ANALISI MATEMATICA I

Prof. Umberto De Maio – A.A. 2022/23

INDICE DEGLI ARGOMENTI

INSIEMISTICA

FUNZIONI ELEMENTARI

LIMITI

DERIVATE E CALCOLO DIFFERENZIALE

INTEGRALI

SERIE NUMERICHE E NUMERI COMPLESSI

INSIEMISTICA

LOGICA

La logica è la parte della matematica che valuta la bontà di un ragionamento; i suoi strumenti, infatti, determinano la correttezza della dimostrazione di un teorema.

La logica si serve di **proposizioni logiche**, espressioni che si possono dire vere o false indipendentemente dal soggetto che le pronuncia o dal ricevente, e di **connettivi logici**, operatori che mettono in relazione due proposizioni logiche per produrne una nuova. Essi sono:

NEGAZIONE ($\neg p$ oppure $^{-}$, "non"): nega una proposizione, invertendo verità e falsità.

p	$\neg p$
V	F
F	V

CONGIUNZIONE LOGICA ($p \wedge q$, "p et q"): La proposizione è vera solo se entrambe le proposizioni sono vere.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISGIUNZIONE LOGICA ($p \vee q$, "p o q"): La proposizione è vera solo se almeno una delle proposizioni è vera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

IMPLICAZIONE LOGICA ($p \Longrightarrow q$, "se p allora q" o "p implica q"): La proposizione è falsa solo quando la premessa (p) è vera e la conclusione (q) è falsa.

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EQUIVALENZA ($p \equiv q$ o $p \Leftrightarrow q$, "p se e solo se q"): La proposizione è vera solo se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'equivalenza di due proposizioni può anche essere vista come la reciproca implicazione logica:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Le due tabelle di verità coincidono, dunque possiamo dire che le due scritture si equivalgono

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Anche in logica, come in algebra, esistono determinate proprietà che si possono applicare ai connettivi logici e alle proposizioni:

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \qquad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

PROPRIETÀ DI IDEMPOTENZA: $p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$

PROPRIETÀ DI ASSORBIMENTO: $p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p$

PROPRIETÀ CONTRONOMINALE: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

LEGGI DI DE MORGAN: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg$

La logica si serve anche di **predicati logici**, proposizioni la cui verità o falsità dipende dai parametri associati alle variabili in essa contenute. Le variabili di un predicato possono essere quantificate utilizzando i **quantificatori**: per ogni variabile si necessita un quantificatore (n variabili = n quantificatori). Essi sono:

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE: $\exists$ (esiste almeno uno), $\nexists$ (non esiste alcun), $\exists!$ (esiste ed è unico

QUANTIFICATORE UNIVERSALE: $\forall$ (per ogni)

Durante la quantificazione di un predicato non si possono scambiare commutativamente due quantificatori se non sono dello stesso segno:

$$\forall x \, \forall y : P(x, y) \equiv \forall y \, \forall x : P(x, y)$$

$$\forall x\, \exists y : P(x,y) \not\equiv \exists y\, \forall x : P(x,y)$$

Inoltre, i quantificatori possono essere negati, cambiando anche la quantificazione e la verità o falsità del predicato:

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : P(x)$$

ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE DIRETTA

Una dimostrazione diretta è un procedimento logico che parte dalle ipotesi per giungere linearmente all'affermazione della tesi.

Ipotesi:

$p =$ "n è un numero intero, positivo e pari"

$q =$ "n^2 è un numero intero pari"

Tesi:

$p \implies q$

Dimostrazione:

Affinché un numero n sia pari $\exists h \in N : n = 2h$, pertanto bisogna dimostrare $\exists h' \in N : n^2 = 2h'$

$$n = 2h$$

$$n^2 = 4h^2 = 2h'$$

$$4h^2 = 2(2h^2)$$

Posto $h' = 2h^2$

$$n^2 = 2(2h^2) = 2h'$$

CVD

ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Una dimostrazione per assurdo è un ragionamento logico che parte dalla negazione della tesi per provare che o le ipotesi o delle proposizioni su cui si basano le ipotesi sono false e per le quali l'antitesi non si può dimostrare. Dimostrando la falsità dell'antitesi si dimostra la verità della tesi.

Ipotesi:

$p = \text{"}Non\ esiste\ alcun\ numero\ razionale\ q\ tale\ che\ q^2 = 2\text{"}$

$o = \text{"}Sia\ \mathbb{Q}\ l'insieme\ dei\ numeri\ razionali\ \dfrac{m}{n}, con\ m \in \mathbb{Z} \in \mathbb{N}\ e\ che\ n\ e\ m\ primi\ tra\ loro\text{"}$

Tesi:

$o \Rightarrow p$

Dimostrazione:

Antitesi $o \Rightarrow \neg p$ per cui $\exists m \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{N}: q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$

$m^2 = 2n^2$

Da ciò deduciamo che m^2 è un numero pari e di conseguenza anche m.

$$m = 2h$$

$$m^2 = 4h^2 = 2n^2$$

$$2h^2 = n^2$$

Da ciò deduciamo che n^2 e n sono numeri pari. Abbiamo così che sia n che m sono numeri pari ma, per ipotesi, essi devono essere primi tra loro. Così l'antitesi è dimostrata falsa e la tesi vera.

CVD

TEORIA DEGLI INSIEMI

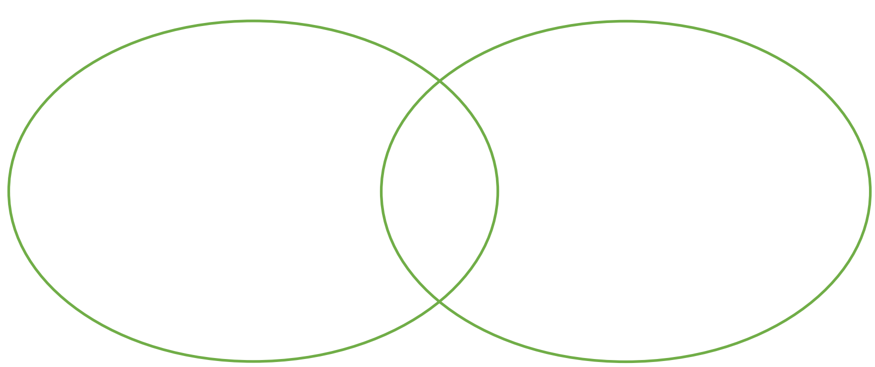
La teoria degli insiemi è quella parte della matematica che studia gli insiemi e ciò che li compone. **Non si dà la definizione di insieme** per non cadere nella reazione a catena di dover definire cosa definisce un insieme, piuttosto si lascia all'intuizione di definire l'insieme dando una regola generale per determinare se un elemento vi appartiene o meno.

Gli **insiemi** si scrivono con la **lettera maiuscola** mentre i suoi **elementi** con la **lettera minuscola**. Inoltre, si possono rappresentare insiemi ed elementi in tre modi:

ELENCAZIONE $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

ENUNCIAZIONE $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 6\}$

DIAGRAMMA DI EULERO-VENN:



Può accadere che un insieme contenga un altro insieme, in quel caso chiamiamo quest'ultimo **sottoinsieme** del primo. Ogni insieme contiene necessariamente un sottoinsieme, l'**insieme vuoto** ($\emptyset$), cioè quell'insieme costituito da nessun elemento. Esistono due tipi di relazioni che gestiscono i sottoinsiemi:

SOTTOINSIEME PROPRIO ($A \subset B$): ogni elemento di A è un elemento di B ma non tutti gli elementi di B sono elementi di A

SOTTOINSIEME NON PROPRIO ($A \subseteq B$): ogni elemento di A è un elemento di B

Se due insiemi coincidono essi sono reciprocamente sottoinsiemi:

$$A \equiv B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

È definito **insieme delle parti di A** quell'insieme che contiene tutti i sottoinsiemi possibili dell'insieme A ed ha **cardinalità $\boldsymbol{m = 2^n}$** dove n è la cardinalità dell'insieme A.

$$A = \{a; b; \}$$

$$P(A) = \{\{a; b\}; \{a\}; \{b\}; \emptyset\}$$

Bisogna far notare che a e $\{a\}$ non sono la stessa cosa: infatti il primo indica un elemento e il secondo un insieme. Scriveremo pertanto:

$$a \in A$$

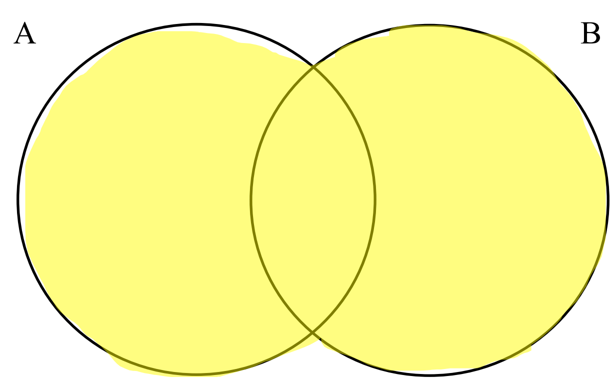
$$\{a\} \subset A$$

$$a \not\subset A$$

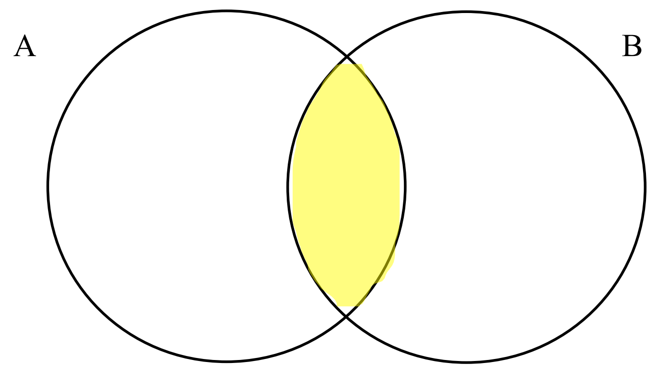
$$\{a\} \notin P(A)$$

Presi due insiemi, A e B inclusi in X ($\forall A, B \subseteq X$), si definisce:

UNIONE DI A E B ($A \cup B$): l'insieme costituito da elementi che appartengono ad **almeno un insieme**. $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$



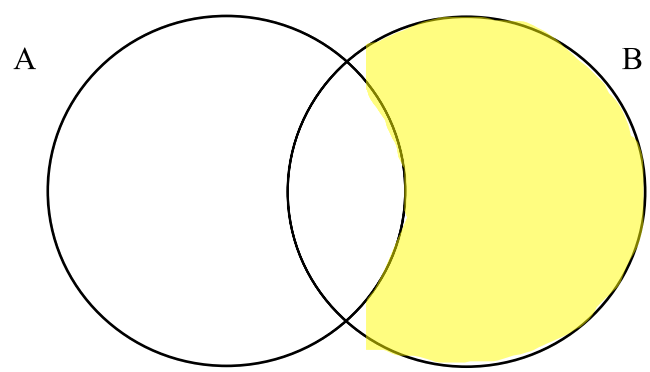
INTERSEZIONE DI A E B ($A \cap B$): l'insieme costituito da elementi che **appartengono sia ad A che a B**. $A \cap B = \{x \in X : x \in A \ \wedge x \in B\}$



Due insiemi si dicono **disgiunti** se $A \cap B = \emptyset$.

Gli operatori di intersezione e unione godono delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e delle leggi di De Morgan. La relazione tra operatori insiemistici e connettivi logici risulta dalla definizione stessa dei primi, nei quali saltano fuori $\vee$ e $\wedge$.

COMPLEMENTO DI A RISPETTO A B ($B - A$)($B \backslash A$)($B - (A \cap B)$): l'insieme costituito da tutti gli **elementi di B che non sono elementi di A**. $B - A = \{x \in X : x \in B \ \wedge x \notin A\}$



COMPLEMENTO DI A (CA)($X - A$): l'insieme costituito da tutti gli elementi dell'insieme X che non appartengono all'insieme A. $CA = \{x \in X : x \notin A\}$

Da ciò derivano le seguenti proprietà: $C\emptyset = X$; $CCA = A$; $CX = \emptyset$; $A \cap CA = \emptyset$; $A \cup CA = X$.

DIMOSTRAZIONE INSIEMI COMPLEMENTARI

Se un insieme è contenuto in un altro, il suo complementare contiene il complementare dell'altro.

Ipotesi:

$\forall A, B \subseteq X : B \subseteq A$

Tesi:

$CA \subseteq CB$

Dimostrazione:

$\forall x \in CA \Longrightarrow x \notin A \wedge x \in X$ ma $x \notin A \Longrightarrow x \notin B \wedge x \in CB$

$\forall x \in CB \Longrightarrow x \notin B \wedge x \in X$ ma $\exists x \in CB : x \in A$

Quindi $CA \subseteq CB$

CVD

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

Ipotesi:

$\forall A, B, C \subseteq X$

Tesi:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dimostrazione:

$[A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)] \wedge [(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)]$

Usando la definizione di intersezione e di unione e le proprietà dei connettivi logici:

$x \in A \vee (x \in B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

Analogamente:

$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cap C)$

CVD

PARTIZIONE DI UN INSIEME: sia I un insieme di indici, si definisce partizione di un insieme X non vuoto la famiglia di insiemi $\{A_i; i \in I\}$ tale che:

- $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ con\ i \neq j$;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

Ad esempio, quella che segue è una partizione:

$$X = \{a; b; c; d; e; f; g\}$$

$$I = \{1; 2; 3\}$$

$$A_1 = \{a; b\};\ A_2 = \{c; d; e\};\ A_3 = \{f; g\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \wedge \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X$$

PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI: è un sottoinsieme composto da tutte le **coppie ordinate** dei due insiemi di partenza. Una coppia ordinata è un insieme nel quale **l'ordine degli elementi è rilevante**.

Se prendiamo due insiemi $A = \{a; b\}$ e $B = \{b; a\}$ essi saranno uguali in quanto composti dagli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine; vale quindi la definizione:

$$\{a; b\} = \{a'; b'\} \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b') \vee (a = b' \wedge b = a')$$

In una coppia ordinata invece l'ordine conta e quindi $(a; b)$ non è equivalente a $(b; a)$, infatti vale la seguente definizione:

$$(a; b) = (a'; b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

Quindi una delle possibili definizioni di prodotto cartesiano è:

$$A \times B = \{(a; b): a \in A \wedge b \in B\}$$

Il prodotto cartesiano gode delle seguenti proprietà, oltre alla proprietà distributiva rispetto all'unione e all'intersezione:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$card(A) = n \ \wedge \ card(B) = m \ \Rightarrow card(A \times B) = n \cdot m$$

$$A \times A = A^2$$

$$D_A = \{(a; a): a \in A\}$$

Quest'ultima proprietà è chiamata **diagonale di A** e ci viene in aiuto parlando di relazioni e di funzioni.

RELAZIONI

Presi due insiemi A e B, diremo **relazione** o **corrispondenza** di A in B qualsiasi sottoinsieme R del prodotto cartesiano dei due insiemi, mentre diremo relazione di A qualsiasi sottoinsieme R del prodotto cartesiano di A per sé stesso. $\forall A, B \subseteq X$:

$$R \subseteq A \times B$$

$$aRb \iff (a; b) \in R$$

$$R = \{(a; b) \in A \times B\}$$

Definiamo **relazione binaria** una particolare relazione tra due insiemi equivalenti; essa corrisponde anche alla diagonale dell'insieme preso in considerazione. $\forall A, B \subseteq X: A = B$:

$$R = \{(a; b) \in A \times B: a = b\}$$

$$aRb \iff a = b$$

Esistono diverse tipologie di relazione, una di esse è la **relazione d'ordine**. Preso un insieme A, una relazione R in A è d'ordine, o è un **ordinamento**, se valgono le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ RIFLESSIVA: $\forall a \in R, aRa \implies D_A \subseteq R$

PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA: $\forall a, b \in A, (aRb \wedge bRa) \implies a = b$

PROPRIETÀ TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \implies aRc$

Diremo, quindi, un **insieme ordinato** la coppia (A, R) costituita da un insieme A e una relazione d'ordine R in A, mentre diciamo che due elementi a e b sono **confrontabili** in R se $aRb \vee bRa$. Quando in una relazione d'ordine tutti gli elementi sono confrontabili allora essa si definisce **relazione d'ordine totale**:

$$\forall a, b \in A, aRb \vee bRa$$

Se analizziamo bene la proprietà antisimmetrica di una relazione d'ordine, notiamo che negando le conclusioni giungiamo ad affermare:

$$a \neq b \implies \overline{(a; b) \in R \wedge (b; a) \in R}$$

Che, seguendo le leggi di De Morgan, possiamo scrivere anche come:

$$a \neq b \implies \overline{(a; b) \in R} \vee \overline{(b; a) \in R}$$

Questi sono due modi alternativi di scrivere la **proprietà antisimmetrica**.

ESEMPIO DI RELAZIONE D'ORDINE

$$\forall m, n \in N_0 = N \cup \{0\}, mRn \iff \exists h \in N_0 : m = n + h$$

Dimostrazione della proprietà riflessiva:

$\forall n \in N_0, nRn \Leftrightarrow \exists h \in N_0 : n = n + h$

Cioè $h = 0$.

Dimostrazione della proprietà antisimmetrica:

$\forall n, m \in N_0, nRm \wedge mRn \iff \exists h_1, h_2 \in N_0 : m = n + h_1 \wedge n = m + h_2$

Sommando membro a membro: $m + n = n + m + h_1 + h_2 \Leftrightarrow -h_1 = h_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2 = 0$

Cioè: $m = n + 0 \wedge n = m + 0 \Rightarrow m = n$

Dimostrazione della proprietà transitiva:

$\forall n, m, k \in N_0, (nRm \wedge mRk) \Rightarrow nRk \Leftrightarrow \exists h_1, h_2, h_3 \in N_0 : (m = n + h_1) \wedge (k = m + h_2) \Rightarrow (k = n + h_3)$

Sommando membro a membro: $m + k = n + m + h_1 + h_2$

Cioè: $k = n + (h_1 + h_2) = n + h_3$

Quella appena mostrata è una relazione d'ordinamento nell'insieme dei numeri naturali

CVD

Oltre alle relazioni d'ordine esistono anche le **relazioni di equivalenza**. Sia A un insieme, una relazione R in A è di equivalenza se gode delle proprietà:

PROPRIETÀ RIFLESSIVA: $\forall a \in R, aRa \Rightarrow D_A \subseteq R$

PROPRIETÀ SIMMETRICA: $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

PROPRIETÀ TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

Sia X un insieme non vuoto e ~ una relazione di equivalenza in X; preso un $x \in X$, diremo **classe di equivalenza** di x l'insieme: $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$, dove x è detto **rappresentante della classe di equivalenza**. Dalle classi di equivalenza derivano una serie di proprietà, $\forall x, y \in X$:

- $x \in [x]$;
- $y \sim x \Leftrightarrow [y] = [x]$;
- $y \notin [x] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.

Si parla di **insieme quoziente** per indicare l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Le partizioni di un insieme possono essere viste come delle classi di equivalenza e l'insieme di partenza come un insieme quoziente; prendiamo il caso dei numeri naturali e della loro partizione in numeri pari e dispari:

$$[0] = \{x \in \mathbb{N}: x = 2n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{N}: x = 2n + 1 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

La classe [0] rappresenta i numeri pari e [1] i numeri dispari, con i rispettivi rappresentanti 0 e 1, mentre l'insieme dei numeri naturali, che risulta dall'unione delle due classi $[0] \cup [1]$, è l'insieme quoziente. Infine, le due classi sono disgiunte in quanto $[0] \cap [1] = \emptyset$

Ed ecco come le partizioni di un insieme sono classi di equivalenza e l'insieme stesso è un insieme quoziente.

MAGGIORANTI E MINORANTI

Sia X un insieme ordinato e A un suo sottoinsieme non vuoto, l'elemento $x \in X$ è detto **maggiorante** di A se:

- $\forall a \in A, aRx \vee xRa$;
- $\forall a \in A, a \leq x$.

Analogamente, Sia X un insieme ordinato e A un suo sottoinsieme non vuoto, l'elemento $x \in X$ è detto **minorante** di A se:

- $\forall a \in A, aRx \vee xRa$;,
- $\forall a \in A, x \leq a$.

L'insieme di tutti i maggioranti di A sarà denominato A^*, quello di tutti i minoranti A_*.

Un numero $m \in X$ è detto **minimo** di A, $m = \min(A)$, se:

- $m \in A$;
- $\forall a \in A, m \leq a$, cioè m è *un* minorante di A.

Allo stesso modo, un numero $M \in X$ è detto **massimo** di A, $M = \max(A)$, se:

- $M \in A$;
- $\forall a \in A, a \leq M$, cioè M è *un* maggiorante di A.

DIMOSTRAZIONE UNIVOCITÀ MASSIMO E MINIMO DI UN INSIEME

Ipotesi:

$\forall (X; \leq), A, M: A \subseteq X \wedge M \in X$

Tesi:

$\exists!\, M \in X: M = \max(A)$

Dimostrazione:

Consideriamo per assurdo che esistano più maggioranti di A che siano anche massimi dello stesso insieme.

$$\exists M_1, M_2 \in X: M_1 = \max(A) \land M_2 = \max(A) \land M_1 \neq M_2$$

Considerando la seconda proprietà dei massimi per M_1:

$\forall a \in A, a \leq M_1$ ma poiché $M_2 \in A$ per la prima proprietà dei massimi, $M_2 \leq M_1$ in quanto M_1 è maggiorante di A.

Allo stesso modo per M_2:

$\forall a \in A, a \leq M_2$ ma poiché $M_1 \in A$ per la prima proprietà dei massimi, $M_1 \leq M_2$ in quanto M_2 è maggiorante di A.

Da ciò otteniamo:

$(M_1 \leq M_2 \land M_2 \leq M_1) \Rightarrow M_1 = M_2$

Ma per ipotesi $M_1 \neq M_2$, si è giunti all'assurdo e perciò $\exists!\, M \in X: M = \max(A)$.

Possiamo applicare lo stesso ragionamento con i minoranti e dimostriamo che esiste ed è unico il minimo di un insieme.

CVD

Un insieme A si dice **limitato superiormente** se possiede almeno un maggiorante e **limitato inferiormente** se possiede almeno un minorante. A è **limitato** se è sia limitato superiormente che inferiormente.

Viene definito estremo superiore di un insieme il minimo dei suoi maggioranti ed estremo inferiore il massimo dei suoi minoranti.

$$\sup(A) = \min(A^*)$$

$$\inf(A) = \max(A_*)$$

FUNZIONI

Le **funzioni**, o applicazioni o mappe, sono un qualunque sottoinsieme R del prodotto cartesiano $X \times Y$ che rispetta le seguenti proprietà:

$$\forall x \in X\ \exists y \in Y: xRy$$

$$\forall x \in X \ \forall y_1, y_2 \in Y: xRy_1 \ \wedge xRy_2 \Longrightarrow y_1 = y_2$$

Che possiamo entrambe riassumere come:

$$\forall x \in X \ \exists!\, y \in Y: xRy$$

L'insieme X è detto **dominio**, mentre Y **codominio**.

Potendo indicare y come f(x), possiamo scrivere la funzione nei seguenti modi:

$$f: X \to Y$$

$$x \to f(x)$$

$$R = \{(x; f(x)): x \in X\}$$

$$(x; y; f)$$

Sia $A \subseteq X$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \subseteq Y$ **è immagine di A tramite f** se:

$$f(A) = \{f(a): a \in A\}$$

Analogamente, sia $C \subseteq Y$, $\boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{A}) \subseteq X$ **è contro immagine di C tramite f^{-1}** se:

$$f^{-1}(C) = \{a \in X: f(a) \in C\}$$

Due funzioni f e g sono **equivalenti** se:

$$g = f \ \Leftrightarrow \forall x \in X \ f(x) = g(x)$$

Definiamo **grafico della funzione f**:

$$graf(f) = \{(x; y) \in X \times Y: y = f(x)\}$$

Di seguito sono proposte alcune funzioni fondamentali:

FUNZIONE COSTANTE: $f: X \to Y \quad f(x) = k \ \forall x \in X$

FUNZIONE IDENTITÀ: $id: X \to X \quad id(x) = x \ \forall x \in X$

IMMERSIONE DI A IN X: $j: A \to X \quad A \subseteq X \quad j(x) = x \ \forall x \in A$

SUCCESSIONE A VALORI IN X: $f: \mathbb{N} \to X$

PROIEZIONE DEL PRODOTTO CARTESIANO SU X: $Pr_X: X \times Y \to X \quad Pr_X(x; y) = x \ \forall (x; y) \in X \times Y$

PROLUNGAMENTO DI f A B: $X \subseteq B \quad g: B \to Y \quad g(x) = f(x) \ \forall x \in X$

RESTRIZIONE DI f A C: $C \subseteq X \quad f_{|C}: C \to Y \quad f_{|C}(x) = f(x) \ \forall x \in C$

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano le funzioni $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, si dice **funzione composta da f e g** o **prodotto di composizione di f e g** la funzione:

$$f \circ g: X \to Z$$

$$(f \circ g)(x) = g[f(x)]$$

Una particolarità di questo tipo di funzione è che il **dominio della funzione esterna**, g, è il **codominio della funzione interna**. Inoltre, se consideriamo una funzione e l'identità sul codominio e sul dominio:

$$f: X \to Y$$

$$id_Y[f(x)] = f = f[id_X(x)]$$

In quanto id_Y restituisce y e id_X restituisce x.

La composizione non è un'operazione commutativa ma è invece **associativa**, quindi:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE, BIETTIVE E FUNZIONE INVERSA

FUNZIONE INIETTIVA: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure

$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ perché $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$

Ciò significa che se si tracciano infinite **rette parallele all'asse delle x**, nessuna di esse toccherà per **più di una volta** il grafico della funzione.

FUNZIONE SURIETTIVA: $\forall y \in Y\ \exists x \in X: y = f(x)$

FUNZIONE BIETTIVA: $\forall y \in Y\ \exists!\, x \in X: y = f(x)$, cioè se è sia iniettiva che suriettiva

Una funzione è **invertibile** se $f \circ g = id_y \wedge g \circ f = id_x$ considerando g la **funzione inversa**. È possibile dimostrare che data una funzione se esiste la funzione inversa essa è unica.

DIMOSTRAZIONE UNIVOCITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Ipotesi:

$\forall f: X \to Y\ \wedge\ g: Y \to X : f \circ g = id_y \wedge g \circ f = id_x$

Tesi:

$\exists!\, g: Y \to X$

Dimostrazione:

Consideriamo per assurdo che esistano due funzioni inverse di *f*, g_1 e g_2. Ciò significa che:

$$f \circ g_1 = id_y \wedge g_1 \circ f = id_x$$

$$f \circ g_2 = id_y \wedge g_2 \circ f = id_x$$

Considerando il rapporto tra g_1 e le funzioni identità di x e y:

$$g_1 = id_X \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ id_Y = g_2$$

Abbiamo così dimostrato che $g_1 = g_2$, arrivando all'assurdo. Pertanto, esiste ed è unica la funzione invertibile di una funzione *f*.

CVD

È possibile dimostrare che quando una funzione è bigettiva essa è invertibile e viceversa.

DIMOSTRAZIONE INVERTIBILITÀ E BIETTIVITÀ DI UNA FUNZIONE

Ipotesi:

$\forall f: X \to Y: \forall y \in Y \ \exists! \, x \in X: y = f(x)$,

Tesi:

$\exists f^{-1} \Leftrightarrow \forall y \in Y \ \exists! \, x \in X: y = f(x)$

Dimostrazione:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$,

Dimostriamo che $invertibilit$à $\Longrightarrow biettivit$à:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)] \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Cioè f è iniettiva.

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X: x = f^{-1}(y) \Longrightarrow y = f(x)$$

Cioè f è suriettiva.

In quanto iniettiva e suriettiva, f è biunivoca, quindi invertibile.

Dimostriamo che $biettivit$à $\Rightarrow iniettivit$à:

Poiché la funzione f è bigettiva, ogni x del suo dominio associa una y del codominio. Costruiamo quindi la funzione $g: Y \to X$ tale che $x = g(y)$ e componiamola con f:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(y)\big) = f(x) = id_Y$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = id_X$$

Queste due sono la condizione di invertibilità, per cui possiamo dire:

$$invertibilità \Leftrightarrow biettività$$

CVD

Per disegnare il **grafico di una funzione inversa** bisogna considerare il grafico **simmetrico** rispetto alla **bisettrice** del primo e terzo quadrante (la retta y=x) in quanto tra i due grafici ci si scambiano solo di posto le coppie ordinate:

$$graf(f) = \{(x; y) \in X \times Y : y = f(x)\} = \{\left(x; f(x)\right) : x \in X\}$$

$$graf(f^{-1}) = \{(y; x) \in Y \times X : x = f^{-1}(y)\} = \{(f(x); x) : x \in X\}$$

Il **punto medio** della distanza tra un punto sul grafico di una funzione e il suo speculare sul grafico della funzione inversa è:

$$A\left(x; f(x)\right)$$

$$A^{-1}(f(x); x)$$

$$M\left(\frac{x + f(x)}{2}; \frac{f(x) + x}{2}\right)$$

Tale punto giace sulla retta y=x, che abbiamo detto essere l'asse di simmetria su cui calcolare il grafico della funzione inversa, ma possiamo dimostrare anche che tale retta è perpendicolare a quella che passa per i due punti:

$$y = x \Rightarrow m = 1$$

$$m^{-1} = \frac{x - f(x)}{f(x) - x} = -1$$

Le due rette, di coefficiente $m = 1$ per $y = x$ e $m^{-1} = -1$ per quella passante per i punti dei due grafici, sono **antiparallele** e perciò **perpendicolari**.

DIMOSTRAZIONE FUNZIONE INVERTIBILE MONOTONA

Ipotesi:

$\forall f: A \to R : f$ è $invertibile\ e\ strettamente\ monotona$

Tesi:

f^{-1} è $strettamente\ monotona\ dello\ stesso\ ordine\ di\ f$

Dimostrazione:

$$\forall y_1, y_2 \in f(A): y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Supponiamo per assurdo:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

$$x_1 \geq x_2$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$$

$$y_1 \geq y_2$$

Ma è un assurdo perché $y_1 < y_2$.

CVD

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

$\forall X, Y \subseteq R: f: X \to Y$

FUNZIONE CRESCENTE: $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE: $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

FUNZIONE DECRESCENTE: $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

FUNZIONE STRETTAMENTE DECRESCENTE: $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Quando una funzione è crescente o decrescente, essa è detta **monotona** ma non è iniettiva. Quando invece una funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente essa è **iniettiva**.

INSIEMI E CAMPI NUMERICI

Sia dato l'insieme e le due applicazioni di K per K in K, dette operazioni:

$$(K, +, \cdot)$$

$$+ : K \times K \to K$$

$$\cdot : K \times K \to K$$

Si definisce **campo** la **struttura algebrica** formata da tale insieme e tali operazioni che rispecchi le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in K$:

- Proprietà commutativa (rispetto ad entrambe le operazioni) $x + y = y + x$;
- Proprietà associativa (rispetto ad entrambe le operazioni) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- Proprietà distributiva (rispetto ad entrambe le operazioni) $x \cdot (y + z) = xy + xz$;
- Esistenza dell'elemento neutro (rispetto ad entrambe le operazioni) $x + x_0 = x$;
- Esistenza dell'opposto (per la prima operazione) $x + (-x) = 0$;

- Esistenza del reciproco (per la seconda operazione) $x \cdot x^{-1} = 1$;

Il numero x^{-1} si chiama reciproco e può essere indicato anche con $\frac{1}{x}$.

Preso un campo $(K, +, \cdot)$ e una relazione d'ordine $\leq$ in K, esso è un **campo ordinato** quando l'insieme K è totalmente ordinato e sono soddisfatte le seguenti proprietà, detta **relazione di compatibilità**:

- $\forall x, y, z \in K: x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$;
- $\forall x, y, z \in K: x \leq y \land 0 \leq z \Longrightarrow xz \leq yz$;

Da ciò consegue che in un campo ordinato $(K, +, \cdot, \leq)$ l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione in K.

Presi due campi ordinati $(K, +, \cdot, \leq)$ e $(\dot{K}, \dot{+}, \dot{\cdot}, \dot{\leq})$, si chiama **isomorfismo** quella caratteristica secondo cui una funzione $f: K \to \dot{K}$ segue le seguenti proprietà $\forall x, y \in K$:

- f è bigettiva;
- $f(x \cdot y) = f(x) \dot{\cdot} f(y)$ per entrambe le operazioni;
- $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \dot{\leq} f(y)$;

In tal caso i campi si dicono **isomorfi**. Etimologicamente, l'isomorfismo indica l'essere uno la copia dell'altro (iso-morfo, stessa forma).

Un **campo** $(K, +, \cdot, \leq)$ è detto **completo** se ogni suo sottoinsieme è limitato superiormente/inferiormente e ha in K l'estremo superiore/inferiore. Tale proprietà è detta **assioma di completezza**. Due campi completi sono sempre isomorfi.

DIMOSTRAZIONE DELLA CARATTERIZZAZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE

Ipotesi

$\forall A \subseteq R: A \neq \emptyset \land \exists\, supA \Leftrightarrow \forall x \in A\ x \leq L \land \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A: x_\varepsilon > L - \varepsilon$

Tesi:

$\exists!\, L \in R \land L = minA^*$

Dimostrazione:

Si dimostra che L è maggiorante di A: la prima proprietà dell'estremo superiore è la definizione di maggiorante.

Possiamo anche dire che esso è il minimo dei maggioranti in quanto, se $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ non è un maggiorante e per definizione esiste un numero che sia maggiore di questo non-maggiorante.

Adesso si dimostra che tale valore è unico: supponiamo per assurdo che L non sia unico ma che esista un L_1 che sia anch'esso un maggiorante. Secondo tale supposizione $\varepsilon = L - L_1$ e da ciò possiamo dire:

$$L - (L - L_1) < x_\varepsilon \quad \forall x_\varepsilon \in A$$

$$L_1 < x_\varepsilon$$

Da ciò deriva che L_1 non è un maggiorante; pertanto, esiste ed è unico l'estremo superiore di A.

Possiamo effettuare lo stesso ragionamento con l'estremo inferiore di A.

Se l'insieme A è illimitato superiormente diciamo che $supA = +\infty$ e se è illimitato inferiormente $infA = -\infty$.

INTERVALLI DI R

Dal momento in cui R è un campo ordinato, possiamo definire quelli che sono gli **intervalli dell'insieme R**, cioè dei sottoinsiemi particolari:

$\forall a, b \in R$

$$[a;b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$$

$$]a;b[= \{x \in R: a < x < b\}$$

$$[a;b[= \{x \in R: a \leq x < b\}$$

$$]a;b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$$

Sono **intervalli limitati**, di seguito sono mostrati gli **intervalli illimitati**:

$$[a;+\infty[= \{x \in R: a \leq x\}$$

$$]a;+\infty[= \{x \in R: a < x\}$$

$$]-\infty;a] = \{x \in R: x \leq a\}$$

$$]-\infty;a[= \{x \in R: x < a\}$$

$$]-\infty;+\infty[= R$$

Un insieme $I \subseteq R$ è un intervallo se $\forall x, y \in I: x < y, [x;y] \subseteq I$. Ad esempio, preso l'insieme $A = [2;3] \cup [5;9]$ non è un intervallo; mentre per $A' = [2{,}5;8]$, sebbene gli estremi appartengano ad A, non tutti gli elementi appartengono allo stesso insieme e pertanto non è un intervallo.

CLASSI SEPARATE E CONTIGUE

Presi due sottoinsiemi non vuoti di R, A e B, si dice che essi costituiscono **classi separate** se:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b$$

Quindi $A \preccurlyeq B$. Un elemento x è detto elemento separatore di A e B se:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq x \leq b$$

Dalla definizione consegue che ogni elemento di B è maggiorante di A e ogni elemento di A è minorante di B; dunque, A è limitato superiormente e B limitato inferiormente. Come conseguenza della completezza di R, esiste $\alpha = supA$ e $\beta = infB$; ogni elemento di B è maggiore di α, che è un minorante di B, ma β è il massimo dei minoranti di B e pertanto si può dire: $\forall x \in [\alpha; \beta]$, x è un elemento di separazione di A e B.

Due classi separate $A \preccurlyeq B$ sono contigue se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \exists b \in B: b - a < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE DELL'UNIVOCITÀ DELL'ELEMENTO DI SEPARAZIONE DI DUE CLASSI CONTIGUE

Ipotesi:

$\forall A, B \subseteq R: A \preccurlyeq B$

$\alpha = supA \quad \wedge \quad \beta = infB$

Tesi:

$\exists! \, x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Dimostrazione:

Dimostriamo $contiguit$à $\Longrightarrow \alpha = \beta$.

Supponiamo che per assurdo $\alpha < \beta$, quindi che non siano uguali, e poniamo $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Per la definizione di contiguità scriviamo:

$$b - a < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Ma ciò è un assurdo in quanto α e β sono contenuti nell'intervallo [a;b] perché sono estremi superiore e

inferiore dei rispettivi insiemi. Quindi $\alpha = \beta$

Analogamente dimostriamo $\alpha = \beta \Longrightarrow contiguit$à.

Per definizione di estremo:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A: \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in B: \beta + \frac{\varepsilon}{2} > b_\varepsilon$$

Ma per ipotesi $\alpha = \beta$, quindi:

$$\begin{cases} -a_\varepsilon < -\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ b_\varepsilon < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$b_\varepsilon - a_\varepsilon < -\alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$b - a < \varepsilon$$

Che è la definizione di contiguità.

CVD

CONSEGUENZE DELL'ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI R

Per analizzare le **conseguenze dell'assioma di completezza di R** bisogna prima definire alcuni **sottoinsiemi di R**, gli insiemi numerici, N, Z, Q; la costruzione di questi insiemi numerici avviene sfruttando le proprietà costitutive dei campi.

COSTRUZIONE DI N

Considerato $1 \in R$, e definita l'operazione di somma nel campo dei numeri reali, $1 + 1 \in R$, di conseguenza anche $(1 + 1) + 1 \in R$ e $[(1 + 1) + 1] + 1 \in R$. Tutti i numeri che sfruttano questa proprietà sono detti **numeri Naturali**.

COSTRUZIONE DI Z

Poiché in un campo è necessaria l'esistenza dell'opposto, per ogni numero Naturale *x* esiste un suo opposto *-x*; l'insieme dei numeri *-x* è detto **insieme dei numeri Relativi**.

COSTRUZIONE DI Q

Poiché in un campo è necessaria l'esistenza del reciproco, per ogni coppia di numeri naturali diversa da 0 è possibile l'operazione di moltiplicazione per il reciproco. Dunque, l'insieme dei numeri $m \cdot n^{-1}$ è detto **insieme dei numeri Razionali**. Una conseguenza della completezza di R è il seguente teorema:

DIMOSTRAZIONE NON LIMITATEZZA DI N

Ipotesi:

$\forall n \in N$

Tesi:

$\nexists supN$

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo: $\exists L = supN$, ciò significa che $L - 1 < \bar{n}$, cioè $L < \bar{n} + 1$ il che è un assurdo perché L è un maggiorante per definizione. N non è limitato superiormente. Consegue da questo teorema che neanche Z e Q lo sono.

È possibile dimostrare analogamente come non siano limitati neanche inferiormente.

CVD

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

Ipotesi:

$\forall a, b \in R: a, b > 0$

Tesi:

$\exists n \in N: na > b$

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo: $na \leq b$, cioè $n \leq \frac{b}{a}$ ma è un assurdo perché implicherebbe la limitatezza superiore di N.

CVD

TEOREMA DEL BUON ORDINAMENTO DI N

Ogni sottoinsieme non vuoto A di N ha un minimo.

Corollario 1: Un sottoinsieme A non vuoto di Z, se limitato inferiormente/superiormente ha un minimo/massimo

Corollario 2: Un sottoinsieme A non vuoto di Q non ammette massimo.

DIMOSTRAZIONE DELLA NON COMPLETEZZA DI Q

Ipotesi:

$A = \{x \in Q : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$

Tesi:

$\exists\ supA \notin Q$ (non è un campo completo)

Dimostrazione:

Si può mostrare che A non è vuoto semplicemente indicando un suo elemento come 1, che appartiene all'insieme, e che è dotato di maggiorante 2. Infatti, per definizione di maggiorante:

$$x < 2 \quad \forall x \in A$$

$$x^2 < 4$$

$$x - 4 < 0$$

$$(x + 2)(x - 2) < 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

A è dotato di maggiorante ed è, dunque, limitato superiormente. Bisogna adesso mostrare che un numero c, minore dei maggioranti, non appartiene a Q. C deve rispettare la seguente relazione in quanto maggiorante:

$$x^2 < c^2$$

Proprio come è stato mostrato prima per 2. In relazione a 2 abbiamo, quindi, tre possibilità:

- $c^2 = 2;$
- $c^2 > 2;$
- $c^2 < 2.$

1. Caso $c^2 = 2$:

$c \in Q$ per definizione di numero razionale, infatti non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia due. $c = \sqrt{2} \notin Q$.

2. Caso $c^2 > 2$:

Considerato un numero *n* positivo e il numero $0 < c - \frac{1}{n} < c$. Dimostriamo che il numero $c - \frac{1}{n}$ sia un maggiorante di A.

$$(c - \frac{1}{n})^2 = c^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2c}{n} > 2$$

Possiamo trascurare $\frac{1}{n^2}$ in quanto quantità molto piccola;

$$c^2 - \frac{2c}{n} > 2$$

$$-\frac{2c}{n} > 2 - c^2$$

$$n > \frac{2c}{c^2 - 2}$$

Per la proprietà di Archimede, esiste un numero naturale positivo *n* tale che $c - \frac{1}{n}$ sia un maggiorante di A. Se esiste questo numero si va in contraddizione, in quanto un numero più piccolo dell'estremo superiore di A non può essere maggiorante di A (per definizione l'estremo è il più piccolo dei maggioranti) e dunque $c - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante.

3. Caso $c^2 < 2$:

Considerato un numero *n* positivo e il numero $c < c + \frac{1}{n}$. Dimostriamo che $c + \frac{1}{n}$ appartiene ad A.

$$(c + \frac{1}{n})^2 < 2$$

$$c^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2c}{n} < 2$$

Possiamo anche sostituire $\frac{1}{n^2}$ con $\frac{1}{n}$ specificando la diseguaglianza $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$:

$$c^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2c}{n} < c^2 + \frac{1}{n} + \frac{2c}{n} < 2$$

$$c^2 + \frac{2c + 1}{n} < 2$$

$$\frac{2c + 1}{n} < 2 - c^2$$

$$n > \frac{2c + 1}{2 - c^2}$$

Con la proprietà di Archimede abbiamo dimostrato che esiste un numero *n* positivo tale che $c + \frac{1}{n}$ appartiene ad A; ciò però incontra l'assurdo perché una quantità maggiore dell'estremo superiore di A non può appartenere ad A. Abbiamo così dimostrato che l'estremo superiore di $A \subseteq Q$ non appartiene a Q; dunque, Q non è un campo completo.

CVD

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia A un sottoinsieme non vuoto di N. Se esiste un intero positivo $n_0 \in A$ e se, supponendo l'esistenza di un $n \in A$, consegue che $n + 1 \in A$, allora A coincide con N.

Possiamo anche dire che avendo una successione infinita di proposizioni P_n, per dimostrare che sono tutte vere:

- Si trova un n_0 tale che P_{n_0}è vera;
- Si verifica che dalla supposizione di P_n vera consegue che P_{n+1} è vera.

DIMOSTRAZIONE

Ipotesi:

$A \subseteq N$

$n_0 \in A$

$n \in A, n \geq n_0 \Longrightarrow n + 1 \in A$

Tesi:

$A = N$

Dimostrazione:

Prendiamo l'insieme $S = \{n \in N : n \geq n_0 \land n \notin A\}$ che funge da complemento di A rispetto ad N e dimostriamo che esso sia vuoto.

Supponiamo per assurdo: S non è vuoto, quindi $\exists m = minS \in S$ per il teorema del buon ordinamento.

$$m \neq n_0$$

In quanto $n_0 \in A$ e perciò:

$$n_0 < m$$

In particolare, in quanto numero naturale:

$$0 < m$$

$$m = n + 1$$

Cioè m è il successore di un numero naturale positivo $n \geq n_0$ che appartiene ad A per ipotesi e perché $n < m = minS$.

Segue così che:

$$n + 1 = m \in A$$

Assurdo: m non può appartenere ad S e ad A; quindi, S è vuoto e A coincide con N.

CVD

APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Identità di Gauss: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Preso $n_0 = 1$, $P_1 = 1$ è verificata.

$$P_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi l'identità di Gauss è vera $\forall n \in N$.

Disuguaglianza di Bernoulli: $\forall n \in N\ \forall x \in R: x > 1, (x+1)^n \geq -1 + nx$

Preso $n_0 = 1, P_1$ è verificata $x + 1 \geq 1 + x$.

Supposta vera per n, si dimostri che è vera per $n + 1$, cioè che vale $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$:

$$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$$

Ma:

$$1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Quindi per la proprietà transitiva risulta:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Quindi la disuguaglianza di Bernoulli è vera $\forall n \in N$.

FUNZIONI ELEMENTARI

FATTORIALE DI UN NUMERO E COEFFICIENTI BINOMIALI

Se $n \in N$, si denota come **fattoriale** $n!$ il prodotto dei primi *n* numeri naturali positivi:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Fa eccezione 0!, che vale 1. Con queste informazioni si può descrivere il fattoriale anche per induzione:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

Inoltre, presi due numeri naturali *n* e *k*, con $0 \leq n \leq k$, definiamo il **coefficiente binomiale** come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Che, semplificando i termini, possiamo anche scrivere:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Il coefficiente binomiale gode delle seguenti **proprietà**:

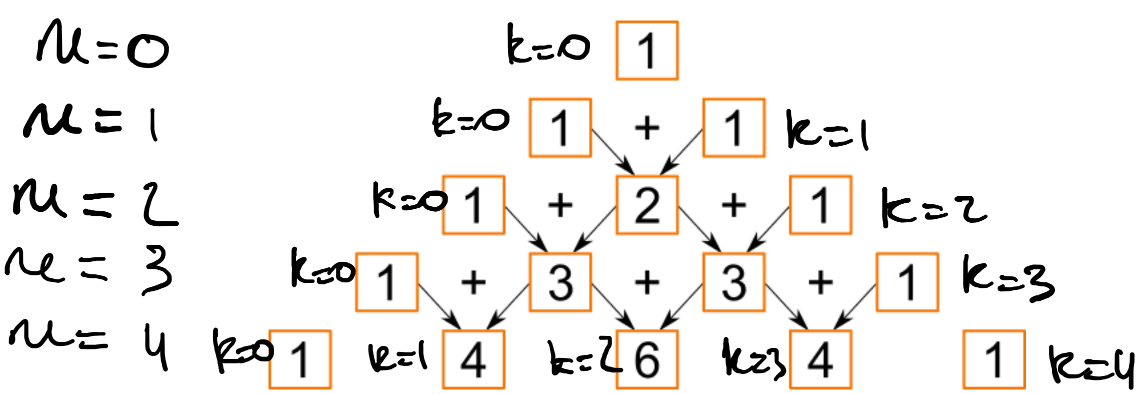
$$\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

L'ultima proprietà dei coefficienti binomiali è nota come **Triangolo di Tartaglia** e interviene, come il Binomio di Newton, nella composizione dei quadrati di binomio.



Ogni numero risulta dal coefficiente binomiale del numero della sua riga e della posizione che esso occupa in tale riga.

Con **Binomio di Newton** si indica la relazione $\forall a, b \in R \ \wedge \ \forall n \in N$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

La soluzione di un Binomio di Newton corrisponde alla **riga n-esima** del Triangolo di Tartaglia.

DIMOSTRAZIONE DEL BINOMIO DI NEWTON PER INDUZIONE

Ipotesi:

$\forall a, b \in R \ \wedge \ \forall n \in N$

Tesi:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Dimostrazione:

Dimostriamo la formula per induzione. Per $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^{-k} = 1$$

Supposta vera per *n*, dimostriamo che è vera per *n*+1:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

Trasliamo k di -1 al primo membro:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Portiamo fuori l'ultimo termine della sommatoria:

$$a^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Portiamo il primo indice della seconda sommatoria fuori in modo da far coincidere gli indici *k*:

$$a^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+b^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$
$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k}$$

Reinseriamo i termini che abbiamo portato fuori (il primo e l'ultimo:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k}=(a+b)^{n+1}$$

Il Binomio di Newton vale per tutti i numeri naturali *n*.

CVD

DENSITÀ IN R

Un sottoinsieme A di R è detto **denso in R** se $\forall a,b\ \in R\ a<b\ \exists\ x\in A: a<x<b$.

DIMOSTRAZIONE DENSITÀ DI Q IN R

Ipotesi:

$\forall a,b\in R, a<b$

Tesi:

$\exists x\in Q: a<x<b$

Dimostrazione:

Per la proprietà di Archimede $\exists n\in N: n>\frac{1}{b-a}$, cioè:

$$a+\frac{1}{n}<b$$

Sia considerato l'insieme:

$$A = \{k \in N_0 : k \leq na\}$$

Tale insieme non è vuoto ed è limitato superiormente; pertanto, ammette un massimo $m \in A$ con $m + 1 \notin A$. Dunque

$$m \leq na < m + 1$$

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$$

Otteniamo dunque le seguenti relazioni:

$$a < \frac{m+1}{n}$$

$$\frac{m}{n} < a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n}$$

Tenendo conto della conseguenza della proprietà di Archimede su a e b:

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n} < b$$

Dunque:

$$a < \frac{m+1}{n} < b$$

Preso $\frac{m+1}{n} = x$:

$$a < x < b$$

CVD

DIMOSTRAZIONE DENSITÀ R\Q IN R

Ipotesi:

$\forall a, b \in R, a < b$

Tesi:

$\exists y \in R \setminus Q : a < y < b$

Dimostrazione:

Dal momento in cui $a - y$ e $b - y$ sono numeri reali, esiste un numero *x* razionale tale che:

$$a - y < x < b - y$$

$$a < x + y < b$$

Ma avendo *y* come numero irrazionale $x + y$ sarà sicuramente irrazionale, quindi:

$$a < y < b \quad \forall y \in R \backslash Q$$

CVD

DIMOSTRAZIONE DI Z IN N

Ipotesi:

$\forall x \in R$

Tesi:

$\exists! \, m \in Z: m \leq x < m + 1$

Dimostrazione:

Se $x = 0$ allora $m = 0$.

Se $x > 0$ allora $A = \{n \in N_0 : n \leq x\}$. Questo insieme, non vuoto e limitato superiormente, per il primo corollario del teorema di buon ordinamento ammette un massimo $m = maxA \in A$. Il numero che cerchiamo è proprio *m* in quanto $m \leq x$ e $m + 1 > x$.

Se $x < 0$ allora $A = \{n \in N_0 : n \leq -x\}$. Analogamente a prima $maxA = m - 1$ in modo da ottenere:

$$m - 1 < -x \leq m$$

Cioè:

$$-m \leq x < -m + 1$$

Dopo aver dimostrato che esiste, si dimostra che *m* è unico. Supponiamo per assurdo:

$$m_1 \leq x < m_1 + 1$$

$$m_2 \leq x < m_2 + 1$$

Allora:

$$x \in [m_1; m_1 + 1[\cap [m_2; m_2 + 1[$$

Ma ciò è vero solo se $m_1 = m_2$.

CVD

$\forall x \in R$, si definisce **parte intera** di x l'unico $[x] \in N: [x] \leq x < [x] + 1$. In funzione della dimostrazione precedente possiamo anche dire: $[x] = \max\{n \in Z: n \leq x\}$. Si definisce invece **mantissa** il numero $\{x\} = x - [x]$.

La parte intera di *x* soddisfa le seguenti proprietà:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in Z$;
- $[x + k] = [x] + k, \forall k \in Z$;
- $[-x] = -[x] - 1, \forall x \in R \backslash Z$;
- $\big[[x]\big] = [x], \forall x \in R$ (idempotenza).

IL VALORE ASSOLUTO

Definito il **valore assoluto** come:

$$|x| = \begin{cases} x \ \ sex > 0 \\ -x \ \ se\ x < 0 \end{cases}, \forall x \in R$$

Definiamo le sue **proprietà**:

1. $|x| \geq 0$;
2. $\sqrt{x^2} = |x|$;
3. $-|x| \leq x \leq |x|$;
4. $|x^2| = x^2$;
5. $|xy| = |x||y|$
6. $|x| \leq a \ \Leftrightarrow \ -a \leq x \leq a \ \forall a \in R^+$

   $\begin{cases} x \leq a \ \ se\ x > 0 \\ x \geq -a \ \ se\ x < 0 \end{cases}$ cioè $-a \leq x \leq a$;

7. $|x| \leq a \Leftrightarrow \ a \leq x \vee x \leq -a$
   $\begin{cases} x \geq a \ \ se\ x > 0 \\ x \leq -a \ \ se\ x < 0 \end{cases}$ cioè $-a \geq x \ \vee a \leq x$;
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$, diseguaglianza triangolare
   Richiamando la proprietà 3 e la proprietà 6:
   $-|x| \leq x \leq |x|$
   $-|y| \leq y \leq |y|$
   Sommando membro a membro:
   $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$
   Per verificare quando vale il segno di uguaglianza eleviamo al quadrato:
   $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y|$
   $|x + y|^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
   Le due relazioni si eguagliano quando:
   $|xy| = xy$
   Cioè quando sono di segno concorde;
9. $|x| - |y| \leq |x - y|$

Usando la proprietà 8:
$|x + y - y| \leq |x - y| + |y|$
$|x| \leq |x - y| + |y|$
$|x| - |y| \leq |x - y|$;

10. $|x - y| \leq b - a \Leftrightarrow a \leq x \leq b \wedge a \leq y \leq b$
Invertiamo i segni dell'inclusione di y:
$-b \leq -y \leq -a$
Sommiamo membro a membro le due disuguaglianze:
$-b + a \leq x - y \leq b - a$
$-(b - a) \leq x - y \leq b - a$
Che per la proprietà 6 invera la tesi;
11. $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Longrightarrow |x| = 0$
Per assurdo $|x| \neq 0$. Preso $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, si ottiene l'assurdo $|x| < \frac{|x|}{2}$;

RADICALI ARITMETICI DI UN NUMERO

Al fine di dimostrare l'unicità di un radicale bisogna dimostrare la seguente proprietà

DIMOSTRAZIONE DIFFERENZA DI POTENZE

Ipotesi:

$\forall n \in N\ \forall a, b \in R: a < b$

Tesi:

$b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b - a)$

Dimostrazione:

Si svolge la differenza di due potenze con lo stesso esponente:

$$b^n - a^n = (b - a)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + a^{n-1})$$

Poiché $a^n < b^n$, se si sostituisce il primo con il secondo termine:

$$(b - a)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + a^{n-1})$$
$$\leq (b - a)(b^{n-1} + b^{n-1} + b^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$$

Quindi:

$$(b - a)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + a^{n-1}) \leq n(b^{n-1})(b - a)$$

Cioè:

$$b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b - a)$$

CVD

Se al posto di sostituire con b^n sostituisco con a^n si ottiene:

$$b^n - a^n \geq na^{n-1}(b-a)$$

Che possiamo generalizzare in:

$$na^{n-1}(b-a) \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ DI UN RADICALE ARITMETICO

Ipotesi:

$\forall y \in R^+ \ \forall n \in N$

Tesi:

$\exists! \, x \in R: y = x^n$

Dimostrazione:

Si dimostra per assurdo l'unicità di tale *x*, supponendo:

$$0 < x_1 < x_2$$

$$x_1 = y \ \ x_2 = y$$

Si raggiunge l'assurdo in quanto:

$$y < y$$

Si dimostra l'esistenza di x considerando l'insieme $A = \{x \in R: x > 0 \ \wedge \ x^n \leq y\}$. Tale insieme:

- Non è vuoto, $\alpha^n = (\min\{1; y\})^n \leq y$;
- Limitato superiormente, e quindi dotato di maggiorante, $\beta = \max\{1; y\}$, $\beta^n \geq y \geq x^n$.

Per la completezza di R, $\exists \bar{x} = supA$; preso un $\varepsilon > 0$ e $\delta = min\{\frac{\varepsilon}{n2^n\bar{x}^{n+1}}; \frac{\bar{x}}{2}\}$, si ha:

$$\delta \leq \frac{\bar{x}}{2} < \bar{x}$$

Da cui:

$$\bar{x} - \delta < \bar{x} < \bar{x} + \delta$$

$\bar{x} - \delta$ non è un maggiorante e $\bar{x} + \delta$ non appartiene all'insieme A.

$$(\bar{x} - \delta)^n < \bar{x}^n < (\bar{x} + \delta)^n$$

Per la seconda proprietà dell'estremo superiore $\exists z \in R$:

$$(\bar{x}-\delta)^n < z^n < \bar{x}^n < (\bar{x}+\delta)^n$$

Che si può scrivere anche:

$$(\bar{x}-\delta)^n < z^n < y < (\bar{x}+\delta)^n$$

Sottraendo le due disequazioni:

$$-[(\bar{x}+\delta)^n - (\bar{x}-\delta)^n] < \bar{x}^n - y < (\bar{x}+\delta)^n - (\bar{x}-\delta)^n$$

Che diventa, per la proprietà 10 del valore assoluto:

$$|\bar{x}^n - y| < (\bar{x}+\delta)^n - (\bar{x}-\delta)^n$$

Per la proprietà dimostrata precedentemente:

$$(\bar{x}+\delta)^n - (\bar{x}-\delta)^n \leq n2\delta(\bar{x}+\delta)^{n-1}$$

Sostituendo δ con $\bar{x}$ (poiché $\delta < \bar{x}$):

$$|\bar{x}^n - y| < n2\bar{x}(2\bar{x})^{n-1}$$

Posto $n2\bar{x}(2\bar{x})^{n-1} = \varepsilon$, per la proprietà 11 del valore assoluto:

$$|\bar{x}^n - y| < \varepsilon$$

$$\bar{x}^n - y = 0$$

$$\bar{x}^n = y$$

CVD

Va notato che preso $\varepsilon = n2\bar{x}(2\bar{x})^{n-1}$, $\delta = min\left\{\bar{x}; \frac{\bar{x}}{2}\right\} = \frac{\bar{x}}{2}$,

Il valore *x* tale che y= x^n è chiamato **radice aritmetica** e si indica $x = \sqrt[n]{y}$. Quando *n* è dispari la radice aritmetica si può effettuare su qualsiasi numero reale indipendentemente dal segno, in quanto:

$$\sqrt[2n+1]{y} \stackrel{\text{def}}{=} -\sqrt[2n+1]{-y}$$

Se invece *n* è pari tale uguaglianza non è valida perché non esiste soluzione reale ad una radice positiva di un numero negativo.

Con i radicali sussistono le seguenti proprietà:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nq]{x}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[q]{x^p} \quad \Leftrightarrow \frac{p}{q} \in \left[\frac{n}{m}\right]$$

FUNZIONI ELEMENTARI

Per definire una funzione è necessario definire e conoscere la **legge** che ci permette di associare una x ad una y; nel caso della funzione logaritmica, ad esempio, bisogna prima conoscere il logaritmo.

Di seguito sono definite delle nozioni utili alla classificazione delle funzioni:

FUNZIONE PARI E DISPARI

Presa una funzione:

$$f: A \to R$$

Con $A \subseteq R$, la funzione è **pari** se:

$$\forall x \in A - x \in A \wedge f(x) = f(-x)$$

La funzione è **dispari** se:

$$\forall x \in A - x \in A \wedge f(-x) = -f(x)$$

Da ciò deriva, infatti, che ogni funzione pari è **simmetrica rispetto all'asse y** e ogni funzione dispari è **simmetrica allo zero**; pertanto, le funzioni dispari toccheranno sempre l'origine ($f(0) = -f(0) = 0$).

MINIMO E MASSIMO DI UNA FUNZIONE

Presa una funzione:

$$f: A \to R$$

Con $A \subseteq R$:

$$m = \min_A f \Leftrightarrow \exists x_0 \in A: f(x_0) = m \wedge \forall x \in A f(x) \geq m$$

È un **minimo.**

$$M = \max_A f \Leftrightarrow \exists x_0 \in A: f(x_0) = M \wedge \forall x \in A f(x) \leq M$$

È un **massimo**.

Un punto in cui è raggiunto un minimo/massimo è un **punto di minimo/massimo** ma ciò non significa che esso è il minimo/massimo. Infatti, il minimo e il massimo di un insieme sono **unici** e sono dei **valori**, va distinto il concetto di punto di minimo/massimo con il valore di minimo/massimo (che è **assoluto**). I **punti di minimo/massimo** appartengono al **dominio**, il **valore di minimo/massimo** appartiene al **codominio**.

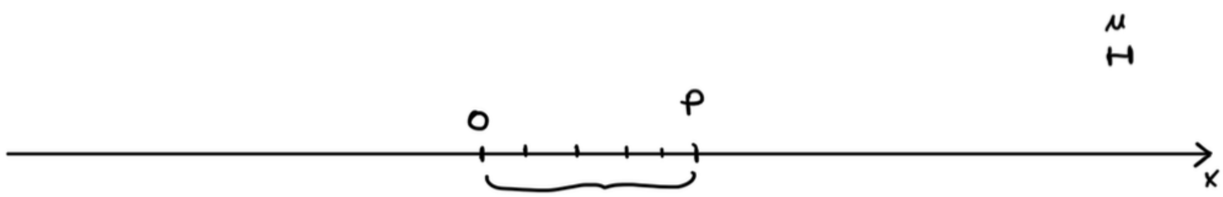
Quando parliamo di massimi facciamo riferimento all'**estremo superiore** della funzione, quindi al minimo dei maggioranti, e quando parliamo di minimi facciamo riferimento all'**estremo inferiore** della funzione, quindi al massimo dei minoranti.

Quando si adopera con le funzioni si agisce in un'area ben precisa, un **sistema di riferimento**. Per la definizione di sistema di riferimento è importante chiarire il concetto di segmento reale. Un **segmento reale** è l'estremo superiore delle misure dei segmenti commensurabili più piccoli del segmento stesso. Due misure sono **commensurabili** se esiste un numero reale per cui uno può essere un sottomultiplo dell'altro.

Presa una retta r, un punto O, un'unità di misura e un verso di percorrenza, tale quaterna definisce il **sistema di riferimento sulla retta**. Da essa derivano la **semiretta positiva** $\boldsymbol{r^+}$, l'insieme dei punti P che seguono O nel verso di percorrenza, e la **semiretta negativa** $\boldsymbol{r^-}$, l'insieme di punti P che precedono O nel verso fissato. È definita ascissa di P, *x*, la misura $\overline{OP}$ se P appartiene a r^+, la misura $-\overline{OP}$ se P appartiene a r^- o 0 se P coincide con O.

Se si definisce un'applicazione che associa, attraverso una **corrispondenza biunivoca**, ogni punto di P (un ente geometrico) della retta r ad un numero reale (ente aritmetico) e viceversa, si può dire che esiste una corrispondenza biunivoca tra retta e insieme dei numeri reali.

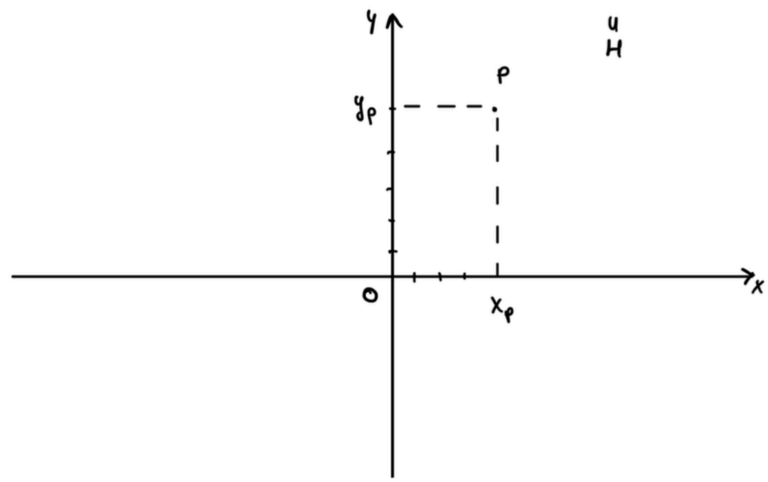
$$\forall P \subseteq r \rightarrow x \in R \ \wedge \ \forall x \in R \rightarrow P \subseteq r$$



X è l'**ascissa** del punto P.

Prese due rette, r e s, ortogonali nel punto O, la quaterna composta dalle due rette, il punto O, il verso di percorrenza e l'unità di misura monometrica (stessa per s e r) è un **sistema di riferimento nel piano**. Come per la singola retta, è possibile definire un'applicazione che ci mostri la corrispondenza biunivoca tra un punto del piano e la coppia ordinata (*x*; *y*).

$$\forall x \in R: x = P_x \ \wedge \ \forall y \in R: y = P_y \Longrightarrow P = r_{Px} \cap r_{Py} = (P_x;\ P_y)$$



FUNZIONE POTENZA

La funzione potenza si basa sul concetto di **elevamento a potenza**:

$$\forall x \in R\ \forall n \in N, x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \dots n\ volte$$

L'elevamento a potenza gode delle seguenti proprietà

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

$a^n : a^m = a^{n-m} \Leftrightarrow m < n$;

$(a^n)^m = a^{nm}$;

$a^n \cdot b^n = (a+b)^n$;

$a^n : b^n = (a-b)^n \Leftrightarrow b < a$;

$\forall a \in R: a > 0, a^n > 0\ \forall n \in N$;

$\forall a \in R\ a^{2n} > 0$;

$\forall a \in R\ a^{2n+1} < 0 \Leftrightarrow a < 0$;

$\forall a \in R, \forall m, n \in N: m < n, a^m < a^n \Leftrightarrow a > 1$;

$\forall a \in R, \forall m, n \in N: m < n, a^n < a^n \Leftrightarrow 0 < a < 1$;

$\forall a, b \in R: a < b, a^n < b^n\ \forall n \in N$;

Le potenze definite fino ad ora sono solo ad esponente naturale, ma utilizzando l'assioma di completezza di R si può dimostrare l'esistenza delle **potenze ad esponente reale**.

DIMOSTRAZIONE POTENZA CON ESPONENTE REALE

Ipotesi:

$\forall a \in R, \forall x \in R : A = \{y \in Q : a^x < x\}$

Tesi:

$a^x = supA$

Dimostrazione:

Supponendo $a > 1$ e $x > 0$, l'insieme A non è vuoto per la densità dei numeri razionali, infatti:

$$\exists y \in Q : 0 < y < x$$

Ed esiste anche un maggiorante per la proprietà di Archimede:

$$\exists n \in N : n > x \wedge y < x \Longrightarrow y < n$$

$$a^n > a^y$$

Ciò significa che:

$$\exists x \in R : a^y < a^x \wedge a^x = \sup (A)$$

Nel caso in cui $0 < a < 1$ si considera il suo reciproco, in modo da avere $\frac{1}{a} > 1$, mentre per $x < 0$ si considera $-x > 0$.

Le potenze ad esponente reale hanno le stesse proprietà delle potenze ad esponente intero, eliminando le limitazioni che costringevano queste ultime.

CVD

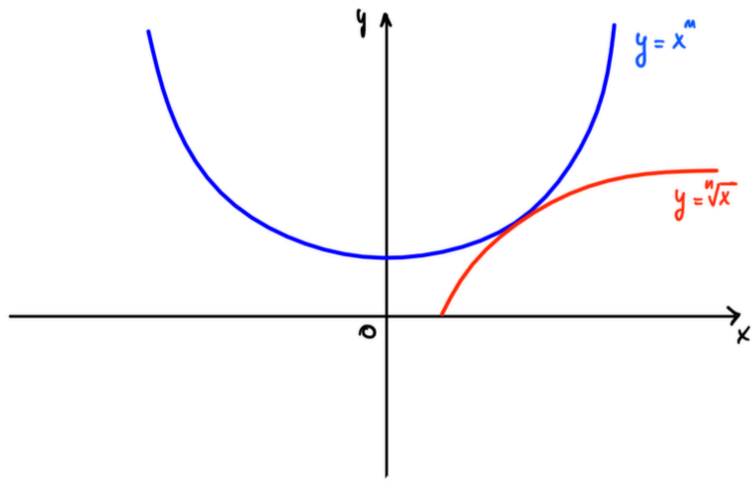
Con l'elevamento a potenza si definisce la **funzione potenza**:

$$f : R \to R$$

$$f : x \to x^n$$

È sempre **illimitata superiormente** ($supf = +\infty$), mentre per l'estremo inferiore e la monotonia vanno fatti due casi studi:

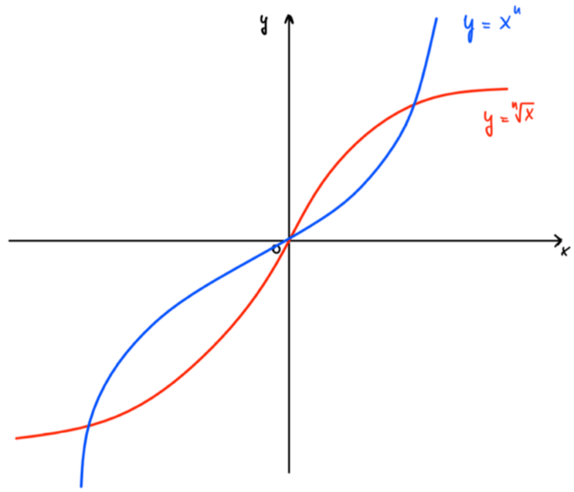
Se ***n* è pari** la funzione è pari, illimitata superiormente, limitata superiormente (e quindi dotata di minimo), è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.



Se ***n* è dispari** la funzione è dispari, illimitata superiormente e inferiormente, è strettamente crescente lungo il suo dominio e invertibile. La funzione inversa in tal caso è:

$$f^{-1}: R \to R$$

$$f^{-1}: x \to \sqrt[n]{x}$$



Si può fare la **funzione inversa** della funzione potenza pari solamente sulla restrizione positiva del dominio perché non è possibile, nei numeri reali, effettuare la radice di un numero negativo.

Quando si menziona la **funzione potenza generale**, senza tenere conto di esponente pari o dispari, si fa riferimento a quella con l'**esponente dispari**.

FUNZIONE ESPONENZIALE E LOGARITMICA

Per definire le funzioni esponenziali e logaritmiche si definisce prima il **logaritmo**.

DIMOSTRAZIONE ESISTENZA E UNICITÀ DEL LOGARITMO

Ipotesi:

$\forall y \in R: y > 0, \forall a \in R: a > 0 \ \wedge a \neq 1: \ y = a^x$

Tesi:

$\exists!\, x \in R: x = \log_a y$

Dimostrazione:

Supponendo l'esistenza di tale *x*, si dimostra la sua unicità:

$$\forall x_1, x_2 \in R: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow a^{x_2} \neq a^{x_2}$$

Si suppone per assurdo:

$$x_1 = \log_a y = x_2$$

Elevando alla *a* tutti i membri:

$$a^{x_2} = y = a^{x_2}$$

Si raggiunge l'assurdo in quanto:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow a^{x_2} \neq a^{x_2}$$

Utilizzando l'assioma di completezza di R si abbozza la dimostrazione dell'esistenza di tale *x*:

Presi i due insiemi $A = \{x \in R: a^x < y\}$ e $B = \{x \in R: a^x > y\}$, si dimostra che i due insiemi *non sono vuoti → sono contigui → ammettono un solo elemento di separazione che è* $\bar{x} = \log_a y$.

CVD

Sono quindi definiti i logaritmi come funzioni inverse dell'esponenziale. Dal momento in cui il risultato di una potenza è sempre positiva, l'argomento del logaritmo dovrà sempre essere maggiore di zero.

I logaritmi godono delle seguenti proprietà:

$\log_a x^a = x$, per la regola di composizione delle funzioni;

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$;

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, il modulo è necessario;

$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$;

$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

$\log_a x = \log_x a = -\log_x \frac{1}{a}$;

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_b a}$.

Essendo uno l'operazione inversa dell'altra, verranno conservate le monotonie; pertanto, se per l'esponenziale per $base > 1$ è strettamente crescente, lo è anche il logaritmo nello stesso intervallo e se per $0 < base < 1$ l'esponenziale è strettamente decrescente, lo è anche il logaritmo.

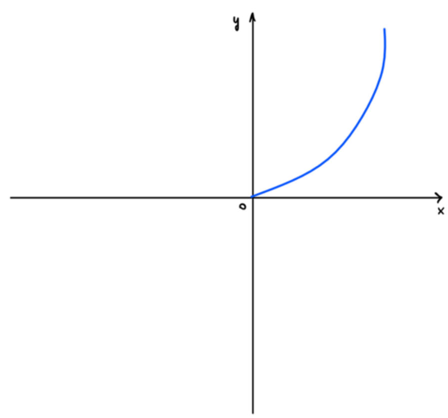
Dall'elevamento a potenza possono nascere due funzioni, quella potenza (in cui varia la base ma non l'esponente) già mostrata e la funzione esponenziale (in cui varia l'esponente ma non la base). Prendiamo la seguente funzione e i suoi casi tenendo conto del solo ramo positivo e sapendo della simmetria rispetto a y nel caso di funzione pari e all'origine nel caso di funzioni dispari:

$$f: R \to R^+$$

$$y = x^\alpha$$

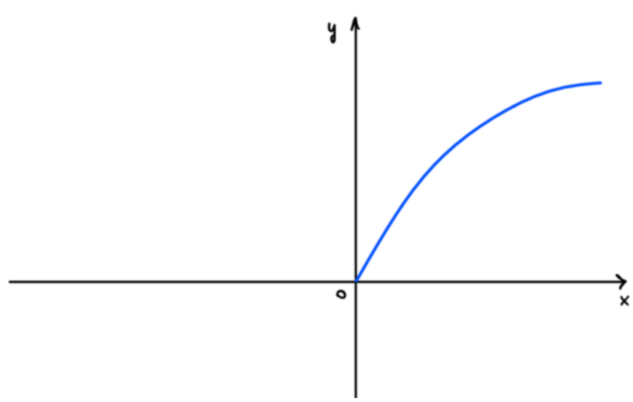
CASO 1: $\alpha \in R$

La funzione è limitata inferiormente, ha minimo, è strettamente crescente ed è detta funzione potenza



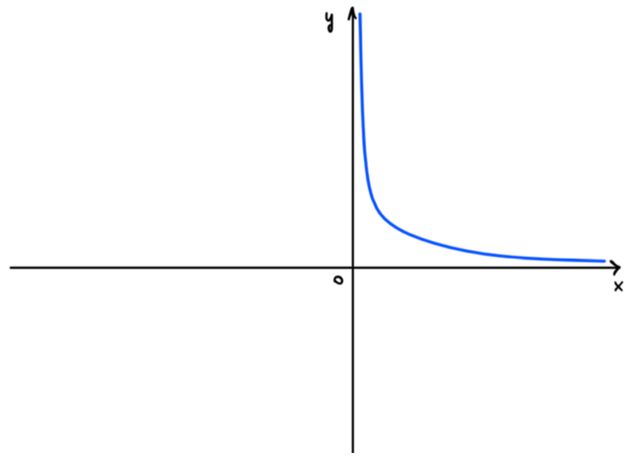
CASO 2: $0 < \alpha < 1$

La funzione è limitata inferiormente, ha minimo, è strettamente crescente ed è detta funzione radice



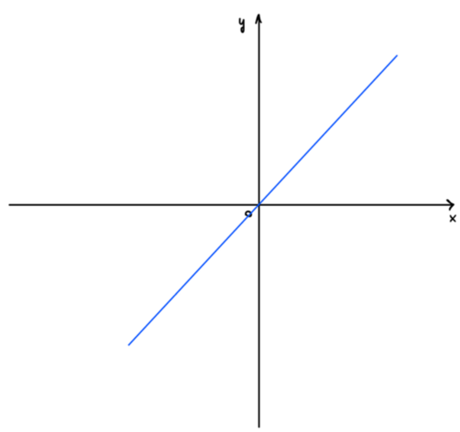
CASO 3: $\alpha < 0$

La funzione è limitata inferiormente, non ha minimo, è strettamente decrescente ed è detta funzione iperbole



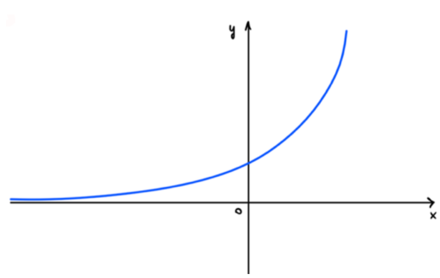
CASO 4: $\alpha = 1$

La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente, è strettamente crescente ed è detta funzione lineare o retta.



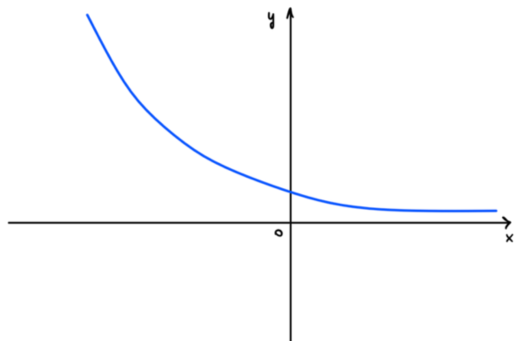
CASO 5: $x > 1$

La funzione è limitata inferiormente, non ha minimo, è strettamente crescente ed è detta funzione esponenziale.



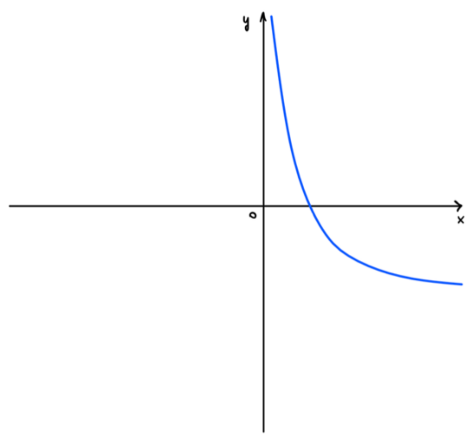
CASO 6: $0 < x < 1$

La funzione è limitata inferiormente, non ha minimo, è strettamente decrescente ed è detta funzione esponenziale.



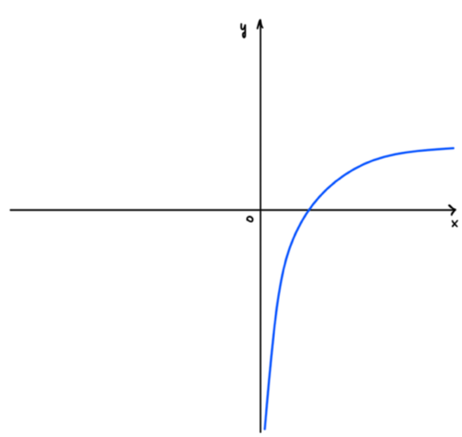
FUNZIONE LOGARITMO $0 < a < 1$

La funzione è illimitata superiormente e inferiormente, non ha minimo, è strettamente crescente ed è detta funzione logaritmo.



FUNZIONE LOGARITMO $a > 1$

La funzione è illimitata superiormente e inferiormente, non ha minimo, è strettamente decrescente ed è detta funzione logaritmo.



Un particolare caso di funzione esponenziale e logaritmica è quella in cui la base è il **numero di Nepero *e***. La forma della funzione non cambia ma sono rilevanti le sue applicazioni matematiche.

DIMOSTRAZIONE ESISTENZA DEL NUMERO DI NEPERO

Ipotesi:

$\forall A = \left\{n \in N: a_n = \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \wedge B = \left\{n \in N: b_n = \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$

Tesi:

$\exists!\, e \in R: \sup(A) = e = \inf(B)$

Dimostrazione:

Si deve dimostrare che i due insiemi sono contigui e ammettono un solo elemento di separazione, il numero di Nepero. Si inizia dimostrando la stretta crescenza dell'insieme A:

$$n < n + 1$$

$$a_n < a_{n+1}$$

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > 1$$

Portando sotto un unico esponente si ha la possibilità di impostare la frazione per sottoporla alla disuguaglianza di Bernoulli:

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n(n+2) + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > 1$$

$$\left(\frac{x^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > 1$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\forall h > -1\ (1 + h)^n > 1 + nh$$

Sostituendo i termini con $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ si ottiene:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

Pertanto:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) > \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

E dunque l'insieme A è strettamente crescente. Analogamente, dimostriamo che B è strettamente decrescente:

$$1 < \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1$$

$$\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} > 1$$

Applichiamo anche in questo caso la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+(n+2)(\frac{1}{n(n+2)})\right)$$

$$\frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

Quindi A è strettamente crescente e B è strettamente decrescente. Va ora dimostrato che i due insiemi sono separati, quindi:

$$\forall k, h \in N, a_k < b_h$$

Per fare ciò prendiamo un valore *m* tale che:

$$m = \max\{\mathrm{k}; \mathrm{h}\}$$

Secondo la monotonia dei due insiemi

$$a_k < a_m$$

$$b_m < b_h$$

È così composta la catena di disuguaglianze:

$$a_1 = 2 \leq a_k < a_m < b_m < b_h \leq 4 = b_1$$

Quindi i due insiemi sono separati e limitati, A superiormente e B inferiormente; inoltre, sono limitati inferiormente da 2 e superiormente da 4. Si dimostra che i due insiemi sono contigui utilizzando la definizione:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_h \in B\ \exists a_k \in A: b_h - a_k < \varepsilon$$

Presi due elementi appartenenti agli insiemi la questa proprietà sopra proposta:

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = a_n\frac{1}{n} < 4\frac{1}{n}$$

Avendo questa relazione, mostriamo che:

$$4\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$$

$$\bar{n} < \frac{4}{\varepsilon}$$

Tale disuguaglianza è valida per la proprietà di Archimede. Dunque:

$$b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}} < 4\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$$

Perciò i due insiemi sono contigui e ammettono un solo elemento di separazione, che è chiamato numero di Nepero.

$$\sup\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = e = \inf\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

$$2 < e < 4$$

Prendendo una stima più accurata con $n = 6$:

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{6} < e < \left(\frac{7}{6}\right)^{7}$$

$$e \cong 2{,}72828$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Le funzioni trigonometriche si basano sul concetto di **funzione periodica**. Una funzione si definisce periodica quando:

$$f: X \to R$$

$$f(x) = f(x+T) \iff x + T \in X$$

Dove T è il **periodo** della funzione. Questa definizione può essere allargata anche ai **multipli** del periodo:

$$f(x + 2T) = f[(x + T) + T] = f(x + T) = f(x)$$

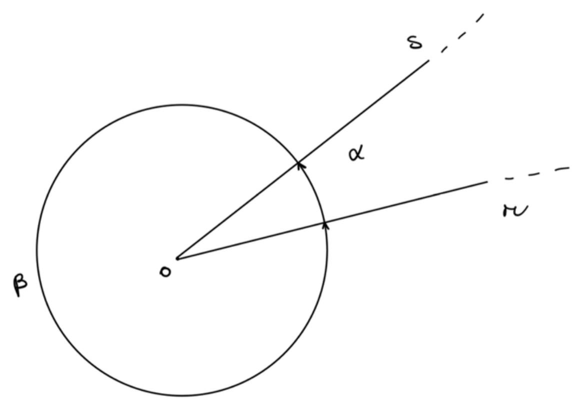
Infatti, la prima volta consideriamo come x $x + T$ in modo da ritornare al caso familiare sopra descritto. La definizione aggiornata è:

$$f(x) = f(x + kT)\ \ \forall k \in Z \ \ \Leftrightarrow x + T \in X$$

Le **funzioni trigonometriche**, come suggerisce l'etimologia del nome, sono basate sul concetto di **angolo**. Fissato un piano π e un verso di rotazione, si dice **angolo orientato** quella porzione di piano percorsa da una semiretta r per sovrapporsi alla semiretta s, mentre l'**angolo supplementare** è quella porzione di piano percorsa da s per sovrapporsi a r.

$$\alpha = \widehat{rs}$$

$$\beta = \widehat{sr}$$

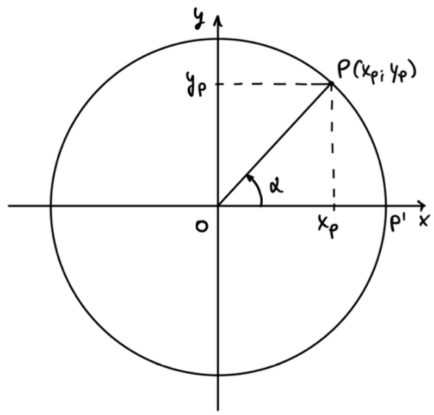


Esiste anche una definizione analitica di angolo che fa capo alla misura in **radianti**. Presa una circonferenza di raggio r e un punto su di essa, la misura dell'angolo è **indipendente dal raggio** e all'arco individuato. Pertanto, un angolo è definito:

$$\alpha = \frac{\overline{PP'}}{r}$$

Un radiante è definito come l'angolo sotteso all'arco di circonferenza che misura come il raggio. Le funzioni trigonometriche possono essere applicate a qualsiasi circonferenza, con qualsiasi raggio; tuttavia, per convenzione, poiché l'angolo non dipende dal raggio si preferisce fare riferimento alla **circonferenza goniometrica**, cioè quella circonferenza di **raggio 1 e centro nell'origine** degli assi:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Sulla circonferenza goniometrica sono definite le seguenti funzioni:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PP_y}}{r} = P_y$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PP_x}}{r} = P_x$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\overline{PP_y}}{r}}{\frac{\overline{PP_x}}{r}} = \frac{P_y}{P_x}$$

Nel caso di raggio 1, seno e coseno coincidono con le coordinate del punto P sulla circonferenza che inquadra l'angolo preso in considerazione.

Utilizzando il teorema di Pitagora possiamo mostrare la **prima relazione fondamentale della trigonometria**:

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$$

Che rispetta anche l'equazione della circonferenza goniometrica.

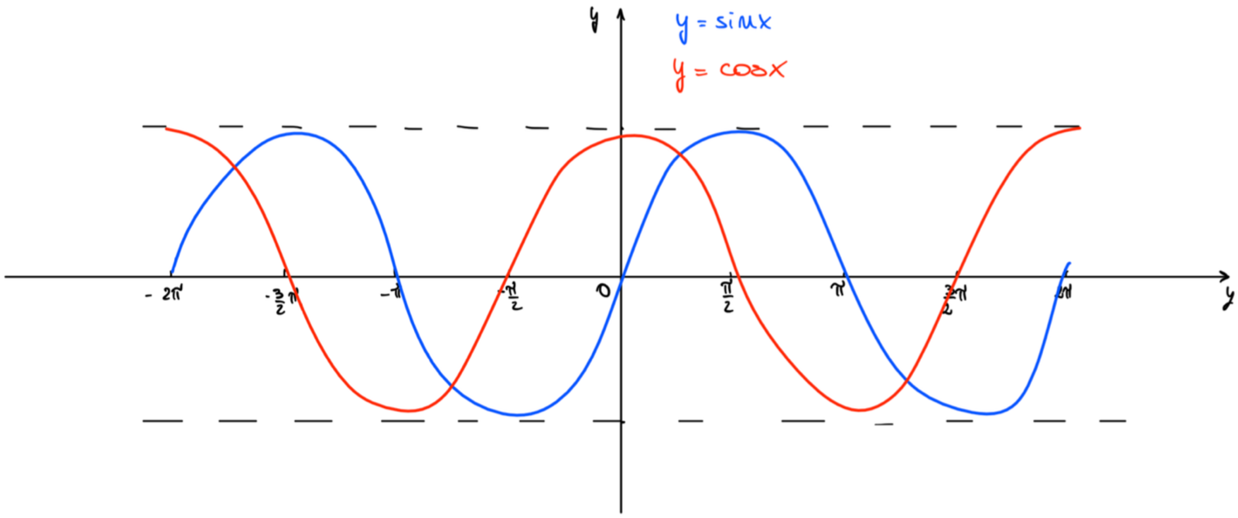
Il massimo valore raggiunto dalle due funzioni è 1 e il minimo -1, quindi definiamo formalmente le funzioni **seno** e **coseno**:

$$f: R \to [-1; 1]$$

$$y = \sin x$$

$$f: R \to [-1; 1]$$

$$y = \cos x$$



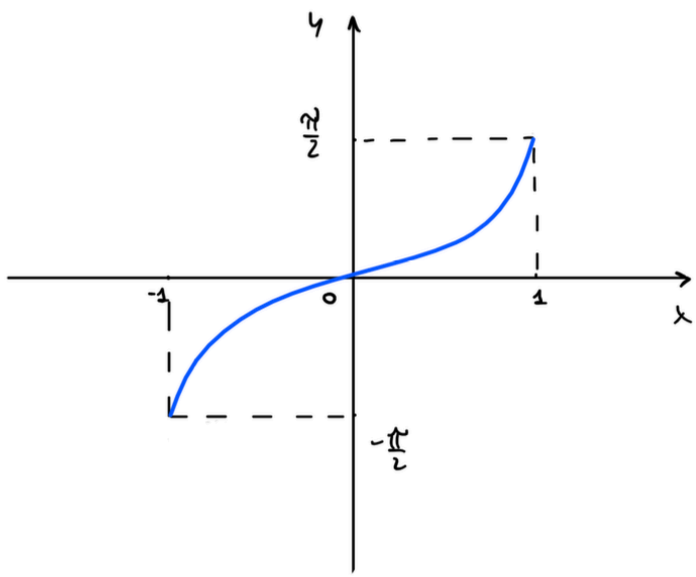
Sono entrambe funzioni periodiche, con periodo 2π e pertanto non hanno funzioni inverse se non in una loro **restrizione**. Dal grafico, inoltre, si nota che la funzione seno è una funzione dispari e il coseno una funzione pari.

Trovando la restrizione della funzione per cui essa è strettamente monotona permette di costruire una funzione inversa. Esistono **infinite restrizioni** che hanno la funzione inversa, generalmente si rappresenta quella con k=0.

Per il seno la funzione inversa si costruisce come segue:

$$f^{-1}: [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \; \forall k \in Z$$

$$x = \arcsin y$$



La funzione **arcoseno** conserva la disparità della funzione seno, proprietà unica perché non vale la stessa cosa per il coseno e l'arcocoseno.

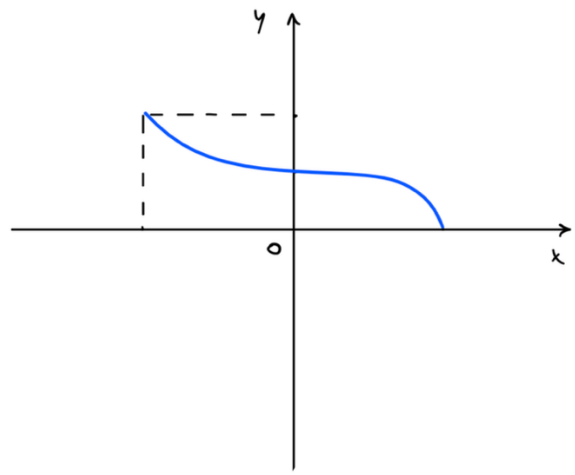
$$y = \arcsin(-x) \Leftrightarrow -x = \sin y \Leftrightarrow x = -\sin y \Leftrightarrow \arcsin x = -y \Leftrightarrow y = -\arcsin(x)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

Per il coseno si prende in considerazione:

$$f^{-1}: [-1; 1] \to [k\pi; (k+1)\pi]\ \forall k \in Z$$

$$x = \arccos y$$



Definite le funzioni seno e coseno si passa alla definizione di **funzione tangente**. Dal momento in cui la tangente risulta come il rapporto tra seno e coseno, essa è definita in tutto R tranne che in quei punti in cui il **coseno è zero**, per cui:

$$f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to R$$

$$x \to \tan x$$

Usando le formule di addizione del seno e del coseno (che verranno approfondite di seguito) si può mostrare la funzione tangente come una **funzione periodica** di periodo $T = \pi$:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x + \cos x \cdot 0}{-\cos x + \sin x \cdot 0} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Inoltre, la funzione tangente è una **funzione dispari**, infatti il prodotto tra una funzione pari (il reciproco del coseno) per una funzione dispari (il seno) è sempre una funzione dispari:

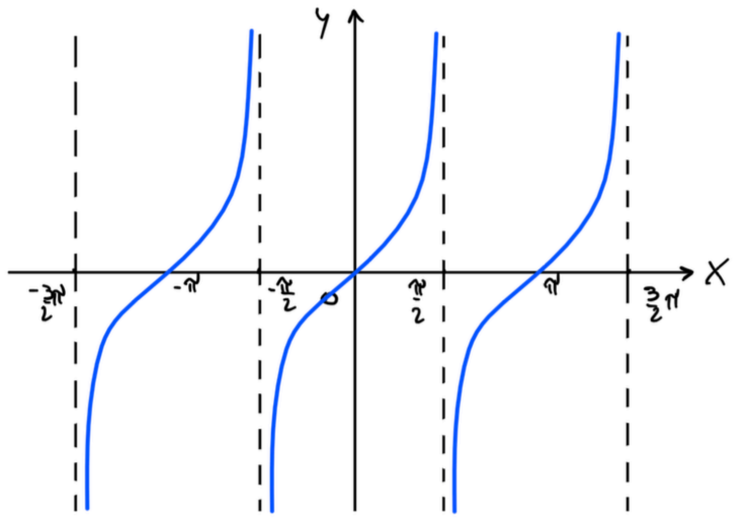
$$f(x) = -f(-x) \quad \wedge \quad g(-x) = g(x)$$

$$f(-x) \cdot g(-x) = -[f(x) \cdot g(x)]$$

Pertanto:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Con queste informazioni si può tracciare il **grafico della funzione tangente**:



Analogo al discorso per il seno ed il coseno, in quanto funzione periodica la funzione tangente **non ha funzione inversa se non in una sua restrizione** per cui è strettamente monotona:

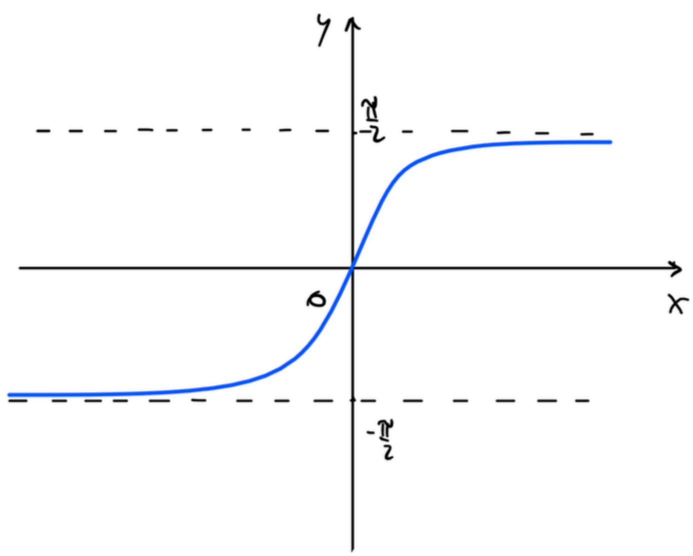
$$f_k{}^{-1}: R \to \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \quad \forall k \in Z$$

$$\tan(x + k\pi) \to x$$

$$x \to \arctan(x) - k\pi$$

Nella restrizione con $k = 0$:

$$y = \arctan x$$



Anch'essa è una **funzione dispari** e si può notare che $\sup f^{-1} = \frac{\pi}{2}$ e $\inf f^{-1} = -\frac{\pi}{2}$ ma gli stessi punti **non sono massimi e minimi** della funzione.

Come prima anticipato, alle funzioni trigonometriche si possono applicare le cosiddette **formule di addizione e sottrazione**:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \sin x \sin y \mp \cos x \cos y$$

In funzione di queste regole si definiscono le **regole di duplicazione**:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

SENO, COSENO E TANGENTE IPERBOLICI

Si definisce **seno iperbolico** di x la funzione:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Mentre il **coseno iperbolico**:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Entrambe sono funzioni **da R in R** e sono funzioni **continue**; pertanto, non hanno asintoti verticali.

Analogamente alle rispettive funzioni trigonometriche, seno e coseno iperbolici sono legati da una **relazione fondamentale**:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Infatti:

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

STUDIO DI FUNZIONE DEL SENO IPERBOLICO

Dominio:

$$R$$

Segno:

$$\frac{e^x - 1}{2e^x} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{2e^x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Simmetrie: la funzione è una funzione dispari

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \Rightarrow \sinh x \sim \frac{e^x}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \Rightarrow \sinh x \sim \frac{e^{-x}}{2}$$

Asintoti:

In quanto funzione continua, $\sinh x$ non ha asintoti verticali. Per quanto visto al comportamento della funzione agli estremi del dominio mancano anche asintoti orizzontali. L'unico asintoto che si può presentare è quello obliquo, ma nel calcolo del coefficiente angolare risulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \infty$$

Infatti, la funzione esponenziale al numeratore va ad infinito più velocemente della funzione lineare.

Derivata prima:

$$D(\sinh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Punti di non derivabilità:

La funzione è derivabile lungo tutto il suo dominio.

Massimi e minimi:

$$\nexists x \in R: \cosh x = 0$$

La derivata non si annulla mai; pertanto, non ci sono massimi e minimi nella funzione.

Crescenza e decrescenza:

$$\cosh x > 0 \; \forall x \in R$$

La funzione è crescente lungo tutto il suo dominio.

Derivata seconda:

$$D[D(\sinh x)] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x > 0 \Leftrightarrow x > 0) \wedge (\sinh x < 0 \Leftrightarrow x < 0)$$

Ciò significa che nel punto $x = 0$ si trova un flesso ascendente; infatti, prima di tale punto la funzione è concava e dopo è convessa.

La funzione seno iperbolico di x è una funzione continua e strettamente crescente; pertanto, è dotata di **funzione inversa**. La funzione inversa del seno iperbolico è il **settore seno iperbolico** (per semplicità scritta $\sinh^{-1} y$, nonostante si scriva $settsenh\ x$).

Poiché:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$e^x - e^{-x} = 2y$$

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Ma poiché:

$$\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$$

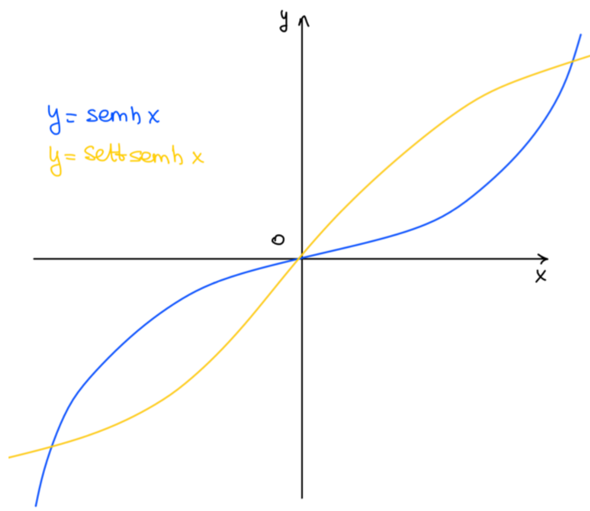
E poiché e^x è una quantità sempre positiva:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$\sinh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

Dunque, il grafico del seno iperbolico di x e della sua funzione inversa è:



STUDIO DI FUNZIONE DEL COSENO IPERBOLICO

Dominio:

$$R$$

Segno:

$$\cosh x > 0 \Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} > 0 \ \forall x \in R$$

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \in R \end{cases} \wedge \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Simmetrie:

La funzione è pari:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \wedge \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$$

Asintoti:

In quanto funzione continua, $\cosh x$ non ha asintoti verticali. Per quanto visto al comportamento della funzione agli estremi del dominio mancano anche asintoti orizzontali. L'unico asintoto che si può presentare è quello obliquo, ma nel calcolo del coefficiente angolare risulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2x} = \infty$$

Infatti, la funzione esponenziale al numeratore va ad infinito più velocemente della funzione lineare.

Derivata prima:

$$D(\cosh x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Punti di non derivabilità:

La funzione è derivabile lungo tutto il suo dominio

Massimi e minimi:

L'unico punto in cui la derivata prima si annulla è il punto $x = 0$, e poiché prima di tale punto la funzione è negativa e dopo è positiva, tale punto è un punto di minimo. Si può inoltre affermare che esso è minimo assoluto, permettendo di aggiornare il codominio in:

$$cosh: R \to [1: +\infty)$$

Crescenza e decrescenza:

$$\sinh x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Da ciò si può concludere che la funzione coseno iperbolico di x è crescente per i valori positivi della x e decrescente per i valori negativi.

Derivata seconda:

$$D[D(\cosh x)] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Ma poiché:

$$\cosh x > 0 \; \forall x \in R$$

La funzione non ha flessi ed è sempre convessa.

Nel suo dominio la funzione coseno iperbolico di x non è invertibile, in quanto non iniettiva. Tuttavia, se si effettua una restrizione del dominio ai valori positivi (o ai valori positivi) è possibile delineare la funzione inversa settore coseno di x (che per semplicità verrà indicata con $\cosh^{-1} x$, nonostante si definisca come $settcosh\ x$).

Poiché:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\forall x > 0, \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

$$\frac{e^{2x}+1}{e^x} = 2y$$

$$e^{2x}+1 = 2ye^x$$

$$e^{2x}-2ye^x+1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

Ma poiché:

$$\sqrt{y^2-1} < \sqrt{y^2} = |y| \geq y$$

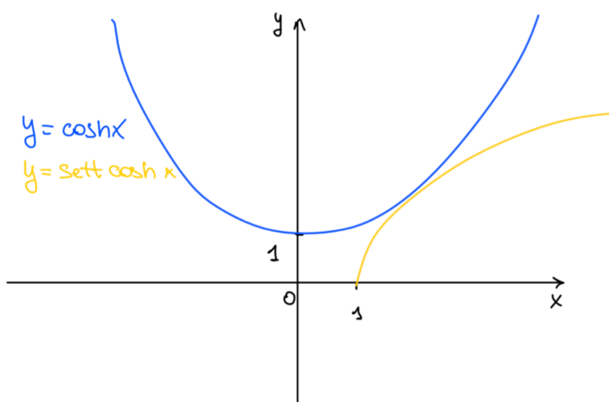
$$-\sqrt{y^2-1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$$

E poiché e^x è una quantità sempre positiva:

$$x = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\cosh^{-1} y = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

Dunque, il grafico della funzione coseno iperbolico di x e della sua funzione inversa in una restrizione del dominio è:



Infine, si definisce **tangente iperbolica di x** la funzione:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Tale funzione ha come dominio la retta reale e come codominio l'intervallo $(-1;1)$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1 \wedge \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

Essendo una funzione strettamente crescente è possibile definire la **funzione inversa settore tangente iperbolica di x**:

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Per risolvere un'**equazione di primo grado** bisogna trovare la *x* a partire da un dato polinomio di primo grado che è posto uguale a zero. Un'equazione di primo grado ha la forma:

$$ax + b = 0$$

In tale caso si definisce **coefficiente della *x*** il termine *a* e **termine noto** *b*. Le equazioni di primo grado ammettono sempre **una sola soluzione** in quanto la funzione che individua il polinomio è iniettiva:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$ax_1 + b = ax_2 + b$$

$$ax_1 = ax_2$$

$$x_1 = x_2$$

Quindi:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

E la soluzione è unica.

Le disequazioni di primo grado non pongono il polinomio di primo grado in considerazione per le equazioni pari a zero ma piuttosto inquadrano un insieme di punti che soddisfano la condizione data. Una disequazione di primo grado ha la forma:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b \geq 0$$

Preso ad esempio il primo caso (ma il ragionamento equivale anche per le altre forme):

$$S = \left\{x \in R : x < -\frac{b}{a}\right\} \Leftrightarrow a > 0$$

$$S = \left\{x \in R : x < \frac{b}{a}\right\} \Leftrightarrow a < 0$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Le **equazioni di secondo grado**, a differenza di quelle di primo grado, prendono in considerazione un polinomio di secondo grado e hanno sempre **due soluzioni** ma per convenzione si considerano solo quelle appartenenti al campo dei numeri reali (ci possono essere soluzioni appartenenti ai numeri complessi). A causa di questa proprietà l'elevamento a quadrato di un'identità non è pari all'identità stessa:

$$A(x) = B(x)$$

$$A(x)^2 = B(x)^2$$

$$A(x)^2 - B(x)^2 = 0$$

$$[A(x) + B(x)][A(x) - B(x)] = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$A(x) = -B(x)$$

$$A(x) = B(x)$$

E solo una rispetta l'identità originaria, in quanto introducendo i termini di secondo grado si introduce una seconda soluzione.

Un'equazione di secondo grado ha la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dove *a* e *b* sono **coefficienti della x**, *a* maggiore di zero e *c* il **termine noto**. Per la soluzione di questa equazione si deve prendere in considerazione il suo discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Su di esso vanno fatte delle considerazioni:

- $\Delta > 0$

Si moltiplica tutta l'equazione per *4a*:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Si aggiunge e sottrae per b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2 = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da questa forma si distinguono le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\Delta = 0$

Sfruttando lo stesso ragionamento:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

$$2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- $\Delta < 0$

Sfruttando lo stesso ragionamento:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

Ma non esiste numero reale che elevato al quadrato dia una quantità negativa, pertanto **non esistono soluzioni reali**.

Avendo due radici, le equazioni di secondo grado permettono di trovare la **somma** e il **prodotto** di esse:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Una disequazione di secondo grado ha la seguente forma:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Si suppone $a > 0$ ma è comunque possibile ricondurre i casi in cui $a < 0$ al caso studio semplicemente **cambiando segno alla disequazione**. Anche in questo caso si distinguono tre situazioni:

- $\Delta > 0$

Si raccoglie il termine a e si sfruttano le proprietà delle radici di un'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) > 0$$

$$a(x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) > 0$$

$$a(x^2 + x_1x + x_2x + x_1 \cdot x_2) > 0$$

$$a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] > 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

Questo processo è chiamato **scomposizione di un trinomio di secondo grado**. Nella disequazione si distingueranno due casi in cui essa è verificata, supposto $x_2 > x_1$:

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases}$$

$$S = \{x \in R: x < x_1 \vee x > x_2\}$$

Pertanto, una disequazione di secondo grado dove il polinomio è posto maggiore di zero ha soluzioni negli intervalli esterni tra le due radici ma se è posto minore di zero in quelli interni.

- $\Delta = 0$

Sfruttando il ragionamento analogo:

$$(x - x_1)^2 > 0$$

$$S = \left\{x \in R/\{x_1\}\right\}$$

Se il polinomio è posto minore di zero:

$$S = \emptyset$$

- $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right) > 0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\right]>0$$

Ma poiché $\Delta < 0$ si può aggiornare:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\Delta}{4a}\right]>0$$

Il polinomio presentato è sempre positivo, in quanto costituito da un quadrato e da una quantità per definizione positiva. Quindi le soluzioni saranno:

$$S = R$$

E nel caso del polinomio posto minore di zero:

$$S = \emptyset$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una **disequazione irrazionale** si presenta come:

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$$

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x)$$

Dove $n \in N$ e P(x) e Q(x) sono polinomi razionali. Si distinguono i due casi:

- $n = 2h + 1$

Siccome la funzione potenza con esponente dispari è strettamente crescente l'elevazione di entrambi i membri conserva il segno:

$$P(x) < Q(x)^n$$

$$P(x) > Q(x)^n$$

- $n = 2h$

In questo caso non solo va posto l'argomento della radice maggiore di zero ma va discussa anche la situazione riguardo il secondo polinomio. Si generano dunque i seguenti casi.

Considerando la disequazione >:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \lor \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$P(x) \geq 0 \lor \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) > Q(x)^n \end{cases}$$

Nel primo sistema si considera una radice positiva maggiore di una quantità negativa, che vale solo se l'argomento della radice è positivo.

Considerando la disequazione <:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\emptyset \ \vee \ P(x) < Q(x)^n$$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Una **disequazione esponenziale** si presenta come:

$$a^x < b$$

$$a^x > b$$

$$a^x \leq b$$

$$a^x \geq b$$

Si distinguono i due casi:

- $b \leq 0$

$S = \emptyset$ nel caso 1. In quanto la funzione esponenziale è **sempre positiva** e non può essere minore di un numero negativo

$S = R$ nel caso 2. In quanto la funzione esponenziale è **sempre positiva** e maggiore di un numero negativo

- $b > 0$

In questa situazione va discusso il valore di *a*:

- $a > 1$

La funzione è strettamente crescente e pertanto lo è anche la sua funzione inversa; pertanto, applichiamo il logaritmo ad entrambi i membri:

$$a^x < b$$

$$x < \log_a b$$

$$S = \{x \in R : x < \log_a b\}$$

$$a^x > b$$

$$x > \log_a b$$

$$S = \{x \in R: x > \log_a b\}$$

- $0 < a < 1$

La funzione è strettamente decrescente e, pertanto, lo è anche la sua funzione inversa. Tuttavia, applicando il logaritmo ad entrambi i membri va cambiato il verso della disequazione:

$$a^x < b$$

$$x > \log_a b$$

$$S = \{x \in R: x > \log_a b\}$$

$$a^x > b$$

$$x < \log_a b$$

$$S = \{x \in R: x < \log_a b\}$$

Una **disequazione logaritmica**, con argomento *x* maggiore di zero, si presenta come:

$$\log_a x < b$$

$$\log_a x > b$$

$$\log_a x \leq b$$

$$\log_a x \geq b$$

Si distinguono i due casi:

- $a > 1$

La funzione logaritmica è strettamente crescente e, pertanto, lo è anche la sua inversa. Applicando l'esponenziale ad entrambi i membri:

$$\log_a x < b$$

$$x < a^b$$

$$S = \{x \in R: x < a^b\}$$

$$\log_a x > b$$

$$x > a^b$$

$$S = \{x \in R: x > a^b\}$$

- $0 < a < 1$

La funzione è strettamente decrescente e, pertanto, lo è anche la sua inversa. Applicando l'esponenziale ad entrambi i membri:

$$\log_a x < b$$

$$x > a^b$$

$$S = \{x \in R: x > a^b\}$$

$$\log_a x > b$$

$$x < a^b$$

$$S = \{x \in R: x < a^b\}$$

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Una disequazione trigonometrica (non comprendendo l'inclusione delle soluzioni) si presenta come:

$$\sin x < \alpha$$

$$\sin x > \alpha$$

$$\cos x < \alpha$$

$$\cos x > \alpha$$

Dal momento in cui il codominio delle funzioni trigonometriche è [-1; 1], consideriamo:

- $\alpha \leq -1$

$$S_1 = S_3 = \emptyset$$

$$S_2 = S_4 = R$$

- $a \geq 1$

$$S_2 = S_4 = \emptyset$$
$$S_1 = S_3 = R$$

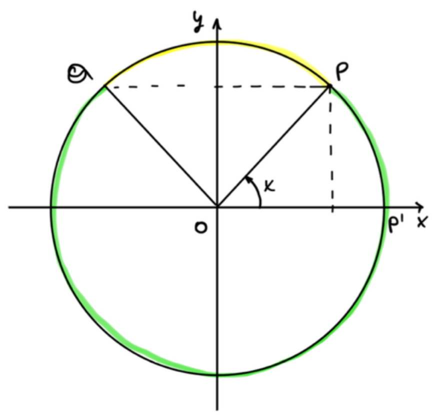
- $-1 < \alpha < 1$

Per il seno:

Tracciata sulla circonferenza goniometrica una retta parallela all'asse x che interseca l'asse y in α, si divide la circonferenza in due archi, $\widehat{PQ}$ e $\widehat{QP}$, individuati dai punti della circonferenza:

$$P = (\sin x\,; \cos x)$$

$$Q = (\sin x\,; -\cos x)$$



In tal caso le soluzioni (in un intervallo definito è da considerare il suo inizio e la sua fine) sono:

$$S_1 = [\sin(\pi - \alpha) + 2k\pi; \sin\alpha + 2k\pi]$$

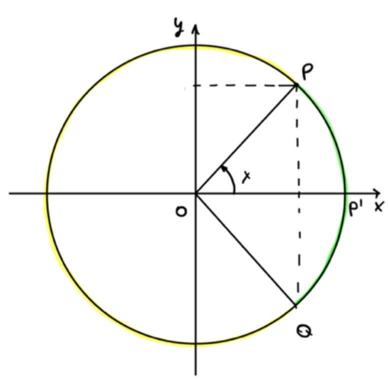
$$S_2 = [\sin\alpha + 2k\pi; \sin(\pi - \alpha) + 2k\pi]$$

Per il coseno:

Tracciata sulla circonferenza goniometrica una retta parallela all'asse x che interseca l'asse y in α, si divide la circonferenza in due archi, $\widehat{PQ}$ e $\widehat{QP}$, individuati dai punti della circonferenza:

$$P = (\sin x\,; \cos x)$$

$$Q = (\sin x\,; -\cos x)$$



In tal caso le soluzioni (in un intervallo definito è da considerare il suo inizio e la sua fine) sono:

$$S_3 = [\cos\alpha + 2k\pi; \cos(2\pi - \alpha) + 2k\pi]$$

$$S_4 = [\cos(2\pi - \alpha) + 2k\pi\,;\ \cos\alpha + 2k\pi]$$

La situazione cambia nel caso della tangente. Infatti, il suo dominio è tutto l'insieme dei numeri reali ad eccezione di $\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k \in Z$. Per semplicità si restringe il dominio a $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\,[$ aggiungendo successivamente la periodicità. Le disequazioni con la tangente assumono la seguente forma:

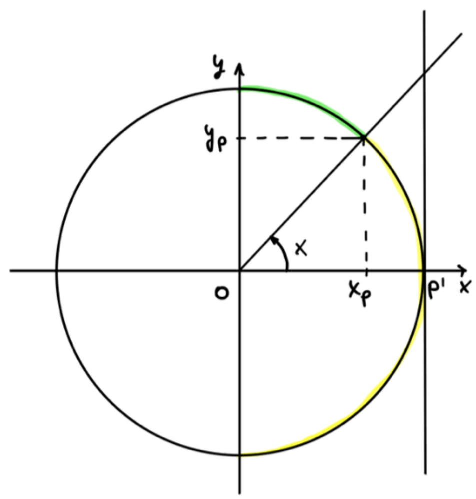
$$\tan x < \alpha$$

$$\tan x > \alpha$$

$\exists!\ x_0 \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\,[: \tan x_0 = \alpha$. Perciò:

$$S_1 = \left\{x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\,[: -\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \tan x_0 + k\pi\right\}$$

$$S_2 = \left\{x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\,[: \tan x_0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$



Le disequazioni goniometriche si possono presentare anche sotto forma di funzioni inverse, arcoseno, arcocoseno e arcotangente.

Per l'arcoseno si hanno le seguenti espressioni:

$$\arcsin x < \alpha$$

$$\arcsin x > \alpha$$

$\exists!\ x_0 \in [-1;1]: \sin\alpha = x_0$. Perciò:

$$S_1 = \{x \in [-1;1]: -1 < x < \sin\alpha\}$$

$$S_2 = \{x \in [-1;1]: \sin\alpha < x < 1\}$$

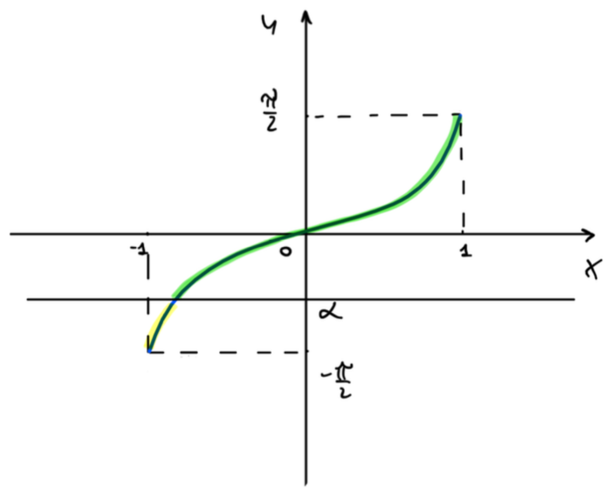
Tuttavia, ci sono alcuni casi notevoli:

- $\alpha < \frac{\pi}{2}$

$S_1 = \emptyset$ e $S_2 = R$

- $\alpha > \frac{\pi}{2}$

$S_2 = \emptyset$ e $S_1 = R$



Per l'arcocoseno:

$$\arccos x < \alpha$$

$$\arccos x > \alpha$$

$\exists!\ x_0 \in [-1; 1]\colon \cos\alpha = x_0$. Perciò:

$$S_1 = \{x \in [-1; 1]\colon \cos\alpha < x < 1\}$$

$$S_2 = \{x \in [-1; 1]\colon -1 < x < \cos\alpha\}$$

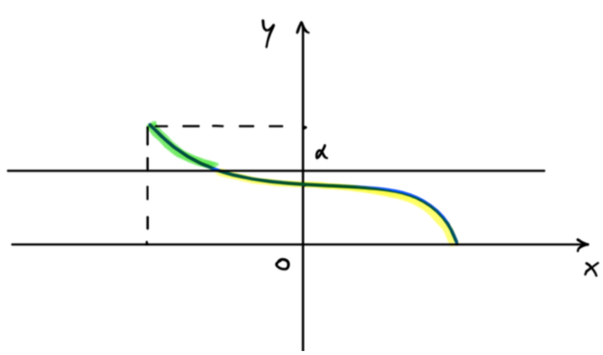
Tuttavia, ci sono alcuni casi notevoli:

- $\alpha < 0$

$S_1 = \emptyset$ e $S_2 = R$

- $\alpha > \pi$

$S_2 = \emptyset$ e $S_1 = R$



Per l'arcotangente:

$$\arctan x < \alpha$$

$$\arctan x > \alpha$$

$\exists!\ x_0 \in R\colon \tan\alpha = x_0$. Perciò:

$$S_1 = \{x \in [-1;1]\colon x < \tan\alpha\}$$

$$S_2 = \{x \in [-1;1]\colon x > \tan\alpha\}$$

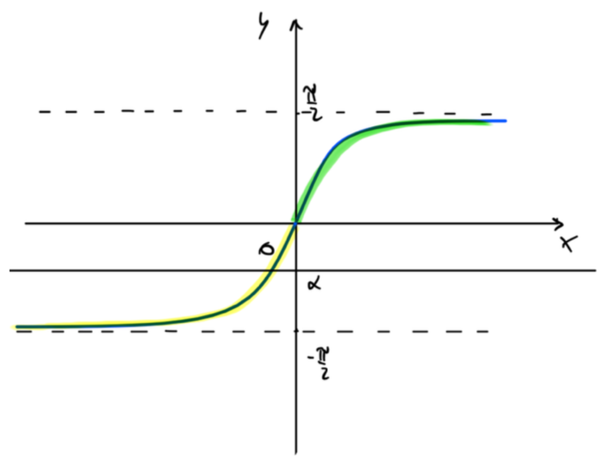
Tuttavia, ci sono alcuni casi notevoli:

- $\alpha < \frac{\pi}{2}$

$S_1 = \emptyset$ e $S_2 = R$

- $\alpha > \frac{\pi}{2}$

$S_2 = \emptyset$ e $S_1 = R$



CAMPO DI ESISTENZA

Il campo di esistenza *C* è il più grande insieme di R in cui si possono calcolare i valori di una funzione. Per le funzioni elementari:

- $y = x \iff C\colon R$
- $y = x^n \iff C\colon R$
- $y = a^x \iff C\colon R$
- $y = x^{\frac{1}{2n}} \iff C\colon x > 0$
- $y = x^{-n} \iff C\colon x \neq 0$
- $y = \log_a x \iff C\colon x > 0$
- $y = \tan x \iff C\colon \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $y = \arccos x \iff C: -1 < x < 1$
- $y = \arcsin x \iff C: -1 < x < 1$

Quando una funzione è composta il campo di esistenza va calcolato in entrambe le funzioni e deve essere inclusivo, cioè deve prendere gli elementi comuni ad entrambe le parti.

LIMITI

RETTA REALE ESTESA

I numeri reali, come suggerisce il nome, sono numeri ma si possono definire in un insieme numerico anche enti matematici che non sono numeri, come l'**infinito**. L'insieme dei numeri che comprende $+\infty$ e $-\infty$ è detto **insieme dei numeri reali esteso $\bar{R}$**.

$$\bar{R} = R \cup \{-\infty; +\infty\}$$

Nell'insieme dei numeri reali esteso è definita la seguente relazione d'ordine:

$$\forall x \in \bar{R} \; -\infty < x < +\infty$$

$+\infty$ e $-\infty$ sono, rispettivamente, **maggiorante e minorante dell'insieme $\bar{R}$**. Avendo come sottoinsieme R, $\bar{R}$ eredita tutte le sue proprietà e operazioni ma vi sono definite le operazioni con $+\infty$ e $-\infty$:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$x + (+\infty) = +\infty \;\; \forall x \in R$$

$$x + (-\infty) = -\infty \;\; \forall x \in R$$

$\forall x \in R^+$

$$x(+\infty) = +\infty$$

$$x(-\infty) = -\infty$$

$\forall x \in R^-$

$$x(+\infty) = -\infty$$

$$x(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty = (-\infty)(-\infty)$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty = (-\infty)(+\infty)$$

$\bar{R}$, tuttavia, **non è un campo** come R in quanto le sue **operazioni non sono ovunque definite**; non si parla delle operazioni con i numeri ma con $+\infty$ e $-\infty$. Quando un'operazione in particolare non si può effettuare in $\bar{R}$ la si definisce **forma indeterminata**. Esistono tre tipi di forma indeterminata:

- Rispetto alla somma;

$$(-\infty) + (+\infty)$$

$$(+\infty) + (-\infty)$$

- Rispetto al prodotto;

$$(+\infty)0$$
$$(-\infty)0$$
$$0(+\infty)$$
$$0(-\infty)$$

- Rispetto al rapporto

$$\frac{\infty}{\infty}$$

TOPOLOGIA SULLA RETTA REALE

La **topologia sulla retta reale** è quella branca della matematica che studia le proprietà dell'insieme dei numeri reali in relazione ad una retta.

Si definisce **intorno sferico di un punto con semi dimensione** o **intorno circolare di un punto con raggio**:

$$\forall x_0 \in R, \forall \delta > 0: I^{\delta}{}_{x_0} = \{x \in R: |x - x_0| < \delta\}$$

Cioè:

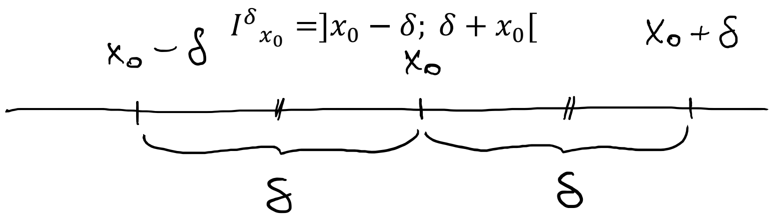
$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

Cioè:

$$x_0 - \delta < x < \delta + x_0$$

Un intorno può essere descritto anche come **intervallo**:

$$I^{\delta}{}_{x_0} =]x_0 - \delta;\ \delta + x_0[$$



In funzione dell'intorno sferico di x_0 si definisce un **intorno generico** dello stesso punto ***U***:

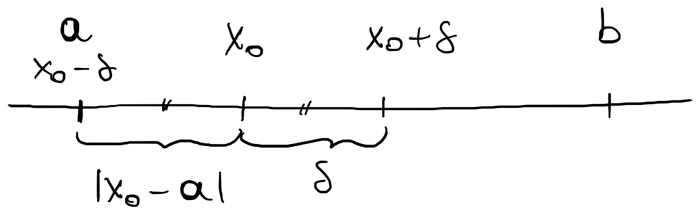
$$U \text{ è un intorno} \Leftrightarrow \exists I^{\delta}{}_{x_0} \subseteq U \wedge x_0 \in U$$

Se si prende un generico insieme,

$$U = [a; b]$$

Esso è intorno di un suo punto x_0 solo se:

$$\delta < \min(|x_0 - a|; |b - x_0|)$$



Infine, si definisce $\mathcal{I}(x_0)$ come l'**insieme di tutti gli intorni di un punto $\boldsymbol{x_0}$**; pertanto, un intorno U:

$$U \in \mathcal{I}(x_0)$$

Di seguito sono proposte e dimostrate le **proprietà degli intorni**.

DIMOSTRAZIONE INTERSEZIONE DI UN INTORNO

Ipotesi:

$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{I}(x_0): \left(U_1 \Rightarrow I^{\delta^1}{}_{x_0} \subseteq U_1\right) \wedge \left(U_2 \Rightarrow I^{\delta^2}{}_{x_0} \subseteq U_2\right)$

Tesi:

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{I}(x_0)$

Dimostrazione:

La tesi può anche essere scritta come l'esistenza di un terzo intorno circolare; pertanto, dimostrare questa proposizione equivale a dimostrare il teorema:

$$\exists I^{\delta^3}{}_{x_0} \subseteq U_1 \cap U_2$$

$$U_1 =]x_0 - \delta^1;\ x_0 + \delta^1[$$

$$U_2 =]x_0 - \delta^2;\ x_0 + \delta^2[$$

Ma se si suppone $\delta^2 > \delta^1$ allora:

$$x_0 - \delta^2 < x_0 - \delta^1 < x < x_0 + \delta^1 < x_0 + \delta^2$$

Da cui risulta:

$$\delta^3 = \delta^1$$

Generalizzando, la proprietà è valida solo se:

$$\delta^3 = \min(\delta^1; \delta^2)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE

Ipotesi:

$\forall x_1, x_2 \in R: x_1 \neq x_2$

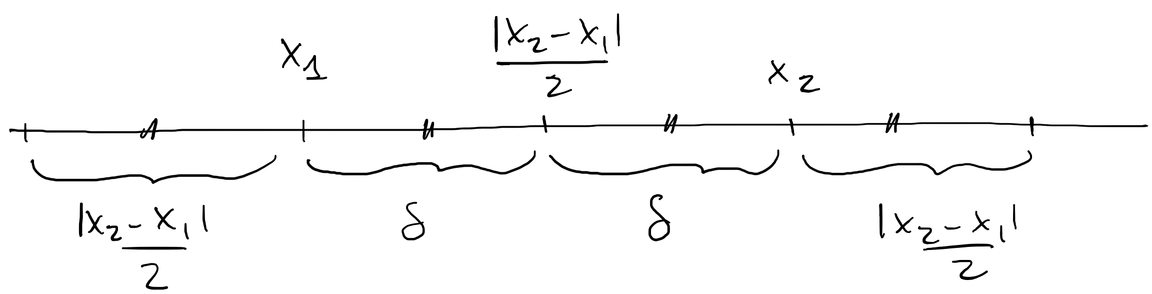
Tesi:

$\exists U_1 \in \mathcal{I}(x_1), U_2 \in \mathcal{I}(x_2): U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Dimostrazione:

Considerata la distanza tra i due punti $|x_2 - x_1|$, la proprietà è certamente vera se si prende una semi dimensione per gli intorni tale che:

$$\delta < \frac{|x_2 - x_1|}{2}$$



Infatti, i due intorni si possono incontrare al massimo a metà della distanza tra i due punti.

CVD

Grazie alla definizione di intorno si può definire un **punto interno ad un insieme**:

$$\forall A \subseteq R, x_0 \in A \text{ è un punto interno } \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{I}(x_0): x_0 \in U \wedge U \subseteq A$$

Da ciò deriva che **tutti i punti** di un insieme **tranne i suoi estremi** sono punti interni allo stesso insieme. Definito l'**insieme interno Å** come l'insieme di tutti i punti interni di un insieme, esso è costituito da tutti gli elementi dell'insieme tranne i suoi estremi:

$$A = [a; b] \Rightarrow \dot{A} =]a; b[$$

Un insieme si dice **aperto** se coincide con il suo interno:

$$A = \dot{A}$$

Con la definizione rigorosa di insieme aperto si definiscono le seguenti **proprietà**:

- $\emptyset$ e ***R*** sono **convenzionalmente** insieme aperti;
- Un insieme costituito da **un solo punto** non è un insieme aperto;
- L'unione di una **qualunque famiglia** di insiemi aperti (finita o infinita) è sempre un insieme aperto;
- L'intersezione di una **famiglia finita** di insiemi aperti è sempre un insieme aperto ma non vale lo stesso per una **famiglia infinita** di insiemi aperti.

Dalla definizione di insieme aperto si ricava quella di **insieme chiuso**: un insieme è chiuso solo se il suo complementare è un insieme aperto. Le proprietà sono simmetriche a quelle degli insiemi aperti:

- Un insieme costituito da **un solo punto** è un insieme chiuso;
- L'intersezione di una **qualsiasi famiglia** di insiemi chiusi (finita o infinita) è sempre un insieme chiuso;
- L'unione di una **famiglia finita** di insiemi chiusi è sempre un insieme chiuso ma ciò non vale lo stesso per una **famiglia infinita** di insiemi chiusi.

Si definisce **punto di aderenza**:

$$\forall A \subseteq R\ \forall x_0 \in R, x_0 \text{ è un punto di aderenza } \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}(x_0)\ \exists x \in A: x \in U$$

$$\forall A \subseteq R\ \forall x_0 \in R, x_0 \text{ è un punto di aderenza } \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}(x_0)\ U \cap A \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti di aderenza di un insieme *A* è detto **chiusura di A, $\bar{A}$**. Di seguito sono mostrate le **proprietà** della chiusura di un insieme:

- $A \subseteq \bar{A}$

Infatti, considerando $A =]a; b]$, *a* non appartiene ad A ma è un suo punto di aderenza, in quanto è possibile trovare un intorno tale che:

$$]a - \delta; a + \delta[\cap]a; b] \neq \emptyset$$

In particolare:

$$]a; a + \delta[\cap]a; b] \neq \emptyset$$

Pertanto, diciamo che la chiusura di A è il suo insieme compreso gli estremi:

$$\overline{]a; b]} = [a; b]$$

Se il punto in considerazione è interno ad A banalmente appartiene anche alla sua chiusura ed è punto interno, in quanto appartiene al proprio intorno. Da ciò deduciamo che $A \subseteq \bar{A}$.

Se si prende un punto esterno all'insieme che non è un suo estremo è sempre possibile prendere un intorno con semi dimensione minore della distanza tra il punto e l'estremo dell'insieme in modo tale da non far toccare l'intorno e l'insieme;

- $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$;
- A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$;

- $\bar{A}$ è il più piccolo insieme che contiene A.

Un punto di aderenza può essere anche un **punto di accumulazione** se:

$$\forall A \subseteq R \; \forall x_0 \in R, x_0 \text{ è un punto di accumulazione } \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}(x_0) \; A \cap U \neq \emptyset \cup \{x_0\}$$

Ogni punto di accumulazione è un punto di aderenza ma non tutti i punti di aderenza sono punti di accumulazione, pertanto possiamo affermare:

$$accumulazione \Longrightarrow aderenza$$

L'**insieme di tutti i punti di accumulazione** di un insieme A è detto **derivato di A, $D(A)$**.

Un punto di un insieme si dice **isolato** se non è un punto di accumulazione, cioè:

$$\exists U \in \mathcal{I}(x_0): A \cap U = \{x_0\}$$

Per fare un esempio di punto di accumulazione si prende l'insieme $A = \left\{n \in N: \frac{1}{n}\right\}$. In questo insieme esiste ed è unico il punto di accumulazione, cioè zero. Infatti:

$$\forall U \in \mathcal{I}(x): U =]-\delta; \delta[, \frac{1}{n} < \delta$$

Ma per la disuguaglianza di Archimede:

$$n > \frac{1}{\delta}$$

Pertanto, esiste un punto di U che appartiene anche ad A e 0 è un punto di accumulazione. Si dice che zero è l'unico punto di accumulazione dell'insieme perché:

- I **punti interni** all'insieme sono **punti isolati** (basta prendere $\delta < \frac{|x_0 - x_n|}{2}$, con x_n un punto dell'insieme, per non avere intersezioni con l'insieme stesso);
- Gli **estremi** sono uno **punto di accumulazione**, 0, e uno **parte dell'insieme**, 1;
- I **punti esterni non sono punti di accumulazione** perché basta prendere $\delta < \frac{|1-x|}{2}$ o $\delta < \frac{x}{2}$ per non far cadere nessun punto dell'intorno nell'insieme.

DIMOSTRAZIONE PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI Q

Ipotesi:

$\forall A = Q \subseteq R, \forall x_0 \in R:]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\; \forall \delta > 0$

Tesi:

$D(Q) = R$

Dimostrazione:

Sia nel caso in cui x_0 sia razionale che irrazionale, si può sfruttare la densità di Q e di Q\R in R per trovare un punto di Q che sia interno all'intorno di x_0, per cui:

$$\exists q \in A: x_0 - \delta < q < x_0 + \delta$$

Che equivale a dire che x_0 è un punto di accumulazione per A.

$$D(Q) = R$$

CVD

DIMOSTRAZIONE INFINITO COME PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$$\forall X \subseteq R: \sup X = +\infty \Leftrightarrow +\infty \in D(X)$$

Ipotesi:

1. $\forall X \subseteq R: \sup X = +\infty$
2. $+\infty \in D(X)$

Tesi:

1. $+\infty \in D(X)$
2. $\forall X \subseteq R: \sup X = +\infty$

Dimostrazione:

1. In un intorno di $+\infty$ deve cadere un elemento di X per dimostrare la prima implicazione, ma X è illimitato e non ha maggiorante perciò si può trovare un punto che appartenga all'intorno:
$$\exists x \in X: x > a \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}(+\infty)$$
2. Per la seconda implicazione; in ogni intorno di $+\infty$, per ipotesi, cade un punto di X; ciò significa che non esiste un maggiorante e dunque che $\sup X = +\infty$

$$\forall]a; +\infty[\ \exists x \in X: x > a$$

La dimostrazione può essere replicata anche considerando l'estremo inferiore dell'insieme.

CVD

DIMOSTRAZIONE ESTREMO SUPERIORE COME PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Ipotesi:

$\forall A \subseteq R: \sup A \neq +\infty\ \wedge \sup A \notin A$ (alias non è massimo)

Tesi:

$\sup A \in D(A)$

Dimostrazione:

Posto $l = \sup A$, si considera un suo intorno $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ ma se vi cade un elemento di A esso non può essere *l*; inoltre, per la seconda proprietà dell'estremo superiore $\exists x_\varepsilon \in A: x_\varepsilon > l - \varepsilon$, ma $x_\varepsilon < l$ e pertanto:

$$l - \varepsilon < x_\varepsilon < l < l + \varepsilon$$

Da ciò deriva che:

$$l = \sup A \in D(A)$$

La dimostrazione può essere svolta in maniera analoga per l'estremo inferiore.

CVD

Infine, sui punti di accumulazione si può dire:

- $\forall A \subseteq R$, A **è chiuso** $\Leftrightarrow D(A) \subseteq A$;
- **Un insieme di finiti elementi non ha nessun punto di accumulazione** ($\forall A \subseteq R, x_0 \in R, x \in D(A) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}(x_0), U \cap A$ ha infiniti elementi);
- È valido il **Teorema di Bolzano**.

Il teorema di Bolzano sostiene che $\forall A =]a; b[\subseteq R$ e A ha infiniti elementi $\Longrightarrow D(A) = A \cup \{a\} \cup \{b\}$. Cioè i **punti di accumulazione** di un insieme chiuso e limitato sono **tutti i punti dell'insieme compresi gli estremi**.

LIMITI

$$\forall f: A \to R \wedge A \subseteq R, \forall x_0 \in \bar{R}: x_0 \in D(A)$$

La definizione **generale** di **limite** è:

$$l \in \bar{R}, l = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall J(l)\ \exists I x_0: \forall x \in A \cap I x_0 \backslash \{x_0\}\ f(x) \in J(l)$$

Questa definizione si **aggiorna** se si considerano le varie casistiche in cui si possono trovare l e x_0.

- $x_0 \in \bar{R}, l \in R$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in A\ \cap]x_0 - \delta; x_0 + \delta[-\{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $x_0 = \infty, l \in R$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a > 0: \forall x \in A\ \wedge x > a, |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $x_0 = +\infty, l = +\infty$

$$\forall M > 0\ \exists a > 0 : \forall x \in A\ \wedge x > a, f(x) > M$$

- $x_0 = +\infty, l = -\infty$

$$\forall M > 0\ \exists a > 0 : \forall x \in A\ \wedge x > a, f(x) < -M$$

- $x_0 = -\infty, l = -\infty$

$$\forall M > 0\ \exists a > 0 : \forall x \in A\ \wedge x < -a, f(x) < -M$$

ESEMPIO DIMSOTRAZIONE DI UN LIMITE

$$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \cap R^+ \setminus \{5\}, \left| \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} \right| < \epsilon$$

$$\left| \sqrt{x}-\sqrt{5} \right| < \varepsilon$$

$$\sqrt{5}-\varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{5}+\varepsilon$$

$$(\sqrt{5}-\varepsilon)^2 < x < (\sqrt{5}+\varepsilon)^2$$

Il primo termine equivale a poco meno di cinque e il secondo a poco più di cinque; pertanto, x può assumere il valore 5 e il limite è verificato.

È possibile dimostrare che se esiste il **limite nel dominio** di una funzione per x_0, punto di accumulazione per il dominio, allora esso è **uguale** al **limite in una restrizione del dominio** per x_0, punto di accumulazione anche per la restrizione.

$$\forall f: A \to R \wedge x_0 \in D(A) \cap \bar{R} : \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l, \forall A' \subseteq A : x_0 \in D(A') \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)_{A'} = l$$

Si può infatti mostrare questo teorema con la **funzione caratteristica** di Q:

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1\ se\ x \in Q \cap [0;1] \\ 0\ se\ x \in R \setminus Q \cap [0;1] \end{cases}$$

In questo caso si suppone che esista il limite nel dominio $[0;1]$ ma nelle due restrizioni $R\backslash Q \cap [0;1]$ e $Q \cap [0;1]$ è diverso e, pertanto, la supposizione originaria è falsa.

DIMOSTRAZIONE LIMITE DI UNA COSTANTE

Ipotesi:

$\forall f: R \rightarrow \{c\}$

Tesi:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \ \forall x_0 \in D(R)$

Dimostrazione:

Secondo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap x_0, |f(x) - c| < \varepsilon$$

Tuttavia, considerando $f(x) = c \ \forall x \in R$:

$$|c - c| < \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon$$

Che è valida per tutto il dominio, dimostrando il limite:

$$\lim_{x \to c} f(x) = c \ \forall x_0 \in D(R)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ DEL LIMITE

Ipotesi:

$\forall f: A \rightarrow R \land x_0 \in D(A) \cap \bar{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Tesi:

$\exists! \lim_{x \to x_0} f(x)$

Dimostrazione:

Sia supposto per assurdo che esistano due limiti diversi:

$$l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

$$l_1 \neq l_2$$

Scrivendo la definizione dei due limiti diversi:

$$\forall J(l_1)\ \exists I_{x_0}{}': \forall x \in A \cap I_{x_0} \backslash \{x_0\}, f(x) \in J(l_1)$$

$$\forall J(l_2)\ \exists I_{x_0}{}'': \forall x \in A \cap I_{x_0} \backslash \{x_0\}, f(x) \in J(l_2)$$

Per la proprietà di separazione si possono sempre trovare due intorni di due punti diversi la cui intersezione è l'insieme vuoto:

$$J(l_1) \cap J(l_2) = \emptyset$$

Ma per la definizione di limite

$$\forall x \in I_{x_0}{}'' \cap I_{x_0}{}', f(x) \in J(l_1)\ \wedge\ f(x) \in J(l_2)$$

Ma ciò implica che:

$$J(l_1) \cap J(l_2) \neq \emptyset$$

Violando la proprietà di separazione di due intorni. Allora si raggiunge l'assurdo e:

$$\exists! \lim_{x \to x_0} f(x)$$

CVD

Si distinguono le **parti a destra e a sinistra** di un insieme *X* **rispetto ad un punto** $\boldsymbol{x_0}$:

$$\forall f: X \to R\ \wedge\ x_0 \in D(A)$$

Si definisce parte a destra di *X* l'intervallo:

$$X^+ =]x_0; +\infty[$$

E si definisce parte a sinistra di *X* l'intervallo:

$$X^- =]-\infty;\ x_0[$$

In funzione a queste due definizioni si sviluppa la definizione di **limite destro** e **limite sinistro** come **limiti di una restrizione** a destra o a sinistra del punto di accumulazione rispetto al dominio:

$$\lim_{x \to x_0{}^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)_{|X^+} = l\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in I_{x_0} \cap X^+ \backslash \{x_0\}, \left| f(x)_{|X^+} - l \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0{}^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)_{|X^-} = l\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in I_{x_0} \cap X^- \backslash \{x_0\}, \left| f(x)_{|X^-} - l \right| < \varepsilon$$

Ma $I_{x_0} \cap X^+ \backslash \{x_0\}$ può anche essere scritto come $]x_0; x_0 + \delta[\cap X \backslash \{x_0\}$ e $I_{x_0} \cap X^+ \backslash \{x_0\}$ come $]x_0 - \delta; x_0[\cap X \backslash \{x_0\}$.

È possibile dimostrare che **un limite esiste solo se esistono i limiti a destra e a sinistra per lo stesso punto ed essi sono uguali**:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) \ \wedge \ \exists \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) \ \wedge \ \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = l = \lim_{x\to {x_0}^-} f(x)$$

Questo teorema si dimostra prendendo in considerazione il **teorema sui limiti delle restrizioni di una funzione** mostrato di sopra.

DIMOSTRAZIONE LIMITE DI UNA FUNZIONE LIMITATA

Ipotesi:

$\forall f: X \to R \ \wedge \ x_0 \in D(X)$

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Tesi:

$\exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}, |f(x)| < k \ \forall k \in R^+$

Dimostrazione:

Per la definizione di limite:

$$\varepsilon = 1 \ \exists I_{x_0}: \forall x \in X \cap I_{x_0} \backslash \{x_0\}, |f(x) - l| < 1$$

Ma per le proprietà dei moduli:

$$|f(x)| - |l| < 1$$

$$|f(x)| < 1 + |l|$$

Quindi preso $k = \max(1 + |l|;\ |f(x_0)|)$:

$$|f(x)| < k \ \forall x \in I_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}$$

Si prende in considerazione $f(x_0)$ solo nel caso in cui la funzione sia definita in x_0.

CVD

DIMOSTRAZIONE LIMITE DI UNA FUNZIONE PERIODICA NON COSTANTE

Ipotesi:

$\forall f: R \to R, \forall\, T > 0: f(x + T) = f(x) \ \wedge \ \forall x_1, x_2 \in R: f(x_1) \neq f(x_2)$

Tesi:

$\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$

Dimostrazione:

La dimostrazione è fatta per $+\infty$ ma è analoga per $-\infty$. Siano presi i due insiemi:

$$X' = \{n \in N : x' + nT\}$$

$$X'' = \{n \in N : x'' + nT\}$$

Effettuando il limite della funzione alle due restrizioni:

$$\lim_{x \to +\infty} f_{|X'}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x' + nT) = \lim_{n \to +\infty} f(x') = f(x')$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_{|X^{?\prime}}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x'' + nT) = \lim_{n \to +\infty} f(x'') = f(x'')$$

È stato dimostrato che in due restrizioni del dominio di una funzione il limite per uno stesso punto non è lo stesso; pertanto, per il teorema sui limiti delle restrizioni di una funzione:

$$\nexists \lim_{x \to \infty} f(x)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE SOMMA E PRODOTTO DI LIMITI

Ipotesi:

$\forall f, g: X \to R \wedge x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \wedge \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$ con $l, m \in \bar{R}$

Tesi:

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
2. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm$
3. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \Leftrightarrow g(x) \neq 0 \ \forall x \in I_{x_0}$

Dimostrazione 2:

Ovviamente si prendono in considerazioni solo le somme e i prodotti che non ricadono nelle forme indeterminate. La dimostrazione 1 è banale se fatta applicando la disuguaglianza triangolare, mentre la 3 è una diretta conseguenza della 2.

Va dimostrato che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{I}_{x_0}: \forall x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \backslash \{x_0\}, |f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$. Scrivendo le definizioni dei due limiti:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I'_{x_0}: \forall x \in X \cap I'_{x_0} \backslash \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I''_{x_0}: \forall x \in X \cap I''_{x_0} \backslash \{x_0\}, |g(x) - m| < \varepsilon$$

Si considera:

$$|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$$

$$|f(x)g(x) - lg(x) - lm + lg(x)| < \varepsilon$$

Raccogliendo i termini comuni e applicando la disuguaglianza triangolare:

$$|g(x)[f(x) - l] + l[g(x) - m]| \leq \ |g(x)||f(x) - l| + |l||g(x) - m|$$

Per il teorema delle funzioni limitate:

$$\exists I'''_{x_0}: \forall x \in X \cap I'''_{x_0} \backslash \{x_0\}, |g(x)| < k$$

Preso $\bar{I}_{x_0} = I'_{x_0} \cap I''_{x_0} \cap I'''_{x_0}$ si nota che in $\bar{I}_{x_0}$ convergono tre situazioni:

1. $|f(x) - l| < \varepsilon$ in I'_{x_0};
2. $|g(x) - m| < \varepsilon$ in I''_{x_0};
3. $|g(x)| < k$ in I'''_{x_0}.

Pertanto, partendo da $|f(x)g(x) - lm| \leq \ |g(x)||f(x) - l| + |l||g(x) - m|$ si può dire:

$$|f(x)g(x) - lm| < k\varepsilon + |l|\varepsilon$$

Ma preso $\varepsilon' = k\varepsilon + |l|\varepsilon$:

$$|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TOREMA DI REGOLARITÀ

Ipotesi:

$\forall f: X \to R: f$ è monotona in X

$e'' = \sup X \ \wedge e' = \inf X$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to e''} f(x) \ \wedge \exists \lim_{x \to e'} f(x)$

In particolare:

- f è crescente

$\lim_{x \to e''} f(x) = \sup_{X \backslash \{e''\}} f \ \wedge \ \lim_{x \to e'} f(x) = \inf_{X \backslash \{e'\}} f$

- f è decrescente

$$\lim_{x \to e''} f(x) = \inf_{X \setminus \{e''\}} f \wedge \lim_{x \to e'} f(x) = \sup_{X \setminus \{e'\}} f$$

Dimostrazione:

La dimostrazione è svolta solo nel primo caso per $x \to e''$, per $x \to e'$ basta invertire i soggetti e per il secondo caso i segni delle disuguaglianze.

Nel calcolo dell'estremo superiore e inferiore della funzione (nella tesi) si sottrae l'estremo del dominio perché, in quanto punto di accumulazione, nella definizione di limite esso è escluso e inoltre può capitare che sia diverso dal valore assunto dalla funzione in quel punto.

Considerato $l = \sup f$, si possono verificare due casi:

- $l \in R$

L'obbiettivo della dimostrazione è:

$$\forall \varepsilon > 0\ I_{e''}: \forall x \in X \cap I_{e''} \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Poiché l'estremo superiore (*l*) è il minimo dei maggioranti, si considerano le sue proprietà (prima e seconda):

$$\exists x_\varepsilon: f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon\ \wedge l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$$

Considerando l'estremo superiore il limite da dimostrare è un limite sinistro, pertanto il relativo intorno sarà configurato:

$$I_{e''} = [x_\varepsilon; e'']$$

Ma poiché la funzione è crescente:

$$\forall x \in X \cap I_{e''} \setminus \{x_0\}, x > x_\varepsilon \Longrightarrow f(x_\varepsilon) < f(x)$$

E cioè:

$$l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < f(x) < l + \varepsilon$$

Pertanto:

$$\exists \lim_{x \to e''} f(x) = l$$

- $l \in \bar{R} \setminus R$

Dire che $l = +\infty$ significa dire che la funzione non è limitata superiormente e, pertanto, che non esistono maggioranti. Da ciò consegue:

$$\forall M > 0\ \exists\ x_\varepsilon: f(x_\varepsilon) > M$$

Parlando sempre di limite sinistro:

$$I_{e''} = [x_\varepsilon; e'']$$

E considerando che la funzione è crescente:

$$\forall x \in X \cap I_{e''} \backslash \{x_0\}, x > x_\varepsilon \Longrightarrow f(x_\varepsilon) < f(x)$$

Ma:

$$M < f(x_\varepsilon) < f(x)$$

Cioè:

$$\exists \lim_{x \to e''} f(x) = l$$

CVD

CONSEGUENZA TEOREMA DI REGOLARITÀ

Ipotesi:

$\forall f: I_{x_0} \to R: f$ è crescente

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \ \wedge \ \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Dimostrazione:

Il teorema può essere dimostrato anche prendendo come ipotesi una funzione decrescente, in tal caso si invertono i segni delle disuguaglianze.

Dalla tesi notiamo che non è necessario che il limite esista, cioè che i limiti destro e sinistro coincidano, ma solo che essi esistano.

Se si considerano le definizioni di limite destro e sinistro, $x_0 = \inf I_{x_0}^+ = \sup I_{x_0}^-$. Per il teorema di regolarità:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{I_{x_0}^- \backslash \{x_0\}} f \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{I_{x_0}^+ \backslash \{x_0\}} f$$

Considerando che gli estremi superiore e inferiore sono, rispettivamente il minimo dei maggioranti e il massimo dei minoranti:

$$\inf_{I_{x_0}^+ \backslash \{x_0\}} f \leq f(x) \leq \sup_{I_{x_0}^- \backslash \{x_0\}} f$$

Cioè:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

CVD

TEOREMI DEL CONFRONTO

I teoremi della **permanenza del segno**, del **carabiniere** e dei **carabinieri** sono detti **teoremi del confronto**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Ipotesi:

$\forall f: X \to R \wedge x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$

Tesi:

$\exists \bar{I}_{x_0}: \forall\, x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \setminus \{x_0\}, f(x) > 0$

Dimostrazione:

Dalla definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I_{x_0}: \forall x \in X \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Preso $\varepsilon = \frac{l}{2}$:

$$l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2}$$

Pertanto:

$$f(x) > \frac{l}{2} > 0$$

È possibile dimostrare anche il teorema inverso, a patto che si consideri anche l'inclusione dello zero nelle ipotesi e nella tesi:

Ipotesi:

$\forall f: X \to R \wedge x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists \bar{I}_{x_0}: \forall\, x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \setminus \{x_0\}, f(x) \geq 0$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \geq 0$

Dimostrazione:

Supponendo per assurdo che $l < 0$, per il teorema della permanenza del segno $f(x)$ non può essere positivo, raggiungendo l'assurdo. Pertanto, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \geq 0$.

CVD

GENERALIZZAZIONE TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Ipotesi:

$\forall f, g: X \rightarrow R \wedge x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \ \wedge \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l'' : l' > l''$

Tesi:

$\exists \bar{I}_{x_0}: \forall\, x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \,/\{x_0\}, f(x) > g(x)$

Dimostrazione:

Per la definizione di limite di entrambe le funzioni:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I'_{x_0}: \forall x \in X \cap I'_{x_0} \backslash \{x_0\}, |f(x) - l'| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I''_{x_0}: \forall x \in X \cap I''_{x_0} \backslash \{x_0\}, |g(x) - l''| < \varepsilon$$

Cioè:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon$$

$$l'' - \varepsilon < g(x) < l'' + \varepsilon$$

Quindi:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon$$

$$l'' - \varepsilon < g(x) < l'' + \varepsilon$$

Considerato l'intorno: $\bar{I}_{x_0} = I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$ e supposto $l' - \varepsilon > l'' + \varepsilon$, si ha che:

$$\frac{l' - l''}{2} > \varepsilon$$

Pertanto, si può costruire la seguente catena di diseguaglianze:

$$g(x) < l'' + \varepsilon < l' - \varepsilon < f(x)$$

$$g(x) < f(x)$$

Anche in questo caso, come nel caso particolare del teorema, vale la proposizione inversa a patto che si inserisca l'inclusione degli zeri.

CVD

Una **conseguenza del teorema della permanenza del segno** è il limite di una **funzione** che in qualsiasi intorno di un suo punto di accumulazione è **sia positiva che negativa**. In tal caso **il limite è necessariamente 0**, in quanto se fosse o maggiore o minore di zero escluderebbe uno dei due stati della funzione (maggiore o minore di zero) dal teorema della permanenza del segno, andando in **contraddizione**.

Esiste una **classe di funzioni** per cui **esiste sempre il limite** per un punto di accumulazione per il dominio, tale classe è quella delle **funzioni monotone**. Infatti:

$$\forall\, f: X \to R, x_0 \in D(X) \cap \bar{R}, f \text{ è } regolare\ in\ x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{R}$$

Da tale definizione si diramano **diversi tipi di funzioni regolari**:

- Funzione **convergente**, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R$;
- Funzione **infinitesima**, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$;
- Funzione **infinita**, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Quando una funzione non è regolare si dice o **non regolare** o **oscillante**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEL CARABINIERE

Ipotesi:

$\forall f, g: X \to R\ \wedge x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty\ \wedge \exists I_{x_0}: \forall x \in X \cap I_{x_0} \backslash \{x_0\}, f(x) \geq g(x)$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Dimostrazione:

La dimostrazione è valida sia considerando $+\infty$ che considerando $-\infty$.

$$\forall M > 0\ \exists U'_{x_0}: \forall x \in X \cap U'_{x_0} \backslash \{x_0\}, g(x) > M$$

Preso $U_{x_0} = U'_{x_0} \cap I_{x_0}$, si ha che:

$$\forall xv \in X \cap U_{x_0} \backslash \{x_0\}, f(x) \geq g(x) > M$$

Pertanto, in U_{x_0}:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI CARABINIERI

Ipotesi:

$\forall f, g, h: X \to R \ \wedge \ x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

$\exists I_{x_0}: \forall x \in X \cap I_{x_0} \backslash \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema è necessario provare la seguente proposizione:

$$\forall J(l) \exists \bar{I}_{x_0}: \forall x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \backslash \{x_0\}, g(x) \in J(l)$$

Scrivendo le definizioni per entrambi i limiti assunti nelle ipotesi:

$$\exists U': \forall x \in X \cap U' \backslash \{x_0\}, f(x) \in J(l)$$

$$\exists U'': \forall x \in X \cap U'' \backslash \{x_0\}, h(x) \in J(l)$$

Preso un intorno $\bar{I}_{x_0} = U' \cap U' \cap I_{x_0}$ si ha che:

$$\forall x \in X \cap \bar{I}_{x_0} \backslash \{x_0\}, g(x) \in [f(x); h(x)] \subseteq J(l)$$

Infatti, per ipotesi $g(x) \in [f(x); h(x)]$ e per costruzione $[f(x); h(x)] \subseteq J(l)$, ma avendo preso un intorno comune a tutte e tre le funzioni:

$$g(x) \in J(l)$$

CVD

SUCCESSIONI

Una **successione** è una qualsiasi **funzione** che va **da un sottoinsieme illimitato dei numeri naturali all'insieme dei numeri reali**.

$$\forall f: N \to R : n \to f(n) = a_n = x_n = (a_n)_{n \in N}$$

Dal momento in cui il dominio di una successione è un sottoinsieme illimitato dei numeri naturali, l'**unico punto di accumulazione** per cui si può svolgere un limite **è** $+\infty$:

- Successione **convergente**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon \geq\ \exists\nu_\varepsilon \in N: \forall n \geq\ \nu_\varepsilon, |a_n - l| < \varepsilon$$

- Successione **divergente positivamente**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \geq\ \exists\nu_\varepsilon \in N: \forall n \geq\ \nu_\varepsilon, a_n > M$$

- Successione **divergente negativamente**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \geq\ \exists\nu_\varepsilon \in N: \forall n \geq\ \nu_\varepsilon, a_n > -M$$

Una successione si dice **regolare se è dotata di limite**, che esso sia convergente o divergente.

Dal momento in cui una successione deriva da una funzione, se quest'ultima ha una particolare **monotonia** essa verrà **ereditata dalla successione**:

- Successione **crescente**

$$a_n \leq a_{n+1}$$

- Successione **strettamente crescente**

$$a_n < a_{n+1}$$

- Successione **decrescente**

$$a_n \geq a_{n+1}$$

- Successione **strettamente decrescente**

$$a_n > a_{n+1}$$

Analogamente, una **successione è limitata** solo se **la funzione da cui deriva è limitata**:

$$\exists k \in R^+: |a_n| < k \Leftrightarrow \exists k \in R^+: |f(n)| < k$$

Ciò significa che **la successione è dotata di almeno un maggiorante e almeno un minorante**:

$$-k < a_n < k$$

Si definisce **sottosuccessione** una **successione strettamente crescente che ha codominio nei numeri naturali** e può essere **composta ad una successione**.

$$\forall a_n \forall\varphi: N \to N : k \to \varphi(k), \left(a_{n_{k\in N}}\right)_{n\in N}$$

Se una **successione è regolare** allora tutte le sue **sottosuccessioni/restrizioni/estratte sono regolari** e hanno lo **stesso limite**. Cioè se i limiti di due sottosuccessioni sono diversi allora la funzione non è regolare:

$$a_n = (-1)^n$$

Presa la sottosuccessione di numeri pari e dispari si nota che i due limiti sono diversi:

$$1 = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n} \neq \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1} = -1$$

Pertanto:

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Poiché le successioni sono particolari funzioni, **valgono i teoremi sui limiti dimostrati per le funzioni** (come l'algebra dei limiti).

Il **teorema ponte** permette di collegare i **limiti di funzioni** ai **limiti di successioni** e viene solitamente usato per dimostrare che il **limite** di una funzione/successione **non esiste**. Tale teorema permette di calcolare limiti come quello che segue:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}$$

Con $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Con il teorema ponte si può riscrivere tale limite come:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

Infine, grazie al **teorema ponte**, è possibile calcolare il **limite di un polinomio**:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}{b_m x^m\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m}\frac{1}{x^m}\right)}$$

Ma poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0$ con $k \in N$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow n < m \\ \frac{a_n}{b_m} \Leftrightarrow n = m \\ \infty \Leftrightarrow n > m \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA PONTE

Ipotesi:

$\forall f: A \to R \wedge x_0 \in D(A) \cap \bar{R}$

$\exists x_n \subseteq A\backslash\{x_0\} \wedge \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$

Tesi:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x_n) = l$

Dimostrazione

Si dimostri la prima implicazione:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x_n) = l$

Preso un intorno J_l, in sua corrispondenza (applicando la definizione di limite):

$$\exists I_{x_0}: \forall x \in A \cap I_{x_0}\backslash\{x_0\}, f(x) \in J_l$$

In corrispondenza della successione convergente x_n a x_0 e in un intorno di questo punto (applicando la definizione di convergenza):

$$\exists \nu: \forall n \geq \nu, x_n \in I_{x_0} \cap A\backslash\{x_0\}$$

Da ciò consegue che preso un $x \in A \cap I_{x_0}\backslash\{x_0\}$ esso può essere un valore della successione x_n e in tale sottoinsieme $f(x) \in J_l$; pertanto, si conclude:

$$f(x_n) \in J_l,: \forall n \geq \nu$$

- $\lim_{x\to x_0} f(x_n) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Sia supposto per assurdo che $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$, si neghi la seguente definizione:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall X \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A\backslash\{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Che risulta in:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0: \exists x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A\backslash\{x_0\}, |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Preso $\delta = \frac{1}{n}$ con *n* un numero naturale:

$$\exists x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A\backslash\{x_0\}, |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

Al variare di *n* si può considerare x_n una successione, e per il teorema dei carabinieri:

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

$$x_n \to x_0$$

Ma poiché per ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x_n) = l$, si raggiunge l'assurdo in quanto:

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon$$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

Il seguente lemma è propedeutico alla dimostrazione del teorema di Bolzano-Weiersrass

Ipotesi:

$\forall (a_n)_{n \in N}$

Tesi:

$\exists a_{n_k} : a_{n_k}$ è monotona

Dimostrazione:

Sia preso l'insieme di indici dominanti. Un indice è dominante se è dominante l'elemento della successione di tale indice. Infine, un elemento è dominante se:

$$\exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \; a_{n_0} > a_n$$

Quindi l'insieme di indici dominanti si compone di:

$$E = \{n \in N : a_n > a_m \; \forall m > n\} \subseteq$$

In quanto composto da numeri naturali esso è un sottoinsieme di numeri naturali e, in quanto tale, può essere di due tipi: a cardinalità finita o infinita.

$$|E| = +\infty \vee |E| = h \in N$$

Si distinguono quindi questi due casi:

- $|E| = +\infty$

Dal momento in cui *E* è un sottoinsieme dei numeri naturali, esso è dotato di minimo:

$$a_{n_1} = \min E \in E$$

Poiché appartiene ad E:

$$a_{n_1} > a_m \; \forall m > n_1$$

Sia preso un indice $n_2 > n_1$, allora:

$$a_{n_1} > a_{n_2}$$

Si chiami n_3 il minimo dell'insieme *E* privato di n_2 e di n_1, allora:

$$a_{n_3} = \min(E\setminus\{n_1, n_2\}) \Longrightarrow a_{n_3} > a_m\ \forall m > n_3$$

Ma poiché $n_3 > n_2$, allora:

$$a_{n_3} < a_{n_2} < a_{n_1}$$

Generalizzando per induzione ad un indice k:

$$n_k = \min(E\setminus\{n_1, n_2, n_3 \dots n_{k-1}\}) \Longrightarrow a_{n_k} < a_{n_{k-1}} < \cdots < a_{n_2} < a_{n_1}$$

a_{n_k} è una successione strettamente decrescente e, pertanto, monotona.

- $|E| = h \in N$

Poiché *E* ha cardinalità finita, esso sarà composto da un numero finito di elementi, tutti ordinati:

$$E = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_h\}$$

E, pertanto è possibile dire:

$$a_{n_h} > a_m \forall m > n_h$$

In questo modo è possibile affermare l'esistenza di un minimo ed un massimo di tale insieme. In particolare, sia preso l'elemento successivo al massimo:

$$\bar{n}_1 = \max E + 1 \notin E$$

Poiché non appartiene ad *E*, il suo elemento associato della successione non è un elemento dominante:

$$\exists \bar{n}_2 > \bar{n}_1 : a_{\bar{n}_1} < a_{\bar{n}_2}$$

A sua volta $\bar{n}_2$ non appartiene ad *E*, pertanto, è possibile ripetere il procedimento:

$$\exists \bar{n}_3 > \bar{n}_2 : a_{\bar{n}_1} < a_{\bar{n}_2} < a_{\bar{n}_3}$$

Generalizzando per induzione ad un indice k:

$$\exists \bar{n}_k > \bar{n}_{k-1} : a_{\bar{n}_{k-1}} < a_{\bar{n}_k}$$

a_{n_k} è una successione strettamente crescente e, pertanto, monotona.

CVD

Ipotesi:

$\forall (a_n)_{n \in N} : \exists k \in R^+ : |a_n| < k$

Tesi:

$\exists a_{n_k}: \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = l \in R$

Dimostrazione:

Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona, ma dal momento in cui la successione che viene presa per ipotesi è limitata, anche la sottosuccessione ammessa è limitata.

Il teorema di regolarità delle funzioni monotone (applicato alle successioni) afferma che una successione monotona è regolare, è dotata di limite e di un estremo superiore e inferiore, ma poiché la successione è finita:

$$\exists \sup a_n, \inf a_n \in R$$

Ma per quanto detto sopra:

$$\exists \sup a_{n_k}, \inf a_{n_k} \in R$$

E per il teorema di regolarità, supponendo che la sottosuccessione sia crescente [*risp.* decrescente]:

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \sup a_{n_k} \ [risp. \inf a_{n_k}]$$

La sottosuccessione è, così, convergente.

CVD

Siano prese diverse **successioni infinite** e ne sia fatto il **rapporto** a due a due. Non è possibile stabilire con certezza qual è il risultato del limite di tali rapporti (a meno che non siano limiti notevoli) se non con il **criterio del rapporto per le successioni**. Infatti, con tale criterio è possibile stabilire quale infinito è più "**veloce**" o "**lento**" ad andare ad infinito.

La seguente dimostrazione vale sia per **successioni positive** che **negative**, infatti se $a_n < 0 \implies \exists b_n = -a_n \wedge \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \implies \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = -l$.

$\forall (a_n)_{n\in N}$, si dice che a_n gode **definitivamente di una proprietà P** se $\exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0 : a_n$ gode della proprietà P. Cioè a_n **non gode della proprietà P per qualsiasi valore *n* ma solo per quelli successivi ad un valore n_0**.

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DEL RAPPORTO PER SUCCESSIONI

Ipotesi:

$\forall (a_n)_{n\in N}: a_n > 0 \ \forall n \in N$

$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0; +\infty)$ (per il teorema della permanenza del segno)

Tesi:

1. $l < 1 \Longrightarrow a_n$ è definitivamente decrescente $\wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$;
2. $l > 1 \Longrightarrow a_n$ è definitivamente crescente $\wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$;
3. $l = 1 \Longrightarrow$ non si può dire nulla sul comportamento della successione.

Dimostrazione:

1. $l < 1 \Longrightarrow a_n$ è definitivamente decrescente $\wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$;

Per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$$

Poiché $l < 1$, si può prendere un $\varepsilon: l + \varepsilon < 1$, cioè $\varepsilon < 1 - l$ che sarà una quantità positiva. Sia posto $q = l + \varepsilon < 1$, pertanto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

Si moltiplicano i due membri per a_n:

$$a_{n+1} < q \cdot a_n < a_n$$

Da ciò si conclude che, a partire dall'indice zero, la successione è definitivamente decrescente. Per dimostrare la tendenza di a_n si ricorre al principio di induzione.

$$a_{n+1} < q \cdot a_n < a_n$$

$$a_{n+2} < q \cdot a_{n+1} < q \cdot q a_n = q^2 \cdot a_n$$

$$a_{n+3} < q \cdot a_{n+2} < q \cdot q^2 a_n = q^3 \cdot a_n$$

Generalizzando:

$$a_{n+k+1} < q^{k+1} \cdot a_n\ \forall k \in N$$

Sia preso un $n \geq n_0: n = n_0 + k$, allora per il principio di induzione (poiché $a_n = a_{n_0+k}$):

$$a_{n_0+k} < q^k \cdot a_{n_0}$$

$$a_n < q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

$$a_n < \frac{q^n a_{n_0}}{q^{n_0}}$$

Sia preso $c = \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$:

$$0 < a_n < q^n \cdot c$$

Ma poiché:

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to+\infty} q^n$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

2. $l > 1 \Longrightarrow a_n$ è definitivamente crescente $\wedge \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$;

Per la definizione di limite:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$$

Poiché $l > 1$, si può prendere un $\varepsilon: l + \varepsilon > 1$, cioè $\varepsilon > 1 - l$ che sarà una quantità positiva. Sia posto $q = l + \varepsilon > 1$, pertanto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$$

Moltiplicando ambo i membri per a_n

$$a_{n+1} > q \cdot a_n > a_n$$

Da ciò si può concludere che la successione a_n è definitivamente crescente a partire da un n_0. Per dimostrare la tendenza di a_n si ricorre al principio di induzione:

$$a_{n+1} > q \cdot a_n > a_n$$

$$a_{n+2} > q \cdot a_{n+1} > q \cdot qa_n = q^2 \cdot a_n$$

$$a_{n+3} > q \cdot a_{n+2} > q \cdot q^2 a_n = q^3 \cdot a_n$$

Generalizzando:

$$a_{n+k+1} > q^{k+1} \cdot a_n\ \forall k \in N$$

Sia preso un $n \geq n_0: n = n_0 + k$, allora per il principio di induzione (poiché $a_n = a_{n_0+k}$):

$$a_{n_0+k} > q^k \cdot a_{n_0}$$

$$a_n > q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

$$a_n > \frac{q^n a_{n_0}}{q^{n_0}}$$

Sia preso $c = \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$:

$$a_n > q^n c$$

Per il teorema del carabiniere, poiché:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n c = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

La dimostrazione vale sia per successioni positive che negative, infatti se $a_n < 0 \Longrightarrow \exists b_n = -a_n \wedge \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = -l$.

CVD

Grazie al **criterio del rapporto di successioni** è possibile stabilire la **catena degli infi**niti. Si sa già che:

$$\log n < n^\alpha$$

In quanto vale il limite notevole:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$$

Inoltre, $n^\alpha < a^n$. Infatti, sia considerato:

$$a_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$$

E si dimostri che il limite di questa quantità è zero, che è vero per il criterio del rapporto di successioni:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{a} < 1$$

Da ciò consegue che n^α è un infinito di **ordine inferiore** a rispetto a a_n. Con dimostrazioni analoghe è possibile ricostruire la seguente catena:

$$\log n < n^\alpha < a^n < n! < n^n$$

Una successione si dice **successione di Cauchy** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_{0_\varepsilon}: \forall n, m \geq n_{0_\varepsilon}, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Le successioni di Cauchy godono delle seguenti proprietà:

1. Se a_n è una successione di Cauchy, a_n è una **successione limitata** (tuttavia, questa è una caratteristica degli spazi a dimensione finita)

Infatti, per la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$|a_n| < |a_m| + \varepsilon$$

Che equivale a dire che la successione **ammette almeno un maggiorante** a partire da a_{n_0}. Ciò equivale a dire che la successione è **definitivamente limitata**; infatti, vengono lasciati fuori dalla limitazione tutti gli $n < n_0$:

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}$$

$$C = \max\{M, \dots, |a_m| + \varepsilon\}$$

Dove C è un maggiorante della successione:

$$|a_n| < C \; \forall n \in N$$

E di conseguenza una **successione di Cauchy** è una successione **limitata**.

2. Se a_n è **convergente** allora è una successione di Cauchy

Per la definizione di convergenza:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in N: \forall n, m \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon$$

Bisogna dimostrare che $\forall m \geq n_0 \; |a_n - a_m| < \varepsilon$. Cioè:

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_n - a_m + l - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si separano i termini sfruttando la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - a_m + l - l| \leq |a_n - l| - |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ma:

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \wedge \; |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Si sommano i due membri sfruttando la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - a_m + l - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_n - a_m + l - l| < \varepsilon$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Quindi una successione **convergente** è una **successione di Cauchy**.

FUNZIONE CONTINUA E FUNZIONE COMPOSTA

$\forall f: A \to R \wedge x_0 \in A$, f è una **funzione continua** $\Leftrightarrow$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Tale definizione è certamente vera in due situazioni, la prima è per tutti gli $\boldsymbol{x_0}$ che sono **punti isolati**, in quanto:

$$|f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon$$

La seconda situazione coinvolge tutti gli $\boldsymbol{x_0}$ che sono **punti di accumulazione**, cioè $x \in D(A)$, per cui:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione si dice **discontinua nel punto $\boldsymbol{x_0}$** se in sua corrispondenza non è valida la definizione di continuità, mentre una funzione è **continua lungo tutto il suo dominio** se è continua per ogni punto di esso; quindi, se la definizione di continuità vale $\forall x_0 \in A$.

È possibile **ampliare la definizione di continuità** e affermare che una funzione è continua se e solo se è **continua sia a destra che a sinistra**. Una funzione è **continua a destra** se:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Mentre è **continua a sinistra** se:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

In genere **tutte le funzioni elementari**, nel loro dominio, **sono funzioni continue**:

$$a^x; \log_a x \, ; \sin x \, ; \cos x \, ; \tan x \, ; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0;$$

Un insieme $X \subseteq R$ è **numerabile** $\Leftrightarrow \exists f: N \to X \wedge f$ è **biunivoca**. Da ciò si deduce che N, Z e Q sono insiemi numerabili ma non lo è R.

DIMOSTRAZIONE LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA O CAMBIAMENTO DI VARIABILE DEL LIMITE

Ipotesi:

$\forall f: X \subseteq R \to Y \ \wedge \ \forall g: Y \subseteq R \to R$

$x_0 \in D(X) \cap \bar{R}$

1.
    a. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \bar{R}$
    b. $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = k \in \bar{R}$
2.

a. $\exists I_{x_0}: f(x) \neq y_0 \; \forall x \in I_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}$
b. $y_0 \in D(Y) \wedge g(y_0) \neq k$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = k$

Dimostrazione:

Le ipotesi 2. Sono fondamentali al fine della dimostrazione in quanto, in loro assenza, non è possibile dimostrare il teorema per tutte le funzioni. Ad esempio, per la funzione composta e il punto $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \Leftrightarrow x \geq 0 \\ 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow y = 0 \\ y \Leftrightarrow y \neq 0 \end{cases}$$

In questo caso, in assenza delle ipotesi 2. Non è possibile trovare un valore univoco del limite della funzione composta.

Si prende in considerazione il caso 2.a in quanto in esso è contenuto per definizione il caso 2.b, infatti, in un intorno di x_0 in cui si riesce sempre a trovare un punto x la cui immagine non è y_0, tale punto è esso stesso punto di accumulazione.

Va dimostrato che in corrispondenza di un intorno del punto k, J_k:

$$\exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}, g\big(f(x)\big) \in J_k$$

Applicando le definizioni di limiti per le ipotesi 1.a e 1.b:

$$I_{y_0} \rightarrow \exists I'_{x_0}: \forall x \in I'_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}, f(x) \in I_{y_0} \cap Y$$

$$J_k \rightarrow \exists I_{y_0}: \forall y \in I_{y_0} \cap Y \backslash \{y_0\}, g(y) \in J_k$$

Tuttavia, non si può procedere per deduzione e affermare che $g\big(f(x)\big) \in J_k$. Ma prendendo in considerazione l'ipotesi 2.a e sia considerato $I''_{x_0} = I_{y_0} \cap I'_{x_0}$, con $x \in I''_{x_0} \cap X \backslash \{x_0\}$, in corrispondenza di tale intorno valgono entrambe le definizioni sopra scritte. In questo modo è possibile affermare:

$$g\big(f(x)\big) \in J_k$$

CVD

Si considerino **due funzioni continue**, *f* e *g*, allora:

- $\boldsymbol{f + g}$ è una funzione continua;
- $\boldsymbol{f \cdot g}$ è una funzione continua;

- $\frac{f}{g}$ è una funzione continua $\Leftrightarrow g \neq 0$.

Dalla definizione di funzione continua si può dedurre che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

E dunque è possibile affermare:

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0)$

In genere, **una funzione è continua se essa è composta da funzioni continue**; infatti, se una funzione *f* è continua in $x_0 \in A \cap D(A)$ e g è continua in $f(x_0)$ allora la funzione $g\big(f(x)\big)$ è continua in x_0.

Insieme alla definizione di continuità è possibile andare a definire il concetto di **discontinuità** come l'**assenza di continuità di una funzione in un punto**. Dal momento in cui una funzione è continua in x_0 se, in primis, x_0 è un punto isolato, una funzione sarà **discontinua in $\boldsymbol{x_0}$** se esso sarà un **punto d'accumulazione**.

Quindi, **una funzione è discontinua in $\boldsymbol{x_0}$ ⟺ essa non è continua in $\boldsymbol{x_0}$**, con $x_0 \in A \cap D(A)$. Affinché tale definizione sia valida, non deve essere valida la seguente uguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esistono **tre possibili** situazioni per cui ciò è valido ed ognuna di tale situazione individua un tipo diverso di **discontinuità**:

- **Discontinuità eliminabile**

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Dal nome di questo tipo di discontinuità si può dedurre che è possibile manipolare la funzione in modo che essa sia continua, infatti:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \Leftrightarrow x \neq x_0 \\ f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0 \end{cases}$$

Questa funzione è continua in quanto $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- **Discontinuità di prima specie**

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \land \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \land l \neq m$$

Ciò significa che la funzione all'approcciarsi di un punto effettua un salto, che equivale al modulo della differenza dei due limiti:

$$s(x_0) = \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Se la funzione è continua i due limiti coincidono e il salto è pari a zero.

- **Discontinuità di seconda specie**

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \wedge \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \wedge (l = \infty \vee m = \infty)$$

Ciò significa che o da destra o da sinistra è presente un asintoto verticale.

DIMOSTRAZIONE DISCONTINUITÀ DI FUNZIONI MONOTONE

Ipotesi:

$\forall f: I = [a; b] \to R : f$ è una funzione monotona

Tesi:

f ha al più discontinuità di prima specie nei punti interni e al più discontinuità eliminabile negli estremi

Dimostrazione:

Si supponga che la funzione sia crescente in *I*, anche se il teorema vale per ogni tipo di monotonia. $\forall x_0 \in I$ si applichi il teorema di regolarità per le funzioni monotone, tale teorema afferma che una funzione monotona è certamente dotata di limite per x che tende all'estremo superiore o inferiore del dominio:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)_{|A \cap [x_0; +\infty)} = \inf\{f(x): x \in A \cap [x_0; +\infty)\} \geq f(x_0)$$

Sia presa una $x \in A \cap [x_0; +\infty)$, risulterà che la *x* sarà sempre maggiore di x_0 e quindi:

$$x \geq x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$f(x_0)$ è un minorante ma poiché l'estremo inferiore è il maggiore dei minoranti:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)_{|A \cap (-\infty; x_0]} = \sup\{f(x): x \in A \cap (-\infty; x_0]\} \leq f(x_0)$$

Sia presa una $x \in A \cap (-\infty; x_0]$, risulterà che la *x* sarà sempre minore di x_0 e quindi:

$$x \leq x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$f(x_0)$ è un maggiorante ma poiché l'estremo superiore è il minore dei maggioranti:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$$

Allora si può concludere che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Con questo risultato è stato dimostrato che la funzione, essendo dotata sia di minorante che di maggiornate, è limitata inferiormente e superiormente e che i due limiti, destro e sinistro, sono finiti.

Dal momento in cui la funzione è dotata di discontinuità e i due limiti sono finiti allora tale discontinuità sarà necessariamente di prima specie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Tale dimostrazione era valida considerando i punti interni di *I* ma se si considerano i due estremi:

Se $x = a$ l'unico limite possibile è il limite destro, per cui:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \geq f(a)$$

È possibile andare a definire una funzione che elimini la discontinuità:

$$g = \begin{cases} f(x) \Leftrightarrow x > a \\ l \Leftrightarrow x = a \end{cases}$$

Un discorso analogo è possibile farlo se $x = b$.

Con tale risultato è possibile affermare che per gli estremi la discontinuità è al più eliminabile.

CVD

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI CONTINUITÀ

Ipotesi:

$\forall f: A \to R :\ f$ è monotona in A

$\Im m(f)$ è un intervallo

Tesi:

f è continua in A

Dimostrazione:

Dire che $\Im m(f)$ è un intervallo equivale a dire che l'immagine della funzione comprende tutti i valori della funzione calcolati negli estremi del dominio A.

Il teorema considera funzioni monotone, perciò si può assumere che la funzione sia crescente e fare un discorso analogo per gli altri casi.

Si ragioni per assurdo:

$$\exists x_0 \in A : x_0 \text{ è un punto di discontinuità}$$

Poiché la funzione è monotona allora essa sarà dotata di discontinuità di prima specie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 < l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Che equivale a dire che tra l_1 e l_2 la funzione non assume alcun valore, il che va in contraddizione con le ipotesi. Da ciò si deduce che la funzione *f* è continua in A.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEGLI ZERI

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R : f$ è continua in $[a; b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi:

$\exists x_0 \in (a; b): f(x_0) = 0$

Dimostrazione:

Dalle ipotesi è possibile affermare che le immagini della funzione agli estremi del dominio sono discordi, cioè di segno opposto; sia supposto che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Per dimostrare questo teorema ci si rivolge ad un processo di ricorrenza. Chiamati:

$$\begin{cases} a = a_0 \Rightarrow f(a_0) < 0 \\ b = b_0 \Rightarrow f(b_0) > 0 \end{cases}$$

Si consideri il punto medio:

$$c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Ottenendo due intervalli:

$$[a_0; b_0] = [a_0; c_1] \cup [c_1; b_0]$$

Andando a considerare quello per cui gli estremi sono opposti, in funzione di c_1:

- $f(c_1) = 0$

In questo caso il teorema sarebbe già dimostrato

- $f(c_1) > 0$

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = c_1 \end{cases}$$

- $f(c_1) < 0$

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \\ b_1 = b_0 \end{cases}$$

Si otterrà sempre:

$$a_0 \leq a_1 \wedge b_1 \leq b_0$$

E proseguendo così...

Generalizzando il processo:

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Se:

- $f(c_{n+1}) = 0$ il teorema è dimostrato;
- $f(c_{n+1}) \neq 0$
  - $a_{n+1} = a_n \wedge b_{n+1} = c_{n+1}$ se $f(c_{n+1}) > 0$
  - $a_{n+1} = c_{n+1} \wedge b_{n+1} = b_n$ se $f(c_{n+1}) < 0$

Creando le due successioni:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b$$

$$a \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$$

La prima successione è crescente e la seconda decrescente, ma entrambe limitate. Ricordando che per ipotesi $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$, l'ampiezza dell'intervallo tra due elementi n-esimi della successione è:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b - a}{2^n}$$

Dal momento in cui ad ogni iterazione l'intervallo si dimezza. Per il teorema delle successioni monotone esistono finiti i limiti ad infinito di queste due successioni:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} b_n = y_0$$

Ma poiché:

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b - a}{2^n} = 0$$

Si deduce che:

$$x_0 = y_0$$

Dal momento in cui la funzione *f* è continua:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0)f(y_0)$$

Tuttavia, la successione $f(a_n)$ è negativa e, per il teorema sulle successioni, $f(x_0)f(y_0) \leq 0$. Però, per quanto appena mostrato, $x_0 = y_0$ e cioè:

$$f(x_0)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$$

CVD

ENUNCIAZIONE TEOREMA PONTE PER LE FUNZIONI CONTINUE

Enunciato:

$\forall f: A \to R : f$ è continua in $x_0 \in A \cap D(A) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A$ con $x_n \to x_0$ per $n \to x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (TEOREMA DI BOLZANO)

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R : f$ è continua in $[a; b]$

$f(a) < f(b)$

Tesi:

$\forall f(a) < y < f(b) \; \exists \; x \in A: f(x) = y$

Dimostrazione:

Il teorema afferma che se una funzione è continua in un intervallo allora essa assumerà tutti i valori compresi tra le immagini degli estremi di tale intervallo. Tale enunciato vale sia se $f(a) < f(b)$ sia se $f(a) > f(b)$ ma, per semplicità, si considera solo il primo caso.

Sia considerata la funzione definita nell'intervallo $[a; b]$:

$$g(x) = f(x) - y$$

Dimostrare che tale funzione ha uno zero equivale a dire che esiste una *x* per cui $f(x) = y$, che dimostra il teorema.

La differenza di funzioni continue (*f* è continua e *y* è una costante) è una funzione continua e, pertanto, è possibile dire:

$$g: [a; b] \to R \text{ è una funzione continua}$$

Calcolando la funzione nei suoi estremi:

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - y < 0 \\ g(b) = f(b) - y > 0 \end{cases}$$

Con queste informazioni è possibile applicare il teorema degli zeri e affermare:

$$\exists\ \bar{x} \in (a; b): g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = y$$

CVD

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Ipotesi:

$\forall f: I = [a; b] \rightarrow R : f$ è continua in I

Tesi:

$\Im m(f)$ è un intervallo

Dimostrazione:

Siano chiamati:

$$\alpha = \inf[\Im m(f)] \wedge \beta = \sup[\Im m(f)]$$

Si consideri l'intervallo $(\alpha; \beta)$. Lo scopo della dimostrazione è:

$$\forall y \in (\alpha; \beta) \Longrightarrow y \in \Im m(f)$$

Ciò è possibile solo se:

$$\forall y \in (\alpha; \beta)\ \exists\ x \in\ I : f(x) = y$$

Sfruttando la seconda proprietà dell'estremo inferiore:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in I: f(x_\varepsilon) < \alpha - \varepsilon$$

Quindi:

$$\exists b \in I: f(b) > y$$

Sfruttando la seconda proprietà dell'estremo superiore:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in I: f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$$

Quindi:

$$\exists a \in I: f(a) < y$$

Da ciò si può concludere che, per il teorema degli zeri:

$$f(a) < y < f(b) \Longrightarrow \exists \bar{x} \in I: f(\bar{x}) = y$$

E cioè, il valore y che è stato assegnato tra α e β è un valore assunto dalla funzione e, dunque, appartiene a $\Im m(f)$.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI WEIERSTRASS

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \subseteq R \to R : f$ è continua in $[a; b]$

Tesi:

$\forall x \in [a; b]\ \exists x_1, x_2 \in [a; b] : m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$

Dimostrazione:

Il teorema mostra come la funzione sia sempre racchiusa tra i valori di minimo e i valori di massimo ($f(x_1)$ e $f(x_2)$). La dimostrazione viene fatta solo per il valore di massimo anche se è equivalente a quella per il valore di minimo.

La dimostrazione del teorema può essere spezzata in due parti:

- Tesi I: f è limitata $\Leftrightarrow \exists k > 0: |f(x)| < k$

Si ragioni per assurdo e si supponga che la funzione sia illimitata superiormente e che non sia dotata di maggiorante. Si prenda in considerazione:

$$(x_n)_{n \in N}$$

In modo che $\exists x_n \in [a; b] : f(x_n) > n$. Applicando il teorema del confronto per le successioni:

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$$

Ma si consideri che la successione x_n è limitata sia superiormente (da *a*) che inferiormente (da *b*). Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, ogni successione limitata ammette un'estratta convergente, quindi

$$\exists x_{n_k} \subseteq x_n: x_{n_k} \to x_0$$

Dal momento in cui $a < x_n < b$, anche la sua estratta seguirà tale comportamento e, effettuando il limite per k ad infinito:

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0$$

E cioè:

$$a < x_0 < b$$

Il teorema ponte per le successioni afferma che:

$$\lim_{k\to+\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Ma poiché il teorema sulle restrizioni afferma che se una successione è dotata di un certo limite ($\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$) allora tutte le sue estratte saranno dotate dello stesso limite, il che va in contraddizione con quanto appena dimostrato. Si raggiunge l'assurdo e, quindi, la funzione è limitata.

- Tesi II: f è dotata di massimo ed esso è un valore assunto

Sia chiamato $M = \sup[\Im m(f)]$, quindi $x \in [a;b]$ e $M \in \Im m(f)$. Si ragioni per assurdo e si supponga che *M* non è un valore assunto, quindi $f(x) < M$. Si consideri la funzione:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}; g: [a;b] \to R$$

La funzione è continua e definita su tutto *R*, in quanto $f(x)$ non assume mai il valore *M*. È stato precedentemente dimostrato che ogni funzione continua in un intervallo è limitata, quindi, considerando anche che la funzione è sempre positiva (massimo – qualcosa):

$$\exists h > 0: g(x) \leq h$$

Dal momento in cui il massimo è il più piccolo dei maggioranti:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq h$$

$$M - f(x) \leq \frac{1}{h}$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{h}$$

Tuttavia, un maggiorante ($M - \frac{1}{h}$) non può essere più piccolo del più piccolo dei maggioranti, raggiungendo un assurdo; si dimostra quindi che il valore di massimo è un valore assunto dalla funzione.

CVD

Il seguente teorema nasce dalla crasi del teorema dei valori intermedi (teorema di Bolzano) e del teorema di Weierstrass.

ENUNCIAZIONE SECONDO TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

Enunciato:

$$\forall f: [a;b] \to R : f \text{ è continua in } [a;b] \Longrightarrow \forall x \in [a;b]\ \exists x_1, x_2: f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Il criterio di monotonia afferma che una funzione strettamente monotona è iniettiva; tuttavia, non vale il contrario, perché una funzione iniettiva può anche avere una discontinuità di prima specie. Affinché sia valido il teorema inverso va considerato solo un intervallo.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INETTIVITÀ E MONOTONIA

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : f$ è continua in I, che è un intervallo o un compatto (unione di intervalli)

Tesi:

f è iniettiva in $I \Leftrightarrow f$ è strettamente monotona in I

Dimostrazione:

Il teorema si riduce a dimostrare la seguente implicazione, visto che il teorema inverso è stato già dimostrato:

$$f \text{ è iniettiva in } I \Longrightarrow f \text{ è strettamente monotona in } I$$

Siano considerati:

$$\forall a, b \in I: a < b \wedge f(a) \neq f(b)$$

Si consideri il caso in cui la funzione è strettamente crescente in $[a; b]$, cioè $f(a) < f(b)$, anche se la dimostrazione è analoga per il caso opposto. Di conseguenza va dimostrato che:

$$\forall x \in [a; b], f(a) < f(x) < f(b)$$

Si ragioni per assurdo e si neghi tale risultato. Si possono verificare due casi:

1. $f(x) < f(a) < f(b)$

Applicando il teorema dei valori intermedi:

$$\exists x_1 \in (a, b): f(x_1) = f(a)$$

Ma ciò è valido solo se $x_1 = a$, il che non è valido perché la funzione è iniettiva. Si è raggiunto l'assurdo, per cui la funzione è strettamente crescente e $f(a) < f(x) < f(b)$.

2. $f(a) < f(b) < f(x)$

Applicando il teorema dei valori intermedi:

$$\exists x_1 \in (a, b): f(x_1) = f(b)$$

Ma ciò è valido solo se $x_1 = b$, il che non è valido perché la funzione è iniettiva. Si è raggiunto l'assurdo, per cui la funzione è strettamente crescente e $f(a) < f(x) < f(b)$.

CVD

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Ipotesi:

$\forall f: I \to \Im m(f) : f$ è strettamente monotona e continua e I è un intervallo o un compatto

Tesi:

$f^{-1}: \Im m(f) \to I$ è continua in $\Im m(f)$

Dimostrazione:

Per comodità si fa riferimento a $g = f^{-1}$. La funzione f è bigettiva, dal momento in cui è strettamente monotona e il codominio è l'immagine della funzione. Se f è strettamente monotona allora anche g è strettamente monotona, per cui, dal momento in cui il codominio di g è un intervallo, è possibile applicare il criterio di continuità ed affermare che anche g, cioè f^{-1} è una funzione continua.

CVD

LIMITI NOTEVOLI

I **limiti notevoli** sono dei **particolari limiti** che o sono **difficili** da calcolare a mano oppure sollevano **forme indeterminate** e per cui è comodo ricordare un **determinato procedimento che conduce ad un valore finito**.

- $\frac{\sin x}{x}$

Sia considerata la costruzione della tangente:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

E sia considerato l'intervallo $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ cioè il triangolo OPA. L'area del triangolo sarà minore dell'area del settore circolare inquadrato ($\widehat{PA}$):

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2}$$

Considerando l'angolo OAQ e la sua area, essa maggiore dell'area del settore circolare:

$$\frac{\tan x}{2} \geq \frac{x}{2}$$

Dunque:

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x$$

Applicando il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1 = \lim_{x\to 0} \cos x$$

Da ciò si deduce che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Il che vale anche nel quadrante opposto, opportunamente cambiando i segni e semplificando.

- $\frac{1-\cos x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

- $\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- $\frac{\tan x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

- $\frac{\arcsin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

- $\frac{\arctan x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

- $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

- $\left(1+\frac{y}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y \ \forall y \in R$$

Analogamente per:

$$\lim_{x\to 0}(1+yx)^{\frac{1}{x}} = e^y$$

Infatti, ci si può ricondurre al caso notevole risolvendo per sostituzione.

- $\frac{\log_a(1+x)}{x}$

Per la proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Ciò equivale a fare il limite dell'argomento del logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

- $\frac{a^x-1}{x}$

Sia posto $t = a^x - 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\log_a(t+1)}{t}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\log a}\right)^{-1} = \log a$$

- $\frac{\sin x}{\log(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)} = 1\cdot\log e = 1$$

- $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$

Sia posto $t = \log(1+x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\alpha}-1}{e^{t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\alpha}-1}{t\alpha}\cdot\frac{t\alpha}{e^{t}-1}=\log e\cdot\alpha\log e=\alpha$$

- $\frac{a^{\alpha x}}{x^{p}}, \forall a>1, p>0, \alpha>0$

Per induzione è possibile dimostrare:

$$2^{n}\geq n+1$$

$$2^{x}>x$$

E poiché $a^{x}=2^{\log_2 a^{x}}$:

$$a^{x}>\log_2 a^{x}=x\log_2 a$$

Sia considerato:

$$a^{\alpha x}=\left(a^{\frac{\alpha x}{p+1}}\right)^{p+1}>\left(\frac{\alpha x}{p+1}\log_2 a\right)^{p+1}=\left(\frac{\alpha}{p+1}\log_2 a\right)^{p+1}\cdot x^{p+1}$$

Dove $\left(\frac{\alpha}{p+1}\log_2 a\right)^{p+1}>0$:

$$a^{\alpha x}>cx^{p+1}$$

Dividendo ambo i membri per x^{p}:

$$\frac{a^{\alpha x}}{x^{p}}>c\frac{x^{p+1}}{x^{p}}=cx$$

Passando ai limiti e applicando il teorema del carabiniere:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^{p}}>\lim_{x\to+\infty}cx=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^{p}}=+\infty$$

- $|x|^{p}a^{x}, \forall a>1, p\in R^{+}$

Grazie al precedente limite notevole è possibile dire:

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^{p}a^{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{|-y|^{p}}{a^{y}}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{a^{y}}{y^{p}}\right)^{-1}=\frac{1}{\infty}=0$$

- $\frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{p}}, \forall p,\alpha\in R^{+}$

Grazie al limite precedente è possibile dire:

$$t=\log_a x\Longrightarrow x=a^{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{p}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha}}{a^{tp}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{a^{tp}}{t^{\alpha}}\right)^{-1}=0$$

- $x^p|\log x|^{\alpha}, \forall p>0, \alpha \in R$

Grazie al precedente limite notevole è possibile dire:

$$\lim_{x\to 0^+} x^p|\log x|^{\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|\log_a \frac{1}{t}\right|^{\alpha}}{t^p}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|-\log_a t|^{\alpha}}{t^p}=0$$

A patto che $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, è possibile sostituire la variabile con una funzione ed effettuare il limite notevole della funzione composta senza che cambi il risultato. Ad esempio:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$$

SIMBOLI DI LANDAU

Sia considerato uno dei seguenti casi:

$$c=x_0\in R \vee c=x_0^+ \vee c=x_0^- \vee c=+\infty \vee c=-\infty$$

E si suppongano *f* e g due funzioni definite in I_c con $g\neq 0\ \forall x\in I_c$ si definiscono le seguenti relazioni:

- **Equivalenza**

$$f\sim g\ per\ x\to c \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

- **O piccolo**

$$f=o(g)\ per\ x\to c \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

In questo caso si può dire che ***f* è trascurabile rispetto a *g***.

- **O grande**

$$f=O(g)\ per\ x\to c\ \Leftrightarrow \exists M\in R\colon |f(x)|\leq M|g(x)|\ \forall x\in I_c'\backslash\{c\}\subseteq I_c$$

$$f=O(g)\ per\ x\to c\ \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=M$$

Questi operatori godono di determinate **proprietà**:

1. $o(f)\pm o(f)=o(f)$

Da ciò deduciamo che **l'algebra dei simboli di Landau non è l'algebra dei numeri**, essenzialmente perché $\boldsymbol{o}(\cdot)$ **non è un numero ma un insieme di funzioni**.

2. $k \circ f(x) = o(k \cdot f), \forall k \in R$;
3. $g \cdot o(f) = o(f \cdot g)$

Per dimostrare tale relazione si considera $h = g \cdot o(f)$ al fine di dimostrare che $\lim_{x \to c} \frac{h}{g \cdot f} = 0$. Infatti:

$$\lim_{x \to c} \frac{h}{g \cdot f} = \lim_{x \to c} \frac{g \cdot o(f)}{g \cdot f} = \lim_{x \to c} \frac{o(f)}{f} = 0$$

DIMOSTRAZIONE PRODOTTO E QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI EQUIVALENTI

Ipotesi:

$\forall f, g, f', g' : I_c \to R$

$f \sim f' \wedge g \sim g'$

Tesi:

1. $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f'(x) \cdot g'(x)$
2. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Dimostrazione:

La dimostrazione dei due punti è analoga, per comodità si dimostra solo il primo punto.

Sottraendo e dividendo per la stessa quantità:

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)} \left(f'(x)g'(x)\right) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{g'(x)} \cdot \lim_{x \to c} f'(x)g'(x) = \lim_{x \to c} f'(x)g'(x)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CANCELLAZIONE DEGLI ELEMENTI TRASCURABILI

Ipotesi:

$\forall f, g, f', g' : I_c \to R$

$f' = o(f) \wedge g' = o(g)\ per\ x \to c$

Tesi:

1. $\lim_{x \to c} \big(f(x) + f'(x)\big)\big(g(x) + g'(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x)g(x)$
2. $\lim_{x \to c} \frac{\left(f(x)+f'(x)\right)}{\left(g(x)+g'(x)\right)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dimostrazione:

La dimostrazione dei due punti è analoga, per comodità si dimostra solo il secondo punto.

Si raccoglie per la stessa quantità:

$$\lim_{x \to c} \frac{\big(f(x) + f'(x)\big)}{\big(g(x) + g'(x)\big)} = \lim_{x \to c} \frac{\big(f(x) + o(f)\big)}{\big(g(x) + o(g)\big)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)\left(1 + \frac{o(f)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1 + \frac{o(g)}{g(x)}\right)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA PER LE EQUIVALENZE

Ipotesi:

$\forall f, g: I_c \to R: f \sim g$

Tesi:

$f = g + o(g)$

Dimostrazione:

Questo teorema permette di scrivere le equivalenze sotto un'altra forma. Dal momento in cui le due funzioni sono equivalenti, se vale la relazione $f = g + o(g)$ allora:

$$f - g = o(g)$$

Quindi:

$$\lim_{x \to c} \frac{f - g}{g} = \lim_{x \to c} \frac{f}{g} - 1 = 0$$

Che equivale a dire che la funzione $f - g$ è un $o(g)$ e cioè $f = g + o(g)$.

CVD

Grazie ai simboli di Landau è possibile **sostituire una funzione con una più semplice**, al fine di risolvere limiti più complessi. In particolare, i simboli di Landau permettono il calcolo dei **limiti di polinomi** a zero e a infinito.

Sia preso il caso in cui un polinomio vada ad infinito; prese le **due funzioni**:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$g(x) = a_n x^n$$

Calcolando il limite del loro rapporto è possibile determinare se le due **funzioni** siano **equivalenti** (cioè **se è possibile sostituire una con l'altra** per calcolare più semplicemente il limite di una):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{a_n x^n}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{a_n x^n} + \lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{a_n x^n} = 1$$

Per $x \to \infty$ $f(x) \sim g(x)$. Per il caso in cui il polinomio vada a 0 è possibile dimostrare la stessa proprietà.

$\forall f: I_c \to R$, si può definire *f*:

- **Un infinitesimo in c** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = 0$, che corrisponde ad affermare $f = o(1)\ per\ x \to c$;
- **Un infinito per c** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty$

Tra **due funzioni che sono un infinitesimo/infinito** è possibile andare a stabilire delle **relazioni** per determinare **l'ordine di tale confronto**. Se le due funzioni sono due infinitesimi:

- ***f* è un infinitesimo di ordine superiore a *g*** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- ***f* è un infinitesimo di ordine inferiore a *g*** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$

Se le due funzioni sono due infiniti:

- ***f* è un infinito di ordine superiore a *g*** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- ***f* è un infinitesimo di ordine inferiore a *g*** $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Le due funzioni **non sono confrontabili** quando $\nexists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$. Fino ad ora sono stati confrontati gli infinitesimi/infiniti senza sapere effettivamente il loro ordine; per **determinare l'ordine di un infinitesimo/infinito è necessario confrontarlo con un campione**.

$$\forall f: I_c \to R\ \wedge \varphi_f(x)$$

Si consideri il caso in cui:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c}\varphi_f(x)$$

Allora *f* è un infinitesimo di ordine $\alpha \in R \Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\left(\varphi_f(x)\right)^{\alpha}} = l \in R/\{0\}$$

Ciò significa che:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l\left(\varphi_f(x)\right)^{\alpha}} = 1$$

E cioè:

$$f \sim l\left(\varphi_f(x)\right)^{\alpha}$$

Un ragionamento analogo è possibile farlo se le funzioni sono infiniti.

Gli infinitesimi campione vengono determinati in funzione del valore di c in modo da risultare $\lim_{x \to c} \varphi_f(x) = 0$:

$$c = 0 \Longrightarrow \varphi_f(x) = x$$

$$c = x_0^+ \Longrightarrow \varphi_f(x) = x - x_0$$

$$c = x_0^- \Longrightarrow \varphi_f(x) = x_0 - x$$

$$c = +\infty \Longrightarrow \varphi_f(x) = \frac{1}{x}$$

$$c = -\infty \Longrightarrow \varphi_f(x) = \frac{1}{|x|}$$

Gli infiniti campione, invece:

$$c = x_0 \Longrightarrow \varphi_f(x) = \frac{1}{x - x_0}$$

$$c = +\infty \Longrightarrow \varphi_f(x) = x$$

$$c = -\infty \Longrightarrow \varphi_f(x) = |x|$$

Con queste informazioni è possibile **semplificare il teorema di cancellazione degli elementi trascurabili** affermando che:

- Se ci troviamo difronte a degli **infinitesimi**, vanno **cancellati gli infinitesimi di ordine superiore**;
- Se ci troviamo difronte a degli **infiniti**, vanno **cancellati gli infiniti di ordine inferiore**

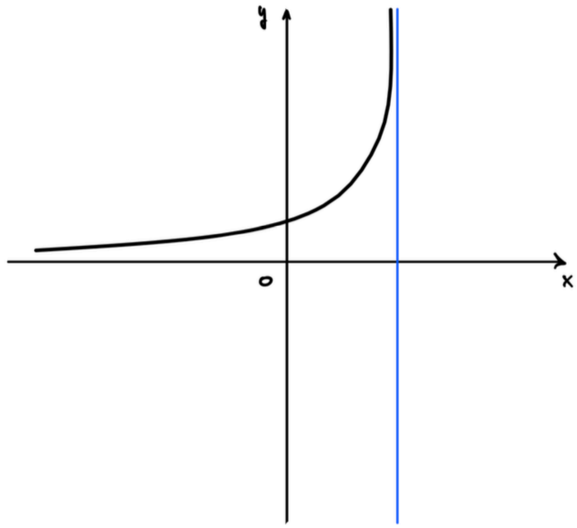
Sapendo che tale relazione vale solo per il prodotto e il rapporto, non per la somma. Inoltre, è possibile affermare che $\forall f, f', g, g' : I_c \to R$: hanno lo stesso segno in I_c allora:

$$f \sim g \wedge f' \sim g' \; per \; x \to c \Longrightarrow f + g \sim f' + g'$$

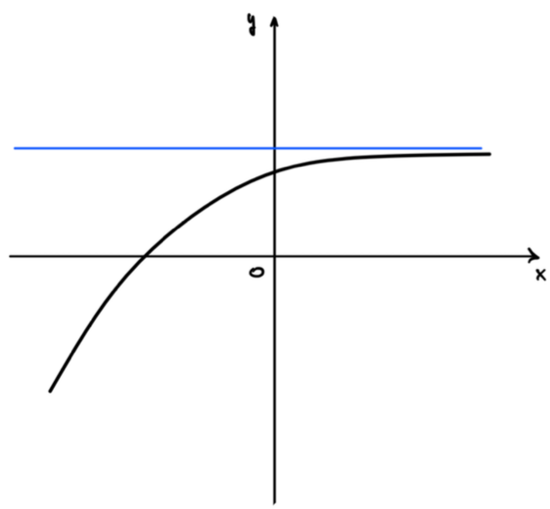
ASINTOTI

Gli **asintoti** sono **rette** che impongono un **limite alla funzione**, essa **non assume valori superiori/inferiori a quelli della retta**. Gli asintoti sono di tre tipi:

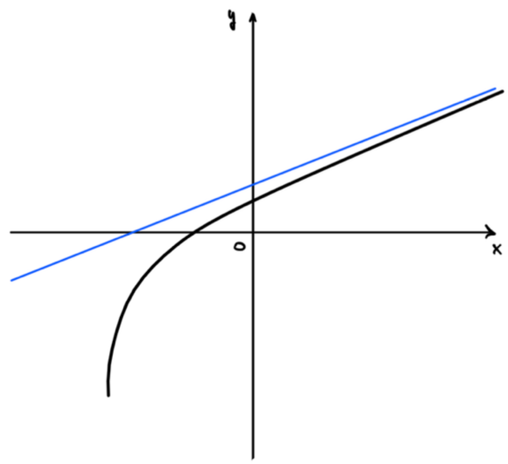
$\forall f: (a; b) \to R \wedge x_0 \in (a; b)$ la retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale a sinistra** [risp. destra] $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \ [risp.\ x_0^+]$.



$\forall f: (a; b) \to R \wedge x_0 \in (a; b)$ la retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale a destra** [risp. sinistra] $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \ [risp. -\infty]$;



$\forall f: (a; b) \to R \wedge x_0 \in (a; b)$ la retta $y = mx + q$ è un **asintoto obliquo a destra** [risp. sinistra] $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \ [risp. -\infty]$.



DIMOSTRAZIONE CALCOLO DELL'ASINTOTO OBLIQUO

Ipotesi:

$\forall f:(a;b) \to R$

Tesi:

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-q]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \in R \wedge \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=q \in R$

Dimostrazione:

In questa sede si dimostra solo la prima implicazione.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-q]=0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \in R \wedge \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=q \in R$$

Dalle ipotesi deriva:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=q$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$$

Questo risultato è giustificabile anche dal punto di vista delle derivate, usando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=m$$

DERIVATE E CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATE

$$\forall f: A \to R \wedge g: A - \{x_0\} \to R \wedge x_0 \in D(A) \cap A: g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dove *g* è definito **rapporto incrementale di *f* nel punto x_0**, una funzione è **derivabile nel punto x_0** se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$$

E si indica con $f'(x) = D[f(x_0)] = \frac{df(x)}{dx}$. Un modo alternativo di definire una funzione derivabile si ha sostituendo al denominatore della funzione *g* $h = x - x_0$, in tal modo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quello descritto finora è il criterio di **derivabilità**, non va escluso che una funzione non derivabile non abbia una **derivata**. Infatti, quando il limite del rapporto incrementale esiste ma è ∞, la funzione non è derivabile in quel punto ma ha **derivata uguale a** ∞.

Facendo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale si ottengono le derivate destra e sinistra della funzione in un punto x_0:

$$\forall x_0 \in D(A^+) = D(A \cap [x_0; +\infty]), \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x)$$

$$\forall x_0 \in D(A^-) = D(A \cap [-\infty; x_0]), \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x)$$

Una funzione si dice **derivabile lungo tutto il dominio** se esiste ed è finita la derivata lungo tutto il suo dominio.

DIMOSTRAZIONE DEL LEGAME TRA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Ipotesi:

$\forall f: A \to R \wedge x_0 \in D(A) \cap A$

$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in R$ (la funzione f è derivabile)

Tesi:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (la funzione f è continua)

Dimostrazione:

Bisogna dimostrare:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

Moltiplicando e dividendo per la stessa quantità:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$$

$$D[f(x_0)] \cdot 0 = 0$$

CVD

Il seguente esempio mostra come derivabilità ⟹ continuità ma non continuità ⟹ derivabilità:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \; se \; x \neq 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = +\infty$$

La funzione, sebbene sia continua, non è derivabile.

Di seguito sono proposte le **regole di derivazione** per determinare la derivata di un'operazione tra funzioni.

DIMOSTRAZIONE REGOLE DI DERIVAZIONE

Ipotesi:

$\forall f, g: A \to R$: siano derivabili

$\exists \alpha, \beta: \alpha f, \beta g$ siano derivabili

Tesi:

1. $D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D[f(x)] + \beta D[g(x)]$
2. $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $g(x) \neq 0 \Longrightarrow D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{g'(x)}{g(x)^2}$

4. $g(x) \neq 0 \Longrightarrow D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Dimostrazione:

La dimostrazione del primo punto è banale e quella del quarto discende direttamente dalla dimostrazione dei punti 3 e 3. Pertanto, si procede alla dimostrazione di tali punti.

Punto 2

Bisogna trovare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Aggiungendo e sottraendo la stessa quantità:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

La funzione $f(x)g(x)$ è derivabile in quanto la sua derivata discende da funzioni derivabili, di conseguenza è derivabile.

Punto 3

Per il teorema della permanenza del segno, poiché $g(x) \neq 0$, lo sarà necessariamente in un intorno I_{x_0}.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = \frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Ipotesi:

$\forall f: X \to Y \ \wedge x_0 \in X \cap D(X) \wedge$ derivabile in x_0

$\forall g: Y \to R \ \wedge y_0 \in Y \cap D(Y) \wedge$ derivabile in y_0

(Sono condizioni sufficienti ma non necessarie)

Tesi:

$g \circ f$ è derivabile in x_0

$D[(g \circ f)(x)] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y) \cdot f'(x)$$

Dimostrare il seguente teorema con il limite del rapporto incrementale della funzione può essere efficace nel momento in cui si è certi che non esiste alcun intorno in cui $y = y_0$, ma dal momento in cui non ne si è certi si esclude questa opzione.

Si considera la funzione:

$$\omega(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \; se \; y \in Y \backslash \{y_0\} \\ g'(y_0) \; se \; y = y_0 \end{cases}$$

Effettuare il limite per $y \to y_0$ di questa funzione equivale ad effettuare il limite nel suo primo caso, in quanto *y* non arriva ad assumere il valore y_0.

$$\lim_{y \to y_0} \omega(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Ma dal momento in cui entrambe le funzioni sono continue:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \omega(y) = \omega(y_0)$$

Considerato $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \omega(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

Con questa uguaglianza si possono verificare due sole situazioni:

$$f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow \omega(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

$$f(x) = f(x_0) \Rightarrow \omega(y)(f(x) - f(x_0)) = 0 = g(f(x)) - g(f(x_0))$$

Considerando:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{\omega(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\omega(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \omega(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ma poiché sia *f* che *ω* sono continue, questa identità si può anche scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} = \omega\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Ipotesi:

$\forall f: X \to R : f$ è strettamente crescente [risp. decrescente]

$X = [a; b]\ \forall a, b\ \in R$

$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R\ \wedge x_0 \in R$

Tesi:

1. $f'(x_0) \neq 0 \Longrightarrow f^{-1}(x)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)\ \wedge\ D[f^{-1}(y_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}$ con $x_0 = f^{-1}(y_0)$
2. $f'(x_0) = \infty \Longrightarrow f^{-1}(x)$ è continua in $y_0 = f(x_0)\ \wedge\ D[f^{-1}(y_0)] = 0$
3. $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f^{-1}(x)$ non è derivabile in $y_0 = f(x_0)\ \wedge\ D[f^{-1}(y_0)] = +\infty\ [risp. -\infty]$

Dimostrazione:

Caso 1: $f'(x_0) \neq 0$

Bisogna dimostrare:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x)}$$

Dove $x = f^{-1}(y)$. Per il criterio di continuità delle funzioni inverse:

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow \lim_{y \to y_0} x = x_0$$

$$y \to y_0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow x \to x_0$$

Allora si può dire:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)}$$

Caso 2: $f'(x_0) = +\infty\ [risp. -\infty]$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{+\infty\ [risp. -\infty]} = 0$$

Caso 3: $f'(x_0) = 0$

Si considerano i due casi in cui:

- f è strettamente crescente

$$x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} > 0$$

Per il teorema inverso della permanenza del segno:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- f è strettamente decrescente

$$x < x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$$

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} < 0$$

Per il teorema inverso della permanenza del segno:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

CVD

DIMOSTRAZIONE DERIVATA DI FUNZIONI ELEVATE A FUNZIONI

Ipotesi:

$\forall h(x) = g(x)^{f(x)}$

$g(x) > 0$

f e g sono derivabili

Tesi:

$D[h(x)] = g(x)^{f(x)} \left[f'(x) \log g(x) + \frac{f(x) g'(x)}{g(x)} \right]$

Dimostrazione:

$$g(x)^{f(x)} = e^{\log g(x)^{f(x)}} = e^{f(x) \log g(x)}$$

$$D\left[g(x)^{f(x)}\right] = D\left[e^{f(x)\log g(x)}\right] = e^{f(x)\log g(x)}\left[f'(x)\log g(x) + \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)\right]$$

$$= e^{\log g(x)^{f(x)}}\left[f'(x)\log g(x) + \frac{f(x)g'(x)}{g(x)}\right]$$

$$D\left[g(x)^{f(x)}\right] = g(x)^{f(x)}\left[f'(x)\log g(x) + \frac{f(x)g'(x)}{g(x)}\right]$$

CVD

Di seguito sono riportate le **derivate notevoli** delle funzioni elementari:

- $f(x) = c \implies f'(x) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

- $f(x) = ax + b \implies f'(x) = a$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = a$$

- $f(x) = x^n \ con\ n \in N \implies f'(x) = nx^{n-1}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}(x^{n-1} + x_0x^{n-2} + x_0^2x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-1})$$

Ma poiché sono tutte funzioni monotone

$$\lim_{x\to x_0}(x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) = \lim_{x\to x_0} nx_0^{n-1} = nx^{n-1}$$

- $f(x) = x^\alpha \ con\ \alpha \in R \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x_0^\alpha}{x_0} \cdot \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} = x_0^{\alpha-1} \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1}$$

Supponendo $1 + y = \frac{x}{x_0}$

$$x_0^{\alpha-1} \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha x^{\alpha-1}$$

- $f(x) = \log_a x \ \ con\ x > 0 \land x_0 \in R^+ \land a > 0 \land a \neq 1 \ \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x_0 \log a}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a y + 1}{y}$$

Supponendo $1 + y = \frac{x}{x_0}$

$$\frac{1}{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a y + 1}{y} = \frac{1}{x \log a}$$

Quando $a = e, f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x \ con\ a > 0 \ \land a \neq 1 \Longrightarrow f'(x) = a^x \log a$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} a_0^x \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^y - 1}{y}$$

Supponendo che $x - x_0 = y$

$$a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^y - 1}{y} = a^x \log a$$

- $f(x) = \sin x \ \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} = \cos x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$$

- $f(x) = \cos x \ \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$

Discorso analogo alla dimostrazione precedente

- $f(x) = \tan x \ \ con\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

Discorso analogo alla dimostrazione precedente

- $f(x) = \arcsin x \;\; con -1 < x < 1 \;\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$arcsin: [-1;1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \arcsin x \;\Leftrightarrow x = \sin y$$

Preso $x_0 \in]-1;1[$:

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{D[\sin y]_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(arcsin\, x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Considerando che $\cos x > 0 \; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

- $f(x) = \arccos x \;\; con -1 < x < 1 \;\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$arccos: [-1;1] \rightarrow [0;\pi]$$

$$y = \arccos x \;\Leftrightarrow x = \cos y$$

Preso $x_0 \in]-1;1[$:

$$D[\arccos x] = \frac{1}{D[\cos y]_{y=\arccos x}} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Considerando che $\sin x > 0 \; \forall x \in [0;\pi]$

- $f(x) = \arctan x \;\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$arctg: R \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \arctan x \;\Leftrightarrow x = \tan y$$

Preso $x_0 \in R$:

$$D[\arctan x] = \frac{1}{D[\tan y]_{y=\arctan x}} = \frac{1}{1+\tan^2(arctan\, x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Considerando che $D(\tan x) > 0 \; \forall x \in R$

- $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x(\log x + 1)$

$$D(x^x) = x^x\left(1 \cdot \log x + \frac{x \cdot 1}{x}\right) = x^x(\log x + 1)$$

DERIVATE DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO

Una derivata non ha solo valore analitico ma si può considerare il rapporto incrementale anche come un elemento grafico da ricondurre ad una funzione.

Siano

$$P_0\big(x_0; f(x_0)\big) \land P_h\big(x_0 + h; f(x_0 + h)\big)$$

Due punti del grafico della funzione f. Sia definita la funzione:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata si costruisce come:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} m(h)$$

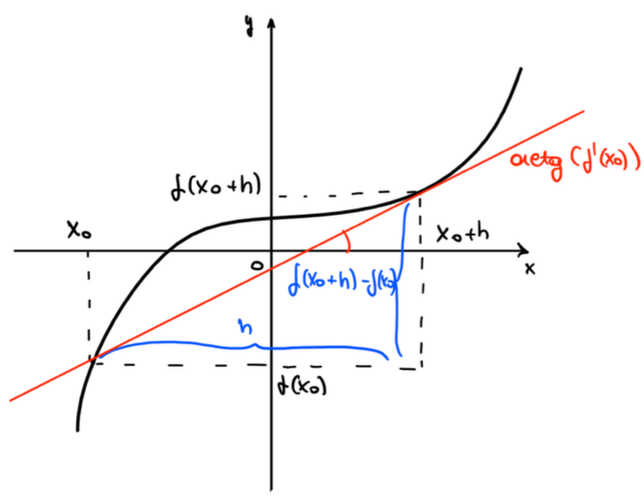
Graficamente però $m(h)$ rappresenta il coefficiente della retta secante i due punti del grafico presi in considerazione:

$$y_h - y_0 = m(h)(x_h - x_0)$$

Tuttavia, applicando il limite di sopra, la retta secante si riduce ad una retta tangente al grafico:

$$\lim_{h \to 0} m(h) \Rightarrow y_h - y_0 = f'(x_0)(x_h - x_0)$$

Pertanto, si dice che la derivata in un punto di una funzione equivale al coefficiente angolare della retta tangente la funzione nel punto considerato.



TEOREMI SULLE DERIVATE

Per dimostrare i teoremi che seguono è necessaria la conoscenza dei concetti di massimo e minimo locali.

$$\forall f: X \to R \ \wedge x_0 \in X$$

x_0 è un massimo relativo per $f \iff \exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap X, f(x) \leq f(x_0)$

x_0 è un massimo assoluto per $f \iff \forall x \in X, f(x) \leq f(x_0)$

x_0 è un minimo relativo per $f \iff \exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap X, f(x) \geq f(x_0)$

x_0 è un minimo assoluto per $f \iff \forall x \in X, f(x) \geq f(x_0)$

Un massimo/minimo relativo non necessariamente è un massimo/minimo assoluto, mentre un massimo/minimo assoluto è sempre un massimo/minimo relativo. Pertanto, si può dire:

$$M_a/m_a \implies M_r/m_r$$

Inoltre:

$$\forall f: X \to R \ \wedge x_0 \in X \cap \dot{X}$$

Cioè x_0 è un punto interno

x_0 è un punto stazionario per $f \iff \exists f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE LEMMA DI FERMAT

Ipotesi:

$\forall f: X \to R \wedge x_0 \in X \cap \dot{X}: f$ è derivabile in x_0 e x_0 è un punto di massimo/minimo relativo

Tesi:

$f'(x_0) = 0$

Dimostrazione:

Per la definizione di punto interno:

$$\exists \delta > 0:]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subseteq X$$

Per la definizione di massimo relativo:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall x \in]x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon[\cap X, f(x) \leq f(x_0)$$

Preso un terzo parametro:

$$\sigma = \min\{\delta; \varepsilon\} \implies \forall x \in]x_0 - \sigma; x_0 + \sigma[\subseteq X, f(x) \leq f(x_0)$$

Si prendono le parti a destra e a sinistra di tale intorno. In $[x_0;\ x_0 + \sigma[$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Per il teorema inverso della permanenza del segno, anche il limite è negativo:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

In $[x_0 - \sigma;\ x_0[$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Per il teorema inverso della permanenza del segno, anche il limite è negativo:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ma poiché per ipotesi la funzione è derivabile in x_0, allora la derivata destra deve coincidere con la derivata sinistra e pertanto:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

CVD

Tuttavia, va notificato che il teorema non è invertibile e pertanto non si può semplicemente dire che se la derivata in un punto è zero allora tale punto è un punto di massimo/minimo relativo. Infatti, nella funzione$f(x) = x^3$ la derivata in 0 è 0 ma esso non è un punto di massimo/minimo relativo.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ROLLE

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R$

f è continua in $[a; b]$

f è derivabile in $]a; b[$

$f(a) = f(b)$

Tesi;

$\exists c \in]a; b[: f'(c) = 0$

Dimostrazione:

Per il teorema di Weierstrass:

$$f(x_1) = m \wedge f(x_2) = M$$

$$m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in [a;b]$$

Si considerino i due casi:

- $m = M$

$$m = f(x) = M$$

$$f(x) = k$$

$$f'(x) = 0 \; \forall x \in [a;b]$$

- $m < M$

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M$$

Ma dal momento in cui si è escluso il caso in cui massimo e minimo coincidano, si considerano due casi:

$$\begin{cases} f(a) < M = f(x_2) \\ f(b) < M = f(x_2) \end{cases} con \; x_2 \in]a;b[$$

Applicando il lemma di Fermat:

$$\exists c = x_2 \colon f'(c) = 0$$

$$\begin{cases} f(a) > m = f(x_1) \\ f(b) > m = f(x_1) \end{cases} con \; x_1 \in]a;b[$$

Applicando il lemma di Fermat:

$$\exists c = x_1 \colon f'(c) = 0$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI LAGRANGE

Ipotesi:

$\forall f \colon [a;b] \to R$

f è continua in $[a;b]$

f è derivabile in $]a;b[$

Tesi:

$\exists c \in]a;b[\colon f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione:

Sia presa la funzione:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

Su tale funzione si può applicare il teorema di Rolle. Infatti, la funzione è continua lungo l'intervallo, è derivabile (differenza di funzioni continue e derivabili) e la funzione calcolata nei suoi estremi ha lo stesso valore:

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = h(b)$$

Pertanto:

$$\exists c \in]a; b[: h'(c) = 0$$

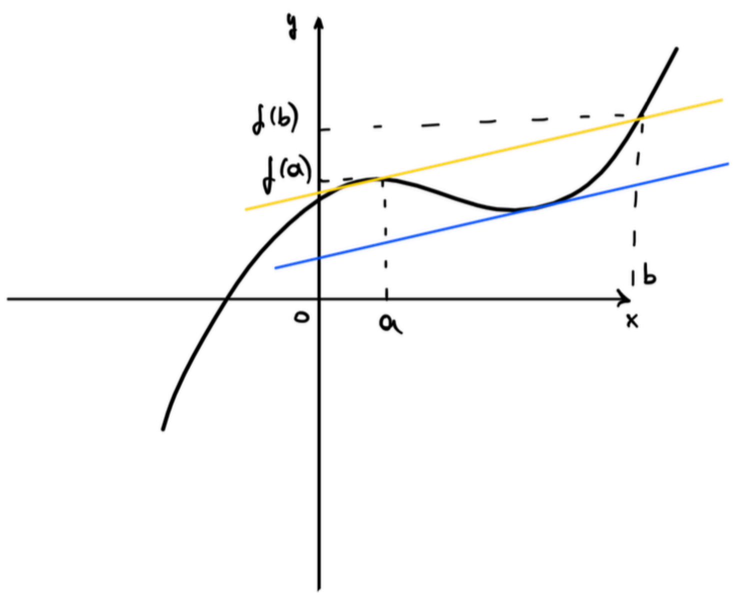
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Cioè:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

CVD

Graficamente il teorema di Lagrange afferma che in una funzione, continua e derivabile in un intervallo, ci sarà sempre un punto in cui la retta tangente a tale punto è parallela alla retta passante per i due estremi dell'intervallo.



Il teorema di Lagrange porta con sé alcune conseguenze.

DIMOSTRAZIONE DERIVATA DI UNA FUNZIONE COSTANTE CON LAGRANGE

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : I = [a; b]$

f è derivabile in I meno gli estremi

Tesi:

$f(x) = k \Leftrightarrow f'(x) = 0$

Dimostrazione:

L'unica implicazione da dimostrare è $f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = k$ in quanto l'altra è una conseguenza della definizione di derivata ed è già stata dimostrata.

Si supponga per assurdo che in I la funzione non è costante:

$$\exists x_1, x_2 \in I: f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$X = [x_1; x_2] \subseteq I$$

Dal momento in cui la funzione è derivabile in I, è anche continua nel medesimo intervallo; in particolare lo è in *X*. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo X:

$$\exists c \in X \backslash \{x_1, x_2\}: f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

Ma poiché per ipotesi $f'(x) = 0$:

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$f(x_2) = f(x_1)$$

Si va in contraddizione; pertanto, la funzione è costante lungo I.

CVD

DIMOSTRAZIONE DERIVATA FUNZIONI MONOTONE CON LAGRANGE

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : I = [a; b]$

f è derivabile in I meno gli estremi

Tesi:

1. f è crescente in I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$;
2. f è decrescente in I $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

Dimostrazione:

La dimostrazione del secondo punto è analoga a quella del primo. Tuttavia, la si può dimostrare banalmente in quanto:

$$f \text{ è crescente } \Leftrightarrow -f \text{ è decrescente}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -f'(x) \leq 0$$

Per la dimostrazione del primo punto siano prese in considerazione le due implicazioni:

- f è crescente in I $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

Per la definizione di crescenza:

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$\forall x_0 \in \dot{I} \wedge \forall x \in I: x < x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$f'(x) = f'_-(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ma poiché la funzione è derivabile, la derivata sinistra coincide con la derivata della funzione nel punto.

Il ragionamento analogo lo si può fare prendendo $x_0 = a \vee x_0 = b$.

- $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ è crescente in I

$$\forall X = [x_1; x_2]$$

In *X* la funzione è continua e derivabile, applicando il teorema di Lagrange:

$$0 \leq f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

$f'(c) > 0$ per ipotesi, $(x_2 - x_1) > 0$ per costruzione:

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

Che è la definizione di crescenza

CVD

ENUNCIATO TEOREMA DERIVATA NEI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVI

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : I = [a; b]$

f è derivabile in I meno gli estremi

$\forall x_0 \in \dot{I}\ \exists \bar{I}_{x_0}: \bar{I}_{x_0} \subseteq I$

$f'(x_0) = 0$

$\left(f'(x) < 0\ \forall x \in \bar{I}_{x_0}: x < x_0\right) \wedge \left(f'(x) > 0\ \forall x \in \bar{I}_{x_0}: x > x_0\right) [risp.\, x > x_0 \wedge x < x_0]$

Tesi:

x_0 è un punto di minimo relativo $[risp.$ massimo relativo$]$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CAUCHY prima forma

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : I = [a; b]$

f è continua in I

f è derivabile in I senza gli estremi

Tesi:

$\exists c \in]a; b[: g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$

Dimostrazione:

Sia considerata la seguente funzione:

$$h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$$

La funzione è derivabile e continua in I e la funzione calcolata negli estremi coincide:

$$h(a) = g(a)f(b) - g(a)f(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$$h(b) = g(b)f(b) - g(b)f(a) - f(b)g(b) + f(b)g(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

Pertanto, si può applicare il teorema di Rolle:

$$h'(x) = g'(x)[f(b) - f(a)] - f'(x)[g(b) - g(a)]$$

$$\exists c \in]a; b[: h'(c) = 0$$

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CAUCHY seconda forma

Ipotesi:

$\forall f: I \to R : I = [a; b]$

f è continua in I

f è derivabile in I senza gli estremi

$g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a; b[$

Tesi:

$\exists c \in]a; b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Dimostrazione:

A partire dalla prima forma del teorema di Cauchy:

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Si può dividere tutto per $g'(c)$ in quanto per ipotesi $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a; b[$, bisogna però mostrare che $g(b) - g(a) \neq 0$ per giungere alla forma voluta dalla dimostrazione. Sia supposto per assurdo che $g(b) = g(a)$, si può allora applicare il teorema di Rolle sulla funzione *g*:

$$\exists c \in]a; b[: g'(c) = 0$$

Ma per ipotesi $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a; b[$; pertanto, $g(b) - g(a) \neq 0$ ed è possibile dividere per tale quantità il risultato della prima forma:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

CVD

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

$$\forall f: X \to R \land \exists \, E \subseteq X : \forall x \in E \; \exists f'(x) \in R$$

$$f': x \in E \to f'(x) \in R$$

Nel caso in cui **esista la derivata prima in un intorno I_{x_0}**:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Ed è chiamata **derivata seconda della funzione *f* in x_0**. In generale si determina la **derivata di ordine k della funzione *f* in x_0, quando esiste la derivata di ordine k-1 in un intorno I_{x_0}**:

$$f^k(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{k-1}(x) - f^{k-1}(x_0)}{x - x_0}$$

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE SUFFICIENTE MASSIMI E MINIMI LOCALI

Ipotesi:

$\forall f: X \to R: \exists f'(x), f''(x) \in R$

$\forall x_0 \in I$

$f'(x_0) = 0 \ \wedge f''(x_0) > 0\ [risp. < 0]$

Tesi:

x_0 è un punto di minimo relativo [*risp.* massimo relativo]

Dimostrazione:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\exists I_{x_0}: \forall x \in X \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\}, \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$$\forall x \in I_{x_0} \wedge x < x_0 \Longrightarrow f'(x) < f'(x_0)$$

$$\forall x \in I_{x_0} \wedge x > x_0 \Longrightarrow f'(x) > f'(x_0)$$

Ma poiché per ipotesi $f'(x_0) = 0$:

$$\forall x \in I_{x_0} \wedge x < x_0 \Longrightarrow 0 > f'(x)$$

$$\forall x \in I_{x_0} \wedge x > x_0 \Longrightarrow 0 < f'(x)$$

Che è la definizione di minimo relativo. Analogamente per il massimo.

CVD

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE INVERSA MASSIMI E MINIMI LOCALI

Ipotesi:

$\forall f: X \to R: \exists f'(x), f''(x) \in R$

$\forall x_0 \in I$

x_0 è un punto di minimo relativo [*risp.* massimo relativo]

Tesi:

$f'(x_0) = 0 \ \wedge f''(x_0) \geq 0 \ [risp. \leq 0]$

Dimostrazione:

Si supponga per assurdo che $f''(x_0) < 0$, per il teorema diretto appena dimostrato x_0 è un punto di massimo relativo, che va in contraddizione con le ipotesi. Quindi:

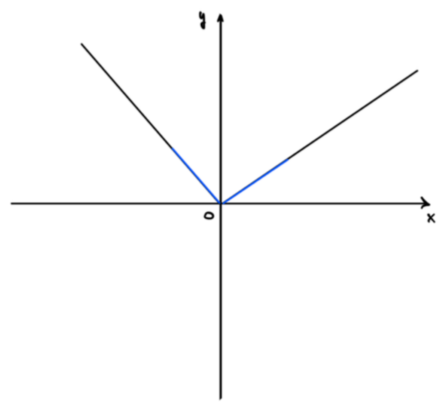
$$f'(x_0) = 0 \ \wedge f''(x_0) \geq 0 \ [risp. \leq 0]$$

CVD

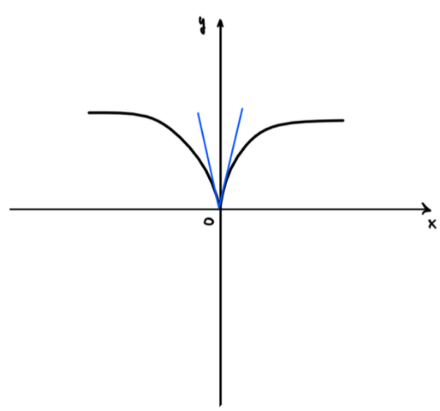
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$$\forall f: (a; b) \to R \ \wedge x_0 \in D\big((a; b)\big) \wedge f \text{ è continua in } x_0$$

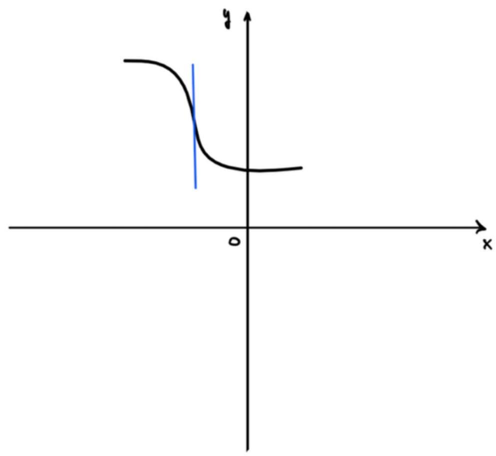
- x_0 è un punto angoloso $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \vee \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ma sono diversi;



- x_0 è un punto cuspidale $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \wedge \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty$;



- x_0 è un punto di flesso a tangente verticale $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



DIFFERENZIABILITÀ DI UNA FUNZIONE

$$\forall f: I \to R \ \wedge x_0 \in I \wedge I =]c; b[$$

La funzione *f* si dice **differenziabile per x che tende a $\boldsymbol{x_0}$**:

$$\exists a \in R: f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

DIMOSTRAZIONE EQUIVALENZA DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Il seguente teorema vale unicamente in dimensione 1.

Ipotesi:

f è derivabile

f è differenziabile

Tesi:

$$f \text{ è } differenziabile \iff f \text{ è } derivabile$$

Dimostrazione:

Si dimostrino le due implicazioni:

- f è $differenziabile \implies f$ è $derivabile$

$$f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = a$$

- f è $derivabile \Rightarrow f$ è $differenziabile$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Ma applicando il limite alla definizione di differenziabilità:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Che equivale al limite sopra mostrato solo nel caso in cui:

$$a = f'(x)$$

CVD

La definizione di differenziabilità si aggiorna:

f è differenziabile $\Leftrightarrow \exists!\, a \in R: a = f'(x_0) \wedge f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$

L'**unicità del parametro *a*** è desunta dalla definizione di **continuità** derivata dalla condizione di **derivabilità** della funzione. Infatti, in quanto derivabile, la funzione è continua e se i parametri *a* fossero due o più, le rispettive derivate sarebbero tutte uguali, andando in contraddizione col concetto di continuità.

È definito **differenziale della funzione *f* relativo a $\boldsymbol{x_0}$ in $\boldsymbol{x}$**:

$$(df_{x_0})(x) = a(x - x_0)$$

Ma si può considerare $\boldsymbol{x - x_0}$ (graficamente) come la **variazione di ascissa** e $\boldsymbol{a}$ come la **derivata**:

$$(df_{x_0})(x) = f'(x_0)\Delta x$$

Per la funzione $f(x) = x$ il differenziale viene calcolato come:

$$dx = \Delta x$$

Pertanto, il differenziale di una funzione generica relativa a x_0 in x può essere calcolato come il prodotto della derivata in x_0 per il differenziale della bisettrice:

$$\left(df_{x_0}\right)(x) = f'(x_0)dx$$

In generale:

$$df(x) = f'(x)dx$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Il **teorema di De L'Hôpital** può presentarsi in **due forme**, uno che prende in considerazione la **forma indeterminata** $\mathbf{\frac{0}{0}}$ e uno che prende in considerazione la **forma indeterminata** $\frac{\infty}{\infty}$. Di seguito verrà dimostrato solo il teorema nella prima forma; tuttavia, è equivalente per la seconda forma.

Per la seconda forma (sebbene non sia dimostrato) è sufficiente che solo il denominatore sia ∞.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Ipotesi:

$\forall f, g: [a; b] \to R, \forall a, b \in \bar{R}$

1. $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, cioè il limite del rapporto delle funzioni si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$;
2. *f* e *g* sono derivabili in $[a; b] \ \wedge g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a; b)$;
3. $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{R}$.

Tesi:

$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Dimostrazione:

Si osservi che il teorema non vale solo per $x \to a^+$ o $x \to b^-$ ma per un generico punto $x_0 \in [a; b] = [a; x_0] \cup [x_0; b]$ e, inoltre, si osservi che le condizioni sopra menzionate sono sufficienti ma non necessarie all'esistenza del limite del rapporto di due funzioni. Infatti, nonostante per le funzioni $f(x) = 2x + \sin x$ e $g(x) = 2x - \sin x$ non sia verificata la terza condizione, esiste il limite del loro rapporto ed esso è uguale a 1.

Si dimostri che la funzione *g* non assume mai il valore zero. Presa la funzione:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) \Leftrightarrow x \in (a; b) \\ 0 \ \Leftrightarrow x = a \end{cases}$$

Tale funzione risulta continua in a. Sia supposto per assurdo $\exists x_1 \in (a;b): g(x_1) = 0$ e sia preso l'intervallo $[a;x_1] \subseteq [a;b]$:

$$\bar{g}(a) = \bar{g}(x_1)$$

$$g \text{ è continua in } [a;x_1]$$

$$g \text{ è derivabile in } (a;x_1)$$

È possibile applicare il teorema di Rolle:

$$\exists c \in (a;x_1) \subseteq [a;b]: g'(c) = 0$$

Ma per ipotesi $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a;b)$, pertanto si giunge ad un assurdo: la funzione *g* non assume mai il valore zero.

Si passi alla dimostrazione della tesi. Siano considerati i due casi:

- $l \in R$

È da dimostrare che:

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Cioè:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists t_o \in R \wedge t_0 > a: \forall x \in (a;t_o) \cap (a;b), l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$$

Per la terza ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists t_o \in R \wedge t_0 > a: \forall x \in (a;t_o) \cap (a;b), l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon$$

Si consideri $[y;x] \subseteq (a;b),\ \forall x, y \in (a;t_0) \wedge a < y < x < t_0$. In corrispondenza di tale intervallo, la funzione è continua, derivabile e la sua derivata è diversa da zero; pertanto, è possibile applicare la seconda forma del teorema di Cauchy:

$$\exists c \in (y;x): \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ma per quanto detto riguardo il rapporto delle derivate:

$$l - \varepsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < l + \varepsilon$$

Applicando il limite per *y* che tende ad *a* da destra:

$$\lim_{y \to a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

E cioè, in corrispondenza di ε:

$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon, \forall x \in (a; t_0)$$

- $l = \infty$

È da dimostrare che:

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Cioè:

$$\forall M > 0\ \exists t_o \in R \wedge t_0 > a: \forall x \in (a; t_o) \cap (a; b), \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Si consideri $[y; x] \subseteq (a; b)$, $\forall x, y \in (a; t_0) \wedge a < y < x < t_0$. In corrispondenza di tale intervallo, la funzione è continua, derivabile e la sua derivata è diversa da zero; pertanto, è possibile applicare la seconda forma del teorema di Cauchy:

$$\exists c \in (y; x): \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ma per quanto detto riguardo il rapporto delle derivate:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} > M$$

Applicando il limite per *y* che tende ad *a* da destra:

$$\lim_{y \to a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

E cioè, in corrispondenza di ε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M, \forall x \in (a; t_0)$$

CVD

Dal **teorema di De L'Hôpital** vengono **escluse** le seguenti **forme indeterminate**:

$$-\infty + \infty; 0 \cdot \infty; 0^0; 1^\infty;\ \infty^\infty$$

Effettuando alcune **manipolazioni** è possibile **ricondurre** tali forme a quelle del teorema:

- Per la forma indeterminata $-\infty + \infty$:

$$\forall f(x), g(x): \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

$$-\infty + \infty = \lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{0}{0}$$

- Per la forma indeterminata $0 \cdot \infty$:

$$\forall f(x), g(x): \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \ \wedge \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

$$0 \cdot \infty = \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \frac{1}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty = \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{1}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- Per le forme indeterminate esponenziali:

$$\forall f(x), g(x) \in I_{x_0}$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))} \neq 0^0$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))} \neq 1^\infty$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))} \neq \infty^\infty$$

Di seguito sono mostrate alcune **conseguenze del teorema di De L'Hôpital**.

DIMOSTRAZIONE LIMITE DELLA DERIVATA

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R$

f è continua in $(a; b)$

f è continua in $(a; b) \backslash \{x_0\}$

Tesi:

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$

Dimostrazione:

La dimostrazione è analoga per il limite destro e sinistro.

Va dimostrato:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Cioè:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) - f'_+(x_0) = 0$$

Ma:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sia considerata la funzione:

$$g(x) = x - x_0$$

Sia $g(x)$ che $f(x) - f(x_0)$ sono due infinitesimi (per la loro continuità) e su di essi è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital, visto che $g'(x) = 1$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

CVD

Un'altra conseguenza del teorema prevede che una funzione derivata sia derivabile se esiste ed è finito il suo limite, infatti:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Cioè:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'_+(x_0)$$

Inoltre, come **conseguenza del teorema di De L'Hôpital**, si dimostra che **la derivata di una funzione ha al più discontinuità di seconda specie**. Infatti, essendo una funzione continua, la funzione derivata **non può avere discontinuità di prima specie** (anche perché si presupporrebbe che la derivata sinistra è diversa da quella destra che, per quanto dimostrato, non è vero); per quanto riguarda la discontinuità eliminabile:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \land f'(x_0) \neq l$$

Ma per il teorema appena dimostrato:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'_+(x_0)$$

FORMULA DI TAYLOR

Data una **funzione $f(x)$ dotata di un certo numero di derivate**, esiste un **polinomio $P_k(x)$** tale che:

$$f(x) - P_k(x) = o((x - x_0)^k)$$

Cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0$$

Oppure:

$$f(x) = P_k(x) + o((x - x_0)^k)$$

Ciò significa che **è possibile approssimare la funzione $f(x)$ con un polinomio di grado k, commettendo un errore dell'ordine di $(x - x_0)^k$ per $x \to x_0$**.

Infatti, se una **funzione è continua** è stato dimostrato che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^0} = 0$$

Cioè:

$$f(x) = f(x_0) + o((x - x_0)^0)$$

Mentre se una **funzione è derivabile**:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)^1)$$

Ma $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ sono due **costanti** e $(x - x_0)$ un **monomio** (polinomio di primo grado). Da ciò consegue che nel primo caso si è approssimata una funzione ad una costante, commettendo un errore nullo (grado zero), mentre nel primo caso si è approssimata la funzione ad un polinomio di grado uno, commettendo un errore dell'ordine di un monomio di primo grado:

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$$

Dunque, **una funzione derivabile al più k volte** (cioè di classe C^k) **può essere approssimata ad un polinomio di grado al più k commettendo un errore dell'ordine di $(x - x_0)^k$**. Tale processo avviene attraverso la **formula di Taylor**, che può dare una **stima qualitativa o quantitativa** dell'approssimazione in funzione del tipo di resto $(f(x) - P_1(x))$ che si prende in considerazione.

Per dimostrare la **formula di Taylor con il resto di Peano** è indispensabile la dimostrazione del lemma che segue:

DIMOSTRAZIONE LEMMA PROPEDEUTICO ALLA FORMULA DI TAYLOR

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R \quad \wedge x_0 \in (a; b)$

$\exists k \in N: \exists g^k(x), \forall x \in I_{x_0} \backslash \{x_0\}$

Tesi:

$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^k(x_0) = 0$

Dimostrazione:

Siano prese in considerazione le due implicazioni:

- $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} = 0 \Longrightarrow g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^k(x_0) = 0$

Sia preso in considerazione l'insieme:

$$Z = \{h \in N: 0 \leq h \leq k, g^h(x_0) \neq 0\}$$

Va dimostrato che l'insieme Z è vuoto. Pertanto, sia considerato.

$$h = 0 \Longrightarrow g(x_0) \neq 0$$

Ma:

$$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^k} \cdot (x - x_0)^k = 0$$

Quindi $h = 0 \notin Z$. Sia preso $p = \min Z \geq 1$, tutte le derivate di ordine inferiore a p sono zero, quelle di ordine superiore sono diverse da zero. Ora sia considerato il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^p}$$

Esso si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e, pertanto, si può applicare il teorema di De L'Hôpital per p-1 volte:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^p}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{p(x-x_0)^{p-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g''(x)}{p(p-1)(x-x_0)^{p-2}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{g^{p-1}(x)}{p!\,(x-x_0)}$$
$$=\frac{1}{p!}g^p(x_0)\neq 0$$

Ma, per ipotesi, lo stesso limite può essere anche espresso come:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^p}\cdot\frac{(x-x_0)^k}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^k}\cdot(x-x_0)^{k-p}=0$$

Ma il primo risultato in conflitto con le ipotesi; pertanto, l'insieme Z è vuoto e:

$$\nexists 0\leq h\leq k\colon g^h(x_0)\neq 0$$

Cioè:

$$g(x_0)=g'(x_0)=g''(x_0)=\cdots=g^k(x_0)=0$$

- $g(x_0)=g'(x_0)=g''(x_0)=\cdots=g^k(x_0)=0 \implies \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^k}=0$

Poiché la funzione *g* è derivabile, essa è anche continua e cioè:

$$\lim_{x\to x_0}g(x)-g(x_0)=0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^k$$

Pertanto, è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital al rapporto delle due funzioni per *k-1* volte:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)-g'(x_0)}{k(x-x_0)^{k-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g''(x)-g''(x_0)}{k(k-1)(x-x_0)^{k-2}}=\cdots$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g^{k-1}(x)-g^{k-1}(x_0)}{k!\,(x-x_0)}=\frac{1}{k!}g^k(x_0)=0=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^k}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

Ipotesi:

$\forall f\colon(a;b)\to R\ \wedge x_0\in(a;b)$

$\exists k\in N\colon\exists f^k(x-x_0)\ \forall x\in I_{x_0}\backslash\{x_0\}$

Tesi:

$f(x)-P_k(x)=o((x-x_0)^k)$ per $x\to x_0$

Dimostrazione:

Per semplicità si definisce la funzione $g(x) = f(x) - P_k(x)$. Grazie al lemma appena dimostrato, è sufficiente dimostrare che ogni derivata calcolata nel punto x_0 è zero per dimostrare che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^k$.

Sia preso un polinomio generico di ordine k:

$$P_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k$$

Siano così considerate le derivate della funzione g:

1. Derivata di ordine zero

$$g(x_0) = f(x_0) - P_k(x_0) = 0$$

$$P_k(x_0) = a_0$$

$$f(x_0) = a_0$$

2. Derivata prima

$$g'(x_0) = f'(x_0) - P_k'(x_0) = 0$$

$$P_k'(x_0) = a_1$$

$$f'(x_0) = a_1$$

3. Derivata seconda

$$g''(x_0) = f''(x_0) - P_k''(x_0) = 0$$

$$P_k''(x_0) = 2!\,(a_2)$$

$$f''(x_0) = 2!\,(a_2)$$

4. Derivata di ordine k

$$g^k(x_0) = f^k(x_0) - P_k^k(x_0) = 0$$

$$P_k^k(x_0) = k!\,(a_k)$$

$$f^k(x_0) = k!\,(a_k)$$

Di conseguenza, ogni derivata calcolata nel punto x_0 è zero solo se:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$$

Con questi coefficienti la funzione $g(x) = f(x) - P_k(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^k$.

CVD

Da ciò consegue che la **formula di Taylor con il resto di Peano** si configura come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

Oppure, in forma compatta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^k)$$

Il **resto di Peano** fornisce una stima **qualitativa** dell'errore commesso nell'approssimazione, per una stima **quantitativa** si ricorre alla **formula di Taylor con il resto di Lagrange**.

DIMOSTRAZIONE FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R \ \wedge x_0 \in (a; b)$

$\exists k \in N: \exists f^k(x - x_0) \ \forall x \in I_{x_0} \backslash \{x_0\}$

Tesi:

$\exists c$ compreso tra x e x_0: $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(x_0)}{n!} + \frac{f^{k-1}(c)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k+1}$

Dimostrazione:

Si considerino le due funzioni:

$$\varphi(x) = f(x) - P_k(x) \ \wedge \ \psi(x) = (x - x_0)^{k+1}$$

Per $h < k$, $P_k^h(x) = f^h(x)$ ma per $h > k$, $P_k^h(x) = 0$. Da ciò consegue che $\varphi(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\psi(x)$, per il lemma propedeutico dimostrato precedentemente.

Preso in considerazione l'intervallo $[x_0; x]$ (se non è corretto l'ordine basta invertire l'ordine) in esso le funzioni sono continue e nell'intervallo privato degli estremi sono anche derivabili. Inoltre, esiste $\psi'(x)$ ed è diversa da zero; è possibile così applicare il teorema di Cauchy:

$$\exists c_1 \in (x_0; x): \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)}$$

Ma poiché, sempre come conseguenza del lemma dimostrato precedentemente, $\varphi(x_0) = 0$; inoltre, $\psi(x_0) = 0$. Pertanto:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)}$$

Reiterando il teorema di Cauchy e seguendo lo stesso ragionamento risulta:

$$\exists c_2 \in (x_0; c_1): \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)}$$

In generale, reiterando $k + 1$ volte risulta:

$$\exists c_{k+1} \in (x_0; c_k): \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \cdots = \frac{\varphi^{k+1}(c_2)}{\psi^{k+1}(c_2)} = \frac{f^{k+1}(c_{k+1}) - P_k^{k+1}(c_{k+1})}{(k+1)!}$$

Ma per quanto detto prima:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f^{k+1}(c_{k+1})}{(k+1)!}$$

$$\varphi(x) = \frac{f^{k+1}(c_{k+1})}{(k+1)!} \cdot \psi(x) = \frac{f^{k+1}(c_{k+1})}{(k+1)!} \cdot (x - x_0)^{k+1}$$

Cioè:

$$f(x) - P_k(x) = \frac{f^{k+1}(c_{k+1})}{(k+1)!} \cdot (x - x_0)^{k+1}$$

CVD

Per la sua configurazione, la seguente dimostrazione prende anche il nome di **teorema generalizzato di Lagrange per una funzione con più derivate**.

Viene definito **polinomio di Mac Laurin** il polinomio calcolato con la formula di Taylor sostituendo 0 a x_0, cioè:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x)^k)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{k-1}(c)}{(k-1)!}(x)^{k+1}$$

Con gli sviluppi di Mac Laurin si lavora molto con **ordini di derivate superiori alla prima**. Se le **funzioni** in questione sono **pari o dispari** diventa semplice calcolare le derivate in zero.

Si supponga di avere una funzione pari:

$$f(x) = f(-x)$$

Derivando una funzione pari si ottiene una funzione dispari:

$f'(x) = -f'(-x)$

Ma la derivata di secondo grado di una funzione pari torna ad essere una funzione pari:

$$f''(x) = f''(-x)$$

Per la derivata di terzo grado:

$$f'''(x) = -f'''(-x)$$

Si può generalizzare il processo affermando che **per le funzioni pari le derivate di ordine dispari sono funzioni dispari e quelle di ordine pari sono funzioni pari**:

$$\forall f: X \to R : f(x) = f(-x), f^{2n}(x) = f^{2n}(-x) \wedge f^{2n+1}(x) = -f^{2n+1}(-x)$$

Può essere fatto un ragionamento analogo **per le funzioni dispari**, affermando che **le derivate di ordine dispari sono funzioni pari e quelle di ordine pari sono funzioni dispari**.

$$\forall f: X \to R : f(x) = -f(-x), f^{2n+1}(x) = f^{2n+1}(-x) \wedge f^{2n}(x) = -f^{2n}(-x)$$

Con questo schema generale è semplice il calcolo delle derivate in zero. Infatti, se una funzione è dispari ed è definita in zero:

$$f(0) = -f(0)$$

Ma un **numero** coincide con **il suo opposto** solo se esso è **zero**; pertanto, $f(0) = -f(0) = 0$.

Ciò significa che **per le funzioni pari, lo sviluppo di Mac Laurin ha solo monomi di grado pari** (quelli di grado dispari sono funzioni dispari e valgono zero).

$$\forall f: X \to R : f(x) = f(-x), f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{2n}(0)}{n!} + o((x)^k)$$

Se la funzione è dispari, lo sviluppo di Mac Laurin ha solo monomi di grado dispari (quelli di grado pari sono funzioni dispari e valgono zero).

$$\forall f: X \to R : f(x) = -f(-x), f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{2n+1}(0)}{n!} + o((x)^k)$$

Grazie alle nozioni apprese con le precedenti dimostrazioni, è possibile dimostrare l'**irrazionalità del numero di Nepero**.

DIMOSTRAZIONE RAZIONALITÀ DEL NUMERO DI NEPERO

Ipotesi:

$\exists!\, e \in R: 2 < e < 3 \wedge e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Tesi:

$e \in R\backslash Q$

Dimostrazione:

Sia supposto per assurdo che il numero di Nepero è un numero razionale. Allora per la definizione di numero razionale:

$$\exists p, q \in N: e = \frac{p}{q}$$

Effettuando lo sviluppo di Mac Laurin con il resto di Lagrange sulla derivata prima della funzione $f(x) = e^x$, dove $x = 1 \wedge x_0 = 0$:

$$\forall 0 < c < 1, \frac{p}{q} = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \forall n \in N$$

Presi $n > q \wedge n \geq 2$, $n!$ ha tra i suoi fattori q. Raccogliendo $n!$:

$$\frac{p}{q} n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) n! + \frac{e^c}{n+1}$$

Considerando i tre addendi che compongono questa equazione, si nota che il primo a destra dell'uguale e quello a sinistra dell'uguale sono numeri interi, in funzione delle supposizioni fatte precedentemente. Pertanto, $\frac{e^c}{n+1}$ deve essere un numero intero. In particolare:

$$\frac{e^c}{n+1} > 0$$

Ma poiché la funzione esponenziale è una funzione strettamente crescente:

$$0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1}$$

Ma, per ipotesi $2 < e < 3$:

$$0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

Tuttavia, $n + 1 \geq 3$, pertanto:

$$0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leq 1$$

Cioè:

$$0 < \frac{e^c}{n+1} < 1$$

Che va in contraddizione con quanto detto prima, infatti $\frac{e^c}{n+1}$ non è un numero intero. Si è giunti all'assurdo, che discende dall'aver supposto il numero di Nepero razionale; pertanto, *e* è un numero irrazionale.

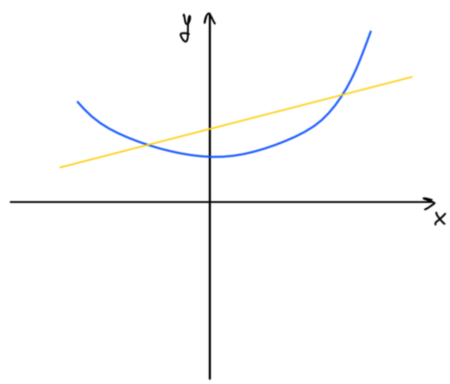
CVD

CONVESSITÀ E CONCAVITÀ DI UNA FUNZIONE

Una funzione *f* si dice **convessa** se:

$$\forall f: (a;b) \to R\ \forall x.y\ \in (a;b), f(t + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)\ \forall t[0;1]$$

Ciò significa che **una funzione è convessa quando i punti appartenenti ad un intervallo sono sotto la secante che passa per gli estremi dell'intervallo**.



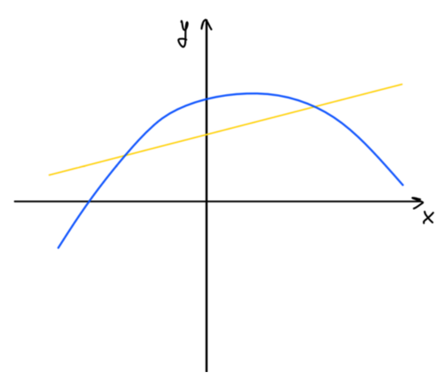
Infatti, considerando le ascisse e le ordinate della funzione rispetto alla funzione e alla secante:

$$\forall x_t \in (x;y), x_t = tx + (1-t)y\ \forall t \in [0;1]$$

$$\forall f_t(x) = tf(x) + (1-t)f(y)\ \forall t \in [0;1]$$

Stesso discorso vale per la **concavità**, in cui invece **i punti della funzione sono superiori alla secante**:

$$\forall f: (a;b) \to R\ \forall x.y\ \in (a;b), f(t + (1-t)y) \ge tf(x) + (1-t)f(y)\ \forall t[0;1]$$



Nella definizione appena data non vi è traccia della **derivabilità** della funzione; tuttavia, se si introduce come ipotesi si può dare una **definizione più accurata** di concavità e convessità:

$$\forall f: I_{x_0} \to R : \exists f'(x_0) \in R \ \wedge \ \tau(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La funzione f è convessa nel punto x_0 se:

$$f(x) \geq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}$$

Invece la funzione è concava nel punto x_0 se:

$$f(x) \leq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}$$

Una funzione è **strettamente convessa** (o **strettamente concava**) se le definizioni appena date **non includono l'identità dei componenti**.

$$\forall f: (a; b) \to R : \exists f'(x_0) \in R \ f \text{ è convessa in } (a; b) \Leftrightarrow f \text{ è convessa } \forall x \in (a; b)$$

Si può anche dire:

$$f \text{ è convessa in } (a; b) \Leftrightarrow \forall x, x_0 \in (a; b), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La definizione è **analoga** per la **concavità**, la **stretta convessità** e la **stretta concavità**.

La definizione di **punto di flesso per *f*** è strettamente legata al concetto di concavità e convessità.

- Un punto $x_0 \in (a; b)$ è un punto di flesso **ascendente** per *f* se:

$$\exists I_{x_0}: f(x) \leq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}: x < x_0 \wedge f(x) \geq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}: x > x_0$$

- Un punto $x_0 \in (a; b)$ è un punto di flesso **discendente** per *f* se:

$$\exists I_{x_0}: f(x) \geq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}: x < x_0 \wedge f(x) \leq \tau(x) \ \forall x \in I_{x_0}: x > x_0$$

Tuttavia, esistono anche **altri metodi** per determinare la concavità o la convessità di una funzione e desumono dai teoremi riportati di seguito.

DIMOSTRAZIONE CONCAVITÀ E CONVESSITÀ DALLA DERIVATA PRIMA

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R : \exists f'(x) \in R \ \forall x \in (a; b)$

Tesi:

1. f è convessa in $(a; b) \Leftrightarrow f'$ è crescente $\forall x \in (a; b)$
2. f è concava in $(a; b) \Leftrightarrow f'$ è decrescente 0 $\forall x \in (a; b)$
3. f' è strettamente crescente $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f$ è strettamente convessa in $(a; b)$
4. f'è strettamente decrescente $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f$ è strettamente concava in $(a; b)$

Dimostrazione:

Si considera l'analogia con la crescenza della derivata prima di una funzione per i massimi e i minimi: se è incluso lo zero vale il teorema inverso, se non è incluso è una semplice implicazione.

Poiché se una funzione *f* è convessa il suo opposto è concavo, si dimostrano solo i punti 1 e 3.

Tali dimostrazioni sono analoghe per la stretta convessità/concavità.

Per la dimostrazione del punto 1 si considerino le due implicazioni:

- f è convessa in $(a;b) \Longrightarrow f'$ è $c$crescente $\forall x \in (a;b)$

Bisogna dimostrare:

$$\forall x_1 < x_2 \in R\ f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x = x_1 \land x_0 = x_2$$

Per la definizione di convessità:

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

Ma poiché la quantità $x - x_2$ è negativa:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$$

Al contrario:

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_0 = x_1 \land x = x_2$$

Per la definizione di convessità:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq f'(x_1)$$

Unendo le due espressioni:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$$

- f' è crescente $\forall x \in (a;b) \Longrightarrow f$ è convessa in $(a;b)$

Bisogna dimostrare:

$$\forall x, x_0 \in (a;b)\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si considera:

$$\forall x, x_0 \in (a;b): x_0 < x\ \land x \neq x_0 \Longrightarrow \exists!\ [x_0;x] \subseteq (a,b)$$

In tale intervallo la funzione è derivabile; pertanto, si può applicare il teorema di Lagrange:

$$\exists \bar{x} \in (x_0; x): f'(\bar{x}) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ma, poiché $x_0 < \bar{x} \Longrightarrow f(x_0) \leq f(\bar{x})$. Pertanto:

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\bar{x})$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Il punto tre del teorema si dimostra analogamente alla seconda implicazione del punto uno, cioè applicando il teorema di Lagrange all'intervallo composto da x e x_0.

CVD

Una conseguenza di questo teorema è il seguente, tuttavia non conviene utilizzare tale proprietà se non strettamente necessario:

DIMOSTRAZIONE CONVESSITÀ/CONCAVITÀ DALLA DERIVATA SECONDA

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R : \exists f'(x,), f''(x) \in R \; \forall x \in (a; b)$

Tesi:

1. f è convessa in $(a; b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \; \forall x \in (a; b)$
2. f è concava in $(a; b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \; \forall x \in (a; b)$
3. $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ è strettamente convessa in $(a; b)$
4. $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ è strettamente concava in $(a; b)$

Dimostrazione:

Poiché la derivata seconda è la derivata della funzione derivata prima, se essa è maggiore di zero allora la derivata prima è una funzione crescente e viceversa (anche per la decrescenza). Considerando ciò si può applicare il teorema appena dimostrato al fine di dimostrare quello proposto

CVD

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE SUFFICIENTE PER UN PUNTO DI FLESSO

Ipotesi:

$\forall f: (a; b) \to R : \exists f'(x,), f''(x), f'''(x) \in R \; \forall x \in (a; b)$

Tesi:

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0 \Longrightarrow x$ è un punto di flesso per la funzione f

Con queste informazioni si può affermare che il concetto di **concavità** e di **flesso** non sono altro che l'**equivalente** della **crescenza** e dei **punti stazionari** per una **derivata che è salita di grado rispetto alla prima**.

STUDIO DI FUNZIONE

Per effettuare lo studio di funzione, che consiste nel tracciamento del grafico di una funzione a partire dalla sua espressione, si deve:

1. Determinare il dominio della funzione (D);
2. Determinare la positività della funzione (S);
3. Determinare l'intersezione con gli assi (I);
4. Determinare eventuali simmetrie (S);
5. Studiare la funzione agli estremi del dominio, cioè trovare i limiti agli estremi (L);
6. Determinare eventuali asintoti (A);
7. Studiare la derivata prima, ovvero:
    a. Punti di non derivabilità
    b. Massimi e minimi;
    c. Crescenza e decrescenza;
    d. Concavità o convessità;
    e. Flessi;
8. Studio della derivata seconda (che è preferibile evitare)

Il che può essere riassunto con la formula mnemonica D-S-I-S-L-A-derivate.

INTEGRALI

INTEGRALI INDEFINITI

$$\forall f: A \subseteq R \rightarrow R \; \exists \; F: A \rightarrow R : \exists F'(x) \in R \wedge F'(x) = f(x) \; \forall x \in A$$

F è definita **primitiva della funzione *f***. Tuttavia, dalle regole di derivazione consegue che la **derivata di una costante è zero**, pertanto tutte le seguenti funzioni possono essere primitive di *f*:

$$F(x) + c; F(x) + 4t; F(x) + 9 \ldots$$

Infatti, **le primitive di una funzione sono infinite** e l'insieme da esse individuato è detto **integrale indefinito** e si indica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Dove c'è una costante generica.

Con queste considerazioni si può affermare che **tutte le primitive differiscono tra loro di una costante**:

DIMOSTRAZIONE DIFFERENZA DI PRIMITIVE COME COSTANTE

Ipotesi:

$\forall f: I = (a; b) \rightarrow R : f(x) = F'(x) = G'(x)$

Tesi:

$F(x) - G(x) = c$

Dimostrazione:

Sia considerata la funzione:

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

Poiché la funzione è composta dalla somma di funzioni derivabili per ipotesi è essa stessa derivabile:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Quindi:

$$\exists c \in R: H(x) = c \implies F(x) = G(x) + c$$

CVD

A differenza del concetto di derivabilità, per il quale la continuità era una condizione necessaria, **per l'integrabilità di una funzione non è necessaria la continuità**. Infatti, presa la funzione non continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos x \iff x \neq 0 \\ 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

$$\int f(x)dx = F(x) - c = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \\ 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, è stato precedentemente dimostrato come **una funzione derivata non può avere discontinuità diversa dalla seconda specie**; pertanto, ogni funzione dotata di discontinuità di prima specie è una funzione non integrabile. Si definisce, pertanto, **la classe di funzioni non integrabili come la classe di funzioni discontinue con discontinuità di prima specie**.

Una primitiva è **espressa da funzioni elementari** se essa è il risultato di **somme/differenze/prodotti/quozienti di funzioni elementari**. Tale definizione **non vale per ogni primitiva**, che può essere espressa anche come una serie.

Si definiscono integrali immediati gli integrali indefiniti delle funzioni elementari e della funzione composta. Per dimostrare tali formule non basta fare altro che la derivata del membro di destra e verificare che coincida con il membro di sinistra.

- $f(x) = \cos x$

$$\int f(x)dx = \sin x + c$$

- $f(x) = \sin x$

$$\int f(x)dx = -\cos x + c$$

- $f(x) = x^\alpha$

$$\int f(x)dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int f(x)dx = \log|x| + c$$

- $f(x) = a^x$

$$\int f(x)dx = \frac{a^x}{\log a} + c \ \forall a > 0$$

- $f(x) = e^x$

$$\int f(x)dx = e^x$$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int f(x)dx = \arcsin x + c$$

- $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int f(x)dx = \arccos x + c$$

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int f(x)dx = \arctan x + c$$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int f(x)dx = \sinh^{-1} x + c$$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\int f(x)dx = \cosh^{-1} x + c$$

- $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$$\int f(x)dx = \tanh^{-1} x + c$$

- $h(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$

$$\int h(x)dx = F[g(x)] + c$$

Di seguito sono mostrati i metodi di integrazione, che permettono il calcolo degli integrali indefiniti di funzioni più complesse e strutturate.

DIMOSTRAZIONE INTEGRALE DI SOMMA E DI PRODOTTO PER COSTANTE

Ipotesi:

$\forall f, g: A \to R : \exists \int f(x)dx , \int g(x)dx$

Tesi:

1. $\exists \int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\exists \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Dimostrazione:

In quanto insiemi, l'equivalenza corrisponde alla reciproca inclusione.

Le due dimostrazioni sono analoghe.

$$f(x)+g(x) = D\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx + c\right] = D\left[\int f(x)dx\right] + D\left[\int g(x)dx\right]$$
$$= f(x)+g(x)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE INTEGRAZIONE PER PARTI

Ipotesi:

$\forall f, g: (a;b) \to R : \exists f'(x), g'(x) \forall x \in (a;b)$

$\exists D[f(x)g'(x)]$

Tesi:

$\exists D[f'(x)g(x)] \wedge \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Dimostrazione:

Sia presa la funzione:

$$H(x) = \int f(x)g'(x)dx$$

$$F(x) = f(x)g(x) - H(x)$$

Va dimostrato che la derivata di quest'ultima funzione è $f'(x)g(x)$ per aver dimostrato entrambi i punti della tesi.

$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$

CVD

DIMOSTRAZIONE INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Ipotesi:

$\forall f: (a;b) \to R : f$ è continua nel suo dominio

$\forall g: (a;b) \to R : g$ è derivabile nel suo dominio

Tesi:

$\int f[g(t)]g'(t)dt = (\int f(x)dx)_{x=g(t)} = F[g(t)] + c$

Nel caso in cui *g* sia invertibile: $\int f(x)dx = (\int f[g(t)]g'(t)dt)_{t=g^{-1}(x)}$

Dimostrazione:

Bisogna dimostrare:

$$D\big[F\big(g(t)\big) + c\big] = f[g(t)]g'(t)$$

$$F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

CVD

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE

In generale una **funzione razionale** del tipo:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \forall m \geq n$$

È una **funzione integrabile**, in quanto prodotto di funzioni continue e **continua** essa stessa. Essendo espressa come **rapporto di polinomi**, con il **denominatore di grado inferiore rispetto al** polinomio al **numeratore**, la funzione può essere espressa come:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \forall p \leq n - 1$$

La funzione è dunque equivalente alla **somma del suo quoziente e del rapporto tra il resto e il denominatore** della funzione stessa. L'integrale della funzione può, così, essere espresso:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int D(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

L'unico problema che resta da risolvere è quello dell'**integrazione di** $\boldsymbol{\frac{R(x)}{Q(x)}}$, sapendo che il **denominatore è di grado maggiore del numeratore**. L'integrale di questo rapporto si risolve usando il concetto di **decomposizione in fratti semplici**.

Un **polinomio** può sempre essere scritto come **prodotto di monomi**; infatti, un **polinomio di grado *n*** che ha ***h*** **soluzioni reali** e ***k*** **soluzioni complesse coniugate** è descritto:

$$Q(x) = d(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_h)^{r_h}(x^2 + p_1x + a_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_kx + a_k)^{s_k}$$

Purché sia rispettata la seguente relazione:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_h + 2s_1 + \cdots + 2s_k = n$$

Ognuno dei prodotti che compongono il polinomio **rappresenta una soluzione del polinomio** stesso e **il coefficiente a cui sono elevati rappresenta la molteplicità di tale soluzione**, cioè quante volte essa si presenta. Le radici reali sono rappresentate dalla prima parte dei coefficienti (*r*), quelli senza il 2 davanti, mentre le radici complesse coniugate sono quelle che vengono moltiplicate per 2 (*s*). Da ciò consegue la proprietà finora data per scontata per cui **un polinomio di grado *n* ha *n* soluzioni**.

Ad esempio, il polinomio di **secondo grado**:

$$P(x) = ax^2 + bx + c : b^2 - 4ac > 0$$

Può essere scomposto in:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si nota l'assenza di soluzioni complesse (il polinomio è di grado due e ci sono due soluzioni) e la loro molteplicità pari a 1. Infatti, sommandole si ottiene il grado del polinomio.

Se $b^2 - 4ac < 0$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Si nota la presenza di una sola coppia coniugata di soluzioni complesse; infatti, il coefficiente del monomio è 1, che moltiplicato per 2 da il grado del polinomio.

Se $b^2 - 4ac = 0$

$$a(x - x_1)^2$$

Si nota l'assenza di soluzioni complesse e la presenza di una sola soluzione reale, la cui molteplicità è due perché deve raggiungere il grado del polinomio.

Siano $R(x)$ e $Q(x)$ due polinomi su *R* tali che **il grado di $\boldsymbol{R(x)}$ sia minore del grado di $\boldsymbol{Q(x)}$**, esiste un'unica rappresentazione del loro rapporto nella forma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{d}\left(\sum_{j=1}^{r_1} \frac{A_{1j}}{(x - x_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{r_h} \frac{A_{hj}}{(x - x_h)^j}\right) + \frac{1}{d}\left(\sum_{j=1}^{s_1} \frac{B_{1j}x + C_{1j}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{s_k} \frac{B_{kj}x + C_{kj}}{(x^2 + p_k x + q_k)^j}\right)$$

Cioè **esistono** opportune costanti $\boldsymbol{A_{j\mu}, B_{j\mu}, C_{j\mu}}$ **... tali che la forma precedente è valida**. Il numero di tali costanti equivale al grado del polinomio.

Un particolare caso di **integrazione per sostituzione** che coinvolge le **funzioni razionali** si presenta quando esse **dipendono da determinate funzioni elementari**. Ad esempio, **se la**

funzione razionale da integrare **dipende dalla funzione esponenziale** conviene, per semplicità, considerare:

$$f(e^{at}) \Longrightarrow t = e^{ax} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}\log t \Leftrightarrow dx = \frac{1}{at}dt$$

Altre sostituzioni notevoli coinvolgono le funzioni trigonometriche, **se la funzione dipende da seno e coseno** si può considerare:

$$f(\sin x, \cos x) \Longrightarrow t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \arctan 2t \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Sapendo che:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \wedge \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Infine, **se la funzione dipende da una radice** del tipo $\boldsymbol{\sqrt[n]{ax+b}}$, si può considerare:

$$f\left(\sqrt[n]{ax+b}\right) \Longrightarrow t = \sqrt[n]{ax+b} \Leftrightarrow x = \frac{t^n - b}{a} \Leftrightarrow dx = \frac{n}{b}t^{n-1}$$

INTEGRALI DI FUNZIONI PARTICOLARI

Sia preso un integrale del tipo:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$$

Si possono presentare **tre casistiche**:

- $\Delta = p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{ax}{x^2+px+q}dx + \int \frac{b}{x^2+px+q}dx$$

$$a\int \frac{x}{x^2+px+q}dx + b\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

Al primo addendo si **moltiplica per due** e si **somma e si sottrae** p in modo da avere **la derivata del denominatore al numeratore**:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q} + b\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} - \frac{a}{2}\int \frac{p}{x^2+px+q} + b\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

Dal momento in cui il **discriminante è negativo**, si può risolvere il primo addendo; inoltre, è possibile raccogliere il secondo e il terzo addendo per l'integrale:

$$\frac{a}{2}\log(x^2+px+q)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$$

Si **manipola il denominatore** dell'integrale in modo da ottenere un quadrato di binomio:

$$x^2+px+q=x^2+\frac{2p}{2}x+q+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4p}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}$$
$$=\left(\frac{2x+p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}$$

Considerando unicamente l'integrale:

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx=\int\frac{1}{\frac{(2x+p)^2}{4}-\frac{\Delta}{4}}dx$$

Si **estrae la quantità $\frac{\Delta}{4}$**:

$$-\frac{4}{\Delta}\int\frac{1}{\frac{(2x+p)^2}{-\Delta}+1}dx=-\frac{4}{\Delta}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}dx$$

Si può portare **-Δ sotto radice** in quanto per ipotesi è positivo. Si pone $\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{2x+p}}{\sqrt{-\Delta}}$ e applicando il **metodo per sostituzione**:

$$-\frac{4}{\Delta}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}dx=\frac{4}{\sqrt{-\Delta}^2}\int\frac{1}{1+t^2}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dx=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c$$

Unendo il risultato a quello di prima:

$$\boldsymbol{\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\frac{a}{2}\log(x^2+px+q)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c}$$

- $\Delta=p^2-4q>0$

Grazie al **principio di identità dei polinomi** e grazie al fatto che, con un **discriminante positivo il polinomio al denominatore ha due soluzioni**, è possibile scomporre la frazione in:

$$\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A}{x-\alpha_1}+\frac{B}{x-\alpha_2}dx=\int\frac{Ax-A\alpha_2+Bx-B\alpha_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}dx$$
$$=\int\frac{(A+B)x-A\alpha_2-B\alpha_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}dx$$

Andando a **determinare le due costanti A e B**:

$$\begin{cases} A + B = a \\ -A\alpha_2 - B\alpha_1 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = a - B \\ -\alpha_2 a + \alpha_2 B - \alpha_1 B - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{\alpha_1 + b}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ B = \dfrac{\alpha_2 a + b}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{cases}$$

Con queste ipotesi è possibile scomporre risolvere l'integrale:

$$\int \boldsymbol{\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx} = A\int \frac{1}{x-\alpha_1}dx + B\int \frac{1}{x-\alpha_2}dx = \boldsymbol{\frac{\alpha_1+b}{\alpha_2-\alpha_1}\log(x-\alpha_1) + \frac{\alpha_2 a+b}{\alpha_2-\alpha_1}\log(x-\alpha_2) + c}$$

- $\Delta = p^2 - 4q = 0$

L'equazione al denominatore ha molteplicità due ma le **soluzioni** sono **coincidenti**, α_1 e α_1; pertanto, è possibile fare un **ragionamento analogo al caso precedente** e scomporre la frazione in due:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{(x-\alpha_1)^2}dx = \int \frac{Ax - A\alpha_1 + B}{(x-\alpha_1)^2}dx$$

Dove le A e B sono:

$$\begin{cases} A = a \\ B = b + a\alpha_1 \end{cases}$$

Da ciò si può concludere:

$$\int \boldsymbol{\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx} = A\int \frac{1}{(x-\alpha_1)}dx + B\int \frac{1}{(x-\alpha_1)^2}dx = A\log(x-\alpha_1) + c + B\int (x-\alpha_1)^{-2}dx = \boldsymbol{a\log(x-\alpha_1) - \frac{b+a\alpha_1}{x-\alpha_1} + c}$$

PARTIZIONI

Si definisce **partizione di un intervallo** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ un **insieme** $\boldsymbol{P} \subseteq [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ costituito da **un numero finito di punti** tali che:

$$P = \{x_0; x_1; \dots; x_n\} \subseteq [a; b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Si dice **partizione banale** quella partizione che contiene solo **due elementi** e, date due partizioni P_1 e P_2, si dice che $\boldsymbol{P_1}$ **è una partizione più fine di** $\boldsymbol{P_2}$ se tutti gli elementi di P_2 sono contenuti in P_1:

$$P_2 \subset P_1$$

Due partizioni possono **non essere confrontabili** nel caso in cui le ipotesi sopra specificate non si presentino; in tal senso si definisce la **finezza una relazione d'ordine parziale**. Tuttavia, è possibile sempre trovare una **terza partizione che sia più fine di entrambe** e che, pertanto, deve **contenere almeno l'unione delle due partizioni di partenza**.

Data una partizione P, si definisce **ampiezza della partizione** $|\boldsymbol{P}|$ il **massimo dell'insieme delle differenze**:

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1}\} \ \forall\, 1 < i < n$$

Si definisce **partizione equispaziata** di $[a;b]$ quella partizione:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon \subseteq [a;b] : |P_\varepsilon| < \varepsilon$$

Infatti, presi i punti $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ e l'insieme di valori di i che vanno da 0 a n, si può notare che per gli estremi di tale insieme i punti assumono i valori agli estremi dell'intervallo (definizione di partizione):

$$\begin{cases} i = 0 \Leftrightarrow x_i = a \\ i = n \ \Leftrightarrow x_i = b \end{cases}$$

E, dal momento in cui i è crescente, $\forall i, x_i > x_{i-1}$. Con queste premesse si verifichi l'ampiezza della partizione:

$$|P| = x_i - x_{i-1} = a + i\frac{b-a}{n} - a - (i-1)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

INTEGRALI DI RIEMANN

$$\forall f : [a;b] \to R : m = \inf[f(x)] \ \wedge \ M = \sup[f(x)]$$

Siano presi **due insiemi** $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ tali che:

$$\inf[f(x)]_A \geq \inf[f(x)]_B \wedge \sup[f(x)]_A \leq \sup[f(x)]_B$$

Sia considerata una **partizione P** dell'intervallo $[a;b]$ e sia chiamato:

$$m_i = \inf[f(x)]_{[x_i;x_{i-1}]} \wedge M_i = \sup[f(x)]_{[x_i;x_{i-1}]}$$

Sapendo che $I_i = [x_i; x_{i-1}] \subseteq [a;b]$, si può affermare per quanto detto prima:

$$m_i \geq m \wedge M_i \leq M$$

Si definiscono **somma superiore** e **somma inferiore**:

SOMMA INFERIORE: $s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

SOMMA SUPERIORE: $S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

Sapendo che $m_i \leq M_i$ è possibile ricavare la seguente **relazione**:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$s(P, f) \leq S(P, f)$$

Valido per ogni partizione di $[a; b]$.

Effettuando una **maggiorazione**, visto che $\boldsymbol{M_i \leq M}$ e che **M non dipende da i**:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$S(P, f) \leq M(b - a)$$

Analogamente, effettuando una **minorazione**, visto che $\boldsymbol{m_i} \geq m$ e che **m non dipende da i**:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$s(P, f) \geq m(b - a)$$

È dunque dimostrata **valida per ogni partizione** la seguente catena di disuguaglianze:

$$m(b - a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M(b - a)$$

Per determinare il comportamento delle partizioni rispetto alla relazione di finezza si ricorre al seguente lemma.

DIMOSTRAZIONE LEMMA DEL COMPORTAMENTO DELLE PARTIZIONI

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R$

$\forall P_1, P_2$: siano partizioni di $[a; b]$

Tesi:

1. $P_2 \subset P_1 \Longrightarrow s(P_2, f) \leq s(P_1, f) \wedge S(P_2, f) \geq S(P_1, f)$
2. $s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$

Dimostrazione:

Si può notare come la seconda tesi del lemma non includa la definizione di finezza e sia indipendente dalle due partizioni.

- Dimostrazione del punto 1

Dal momento in cui P_1 è più fine di P_2 ed entrambe sono partizioni, si può supporre che esista un numero z che non appartiene a P_2 ma appartiene a P_1:

$$\exists z \in P_1 : z \notin P_2$$

Dimostrare che la tesi vale per tale configurazione equivale, grazie ad un processo per induzione, a dimostrare che valgono le stesse proprietà per un numero indefinito di elementi simili a z.

$$z \in (x_{k-1}; x_k)$$

Non vengono inclusi gli estremi perché essi appartengono ad entrambe le partizioni. Si applica la definizione di somma inferiore per P_2 e la si spezzi in due in funzione del valore k:

$$s(P_2, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + mk(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Conoscendo l'intervallo di appartenenza di z, si sottrae e si aggiunge per tale valore al secondo addendo e si divide il risultato in due:

$$mk(x_k - x_{k-1}) = mk(x_k - x_{k-1} + z - z) = mk(z - x_{k-1}) + mk(x_k - z)$$

Di conseguenza:

$$s(P_2, f) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + mk(z - x_{k-1}) + mk(x_k - z) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Sia considerato:

$$m'k = \inf[f(x)]_{[x_{k-1}, z]} \wedge m''k = \inf[f(x)]_{[z; x_k]}$$

Sapendo che $mk \leq m'k$ e $mk \leq m''k$:

$$s(P_2, f) \leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m'k(z - x_{k-1}) + m''k(x_k - z) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
$$= s(P_1, f)$$

$$s(P_2, f) \leq s(P_1, f)$$

Per $S(P_2, f) \geq S(P_1, f)$ si può fare un ragionamento analogo.

- Dimostrazione del punto 2

Sia presa una partizione che sia più fine di P_1 e di P_2, allora per definizione:

$$s(P_1, f) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Che equivale a dire:

$$s(P_1, f) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq S(P_2, f)$$

CVD

Grazie a queste informazioni è possibile andare a definire l'**integrale di Riemann**. Presa una **partizione P di [a; b]**, siano definiti:

$$S(f) = \inf[S(P, f)] \wedge s(f) = \sup[s(P, f)]$$

$\boldsymbol{s(f)}$ **e** $\boldsymbol{S(f)}$ **sono quantità finite** se esiste almeno un **maggiorante** e almeno un **minorante** di $s(P, f)$ e di $S(P, f)$, in tal modo sia l'**estremo inferiore** che quello **superiore** sono **valori numerici**. Dal momento in cui vale la relazione $m(b-a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M(b-a)$, $s(f)$ e $S(f)$ sono quantità finite.

Per il lemma precedentemente dimostrato si sa che:

$$s(f) \leq S(f)$$

Una funzione f limitata e definita in un intervallo $[a; b]$ si dice **integrabile secondo Riemann su** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ se:

$$s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Tale valore prende il nome di **integrale definito di Riemann**.

Per determinare se una funzione è integrabile secondo Riemann si utilizza il **criterio di integrabilità di Riemann**.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI INTEGRABILITÀ DI RIEMANN

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R$

Tesi:

La funzione è integrabile secondo Riemann $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; P_\varepsilon \subseteq [a; b]: S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Dimostrazione:

Siano considerate le due implicazioni:

- La funzione è integrabile secondo Riemann $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; P_\varepsilon \subseteq [a; b]: S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Sia preso un ε tale che in sua corrispondenza, secondo la II proprietà dell'estremo superiore ($x_\varepsilon \leq \inf + \varepsilon$, oppure $x_\varepsilon \geq \sup - \varepsilon$):

$$\exists P'_\varepsilon : S(P'_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

$$\exists P''_\varepsilon : s(P''_\varepsilon, f) \geq \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$$

Sia presa la partizione $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ per cui:

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \leq s(P''_\varepsilon, f) \leq s(P_\varepsilon, f) \leq S(P_\varepsilon, f) \leq S(P'_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

In questa catena di disuguaglianze, la differenza di elementi che sono all'interno è minore di quella di elementi che sono all'esterno, pertanto:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) \leq S(P''_\varepsilon, f) - s(P'_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon - \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) \leq 2\varepsilon$$

Al posto di ε sia preso $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) \leq \varepsilon$$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_\varepsilon \subseteq [a; b]: S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon \Longrightarrow$ La funzione è integrabile secondo Riemann

L'estremo superiore deve essere necessariamente uguale all'estremo inferiore perché la loro differenza è tanto piccola da essere minore di ε.

CVD

Grazie a tale teorema è possibile considerare le classi **$S(P_\varepsilon, f)$ e $s(P_\varepsilon, f)$** come **classi contigue** che, secondo la teoria degli insiemi, **ammettono un unico elemento di separazione**, il quale non è altro che l'**integrale definito di Riemann** (compreso tra $S(P_\varepsilon, f)$ e $s(P_\varepsilon, f)$).

Per convenzione si indica con **$\mathcal{R}([a; b])$ l'insieme di tutte le funzioni limitate e integrabili secondo Riemann**. $\forall f, g \in \mathcal{R}([a; b])$ valgono le seguenti proprietà:

1. **Algebra degli integrali**

$$\forall c_1, c_2 \in R \wedge c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}([a; b]) \Longrightarrow \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx$$
$$= c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

2. **Proprietà additiva degli integrali**

$$\forall c \in [a;b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([c;b]) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. **Ordinamento degli integrali**

$$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Da tale proprietà discende la seguente:

$$g(x) \geq 0\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

4. **Integrale di un modulo**

$$|f| \in \mathcal{R}([a;b]) \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sup|f(x)|_{[a;b]} \cdot (b-a)$$

Fino ad ora è stato studiato l'integrale secondo Riemann sapendo che la funzione è limitata ad un intervallo $[a;b]$ e sapendo che $a < b$. Per studiare invece lo stesso concetto non sapendo nulla su a e su b si ricorre al concetto di integrale orientato:

$$\forall f: I \to R : a, b\ \in I\ \wedge f \in \mathcal{R}(I)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow a < b \\ 0 \Leftrightarrow a = b \\ -\int_b^a f(x)dx \Leftrightarrow a > b \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMI DELLA MEDIA

Ipotesi:

$\forall f \in \mathcal{R}([a;b])$

Tesi:

1. $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$
2. $\exists\ c \in [a;b]: \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$

Dimostrazione:

1. Dimostrazione del primo teorema

Applicando la definizione di integrale di Riemann:

$$m(b-a) \leq s(f) \leq S(f) \leq M(b-a)$$

Ma

$$s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Quindi:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividendo tutti i membri per $b-a$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

2. Dimostrazione del secondo teorema

Per il teorema di Weierstrass, la funzione è dotata di massimo e minimo, che coincidono con m e M, inoltre per il teorema dei valori intermedi la funzione (se continua) assume tutti i valori tra il suo massimo (M) e il suo minimo (m), pertanto l'integrale non può che essere un punto assunto dalla funzione. Infine, per il teorema di Bolzano:

$$\exists\ c \in [a;b]: \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

CVD

Il teorema che segue permette di **attribuire un valore** (unico) **ad un integrale definito di Riemann**. Sia considerata $\mathrm{C}([a;b])$ la classe di funzioni continue nell'intervallo $[a;b]$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Ipotesi:

$\forall f\ \in \mathrm{C}([a;b])$

Tesi:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ \ \forall x \in [a;b]$

Dimostrazione:

Va dimostrato che la funzione $F(x)$ è derivabile lungo tutto l'intervallo $[a;b]$ e che la sua derivata è:

$$F'(x) = f(t)$$

Applicando la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Considerato l'intervallo $[x; x+h]$ e si applichi il secondo teorema della media:

$$\frac{1}{b-a}=\frac{1}{h}$$

$$\exists c\in[x;x+h]:\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)$$

Tornando al limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$$

Tale risultato deriva dal fatto che per h che tende a 0 il punto $x+h$ tende a x e x rimane invariato, inoltre, poiché la funzione è continua, al tendere di h a zero, c tende ad assimilarsi ad x.

È stato dimostrato come la funzione $F(x)$ sia derivabile e abbia in $f(t)$ la sua derivata.

CVD

Come conseguenza di questo teorema si può trovare la **formula fondamentale del calcolo integrale**, che viene usata per il **calcolo degli integrali definiti**. Sia supposta $\varphi(x)$ un'altra primitiva della funzione $f(x)$, allora:

$$\varphi(x)=F(x)+c=\int_a^x f(t)dt+c$$

Sia considerata la stessa funzione calcolata nel punto a:

$$\varphi(a)=F(a)+c=\int_a^a f(t)dt+c=c$$

Ciò significa che $\varphi(a)=c$, allora:

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt+\varphi(a)$$

E cioè:

$$\int_a^x f(t)dt = \varphi(x) - \varphi(a)$$

Generalizzando a due generici estremi di un intervallo $[a; b]$, dove φ è una generica primitiva della funzione $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Si può dimostrare come la **formula di integrazione per parti e per sostituzione vale** anche nel caso di **integrali definiti**.

Per quanto riguarda la formula di **integrazione per parti**, siano prese due funzioni in modo tale che **esse stesse e le loro derivate siano continue** nell'intervallo $[a;\ b]$, allora vale la seguente formula:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Oppure, in maniera equivalente:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Per quanto riguarda la formula di **integrazione per sostituzione**, $\forall f: [a; b] \to R\ \wedge f \in C([a; b])$ e $\forall \varphi: [c; d] \to [a; b]\ \wedge \varphi \in C([c; d])$ che sia **suriettiva**, siano detti α e β quei due numeri tali che:

$$\varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt$$

Se la funzione $\varphi(t)$ è anche **iniettiva** si può anche scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt$$

Sapendo che $\varphi^{-1}(a) = \alpha$ e $\varphi^{-1}(b) = \beta$. Tali risultati possono essere giustificati con la formula del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt$$

DIMOSTRAZIONE CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI PER RIEMANN

Ipotesi:

$\forall f: [a; b] \to R$

f è monotona

Tesi:

f è integrabile secondo Riemann

Dimostrazione:

Sia considerata una partizione equispaziata, per cui fissato un ε è sempre possibile determinare una partizione di ampiezza minore:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \forall i \in [0; n]$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Dal momento in cui, per ipotesi, la funzione è monotona, si supponga essere crescente:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Dunque, la funzione è limitata ed è possibile applicare il criterio di integrabilità, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon: |P_\varepsilon| < \varepsilon$:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Dove:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i = \inf[f(x)]_{[x_{i-1}; x_i]} \wedge M_i = \sup[f(x)]_{[x_{i-1}; x_i]}$$

Ma poiché la funzione è crescente:

$$m_i = f(x_{i-1}) \wedge M_i = f(x_i)$$

Andando a sostituire nella sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1})$$

Per maggiorare la differenza $(x_i - x_{i-1})$ si può considerare al suo posto l'ampiezza della partizione che, per definizione, è il massimo delle differenze:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]|P_\varepsilon| = |P_\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]$$
$$= |P_\varepsilon|[f(b) - f(a)]$$

Unendo tutti i risultati:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \leq |P_\varepsilon|[f(b) - f(a)] < \varepsilon[f(b) - f(a)]$$

È possibile prendere un ε tale che:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

In tal modo:

$$|P_\varepsilon|[f(b) - f(a)] < \varepsilon$$

Dal momento in cui è possibile prendere una partizione P_ε tale che:

$$|P_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

È possibile affermare che:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Che equivale a dire che la funzione f (monotona) è integrabile secondo Riemann.
CVD

Inoltre, una **funzione è integrabile secondo Riemann** sia se è **continua** sia se è **limitata e con un numero finito di punti di discontinuità** (in realtà possono essere anche infiniti ma l'importante è che non siano quanti sono i numeri reali ma quanto i numeri naturali).

È possibile dare all'**integrale definito** un'**interpretazione geometrica**:

$$\forall f: [a; b] \to R : f \in \mathcal{R}([a; b]) \wedge f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a; b]$$

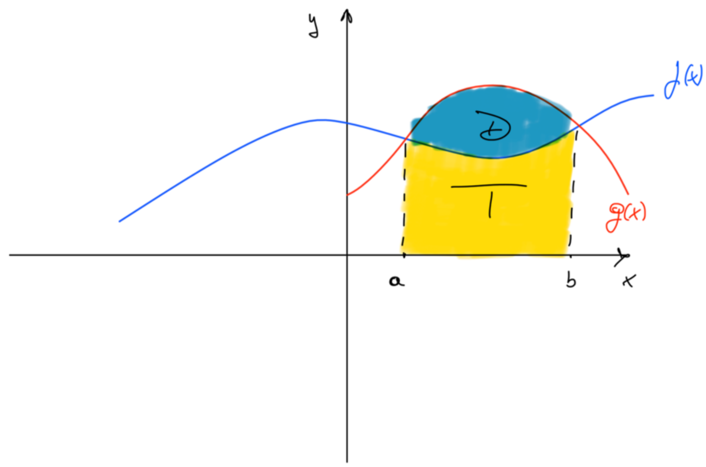
È stato mostrato:

$$s(P, f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(P, f)$$

Ma:

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \wedge S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$m_i(x_i - x_{i-1})$ e $M_i(x_i - x_{i-1})$ possono essere considerati **tanti piccoli rettangolini** che hanno come **base** $\boldsymbol{x_i - x_{i-1}}$ e come **altezza** $\boldsymbol{M_i/m_i}$. Poiché l'integrale è racchiuso tra **queste sommatorie** di aree e poiché la **funzione** è **positiva**, l'integrale definito **può essere considerato l'area sottesa al grafico della funzione**.



La **forma geometrica che viene inquadrata** sotto al grafico non è un polinomio notevole e **prende il nome di Trapezoide**:

$$T = \{(x; y) \in R^2 : x \in [a; b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Inoltre, se esistono ***due funzioni continue*** in $[a; b]$ tali che $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{g(x)}\ \forall x \in [a; b]$, si dice **dominio normale rispetto all'asse x**:

$$R^2 \supseteq D = \{(x; y) \in R^2 : x \in [a; b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Ed è una **generalizzazione del sotto grafico** di due funzioni, equivale all'**area sottesa dalla differenza di due funzioni**:

$$D = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

$\forall f: A \to R,\ f$ è **uniformemente continua** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in A, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Confrontando questa definizione con la **definizione di continuità**:

$$\forall x_0 \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall\, x \in A, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nel primo caso la **semi dimensione dell'intorno** δ è una **funzione unicamente di** $\boldsymbol{\varepsilon}$ mentre nel secondo caso **dipende anche dal valore** $\boldsymbol{x_0}$.

DIMOSTRAZIONE CONSEGUENZA DELL'UNIFORME CONTINUITÀ

Ipotesi:

$\forall f: A \to R$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in A, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Tesi:

$\forall x_0 \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall\ x \in A, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Dimostrazione:

Il teorema costituisce una semplice implicazione ipotesi $\Longrightarrow$ tesi, il che significa che tutte le funzioni uniformemente continue sono continue ma non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue. Sia preso come esempio la funzione continua $f(x) = x^2$, con $A = [0; +\infty)$; dimostrando che essa non è uniformemente continua si può procedere per induzione è dimostrare che tutte le funzioni continue non sono uniformemente continue.

Sia supposto per assurdo che $f(x) = x^2$ sia uniformemente continua, si prenda $0 < \varepsilon = 1$ in corrispondenza del quale deve esistere un $\delta > 0$ tale che valga la definizione di uniforme continuità.

Siano presi due punti che certamente appartengono al dominio della funzione:

$$x_1 = \delta \wedge x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$$

Per l'uniforme continuità devono valere:

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

$$\left|x_1 - x_1 - \frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

$$\frac{\delta}{2} < \delta$$

E:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| < 1$$

$$\frac{\delta}{2}\left|x_1 + x_1 + \frac{\delta}{2}\right| < 1$$

Tale relazione non è sempre minore di 1 (e quindi minore di ε) e, pertanto, la funzione non è uniformemente continua.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CANTOR

Ipotesi:

$\forall f : [a; b] \to R$

f è continua

Tesi:

f è uniformemente continua

Dimostrazione:

Rispetto al teorema precedentemente dimostrato, si può dire l'inverso nel momento in cui il dominio della funzione presa in analisi è un intervallo.

Si supponga per assurdo che la funzione non sia uniformemente continua:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \, \exists \, x, y \in [a; b] : |x - y| < \delta \wedge |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$$

È possibile prendere $\delta = \frac{1}{n}$, in corrispondenza del quale si troveranno due numeri appartenenti all'intervallo, x_n e y_n, tali che:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Al variare di n all'interno dell'insieme si otterranno due successioni limitate:

$$(x_n) \subseteq [a; b] \wedge (y_n) \subseteq [a; b]$$

In quanto limitate sono provviste di maggiorante e minorante, rispettivamente b e a. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, tali successioni ammettono un'estratta convergente ad un punto dell'intervallo stesso. Applicando il teorema a x_n:

$$\exists \bar{x} \in [a; b] : x_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} \bar{x}$$

Applicando il teorema a y_n:

$$\exists \bar{y} \in [a; b] : y_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} \bar{y}$$

Riprendendo la negazione della definizione di uniforme continuità, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ diventa:

$$\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$$

Per la definizione di successione, quando $k \to +\infty$ anche $n \to +\infty$; dunque, passando ai limiti:

$$\lim_{k\to+\infty}\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| = |\bar{x} - \bar{y}| \leq \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{n_k} = 0$$

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

Ciò significa che le due successioni hanno lo stesso limite. L'assurdo riguarda l'uniforme continuità ma per ipotesi la funzione è continua, proseguendo lungo la negazione della definizione:

$$\lim_{k\to+\infty}\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon$$

Per il teorema ponte questa disuguaglianza diventa:

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon$$

E cioè:

$$\varepsilon \leq 0$$

Che è un assurdo, allora una funzione continua che ha dominio in un intervallo è una funzione uniformemente continua.

CVD

ENUNCIAZIONE TEOREMA DI LIPSCHITZ

Ipotesi:

$\forall f: A \to R$

Tesi:

$\exists k > 0: |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in A$

Una funzione che rispetta questo teorema si dice **Lipschitziana**.

Sia preso in considerazione il **rapporto incrementale** di una funzione in relazione alla tesi del teorema:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq k$$

In questo modo si può affermare che **tutti i rapporti incrementali sono equilimitati**. Se $\boldsymbol{f}$ **è derivabile in A** e la derivata prima $|f'(c)(x-y)| \leq k|x-y|$, è possibile applicare il teorema di Lagrange alla derivata prima:

$$\exists x < c < y : \ |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)(x-y)|$$

Ma:

$$|f'(c)(x-y)| \leq k|x-y|$$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Quindi **una funzione dotata di derivata limitata è una funzione Lipschitziana**.

Dal momento in cui **ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua**, se si vuole dimostrare che una funzione è tale basta dimostrare che **la derivata prima è limitata**.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Ipotesi:

$\forall f : [a; b] \to R$

f è continua in $[a; b]$

Tesi:

$f \in \mathcal{R}([a; b])$

Dimostrazione:

Al fine della dimostrazione è necessario dimostrare che per un $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_ε per cui:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Per il teorema di Cantor, una funzione continua definita su un intervallo è anche uniformemente continua, per cui fissato un $\varepsilon > 0$ e un $\delta > 0$:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

È possibile al posto di ε un $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Sia presa la partizione P_ε:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

E tale che:

$$|x_i - x_{i-i}| < \delta \ \forall 0 < i < n$$

Per la relazione $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ segue che:

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Il valore assoluto viene omesso dal momento in cui il primo membro della differenza è sempre maggiore o uguale al secondo. Si moltiplicano entrambi i membri per $(x_i - x_{i-1})$ e si sommano membro tutti i contributi per i che va da 0 a n:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1})$$

Si svolgano le due serie:

$$\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}m_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a$$

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

CVD

DIMOSTRAZIONE FUNZIONE LOCALMENTE INTEGRABILE

Ipotesi:

$\forall f: I \to R$ dove I è un intervallo qualsiasi

Tesi:

$f \in \mathcal{R}_{loc}(I) \Leftrightarrow \forall [c; d] \subseteq I \ f \in \mathcal{R}([c; d])$

Tale teorema afferma che una funzione è **localmente integrabile** secondo Riemann in un intervallo I se e solo se, **comunque presa una restrizione di tale intervallo**, **la funzione è integrabile secondo Riemann in tale restrizione**. Una vasta classe di funzioni localmente integrabili è la classe di **funzioni continue**, che sono integrabili secondo Riemann in qualsiasi restrizione del loro dominio.

INTEGRALE IMPROPRIO

Per definizione di integrale di Riemann, una funzione per essere integrabile deve essere $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \to \boldsymbol{R}$ e deve essere **limitata**. Anche se **una di queste due ipotesi viene a mancare** è **possibile definire un integrale** ma tale viene definito **integrale improprio**.

Nel caso in cui venga a mancare la prima ipotesi ci si ritrova nella seguente situazione:

$$f: [a; +\infty) \to R \land f \in \mathcal{R}([a; +\infty))$$

Una funzione di questo tipo è integrabile se esiste ed è finito il seguente limite:

$$\exists \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Gli integrali impropri hanno un **comportamento quasi analogo a quello delle serie**, infatti è possibile distinguere, oltre che all'integrale regolare mostrato appena, **due tipi di integrali impropri**:

INTEGRALE IMPROPRIO DIVERGENTE: $\exists \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)dx = \pm\infty$

INTEGRALE IMPROPRIO OSCILLANTE: $\nexists \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)dx$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA VALIDO PER LE FUNZIONI POSITIVE

Ipotesi:

$\forall f: [a; +\infty) \to R : f \in \mathcal{R}_{loc}\big([a; +\infty)\big)$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a; +\infty)$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)dx = \lim_{y\to+\infty} F(y)$

Tesi:

$\lim_{y\to+\infty} F(y)$ è una funzione crescente

Dimostrazione:

Si deve dimostrare che:

$$\forall y_1, y_2 \in [a; +\infty) : y_1 < y_2 \Longrightarrow F(y_1) \leq F(y_2)$$

Poiché tra a e y_2 certamente si trova y_1, è possibile utilizzare la proprietà di additività degli integrali:

$$F(y_2) = \int_a^{y_2} f(x)dx = \int_a^{y_1} f(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx = F(y_1) + \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \geq F(y_1)$$

Secondo le proprietà degli integrali di Riemann, se una funzione è positiva anche il suo integrale lo sarà e, poiché per ipotesi la funzione in esame è positiva, lo è certamente anche l'integrale.

$$F(y_1) \leq F(y_2)$$

CVD

Come anticipato prima, gli integrali impropri assumono un **comportamento analogo alle serie**, in particolare **condividono la maggior parte dei teoremi**:

TEOREMA DEL CONFRONTO:

$$\forall f, g: [a; +\infty) \to R \land f \in \mathcal{R}_{loc}\big([a; +\infty)\big)$$

$$0 \le f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$$

$$0 \le \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Il teorema afferma che se **l'integrale di $\boldsymbol{g(x)}$ converge, allora converge anche l'integrale di $\boldsymbol{f(x)}$** in quanto più piccolo, mentre se **l'integrale di $\boldsymbol{f(x)}$ diverge positivamente, allora anche l'integrale di $\boldsymbol{g(x)}$ diverge positivamente** in quanto maggiore.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:

$$\forall f, g: [a; +\infty) \to R \land f \in \mathcal{R}_{loc}\big([a; +\infty)\big)$$

$$f(x) \ge 0 \land g(x) \ge 0$$

$$\forall x \in [a; +\infty) \land f \sim g \land x \to +\infty$$

Il teorema afferma che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.

Applicando la definizione di integrale improprio è possibile dimostrare le seguenti **proprietà**:

1. $\int_a^{+\infty}[f(x) + g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$;
2. $\int_a^{+\infty} k\, f(x)dx = k \int_a^{+\infty} f(x)dx$;
3. $f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$
4. $\forall c > a, \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

È possibile definire **altre due tipologie di integrale improprio**:

$$\forall f: (-\infty; b] \to R\ \lim_{y \to -\infty} \int_y^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)$$

$$\forall f: (-\infty; +\infty) \to R \land \exists c \in R: \exists \lim_{y \to -\infty} \int_y^c f(x)dx\,, \lim_{y \to +\infty} \int_c^y f(x)dx \in R \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Quella che segue è una **condizione necessaria per la convergenza degli integrali**:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Longrightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Una funzione $f: [a; +\infty) \to R$ è **assolutamente integrabile** $\Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{R}\big([a; +\infty)\big)$, in genere quando una funzione è assolutamente integrabile essa è anche semplicemente integrabile, con una relazione:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Tuttavia, questa è una **condizione necessaria ma non sufficiente**, pertanto non è valida la proposizione inversa.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DELL'INTEGRALE PER SERIE

Ipotesi:

$\forall f: [1;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$: sia positiva e decrescente

$a_n = f(n)$

Tesi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

Dimostrazione:

Sia considerato:

$$x \in [k; k+1], k \in N$$

Dal momento in cui la funzione è decrescente:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

Secondo le proprietà degli integrali di Riemann:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$$

Dal momento in cui è variabile solo $f(x)$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

È possibile sostituire i valori della funzione con i rispettivi valori della successione:

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k$$

Si applica la sommatoria a tutti e tre i membri:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Sapendo che $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, e poiché manca il termine a_1 nella prima sommatoria, si sottrae e si aggiunge per tale quantità:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} + a_1 - a_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Per la proprietà additiva degli integrali si svolge la sommatoria:

$$s_{n+1} - a_1 \leq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s_n$$

In particolare, poiché $\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s_n$, si può affermare:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} s_n$$

Che equivale a dire che se uno dei due converge, anche l'altro converge.

CVD

Sia presa $f: [a; b) \to R$ e sia supposto $f \in \mathcal{R}([a; c])\ \forall a < c < b \wedge [a; c] \subseteq [a; b)$; allora:

$$\lim_{y\to b^-} \int_{a}^{y} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Se tale **limite esiste ed è finito** allora **la funzione è integrabile in senso improprio** e se **il limite converge/diverge** anche **l'integrale converge/diverge**. Con questo tipo di integrale è possibile definire due proprietà:

$$\forall f, g: [a; b) \to R: 0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a; b) \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\forall f, g: [a; b) \to R: f \sim g \text{ per } x \to b^- \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \,\text{converge/diverge}$$
$$\Leftrightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \ \text{ converge/diverge}$$

SERIE NUMERICHE E NUMERI COMPLESSI

SERIE NUMERICHE

Data una **successione** $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n\in N}}$ e definita la **successione** $\{\boldsymbol{s_n}\}_{\boldsymbol{n\in N}}$ di termini:

$$s_0 = a_0; s_1 = a_0 + a_1; s_2 = a_2 + a_1 + a_0; s_n = a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

Dove $\boldsymbol{a_n}$ è il **termine generico** e $\boldsymbol{s_n}$ la **successione delle somme parziali** (o delle ridotte n-esime della serie), una serie numerica è una coppia:

$$(\{a_n\}_{n\in N};\ \{s_n\}_{n\in N}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Il **carattere** di una serie può essere di due tipi, i quali si diramano in altre forme:

- **Regolare**, se esiste il limite della successione delle somme parziali
  - **Convergente** $\lim_{n\to+\infty} s_n = S \in R$
  - **Divergente**
    - **Positivamente** $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$
    - **Negativamente** $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$
- **Non regolare** o **oscillante**, se non esiste il limite della successione delle somme parziali

Un esempio di serie divergente (positivamente) è la sommatoria di tutti i primi n numeri naturali:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Mentre un esempio di serie oscillante è la serie a termini di segno alterno:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$$

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$$

Valgono le seguenti **proprietà**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Se la serie originaria diverge positivamente quella a sinistra ha lo **stesso carattere** per $c > 0$ e **carattere opposto** per $c < 0$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

A patto che non ci si ritrovi in una **forma indeterminata** $+\infty - \infty$.

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=1}^{+\infty} a_n : \exists \lim_{n\to+\infty} s_n \in R$

Tesi:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Dimostrazione:

Dal momento in cui si parla di condizione necessaria, se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ allora si può dire che la serie non è convergente, ma non si può dire che la serie è convergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} + \lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$S = S + \lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

CVD

DIMOSTRAZIONE ALTERAZIONE DI UN NUMERO FINITO DI TERMINI

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Se si alterano (addizione, sottrazione o modifica) un numero finito di termini

Tesi:

Il carattere della serie non cambia (ma può cambiare il valore della somma nel caso di una serie convergente)

Dimostrazione:

Alterare un numero finito di termini significa modificare i primi x e lasciare invariati i termini dal x+1 esimo. Sia considerata b_n l'alterazione della successione a_n:

$$\exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, a_n = b_n$$

Considerata la successione delle somme parziali dei primi n termini s_n relativa a a_n e s'_n relativa b_n:

$$s_n = s_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n$$

$$s'_n = s'_{n_0} + b_{n_0+1} + b_{n_0+2} + \cdots + b_n = s'_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n$$

Considerando la loro differenza:

$$s'_n - s_n = s'_{n_0} - s_{n_0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \left[\lim_{n\to+\infty}\left(s'_{n_0} - s_{n_0}\right)\right]$$

Ma dal momento in cui $s'_{n_0} - s_{n_0}$ è una differenza costante:

$$\lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \left(s'_{n_0} - s_{n_0}\right)$$

Da questo risultato si può desumere che il carattere della serie alterata $\left(\lim_{n\to+\infty} s'_n\right)$ è uguale a quello della serie originale $\left(\lim_{n\to+\infty} s_n\right)$.

CVD

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

- A **termini non negativi** $\Leftrightarrow a_n \geq 0 \; \forall n \in N$
- A **termini non positivi** $\Leftrightarrow a_n \leq 0 \; \forall n \in N$
- A **termini negativi** $\Leftrightarrow a_n < 0 \; \forall n \in N$
- A **termini posit**ivi $\Leftrightarrow a_n > 0 \; \forall n \in N$

Le seguenti considerazioni possono essere fatte su tutti e quattro i tipi di serie, a patto che si modifichino opportunamente le tesi.

Una serie di questo tipo **non può essere oscillante**, in quanto i termini si vanno sempre o a sottrarre o ad aggiungere. Infatti, presa in considerazione una **serie a termini non negativi**:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Poiché $s_{n+1} \geq s_n$, la successione s_n è **monotona crescente**. Il teorema sulle successioni monotone afferma che **se una successione è monotona allora essa è regolare** e, pertanto, è dotata di limite:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} s_n$$

Pertanto, **viene esclusa l'ipotesi di una serie oscillante**, essa può essere o divergente (il limite non esiste, cioè la successione s_n non è limitata) o convergente (la successione s_n è limitata e il limite finito). In più, si può affermare che se la serie è a termini non negativi (o positivi) la divergenza non è mai negativa e viceversa.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DEL CONFRONTO DI SERIE NON NEGATIVE

Ipotesi:

$\forall p \in N$

$\forall \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n : a_n \geq 0 \ \forall n \in N \land b_n \geq 0 \ \forall n \in N$

$a_n \leq b_n \ \forall n > p$

Tesi:

b_n converge $\Longrightarrow a_n$ converge

a_n diverge positivamente $\Longrightarrow b_n$ diverge positivamente

Dimostrazione:

Si alterino un numero finito di elementi in modo tale da far risultare $a_n \leq b_n \ \forall n \in N$. Si considerano le successioni di somme parziali relative ad entrambe le successioni:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$s'_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Ma, grazie all'alterazione eseguita:

$$a_n \leq b_n \Longrightarrow s_n \leq s'_n \ \forall n \in N$$

Si considerino i limiti per entrambe le successioni e si noti che, dal momento in cui le serie sono a termini non negativi, essi saranno sicuramente maggiori di zero. Per il teorema del carabiniere

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{n\to+\infty} s'_n$$

Da ciò si può concludere che il carattere della successione s'_n dipende da quello del carattere della successione s_n in maniera proporzionale.

CVD

TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n : a_n > 0 \land b_n > 0 \ \forall n \in N$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0;\ +\infty)$

Tesi:

Le due serie hanno lo stesso carattere (o divergono positivamente o convergono)

Dimostrazione:

Applicando la definizione di limite, sapendo che n_0 è un indice:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in N : \; \forall \, n \geq n_0, l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$$

Poiché per ipotesi le due serie sono a termini positivi, è possibile prendere $\varepsilon = \frac{l}{2}$:

$$\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l$$

Portando b_n al denominatore:

$$\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$$

In questo caso se a_n o b_n converge o diverge, è possibile applicare il teorema del confronto e affermare che le due serie hanno lo stesso carattere.

CVD

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DEL RAPPORTO DI SERIE A TERMINI POSITIVI

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n : a_n > 0 \; \forall n \in N$

$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0; +\infty)$

Tesi:

1. $l < 1 \Longrightarrow$ la serie converge;
2. $l > 1 \Longrightarrow$ la serie diverge positivamente;
3. $l = 1 \Longrightarrow$ non si può dire nulla sul carattere della serie e non è possibile applicare alcun criterio.

Dimostrazione:

Si prendano in considerazione i due casi:

- $l < 1$

Dal momento in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$ tale rapporto sarà definitivamente minore di 1. Sia preso un γ tale che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \gamma < 1$$

Ciò significa:

$$a_{n+1} < \gamma \cdot a_n$$

Ad esempio:

$$a_2 < \gamma \cdot a_1$$

$$a_3 < \gamma \cdot a_2 < \gamma \cdot \gamma \cdot a_1$$

$$a_4 < \gamma \cdot a_3 < \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot a_1$$

In generale:

$$a_n < \gamma^{n-1} \cdot a_1$$

Trasponendo questo risultato in una serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1} \cdot a_1$$

Ma quella a destra della disuguaglianza è una serie geometrica di argomento minore di 1, il che significa che essa converge. Da ciò si desume che anche la serie originale converge.

- $l > 1$

Dal momento in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$, si può dire che la serie è definitivamente maggiore di 1. Così è possibile prendere un γ tale che:

$$1 < \gamma < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l$$

Allora:

$$a_{n+1} > \gamma \cdot a_n$$

Ad esempio:

$$a_2 > \gamma \cdot a_1$$

$$a_3 > \gamma \cdot a_2 > \gamma \cdot \gamma \cdot a_1$$

Generalizzando:

$$a_n > \gamma^{n-1} \cdot a_1$$

Trasponendo questo risultato in una serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1} \cdot a_1$$

Per il teorema del confronto è possibile dire che la serie a sinistra diverge, dal momento in cui quella a destra è una serie geometrica di ragione maggiore di 1.

CVD

Si definisce **serie telescopica** quella serie i cui termini generici sono composti da **elementi adiacenti** di una successione:

$$\forall \{a_n\}_{n \in N}: a_n = b_n - b_{n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$$

I singoli termini di tale serie sono:

$$s_1 = b_1 - b_2$$

$$s_2 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3$$

$$s_2 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4$$

$$s_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - \cdots - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

Il carattere di una serie telescopica si determina in funzione del **termine n-esimo**, in quanto **il primo termine è costante** e non dipende da n:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \to +\infty} b_{n+1}$$

Una particolare serie telescopica è la **serie di Mengoli**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

$\forall x \neq 0 \land x \neq 1$ si definisce **serie geometrica di ragione x** la serie che ha come termine generico $a_n = x^n$ e, pertanto si configura come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

La sommatoria delle somme parziali è:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Che per induzione può essere semplificata:

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Pertanto, il **carattere della serie** si determina risolvendo il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Tale limite dipende dal termine $\boldsymbol{x^{n+1}}$; pertanto, studiando il suo comportamento è possibile ricavare il carattere della serie:

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 \iff |x| < 1 \\ 1 \iff x = 1 \\ +\infty \iff x > 1 \\ \nexists \iff x \leq -1 \end{cases}$$

Dal momento in cui per ipotesi $\boldsymbol{x \neq 1}$, tale limite **esiste solo se** $\boldsymbol{|x| < 1}$ e cioè $x \in (-1; 1)$. Dunque, il **carattere di una serie geometrica** è:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} \iff |x| < 1 \\ +\infty \iff x > 1 \\ \nexists \iff x \leq -1 \end{cases}$$

Si definisce **serie armon**ica la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Dal momento in cui $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, **non si può dire se tale serie diverge o converge**. Tuttavia, usando la **formula di Taylor con il resto di Lagrange**, è possibile dimostrare:

$$\log(1 + x) \leq x \; \forall x > -1$$

Inoltre, è possibile dimostrare che la seguente serie **diverge positiva**mente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Considerando le due successioni $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ e $b_n = \frac{1}{n}$, per il **teorema del confronto di serie** si può affermare che $\boldsymbol{b_n}$ **ha lo stesso carattere di** $\boldsymbol{a_n}$, cioè diverge positivamente.

Questa serie è un particolare caso della **serie armonica generalizzata**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$$

È possibile dimostrare come per qualsiasi valore $\boldsymbol{p \leq 1}$ **la serie diverga positivamente**; infatti, in tal caso:

$$n^p \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

Sfruttando il **teorema del confronto di serie** è possibile affermare che le due serie hanno lo stesso carattere e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$ diverge positivamente per $p \leq 1$.

Inoltre, è possibile dimostrare come per $\boldsymbol{p > 1}$ **la serie converga**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots$$

A partire dal secondo termine è possibile applicare una **proprietà associativa** che associ i termini per **potenze di due**:

$$2^1 \Rightarrow \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$$

$$2^2 \Rightarrow \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}$$

...

Essendo frazioni, **diminuendo il denominatore si aumenta il valore della frazione** in sé e portando tutti i denominatori al più piccolo:

$$\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

...

Generalizzando tale risultato si può affermare che ogni **n-esimo termine** della serie sarà minore di $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n}$. In particolare

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ converge significa, di conseguenza, dimostrare che anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge. Si può osservare che quella appena ricavata è una **serie geometrica di ragione** $\boldsymbol{\frac{1}{2^{p-1}}}$. Dal momento in cui $\boldsymbol{p > 1}$, la ragione sarà **sempre positiva** ma sempre **minore di 1**:

$$0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1$$

Il che rientra nel caso in cui una serie geometrica **converge**. Da ciò si deduce che la serie armonica generalizzata con $p > 1$ converge.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DELLA RADICE PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n : a_n > 0 \; \forall n \in N$

$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0; +\infty)$

Tesi:

1. $l < 1 \Longrightarrow$ la serie converge;
2. $l > 1 \Longrightarrow$ la serie diverge positivamente;
3. $l = 1 \Longrightarrow$ non si può dire nulla sul carattere della serie e non è possibile applicare alcun criterio.

Dimostrazione:

Applicando la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in N : \; \forall \, n \geq n_0, l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Siano considerati i casi:

1. $l < 1$

Sia preso un ε: $l - \varepsilon > 0$ e si consideri $q = l + \varepsilon < 1$. Elevando alla n tutti i membri:

$$(l - \varepsilon)^n < a_n < (l + \varepsilon)^n = q^n$$

Dal momento in cui $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ è una serie geometrica, che converge per valori della ragione minori di 1, è possibile affermare che la serie di partenza è convergente

2. $l > 1$

Sia posto ε: $l - \varepsilon > 1$ e siano elevati tutti i membri alla n:

$$(l - \varepsilon)^n < a_n < (l + \varepsilon)^n$$

Dove $\sum_{n=0}^{+\infty} (l - \varepsilon)^n$ è una serie geometrica, che diverge per valori della ragione maggiori di 1. In questo modo è possibile affermare che la serie di partenza diverge positivamente.

CVD

Si definisce **serie di resto di ordine n** quella serie che si ottiene **trascurando i primi n elementi** di una serie di partenza:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

Sia considerato un indice $p > n$, si definisce **successione delle somme parziali p-esime di una serie di resto** la successione che parte dall'indice n e arriva all'indice p e si indica con $\boldsymbol{\gamma_{n,p}}$. La successione delle somme parziali della serie di partenza è:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

La successione delle somme parziali p-esime è:

$$\gamma_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

Oppure:

$$\gamma_{n,p} = s_{n+p} - s_n$$

È possibile dimostrare che **una serie e la serie di resto di ordine n corrispondente hanno lo stesso carattere**.

NUMERI COMPLESSI

La necessità di **ampliare il campo dei numeri reali** nasce nel momento in cui è necessario **risolvere equazioni** del tipo:

$$x^2 + 1 = 0$$

Che **nel campo reale non hanno radici** (perché non esiste il radicale di un numero negativo).

Si definisce così il **campo dei numeri complessi**, cioè quel campo in cui **è possibile risolvere qualsiasi tipo di operazione algebrica**. Tuttavia, per definire un campo bisogna effettuare qualche operazione preliminare.

Sia preso l'insieme delle **coppie ordinate** $(x; y) \in R \times R$, affinché tale insieme sia un campo è necessario definire **due operatori** (indicando in rosso quelli che si sta definendo e in nero quelli dei numeri reali) e delle **proprietà**:

$$\forall (x_1; y_1), (x_2; y_2) \in R \times R$$

ADDIZIONE: $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in R \times R$

PRODOTTO: $(x_1; y_1) \times (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1) \in R \times R$

Inoltre, $\forall z = (x; y) \in R \times R$, valgono le seguenti proprietà:

ASSOCIATIVA

COMMUTATIVA

DISTRIBUTIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE PER L'ADDIZIONE

ESISTENZA E UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO

$+: 0 = (0; 0)$

$\times: 1 = (1; 0)$

ESISTENZA E UNICITÀ DELL'OPPOSTO

$+: -z = (-x; -y)$

$\times: z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}; -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

Analogamente al campo dei numeri reali, l'opposto moltiplicativo di un numero complesso può essere chiamato **reciproco** e può essere visto come quel numero che moltiplicato per il suo stesso reciproco da l'elemento neutro moltiplicativo:

$$z \cdot z^{-1} = 1 = (1; 0)$$

Come per il campo reale, da tali definizioni è possibile estrapolare **altre operazioni**, la **sottrazione**, la **divisione** e l'**elevamento a potenza**:

SOTTRAZIONE: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

DIVISIONE: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$

ELEVAMENTO A POTENZA: $z^n = z^{n-1} \cdot z$

Per dimostrare tali formule è necessario **applicare la definizione** degli operatori coinvolti.

Con tale configurazione si può definire l'insieme preso in esame come **campo dei numeri complessi**:

$$C \equiv R \times R$$

E si può affermare che il **campo dei numeri reali** ne sia un **sottoinsieme**:

$$\forall (x; y) \in C: y = 0, (x; y) \in R$$

Infatti:

$$C \ni (x; 0) + (y; 0) = (x + y; 0) = x + y \in R$$

$$C \ni (x; 0) \times (y; 0) = (xy; 0) = xy \in R$$

Da ciò si può dedurre che in questa particolare configurazione, l'insieme dei numeri complessi che ha come secondo termine della coppia ordinata zero è un **sottocampo** di C. Infatti, può essere considerata un'**applicazione lineare** e, pertanto, godere di **isomorfismo**:

$$[(x;0) \in C \Leftrightarrow x \in R] \wedge [f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge f(xy) = f(x)f(y)] \Rightarrow \text{isomorfismo}$$

In un generico numero complesso è possibile distinguere due parti: la **parte reale** e la **parte immaginaria**. La **parte reale di un numero complesso** è il termine che, se combinato con un secondo termine zero, da un numero reale puro, mentre la **parte immaginaria** è quel numero che, se combinato con un primo termine zero, restituisce uno zero reale:

$$\begin{tikzcd} & (x;y) \in C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C \ni (x,0) = x \in R & & C \ni (0,y) = 0 \in R \end{tikzcd}$$

Parte reale — Parte immaginaria

Grazie a tale distinzione si può definire l'**uguaglianza di due numeri complessi** come l'**uguaglianza delle relative parti** immaginaria e reale:

$$\forall z_1 = (x_1; y_1), z_2 = (x_2; y_2) \in C, z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Definito il campo dei numeri reali e le sue proprietà elementari si può risolvere il problema che ha spinto alla ricerca di un ampliamento di R: la soluzione di equazioni del tipo $x^2 + 1 = 0$. Infatti, si definisce **unità immaginaria** il numero complesso $i = (0;1)$; tale numero, **se elevato al quadrato restituisce -1**. Pertanto:

$$i^2 = (-1;0) \Rightarrow i^2 + 1 = 0$$

Infatti, l'equazione presa in esame ha **una sola soluzione nel campo dei numeri complessi** ed è rappresentata dall'unità immaginaria.

$$\nexists x \in R: x^2 + 1 = 0 \wedge \exists!\, x \in C: x^2 + 1 = 0$$

Con la nozione di unità immaginaria è possibile descrivere un **numero complesso in una forma alternativa**:

$$\forall (x;y) \in C, (x;y) = (x;0) + (0;y) = (x;0) + (0;1)(0;y) = x + iy$$

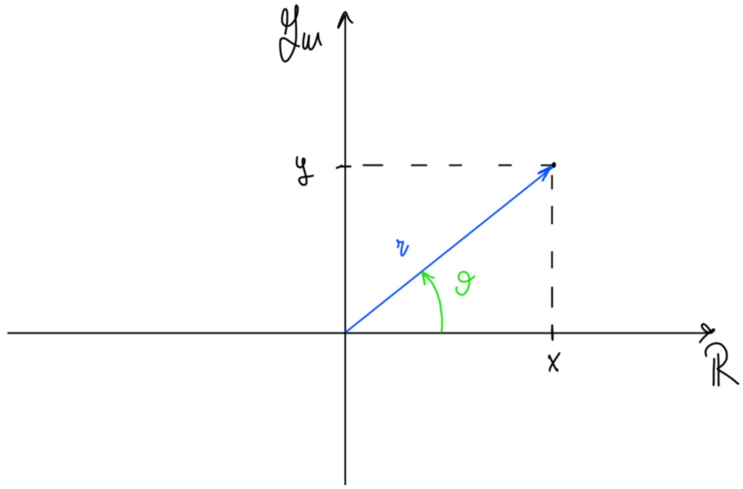
Tale espressione viene detta **forma algebrica di un numero complesso**.

Il campo dei numeri complessi, a differenza di quello reale, **non è un campo ordinato**, se lo fosse $i > 0 \vee i < 0$ ma in entrambi i casi si arriva alla seguente contraddizione:

Sia supposto $i > 0$ e sia considerato il suo opposto $-i = -1(i) = i^2 > 0$. Tuttavia, per definizione **un numero e il suo opposto non possono essere entrambi maggiori di zero** e, pertanto, si può affermare che il campo dei numeri complessi non è un campo ordinato.

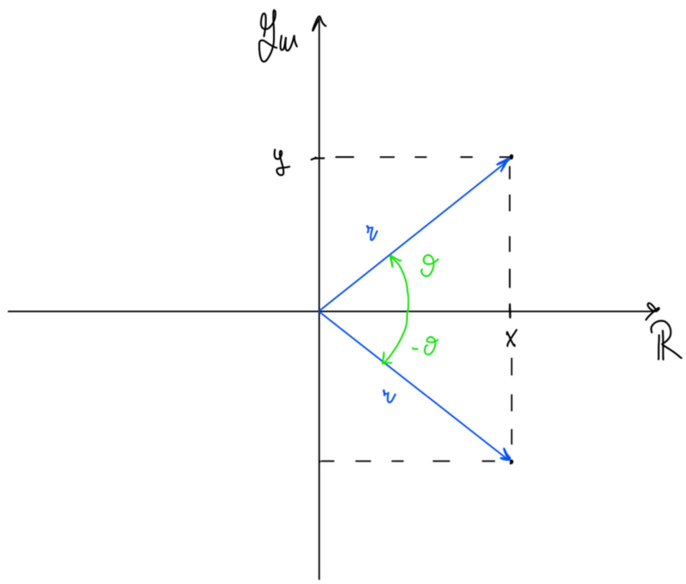
Dal momento in cui sussiste l'equivalenza $C \equiv R \times R$, è possibile considerare **ogni numero complesso come una coppia di coordinate da inserire in un piano** in cui, l'**asse delle ascisse è la retta reale** e quella delle **ordinate la retta immaginaria** e il numero in sé e per sé è l'**affissa**. Tale piano è detto **Piano di Gauss** ed è lo strumento usato per la **rappresentazione grafica di un numero complesso**:

$$(x; y)$$



Si può notare che, **invertendo la parte immaginaria** di un numero complesso, **il modulo** del numero **non cambia** ma **cambia solo l'inclinazione** di esso e, inoltre, l'angolo che si forma è **opposto all'angolo del numero originale**; pertanto, si definisce **numero complesso coniugato** di un numero complesso lo stesso numero con la parte immaginaria invertita:

$$\forall\ z = (x; y) = x + iy\ \exists!\ \bar{z} = (x; -y) = x - iy$$



È possibile definire alcune **proprietà** che coinvolgono il **modulo** di un numero complesso e il suo **complesso coniugato**:

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $|\bar{z}| = |z|$;
- $z\bar{z} = |z|^2$;
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
- $\mathcal{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \wedge \mathcal{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

Ogni numero (o, in questo caso, affissa) è rappresentato da un **vettore**, inclinato di un **angolo** ϑ, dotato di un **modulo** e di **due componenti**, una **orizzontale** (la parte **reale** del numero) e una **verticale** (la parte **immaginaria**). Tali componenti, in quanto componenti di un vettore, possono essere associate a **funzioni trigonometriche dell'angolo**. Definito il modulo come:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le componenti possono essere descritte come:

$$x = r\cos\vartheta \wedge y = r\sin\vartheta$$

Un numero complesso può essere così espresso in **forma polare**:

$$(x, ; y) = \begin{cases} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{cases} = [r;\ \vartheta]$$

Infatti, conoscendo un **angolo** e il **modulo** del vettore associato, è possibile ricavare **uno e un solo numero complesso**.

Se **ad ogni vettore** (cioè ad ogni coppia di coordinate polari) nel piano di Gauss **corrisponde uno e un solo numero complesso**, **ad un numero complesso corrisponde un insieme infinito di angoli** (ed un solo modulo) che rappresentano nel piano di Gauss tale numero. Questo insieme viene definito **argomento di z** ed è una funzione che ad ogni numero complesso associa più angoli che lo possono rappresentare; infatti, è codificabile come una **funzione a più valori**:

$$z \to \arg z = \{\forall\, k \in Z : \vartheta_0 + 2k\pi\} \Leftrightarrow z \neq 0$$

Quando $z = 0 = r$ l'argomento resta **indeterminato**. Si dice **argomento principale** di un numero complesso z quell'angolo che rappresenta z che **appartiene all'intervallo** $(\boldsymbol{-\pi}; \boldsymbol{\pi}]$, anche se può essere ampliato al **primo giro di circonferenza**:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \forall\, k \in Z$$

Preso un numero immaginario $z = (x; y)$ è possibile determinare l'**argomento di tale numero in funzione delle sue parti** semplicemente ricorrendo alla funzione inversa della tangente:

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}$$

Tuttavia, per ricorrere agli attuali valori dell'angolo bisogna fare delle **considerazioni sulle due parti del numero**:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow x > 0 \\ \operatorname{sgn} y \cdot \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{non definito } \Leftrightarrow x = 0 = y \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \Leftrightarrow x < 0 \land y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \Leftrightarrow x < 0 \land y < 0 \end{cases}$$

Dove $\operatorname{sgn} y = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \Leftrightarrow y \neq 0 \\ 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$.

Dalla forma trigonometrica di un numero complesso si può arrivare alla **rappresentazione trigonometrica** dello stesso:

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \equiv [r;\ \vartheta]$$

Il **prodotto di due numeri** in questa forma è:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] \end{aligned}$$

Da cui:

$$\arg(z_1 z_2) = \{\vartheta_1 \in \arg z_1 \land \vartheta_2 \in \arg z_2 : \vartheta_1 + \vartheta_2\} = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \forall k \in Z$$

Si osservi che tale identità vale solo se si considera il **generico argomento**, **non l'argomento principale**. Infatti, se $\operatorname{Arg} z_1 = \pi \land \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{3}{2}\pi = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \neq \operatorname{Arg} z_1 z_2 = -\frac{\pi}{2}$$

In alcune situazioni è comodo esprimere un numero complesso attraverso la sua **forma esponenziale**, ottenuta estendendo la **definizione di funzione esponenziale** ad un **esponente immaginario puro**:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta, \forall\vartheta \in R$$

Tale formula è detta **formula di Eulero**, dalla quale si può ricavare:

$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

Che, combinando con la precedente:

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2\cos\vartheta \land e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i\sin\vartheta$$

Da cui:

$$\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \land \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Con tali informazioni si può ulteriormente semplificare l'**espressione di un numero complesso**:

$$z = re^{i\vartheta}$$

Detta forma esponenziale di z. Il **complesso coniugato** è:

$$\bar{z} = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = r[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)] = re^{-i\vartheta}$$

Riprendendo **il prodotto** di due numeri complessi e ampliandolo a **n numeri**:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_n)}$$

Che, **in forma polare è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti**:

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1||z_2| \dots |z_n|$$

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n$$

Analogamente si può fare per il rapporto, sapendo che:

$$e^{i\vartheta} e^{-i\vartheta} = 1$$

Infatti, $\boldsymbol{e^{-i\vartheta}}$ **assume il ruolo di reciproco di** $\boldsymbol{e^{i\vartheta}}$ e, pertanto:

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$$

Quindi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

Il **rapporto di due numeri complessi $\boldsymbol{z_1}$ e $\boldsymbol{z_2 \neq 0}$ è un numero complesso che ha come modulo il rapporto di moduli e per argomento la differenza di argomenti**:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\, \vartheta_1 \in \arg z_1 \wedge \vartheta_2 \in \arg z_2 : \vartheta_1 - \vartheta_2\} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \forall k \in Z$$

Infine, è possibile dimostrare che:

$$\arg\frac{1}{z} = \arg\bar{z} = -\arg z$$

$$\arg(-z) = \arg z + \pi$$

Grazie a quanto detto prima, è possibile calcolare la **potenza n-esima di un numero complesso z** $\forall n \in Z$:

$$z^n = r^n e^{in\vartheta} = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

Che diventa la formula di Moivre se $r = 1$:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$$

Conoscendo la potenza n-esima si può arrivare alla radice n-esima di un numero complesso, a patto che sia fatto qualche ragionamento preliminare. Si ricordi che, presi due numeri complessi:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\mathcal{Re}\, z_1 = \mathcal{Re}\, z_2 \wedge \mathcal{Im}\, z_1 = \mathcal{Im}\, z_2) \Leftrightarrow (|z_1| = |z_2| \wedge \arg z_1 = \arg z_2)$$

Preso un numero intero $n \geq 1$ e un numero complesso $\omega = \rho e^{i\varphi}$, si vuole trovare quel numero complesso $z = re^{i\vartheta}$ che risolva l'equazione:

$$z^n = \omega$$

Chiaramente si suppone $\omega \neq 0$ in quanto altrimenti la soluzione sarebbe $z = 0$. Quindi si ha:

$$z^n = r^n e^{in\vartheta} = \rho e^{i\varphi} = \omega$$

Il che accade solo se:

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \forall k \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \vartheta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \forall k \in Z \end{cases}$$

Infine, si conclude che la radice di un numero reale è:

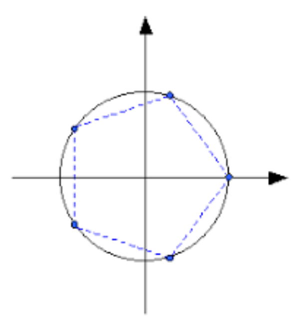
$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|\omega|}e^{\frac{1}{n}i(\arg\omega + 2k\pi)}$$

Con $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Poiché l'argomento di un numero complesso è un insieme di valori, la radice n-esima di un numero complesso è un insieme di valori dato da:

$$\sqrt[n]{\omega} = \{z_k \in C : z_k\}$$

Tali punti si trovano sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e sono i vertici di un poligono regolare di n lati. Nel caso di $n = 5$:



Nel caso in cui $n = 2$ si può notare che il numero complesso che risolve l'equazione quadratica non deve necessariamente essere positivo, come nel campo dei numeri reali:

$$z^2 = \omega$$

Inoltre, considerato un $n \geq 1$ le equazioni del tipo $z^n = 1$, dette radici n-esime dell'unità, hanno soluzioni:

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 1, 2, 3 \dots n - 1$$

Considerando che $1 = 1\ e^{i0}$.

Si noti che per n dispari la radice reale è una sola, mentre per n pari le radici sono due:

$$z_0 = 1 \Leftrightarrow n = 2h + 1$$

$$z_0 = 1 \land\ z_{n/2} = -1 \Leftrightarrow n = 2h$$

Considerando un equazione di secondo grado con coefficienti complessi $a, b, c \in C$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\left[2a\left(z + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 = b^2 - 4ac$$

$$2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

In generale la soluzione di un'equazione di secondo grado a termini e coefficienti complessi è:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sapendo che $\sqrt{b^2 - 4ac}$ indica uno di quei numeri complessi che risolve l'equazione $z_0^2 = b^2 - 4ac$. Considerando le due soluzioni dell'equazione è possibile dimostrare come il polinomio associato sia scomponibile nel prodotto di fattori lineari:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \land z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

È importante notare come questa scomposizione, nel campo dei numeri complessi, sia sempre possibile, mentre nel campo dei numeri reali è necessario un discriminante positivo. Dunque, tale semplificazione può essere generalizzata a polinomi di grado n.

ENUNCIAZIONE TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ipotesi:

$\forall n \in N: n \geq 2, \forall k \in N: k < n$

$\forall P(k) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 : a_k \in C$

Tesi:

$\exists z_n, z_{n-1}, \dots, z_1, z_0 \in C : \; P(k) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n)$

Sia considerata l'equazione:

$$z^2 = -1$$

Che aveva fatto sorgere la **necessità di ampliare il campo reale**. Ci si aspetta che le **soluzioni** di questa equazione siano **i** e **-i**, infatti, sapendo che $\boldsymbol{-1 = 1e^{i\pi}}$**:**

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \;\wedge z_1 = e^{i\frac{\pi + 2\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$