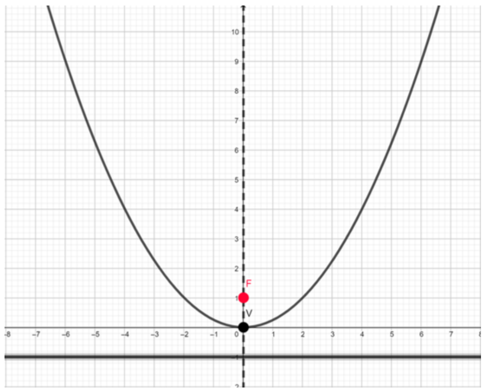
$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - yp = yp$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Ponendo $a = \frac{1}{2p}$ si ottiene l'**equazione canonica della parabola $\boldsymbol{\gamma}$**:

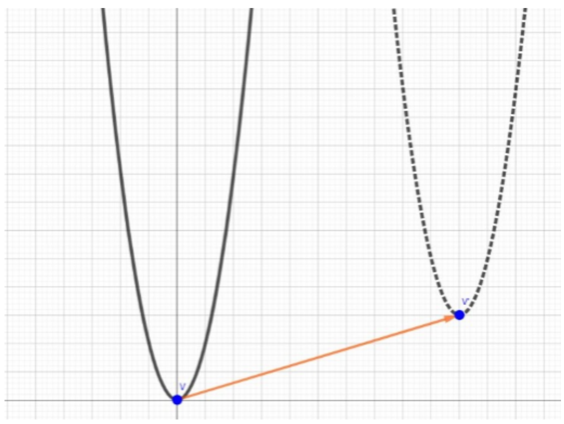
$$y = ax^2$$



Si tratta di una **parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate**, essa presenta le seguenti caratteristiche:

- È una **curva aperta** costituita da **un solo ramo**;
- **Non possiede centri di simmetria**;
- **Ha un solo asse di simmetria** che interseca la γ in un solo punto, il vertice;
- Le rette parallele all'asse, detti **diametri**, **sono secanti a $\boldsymbol{\gamma}$**.

Considerando la parabola $\gamma: y = ax^2$ e ne si **trasli il vertice in un punto $\boldsymbol{V' = (x_0, y_0)}$**



La **traslazione** è una trasformazione che **permette di cambiare unicamente il posizionamento della figura nel piano** ma non la figura stessa, quindi la "nuova" parabola sarà sempre del tipo $y = ax^2$ ma in un **sistema di riferimento non più centrato in $\boldsymbol{O(x, y)}$ ma in $\boldsymbol{O'(x', y')}$** e **rappresentato da**:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione quanto appena rilevato:

$$y' - y_0 = a(x' - x_0)^2$$

$$y' = a\left(x'^2 + x_0^2 + 2x'x_0\right) + y_0$$

Denotando con $b = -2ax_0$ e $c = ax_0^2 + y_0$:

$$y' = ax'^2 + bx' + c$$

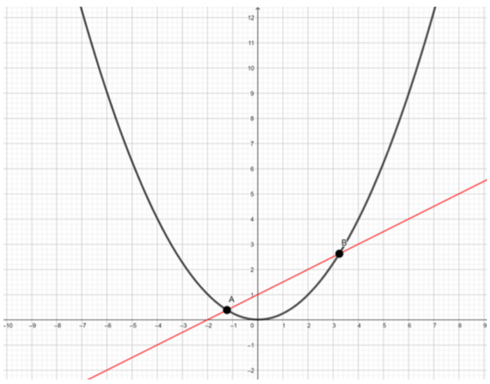
Che viene detta **equazione canonica della parabola traslata**, ovviamente imponendo $a \neq 0$.

Presa una parabola traslata, **il vertice non sarà più nell'origine** ma nel punto traslato:

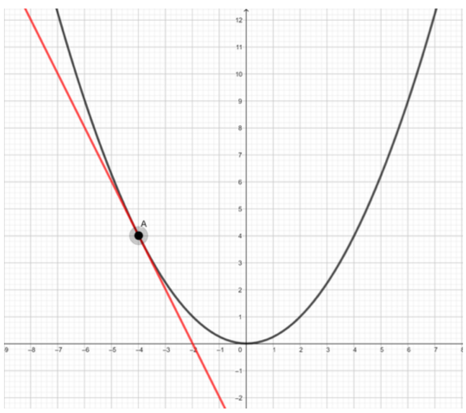
$$V = (x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Denotando con $\Delta = b^2 - 4ac$, detto determinante dell'equazione di secondo grado associata. Dati **una parabola γ ed una retta r**, rispetto alla parabola questa può essere:

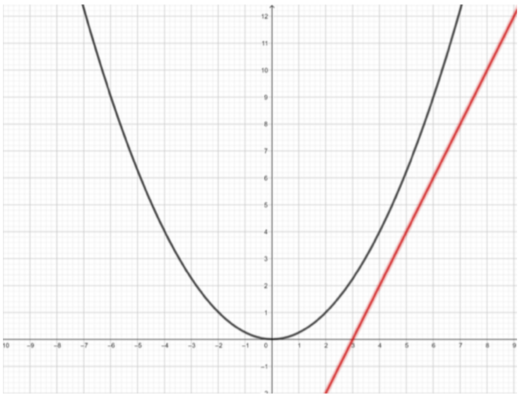
- **Secante**, intersecando γ in due punti



- **Tangente**, intersecando γ in un punto



- **Esterna**, intersecando γ in nessun punto



- **Iperbole**

Siano considerati **due punti $F_1, F_1 \in \pi$ e la loro distanza $d(F_1, F_2) = 2c$**, si definisce **iperbole il luogo γ dei punti di π le cui distanze da F_1 e F_2 hanno differenza uguale, in valore assoluto, ad un numero reale assegnato $2a$**, con $0 < a \leq c$. I **due punti in questione** sono chiamati **fuochi dell'iperbole**, mentre il rapporto $e = \frac{c}{a}$ **è chiamato eccentricità**.

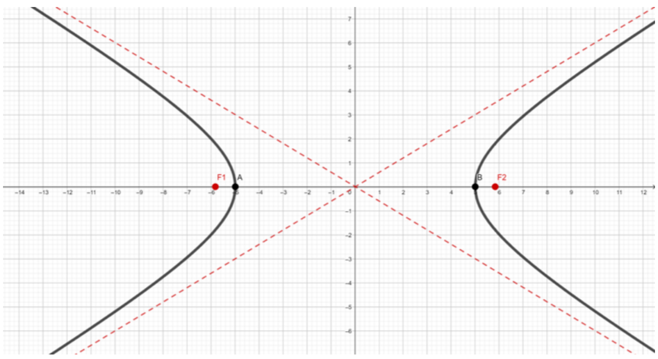
Nel riferimento concordato **si impostano i due assi x e y rispettivamente come la retta F_1F_2 e come l'asse del segmento $\overline{F_1F_2}$**; in queste condizioni, **l'iperbole γ è rappresentata dall'equazione canonica**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, oppure dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos \vartheta} \\ y = b \tan \vartheta \end{cases}$$

Geograficamente, l'iperbole si figura come:



Essa è dotata delle seguenti caratteristiche:

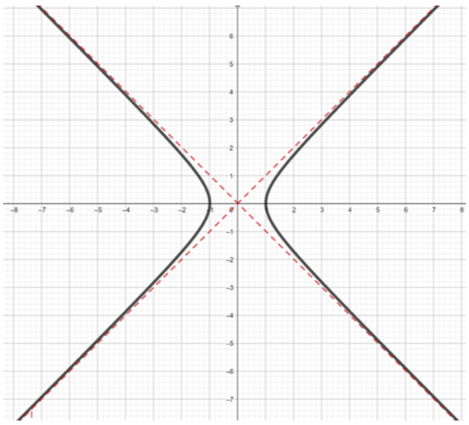
- È una **curva aperta**;
- È formata da **due rami senza punti in comune**;
- **Ha un centro di simmetria**, centro di γ, nel punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$;
- **Ha due assi di simmetria ortogonali di γ**, determinati dalla retta F_1F_2 e dal segmento $\overline{F_1F_2}$, uno dei quali (l'**asse traverso**, l'altro è l'**asse non traverso** e non tocca l'iperbole) interseca γ in due punti, detti vertici.

Si dicono **asintoti di γ le rette che approssimano il comportamento dei rami dell'iperbole all'infinito**; in termini più rigorosi, presi due punti di uguale ascissa, di cui uno appartenente all'iperbole e l'altro all'asintoto, la distanza tra i due punti tenderà a zero man mano che ci si allontana dai vertici dell'iperbole. Gli asintoti sono **rappresentati dalle equazioni**:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

Essi **separano all'origine le rette che intersecano γ da quelle che non l'intersecano**, mentre quelle propriamente parallele ad un asintoto sono unisecanti l'iperbole.

Quando gli **asintoti** sono **perpendicolari tra loro l'iperbole γ viene definita equilatera**, in cui $\boldsymbol{a = b}$ e **gli asintoti coincidono con le bisettrici degli ass**i:



Data **un'iperbole γ** (in modo del tutto analogo alla parabola, ellisse e circonferenza), **una retta** *r* può essere:

- **Secante**, intersecando γ in due punti;
- **Tangente**, intersecando γ in un punto;
- **Esterna**, intersecando γ in nessun punto.

Ovviamente **gli asintoti sono due rette esterne all'iperbole**; supponendo invece che **per un punto $\boldsymbol{P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma}$ passi una retta tangente**, questa avrà equazione:

$$\frac{\bar{x}x}{a^2} - \frac{\bar{y}y}{b^2} - 1 = 0$$