METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Prof. De Maio Umberto – A.A. 2023/24

INDICE DEGLI ARGOMENTI

ANALISI COMPLESSA

ANALISI FUNZIONALE

ANALISI COMPLESSA

IL CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI

Un'equazione del tipo:

$$x^n = a \ \forall a < 0, n = 2k \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Non ha soluzione nel campo reale; per darle soluzione bisogna **ampliare il campo dei numeri reali**, creando un nuovo campo e dandogli una **struttura**. Si prenda un **sottoinsieme di** $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ e si definiscano le seguenti **operazioni** e **proprietà** $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) + (0,0) = (x, y)$$

$$(x, y) - (x, y) = (0,0)$$

$$(x, y) \cdot (1,0) = (x, y)$$

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1,0)$$

Inoltre, **valgono le proprietà commutativa e associativa della somma** (visto che esistono l'elemento neutro $(0,0)$, l'opposto $(-x, -y)$ e perché $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano), **del prodotto escluso** $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (perché esistono l'elemento neutro $(1,0)$, l'opposto $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ e perché $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano) **e la proprietà distributiva del prodotto**. Ciò significa che **la struttura algebrica** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **è un campo**, in particolare viene detto **campo dei numeri complessi**.

Così costruito, $\mathbb{C}$ **è un ampliamento del campo dei numeri reali**, deve contenere in esso tutti i numeri di tale campo; ma come può accadere che **un valore monodimensionale** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ **sia associato ad un valore bidimensionale** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{C}$? Bisogna introdurre un **isomorfismo** che permetta ciò. Per definizione un isomorfismo tra due campi:

$$(S, +, \cdot) \approx (S', \tilde{+}, \tilde{\cdot}) \Leftrightarrow \exists f : S \to S' : f \text{ è biettiva} \wedge f(x + y) = f(x) \tilde{+} f(y) \wedge f(x \cdot y) = f(x) \,\tilde{\cdot}\, f(y)$$

Ma **considerando** $\mathbb{C}_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ **è un sottocampo di** $\mathbb{C}$, allora **l'applicazione**:

$$f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{R} : f(a, 0) = a$$

È un isomorfismo che permette di associare ad un numero complesso un numero reale.

Si può dimostrare come, **contrariamente al campo dei numeri reali, il campo complesso non è ordinabile**; un campo $(S, +, \cdot)$ è ordinabile se esiste una relazione d'ordine compatibile con le operazioni definite su di esso tale che:

1. $x \leq y \wedge z \in S \Longrightarrow x + z \leq y + z$

2. $x \leq y \wedge z \in S : 0 \leq z \Longrightarrow xz \leq yz$

Ma per il campo complesso questa relazione d'ordine non può esistere. Una conseguenza della non ordinabilità di $\mathbb{C}$ è l'**assenza di analoghi a** $\pm\infty$, in $\mathbb{R}^2$ è possibile definire un surrogato, detto punto all'infinito, ma non è equivalente all'infinito:

$$\lim_{\underline{x}\to\infty} f(\underline{x}) = \lim_{\|\underline{x}\|\to\infty} f(\underline{x})$$

DIMOSTRAZIONE NON ORDINABILITÀ DI $\mathbb{C}$

Ipotesi:

$\forall(\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo dei numeri complessi

Tesi:

$\nexists \leq$ relazione d'ordine compatibile con le operazioni $+$ e $-$

Dimostrazione:

Si supponga, per assurdo, che $\mathbb{C}$ sia ordinabile, allora esiste una relazione d'ordine compatibile con le operazioni del campo per cui:

$$i = (0,1) > 0$$

Allora:

$$i \cdot i = i^2 = (-1,0) > 0$$

Ma poiché il prodotto di due numeri positivi è un numero positivo:

$$-i = (-1,0) \cdot i > 0$$

Ma è un assurdo perché un numero non può essere concorde al suo opposto. Si raggiunge l'assurdo che desume dal fatto che si è supposto $\mathbb{C}$ un campo ordinabile; si potrà sempre definire una relazione d'ordine sul campo ma essa non sarà mai compatibile con le sue operazioni.

CVD

Sia invece considerato il seguente **insieme**:

$$\mathbb{C}_I = \{(0, y) \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{C}$$

Per quest'ultimo insieme **non vale la stabilità della moltiplicazione**, infatti **il prodotto di due numeri $(\mathbf{0}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{I}}$ è un numero $(-\boldsymbol{c}, \mathbf{0}) \in \mathbb{C}_{\mathbf{0}}$**; questa proprietà permette di **definire un numero, chiamato unità immaginaria, per cui ogni numero di $\mathbb{C}_{\mathbf{0}}$ moltiplicato per esso diventa un numero di $\mathbb{C}_{\boldsymbol{I}}$**, ovvero:

$$(0, y) = i(y, 0) = (0,1)(y, 0)$$

Dove $i = (0{,}1)$. **Elevando l'unità immaginaria al quadrato**:

$$i^2 = (-1{,}0)$$

Ma con questo risultato si può risolvere il problema iniziale, infatti:

$$x^2 = -a, \forall a > 0$$

$$x = \sqrt[2]{-a} = i\sqrt[2]{a}$$

Che è un'equazione che **ha soluzione nel campo dei numeri complessi**. Da ciò si può dire che **ogni numero complesso (x, y) può essere scomposto in due parti**:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy$$

Questa forma viene detta **forma algebrica di un numero complesso** e divide il numero in una parte reale (x) e una parte immaginaria (y), la quale viene definita come *i* volte il numero reale y.

Si definisce **numero complesso coniugato di $z = x + iy$ quel numero complesso che ha la stessa parte reale di z ma parte immaginaria cambiata di segno**:

$$z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$$

Si può osservare come un complesso coniugato sia uguale al suo numero complesso corrispondente solo quando i due numeri sono reali:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow iy = 0 \Leftrightarrow z = x = \bar{z} \in \mathbb{R}$$

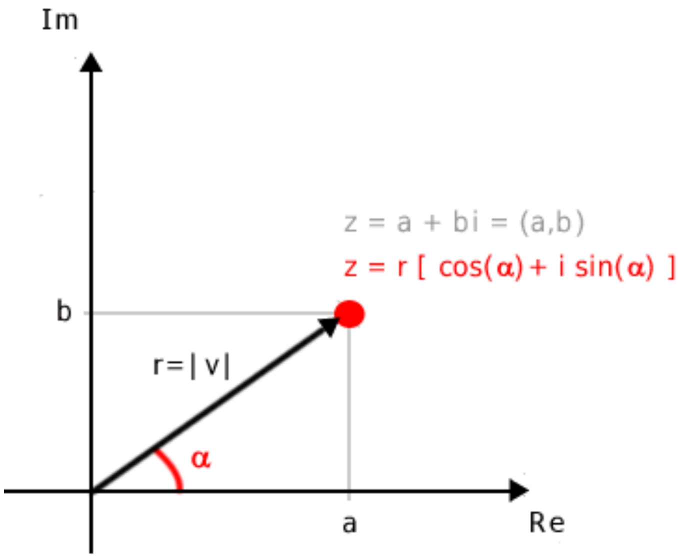
Mentre **il modulo di un numero complesso si definisce come la radice della somma dei quadrati delle sue due parti**:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Di seguito sono mostrate le **proprietà del modulo di un numero complesso e del complesso coniugato**:

1. $|z| > 0\ \forall z = x + iy \wedge |z| = 0 \Leftrightarrow z = (0{,}0)$
2. $|z| = |\bar{z}|\ \forall z \in \mathbb{C}$
3. $\big||z_1| \pm |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| \pm |z_2|\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (disuguaglianza triangolare)
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (il coniugo è lineare rispetto alla somma)
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (il coniugo è lineare rispetto al prodotto)
7. $|Re(z)| \leq |z| \geq |Im(z)|$
8. $z + \bar{z} = (x + x) + i(y - y) = 2x \Longrightarrow Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
9. $z - \bar{z} = (x - x) + i(y + y) = 2iy \Longrightarrow Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
10. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

I numeri reali sono numeri monodimensionali, ovvero li si può rappresentare su una retta orientata; di contro, **i numeri complessi hanno due componenti**, sono numeri bidimensionali e per rappresentarli bisogna introdurre un **piano cartesiano**, detto piano complesso o **piano di Gauss**, che ha sull'asse delle **ascisse** la **retta reale** e sull'asse delle **ordinate** la retta dei numeri reali moltiplicati per l'unità immaginaria, detta **retta immaginaria**:



Il piano di Gauss **permette di associare ad un punto del piano $P(x, y)$ un numero complesso (x, y)**. Con la rappresentazione grafica dei numeri complessi si può introdurre anche la **forma trigonometrica**, infatti prendendo un numero reale **ρ, detto lunghezza**, e **un angolo, definito a meno di 2π, θ**, si può scrivere un numero complesso come:

$$z = (x, y) \Leftrightarrow (\rho, \theta) : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e $\theta = \arg z$. Oppure:

$$z = x + iy \Leftrightarrow z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Poiché non si stanno alterando i numeri, **le proprietà e le operazioni scritte finora devono essere valide anche in forma trigonometrica**, $\forall z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), z' = \rho'(\cos \theta' + i \sin \theta')$:

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Definita formula di **De Moivre** e ottenuta per induzione ($z \cdot z \cdot ... \cdot z$ n volte)

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]} = \rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)] = \rho^n[\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)}{\rho'(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

Per le **radici** si lavora applicando la **formula di De Moivre inversa**:

$$\exists w \in \mathbb{C} : z^n = w \Longrightarrow z = \sqrt{w}$$

Dove $z = [\rho, \theta]$ e $w = [\rho', \theta']$, quindi:

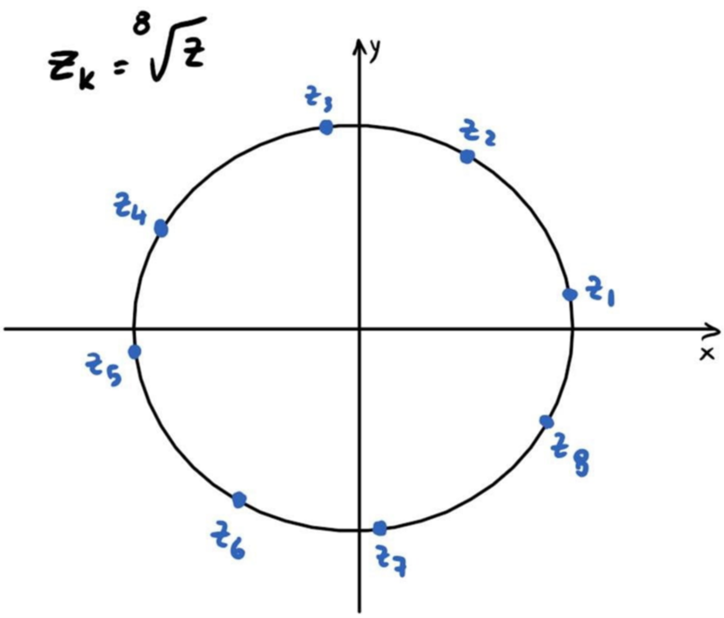
$$\rho = (\rho')^n \Longrightarrow \rho' = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\theta = n\theta' + 2k\pi \Longrightarrow \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Da cui:

$$\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

Il campo dei numeri complessi, a differenza di quello dei numeri reali, **è algebricamente chiuso**, il che significa che **un polinomio di grado *n* ha *n* radici**; per ottenere gli n numeri complessi in questione si scelgono i k tra 0 e $n - 1$ (per gli indici successivi le radici si ripetono), mentre due radici sono uguali se esistono due costanti k_1, k_2: $\frac{\theta+2k_1\pi}{n} = \frac{\theta+2k_2\pi}{n} = 2h\pi$. Quando la radice è di ordine $n \geq 3$, **le radici individuano** nel piano di Gauss i vertici di **un poligono regolare**, giacenti sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$:



Finora non è stato detto nulla sull'angolo di un numero complesso relativo alla sua rappresentazione trigonometrica se non che esso è definito a meno di 2π; questa sua proprietà rende la determinazione dell'angolo un argomento delicato, in quanto **ad un numero complesso possono essere associati infiniti angoli, tutti distanti di 2π** (mentre ad un angolo si associa un solo numero complesso). Si definisce **argomento di un numero complesso *z* l'insieme di angoli che possono essere associati a quel numero complesso, mentre l'argomento principale è quell'angolo compreso tra $(-\pi, \pi]$**:

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi : z = [\rho, \theta + 2k\pi], \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta \in (-\pi, \pi] : z = [\rho, \theta]\}$$

Se **l'argomento principale è un valore univoco**, **l'argomento** di un numero complesso non può essere ridotto ad un solo angolo perché è **un insieme infinito di angoli**.

Intuitivamente, l'argomento di un numero complesso potrebbe essere calcolato con l'arcotangente del rapporto tra parte reale e parte immaginaria, ma non sempre si ricade in questi casi, dal momento in cui la tangente non è una funzione invertibile in tutto il suo dominio. Si possono però fare le seguenti considerazioni:

$$\arg(x+iy)=\begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow x>0 \\ \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=0 \wedge y>0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi \Leftrightarrow x<0 \wedge y>0 \\ -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=0 \wedge y<0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)-\pi \Leftrightarrow x<0 \wedge y<0 \\ \text{indefinito} \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \end{cases}$$

Sia considerata il prodotto di due numeri complessi e ne sia analizzato l'argomento:

$$zz'=\rho\rho'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$$

$$\arg zz'=\arg z+\arg z'$$

Ma ciò non vale per l'argomento principale, perché non si può sapere se la somma di due argomenti principali è ancora un angolo contenuto in $(-\pi,\pi]$. Analogamente:

$$\arg\frac{z}{z'}=\arg z-\arg z'$$

Da cui:

$$\arg\bar{z}=\arg\frac{1}{z}=\arg 1-\arg z=-\arg z$$

$$\arg z\bar{z}=\arg 1=\arg|z|^2=0$$

Infatti, $|z|^2$ è un numero reale.

Dei seguenti numeri complessi l'argomento principale (e di conseguenza anche l'argomento) è notevole, pur derivando dalle relazioni sopra scritte:

- $z=x\in\mathbb{R}$
  - $x>0\Longrightarrow \operatorname{Arg} z=0$
  - $x<0\Longrightarrow \operatorname{Arg} z=\pi$
- $z=iy\in\mathfrak{Im}$
  - $y>0\Longrightarrow \operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}$
  - $y<0\Longrightarrow \operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{2}$
- $z=x+iy,\bar{z}=x-iy\Longrightarrow \arg z=-\arg\bar{z}$

L'**identità di Eulero** permette di definire una nuova rappresentazione dei numeri complessi:

$$e^{x+iy}\stackrel{\text{def}}{=}e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

Da cui:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

$$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \rho e^{-i\theta}$$

Detta **forma esponenziale di un numero complesso**. Come per la forma trigonometrica, **si conservano le operazioni e le proprietà** dei numeri complessi:

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$|e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = e^x = e^{Re(z)}$$

Come conseguenza dell'identità di Eulero:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \wedge \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

SPAZI METRICI E TOPOLOGIA SU DI ESSI

Sia considerato un **insieme non vuoto**, $S \neq \emptyset$,ed una **funzione distanza**, $d: S \times S \to \mathbb{R}^+$, si definisce **spazio metrico** la struttura algebrica composta da queste due entità, (S, d), tale che:

1. $d(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in S^2$;
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$;
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un esempio di funzione **distanza** è quella **euclidea**, applicata all'insieme $S = \mathbb{R}$:

$$d(x,y) = |x - y|$$

Ma non è l'unica possibile. Si definisce **diametro dello spazio metrico** l'estremo superiore di tutte le distanze:

$$\operatorname{diam} S = \sup_{(x,y)\in S^2} \big(d(x,y)\big) \geq 0$$

In base al diametro dello spazio **si differenziano**:

- Spazi metrici **limitati**, diam $S \in \mathbb{R}^+$;
- Spazi metrici **illimitati**, diam $S = +\infty$.

La definizione di limitatezza di uno spazio metrico viene scritta in funzione della funzione distanza in considerazione; quindi, è dipendente da essa; ciò significa che **uno spazio metrico può essere limitato su una funzione distanza *d* ma illimitato su una funzione distanza *d'***. Se **sull'insieme *S* è possibile definire uno spazio metrico** con una funzione distanza *d*, **lo si può definire anche su un qualsiasi sottoinsieme di *S*** in relazione alla stessa funzione *d*; in questa sede si studieranno elementi dello spazio metrico $(\mathbb{C}, d)$, dove d è la distanza euclidea, e si può mostrare essere illimitato (diam $\mathbb{C} = +\infty$).

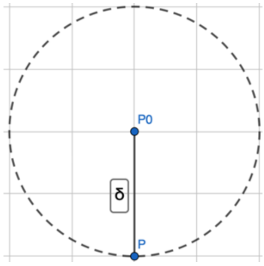
$$d(z_1, z_2) = \sqrt{\left(Re(z_1) - Re(z_2)\right)^2 + \left(Im(z_1) - Im(z_2)\right)^2} = |z_1 - z_2|$$

Preso in considerazione lo spazio metrico $(\mathbb{C}, d)$, di seguito sono riportate delle definizioni topologiche su di esso. Si definisce **intorno sferico di raggio $\boldsymbol{r}$ e centro $\boldsymbol{z_0}$** $\in \mathbb{C}$:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\bar{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) \leq r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

$$B_r^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\} : d(z, z_0) \leq r\} = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\} : |z - z_0| < r\}$$



L'unica differenza che intercorre tra le prime due definizioni è che nella prima l'insieme è aperto, nella seconda è chiusa, mentre nella terza definizione si esclude il centro dell'intorno, che viene definito bucato. In generale:

$$\forall U \subseteq \mathbb{C}, U \text{ è un intorno di } z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists B_r(z_0) \subseteq U$$

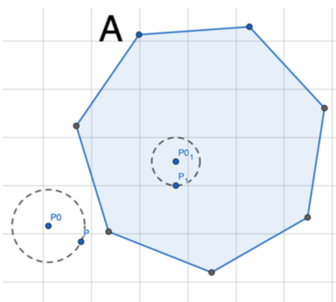
Sia considerato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$:

$$\forall A \subseteq \mathbb{C}, A \text{ è un insieme aperto} \Leftrightarrow \forall z_0 \in A\ \exists B_r(z_0) \subseteq A$$

Mentre un punto di un insieme aperto $z_0 \in A$:

$$z_0 \in A \text{ è un punto interno di } A \Leftrightarrow \exists U(z_0) \subseteq A$$

Ovviamente **un punto è esterno se non è un punto interno**.



Dalla seguente definizione si può anche ottenere un modo alternativo di descrivere un **insieme aperto**:

$$\dot{A} \text{ è parte interna di } A \Leftrightarrow \dot{A} = \{z_0 \in A : z_0 \text{ è punto interno di } A\}$$

$$A \text{ è un insieme aperto} \Leftrightarrow A = \dot{A}$$

Sia considerata una **famiglia di aperti**, $\forall A_\alpha : A_\alpha$ è aperto $\forall \alpha \in I$ dove ***I* è un insieme di indici**, valgono le seguenti proposizioni:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ è un insieme **aperto**;
2. $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ è un insieme **aperto** $\Leftrightarrow$ **la famiglia di aperti è finita** (ovvero se I ha cardinalità finita).

Sia considerato un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{C}$:

$$\forall A \subseteq \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C} \text{ è un punto di accumulazione} \Leftrightarrow \forall U(z_0), A \cap U(z_0) \backslash \{z_0\} \neq \emptyset$$

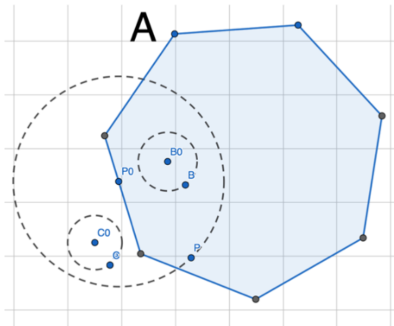
Mentre:

$$DA \text{ è l'insieme derivato di } A \Leftrightarrow DA = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_0 \text{ è un punto di accumulazione per } A\}$$

Con i punti di accumulazione si possono dare altre definizioni:

$$\forall A \subseteq \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C} \text{ è un punto di frontiera per A} \Leftrightarrow \forall U(z_0)\ \exists z_I, z_E \in U(z_0) \\ : z_I \text{ è punto interno } \wedge z_E \text{ è punto esterno}$$

$$\partial A \text{ è frontiera di } A \Leftrightarrow \partial A = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_0 \text{ è un punto di frontiera}\}$$



Sommariamente, **un punto di $\mathbb{C}$ (non necessariamente di *A*) è un punto di frontiera per *A* se esso è un punto di accumulazione per *A***; tuttavia, questa definizione non è del tutto accurata perché **esistono punti di frontiera che non sono punti di accumulazione**, ovvero i **punti isolati**:

$$\forall A \subseteq \mathbb{C}, z_0 \in A \text{ è un punto isolato di } A \Leftrightarrow \exists U(z_0) : A \cap U(z_0) \backslash \{z_0\} = \emptyset \Leftrightarrow z_0 \notin DA$$

Se tutti i punti di frontiera per un insieme sono punti dell'insieme stesso allora esso si dice **chiuso**:

$$B \subseteq \mathbb{C} \text{ è chiuso} \Leftrightarrow \partial B \subseteq B$$

In realtà la definizione originaria di insieme chiuso è la seguente:

$$B \subseteq \mathbb{C} \text{ è chiuso} \Leftrightarrow \mathbb{C} \backslash B \text{ è aperto}$$

Preso un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{C}$, si definisce la sua **chiusura**:

$$\bar{B} \text{ è la chiusura di } B \Leftrightarrow \bar{B} = B \cup \partial B$$

Di conseguenza, unendo questa definizione alla prima definizione data di chiusura:

$$B \text{ è chiuso} \Leftrightarrow \bar{B} = B$$

Ma le definizioni sono equivalenti. Sia considerata **una famiglia di chiusi**, $\forall B_\alpha : B_\alpha$ è chiuso $\forall \alpha \in I$ dove I è un insieme di indici, valgono le seguenti proposizioni:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ è un insieme **chiuso** $\Leftrightarrow$ **la famiglia di aperti è finita** (ovvero se I ha cardinalità finita);
2. $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ è un insieme **chiuso**.

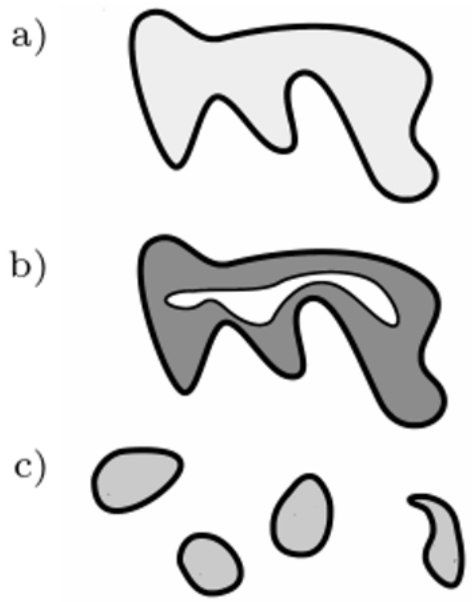
Si passa ora a definire il concetto di **connessione** per un insieme:

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ è un insieme connesso} \Leftrightarrow \text{non è l'unione di due aperti non vuoti disgiunti}$$

Questa definizione può essere semplificata:

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ è un insieme connesso} \Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in A\ \exists \varphi: [a,b] \to A :\ \varphi \subseteq A \text{ è continua} \wedge\ \varphi(a) = z_1 \wedge \varphi(b) = z_2$$

Ovvero, **un insieme A è connesso se, comunque presi due suoi punti, esiste una curva continua completamente contenuta in A che congiunga i due punti**; questa definizione viene detta definizione di **connessione per cammini**.



In questo caso, **solo i primi due esempi sono insiemi connessi**, in particolare il primo viene detto semplicemente connesso ma la sua definizione è rimandata ad un momento più opportuno.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ può essere di tre tipi:

1. A è **limitato** $\Leftrightarrow \forall z_0 \in A\ \exists B_r(z_0) : A \subseteq B_r(z_0)$;
2. A è **compatto** $\Leftrightarrow$ è un insieme chiuso e limitato;
3. A è **sequenzialmente compatto** $\Leftrightarrow \forall z_0 \in A, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A :\ \exists \left(z_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to z_0$

In realtà, in spazi metrici a dimensione finita queste ultime due definizioni sono **equivalenti**.

FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

Per **successione complessa** si intende una **successione numerica che ha valori nel campo complesso**:

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$$

Quindi un'applicazione del tipo:

$$f: [a, +\infty) \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

Una successione complessa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **convergente in un punto z_0** $\in \mathbb{C}$ se:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0, |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Mentre si dice che essa **diverge se**:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0, |z_n| > M$$

Ovvero, se $z_n \in B_R(+\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Come nel caso reale, **vale il teorema di unicità** e sono estendibili le **proprietà di linearità del limite**.

Per **funzione complessa** definita su un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ si intende un **applicazione del tipo**:

$$f: z \in A \subseteq \mathbb{C} \to w = f(z) \in \mathbb{C}$$

Sia *z* che *w* sono numeri complessi, quindi possono essere espressi in **forma algebrica**; tuttavia, poiché il valore di *w* dipende dalle parti reale e immaginaria di *z*, **si può esprimere la funzione e le sue parti algebriche come funzioni in due variabili**:

$$z = (x, y) = x + iy \Longrightarrow w = f(x, y) = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

Da cui:

$$Re\big(f(z)\big) = u(x, y) \wedge Im\big(f(z)\big) = v(x, y)$$

Le funzioni complesse sono un particolare tipo di funzione matematica; infatti, **si possono comportare sia come funzioni in una variabile che come funzioni in due variabili**; un esempio di questa ambivalenza è il limite di funzione complessa $\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in D(A)$:

$$\lim_{z\to z_0} f(x) = l \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists U(z_0) :\ \forall z \in A \cap U(z_0)\backslash\{z_0\}, |f(z) - l| < \varepsilon$$

Poiché l'espressione $U(z_0)\backslash\{z_0\}$ è equivalente a quella di un intorno bucato:

$$\lim_{z\to z_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B_R^*(z_0) :\ \forall z \in B_R^*(z_0) \cap A, |f(z) - l| < \varepsilon$$

Tuttavia, essendo $f(z = x + iy) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, il **limite di una funzione complessa per $z \to z_0$ si riduce ad un limite di una funzione in due variabili per $(x, y) \to (x_0, y_0)$**, per cui valgono le stesse proprietà. Ad esempio, presa la funzione:

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}, \text{con } z \to 0$$

Per dimostrare che il limite esiste ed è uguale ad un certo valore $l \in \mathbb{C}$ si devono prendere in considerazione almeno due direzioni e dimostrare che il limite lungo esse è lo stesso, in tal caso infatti il limite esisterebbe e sarebbe unico. Prendendo come direzioni quelle lungo i due assi:

$$\begin{cases} x = 0 \to \lim\limits_{y \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1 \\ y = 0 \to \lim\limits_{x \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

Dimostrando che il limite non esiste per $z \to 0$. Proprio come nel caso reale, **vale la linearità dell'operazione**, quindi il limite di una combinazione lineare è una combinazione lineare di limiti, e il **teorema di esistenza e unicità**. Per quanto riguarda il cambiamento in coordinate polari, per le funzioni complesse si possono fare tutte le considerazioni fatte sui limiti di funzioni in due variabili.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CALCOLO DEL LIMITE COMPLESSO

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\forall z_0 \in D(A)$

Tesi:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(w) \\ \lim\limits_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(w) \end{cases}$$

Dimostrazione:

Siano considerate le seguenti implicazioni:

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(w) \\ \lim\limits_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(w) \end{cases}$

Poiché la dimostrazione per la parte reale è equivalente a quella per la parte immaginaria, di seguito è proposta solo una delle due. Bisogna dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_R^*(z_0) : \ \forall z \in B_R^*(z_0) \cap A, \left|Re(f(z)) - Re(w)\right| < \varepsilon$$

Ma sapendo che:

$$\left|Re(f(z)) - Re(w)\right| \leq |f(z) - w| < \varepsilon$$

Da cui segue la validità della tesi.

- $\begin{cases} \lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(w) \\ \lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(w) \end{cases} \Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w$

Per ipotesi, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists B^*_{\delta_1}(z_0) : \forall z \in B^*_{\delta_1}(z_0) \cap A, |Re(f(z)) - Re(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists B^*_{\delta_2}(z_0) : \forall z \in B^*_{\delta_2}(z_0) \cap A, |Im(f(z)) - Im(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se però si prende un intorno bucato di z_0 con raggio $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, valgono contemporaneamente le due proposizioni sopra elencate, ma poiché:

$$|f(z) - w| \leq |Re(f(z)) - Re(w)| + |Im(f(z)) - Im(w)| < \varepsilon$$

Vale la seguente proposizione:

$$\exists B^*_R(z_0) : \forall z \in B^*_\delta(z_0) \cap A, |f(z) - w| < \varepsilon$$

Da cui segue la validità della tesi.

CVD

Anche per le **funzioni complesse** si può dare la definizione di **continuità**: presa una funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, essa si dice **continua in un punto $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{A}$** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists B^*_R(z_0) : \forall z \in B^*_R(z_0) \cap A, |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Se il punto $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D(A)}$, ovvero se è un punto di accumulazione, la definizione di continuità si presenta come segue:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Da questa definizione **si può banalmente affermare che nei punti isolati una funzione è continua** e che essa è detta **continua in *A* se è continua $\forall \boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{A}$**. Infine, si può tranquillamente **estendere la linearità della continuità al campo complesso**, infatti somma, prodotto e rapporto di funzioni complesse continue sono ancora funzioni continue.

È necessario anche definire un concetto analogo alla derivabilità per il campo complesso; tuttavia, le due definizioni non si andranno completamente a sovrapporre. Presa una funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dove ***A* è un insieme aperto**, e un punto $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{A}$, si dice che la funzione ***f* è derivabile in senso complesso nel punto $\boldsymbol{z_0}$ se esiste ed è finito il seguente limite**:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

Nel momento in cui **la funzione è derivabile in senso complesso in tutti i punti di *A***, la si può definire **olomorfa in *A*** (oppure derivabile in senso complesso in *A*):

$$f \in H(A)$$

Dove con $\boldsymbol{H(A)}$ si intende l'**insieme di funzioni olomorfe nell'aperto $\boldsymbol{A}$**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto

$\forall z_0 \in A$

f è derivabile in z_0

Tesi:

f è continua in z_0

Dimostrazione:

Considerando $h = z - z_0$, va dimostrato che la funzione è continua nel punto z_0, ovvero:

$$\lim_{z \to z_0} \big(f(z) - f(z_0)\big) = 0$$

Moltiplicando e dividendo per la stessa quantità ed effettuando il cambiamento di variabile precedentemente mostrato:

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)\right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot h\right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

CVD

Come nel caso reale, questo teorema rappresenta una **condizione necessaria ma non sufficiente**, infatti non basta dire che una funzione è continua per affermare la sua olomorfia ma **basta dire che non è continua in un punto per poter automaticamente dire che essa non è olomorfa**.

Per introdurre il concetto di **differenziabilità nel campo complesso** è dapprima utile analizzare i **simboli di Landau**, in particolare il concetto di **infinitesimo di ordine superiore**:

$$f(z) = o\big(g(z)\big) \text{ con } z \to z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

E si può enunciare come "f è un infinitesimo di ordine superiore a g per z che tende a z_0". Allora sia considerata una funzione **$\boldsymbol{f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A}$ è un aperto, $\boldsymbol{f}$ è differenziabile nel punto $\boldsymbol{z_0 \in A}$ se**:

$$\exists a \in \mathbb{C} : \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{h} = 0$$

In questo caso **la funzione si comporta come funzione in una variabile**; pertanto, è possibile dimostrare una proprietà analoga a quella dimostrata nel campo reale circa la **relazione tra derivabilità e differenziabilità**.

DIMOSTRAZIONE RELAZIONE TRA DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto

$\forall z_0 \in A$

Tesi:

f è differenziabile in $z_0 \Leftrightarrow f$ è derivabile in z_0

Dimostrazione:

Siano considerate le seguenti implicazioni:

- f è differenziabile in $z_0 \Longrightarrow f$ è derivabile in z_0

Se la funzione è differenziabile, allora:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=a$$

Ma quello è anche il limite del rapporto incrementale, quindi:

$$f'(z_0)=a$$

- f è derivabile in $z_0 \Longrightarrow f$ è differenziabile in z_0

Se la funzione è derivabile, allora:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-f'(z_0)\right]=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h}{h}=0$$

Che è la definizione di differenziabilità se $f'(z_0)=a$.

CVD

Come conseguenza di questo teorema, si può aggiornare la definizione di differenziabilità:

$$f \text{ è differenziabile in } z_0 \in A \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h}{h} = 0$$

$$f \text{ è differenziabile in } z_0 \in A \Leftrightarrow f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h = o(h)$$

Le tre definizioni sopra mostrate per la differenziabilità sono equivalenti; tuttavia, quella rigorosa e da cui discendono le varie considerazioni fatte è la prima.

In base a quanto detto in precedenza, **la funzione complessa di variabile complessa può essere anche vista come funzione somma di due funzioni in due variabili**:

$$f(z = x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Essa viene detta **continua in un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ se sono continue le parti reale ($u(x,y)$) e immaginaria ($v(x,y)$) nel punto** (x_0, y_0) ma non è differenziabile se sono differenziabili le due parti, non basta verificare questa condizione perché **la differenziabilità cambia quando si aumenta il numero di variabili**:

$$u \text{ è differenziabile in } z_0 \in A \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^2 : u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) - \langle a,(h,k)\rangle = o(\|(h,k)\|)$$

E si potrebbe dimostrare che $a = \nabla u(x,y)$. Nonostante la somiglianza, **le due definizioni sono diverse**, come sono diverse anche le considerazioni da fare su di esse: in più variabili **non si può affermare l'equivalenza tra differenziabilità e derivabilità** ma solo associarvi il gradiente della funzione. Pertanto, sorge la necessità di fornire un ponte tra la differenziabilità di funzioni in una e due variabili, nel campo complesso.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge f(z = x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$\forall z_0 \in A$

Tesi:

f è derivabile in $z_0 \Leftrightarrow u, v$ sono differenziabili in $z_0 \wedge \left(u_x = v_y \wedge u_y = -v_x\right)$

Dimostrazione:

Siano considerate le seguenti implicazioni:

- f è derivabile in $z_0 \Longrightarrow u, v$ sono differenziabili in $z_0 \wedge \left(u_x = v_y \wedge u_y = -v_x\right)$

Per ipotesi la funzione è derivabile, quindi differenziabile:

$$f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h = o(h)$$

Ma $o(h)$ è comunque una quantità complessa, composta da una parte immaginaria e una reale:

$$o(h) = o(h_1, h_2) + i\, o(h_1, h_2)$$

Chiamando $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $u = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ e $v = v(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (u - u_0) + i(v - v_0)$$

E chiamando $a = Re\big(f'(z_0)\big)$ e $b = Im\big(f'(z_0)\big)$:

$$f'(z_0)h = ah_1 + iah_2 + ibh_1 - bh_2 = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1)$$

Con quanto detto finora la definizione di differenziabilità può aggiornarsi (per $(h_1, h_2) \to (0{,}0)$):

$$(u - u_0) + i(v - v_0) = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1) + o(h_1, h_2) + i\, o(h_1, h_2)$$

Ma due numeri complessi sono uguali se coincidono le rispettive parti reale e immaginaria:

$$\begin{cases} u - u_0 = ah_1 - bh_2 + o(h_1, h_2) \\ v - v_0 = ah_2 + bh_1 + o(h_1, h_2) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} u = u_0 + \langle (a, -b), (h_1, h_2) \rangle + o(h_1, h_2) \\ v = v_0 + \langle (b, a), (h_1, h_2) \rangle + o(h_1, h_2) \end{cases}$$

Le due espressioni sopra elencate coincidono con la definizione di differenziabilità di funzioni in due variabili, quindi:

$$\begin{cases} \nabla u(x, y) = (a, -b) \\ \nabla v(x, y) = (b, a) \end{cases}$$

Da cui discendono le condizioni di Cauchy – Riemann:

$$u_x = u_y \wedge u_y = -v_x$$

- u, v sono differenziabili in $z_0 \wedge \big(u_x = v_y \wedge u_y = -v_x\big) \Longrightarrow f$ è derivabile in z_0

Riferendosi alla stessa nomenclatura usata nella precedente dimostrazione:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= (u - u_0) + i(v - v_0) \\ &= \langle (a, -b), (h_1, h_2) \rangle + o(h_1, h_2) + i\big(\langle (b, a), (h_1, h_2) \rangle + o(h_1, h_2)\big) \\ &= (a + ib)h_1 + (-b + ia)h_2 + o(h) = (a + ib)(h_1 + ih_2) + o(h) = \alpha h + o(h) \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \alpha h + o(h)$$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = o(h)$$

Che coincide con la definizione di differenziabilità. Quindi, per $h \to 0$, si può affermare che:

$$\alpha = f'(z_0)$$

Ma poiché $\alpha = a + ib$:

$$f'(z_0) = u_x(x,y) - iu_y(x,y) = v_y(x,y) + iv_x(x,y) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

CVD

La seconda delle condizioni che dimostrano il teorema è detta **condizione di Cauchy – Riemann** e coincide con l'affermare che: $\boldsymbol{\nabla u(x,y) = (v_y, -v_x)}$ **e** $\boldsymbol{\nabla v(x,y) = (-u_y, u_x)}$. Essa è una **condizione necessaria**, quindi non si può dire che una funzione è derivabile in senso complesso se non sono rispettate le condizioni di Cauchy – Riemann; inoltre, **il teorema permette di determinare in modo semplice la derivata della funzione *f***, come mostrato nella dimostrazione.

Le condizioni di Cauchy – Riemann sono condizioni necessarie affinché una funzione possa essere olomorfa, ad esempio la funzione radice non è olomorfa, nonostante le parti reale e immaginaria siano di classe di continuità C^∞, perché non valgono le condizioni sopra elencate. Osservando l'uguaglianza che tale condizione impone tra i gradienti delle funzioni:

$$\nabla u(x,y) = (u_x, u_y) = (v_y, -v_x)$$

Si può notare che **tra il gradiente della parte immaginaria di una funzione olomorfa è pari al gradiente della parte reale ruotato di $\boldsymbol{\pi}$/2 secondo la matrice di rotazione**:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Che a $\vartheta = \pi/2$ è:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$J \cdot \nabla v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (v_x, -v_y) = \nabla u(x,y)$$

Un'altra prova di questa relazione è data dalla **norma dei gradienti**, **uguale in entrambi i casi alla norma della derivata della funzione**:

$$\|\nabla u(x,y)\| = \|\nabla v(x,y)\| = \sqrt{u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)} = \sqrt{v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y)} = \|f'(z)\|$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI FUNZIONE A DERIVATA NULLA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso $\wedge\, f \in H(A)$

$f'(z) = 0, \forall z \in A$

Tesi:

$f(z) = k \in \mathbb{C}, \forall z \in A$

Dimostrazione:

Poiché la funzione è olomorfa, la sua derivata potrà essere espressa in funzione delle condizioni di Cauchy – Riemann:

$$f'(z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y) = 0$$

Ciò significa che:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_x(x,y) = 0 \\ v_y(x,y) = u_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla u(x,y) = \nabla v(x,y) = 0$$

Ovvero che le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$, parte reale e immaginaria di *f*, sono funzioni costanti:

$$f(z) = k_1 + ik_2 = k \in \mathbb{C}$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI FUNZIONI A PARTI COSTANTI

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso $\wedge\ f \in H(A)$

$Re\big(f(z)\big) = k_1 \in \mathbb{C} \vee Im\big(f(z)\big) = k_2 \in \mathbb{C}$

Tesi:

$f(z) = k \in \mathbb{C}$

Dimostrazione:

Si supponga $Re\big(f(z)\big) = k_1 \in \mathbb{C}$, ma la dimostrazione è analoga nell'altro caso. Poiché la parte reale della funzione in esame è costante:

$$f(z) = c + i\, v(x,y)$$

Dove $\nabla u(x,y) = \underline{0}$. Tuttavia, poiché la funzione è derivabile, valgono le condizioni di Cauchy – Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_x(x,y) = 0 \\ v_y(x,y) = u_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Da cui si desume che anche $\nabla v(x,y) = 0$. Calcolando la derivata della funzione:

$$f'(z) = u_x(x, y) + i\, v_x(x, y) = 0 + i0 = 0$$

Ma quando una funzione olomorfa ha derivata nulla è costante.

CVD

Dal teorema appena dimostrato possono essere tratte conclusioni importanti per individuare un **criterio di olomorfia delle funzioni**: in primis si può dire che **se una funzione ha parte reale e parte immaginaria non costante, essa può essere una funzione olomorfa**, ma si può anche dire che **se una funzione che ha una delle sue parti costante ma non è costante, non è una funzione olomorfa**.

Per derivare una funzione olomorfa non elementare si possono considerare le seguenti **regole di derivazione**.

EUNUNCIATO REGOLE DI DERIVAZIONE

Ipotesi:

$\forall f, g: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge\, f, g \in H(A)$

Tesi:

1. La combinazione lineare, il prodotto e il rapporto (a denominatore non nullo) di *f* e *g* sono funzioni olomorfe
2. Valgono le seguenti regole
    a. $D\big(af(z) + bg(z)\big) = af'(z) + bg'(z), \forall a, b \in \mathbb{C}$
    b. $D\big(f(z) \cdot g(z)\big) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$
    c. $D\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, con $g(z) \neq 0\ \forall z \in A$

Dalla tesi 2.a si può dedurre che l'insieme $H(A)$ con l'operazione interna + e l'operazione esterna $\cdot$ è uno spazio vettoriale.

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to V : A$ è un aperto $\wedge\, f$ derivabile in $z_0 \in A$

$\forall g: V \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : V$ è un aperto $\wedge\, g$ derivabile in $f(z_0) \in V$

Tesi:

1. $g \circ f: A \to \mathbb{C}$: è derivabile in z_0

2. $D\left(g\big(f(z_0)\big)\right) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0)$

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge\ f \in H(A)$

f è invertibile

$\forall z_0 \in A : f'(z_0) \neq 0$

Tesi:

1. $f^{-1}: \mathbb{C} \to A$ è derivabile in $w_0 = f(z_0)$
2. $D\big(f^{-1}(w)\big) = \frac{1}{f'(z_0)}$

Sia considerata una **funzione olomorfa**, su cui valgono le condizioni di Cauchy – Riemann, facendo il **passaggio a coordinate polari**:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = u(\rho\cos\vartheta\,, \rho\sin\vartheta) + i\,v(\rho\cos\vartheta\,, \rho\sin\vartheta)$$

Dove, per $z = x + iy$:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

Con:

$$\begin{cases} \rho = |z| \\ \vartheta = \operatorname{Arg} z \end{cases}$$

Poiché non si sta intervenendo sulla funzione, ma solo sulla sua rappresentazione, **le condizioni di Cauchy – Riemann devono conservarsi anche in coordinate polari**:

$$\begin{cases} \rho u_\rho = v_\vartheta \\ u_\vartheta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

Calcolate in $(\rho_0, \vartheta_0) \approx (x_0, y_0)$. Per cui:

$$f'(z) = u_x(x,y) + i\,v(x,y) = e^{-i\vartheta}\big(u_\rho + iv_\rho\big)$$

Presa una funzione complessa $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, che quindi si può esprimere come somma di una parte reale e di una parte immaginaria, **i suoi valori $\boldsymbol{f(z)}$ saranno ancora dei numeri complessi**, di cui sarà possibile esprimere il **numero complesso coniugato**; di conseguenza, si definisce **funzione complessa coniugata** quella funzione costruita come segue:

$$f(z) = Re(z) + i\,Im(z)$$

$$\bar{f}(z) = Re(z) - i\ Im(z)$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLE FUNZIONI CONIUGATE OLOMORFE

Ipotesi:

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto

f e $\bar{f}$ sono olomorfe in A

Tesi:

f e $\bar{f}$ sono funzioni costanti

Dimostrazione:

Si può banalmente dimostrare che una funzione costante è olomorfa; quindi, nella dimostrazione seguente tale implicazione verrà ignorata. Considerata la definizione di numero complesso coniugato, se $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$:

$$\bar{f}(z) = u(x,y) - i\ v(x,y)$$

Ma poiché entrambe le funzioni sono olomorfe, valgono le condizioni di Cauchy – Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_x \\ u_x = -v_x \end{cases} \wedge \begin{cases} u_y = -v_y \\ u_y = v_y \end{cases}$$

Ma queste affermazioni hanno senso solo se $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, da cui si può dedurre che:

$$\nabla u(x,y) = \nabla v(x,y) = \underline{0}$$

Ovvero che le due funzioni f e $\bar{f}$ sono costanti.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI FUNZIONE A MODULO COSTANTE

Ipotesi:

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge f \in H(A)$

$\exists c \in \mathbb{R} : |f(z)| = c \geq 0, \forall z \in A$

Tesi:

f è costante

Dimostrazione:

Si considerino i seguenti casi:

- $c = 0$

In tal caso si deduce direttamente che la funzione è nulla in tutto il suo dominio, quindi costante:

$$|f(z)| = 0 \Longrightarrow f(z) = 0, \forall z \in A$$

- $c > 0$

Sfruttando le proprietà del complesso coniugato:

$$f(z) \cdot \bar{f}(z) = |f(z)|^2 = c^2$$

Questa relazione si può dividere per $f(z)$, in quanto essa non è nulla perché si suppone $c \neq 0$:

$$\bar{f}(z) = \frac{c^2}{f(z)}$$

Ma il rapporto di funzioni olomorfe è una funzione olomorfa; quindi, si dimostra che f e $\bar{f}$ sono funzioni olomorfe. In base al teorema delle funzioni coniugate olomorfe, f è costante.

CVD

EUNUNCIATO TEOREMA DI INFINITA DERIVABILITÀ

Ipotesi:

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge f \in H(A)$

Tesi:

$f' \in H(A)$

Quest'ultimo teorema conduce ad un risultato importante per le funzioni complesse; infatti, può essere **reiterato all'infinito** per dire che **una funzione olomorfa è infinitamente derivabile**; nel campo reale invece un'affermazione di questo tipo non poteva essere dimostrata.

TRASFORMAZIONI CONFORMI E FUNZIONI ARMONICHE

Una **curva** è una coppia composta da una funzione $\varphi: [a, b] \to A \subseteq \mathbb{C}$, detta **parametrizzazione della curva**, e da un insieme $\Gamma = \varphi([a, b])$, detto **sostegno della curva**. **La parametrizzazione** di una curva nel campo complesso, in quanto funzione complessa, **può essere espressa come somma di una parte reale e una immaginaria**, φ_1 e φ_2, e viene classificata come **funzione C^1** nel momento in cui **le sue stesse parti sono di classe C^1.**

Una **curva φ** (ricordando che questa è una semplificazione) è **regolare** nel momento in cui valgono le seguenti affermazioni:

1. $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0)) \neq (0,0), \forall t_0 \in (a,b)$
2. $\|\varphi'(t_0)\| \neq 0, \forall t_0 \in (a,b)$

Dire che una curva è regolare equivale anche a dire che **esiste sempre il versore tangente alla curva** in qualsiasi punto del suo dominio, infatti:

$$\tau(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}, \forall t_0 \in (a,b)$$

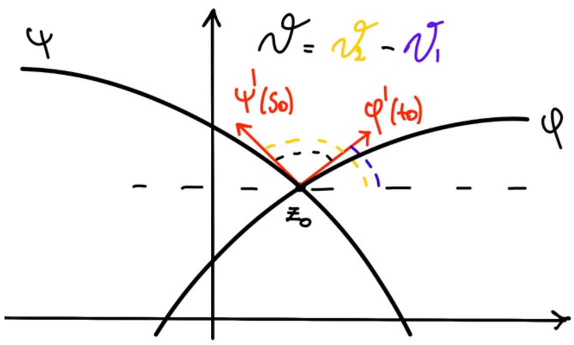
Si può ben notare come al mancare di almeno una delle due condizioni di regolarità il versore tangente smette di esistere. Supponendo l'esistenza del versore tangente, si può ricavare il **versore normale ruotando quello tangente di $\pi/2$** con la stessa matrice di rotazione trovata in precedenza.

Siano prese in considerazione **due curve regolari che si incontrano in un medesimo punto** del piano complesso z_0:

$$\varphi: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{C}, \exists t_0 \in (a,b) : \varphi(t_0) = z_0$$

$$\psi: [c,d] \to A \subseteq \mathbb{C}, \exists s_0 \in (c,d) : \psi(s_0) = z_0$$

Una **funzione olomorfa $f: A \to \mathbb{C}$ tale che $f'(z_0) \neq 0$ viene detta trasformazione conforme** e si può dimostrare che essa **conserva gli angoli tra le tangenti in ampiezza e verso**.



DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CONFORMI

Ipotesi:

$\forall \varphi: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{C}, \exists t_0 \in (a,b) : \varphi(t_0) = z_0$

$\forall \psi: [c,d] \to A \subseteq \mathbb{C}, \exists s_0 \in (c,d) : \psi(s_0) = z_0$

$\forall f: A \to \mathbb{C} : f'(z_0) \neq 0$, ovvero f è una trasformazione conforme

Tesi:

$\vartheta = \arg(\psi'(s_0)) - \arg(\varphi'(t_0))$

Dimostrazione:

Si può facilmente dimostrare che la composizione tra la funzione e una delle due curve è una curva regolare:

$$f \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{C} : \ f \circ \varphi \in C^1([a, b])$$

$$D\big((f \circ \varphi)(t)\big) = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$$

In modo analogo si può dimostrare la stessa proprietà per la composizione della funzione con l'altra curva. Sia considerato l'argomento del versore tangente a queste due composizioni nel punto t_0:

$$\vartheta_1 = \arg\big((f \circ \varphi)'(t_0)\big) = \arg\Big(f'\big(\varphi(t_0)\big) \cdot \varphi'(t_0)\Big) = \arg\big(f'(z_0)\big) + \arg\big(\varphi'(t_0)\big)$$

$$\vartheta_2 = \arg\big((f \circ \psi)'(t_0)\big) = \arg\Big(f'\big(\psi(t_0)\big) \cdot \psi'(t_0)\Big) = \arg\big(f'(z_0)\big) + \arg\big(\psi'(t_0)\big)$$

Sapendo che $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$:

$$\begin{aligned}\vartheta = \arg\big((f \circ \psi)'(t_0)\big) - \arg\big((f \circ \varphi)'(t_0)\big) \\ = \arg\big(f'(z_0)\big) + \arg\big(\psi'(t_0)\big) - \arg\big(f'(z_0)\big) - \arg\big(\varphi'(t_0)\big) \\ = \arg\big(\psi'(t_0)\big) - \arg\big(\varphi'(t_0)\big)\end{aligned}$$

CVD

Sia presa una **funzione $\boldsymbol{u}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$,** dove ***A* è un aperto**, tale che $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C^2}(\boldsymbol{A})$, la funzione $\boldsymbol{u}$ viene detta **armonica** se:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

Ovvero, se **la somma di tutte le derivate seconde pure è nulla**. In $\mathbb{R}^2$ una funzione è armonica se:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

Quest'equazione viene **detta equazione di Laplace**. Poiché il campo complesso è un particolare campo in $\mathbb{R}^2$, si può estendere quanto appena detto alle funzioni complesse.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ARMONIA DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R} : A$ è un aperto

$f \in H(A)$

$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$

Tesi:

u e v sono funzioni armoniche

Dimostrazione:

Bisogna dimostrare che $u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}$. Poiché la funzione è olomorfa, valgono le condizioni di Cauchy – Riemann:

$$u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$$

Derivando per la stessa direzione in cui è già derivata la funzione *u*:

$$u_{xx} = v_{yx} \wedge u_{yy} = -v_{xy}$$

Sommando le due uguaglianze membro a membro:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$$

Ma per il teorema di Schwartz le derivate miste sono uguali, quindi:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Si può analogamente dire lo stesso di *v*.

CVD

Un insieme $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ **è detto semplicemente connesso** se **qualunque curva chiusa ad esso appartenente è frontiera di un dominio regolare completamente contenuto in** $\boldsymbol{A}$; Con questa definizione si può procedere a definire una sorta di teorema inverso per quello appena dimostrato.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA FUNZIONE ARMONICA CONIUGATA

Ipotesi:

$\forall u: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : A$ è semplicemente connesso e *u* è una funzione armonica

Tesi:

$\exists!\, v: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \wedge f \in H(A)$

Dimostrazione:

Sia presa una funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, va dimostrata l'esistenza di *v*. Valgono, quindi, le condizioni di Cauchy – Riemann:

$$u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$$

Per cui:

$$\nabla v(x,y) = \left(-u_y, u_x\right)$$

In questa ottica la funzione *v* assume il ruolo di potenziale della forma differenziale $\left(-u_y, u_x\right)$, ma esso esiste se e solo se il campo è irrotazionale; tuttavia, poiché la funzione *u* è armonica, il suo laplaciano sarà nullo:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -u_{yy}$$

Ovvero:

$$\frac{\partial\left(-u_y\right)}{\partial y} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x}$$

Che rappresenta la condizione di irrotazionalità, sufficiente a dimostrare l'esistenza del potenziale *v*.

CVD

La funzione menzionata nel teorema è detta **funzione armonica coniugata** e permette di costruire una funzione complessa olomorfa. L'ipotesi di insieme semplicemente connesso permette di uniformare la chiusura e l'esattezza della forma differenziale $\nabla v(x,y) = \left(-u_y, u_x\right)$, per cui è possibile dire che *v* ha potenziale (esatta) se è irrotazionale (chiusa).

FUNZIONI COMPLESSE ELEMENTARI

Di seguito sono elencate le **funzioni complesse elementari**:

FUNZIONE ESPONENZIALE

$$f: z = x + iy \rightarrow\ f(z) = e^z$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C} - \{0\}$$

Questa funzione, sebbene abbia una **forma analoga alla corrispondente reale**, **si comporta in maniera completamente diversa**, infatti essa **si muove sulla circonferenza di raggio e^x**, centro nullo e non può mai assumere il valore nell'origine. Questo comportamento deriva in parte dall'**identità di Eulero**:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Si può anche mostrare come essa sia una **funzione periodica** di periodo $T = 2i\pi$, infatti:

$$e^z = e^{x+i(y+2n\pi)} = e^x(\cos y + 2n\pi + i\sin y + 2n\pi) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Questa proprietà la rende **non iniettiva sul suo dominio**, ma solo sulla restrizione a 2π:

$$\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} : a \leq z \leq a + 2\pi, \forall a \in \mathbb{R}\}$$

Per quanto riguarda **modulo** e **argomento** valgono le seguenti proposizioni:

$$|e^z| = e^{Re(z)} \leq e^{|Re(z)|} \leq e^{|z|}$$

$$\arg e^z = y + 2k\pi = Im(z) + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$z = |z|e^{i \arg z}$$

Tutte le regole delle potenze e degli esponenziali che valgono per il caso reale valgono ancora per quello complesso, ad esempio:

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$(e^z)^n \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$$

Anche questa funzione può essere vista come **somma di due funzioni**:

$$e^z = Re(e^z) + i\, Im(e^z) = u(x,y) + i\, v(x,y) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$$

Inoltre, valgono le **condizioni di Cauchy**:

$$u_x = v_y = e^x \cos y$$

$$u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

Che sono funzioni **differenziabili**; ciò significa che la funzione $\boldsymbol{e^z}$ **è olomorfa**, $e^z \in H(\mathbb{C})$. Studiando la **derivata complessa di questa funzione** si può notare la somiglianza con il caso reale:

$$D(e^z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^z$$

FUNZIONE LOGARITMICA

$$f: z = x + iy \to f(z) = \log(z)$$

$$D: \mathbb{C} - \{0\}$$

$$C: \mathbb{C}$$

Si definisce il **logaritmo complesso analogamente al logaritmo reale**:

$$\log z = w \Leftrightarrow z = e^w$$

Considerando:

$$w = w_1 + i\, w_2 \Longrightarrow z = e^{w_1}e^{iw_2} = |z|e^{i \arg z} \Longrightarrow e^{w_1} = |z| \wedge e^{w_1} = e^{i \arg z}$$

Si può ricavare l'**espressione analitica della funzione**:

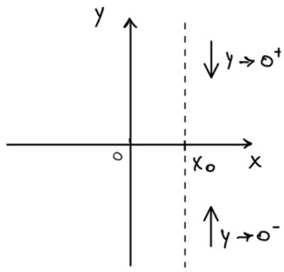
$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Si possono fare alcune considerazioni: **il logaritmo del modulo** che figura nella legge non è un logaritmo complesso ma un **logaritmo reale**, visto che $|z| \in \mathbb{R}$; inoltre, poiché **figura l'argomento di un numero complesso**, alla funzione non sarà associato un solo valore $\log z$ perché l'argomento è un **insieme di valori**. Questo tipo di funzioni sono dette **funzioni polidrome** e **dipendono dalla particolare determinazione** che si prende in considerazione; ad esempio, la **determinazione principale del logaritmo è data dall'argomento principale** del numero complesso in cui è calcolata:

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + (\operatorname{Arg} z)$$

La polidromia della funzione è causata anche dal parametro *k*, che viene posto a zero nella determinazione principale.

Per **studiare le funzioni polidrome** bisogna preliminarmente **individuare una determinazione particolare da analizzare**, nel caso del logaritmo si prende in considerazione la determinazione principale. In prima istanza si analizzi la **derivabilità** di questa funzione, che ha senso solo quando la funzione è anche **continua**: in particolare si deve individuare l'**insieme di continuità di Arg z**, da cui si ricava l'**insieme di derivabilità di Log z**; si analizzi il comportamento della funzione $y = 0$, quindi si prenda una retta parallela all'asse y, $x = x_0$, e si studi l'avvicinamento all'asse x da due direzioni:



$$\lim_{y\to 0^+} \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + \lim_{y\to 0^+} \arctan\frac{y}{x_0} = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \lim_{y\to 0^-} \arctan\frac{y}{x_0} = \lim_{y\to 0^-} \operatorname{Arg} z$$

Da quanto appena mostrato si può dedurre che **l'argomento principale non è una funzione continua in $y = 0$**; si può concludere che **il logaritmo principale è una funzione continua (e derivabile) in**:

$$\mathbb{C}\backslash\{(x,y): y = 0 \wedge x \leq 0\} = \mathbb{C}^{**}$$

In questo dominio si può determinare la **derivata del logaritmo principale**, che coincide con la derivata dell'omonima funzione reale:

$$D(\operatorname{Log} z) = \frac{1}{z}$$

Ricordando che il logaritmo è una funzione polidroma, si possono fare dei **ragionamenti analoghi a quelli fatti per l'argomento** di un numero complesso:

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)\,, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Ma, essendo questa una **uguaglianza tra insiemi**:

$$\forall h = a + b \in \mathbb{C}, h \in \log(z_1 z_2) \Leftrightarrow a \in \log(z_1) \wedge b \in \log(z_2)$$

Ovviamente, quanto detto finora **vale solo per il logaritmo complesso (polidromo) e non per le sue particolari determinazioni**.

FUNZIONI SENO E COSENO

$$f: z \in \mathbb{C} \to \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C}$$

$$f: z \in \mathbb{C} \to \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C}$$

La peculiarità delle funzioni seno e coseno nel campo dei numeri complessi, che le differenzia dalle omonime reali, è il fatto che esse sono **funzioni illimitate**:

$$z = iy \Longrightarrow \sin z = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \wedge \lim_{y \to +\infty} |\sin z| = +\infty$$

E, in maniera analoga, anche il coseno. Si desume, quindi:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\sin z| = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\cos z| = +\infty$$

Poiché **sul campo reale sono definite alcune proprietà** di queste funzioni e poiché il campo complesso è un ampliamento del campo reale, tali proprietà **devono essere definite e rispettate anche sul campo complesso**:

$$\sin -z = -\sin z$$

$$\cos -z = \cos z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Inoltre, **essendo composte da funzioni esponenziali, il seno ed il coseno sono funzioni somma di funzioni olomorfe, quindi sono olomorfe** nel loro dominio:

$$D(\sin z) = D\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$D(\cos z) = D\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

Infine, in continuità con le rispettive funzioni reali, **seno e coseno complessi sono funzioni periodiche di periodo $\boldsymbol{T = 2\pi}$**.

FUNZIONE TANGENTE

$$f: z \in \mathbb{C} \backslash \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C} \backslash \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$C: \mathbb{C}$$

In modo analogo a quanto detto per il seno ed il coseno complessi:

$$\tan(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\tan z$$

$$D(\tan z) = \frac{1}{\cos^2 z}, \forall z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Infine, in continuità con la rispettiva funzione reale, **la tangente complessa è una funzione periodica di periodo $\boldsymbol{T = \pi}$**.

FUNZIONI SENO E COSENO IPERBOLICI

$$f: z \in \mathbb{C} \to \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C}$$

$$f: z \in \mathbb{C} \to \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C}$$

In modo analogo a quanto detto per le funzioni **seno e coseno**, le omonime **iperboliche sono olomorfe**:

$$D(\sinh z) = \cosh z$$

$$D(\cosh z) = \sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Infine, **seno e coseno iperbolici sono funzioni periodiche di periodo $\boldsymbol{T = 2i\pi}$**.

FUNZIONI POTENZA

$$f: n \in \mathbb{N} \to P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 z^0 \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{N}$$

$$C: \mathbb{C}$$

Questa funzione è **olomorfa perché somma di funzioni olomorfe $\boldsymbol{z^n}$**, la cui derivata è:

$$D(z^n) = n \cdot z^{n-1}$$

Si può **generalizzare la funzione polinomiale anche ai numeri interi negativi**, infatti:

$$n \in \mathbb{Z} \to z^n = \frac{1}{z^{-n}}, \forall z \neq 0$$

Quando **l'esponente che eleva il numero complesso è anch'esso un numero complesso** la funzione cambia leggermente e muta in una **funzione polidroma**:

$$z^a = e^a \cdot \log z$$

La cui **determinazione principale** è:

$$z^a = e^a \cdot \operatorname{Log} z$$

FUNZIONE RADICE

$$f: z \in \mathbb{C} \to \sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right] \in \mathbb{C}$$

$$D: \mathbb{C}$$

$$C: \mathbb{C}$$

La forma dell'angolo nell'espressione della radice rende la **funzione polidroma**; tuttavia, questo tipo di polidromia è **particolare**: **la funzione è olomorfa in tutte le sue determinazioni, le quali si ripetono ogni $\boldsymbol{n}$ volte**; ciò significa che **basta rilevare le determinazioni per $\boldsymbol{k = 0 \dots n - 1}$ per individuare tutte le forme possibili della funzione**.

$$D\left(\sqrt[n]{z}\right) = D\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}-1}$$

Ad esempio, per $n = 2$:

$$D\left(\sqrt{z}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI NEL CAMPO COMPLESSO

In seno alla doppia natura delle funzioni complesse precedentemente accennata, è possibile definire le **successioni** e le **serie di funzioni complesse** proprio come fatto per le funzioni di due variabili reali. Per successione di funzioni complesse si intende un'applicazione del tipo:

$$f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

Quindi **una funzione che associa ad un numero complesso $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C}$ un numero complesso $\boldsymbol{f_n(z)}$ sulla base di un numero naturale $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$**. Per questo tipo di successione si possono definire diversi tipi di **convergenza**:

- **Convergenza in un punto**

$$\left(f_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } l \text{ in } z_0 \in A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_0, |f_n(z_0) - l| < \varepsilon$$

Ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z_0) = l$$

- **Convergenza puntuale in *A***

$$\left(f_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } l \text{ in } A \Leftrightarrow \forall z \in A\ \forall\varepsilon > 0\ \exists n_{0(z,\varepsilon)} \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_{0(z,\varepsilon)}, |f_n(z_0) - l| < \varepsilon$$

Ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = l, \forall z \in A$$

La convergenza puntuale in un insieme corrisponde alla convergenza in ogni punto di tale insieme.

- **Convergenza uniforme in *A***

$$\left(f_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } l \text{ in } A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_{0,\varepsilon} \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_{0,\varepsilon}, |f_n(z_0) - l| < \varepsilon, \forall z \in A$$

Ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_A |f_n(z) - f(z)| = 0$$

La differenza dal precedente tipo di convergenza sta nel modo in cui la successione si comporta nei confronti della variabile complessa: nella convergenza puntuale è necessario chiarire la dipendenza della definizione da *z*, ovvero la successione converge ad *l* in ogni *z*, mentre nel secondo caso la successione converge uniformemente a *z*, ovvero indipendentemente da *z*. Tale differenza si riflette nell'espressione a limite delle definizioni: nella convergenza puntuale è necessario specificare $\forall z \in A$ perché al mancare della convergenza di un solo punto cessa di valere il limite, invece per la convergenza uniforme, visto che essa converge uniformemente ad ogni *z*, è sufficiente dire che converge al valore massimo (o all'estremo superiore). La relazione che intercorre tra convergenza uniforme e puntuale è di una semplice implicazione diretta del tipo:

$$\textbf{convergenza uniforme} \Rightarrow \textbf{convergenza puntuale}$$

Ma **non vale il contrario**. Detto ciò, si può chiarire lo scopo dello **studio di una successione di funzioni** come la **ricerca del tipo di convergenza** della successione in esame.

Una **serie di funzioni** è un'entità composta da **due successioni di funzioni**: una prima successione $\left(\boldsymbol{f_n(z)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, detto **termine generico**, e una successione $\left(\boldsymbol{s_n(z)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, detta **successione delle somme parziali** e definita come segue:

$$s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_{n-1}(z) + f_n(z)$$

In genere una serie di funzioni può essere indicata o specificando la relativa successione delle somme parziali o, più propriamente, come sommatoria del termine generico:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

Poiché la serie di funzioni è espressione di una successione di funzioni, anch'essa potrà convergere in diversi modi:

- **Convergenza puntuale**

$$\left(s_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge puntualmente in } A \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n(z) = s(z)\,, \forall z \in A$$

- **Convergenza uniforme**

$$\left(s_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge puntualmente in } A \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup|s_n(z) - s(z)| = 0$$

L'ereditarietà di questi due tipi di convergenza non deve sorprendere; infatti, la serie di funzioni è stata annunciata come un particolare tipo di successione di funzioni e, pertanto, gode delle stesse proprietà. La novità in termini di convergenza sta nella convergenza di tipo assoluto e totale:

- **Convergenza assoluta**

$$\left(s_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge assolutamente in } A \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \text{ converge}$$

Essendo il termine generico il modulo di un numero complesso, la serie che verifica la definizione di convergenza assoluta è una serie reale a termini positivi e, pertanto, vi si può applicare ogni criterio per le serie reali. La relazione che sussiste per la convergenza assoluta è simile a quella che sussiste tra la convergenza uniforme e puntuale:

$$\text{convergenza assoluta} \Rightarrow \text{convergenza puntuale}$$

- **Convergenza totale**

$$\left(s_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge totalmente in } A \Leftrightarrow \exists (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, M_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(z)| \leq M_n\ \forall z \in A\ \forall n \in \mathbb{N}\ \land \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \text{ converge}$$

Questa definizione può essere ulteriormente semplificata, infatti una serie numerica reale che maggiora il modulo del termine generico della serie complessa è quella che ha come termine generico l'estremo superiore del modulo della successione di funzioni complessa in esame; pertanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \text{ converge totalmente in } A \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{\mathrm{A}}|f_n(z)| \text{ converge}$$

Infatti, $\sup_{\mathrm{A}}|f_n(z)|$ è una successione reale tale che $f_n(z) \leq \sup_{\mathrm{A}}|f_n(z)|$. La relazione che sussiste per la convergenza totale è descritta dal teorema di Weierstrass.

EUNUCIATO TEOREMA DI WEIERSTRASS

Ipotesi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge totalmente in A

Tesi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente in A

Ma è anche possibile dimostrare che:

$$\text{convergenza totale} \Rightarrow \text{convergenza assoluta}$$

Si può quindi affermare che **il tipo di convergenza più forte per una serie di funzioni complesse è la convergenza totale**.

Un esempio di serie di funzioni già affrontata è la serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

È stato dimostrato come questa serie abbia come somma:

$$s_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Il cui limite dipende dal termine z^n; pertanto, la serie:

- Converge $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} z^n = 0 \Leftrightarrow |z| < 1$
- Diverge $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} z^n = +\infty \Leftrightarrow |z| \geq 1$

Nel caso in cui la serie converga, la somma è:

$$\frac{1}{1 - z}$$

Infatti, in $s_n(z)$, il termine z^n tenderebbe a zero e verrebbe ignorato.

SERIE DI POTENZE

Considerata una qualsiasi **successione numerica complessa** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, si definisce **serie di potenze di coefficienti a_n e centro z_0** $\in \mathbb{C}$ una **serie di funzioni** del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Mentre si definisce **insieme di convergenza** l'insieme di valori ***z* per cui la serie converge**:

$$I = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \ \text{converge} \right\} \neq \emptyset$$

L'insieme di convergenza **è sempre un insieme non vuoto** perché **una serie di potenze converge in almeno un punto, il suo centro**. Una **serie di potenze** si compone come un **polinomio di grado *n***, infatti osservando la successione delle somme parziali:

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n$$

Per semplicità potrebbe convenire avere una serie di potenze a centro $z_0 = 0$, quando questo non si verifica è sempre possibile traslare la serie ad un $y = z - z_0$, ottenendo la serie di centro nullo ma conservando le proprietà della serie originale. Quando si effettua un'operazione di questo tipo è bene ricordare di modulare i risultati ottenuti sulla serie per *y* in funzione della posizione fatta.

Studiare una serie di potenze equivale a **studiare l'intervallo di convergenza** e di seguito saranno mostrati alcuni strumenti utili a tale scopo.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ABEL I

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$: converge in un punto $z_I \neq z_0$

Tesi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente $\forall z : |z-z_0| < |z_I - z_0|$

Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema è importante tenere in conto che:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è limitata}$$

Dal momento in cui la serie di potenza converge per z_I:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n(z_I - z_0)^n = 0$$

Da cui si può dedurre che la successione $(a_n(z_I - z_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, ovvero:

$$\exists M > 0 : |a_n(z_I - z_0)^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sia preso un intorno circolare del centro della serie con raggio $|z_1 - z_0|$:

$$z \in B_{|z_I - z_0|}(z_0) : |z - z_0| < |z_I - z_0|$$

Si può fare il seguente ragionamento $\forall z \in B_{|z_I - z_0|}(z_0)$:

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left|a_n(z - z_0)^n \cdot \frac{(z_I - z_0)^n}{(z_I - z_0)^n}\right| = |a_n(z_I - z_0)^n| \left|\left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0}\right)^n\right| \leq M \left|\left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0}\right)^n\right|$$

$$\frac{z - z_0}{z_I - z_0} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0}\right)^n\right| \text{ converge}$$

Per il teorema del confronto si può dimostrare che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - z_0)^n| \text{ converge}$$

Ovvero:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge assolutamente } \forall z : \ |z - z_0| < |z_I - z_0|$$

CVD

Il teorema afferma **che se una serie di potenza converge in un punto z_I, essa convergerà in qualsiasi intorno circolare di z_0 con raggio minore di $|z_I - z_0|$**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ABEL II

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$: converge in un punto $z_I \neq z_0$

Tesi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge totalmente in $\bar{B}_R(z_0)$, con $R < |z_I - z_0|$

Dimostrazione:

In modo analogo a quanto detto per il primo teorema di Abel:

$$\exists M > 0 : |a_n(z_I - z_0)^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sia considerato un punto della chiusura in esame:

$$z \in \bar{B}_R(z_0) \Longrightarrow |z - z_0| < R$$

È possibile ripetere lo stesso ragionamento sviluppato per il precedente teorema:

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left| a_n(z - z_0)^n \cdot \frac{(z_I - z_0)^n}{(z_I - z_0)^n} \right| = |a_n(z_I - z_0)^n| \left| \left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right)^n \right|$$
$$\leq M \cdot \left(\frac{R}{|z_I - z_0|} \right)^n$$

$$\frac{R}{|z_I - z_0|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{|z_I - z_0|} \right)^n \text{ converge}$$

Ma la serie in questione è una serie numerica; pertanto, si può affermare che la serie in esame è maggiorata da una serie numerica convergente e quindi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge totalmente } \forall z \in \bar{B}_R(z_0)$$

CVD

La differenza sostanziale tra il Teorema di Abel I e il Teorema di Abel II è nella **composizione dell'intervallo di convergenza** che consegue dalla tesi: nel **primo** è un **aperto**, nel **secondo** è esplicitamente una **chiusura**. Con questi due teoremi si può figurare una schematizzazione per individuare la **forma dell'intervallo di convergenza** di una serie di potenza. Sia chiamato **raggio di convergenza l'estremo superiore dei raggi degli intorni circolari in cui la serie converge**:

$$\rho = \sup\{|z - z_0| : z \in I\}$$

Mentre viene definito **cerchio di convergenza l'intorno sferico del centro della serie a raggio pari al raggio di convergenza**:

$$B_\rho(z_0)$$

Si può dimostrare che:

1. $\rho = 0 \Longrightarrow I = \{z_0\}$
2. $\rho \in (0, +\infty) \Longrightarrow I = (z_0 - \rho, z_0 + \rho)$
3. $\rho = +\infty \Longrightarrow I = \mathbb{C}$

Infatti:

1. Se il raggio di convergenza è nullo, è nullo il raggio del massimo intorno circolare in cui la serie converge, ovvero tutti i punti in cui la serie converge si appiattiscono a z_0;

2. Se il raggio di convergenza è finito, è finito il raggio del massimo intorno circolare in cui la serie converge, quindi per i punti interni la serie converge, per quelli esterni no (converge per $|z-z_0|<\rho$ e non converge per $|z-z_0|>\rho$);
3. Se il raggio di convergenza è illimitato, non esiste un raggio reale limite entro cui la serie converge o meno, pertanto la serie converge in tutto il piano complesso.

Nelle considerazioni fatte finora **non viene studiata la convergenza sulla frontiera** del cerchio di convergenza, perché **quando $|z-z_0|=\rho$ non si può dire nulla a priori sulla serie** ma va studiato il singolo caso particolare.

Presa una **serie di potenze**, viene definita **serie derivata** la serie di potenza il cui **termine generico è la derivata del termine generico della serie iniziale**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DERIVAZIONE

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ha raggio di convergenza ρ

Tesi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$ ha raggio di convergenza ρ

Dimostrazione:

Chiamato ρ' il raggio di convergenza della serie derivata, va dimostrato che $\rho=\rho'$; quindi, devono valere contemporaneamente le seguenti proposizioni:

- $\rho' \leq \rho$

Bisogna dimostrare che $B_{\rho'}(z_0) \subseteq B_\rho(z_0)$, cioè che dove converge la serie derivata converge anche la serie di partenza. Preso $z : |z-z_0|<\rho'$ (ovvero i valori in cui la serie derivata converge assolutamente):

$$|a_n(z-z_0)^n| = \left|a_n \frac{(z-z_0)^n}{z-z_0}(z-z_0)\right| = |(z-z_0) \cdot a_n(z-z_0)^n| \leq |(z-z_0) \cdot na_n(z-z_0)^n|$$

Con questo risultato si conclude che la serie per $|a_n(z-z_0)^n|$ è maggiorata da una serie convergente, quindi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z-z_0)^n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ converge assolutamente}$$

È stato dimostrato che dove converge la serie derivata converge anche la serie di partenza, quindi che $\rho' \leq \rho$.

- $\rho \leq \rho'$

Bisogna dimostrare che $B_\rho(z_0) \subseteq B_{\rho'}(z_0)$, cioè che dove converge la serie di partenza converge anche la serie derivata. Preso $z : |z - z_0| < \rho$ (ovvero i valori in cui la serie di partenza converge assolutamente), per la seconda proprietà dell'estremo superiore:

$$\exists z_I \in I : |z - z_0| < |z_I - z_0| < \rho$$

Per cui:

$$|n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1}| = \left| n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1} \frac{(z_I - z_0)^n}{(z_I - z_0)^n} \right| = \left| a_n(z_I - z_0)^n \cdot \frac{n}{z_I - z_0} \cdot \left(\frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right)^{n-1} \right|$$
$$= |a_n(z_I - z_0)^n| \frac{n}{|z_I - z_0|} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_I - z_0|} \right)^{n-1}$$

Ma poiché in z_I la serie di partenza converge assolutamente, la serie reale che ha per termine generico $|a_n(z_I - z_0)^n|$ converge, ovvero:

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n(z_I - z_0)^n| = 0 \Longrightarrow \exists k > 0 : |a_n(z_I - z_0)^n| \leq k$$

Quindi la serie è limitata. Riassumendo quanto detto finora:

$$|n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1}| = |a_n(z_I - z_0)^n| \frac{n}{|z_I - z_0|} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_I - z_0|} \right)^{n-1} \leq \frac{k}{|z_I - z_0|} \cdot n \left(\frac{|z - z_0|}{|z_I - z_0|} \right)^{n-1}$$

Considerando la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{|z - z_0|}{|z_I - z_0|} \right)^{n-1}$$

Dimostrare che essa converge equivale a dimostrare che dove converge la serie di partenza converge anche la serie derivata e, quindi, dimostrare che $\rho \leq \rho'$. Applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1) \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right|^n}{n \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right|^{n-1}} = \left| \frac{z - z_0}{z_I - z_0} \right| < 1$$

La serie numerica in esame converge quindi valgono contemporaneamente $\rho \leq \rho'$ e $\rho' \leq \rho$, da cui si può affermare la coincidenza dei due raggi di convergenza.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CAUCHY–HADAMARD (CRITERIO DELLA RADICE)

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n : \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \wedge \rho$ il raggio di convergenza della serie

Tesi:

1. $l = 0 \Longrightarrow \rho = +\infty$
2. $l = +\infty \Longrightarrow \rho = 0$
3. $l \in (0, +\infty) \Longrightarrow \rho = \frac{1}{l} \in (0, +\infty)$

Dimostrazione:

Sia considerata la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - z_0)^n|$$

Poiché è una serie numerica, si può applicare il criterio della radice:

$$l' = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \cdot |z - z_0|$$

Da cui si possono fare le seguenti considerazioni:

- $l = 0 \Longrightarrow l' = 0$ e la serie numerica converge $\forall z \in \mathbb{C}$, quindi la serie di potenze converge assolutamente nel piano complesso e ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$;
- $l = +\infty \Longrightarrow$ la serie numerica può convergere solo se $z = z_0$, quindi la serie di potenze converge solo in $z = z_0$ e ha raggio di convergenza $\rho = 0$;
- $l \in (0, +\infty) \Longrightarrow l' = l \cdot |z - z_0| < 1$ la serie numerica converge, quindi la serie di potenze converge per $|z - z_0| < \frac{1}{l}$ e ha raggio di convergenza $\rho = \frac{1}{l}$.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI D'ALEMBERT (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n : \exists \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$

Sia ρ il raggio di convergenza della serie

Tesi:

1. $l = 0 \Longrightarrow \rho = +\infty$
2. $l = +\infty \Longrightarrow \rho = 0$
3. $l \in (0, +\infty) \Longrightarrow \rho = \frac{1}{l} \in (0, +\infty)$

Dimostrazione:

La dimostrazione è simile a quella fornita per il Teorema di Cauchy – Hadamard.

CVD

Come è stato anche annunciato in precedenza, la successione delle somme parziali si configura come segue:

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n$$

Che è una successione di funzioni. Dire che **la serie di potenze converge** equivale a dire che **converge la successione delle somme parziali**, ovvero che **esiste una funzione** tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(z) = f(z)$$

Questa funzione è detta **somma della serie** e si può esprimere come:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Supponendo che la serie converga entro un raggio di convergenza ρ, si può dimostrare che la funzione somma della serie è olomorfa in $B_\rho(z_0)$.

ENUNCIATO TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO AL SEGNO DI DERIVATA

Ipotesi:

$\forall f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è aperto $\wedge\ f_n$ è derivabile in *A*

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge almeno in un punto $z \in A$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(z)$ converge uniformemente a g in *A*

Tesi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a f in *A*

f è derivabile $\wedge\ f' = g$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI OLOMORFIA DELLA FUNZIONE SOMMA

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n :\ \rho$ è raggio di convergenza della serie

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$

Tesi:

$f \in H\left(B_\rho(z_0)\right)$

Dimostrazione:

Bisogna dimostrare che esiste ed è finita la derivata della funzione $f(z)$; sia considerata la serie derivata di quella in esame:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n (z - z_0)^{n-1} = g(z)$$

Grazie al teorema di derivazione è possibile dire che questa funzione converge uniformemente a $g(z)$ nell'intorno circolare $B_\rho(z_0)$, perché le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza, ma grazie al teorema di passaggio a limite sotto al segno di derivata è anche possibile dire che:

$$f'(z) = g(z)$$

Ovvero che esiste la derivata complessa della funzione $f(z)$ ed è definita nell'intorno circolare $B_\rho(z_0)$.

CVD

Si può notare una differenza importante rispetto alle funzioni reali: affinché una **funzione reale sia sviluppabile in serie di Taylor**, è necessario che le sue **derivate siano equilimitate** (condizione abbastanza forte), mentre **per una funzione complessa** è sufficiente che la **funzione sia olomorfa** (condizione meno forte).

Poiché una funzione complessa è derivabile infinite volte, **il teorema appena enunciato può essere iterato infinitamente**, giungendo alla conclusione seguente:

$$f^{(h)}(z) = \sum_{n=h}^{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-h+1) \cdot a_n (z - z_0)^{n-h}, \forall h \in \mathbb{N}$$

$$f^{(h)}(z) = \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{n!}{(n-h)!} \cdot a_n (z - z_0)^{n-h}$$

Di questa funzione, **sia isolato il primo elemento** della serie e **si calcoli la funzione nel centro**:

$$f^{(h)}(z) = h!\, a_h + \sum_{n=h+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-h)!} (z - z_0)^{n-h}, \forall h \in \mathbb{N}$$

$$f^{(h)}(z_0) = h!\, a_h$$

Questa relazione permette di **determinare i coefficienti della serie di potenza** convergente ad una funzione complessa *f*:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Essi vengono detti **coefficienti dell'espansione di Taylor**, mentre la serie di potenza che esprime questo risultato è detta **serie di Taylor di centro z_0**:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \,, \forall z : |z - z_0| < \rho$$

Nel momento in cui **il centro della serie è $z_0 = 0$** essa viene detta **serie di Taylor con sviluppo di Mac Laurin**. In precedenza, è stato detto che la **serie di potenza** in quanto successione delle somme parziali è un **polinomio di grado *n*** e pertanto, alla luce di quanto detto, si può affermare che **una qualsiasi funzione olomorfa esprimibile in serie di Taylor è approssimabile ad un polinomio di grado *n***.

Presa una funzione $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è aperto e sia $z_0 \in A$:

$$f \text{ è analitica in } z_0 \in A \Leftrightarrow \exists B_\rho(z_0) : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \forall z \in B_\rho(z_0)$$

Mentre si può dire che la funzione *f* è analitica in *A* $\Leftrightarrow$ *f* è analitica $\forall z \in A$. Sintetizzando, **una funzione è analitica se esiste un intervallo di convergenza per cui la funzione può essere assimilata ad una serie di potenze** (in particolare ad una serie di Taylor) **convergente in tale intervallo**.

Si può facilmente mostrare come **la definizione di analiticità di una funzione coincida con quella di olomorfia**: è stato detto che se una serie di potenze converge ad una funzione (analitica) in un intorno circolare del suo centro allora la funzione è olomorfa; tuttavia, la funzione è assimilabile alla serie quando è analitica.

ENUNCIATO TEOREMA DI EQUIVALENZA TRA OLOMORFIA E ANALITICITÀ

Ipotesi:

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è aperto

$f \in H(A)$

Tesi:

f è analitica in *A*

$\rho = \mathrm{dist}(z_0, \partial A) = \inf\{|z - z_0| : z \in \partial A\}$ è raggio di convergenza della serie di potenza associata

Quindi si può affermare la seguente equivalenza:

$$\textbf{analiticità} \Leftrightarrow \textbf{olomorfia}$$

DIMOSTRAZIONE PRIMO PRINCIPIO DI IDENTITÀ PER LE SERIE DI POTENZE

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \,:\, \rho$ è raggio di convergenza

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \,, \forall z \in B_\rho(z_0)$

$\exists \rho' : 0 < \rho' < \rho \ \wedge f(z) = 0, \forall z : |z-z_0| < \rho'$

Tesi:

$a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione:

$$f(z) = 0 \ \forall z : |z-z_0| < \rho' \Longrightarrow f^{(h)}(z) = 0, \forall h \in \mathbb{N} \ \forall z : |z-z_0| < \rho'$$

Ma:

$$f^{(h)}(z_0) = 0 \Longrightarrow a_n = \frac{f^{(h)}(z_0)}{h!} = 0, \forall h \in \mathbb{N}$$

CVD

Il teorema afferma che **se la funzione è nulla in un intorno del cerchio di convergenza è nulla in tutto il cerchio di convergenza**.

DIMOSTRAZIONE SECONDO PRINCIPIO DI IDENTITÀ PER LE SERIE DI POTENZE

Ipotesi:

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \,, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \ : \ \rho$ è raggio di convergenza

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \,, \forall z \in B_{\rho'}(z_0)$ con $0 < \rho' < \rho$

Tesi:

$a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione:

Sia considerata la serie di potenze che ha come coefficiente la differenza dei due coefficienti in esame, poiché le rispettive serie hanno lo stesso raggio di convergenza anche la nuova serie avrà lo stesso raggio di convergenza e la si potrà assimilare ad una funzione analitica:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)(z-z_0)^n$$

Questa funzione nell'intorno $B_{\rho'}(z_0)$ assume valori nulli, visto che $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ e per il primo principio di identità delle serie di potenze:

$$a_n - b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

CVD

Il teorema afferma che **se una funzione è analitica, esiste ed è unica la serie di potenze che la descrive**. Di seguito sono proposti gli **sviluppi di Mac Laurin per le funzioni complesse notevoli**:

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \rho = +\infty$$

$$f(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \rho = +\infty$$

$$f(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}, \rho = +\infty$$

$$f(z) = \operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}, \rho = +\infty$$

$$f(z) = \sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \rho = +\infty$$

$$f(z) = \cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}, \rho = +\infty$$

Si può notare come per la funzione $\log z$ sia stata scelta una particolare determinazione perché la funzione è poliedrica.

CURVE E FORME DIFFERENZIALI NEL CAMPO COMPLESSO

Come anticipato in precedenza, una **curva nel campo complesso** è una **coppia** costituita da una **parametrizzazione** $\varphi: [a, b] \to A \subseteq \mathbb{C}$ e da un **sostegno** $\varphi([a, b]) = A$; di conseguenza, il modo migliore per poter indicare una curva è specificando questi due oggetti, ovvero (φ, A), ma in seguito questa nomenclatura sarà sostituita facendo (impropriamente) **riferimento alla curva solo con la sua parametrizzazione $\boldsymbol{\varphi}$**. Poiché ci si trova nel campo complesso, la **parametrizzazione** di una curva sarà una **funzione complessa**:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$$

E grazie a questa forma è possibile anche introdurre le **classi di continuità per le curve complesse**: una curva è di classe $C^k([a,b])$ se le sue parti reale e immaginaria sono funzioni di classi $C^k([a,b])$.

$$\varphi \in C^k([a,b]) \Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 \in C^k([a,b])$$

Da cui si può desumere la definizione di **curva regolare**. Una curva $\boldsymbol{\varphi}$ **è regolare se**:

1. $\varphi \in C^1([a,b])$;
2. $|\varphi'(t)| \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

Ovvero se **la parametrizzazione è derivabile con derivata continua e la norma del vettore tangente non si annulla mai**. Queste condizioni **giustificano l'esistenza del versore tangente** alla curva $\tau(t)$, pertanto:

$$\varphi \text{ è regolare} \Leftrightarrow \exists \tau(t) \ \forall t \in [a,b]$$

Una **curva** è detta **semplice** se la sua parametrizzazione è **iniettiva all'interno dell'intervallo in cui è definita** (se $I = [a,b]$ allora l'interno dell'intervallo è $\dot{I} = (a,b)$), ovvero **non si intreccia su sé stessa**.

$$\varphi \text{ è semplice} \Leftrightarrow \varphi \text{ è iniettiva in } \dot{I}$$

È sufficiente che la curva sia iniettiva nell'interno dell'intervallo, quindi non negli estremi, perché **se negli estremi la curva assume gli stessi valori** essa viene detta **curva chiusa** ed una curva chiusa può essere semplice.

$$\varphi \text{ è chiusa} \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

Sia considerata una **curva regolare**, si definiscono i **versori tangente $\boldsymbol{\tau(t)}$ e normale $\boldsymbol{\nu(t)}$ al punto $\boldsymbol{t_0}$**:

$$\tau(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}$$

$$\nu(t_0) = -i\tau(t_0)$$

Si può notare come **la regolarità della curva sia una condizione necessaria all'esistenza del versore tangente e**, di conseguenza, **del versore normale**, il quale è ottenuto da una **rotazione oraria di π/2 del versore tangente** (grazie al fasore $-i = e^{-i \cdot \pi/2}$). Una volta individuato il versore tangente ad un punto t_0, è possibile rilevare la **retta tangente** che passa per quel punto, ovvero **la retta generata dal versore in questione**:

$$r(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0)$$

ENUNCIATO TEOREMA DI JORDAN

Ipotesi:

$\forall \varphi \subseteq \mathbb{C}$: curva semplice e chiusa

Tesi:

φ divide il piano in due aperti connessi e disgiunti, A e B, tali che $\partial A = \partial B = \varphi$. Uno dei due insiemi è illimitato e detto esterno della curva, l'altro è limitato e detto interno della curva.

Di seguito sono proposte le diverse possibili **relazioni tra due o più curve**:

- **Curve simili (o equivalenti)**

$$\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\psi: [c, d] \to \mathbb{C}$$

$$\varphi \approx \psi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists h: [c, d] \to [a, b] \text{ biettiva} : h \in C^1([c, d]) \wedge h'(t) \neq 0 \ \forall t \in [c, d] \wedge \varphi\big(h(t)\big) = \psi(t)$$

In base al segno della derivata della funzione *h* si può determinare la concordanza o discordanza degli orientamenti delle due curve:

  - $h'(t) > 0$ le curve sono concordi
  - $h'(t) < 0$ le curve sono discordi

- **Curve opposte**

$$\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$-\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$-\varphi \text{ è opposta a } \varphi \Leftrightarrow -\varphi(t) = \varphi(a + b - t)$$

- **Curve contigue**

$$\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\psi: [c, d] \to \mathbb{C}$$

$$\varphi \text{ è contigua a } \psi \Leftrightarrow \varphi(b) = \psi(c)$$

Ovvero, due curve sono contigue se dove finisce una inizia l'altra; una curva regolare può sempre essere spezzata in due curve contigue.

- **Unione di due curve**

$$\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\psi: [c, d] \to \mathbb{C}$$

Tali che $\varphi(b) = \psi(c)$, l'unione di queste due curve è:

$$\varphi \vee \psi: [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$$

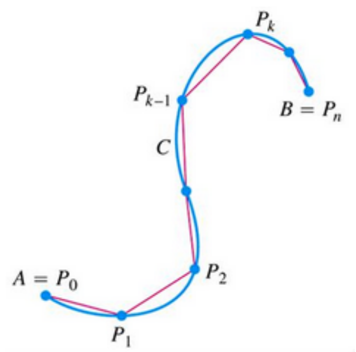
Dove:

$$(\varphi \vee \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) \Leftrightarrow t \in [a,b] \\ \psi(t-b+c) \Leftrightarrow t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Il motivo per cui l'unione delle due curve non è definita su $[a,b] \cup [c,d]$ è dovuta al fatto che non si può sapere a priori se tale insieme è un intervallo, su cui deve necessariamente essere definita una curva. Per ovviare a questo problema si considera la curva $\psi(t-b+c)$ con $t \in [b, b+d-c]$ equivalente a $\psi(t)$ con $t \in [c,d]$, dove $h(t) = t-b+c$ e $h'(t) = 1 > 0$, con la sicurezza che $[a,b] \cup [b, b+d-c]$ sia un intervallo.

Considerato un **arco di curva** $\boldsymbol{\varphi}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{C}$, con dominio chiuso e limitato, si può rilevare una **partizione dell'intervallo** su cui è definito (appartenente, quindi, all'insieme delle parti $\mathcal{P}$) tale che **esiste** $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_i})$ $\forall i \in [0,n]$:

$$\widetilde{P_n} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\} \in \mathcal{P}$$



L'unione dei segmenti che congiungono i singoli $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_i})$ è detta **poligonale** $\boldsymbol{P}$ **della curva** e si definisce **lunghezza della poligonale la sommatoria della misura di questi segmenti**:

$$L(P, \widetilde{P_n}) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

Mentre si definisce **lunghezza della curva l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali possibili**:

$$L(\varphi) = \sup\{L(P, \widetilde{P_n}) : \widetilde{P_n} \in \mathcal{P}\}$$

In termini più semplici, la lunghezza di una curva è la **lunghezza di una poligonale ottenuta da una partizione di infiniti punti**:

$$L(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} L(P, \widetilde{P_n}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

Nel momento in cui la **lunghezza di una curva** è **finita**, $L(\varphi) \in (0, +\infty)$, la curva è **rettificabile**.

ENUNCIATO CRITERIO DI RETTIFICABILITÀ DI UNA CURVA

Ipotesi:

$\forall\varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$: è una curva regolare a tratti

Tesi:

φ è rettificabile e $L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$

Poiché il campo complesso risulta essere un sottocampo di $\mathbb{R}^2$, di seguito verrà fatto un discorso generale sulle forme differenziali che si applica ad entrambi i campi. Sia considerato un **aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$**, una **forma differenziale** (**o campo vettoriale**) **definita in *A* è una funzione del tipo**:

$$\omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

Ovviamente le funzioni $\boldsymbol{a(x, y)}$ **e** $\boldsymbol{b(x, y)}$**, detti coefficienti** della forma differenziale, sono **definite in *A***. Se i **coefficienti sono di classe $\boldsymbol{C^k(A)}$**, anche la **forma differenziale** sarà **di classe $\boldsymbol{C^k(A)}$**:

$$\omega \in C^k(A) \Leftrightarrow a, b \in C^k(A)$$

Una **forma differenziale** viene detta **esatta in *A*** se è definita su tale insieme e se **esiste una funzione differenziabile tale che il suo gradiente coincide con il vettore $\boldsymbol{\big(a(x, y), b(x, y)\big)}$**:

$$\omega \text{ è esatta} \Leftrightarrow \exists\ f \text{ differenziabile} : \nabla f(x, y) = \big(a(x, y), b(x, y)\big)$$

La funzione ***f*** **è detta primitiva** (**o potenziale**) **della forma differenziale $\boldsymbol{\omega}$** e si può dimostrare come essa non sia unica ma **che tutte le primitive differiscono per una costante**, a patto che ***A*** **sia un aperto connesso**:

$$\omega \text{ è esatta} \wedge f, g \text{ sono due primitive} \Rightarrow \exists k > 0 : f(x, y) = g(x, y) + k$$

ENUNCIATO CRITERIO DI ESATTEZZA DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

Ipotesi:

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$: è un aperto connesso

$\forall\omega$: è definita in *A*

Tesi:

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. ω è esatta in *A*;
2. $\forall\gamma$: è una curva chiusa, regolare a tratti e con sostegno contenuto in *A*, $\int_\gamma \omega \cdot ds = 0$

3. $\forall \gamma_1: [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2: [c, d] \to \mathbb{R}^2$: sono due curve regolari a tratti, con sostegno contenuto in A e $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \wedge \gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, allora $\int_{\gamma_1} \omega \cdot ds = \int_{\gamma_2} \omega \cdot ds$

Questo teorema è molto importante per lo studio di una forma differenziale; infatti, permette di affermare che **se una forma differenziale è chiusa allora la circuitazione su di essa non dipende dal percorso preso in considerazione**, si può anche dire che **il campo vettoriale in questione è conservativo**.

Quello mostrato nel teorema è un **integrale curvilineo di seconda specie**, ovvero un **integrale di una forma differenziale lungo una curva regolare a tratti**:

$$\omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

$$\gamma: [a, b] \to A : \gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \text{ regolare a tratti}$$

$$\int_\gamma \omega(x, y)ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left[a\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_1'(t) + b\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_2'(t)\right]dt$$

Questo integrale **esiste nel momento in cui la forma differenziale ha un numero finito di discontinuità**. Una **forma differenziale** di classe $C^1(A)$ viene detta **chiusa in A** se **le derivate parziali incrociate dei coefficienti sono uguali**:

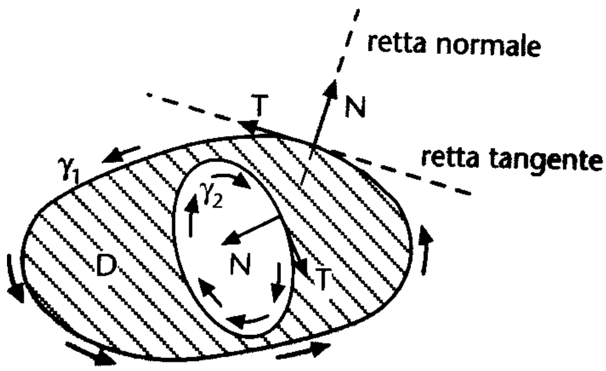
$$\omega \text{ è chiusa} \Leftrightarrow \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}$$

Tra **chiusura ed esattezza** in un aperto *A* intercorre la **seguente relazione**:

$$\omega \text{ è aperta} \Longrightarrow \omega \text{ è chiusa}$$

Ma non sempre vale **il contrario**, solo **quando l'insieme *A* è uno stellato** (ovvero convesso rispetto ad un punto) **o un insieme semplicemente connesso** (Lemma di Poincaré).

Un insieme $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ **è un dominio se è la chiusura di un aperto** ed è detto **dominio regolare se la sua frontiera $\boldsymbol{\partial D}$ è l'unione (chiusa) di un numero finito di curve regolari a tratti, semplici e contigue**. Un dominio regolare si può **orientare con verso positivo/negativo se il versore normale** (che esiste a meno di un numero finito di punti) **punta sempre verso l'esterno/interno** oppure se, percorrendo la frontiera, esso è sempre sulla sinistra/destra.



ENUNCIATO TEOREMA DELLA DIVERGENZA (O TEOREMA DI GAUSS-GREEN)

Ipotesi:

$\forall D \subseteq \mathbb{R}^2$: dominio regolare

$\forall F = (X, Y) \in C^1(D)$: è un campo vettoriale

Tesi:

$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} (Xdy - Ydx)$

Il nome del teorema risulta dal fatto che la quantità integrata nell'integrale doppio prende il nome di divergenza di un campo vettoriale:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Osservando le ipotesi del teorema sorge un dubbio: **le classi di continuità sono state definite solo su insiemi aperti** e il motivo risiede nel fatto che **per avere la continuità è necessario che esista e sia finito il limite di una funzione** (e delle sue derivate) **nei punti dell'insieme**; tuttavia, **sulla frontiera il limite esiste solo parzialmente** e, pertanto, **si scelgono solo i punti interni** (ovvero i punti di un aperto). Allora come è possibile che nel teorema della divergenza la forma differenziale è di classe C^1 in un dominio regolare, che per definizione è un insieme chiuso? In generale, **si può definire la classe di continuità $\boldsymbol{C^k}$ in insiemi chiusi $\boldsymbol{D}$ solo se esiste un insieme aperto $\boldsymbol{A \subseteq D}$ tale che la funzione in esame sia $\boldsymbol{C^k(A)}$**.

INTEGRALE CURVILINEO NEL CAMPO COMPLESSO

Sia presa una **funzione complessa a variabile reale**, quindi con parte reale e immaginaria:

$$g: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C} : g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$$

Supponendo la funzione $\boldsymbol{g}$ **continua**, si definisce l'**integrale di Riemann di $\boldsymbol{g(t)}$ in $\boldsymbol{dt}$** (o integrale di funzione complessa a variabile reale):

$$\int_a^b g(t)dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b g_1(t)dt + i\int_a^b g_2(t)dt$$

Sia $\boldsymbol{A}$ **un aperto,** $\boldsymbol{f}$ **una funzione complessa e continua in** $\boldsymbol{A}$ **e** $\boldsymbol{\gamma}$ **una curva regolare a tratti**, si definisce l'**integrale curvilineo di** $\boldsymbol{f}$ **lungo** $\boldsymbol{\gamma}$:

$$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ f \in C^0(A)$$

$$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C} : \ \gamma([a, b]) \subseteq A$$

$$\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Anche in questo caso, **l'integrale esiste se la funzione presenta un numero finito di discontinuità**. L'unica differenza con l'integrale curvilineo reale è l'assenza della norma per la derivata della parametrizzazione $\gamma'(t)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&\qquad = \int_{a}^{b} \Big(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\Big)\,dt \\
&\qquad + i\int_{a}^{b} \Big(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)\Big)\,dt \\
&\qquad = \int_{\gamma} (u \cdot dx - v \cdot dy) + i\int_{\gamma} (v \cdot dx + u \cdot dy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt &= \int_{a}^{b} u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\|\gamma'(t)\|dt + i\int_{a}^{b} v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\|\gamma'(t)\|dt \\
&= \int_{\gamma} u \cdot ds + i\int_{\gamma} v \cdot ds
\end{aligned}$$

Siano considerate le funzioni $f, g: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e le curve regolari a tratti di parametrizzazione $\gamma, \varphi: [a, b] \to \mathbb{C}$ tali che $\gamma([a, b]), \varphi([a, b]) \subseteq A$, l'integrale curvilineo in campo complesso gode delle seguenti **proprietà**:

1. $\int_{\gamma} \big(Af(z) + Bg(z)\big)dz = A\int_{\gamma} f(z) \cdot dz + B\int_{\gamma} g(z) \cdot dz$, detta **proprietà di linearità**;
2. $\left|\int_{\gamma} f(z) \cdot dz\right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot dz \leq \max_{z\in\gamma}\{|f(z)|\} \cdot L(\gamma)$, detta **disuguaglianza di Darboux**;
3. $\int_{\gamma\vee\varphi} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma} f(z) \cdot dz + \int_{\varphi} f(z) \cdot dz$, detta **proprietà di additività** e valida quando γ e φ sono contigue.
4. $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = \int_{\varphi} f(z) \cdot dz$, con $\gamma \approx \varphi$ due curve regolari a tratti concordi (se discordi i due integrali sono opposti)

Sia considerata una **funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$**, si dice che **$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una primitiva di *f* se**:

1. ***F* è olomorfa in *A***;
2. $\boldsymbol{F'(z) = f(z), \forall z \in A}$.

In generale, **se una funzione è dotata di primitiva è olomorfa**, grazie al principio di infinita derivabilità, **ma l'olomorfia non garantisce l'esistenza della primitiva** (è una condizione necessaria ma non sufficiente). Inoltre, **se una funzione *f* è olomorfa in un aperto connesso *A*, allora è dotata di primitiva in qualsiasi insieme semplicemente connesso $\boldsymbol{B \subseteq A}$**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA DIFFERENZA DI PRIMITIVE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $F, G: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono due primitive di f

Tesi:

$\exists k \in \mathbb{C} : F(z) = G(z) + k$

Dimostrazione:

Sia considerata la funzione:

$$H(z) = F(z) - G(z)$$

Bisogna dimostrare che questa funzione è costante. Si passi a derivare quanto appena rilevato:

$$H'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

Grazie alla definizione di primitiva è possibile dire che la funzione differenza di primitive ha derivata nulla, e cioè che è una funzione costante:

$$\exists k \in \mathbb{C} : H(z) = F(z) - G(z) = k$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CONTINUITÀ ED ESATTEZZA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto

Tesi:

f è dotato di primitiva $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \Leftrightarrow$

1. f è continua in A
2. $\omega_1(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$ e $\omega_2(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$ sono esatte

Dimostrazione:

Siano considerate le due implicazioni:

- f è dotato di primitiva $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \Rightarrow$ 1 e 2

La prima tesi è facilmente dimostrabile: poiché la primitiva è una funzione olomorfa che, derivata, restituisce la funzione in esame, si può direttamente affermare che la funzione è continua in quanto derivabile (grazie al teorema di infinita derivabilità). Per quanto riguarda la seconda tesi, bisogna ricordare che:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Ma poiché $F'(z) = f(z)$:

$$U_x(x, y) = V_y(x, y) = u(x, y)$$

$$-U_y(x, y) = V_x(x, y) = v(x, y)$$

E cioè:

$$\nabla U(x, y) = \big(u(x, y), -v(x, y)\big)$$

$$\nabla V(x, y) = \big(v(x, y), u(x, y)\big)$$

Ma questi non sono altro che i coefficienti delle due forme differenziali in esame, ω_1 e ω_2, le quali, essendo dotate di primitiva (*U* e *V*), sono esatte.

- 1 e 2 $\Longrightarrow f$ è dotato di primitiva $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

In quanto funzione complessa, *F* sarà composta come segue:

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Ma si possono considerare *U* e *V* come primitive delle forme ω_1 e ω_2:

$$\nabla U(x, y) = \big(u(x, y), -v(x, y)\big)$$

$$\nabla V(x, y) = \big(v(x, y), u(x, y)\big)$$

Da cui:

$$F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y) = V_y(x, y) - iU_y(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

Da cui si desume che la funzione *F* è una primitiva di *f*.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge\, f$ continua in *A*

$\forall \varphi: [a, b] \to A$ curva regolare a tratti

$F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una primitiva di *f* in *A*

Tesi:

$\int_\varphi f(z)dz = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)$

Dimostrazione:

Per definizione di integrale curvilineo:

$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$$

Ma poiché F è una primitiva di f:

$$f\big(\gamma(t)\big) = F'\big(\gamma(t)\big)$$

Per cui:

$$\int_{a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \int_{a}^{b} F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$$

Ma $F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ è la derivata della funzione $F \circ \varphi$, quindi:

$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \int_{a}^{b} F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{dF\big(\varphi(t)\big)}{dt}dt = \int_{a}^{b} dF\big(\varphi(t)\big)$$
$$= F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA INTEGRALE DI CAUCHY

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto $\wedge\, f \in H(A)$

Vale una delle seguenti condizioni:

1. A è semplicemente connesso e φ una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e con sostegno contenuto in A;
2. φ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e con interno contenuto in A

Tesi:

$\int_{\varphi} f(z)dz = 0$

Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema si può considerare anche solo la valenza della seconda condizione, in quanto essa implica automaticamente la prima. Costruendo il dominio regolare $D: \partial D = \varphi$, si può applicare il teorema della divergenza alla funzione, sapendo che essa è somma di una parte reale e di una immaginaria:

$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{+\partial D} f(z)dz = \int_{+\partial D} (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_{+\partial D} (v(x,y)dx + u(x,y)dy)$$
$$= -\iint_{D} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) dxdy + i\iint_{D} \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) dxdy$$

Ma poiché valgono le condizioni di Cauchy per l'olomorfia della funzione, i membri integrati si annullano e l'integrale totale è nullo.

CVD

ENUNCIATO TEOREMA DI MORERA (TEOREMA INVERSO INTEGRALE DI CAUCHY)

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso

φ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e con interno contenuto in *A*

$\int_{\varphi} f(z)dz = 0$

Tesi:

$f \in H(A)$

Si dimostra, quindi, che la conservatività dell'integrale curvilineo è una condizione necessaria e sufficiente per l'olomorfia di una funzione.

ENUNCIATO TEOREMA I DI APPROSSIMAZIONE UNIFORME DI INTEGRALI

Ipotesi:

$\forall f, f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è aperto e $f, f_n \in C^0(A)$

$f_n \to f$ uniformemente in *A*

$\forall \varphi: [a,b] \to A$ parametrizzazione di una curva regolare a tratti

Tesi:

$\lim_{n\to+\infty} \int_{\varphi} f_n(z)dz = \int_{\varphi} f(z)dz$

ENUNCIATO TEOREMA II DI APPROSSIMAZIONE UNIFORME DI INTEGRLAI

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è aperto e $f \in C^0(A)$

$\forall \varphi_n: [a, b] \to A$ parametrizzazione di una curva regolare a tratti con sostegno contenuto in *A*

$\varphi_n \to \varphi$ uniformemente in $[a, b]$

$\varphi_n' \to \varphi'$ uniformemente in $[a, b]$

Tesi:

$\lim_{n \to +\infty} \int_{\varphi_n} f(z)dz = \int_{\varphi} f(z)dz$

Quando si verificano le ipotesi del secondo teorema di approssimazione si può dire che φ_n converge a φ in norma C^1.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI CIRCUITI EQUIVALENTI

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} :$ A è un aperto e $f \in H(A)$

$\forall \gamma_1, \gamma_2$ curve regolari a tratti, semplici, chiuse, con lo stesso orientamento e con sostegno in *A*

D_1, D_2 interni di $\gamma_1, \gamma_2 : D_2 \subset D_1 \wedge D_1 \backslash D_2 \subset A$

Tesi:

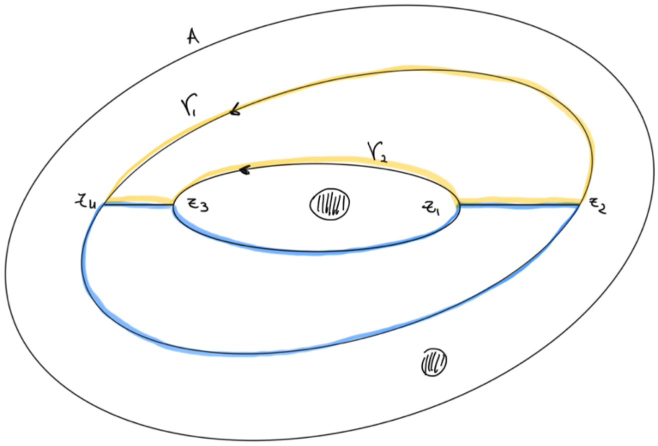
$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

Dimostrazione:

Con riferimento alla seguente figura, siano prese in considerazioni le due curve regolari a tratti, semplici e chiuse con sostegno in *A*:

$$\Gamma_1 = [z_1, z_2] \cup \gamma_1(z_2, z_4) \cup [z_4, z_3] \cup -\gamma_2(z_3, z_1)$$

$$\Gamma_2 = -\gamma_2(z_1, z_3) \cup -[z_4, z_3] \cup \gamma_1(z_4, z_2) \cup -[z_1, z_2]$$



Per il teorema di Cauchy è possibile affermare che:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

Cioè:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

Grazie alla proprietà di additività è possibile scomporre ogni singolo integrale:

$$\left[\int_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \int_{\gamma_1(z_2,z_4)} f(z)dz + \int_{[z_4,z_3]} f(z)dz + \int_{-\gamma_2(z_3,z_1)} f(z)dz\right] + \left[\int_{-\gamma_2(z_1,z_3)} f(z)dz + \int_{-[z_4,z_3]} f(z)dz + \int_{\gamma_1(z_4,z_2)} f(z)dz + \int_{-[z_1,z_2]} f(z)dz\right] = 0$$

Sapendo che l'orientamento dei singoli archi si propaga al segno dell'integrale e, pertanto, eliminando i contributi opposti:

$$\int_{\gamma_1(z_2,z_4)} f(z)dz - \int_{\gamma_2(z_3,z_1)} f(z)dz - \int_{\gamma_2(z_1,z_3)} f(z)dz + \int_{\gamma_1(z_4,z_2)} f(z)dz = 0$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

CVD

Le **due curve** analizzate nel teorema appena dimostrato **sono dette equivalenti rispetto alla funzione *f***. Si può osservare come il **teorema dei circuiti equivalenti** sia una **generalizzazione** del

teorema integrale di Cauchy: l'ipotesi mostrata è quella di insieme A aperto; tuttavia, quando esso è anche semplicemente connesso i due integrali si eguagliano a zero.

DIMOSTRAZIONE PRIMA FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto e $f \in H(A)$

$\forall \gamma$ curva regolare a tratti, semplice e chiusa : $D \subseteq A$, con D interno della curva

Tesi:

$\forall z_0 \in D, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

Dimostrazione:

Sia considerato $r_0 = d(z_0, \gamma) = \inf\{|z - z_0| : z \in \gamma\}$ e sia preso r tale che:

$$0 < r < r_0$$

Sia γ_r la frontiera dell'insieme $B_r(z_0)$, di equazione parametrica $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, con $t \in [0,2\pi]$; ne consegue, per definizione, che $B_r(z_0) \subset D$, pertanto:

$$D \backslash B_r(z_0) \subseteq A \backslash \{z_0\}$$

In queste condizioni sono soddisfatte le ipotesi del teorema dei circuiti equivalenti, per il quale:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ma il secondo membro può essere visto come:

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Sia considerata la funzione in due variabili ottenuta con queste considerazioni:

$$h(r, t) = f(z_0 + re^{it})$$

Definita in $[0, r_0] \times [0,2\pi]$ e continua per il teorema di Cantor. Integrando questa funzione in *dt* si ottiene una quantità numerica dal punto di vista della variabile *t* ed una funzione per la variabile *r*:

$$H(r) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Anche questa funzione è continua nel suo intervallo di definizione, $[0,2\pi]$; portando a limite la quantità inizialmente considerata:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt = i\lim_{r\to 0} H(r) = 2\pi i\cdot f(z_0)$$

Ma poiché la relazione individuata dal teorema dei circuiti equivalenti vale anche al tendere di *r* a zero:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\cdot f(z_0)$$

Da cui:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

CVD

ENUNCIATO SECONDA FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

Ipotesi:

$\forall f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C} : A$ è un aperto e $f\in H(A)$

$\forall\gamma$ curva regolare a tratti, semplice, chiusa e orientata positivamente $: D\subseteq A$, con D interno della curva

Tesi:

f è dotata di derivata di ogni ordine $n\in\mathbb{N}$

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \forall z_0\in D$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY

Ipotesi:

$\forall f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C} : f\in H\left(B_R(z_0)\right)$

$\exists M\in\mathbb{R}^+ : |f(z)|\leq M\ \forall z\in B_R(z_0)$

Tesi:

$\forall n\in\mathbb{N}, \left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\frac{M}{R^n}n!$

Dimostrazione:

Sia preso r tale che $0<r<R$ e si consideri la circonferenza $\varphi_r(z_0) = z_0+re^{it}$, con $t\in[0,2\pi]$, per la seconda formula integrale di Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Da cui:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{\varphi_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{n+1}|}dz \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{\varphi_r(z_0)} \frac{M}{r^{n+1}}dz$$
$$= \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}n!$$

Portando il parametro scelto a limite:

$$\lim_{r\to R^-}\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \lim_{r\to R^-}\frac{M}{r^n}n!$$

Da cui:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{M}{R^n}n!$$

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI LIOUVILLE

Ipotesi:

$\forall f$ funzione intera ($f \in H(\mathbb{C})$), $\exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(z)| \leq M$

Tesi:

f è costante

Dimostrazione:

Sia preso un $z \in \mathbb{C}$ e la circonferenza di suo centro e raggio $R > 0$, $\varphi_R(z)$, sfruttando la prima formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_R(z)} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Per dimostrare il teorema non bisogna fare altro che dimostrare $f'(z) = 0$; per la seconda formula integrale di Cauchy:

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\varphi_R(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_R(z)} \frac{M}{R^2}dw = \frac{M}{2\pi R^2}2\pi R = \frac{M}{R}$$

Con ciò si dimostra che la derivata prima è una funzione limitata:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

Portando il raggio della circonferenza all'infinito, facendola coincidere con il piano complesso:

$$\lim_{R\to+\infty}|f'(z)| = \lim_{R\to+\infty}\frac{M}{R} = 0$$

Pertanto:

$$f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

Una funzione a derivata prima nulla è una funzione costante.

CVD

Il seguente teorema nasce come diretta conseguenza del precedente.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ipotesi:

$\forall P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n : a_i \in \mathbb{C}\ \forall i \in [0, n]$

Tesi:

$\exists z_0 \in \mathbb{C} : P_n(z_0) = 0$

Dimostrazione:

Sia supposto per assurdo che il polinomio complesso, che è una funzione intera, non si annulli mai:

$$\nexists z_0 \in \mathbb{C} : P_n(z_0) \neq 0$$

Pertanto, è possibile costruire un'altra funzione intera a partire dal polinomio:

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

Questa funzione è per costruzione limitata entro un certo insieme di valori:

$$\exists R > 0\ \forall z \in \mathbb{C} :\ |z| > R\ \wedge |f(z)| < 1$$

Mentre il teorema di Weierstrass garantisce la limitatezza in $\overline{B_R(z)}$; ne consegue che la funzione è limitata in tutto il piano complesso e, per il teorema di Liouville, necessariamente costante. Dal momento in cui non può essere $P_n(z)$ costante, si raggiunge l'assurdo, il quale discende dall'aver supposto che un polinomio complesso non si annulla mai.

CVD

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI ANALITICITÀ DI FUNZIONI OLOMORFE

Ipotesi:

$\forall f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

Tesi:

f è analitica in A

Dimostrazione:

La definizione di analiticità viene dimostrata per un punto $z_0 \in A$ sapendo che può essere estesa a qualsiasi altro $z \in A$. Sia preso un qualsiasi numero $w \in \mathbb{C}$:

$$|z_0 - w| < R = \begin{cases} d(z_0, \partial A) \Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{C} \\ +\infty \Leftrightarrow A = \mathbb{C} \end{cases}$$

Sia preso un raggio *r* che sia tra le due quantità in questione:

$$r \in (|z_0 - w|, R)$$

Nell'intorno circolare $B_r(z_0)$ è possibile applicare la formula di Cauchy:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{z - w + z_0 - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z - z_0) - (w - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z - z_0)\left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}\right)} dz \end{aligned}$$

Il rapporto seguente è una quantità minore di 1, dal momento in cui $|z - z_0| = r > (w - z_0)$:

$$\left|\frac{w - z_0}{z - z_0}\right| = \left|\frac{w - z_0}{r}\right| < 1$$

Si può quindi applicare il teorema di Abel e vedere quel rapporto come la somma di una serie convergente:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \left(\frac{f(w)}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} (w - z_0)^n dz \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (w - z_0)^n \end{aligned}$$

Con questo risultato si è potuto esprimere la funzione nel punto w come una serie di potenze di centro z_0 dove:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

CVD

ZERI E SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE

Sia considerata una **funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$**, con A aperto, e un punto $z_0 \in A$. Si dice che **$\boldsymbol{z_0}$ è uno zero della funzione $\boldsymbol{f}$** se:

$$f(z_0) = 0$$

A differenza del caso reale, dove se le funzioni avessero avuto uno zero allora tutte le derivate possibili sarebbero state nulle in quel punto, **una funzione complessa può avere uno zero che rende una derivata non nulla nel punto** e gli si farà riferimento come **zero di ordine $\boldsymbol{k}$** $\in \mathbb{N}$ (zero semplice per $k = 1$):

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \wedge f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Come esempio sia presa la funzione $f(z) = z^3, \forall z \in \mathbb{C}$ e lo zero di ordine 3, $z_0 = 0$:

$$f(0) = 0^3 = 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$$

$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Esistono anche **zeri che non permettono questa proprietà**, in quel caso si parla di **zeri di ordine infinito**:

$$f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI ZERI DI FUNZIONE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

$\forall z_0 \in A$

Tesi:

z_0 è uno zero di ordine $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists g: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : g$ è derivabile in $z_0 \wedge g(z_0) \neq 0 \wedge f(z) = (z - z_0)^k g(z)$

Dimostrazione:

In quanto olomorfa, la funzione *f* è analitica:

$$\exists B_R(z_0) : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

Dalla teoria di funzioni reali si può ereditare la proprietà per cui l'alterazione di un numero finito di termini non altera il carattere di una serie; pertanto, poiché k è un numero finito, la serie scritta è ancora una serie convergente analitica:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} \to g(z)$$

Per cui:

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$$

Il teorema costituisce una doppia implicazione, di cui è stata analizzata solo una parte perché la restante è analoga alla procedura appena svolta.

CVD

Osservando la costruzione della funzione *f* e ricavando la funzione *g*:

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$$

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = g(z_0) \neq 0$$

Il risultato segue direttamente dall'olomorfia della funzione *g*; con questo ragionamento si può concludere che **la funzione *f* è un infinitesimo dello stesso ordine di $(\boldsymbol{z-z_0})^{\boldsymbol{k}}$**.

Un punto $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{S}$ **è di aderenza per un insieme $\boldsymbol{B} \subseteq (\boldsymbol{S},\boldsymbol{d})$** (dove *d* è una funzione distanza per lo spazio metrico associato) **se** $\exists(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{B} : \lim_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}$, ovvero se $x_n \to x_0$. Inoltre, si può dire che **un punto di accumulazione è sempre un punto di aderenza** ma non il contrario:

$$\text{accumulazione} \Longrightarrow \text{aderenza}$$

ENUNCIATO TEOREMA DELLE FUNZIONI IDENTICAMENTE NULLE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto e $f \in H(A)$

Tesi:

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è identicamente nulla in *A*;
2. f ha in $z_0 \in A$ uno zero di ordine infinito;
3. $Z = \{z \in A : f(z) = 0\}$ ha un punto di aderenza in *A*.

ENUNCIATO TEOREMA DELLE FUNZIONI NULLE E IDENTICAMENTE NULLE

Ipotesi:

$\forall f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

$f(z) = 0 \ \forall z \in U \subseteq A$, dove U è un intorno

Tesi:

f è identicamente nulla in A

Come conseguenza di questo teorema, si può affermare che **una funzione olomorfa non costante non può avere zeri di ordine infinito**, ma **solo zeri di ordine finito** che siano **punti isolati**.

DIMOSTRAZIONE PRINCIPIO DI IDENTITÀ

Ipotesi:

$\forall f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f, g \in H(A)$

$I = \{z \in A : f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in A

Tesi:

$f(z) = g(z), \forall z \in A$

Dimostrazione:

Sia considerata la funzione:

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

Che fa mutare l'insieme I in:

$$I = \{z \in A : h(z) = 0\}$$

Il che fa rientrare le ipotesi per la funzione h nel teorema delle funzioni identicamente nulle:

$$h(z) = f(z) - g(z) = 0, \forall z \in A$$

$$f(z) = g(z), \forall z \in A$$

CVD

Siano prese in considerazioni **due funzioni, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{C}$**, tali che **$\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A} \cap \mathbb{R}$, se $\boldsymbol{g(z)} = \boldsymbol{f(x)} \ \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{I} : \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$** (ovvero se la restrizione di g a I coincide con f) **$\boldsymbol{g}$ è univocamente determinata ed è detta prolungamento analitico di $\boldsymbol{f}$**.

Sia considerata una **funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$**, con A aperto, si dice che **un punto $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}$ è una singolarità per *f*** se:

$$z_0 \in \partial A$$

Tale **singolarità** è detta **isolata** se $\exists\ \boldsymbol{B_R^*(z_0)} \subseteq \boldsymbol{A}$ per qualche $\boldsymbol{R > 0}$; le singolarità isolate possono essere classificate in:

- **Singolarità eliminabile**

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$$

Il nome di questo tipo di singolarità introduce la possibilità di ignorare il problema sostituendo al punto il valore limite in una nuova funzione:

$$\tilde{f}: A \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} : \ \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) \Leftrightarrow z \in A \\ \ l \Leftrightarrow z = z_0 \end{cases}$$

Quando una situazione di questo tipo si verifica si dice che la funzione ***f* è prolungabile per continuità**.

- **Polo di ordine $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}$ (detto semplice se $n = 1$)

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^n = l \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

- **Singolarità essenziale** (se non è né eliminabile né un polo)

In genere una **funzione definita e olomorfa in un insieme aperto** ha solo **singolarità isolate**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE SINGOLARITÀ

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : A$ è un aperto e $f \in H(A)$

$z_0 \in \mathbb{C}$ è una singolarità isolata per *f*

Tesi:

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. z_0 è una singolarità eliminabile;
2. $\exists B_R^*(z_0) \subset A, M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in B_R^*(z_0)$;
3. $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) = 0$

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. z_0 è un polo;
2. $\exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. z_0 è una singolarità essenziale;
2. $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$;

Il teorema permette di astrarre una **classificazione delle singolarità isolate in funzione dell'esistenza o meno del limite della funzione**:

Singolarità eliminabile	**Polo**	**Singolarità essenziale**
$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$	$\exists \lim_{z \to z_0} \lvert f(z) \rvert = +\infty$	$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Si prenda in considerazione una **funzione composta dal rapporto di due funzioni $f_1, f_2 : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che hanno in z_0 uno zero di ordine**, rispettivamente, n_1 **e** n_2:

$$h(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

Quindi **esistono $g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe in *A* e non nulle in z_0**:

$$f_1(z) = (z - z_0)^{n_1} \cdot g_1(z)$$

$$f_2(z) = (z - z_0)^{n_2} \cdot g_2(z)$$

Per cui:

$$h(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = (z - z_0)^{n_1 - n_2} \cdot \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$

Osservando la funzione e cercando di individuare le sue singolarità:

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{n_1 - n_2} \cdot \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$
$$= \begin{cases} \infty \Leftrightarrow n_1 < n_2 \Longrightarrow z_0 \text{ è un polo di ordine } n_1 - n_2 \\ \dfrac{g_1(z_0)}{g_2(z_0)} \Leftrightarrow n_1 = n_2 \Longrightarrow z_0 \text{ è una singolarità eliminabile} \\ 0 \Leftrightarrow n_1 > n_2 \Longrightarrow z_0 \text{ è una singolarità eliminabile} \end{cases}$$

Sebbene non si possa dire di preciso, a priori, che tipo di singolarità sia z_0 nella funzione composta, si può certamente dire che **essa non è una singolarità essenziale**. Un **discorso analogo** può essere fatto con il **prodotto**:

$$h(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) : f_1(z) = (z - z_0)^{n_1} \cdot g_1(z) \wedge f_2(z) = (z - z_0)^{n_2} \cdot g_2(z)$$

Allora risulta:

$$h(z) = (z - z_0)^{n_1 + n_2} \cdot g_1(z) g_2(z)$$

E la funzione composta ha uno zero di ordine $\boldsymbol{n_1 + n_2}$.

ENUNCIATO TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI POLI

Ipotesi:

$\forall f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \in H\big(B_R^*(z_0)\big)$

Tesi:

z_0 è un polo di ordine $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}, \forall z \in B_R^*(z_0) \wedge g \in H\big(B_R^*(z_0)\big) : \; g(z_0) \neq 0$

ENUNCIATO TEOREMA DI RELAZIONE TRA ZERI E POLI

Ipotesi:

$\forall f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \in H\big(B_R^*(z_0)\big)$

z_0 è uno zero di ordine *n* per *f*

Tesi:

z_0 è un polo di ordine *n* per $\frac{1}{f}$

ENUNCIATO TEOREMA DI ADDITIVITÀ DEI POLI

Ipotesi:

$\forall f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

z_0 è un polo di ordine *n* per *f* e di ordine *m* per *g*

Tesi:

z_0 è un polo di ordine $n + m$ per $f \cdot g$

Sia adesso analizzato il concetto di **zero all'infinito**: preso il punto $z_0 = \infty$ ed un suo intorno $A = \{z : |z| > R, \forall R > 0\} \subseteq \mathbb{C}$, si può definire **la funzione $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \mathbb{C} : \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H(A)}$** e dire che essa **ha uno zero di ordine $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ in $\boldsymbol{z_0}$** se, **posto $\boldsymbol{w = \frac{1}{z}}$, la funzione $\boldsymbol{g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)}$ ha in $\boldsymbol{w_0 = 0}$ uno zero di ordine $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.**

Si può notare come lo studio di questo particolare zero parta dal presupposto che **è possibile prolungare la funzione *f* in modo olomorfo all'interno del cerchio A'** (escluso dal suo esterno A), andando a **trasformare lo studio di un punto all'infinito** (che non è un punto del piano complesso) **nello studio di un punto allo zero**.

$$A' = \mathbb{C} \backslash A = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{1}{R}, \forall R > 0 \right\}$$

RESIDUI DI UNA FUNZIONE

Sia considerata una **funzione $f: B_R^*(z_0) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$** $: f \in H\big(B_R^*(z_0)\big)$, si definisce **residuo di f nel punto z_0, singolarità isolata per f**:

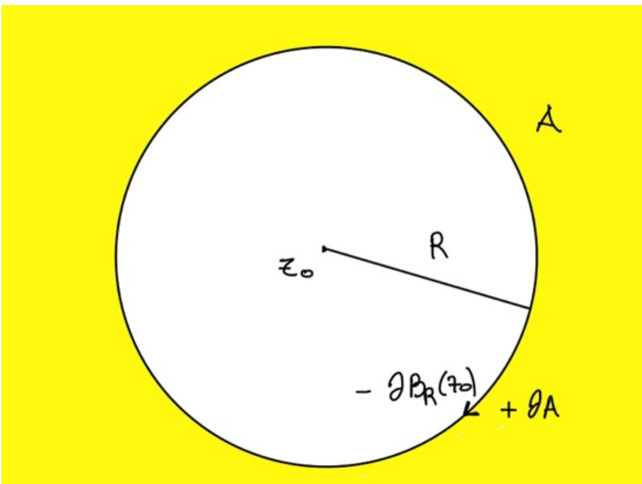
$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} f(z) dz \in \mathbb{C}$$

Dove $\boldsymbol{0 < r < R}$ e **γ una curva regolare a tratti, semplice e chiusa con il sostegno contenuto in $B_R(z_0)$**. **L'equivalenza di queste due espressioni del residuo** di una funzione è una conseguenza dei **teoremi dei circuiti equivalenti e di Cauchy**; infatti, il primo garantisce l'**equivalenza per qualsiasi intorno circolare con raggio minore di R** ed il secondo l'equivalenza **per ogni curva γ**. Infine, si può notare come **il residuo si annulli in tutti i punti z_0 in cui la funzione è olomorfa** grazie al **teorema integrale di Cauchy** e **dove il punto z_0 non rappresenta una singolarità**.

Se per un punto qualsiasi è stato scelto un suo intorno bucato, per calcolare il **residuo all'infinito di una funzione** sarà sufficiente prendere in considerazione **l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R, \forall R > 0\}$**, che **funge da intorno di infinito**, allora:

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(0)} f(z) dz$$

Con $r > R$, la cui validità risiede nel teorema dei circuiti equivalenti. **Il segno negativo del residuo dipende dall'orientamento positivo della curva $+\partial B_r(0)$, che è opposto all'orientamento positivo di $+\partial A$**:



$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_r(z_0)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial A} f(z)dz$$

ENUNCIATO TEOREMA DEL RESIDUO DEL RAPPORTO

Ipotesi:

$\forall f \in H\big(B_r^*(z_0)\big), g \in H\big(B_r(z_0)\big)$

z_0 è uno zero semplice per g

Tesi:

z_0 è un polo semplice per $\frac{f(z)}{g(z)} \wedge \text{res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

L'esistenza del residuo della funzione composta è data dal fatto che $\boldsymbol{z_0}$ **è uno zero semplice per** ***g***; quindi, esiste la derivata prima in tale punto e $\boldsymbol{g(z_0) \neq 0}$.

ENUNCIATO TEOREMA DEL RESIDUO DI UN POLO SEMPLICE

Ipotesi:

$\forall f \in H\big(B_r^*(z_0)\big)$

z_0 è un polo semplice per *f*

Tesi:

$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$

Questo teorema rappresenta una **particolare configurazione del seguente teorema**

ENUNCIATO TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEL RESIDUO DI UN POLO

Ipotesi:

$\forall f \in H\big(B_r^*(z_0)\big)$

z_0 è un polo di ordine $n \in \mathbb{N}$ per *f*

Tesi:

$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)(z - z_0)^n\right)\right]$

Con questi teoremi **è semplice calcolare il residuo di un polo**, dal momento in cui risulta scomoda la risoluzione dell'integrale; tuttavia, **essi escludono dai metodi meccanici rilevati le singolarità essenziali**, per le quali il residuo va calcolato seguendo la definizione.

DIMOSTRAZIONE PRIMO TEOREMA DEI RESIDUI

Ipotesi:

$\forall f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: A è un aperto

$f \in H(A \backslash \{z_1 \dots z_n\})$ con $n \in \mathbb{N} \wedge z_i \in A \; \forall i \in [1, n]$

$\forall D \subseteq A$ dominio regolare : $z_i \notin \partial D \; \forall i \in [1, n] \wedge \{z_1 \dots z_n\} \cap \dot{D} \neq \emptyset$

Tesi:

$\sum_{z_j \in \dot{D}} \operatorname{res}(f, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(z) dz$

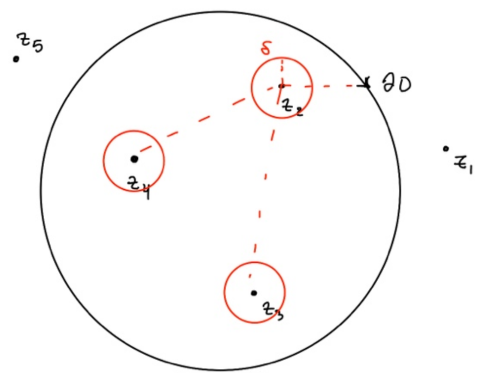
Dimostrazione:

Dalla seconda ipotesi del teorema si può dedurre che i punti $\{z_1 \dots z_n\}$ sono singolarità isolate; infatti, in esse la funzione *f* non è derivabile in senso complesso. Poiché tale sistema di punti e l'interno del dominio non sono disgiunti, esistono almeno *p* punti tali che:

$$z_i \in \dot{D}, \forall i \in [1, p]$$

Sia considerato un intorno circolare di un punto del sistema il cui raggio sia minore della distanza del punto dalla frontiera e da un qualsiasi altro punto del sistema:

$$0 < \delta < \min\left\{d(z_j, \partial D) \; \forall j \in [1, p], \frac{|z_j - z_k|}{2} \; \forall j, k \in [1, p] \wedge j \neq k\right\}$$



Dal dominio vengano sottratti tutti gli intorni circolari appena calcolati:

$$D' = D \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^{p} B_\delta(z_j) \right\}$$

Per ipotesi la funzione *f* è olomorfa in D', la cui frontiera:

$$\partial D' = +\partial D \cup \bigcup_{j=1}^{p} -\partial B_\delta(z_j)$$

Grazie al teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial D'} f(z)dz = 0$$

Ma:

$$\int_{+\partial D'} f(z)dz = \int_{+\partial D} f(z)dz - \sum_{j=1}^{p} \int_{+\partial B_\delta(z_j)} f(z)dz = 0$$

Per cui risulta:

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{p} \int_{+\partial B_\delta(z_j)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{res}(f, z_j)$$

Da cui discende la tesi.

CVD

ENUNCIATO TEOREMA DEL RESIDUO ALL'INFINITO

Ipotesi:

$\forall f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1 \dots z_n\})$ con $n \in \mathbb{N}$

$h(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ ha un polo semplice in $w_0 = 0$

$\lim_{w \to 0} -\frac{1}{w} f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{z \to \infty} -zf(z) = l \in \mathbb{C}$

Tesi:

$\operatorname{res}(f, \infty) = l$

DIMOSTRAZIONE SECONDO TEOREMA DEI RESIDUI

Ipotesi:

$\forall\{z_1 \dots z_n\} \subseteq \mathbb{C} : \exists f : \mathbb{C}\backslash\{z_1 \dots z_n\} \to \mathbb{C} \wedge f \in H(\mathbb{C}\backslash\{z_1 \dots z_n\})$

Tesi:

$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0$

Dimostrazione:

Sia considerato un raggio $R > \max\{|z_1| \dots |z_n|\} : \{z_1 \dots z_n\} \subseteq B_R(0)$, dove quest'ultimo si configura come un dominio regolare. Per il primo teorema dei residui:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(0)} f(z)dz$$

Si calcoli il residuo della funzione *f* all'infinito, sapendo che essa è certamente definita e olomorfa nell'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \max\{|z_1| \dots |z_n|\}\}$:

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

Dove $r > \max\{|z_1| \dots |z_n|\}$; tuttavia, visto che la definizione del residuo non dipende dal raggio dell'intorno circolare preso, è possibile prendere $r = R$, rendendo il residuo all'infinito:

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(0)} f(z)dz$$

Da cui:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(0)} f(z)dz = -\operatorname{res}(f, \infty)$$

Cioè:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0$$

CVD

È stato in precedenza accennato come per le singolarità essenziali non ci fossero teoremi che permettano di calcolare il residuo in maniera analoga ai poli; tuttavia, viene in aiuto il concetto di sviluppo in serie bilatera.

Sia preso un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, si definisce **corona circolare di centro $\boldsymbol{z_0}$ e raggi $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$**:

$$C_{R_1,R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq +\infty\}$$

La corona circolare non è un ente sconosciuto, infatti:

- $R_1 = 0, C_{0,R_2}(z_0) = B^*_{R_2}(z_0)$;
- $R_2 = +\infty, C_{R_1,+\infty}(z_0) = \mathbb{C} \backslash B^*_{R_1}(z_0)$
- $R_1 = 0 \wedge R_2 = +\infty, C_{0,+\infty}(z_0) = \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$

Assegnata una successione di coefficienti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si definisce **serie bilatera** (o **serie di Laurent**) **di centro z_0** $\in \mathbb{C}$ una serie del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Si può notare come essa **è possibile scriverla come serie di potenze**, dal momento in cui sono un particolare caso di serie bilatera:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Inoltre, **dire che una serie bilatera converge ad un punto z** $\in \mathbb{C}$ equivale a dire che **la somma delle due serie di potenze** che compongono la serie in esame **converge a z** (ovvero che esse convergono):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = z \in \mathbb{C}$$

Come visto, **la serie bilatera si può dividere in due serie di potenze**, dette **parte regolare** e **parte singolare**:

- Parte regolare $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$;
- Parte singolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Ponendo $w = \frac{1}{z-z_0}$, la **parte singolare** di una serie bilatera si può esprimere come **serie di potenze**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$$

Detto **R_1' il raggio di convergenza di questa nuova serie di potenze a centro nullo**, allora la parte singolare convergerà per:

$$|w| < R_1' \Leftrightarrow |z - z_0| > \frac{1}{R_1'} = R_1$$

Se poi **la parte regolare converge entro un raggio di convergenza R_2, la serie bilatera convergerà nella corona circolare di raggi R_1 e R_2**; inoltre, **la somma di questa serie può essere vista come una funzione analitica**, e quindi olomorfa, in $C_{R_1,R_2}(z_0)$ (vale anche la proposizione inversa).

ENUNCIATO TEOREMA DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI LAURENT

Ipotesi:

$\forall f \in H\left(C_{R_1,R_2}(z_0)\right)$ (ovvero funzione analitica)

Tesi:

$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ , } \forall z \in C_{R_1,R_2}(z_0) : \ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \ \forall r \in (R_1, R_2)$

Si possono, quindi, **calcolare i coefficienti di una serie bilatera convergente integrando lungo una qualsiasi circonferenza concentrica e inclusa nelle due della relativa corona circolare**; infatti, sono tutti circuiti equivalenti rispetto alla funzione $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ grazie al teorema dei circuiti equivalenti.

Da questo discorso risulta una proprietà particolare che coinvolge il **primo coefficiente della parte singolare** di una serie bilatera convergente, infatti:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) dz = \text{res}(f, z_0)$$

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA TOTALE DI UNA SERIE DI LAURENT

Ipotesi:

$\forall f \in H\left(C_{R_1,R_2}(z_0)\right)$ (ovvero funzione analitica)

Tesi:

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$ converge totalmente in $C_{R_1',R_2'}(z_0)$, con $R_1 < R_1' < R_2' < R_2$

Se una funzione è sviluppabile in serie di Laurent tale sviluppo è unico, quindi:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ , } \forall z \in C_{R_1,R_2}(z_0) \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Una **funzione analitica** nell'intorno $B_{R_2}(z_0)$ (quindi analitica nella corona circolare) **è sviluppabile in serie di Taylor** e la si può esprimere come una **serie di Laurent in cui la parte singolare è nulla**. Ad annullarsi sono i coefficienti grazie al **teorema integrale di Cauchy**, quindi:

$$a_n = 0, \forall n \leq -1$$

Ciò accade perché la funzione $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = f(z)(z - z_0)^{|n|-1}$ è analitica in $B_{R_2}(z_0)$ per $n \leq -1$.

Quanto appena mostrato suggerisce una **relazione tra la parte singolare della serie di Laurent**, di centro z_0, **e il punto $\boldsymbol{z_0}$** (singolare o meno).

ENUNCIATO TEOREMA DI RELAZIONE TRA PUNTO E SERIE DI LAURENT

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \in H(A)$

$\forall z_0$: è un punto singolare isolato

Tesi:

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \forall z \in B_r^*(z_0), \forall r \in \mathbb{R}$

Inoltre:

- z_0 è una singolarità eliminabile $\Leftrightarrow a_n = 0\ \forall n < 0$;
- z_0 è un polo di ordine $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_k = 0 \wedge a_{-n} \neq 0\ \forall k < -n$;
- z_0 è una singolarità essenziale $\Leftrightarrow a_k \neq 0\ \forall$ infiniti $k < 0$.

Questo risultato evidenzia come, **in presenza di eventuali singolarità**, la funzione **non possa essere più sviluppata in serie di potenze** (manca l'ipotesi di olomorfia), sebbene **sia ancora possibile rappresentarla in serie di Laurent**.

ENUNCIATO TEOREMA DEL RESIDUO DI UNA FUNZIONE PARI

Ipotesi:

$\forall f : f \in H\big(B_r^*(0)\big)\ \forall r \in \mathbb{R}$

$f(z) = f(-z)$

Tesi:

$\mathrm{res}(f, 0) = 0$

Siano studiati, mediante l'utilizzo delle serie bilatere, i **punti di singolarità di una funzione razionale** complessa del tipo:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

Dove $\boldsymbol{p(z)}$ **e** $\boldsymbol{q(z)}$ **sono polinomi complessi**. In base a quanto detto in precedenza, **i punti di singolarità di $\boldsymbol{f}$ sono gli zeri del polinomio $\boldsymbol{q}$**, che nel campo complesso esistono e **sono finiti**; da ciò discende che **le singolarità di una funzione razionale** sono certamente **isolate**. L'ordine *m* di uno zero di z_0 di q è il numero intero positivo per cui:

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

Dove $q_1(z)$ è un polinomio che verifica $q_1(z_0) \neq 0$. Consegue che:

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m q_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{p(z)}{q_1(z)}$$

Il rapporto tra i due polinomi $p(z)$ e $q_1(z)$ è una funzione olomorfa in z_0 (dal momento in cui $q_1(z_0) \neq 0$), quindi **ammette lo sviluppo in serie di Taylor** in un suo intorno:

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z : |z - z_0| < R$$

Di conseguenza:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

Da questo risultato **si può concludere che in z_0 la funzione f ha al più una singolarità eliminabile o un polo di ordine *m***; in altri termini, **una funzione razionale non può avere singolarità essenziali**.

L'esempio appena mostrato rappresenta uno dei metodi di ricerca dello sviluppo di Laurent che non fa uso dell'integrale che definisce i coefficienti a_n ma che, bensì, ricorre e opera sugli sviluppi di Taylor noti; in genere questa è la strada da prediligere.

TEOREMI DEI RESIDUI

Oltre ai teoremi principali discussi nel precedente capitolo, sui residui si possono enunciare e dimostrare altri teoremi secondari di importanza non minore.

DIMOSTRAZIONE LEMMA DEGLI ZERI E POLI DI UNA FUNZIONE

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

Tesi:

1. z_0 è uno zero di ordine *n* per $f \implies z_0$ è un polo semplice per $\frac{f'}{f}$ con res $\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = n$;
2. z_0 è un polo di ordine *n* per $f \implies z_0$ è un polo semplice per $\frac{f'}{f}$ con res $\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -n$.

Dimostrazione:

Nonostante le dimostrazioni delle due tesi siano analoghe, si possono fare le seguenti considerazioni:

1. z_0 è uno zero di ordine *n* per $f \implies z_0$ è un polo semplice per $\frac{f'}{f}$ con $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = n$

Siccome $f(z) = g(z)(z - z_0)^n$, con g funzione analitica e non nulla in un intorno di z_0, allora:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z - z_0)^n + ng(z)(z - z_0)^{n-1}}{g(z)(z - z_0)^n} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{n}{z - z_0}$$

Ma, siccome $\frac{g'}{g}$ è una funzione analitica in un intorno di z_0, il punto risulta essere un polo semplice per $\frac{f'}{f}$ con residuo:

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = n$$

2. z_0 è un polo di ordine *n* per $f \implies z_0$ è un polo semplice per $\frac{f'}{f}$ con $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -n$

Basta osservare che in un intorno bucato di z_0:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

Con $g(z)$ funzione olomorfa in suddetto intorno e $g(z_0) \neq 0$; la dimostrazione segue quella della tesi precedente.

CVD

Come conseguenza di questo lemma e del primo teorema dei residui, segue la **formula dell'indicatore logaritmico**.

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO FORMULA DELL'INDICATORE LOGARITMICO

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

$\forall \gamma \subseteq A$ una curva : $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \gamma \wedge \gamma = \partial D$ con D un aperto regolare contenente soltanto $z_1 \dots z_r$ tra i poli di *f* e soltanto $w_1 \dots w_s$ tra gli zeri di *f*

Tesi:

$\sum_{k=1}^{s} \operatorname{ord}(f, w_k) - \sum_{j=1}^{r} \operatorname{ord}(f, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

Dimostrazione:

Si specifichi che per $\text{ord}(f, w_k)$ e $\text{ord}(f, z_j)$ si indica l'ordine dei relativi poli e dei relativi zeri della funzione. Per il primo teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{s} \text{res}\left(\frac{f'}{f}, w_k\right) + \sum_{j=1}^{r} \text{res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) \right]$$

La tesi segue dal lemma precedente, infatti:

$$\sum_{k=1}^{s} \text{res}\left(\frac{f'}{f}, w_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \text{ord}\left(\frac{f'}{f}, w_k\right)$$

$$\sum_{j=1}^{r} \text{res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = \sum_{j=1}^{r} -\text{ord}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right)$$

CVD

I seguenti lemmi costituiscono dei risultati tecnici sulle funzioni continue utili a risolvere integrali definiti (impropri e non) di funzioni di variabile reale non elementarmente integrabili.

DIMOSTRAZIONE LEMMA DEL GRANDE CERCHIO

Ipotesi:

$\forall f : f \in C^0(S)$ dove $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r \wedge \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2\}$, con $r > 0 \wedge 0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq 2\pi$

$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lambda$

$\gamma_R = S \cap \partial B_R(0)$

Tesi:

$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = i\lambda(\vartheta_2 - \vartheta_1)$

Dimostrazione:

Per ipotesi di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > r : z \in S \wedge |z| > \delta, |zf(z) - \lambda| < \varepsilon$$

Sia $R > \delta$, tenendo presente che le equazioni parametriche di γ_R sono:

$$z(t) = Re^{it}, \forall t \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

Allora:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz - i\lambda(\vartheta_2-\vartheta_1)\right| = \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz - i\lambda\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} dt\right| = \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz - \lambda\int_{\gamma_R}\frac{1}{z}dz\right|$$
$$= \left|\int_{\gamma_R}\left[f(z)-\frac{\lambda}{z}\right]dz\right| \leq R(\vartheta_2-\vartheta_1)\cdot\frac{1}{R}\max_{x\in\gamma_R}|zf(z)-\lambda| < (\vartheta_2-\vartheta_1)\varepsilon$$

Da cui la tesi.

CVD

DIMOSTRAZIONE LEMMA DEL PICCOLO CERCHIO

Ipotesi:

$\forall f \in C^0(S=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|\leq r \wedge \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2\})$, con $r \geq 0$ e $0\leq\vartheta_1\leq\vartheta_2\leq 2\pi$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lambda$

Tesi:

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = i\lambda(\vartheta_2-\vartheta_1)$, con $\gamma_\varepsilon = S\cap\partial B_\varepsilon(z_0)$

Dimostrazione:

La dimostrazione è analoga a quella del lemma del grande cerchio

CVD

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO DEL LEMMA DEL GRANDE CERCHIO

Ipotesi:

$\forall P(x)$ di grado $m, Q(x)$ di grado n a coefficienti reali : $n > m+2$

$Q(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Tesi:

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ è integrabile su $\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{h}\text{res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$ con z_j gli zeri di $Q(z) : Im(z_j) > 0$

Dimostrazione:

L'integrale improprio in questione esiste e coincide con il suo valor principale, quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Quest'ultimo può essere valutato sulla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R$, di equazioni parametriche:

$$\gamma_1 = Re^{it}, \forall t \in [0,2\pi]$$

$$\gamma_R = x, \forall t \in [-R, +R]$$

Con $R > \max\{|z_1|, \dots, |z_j|\}$ in modo da far rientrare tutti i punti z_j all'interno di γ. Per il primo teorema dei residui:

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{h} \operatorname{res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Osservando che:

$$\int_{\gamma_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(\gamma(x))}{Q(\gamma(x))} \gamma'(x) dx = \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

E che:

$$\begin{aligned}\lim_{z \to +\infty} z \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{z \to +\infty} \frac{z z^m}{z^n} \cdot \frac{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}}{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}} \\ &= \lim_{z \to +\infty} \frac{z^{m+1}}{z^n} \cdot \lim_{z \to +\infty} \frac{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}}{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}} = 0 \cdot \frac{a_m}{b_n} = 0\end{aligned}$$

Grazie al lemma del grande cerchio, questa relazione sancisce che:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = i \cdot 0 \cdot (2\pi) = 0$$

E cioè:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{h} \operatorname{res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO DEL LEMMA DEL PICCOLO CERCHIO

Ipotesi:

$\forall f \in H\left(B_r^*(0)\right)$

0 è un polo semplice per f

Tesi:

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = i\pi \cdot \text{res}(f,0)$, con $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}\ \forall t \in [0,\pi]$

Dimostrazione:

Poiché 0 è un polo semplice per f, vale lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z) = \frac{\text{res}(f,0)}{z} + g(z)$$

Dove $g(z)$ rappresenta la parte regolare della serie bilatera, analitica in un intorno di 0. Poiché:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = i\pi$$

Risulta:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \text{res}(f,0)\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = i\pi \cdot \text{res}(f,0) + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz$$

Ma per il lemma del piccolo cerchio:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = 0$$

Quindi:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = i\pi \cdot \text{res}(f,0)$$

CVD

DIMOSTRAZIONE LEMMA DI JORDAN

Ipotesi:

$\forall f \in C^0(S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2 \leq \pi\})$

$\lim_{z \to +\infty} f(z) = 0$

Tesi:

$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz = 0\ \forall a > 0$ con $\gamma_R = S \cap \partial B_R(0)$

Dimostrazione:

Sia posto $M_R = \max_{z\in\gamma_R}|f(z)|$, per ipotesi si ha:

$$\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$$

Allora:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz\right| = \left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(Re^{it})e^{iRa\cos t - Ra\sin t}iRe^{it}dt\right| \leq M_R R\int_0^{\pi} e^{-Ra\sin t}dt$$
$$= 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin t}dt$$

Quest'ultima uguaglianza è una conseguenza della simmetria della funzione seno ristretta all'intervallo $[0,\pi]$ rispetto alla retta $t = \pi/2$. Per la concavità del seno in $[0,\pi/2]$ si ha che:

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t, \forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Da cui discende:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin t}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\frac{Rat}{\pi}}dt = -\frac{\pi}{2Ra}\left[e^{-2\frac{Rat}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2Ra}(1 - e^{-Ra})$$

Unendo i risultati ottenuti:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{M_R\pi}{a}(1 - e^{-Ra}) \to 0 \text{ per } R \to +\infty$$

Da cui discende la tesi.

CVD

Il teorema dei residui permette anche di risolvere intuitivamente integrali di funzioni di variabile trigonometrica su intervalli limitati, senza ricorrere a sostituzioni parametriche articolate.

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)d\vartheta$$

ENUNCIATO TEOREMA DI INTEGRAZIONE DI FUNZIONI A VARIABILE TRIGONOMETRICA

Ipotesi:

$\forall f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) : f$ è integrabile sull'intervallo $[0,2\pi]$

Tesi:

$\int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)d\vartheta = \int_\gamma f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz$ con $\gamma(t) = e^{it}\ \forall t \in [0,2\pi]$

INTEGRALI IMPROPRI

Gli **integrali impropri** si dividono in due categorie:

- **Integrali impropri di prima specie**

Sia $I = [a,b]$ e $c \in (a,b)$, presa $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \cup (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ **una funzione integrabile sugli intervalli** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\delta}]$ **e** $[\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{a}]$ $\forall\delta > 0$, si dice che $\boldsymbol{f}$ **è integrabile in senso improprio su** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ se **esistono finiti i limiti**:

$$\lim_{\delta_1\to 0^+}\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx \wedge \lim_{\delta_2\to 0^+}\int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$$

In tal caso **si pone**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1\to 0^+}\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2\to 0^+}\int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$$

Si noti che $\boldsymbol{\delta_1}$ **e** $\boldsymbol{\delta_2}$ **tendono a zero indipendentemente**. In molti settori dell'analisi matematica ha notevole importanza il c**aso particolare** $\boldsymbol{\delta_1} = \boldsymbol{\delta_2} = \boldsymbol{\delta}$, per cui:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx\right)$$

Quando questo limite esiste ed è finito viene detto **valor principale di Cauchy dell'integrale di** $\boldsymbol{f}$ **su** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ (una definizione più debole di quella dell'integrale improprio) e viene indicato con:

$$v.p.\int_a^b f(x)dx$$

Si può notare come **l'integrabilità, ordinaria o impropria, di una funzione** $\boldsymbol{f}$ **su un intervallo** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ **garantisce che tale integrale coincida con il suo valor principale** ma il contrario non è sempre valido: ci sono funzioni per cui il valor principale può anche esistere finito pur non esistendo l'integrale improprio.

- **Integrali impropri di seconda specie**

Sia $\boldsymbol{f}\colon [\boldsymbol{a}, +\infty) \to \mathbb{R}$ **una funzione Riemann integrabile in ogni intervallo del tipo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ $\forall c > a$, se **esiste finito il limite**:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

La funzione *f* si dice integrabile in senso improprio e si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

Analogamente, se $\boldsymbol{f}\colon (-\infty, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ **è una funzione Riemann integrabile in ogni intervallo del tipo** $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$ $\forall c < b$ e se **esiste finito il limite**:

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

La funzione *f* si dice integrabile in senso improprio e si pone:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

La crasi di queste due definizioni porta ad un **terzo tipo di integrale improprio di seconda specie**: sia $\boldsymbol{f}\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ **una funzione Riemann integrabile in ogni intervallo del tipo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subseteq \mathbb{R}$, se **esistono gli integrali impropri**:

$$\int_{-\infty}^{y^*} f(x)dx \wedge \int_{y^*}^{+\infty} f(x)dx \,, \forall y^* \in \mathbb{R}$$

La funzione *f* si dice integrabile in senso improprio su $(-\infty, +\infty)$ e si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{y^*} f(x)dx + \int_{y^*}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R_1 \to -\infty} \int_{R_1}^{y^*} f(x)dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_{y^*}^{R_2} f(x)dx$$

Se il seguente limite esiste viene definito valore principale secondo Cauchy dell'integrale improprio:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Se la funzione *f* è integrabile in senso improprio sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ esiste il valor principale secondo Cauchy dell'integrale improprio e viene detto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Ma, come nel caso degli integrali impropri di prima specie, **l'esistenza del valor principale non implica l'esistenza dell'integrale improprio**. Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ non è integrabile in senso improprio pur esistendo il valor principale:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$$

Date queste due definizioni particolari di Valor Principale secondo Cauchy dell'integrale improprio, si può procedere a fornirne una terza più generale. **Data una funzione *f*, definita in $\mathbb{R}$ e privata di un numero finito di singolarità $\boldsymbol{x_j}$ $\forall \boldsymbol{j} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}]$, si definisce valor principale dell'integrale di *f* esteso a $\mathbb{R}$ il seguente limite (se esiste ed è finito)**:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon_j \to 0^+}} \int_{[-R,R] \setminus \cup_{j=1}^{n} [x_j - \varepsilon_j, x_j + \varepsilon_j]} f(x)dx$$

Mentre **è frequente la richiesta di calcolo dell'integrale improprio** stesso, è spesso utile usare la **teoria dei residui per il calcolo del valor principale**; infatti, quando i due coincidono, il calcolo risulta più semplice. Prima, però, di sfruttare questo metodo, **è importante accertarsi l'esistenza dell'integrale improprio**; **solo in determinati casi non sono necessari preliminari accertamenti**, come per le **funzioni pari**:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \int_{-R}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{R} f(x)dx$$

In questo caso **l'esistenza del valor principale è condizione necessaria e sufficiente all'esistenza dell'integrale improprio**. Una simile proprietà vale anche per le **funzioni positive**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA DELL'INTEGRALE IMPROPRIO

Ipotesi:

$\forall f, g \in C^0([a, b))$:

1. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è limitata intorno a b
2. g è monotona e infinitesima in b

Tesi:

$\int_a^b f(x)g(x)dx$ converge

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA MEDIA

Ipotesi:

$\forall f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso e $f \in H(A)$

$\forall z_0 \in A : \bar{B}_R(z_0) \subset A$

Tesi:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)dt = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{B_R(z_0)} f(x+iy)dxdy$

Dimostrazione:

$\forall r \in [0, R]$, sia $\gamma(t) = z_0 + re^{it}\ \forall t \in [0,2\pi]$ una parametrizzazione di $+\partial B_R(z_0)$. Allora, per la formula integrale di Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{re^{it}} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt$$

Moltiplicando l'integrale appena ottenuto per r e integrando nel relativo intervallo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^R r\left(\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt\right)dr = f(z_0)\cdot\frac{R^2}{2}$$

Da cui:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)dt = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{B_R(z_0)} f(x+iy)dxdy$$

Si può osservare che r è il determinante della matrice Jacobiana relativa al cambiamento in coordinate polari.

CVD

Si può interpretare il teorema appena dimostrato come un **modo per calcolare il valore della funzione nel centro di un cerchio in cui essa è analitica come una quantità dipendente solo dai valori della funzione sul bordo del cerchio in questione**. Da esso deriva anche un teorema simile che si applica alle funzioni armoniche in due variabili.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DELLA MEDIA PER FUNZIONI ARMONICHE

Ipotesi:

$\forall u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \Omega$ è un aperto connesso e u è una funzione armonica

$\forall (x_0, y_0) \in \Omega : \bar{B}_R(x_0, y_0) \subset \Omega$

Tesi:

$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{B_R(x_0,y_0)} u(x,y)dxdy$

Dimostrazione:

u è una funzione armonica, quindi esiste una funzione *f* per cui:

$$Re(f) = u$$

Applicando il teorema della media e separando la parte reale e la parte immaginaria, si dimostra la tesi.

CVD

ENUNCIATO PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO PER FUNZIONI OLOMORFE

Ipotesi:

$\forall f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso $\wedge f \in H(A)$

f non è costante

Tesi:

I punti di massimo relativo di $|f|$ in un qualsiasi dominio $D \subset A$ sono solo sulla sua frontiera

Il seguente rappresenta un corollario del principio del massimo modulo.

ENUNCIATO PRINCIPIO DEL MINIMO MODULO

Ipotesi:

$\forall f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} : A$ è un aperto connesso $\wedge f \in H(A)$

$\exists z_0 \in A : |f(z)| \geq |f(z_0)| > 0 \; \forall z \in A$ (ovvero, non assume punti di minimo in *A*)

Tesi:

f è costante $\forall z \in A$

DIMOSTRAZIONE PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO PER FUNZIONI ARMONICHE

Ipotesi:

$\forall f$ continua in un dominio compatto $D \subset \mathbb{C}$, analitica e non costante in $\dot{D}$

Tesi:

Il massimo e il minimo di $Re\big(f(z)\big)$ e di $Im\big(f(z)\big)$ in D sono assunti sulla sua frontiera

Dimostrazione:

Sia considerata la seguente funzione:

$$g(z) = e^{f(z)}$$

Poiché è una funzione continua in D, analitica e non costante in $\dot{D}$, per il principio del massimo modulo e del minimo modulo il massimo e il minimo in D di $|g(z)| = e^{Re(f(z))}$ sono assunti in ∂D. Per la monotonia della funzione esponenziale in $\mathbb{R}$, l'affermazione è valida anche per $Re\big(f(z)\big)$. Per $Im\big(f(z)\big)$ si ragiona allo stesso modo con la funzione $h(z) = e^{if(z)}$.

CVD

ANALISI FUNZIONALE

MISURA DI INSIEMI E INTEGRALI DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

Si definisce:

- **Intervallo** di $\mathbb{R}^n$ ogni insieme del tipo $I_1 \times \ldots \times I_n : I_i \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo;
- **Plurintervallo** di $\mathbb{R}^n$ ogni insieme del tipo $R_1 \cup \ldots \cup R_s : R_i \subseteq \mathbb{R}^n$ è un intervallo tale che ogni intersezione $R_i \cap R_j$ è priva di punti interni (ovvero l'intersezione può avvenire solo sulla frontiera);
- **Rettangolo** di $\mathbb{R}^n$ ogni intervallo $I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n : I_i$ è un compatto;
- **Plurirettangolo** di $\mathbb{R}^n$ ogni plurintervallo $R_1 \cup \ldots \cup R_s : R_i \subset \mathbb{R}^n$ è un rettangolo.

Posto $I_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, si definisce **misura del rettangolo** $R = I_1 \times \ldots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ il numero reale:

$$m(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Da cui discende la definizione di **misura del plurirettangolo** $S = R_1 \cup \ldots \cup R_s \subset \mathbb{R}^n$:

$$m(S) = \sum_{i=1}^{s} m(R_i)$$

Si può banalmente affermare che **un qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}^n$ è un plurintervallo** e che **ogni plurirettangolo è un compatto**; tuttavia, **non si può affermare che esso è un rettangolo** perché **potrebbe essere un insieme aperto e/o illimitato**.

Un'ulteriore osservazione può essere fatta su **un caso di misura particolare**: ogni $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subseteq \mathbb{R}$ **ha misura $\boldsymbol{m([a, b]) = b - a}$ in** $\mathbb{R}$ ma ha **misura nulla se è considerato come segmento contenuto in $\mathbb{R}^n$ $\forall \boldsymbol{n} > \mathbf{1}$**. Infatti, in $\mathbb{R}^n$ il segmento è un insieme di punti del tipo $I \times \{x_i\} \ldots \times \{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ e la sua misura è:

$$m(R) = m(I) \cdot m(\{x_n\}) \cdot \ldots \cdot m(\{x_n\}) = 0$$

$$m(\{x_i\}) = m([x_i, x_i] \subset \mathbb{R}) = 0$$

Per **misura dell'aperto *A* e del compatto *K* in $\mathbb{R}^n$** si intende, rispettivamente:

$$m(A) = \sup\{m(P) : A \supseteq P \text{ plurirettangolo}\} \in [0, +\infty) \cap \{+\infty\}$$

$$m(K) = \inf\{m(P) : K \subseteq P \text{ plurirettangolo}\} \in [0, +\infty)$$

Mentre la **misura interna ed esterna di un insieme limitato *E* $\subset \mathbb{R}^n$** sono, rispettivamente:

$$\underline{m}(E) = \sup\{m(K) : E \supseteq K \text{ compatto}\} \in [0, +\infty)$$

$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A) : E \subseteq A \text{ aperto}\} \in [0, +\infty)$$

Un insieme *E* $\subseteq \mathbb{R}^n$ è detto **misurabile secondo Lebesgue** (o **L-misurabile**) se:

- $\underline{m}(E) = \overline{m}(E)$ con E limitato, in tal caso si pone $m(E) = \underline{m}(E) = \overline{m}(E)$;
- È misurabile l'insieme $E \cap B_r(\underline{0})\ \forall r \geq 0$ con E illimitato, in tal caso si pone $m(E) = \lim_{r \to +\infty} m\left(E \cap B_r(\underline{0})\right)$.

In alcune situazioni **è utile specificare**, oltre che la misura, **la dimensione dello spazio** in cui si sta agendo:

$$m_n(E) \text{ con } E \subseteq \mathbb{R}^n$$

La famiglia di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$ viene indicata con $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}$.

Si può dimostrare che **gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili**, in particolare i **plurirettangoli in quanto compatti**; in tal caso, **la misura secondo Lebesgue coincide con la definizione classica di misura mostrata in precedenza**. Su $\mathbb{R}^n$ possono essere fatte anche altre considerazioni, tipo che **insiemi costituiti da un solo elemento o l'insieme vuoto sono insiemi misurabili con misura nulla** oppure che **$\mathbb{R}^n$ stesso è misurabile e ha misura infinita** (per la definizione di misura secondo Lebesgue). Da quest'ultima considerazione discende la proprietà per cui **qualunque sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\boldsymbol{k < n}$ è altrettanto misurabile** ma ha **misura n-dimensionale nulla**.

La misura infinita di $\mathbb{R}^n$ non implica automaticamente che non esistono insiemi illimitati con misura finita; ad esempio, l'insieme:

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \wedge 0 < y < \frac{1}{x^2}\right\}$$

È un **insieme illimitato** che rappresenta la **porzione di piano con ascisse superiori ad 1 e ordinate comprese tra l'asse y e la funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2}}$**; la **misura di tale insieme** è:

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Che è una quantità **finita**.

Nella **teoria degli integrali secondo Lebesgue** hanno un'**importanza primaria gli insiemi di misura nulla**; affinché un insieme E sia misurabile di misura nulla **è sufficiente che $\boldsymbol{\overline{m}(E) = 0}$**, ovvero che $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \supset E : m(A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Di seguito sono mostrate delle proposizioni che permettono di **caratterizzare gli insiemi di misura nulla più facilmente**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DI INSIEMI DI MISURA NULLA

Ipotesi:

$\forall E \subset \mathbb{R}^n$

Tesi:

$m(E) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists (I_k)_{k \in \mathbb{N}} : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \wedge \sum_{k=1}^{+\infty} m(I_k) < \varepsilon$ con I_k rettangoli

ENUNCIATO TEOREMA DEL GRAFICO COME INSIEME DI MISURA NULLA

Ipotesi:

$\forall f: I \to \mathbb{R}$: è una funzione integrabile secondo Riemann sul rettangolo n-dimensionale *I*

Tesi:

$\text{grafico}(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{n+1}$

Siano individuate le seguenti **proprietà relative alla misura di insiemi in $\mathbb{R}^n$**:

1. $E \in \mathcal{M}_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A$ aperto e K compatto : $K \subseteq E \subseteq A \wedge m(A) - m(K) < \varepsilon$;
    a. $E \in \mathcal{M}_n \Leftrightarrow m(I) = \overline{m}(E \cap I) + \overline{m}(I \backslash E)\ \forall I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo;
2. $\forall E, F \in \mathcal{M}_n \Rightarrow F \backslash E \in \mathcal{M}_n$;
    a. $F \subseteq E \wedge m(F) < +\infty \Rightarrow m(E \backslash F) = m(E) - m(F)$;
3. $\{E_i\}_i \in \mathcal{M}_n \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i \in \mathcal{M}_n \wedge \bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i \in \mathcal{M}_n,\ m(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} m(E_i) \wedge m(\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i) \leq m(E_i)$;
    a. $E_i \cap E_j = \emptyset\ \forall i, j \Rightarrow m(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} m(E_i)$;
    b. $E_i \subseteq E_{i+1}\ \forall i \Rightarrow m(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \to +\infty} m(E_i)$;
    c. $E_i \supseteq E_{i+1}\ \forall i \wedge m(E_1) < +\infty \Rightarrow m(\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \to +\infty} m(E_i)$;
4. $E \in \mathcal{M}_n, F \in \mathcal{M}_k \Rightarrow E \times F \in \mathcal{M}_{n+k}$ con $m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) m_k(F)$;
5. $\forall E \in \mathcal{M}_n, \underline{y} \in \mathbb{R}^n : \exists E + \underline{y} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} - \underline{y} \in E\} \in \mathcal{M}_n \wedge m(E + \underline{y}) = m(E)$, detta **proprietà di invarianza per traslazione**;
6. $\forall E \in \mathcal{M}_n, A \in M_n$ ortogonale $: \exists F = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \underline{y} = A\underline{x},\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n\} \in \mathcal{M}_n \wedge m(F) = m(E)$, detta **proprietà di invarianza per trasformazioni ortogonali**;
7. $\forall F \subseteq \mathbb{R}^n$: è un insieme numerabile $\Rightarrow m(F) = m(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} m(\{x_i\}) = 0$;
8. $\forall F \subseteq E \subset \mathbb{R}^n : m(E) = 0 \Rightarrow m(F) = 0$, detta **proprietà di completezza della misura per insiemi di misura nulla**.

Una proposizione $\boldsymbol{P(x)}$ **è vera quasi ovunque quando l'insieme di valori che rendono la proposizione falsa è misurabile e ha misura nulla**:

$$m(\{x : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$$

Ad esempio, **la funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali coincide quasi ovunque con la funzione nulla**:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \\ 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} = 0 \text{ q.o.}$$

La classe di insiemi numerabili è particolarmente vasta, è lecito chiedersi se **esistano effettivamente insiemi non numerabili**. La risposta è affermativa ma per individuare un insieme di questo tipo **non si può assegnare una legge**, bisogna ricorrere all'assioma della scelta di Zermelo e affermarne solamente l'esistenza.

Un **plurintervallo $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{R}^n$ si dice semiaperto superiormente** (o **s.s.**) se è **il prodotto cartesiano di intervalli del tipo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \subset \mathbb{R}^n$**; la **misura di questo tipo di plurintervallo** è uguale alla **misura**

della sua chiusura, ovvero **del più piccolo plurirettangolo che contiene *P***. Data questa definizione, **si può definire un insieme $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ misurabile secondo Peano – Jordan** (o PJ – misurabile):

$$\tilde{m}(E) = \sup\{m(P) : E \supseteq P \text{ plurintervallo s.s.}\} = \inf\{m(P) : E \subseteq P \text{ plurintervallo s.s.}\} < +\infty$$

La relazione che intercorre tra L – misurabilità e PJ – misurabilità è la seguente:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \tilde{m}(E) \Longrightarrow \exists m(E) \wedge m(E) = \tilde{m}(E)$$

Pertanto, **se un insieme è PJ – misurabile esso sarà anche L – misurabile e le due misure coincideranno**; tuttavia, **se un insieme è L – misurabile non è detto che è PJ – misurabile**.

Un esempio già noto di **insieme PJ – misurabile è il rettangoloide di base $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ relativo alla funzione $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$ non negativa**, cioè:

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

La funzione in questione è **integrabile secondo Riemann**, cioè **la somma superiore e la somma inferiore coincidono**; esse rappresentano, rispettivamente, **misure di plurintervalli contenenti e contenuti in *T***. Quindi:

$$\tilde{m}(T) = m(T) = \int_a^b f(x)dx$$

L'esempio appena riportato induce ad una considerazione importante per gli argomenti a venire: se **la classe di insiemi $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}$ è maggiore della classe di insiemi misurabili secondo Peano Jordan**, allora **è possibile ampliare in maniera analoga anche la classe di funzioni integrabili secondo Riemann**. Questo discorso verrà approfondito e sviluppato in seguito.

Le differenze profonde tra la misurabilità secondo Lebesgue e secondo Peano Jordan possono essere riassunte nella seguente proposizione: **"Un insieme limitato di $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ è PJ – misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla secondo Lebesgue"**. **La misura di Lebesgue è più raffinata di quella di Peano Jordan** perché **l'insieme in esame è approssimato dall'interno con compatti e dall'esterno con aperti**; n**el primo caso si includono le parti di frontiera che appartengono all'insieme**, mentre **nel secondo si escludono quella parti di frontiera che non vi appartengono**. Essendo i plurintervalli né aperti né compatti, **secondo Peano Jordan tutta la frontiera viene sempre inclusa nella misura esterna e viene sempre esclusa da quella interna**.

ENUNCIATO TEOREMA DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA SECONDO PJ

Ipotesi:

$\forall E \subset \mathbb{R}^n$

Tesi:

$\tilde{m}(E) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon < +\infty$ rettangoli $I_1, \dots, I_{N_\varepsilon} : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} I_k \wedge \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \tilde{m}(I_k) < \varepsilon$

In genere **quando un insieme ha misura di Peano Jordan nulla**, anche la relativa **misura di Lebesgue è nulla**. Basta **scegliere i rettangoli vuoti da un certo N_ε in poi**.

Si definisce **funzione caratteristica di $E \subseteq \mathbb{R}^n$ la funzione**:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow x \in E \\ 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \backslash E \end{cases}$$

Mentre per **funzione semplice in $\mathbb{R}^n$** si intende ogni **combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi limitati $E_i \in \mathcal{M}_n$ a due a due disgiunti**:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i \chi_{E_i}(x)$$

Denotando con **S l'insieme di funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$**. **L'integrale di una funzione semplice $\Phi \in S$ è una quantità numerica espressa da**:

$$I(\Phi) = \sum_{i=1}^{r} c_i m(E_i)$$

E può essere indicato anche con i seguenti simboli:

$$I_n(\Phi) \qquad \int \Phi(x)dx \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)dx_1dx_2 \dots dx_n$$

Supponendo che la funzione semplice in questione sia non negativa, quindi $c_i \geq 0 \ \forall i$, allora **l'integrale può essere riformulato**:

$$I(\Phi) = \sum_{i=1}^{r} m_{n+1}(E_i \times [0, c_i])$$

Ogni funzione semplice $\Phi(x) \in S$ può essere definita su tutto $\mathbb{R}^n$ ponendola uguale a zero quando ci si trova al di fuori di ogni E_i. Le funzioni di questo tipo **non hanno una sola espressione analitica**, bensì **diverse rappresentazioni** che si possono **discostare dalla definizione di funzione semplice**; tuttavia, **l'integrale della funzione non dipende dalle sue diverse rappresentazioni**.

Si può dimostrare come **l'insieme di funzioni semplici è uno spazio vettoriale**, infatti:

$$\forall \Phi, \Psi \in S \Longrightarrow \Phi + \Psi \in S$$

$$\forall \Phi \in S \Longrightarrow |\Phi| \in S$$

$$\forall \Phi, \Psi \in S : \Phi \leq \Psi \Longrightarrow I(\Phi) \leq I(\Psi)$$

Finora **le funzioni semplici sono state definite solo su insiemi limitati**; tuttavia, adottando delle convenzioni **è possibile estenderle al caso in cui qualche insieme E_i sia illimitato**:

$$0 \cdot +\infty \coloneqq +\infty, c_i \cdot +\infty \coloneqq +\infty \text{ con } \forall c_i > 0$$

$$c_i + (+\infty) \coloneqq (+\infty) + (+\infty) \coloneqq +\infty \ \text{ con } \forall c_i \geq 0$$

Si definisce **Loc $\boldsymbol{K}$ l'insieme di funzioni *f* a supporto compatto che sono limitate e nulle al di fuori del compatto $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**; indicando con $\boldsymbol{S}_{+}$ **e** $\boldsymbol{S}_{-}$ **gli insiemi di funzioni semplici che**, rispettivamente, **maggiorano e minorano la funzione**:

$$S_{+} = \{\Phi \in S : \Phi(x) \geq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$S_{-} = \{\Phi \in S : \Phi(x) \leq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Si può facilmente dimostrare come **questi due insiemi non sono vuoti**; infatti, prendendo una $\boldsymbol{f} \in$ **Loc** $\boldsymbol{K} : |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{M}$ **allora** le funzioni:

$$\Phi_1 = M \cdot \chi_K \in S_{+}$$

$$\Phi_2 = -M \cdot \chi_K \in S_{-}$$

Sono, rispettivamente, **una maggiorazione e una minorazione della funzione *f***. Con queste informazioni a disposizione è possibile definire le seguenti quantità:

- **Integrale superiore di *f***

$$\overline{\int f(x)dx} = \inf\{I(\Phi) : \Phi \in S_{+}\}$$

- **Integrale inferiore di *f***

$$\underline{\int f(x)dx} = \sup\{I(\Phi) : \Phi \in S_{-}\}$$

La funzione *f* in esame è detta sommabile secondo Lebesgue se **i suoi integrali superiore e inferiore coincidono**, il cui valore è detto **integrale di *f*** ed è denotato con:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Finora l'unico integrale conosciuto era l'integrale di Riemann, costruito **a partire dalla misura in** $\mathbb{R}$, ma esso non è altro che **un particolare tipo di integrale di Lebesgue**; infatti, **una funzione *f* è integrabile secondo Riemann se**:

$$\sup\{I(\Phi) : \Phi \in S_{el} \wedge \Phi(x) \leq f(x)\} = \inf\{I(\Phi) : \Phi \in S_{el} \wedge \Phi(x) \geq f(x)\}$$

Dove **con $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{el}}$ si intende l'insieme delle funzioni semplici di intervalli limitati di** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Spesso si possono trovare anche le diciture Riemann integrabile, R – integrabile, Lebesgue sommabile e L – sommabile.

Si può dimostrare che, **presa una funzione $\boldsymbol{f} \in \mathbf{Loc}\,\boldsymbol{K}$, essa è sommabile se e solo se** $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}\; \exists \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\Phi} \leq \boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{\Psi} \wedge \int(\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{dx} < \boldsymbol{\varepsilon}$; inoltre, **dal momento in cui $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{el}} \subseteq \boldsymbol{S}$ si ha**:

$$\begin{aligned}\sup\{I(\Phi) : \Phi \in S_{el} \wedge \Phi(x) \leq f(x)\} &\leq \sup\{I(\Phi) : \Phi \in S \wedge \Phi(x) \leq f(x)\} \\ &\leq \inf\{I(\Phi) : \Phi \in S \wedge \Phi(x) \geq f(x)\} \leq \inf\{I(\Phi) : \Phi \in S_{el} \wedge \Phi(x) \geq f(x)\}\end{aligned}$$

Da queste proprietà appena enunciate, **si può dedurre che una funzione integrabile secondo Riemann è automaticamente sommabile secondo Lebesgue** e che, chiaramente, **i due integrali**

coincidano. In particolare, **la relazione tra i due integrali appena rilevata vale per le funzioni continue** (e per quelle continue a tratti); pertanto, **per l'integrale di Lebesgue continueranno a valere tutti i risultati ottenuti per l'integrale di Riemann**, come il teorema fondamentale del calcolo integrale.

FUNZIONI MISURABILI

Ricordando che sulla **retta reale ampliata**, $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, **le operazioni di somma, prodotto e ordinamento possono essere estese in maniera naturale** (ad eccezione della somma $-\infty + \infty$ e del prodotto $\pm\infty \cdot 0$), **una funzione $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta misurabile** se $\forall t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{F_t}$ **è misurabile**:

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\} = f^{-1}\big((t, +\infty)\big)$$

Sono misurabili le seguenti funzioni:

- **Funzioni costanti**, in relazione alla scelta di *t*, F_t può essere o 0 o ∞
- **Funzione caratteristica di $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ è misurabile**

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \chi_A(x) > t\} = \begin{cases} \emptyset \Leftrightarrow t \geq 1 \\ A \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{R}^n \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

- **La funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R} : \boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ è misurabile e $\boldsymbol{f}$ è monotona** (nell'esempio è stata supposta continua)

$$\forall t \in \mathbb{R}, c = \inf\{x \in E : f(x) > t\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Longrightarrow F_t = \{x \in E : f(x) > t\} = E \cap (c, +\infty) \vee F_t = E \cap [c, +\infty)$$

Ma in entrambi i casi F_t è un insieme misurabile in quanto intersezione di insiemi misurabili.

- **Funzioni continue**
- **La funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{D} \to \mathbb{R} : \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ sono misurabili e $\boldsymbol{f_{|E}}$ e $\boldsymbol{f_{|D}}$ sono funzioni misurabili**

$$f \text{ è misurabile} \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \{x \in E \cup D : f(x) > t\} \text{ è misurabile}$$

Ma poiché:

$$\left\{x \in E : f_{|E}(x) > t\right\} = \{x \in E \cup D : f(x) > t\} \cap E$$

$f_{|E}$ è misurabile (analogamente si può dire di $f_{|D}$). L'implicazione opposta si può verificare osservando che:

$$\{x \in E \cup D : f(x) > t\} = \left\{x \in E : f_{|E}(x) > t\right\} \cup \left\{x \in D : f_{|D}(x) > t\right\}$$

- **La funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R} : \boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ è misurabile e $\boldsymbol{g(x)}$ è misurabile**

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \Leftrightarrow x \in E \\ 0 \Leftrightarrow x \notin E \end{cases}$$

Infatti, se f è misurabile l'insieme:

$$\{x \in E : g(x) > t\} = \begin{cases} \{x \in E : f(x) > t\} \Leftrightarrow t \geq 0 \\ \{x \in E : g(x) > t\} \cup \{\mathbb{R}^n \backslash E\} \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

È misurabile in entrambi i casi. L'implicazione opposta si verifica prendendo $D = \mathbb{R}^n \backslash E$ e osservando come $g_{|D} = f$.

Di seguito, per semplicità, verrà fatto riferimento all'insieme di funzioni misurabili con il simbolo $\mathcal{F}$ e si può dimostrare essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

ENUNCIATO PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE MISURABILE

Ipotesi:

$\forall f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

Tesi:

Sono equivalenti:

1. f è misurabile;
2. $F_t' = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$;
3. $F_t'' = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$;
4. $F_t''' = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$;
5. $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n \; \forall A \subseteq \mathbb{R}$ insieme aperto.

ENUNCIATO PROPRIETÀ DI DUE FUNZIONI MISURABILI

Ipotesi:

$\forall f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : f, g$ sono funzioni misurabili

Tesi:

I seguenti insiemi sono misurabili:

1. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < g(x)\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$

ENUNCIATO TEOREMA DI MISURABILITÀ DELLE FUNZIONI OPERATE

Ipotesi:

$\forall f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in \mathcal{F}$

Tesi:

1. $f + c, cf \in \mathcal{F} \; \forall c \in \mathbb{R}$;
2. $f + g, f^2, f \cdot g \in \mathcal{F}$;
3. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $m(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)\,, M(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \in \mathcal{F}$;
4. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$: sono tutte definite in uno stesso insieme misurabile *A*; supponendo che la successione sia convergente (in $\overline{\mathbb{R}}$) per ogni punto di *A*, allora anche è misurabile anche la funzione $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$;
5. $|f| \in \mathcal{F}$;
6. $\forall \phi$ funzione continua su $\mathbb{R}$, allora $\phi \circ f \in \mathcal{F}$.

Da questo teorema possono essere astratte delle **proprietà importanti delle funzioni misurabili**; ad esempio, ponendo:

$$f_{2k+1}(x) = f(x) \wedge f_{2k}(x) = g(x) \; \forall k \in \mathbb{R}$$

Si può dire che:

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}\,, M(x) = \max\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{F}$$

In particolare, **data una funzione misurabile *f*, sono misurabili la sua parte positiva e la sua parte negativa** (che sono sempre quantità positive), definite come:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Si osservi che:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \wedge |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Infine, il punto 4 permette di dire che **lo spazio vettoriale di funzioni misurabili è chiuso rispetto alla convergenza puntuale**.

A questo punto si può procedere a **caratterizzare le funzioni misurabili in relazione al loro sottografico**; si definisce sottografico di una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ l'insieme:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y < f(x)\}$$

La funzione in questione è misurabile se e solo se è misurabile l'insieme $\boldsymbol{T} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Oltre che al sottografico, **la misurabilità di una funzione può essere messa in relazione anche con la sommabilità**; infatti, una **funzione limitata e nulla al di fuori di un compatto *K* è sommabile se e solo se essa è anche misurabile**.

Sia considerata una funzione $f \in \mathcal{F}$ non negativa, siano introdotti i seguenti insiemi:

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

$$\mathcal{G}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < y \leq f(x)\}$$

Si può dire che **per la funzione $f \in \mathcal{F}$ non negativa**, **limitata** e **nulla al di fuori di un compatto K**, gli insiemi **$\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ sono misurabili** e vale:

$$m_{n+1}(\mathcal{G}) = m_{n+1}(\mathcal{G}') = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Questo **integrale** è ancora **troppo forte**, si applica solo ad una **classe molto ristretta di funzioni**; lo si vuole estendere anche a funzioni non necessariamente limitate e ad insiemi non solo compatti. Sia considerata una funzione **$f \in E \subseteq \mathcal{M}_n$**; se **$f$ e E sono limitati**, **f è detta sommabile secondo Lebesgue su E** se risulta sommabile il prolungamento:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) \Leftrightarrow x \in E \\ 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \backslash E \end{cases}$$

E, in tal caso, si pone:

$$\int_E f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)dx$$

Mentre se **$f \geq 0$ su E** (non necessariamente limitati), posto **$f_r = \min\{r, f(x)\}$**, si dirà che **f è sommabile in E** se:

1. $\forall r > 0$ la funzione **$f_r(x)$ è sommabile in $E \cap B_r(0)$**;
2. $\exists \lim_{r\to+\infty} \int_{E\cap B_r(0)} f_r(x)dx$

Tale limite verrà detto **integrale di f esteso ad E**; si noti che **la non negatività della funzione f implichi la monotonia della funzione $h(r)$**, definita come:

$$h(r) = \int_{E\cap B_r(0)} f_r(x)dx$$

E quindi l'esistenza del limite. Si dirà che **l'integrale di f esteso ad E è infinito** quando, **soddisfatta la prima condizione, il limite della seconda condizione diverge**.

L'integrale su E eredita tutte le proprietà dell'integrale su $\mathbb{R}^n$; ad esempio, essendo E misurabile, f è misurabile in E se e solo se è misurabile l'insieme:

$$F_t = \{x \in E : f(x) > t\} \; \forall t \in \mathbb{R}$$

Si noti come non si è aggiunto null'altro alla definizione precedente; infatti, **se E e f sono limitati risulta $E \subseteq B_r(0)$ e $f = f_r \forall r \geq r_0$**. Infine, si può dimostrare che se **f è non negativa e sommabile su E**, vale la seguente uguaglianza:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \lim_{r\to+\infty} \int_{E\cap B_t(0)} f_r(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \lim_{t\to+\infty} \int_{E\cap B_t(0)} f_r(x)dx$$

Anche il discorso sugli insiemi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ può essere generalizzato, considerando una **funzione $f: E \to \mathbb{R}$ non negativa**; essa è **sommabile sull'insieme misurabile E** se e solo **se gli insiemi**:

$$\mathcal{G}'' = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

$$\mathcal{G}''' = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y \leq f(x)\}$$

Sono misurabili in $\mathbb{R}^{n+1}$ e hanno **misura finita**, nel qual caso si ottiene:

$$m_{n+1}(\mathcal{G}'') = m_{n+1}(\mathcal{G}''') = \int_E f(x)dx$$

Con quanto appena detto, è possibile **introdurre la definizione di integrale per funzioni di qualsiasi segno**. Si dirà che una funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ **è sommabile su** $\boldsymbol{E}$ **se sono sommabili entrambe le sue parti positiva** $\boldsymbol{f^+}$ **e negativa** $\boldsymbol{f^-}$ e, in tal caso, si porrà:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$$

La relazione tra sommabilità e misurabilità di una funzione f limitata su E limitato è valida proprio come nel caso precedente. Con queste informazioni è possibile rilevare una **relazione tra tre classi di funzioni definite su un insieme misurabile** $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$:

$$f \text{ è sommabile su } E \left(\int_E f^+(x)dx \text{ e } \int_E f^-(x)dx \text{ finiti}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ è integrabile su } E \left(\text{almeno uno tra} \int_E f^+(x)dx \text{ e } \int_E f^-(x)dx \text{ finiti}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ misurabile su } E$$

Sia $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **un insieme misurabile**, si denota con $\boldsymbol{L^1(\Omega)}$ **la classe di funzioni sommabili su** $\boldsymbol{\Omega}$.

Sia considerata una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile su E misurabile, posto:

$$F_{-\infty} = \{x \in E : f(x) = -\infty\} \wedge F_{+\infty} = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$$

Si ha che:

$$m(F_{-\infty}) = m(F_{+\infty}) = 0$$

Si dice che **una proprietà vale quasi ovunque in** $\boldsymbol{E}$ (abbreviato q.o.) **se vale per tutti gli** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ **tranne al più quelli appartenenti ad un sottoinsieme di** $\boldsymbol{E}$ **avente misura nulla**. Con questa convenzione, l'affermazione precedente può essere riassunta, dicendo che **una funzione sommabile su** $\boldsymbol{E}$ **è finita quasi ovunque in** $\boldsymbol{E}$.

Sia $\boldsymbol{E}$ **un insieme misurabile**, si dice che **una funzione reale** $\boldsymbol{f}$ **è continua quasi ovunque in** $\boldsymbol{E}$ **se ha come dominio un sottoinsieme** $\boldsymbol{D}$ **di** $\boldsymbol{E}$ **e se esiste un** $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{D}$**, misurabile e con** $\boldsymbol{m(E \backslash C) = 0}$**, tale che la restrizione di** $\boldsymbol{f}$ **a** $\boldsymbol{C}$ **è una funzione continua**.

ENUNCIATO TEOREMA DI VITALI

Ipotesi:

$\forall f$ limitata e nulla al di fuori di un compatto K

Tesi:

f è integrabile secondo Riemann se è continua quasi ovunque

Di seguito sono proposte delle **proprietà** che seguono ciò che è stato detto finora:

- Sia $\boldsymbol{E}$ **un insieme misurabile** e $\boldsymbol{f}$ **una funzione reale continua quasi ovunque in** $\boldsymbol{E}$, allora $\boldsymbol{f}$ **è una funzione misurabile in** $\boldsymbol{E}$;
- Sia $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ **una funzione sommabile e non negativa su** $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **misurabile**, allora $\int_E f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ q.o. } x \in E$
- Siano $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ **sommabili su** $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_n}$, allora:
  - $f + g, |f|, cf$ ($\forall c \in \mathbb{R}$) sono sommabili su E;
  - $\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$, $\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx$;
  - $f \leq g \Rightarrow \int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$;
  - $\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx$;
  - $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f(x)dx = 0$;
  - $F \subset E$ è misurabile $\Rightarrow \int_F f(x)dx = \int_E f(x) \cdot \chi_F(x)dx$.

ENUNCIATO LEMMA DI MISURABILITÀ DI UNA FUNZIONE

Ipotesi:

$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile

$\forall f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile

Tesi:

f è sommabile $\Leftrightarrow |f|$ è sommabile

Da questo lemma segue che, **nella teoria di Lebesgue, la sommabilità coincide con la sommabilità assoluta**; ciò **non è valido per l'integrabilità in senso improprio** (**secondo Riemann**). Prendendo la funzione:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \forall x \in (0, +\infty)$$

Essa è **integrabile in senso improprio**:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ma **non è assolutamente integrabile in senso improprio**, dal momento in cui gli integrali della parte positiva e negativa sono divergenti:

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^- dx = +\infty$$

Infatti, per $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)} \to +\infty$$

Analogamente per la parte negativa. Segue che:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx + \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^- dx = +\infty$$

Ovvero che **la funzione in esame non è assolutamente integrabile in senso improprio** (secondo Riemann) e quindi, in base ai due teoremi che verranno mostrati a breve, non sommabile secondo Lebesgue in $(0, +\infty)$.

ENUNCIATO TEOREMA DI SOMMABILITÀ SECONDO LEBESGUE IN $\boldsymbol{B_r(0)}$

Ipotesi:

$\forall f$ definita in $B_r(0)$ e integrabile secondo Riemann in ognuno degli insiemi $B_r(0) \backslash B_\varepsilon(0)$ con $\varepsilon \in (0, r)$

Tesi:

f è sommabile secondo Lebesgue in $B_r(0) \Leftrightarrow |f|$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann in $B_r(0)$

Gli integrali di f nei sensi di Lebesgue e Riemann generalizzato coincidono

ENUNCIATO TEOREMA DI SOMMABILITÀ SECONDO LEBESGUE IN $\boldsymbol{\mathbb{R}^n \backslash B_r(0)}$

Ipotesi:

$\forall f$ definita in $\mathbb{R}^n \backslash B_r(0)$ e integrabile secondo Riemann in ognuno degli insiemi $B_R(0) \backslash B_r(0)$ con $R > r$

Tesi:

f è sommabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n \backslash B_r(0) \Leftrightarrow |f|$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann in $\mathbb{R}^n \backslash B_r(0)$

Gli integrali di f nei sensi di Lebesgue e Riemann generalizzato coincidono

I TEOREMI DI PASSAGGIO A LIMITE E GLI INTEGRALI PARAMETRICI

Il teorema di passaggio a limite sotto il segno di integrale per successioni di funzioni richiede l'ipotesi supplementare di **convergenza uniforme** quando applicato agli **integrali di Riemann**; chiaramente è **un'ipotesi molto forte** che può essere **aggirata nell'ambito della teoria di Lebesgue**, in cui il teorema di passaggio a limite sotto il segno di integrale è **definito in ipotesi molto più generali**. Un primo risultato in questa direzione è il teorema che segue.

ENUNCIATO TEOREMA DI BEPPO LEVI (O DELLA CONVERGENZA MONOTONA)

Ipotesi:

$\forall \big(f_k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ integrabile su un insieme misurabile E

$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x)$ q.o. $x \in E$

$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$

Tesi:

$\int_E f(x)dx = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k(x)dx$

Ci si può chiedere se **l'ipotesi di non negatività** sia **essenziale per la tesi**; in realtà **sarebbe sufficiente supporre che**:

$$\int_E f_1(x)dx > -\infty$$

O, più generalmente, per qualche $h \in \mathbb{N}$:

$$\int_E f_h(x)dx > -\infty$$

In una di queste due condizioni si può applicare il teorema alle funzioni positive $g_k(x) = f_k(x) - f_1(x)$. Ovviamente esiste la versione duale del teorema per le funzioni decrescenti.

ENUNCIATO COROLLARIO DEL TEOREMA DI BEPPO LEVI

Ipotesi:

$\forall \left(f_k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}} : f_k(x) \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x$

$\left(f_k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni integrabili su E, insieme misurabile

Tesi:

$\int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E f_k(x) dx\right)$

ENUNCIATO TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Ipotesi:

$\forall h$ una funzione non negativa e sommabile su un insieme misurabile E

$\forall \left(f_k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni integrabili su E :

1. $|f_k(x)| \leq h(x)$ q.o. $x \in E$;
2. $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ q.o. $x \in E$.

Tesi:

f è sommabile e $\int_E f(x) dx = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k(x) dx$

Il teorema può essere falso nel momento in cui manchi la condizione 1.

ENUNCIATO COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA

Ipotesi:

$\forall E$ un insieme misurabile e di misura finita

$\forall \left(f_k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili in E :

1. $\exists M > 0 : |f_k(x)| \leq M$ q.o. $x \in E$;
2. $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ q.o. $x \in E$.

Tesi:

$\int_E f(x) dx = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k(x) dx$

Sia $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ **un insieme aperto**, $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **un insieme misurabile** e $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ **una funzione tale che** $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ **è sommabile in** $\boldsymbol{E}$ $\forall t \in A$. Si può definire la funzione:

$$F(t) = \int_E f(t,x)dx$$

Ci si pone il problema della **regolarità di questo nuovo tipo di funzione in relazione a quella di** $\boldsymbol{f}$.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRALE

Ipotesi:

La funzione $t \in A \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ è continua in A q.o. $x \in E$

$\exists g$ funzione sommabile su $E : |f(t,x)| \leq g(x)\ \forall t \in A, x \in E$

Tesi:

F è continua in A

Dimostrazione:

$$\forall t \in A, \forall (t_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset A : t_h \to t$$

Poiché $t \in A \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ è continua per quasi ogni $x \in E$:

$$\lim_{h\to+\infty} f(t_h, x) = f(t,x) \text{ q.o.} x \in E$$

Applicando il teorema della convergenza dominata, dal momento in cui $|f(t,x)| \leq g(x)$:

$$\lim_{h\to+\infty} F(t_h) = \lim_{h\to+\infty} \int_E f(t_h,x)dx = \int_E f(t,x)dx = F(t)$$

CVD

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Ipotesi:

La funzione $t \in A \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ è $C^1(A)$ q.o. $x \in E$

$\exists g_1, g_2, \dots, g_m$ funzioni sommabili su $E : \forall t \in A\ \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t_j}\right| \leq g_j(x), j \in [1,m]$ q.o. $x \in E$

Tesi:

$F \in C^1(A)$

$\frac{\partial F(t)}{\partial t_j} = \int_E \frac{\partial f(t,x)}{\partial t_j} dx$

Un caso interessante si ha quando $\boldsymbol{E}$ **è un intervallo della retta reale** ($E = [a,b]$). Supponendo che $\boldsymbol{f(t,x)}$ **e** $\boldsymbol{\partial f(t,x)/\partial t_j}$ **siano continue in** $\boldsymbol{A \times [a,b]}$, la funzione:

$$F(t,u,v) = \int_u^v f(t,x)dx$$

È **definita in** $\boldsymbol{A \times [a,b] \times [a,b]}$ ed è di **classe** $\boldsymbol{C^1(A \times [a,b] \times [a,b])}$; inoltre, risulta:

$$\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial t_j} = \int_u^v \frac{\partial f(t,x)}{\partial t_j} dx$$

$$\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial u} = -f(t,u)$$

$$\frac{\partial F(t,u,v)}{\partial v} = f(t,v)$$

Ora, se $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono funzioni di classe $C^1(A)$ a valori in $[a,b]$, si può porre:

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)dx = F\big(t,\alpha(t),\beta(t)\big)$$

Dalla formula di derivazione delle funzioni composte e da quanto appena rilevato si può concludere che:

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t_j} = f\big(t,\beta(t)\big)\frac{\partial \beta(t)}{\partial t_j} - f\big(t,\alpha(t)\big)\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t_j} + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t_j} dx$$

SPAZI NORMATI, SPAZI CON PRODOTTO SCALARE E SPAZI L^p

Sia considerato uno **spazio vettoriale** $\boldsymbol{V}$ **sul campo** $\boldsymbol{F}$, dove $\boldsymbol{F}$ **è il campo** $\mathbb{R}$ **o il campo** $\mathbb{C}$. Una **norma** è **un'applicazione** $\boldsymbol{V \to \mathbb{R}^+}$**,** indicata con $\|\cdot\|$ e che rispetta le seguenti **proprietà**:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \; \forall x,y \in V$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \; \forall \alpha \in F \; \forall x \in V$.

Con questi due strumenti, **è possibile definire la struttura algebrica** $\boldsymbol{(V, \|\cdot\|)}$ **uno spazio normato**. È possibile **rendere uno spazio normato di questo tipo uno spazio metrico** con la definizione di funzione distanza su V:

$$d(x,y) = \|x-y\| \; \forall x,y \in V$$

Detta **distanza indotta dalla norma**; uno **spazio normato** che risulti **completo** (ovvero, tutte le successioni di Cauchy dello spazio sono convergenti ad un elemento dello spazio) **rispetto alla distanza indotta dalla norma** è detto **spazio di Banach**. Ad esempio, lo spazio normato $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ costruito sullo spazio vettoriale di funzioni continua in $[a,b]$ e sulla norma:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

È uno spazio di Banach; infatti, se la successione $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, essa converge ad una funzione continua $f(x)$ e $\|f_n - f\| \to 0$. In genere **uno spazio normato è sempre uno spazio metrico ma non è vero il contrario**.

Uno **spazio normato V** è detto **separabile** se **esiste un sottoinsieme $U \subset V$ numerabile e denso** ($\bar{U} = V$) **in V**; in genere, **tutti gli spazi normati di dimensione finita sono separabili**.

Sia considerato uno **spazio vettoriale H sul campo F**, dove F è il campo $\mathbb{R}$ o il campo $\mathbb{C}$. Si definisce **prodotto scalare un'applicazione $H \times H \to F$**, indicata con $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ $\forall u,v \in H$ e che soddisfa le seguenti **proprietà**:

1. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$ $\forall \alpha,\beta \in F$ $\forall u,v,w \in H$;
2. $(u,v) = \overline{(v,u)}$ $\forall u,v \in H$;
3. $(u,u) > 0$ $\forall u \in H\backslash\{0\}$.

Da queste proprietà possono essere ricavate anche altre **affermazioni circa il prodotto scalare**:

- $(w, \alpha u + \beta v) = \bar{\alpha}(w,u) + \bar{\beta}(w,v)$ $\forall \alpha,\beta \in F$ $\forall u,v,w \in H$;
- $(u,0) = (0,u) = 0$ $\forall u \in H$.

Un esempio di **prodotto scalare** è quello **canonico**, introdotto sullo spazio $\mathbb{C}^n$:

$$(u,v) = \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{v}_k$$

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ è possibile definire lo stesso prodotto scalare ma visto che non esiste l'operazione di coniugio:

$$(u,v) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

In entrambi i casi si è supposto $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$.

In uno **spazio vettoriale H munito di prodotto scalare** è **definita in modo naturale una norma**, **indotta dal prodotto scalare**, detta anche **norma hilbertiana**:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

La **norma hilbertiana** gode delle seguenti **proprietà** per ogni coppia di vettori $u,v \in H$

- **Disuguaglianza di Schwartz**

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$$

- **Disuguaglianza triangolare**

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

- **Identità del parallelogramma** (somma delle diagonali al quadrato come somma dei quadrati dei lati)

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Uno **spazio vettoriale $\boldsymbol{H}$ dotato di norma indotta dal prodotto scalare** è detto **spazio pre – hilbertiano**, ed è uno **spazio normato**; in genere, **il contrario non è vero**, cioè **uno spazio normato non è a priori pre – hilbertiano** e **non è sempre possibile definire un prodotto scalare per cui la relazione $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ restituisce la norma**. Inoltre, **l'identità del parallelogramma costituisce una condizione necessaria** (si potrebbe dire anche **sufficiente**) **affinché uno spazio normato sia pre – hilbertiano**.

Uno **spazio pre – hilbertiano completo rispetto alla distanza**:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

È detto **spazio di Hilbert**, con $\|\cdot\|$ **norma hilbertiana**. Sia $\boldsymbol{H}$ **uno spazio di Hilbert**, su di esso sono possono essere **enunciate le seguenti definizioni**:

- $u, v \in H$ sono **ortogonali** $\Leftrightarrow (u,v) = 0$;
- $A \subseteq H$, $A^{\perp}$ è **l'insieme ortogonale di $\boldsymbol{A}$ ed è composto da tutti gli elementi di $\boldsymbol{H}$ che sono ortogonali a tutti gli elementi di $\boldsymbol{A}$**;
- $A \subseteq H$ è detto **sistema ortogonale** quando **i suoi elementi sono a due a due ortogonali**;
- Un **sistema ortogonale $\boldsymbol{A}$** è detto **completo** quando $\mathbf{span}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$, dove con $\mathbf{span}\, \boldsymbol{A}$ **si intende lo spazio vettoriale costituito dalle combinazioni lineari finite di elementi di $\boldsymbol{A}$**;
- Un **sistema ortogonale $\boldsymbol{A}$** è detto **ortonormale** quando **tutti i suoi elementi hanno norma unitaria**;
- Un **sistema ortonormale completo $\boldsymbol{A}$** è detto anche **base hilbertiana di $\boldsymbol{H}$**;
- $\boldsymbol{H}$ si dice **separabile** se possiede una **base hilbertiana finita o numerabile**.

ENUNCIATO PROPRIETÀ DELLE BASI HILBERTIANE

Ipotesi:

$\forall H$ spazio di Hilbert

$\forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ successione ortonormale

Tesi:

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana in $H \Leftrightarrow \left(\forall u \in H : \left(u, e_j\right) = 0\ \forall j \Longrightarrow u = 0\right) \vee$ (L'insieme delle combinazioni lineari finite degli elementi di $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in H)

ENUNCIATO TEOREMA DELLE PROIEZIONI

Ipotesi:

$\forall H$ spazio di Hilbert

$\forall H_n \leq H$ un sottospazio finito dimensionalmente e dotato della base ortonormale $(e_1, \dots, e_n)$

Tesi:

$\forall u \in H \; \exists! \, u_0 \in H_n : \; \|u - u_0\| = \min_{v \in H_n} \|u - v\|$

$u - u_0 \in H_n^{\perp}$

$\boldsymbol{u_0}$ (o $P_{H_n}u$) è detto **proiezione di $\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{H_n}$** e può essere definito come:

$$u_0 = P_{H_n}u = \sum_{j=1}^{n} (u, e_j) e_j$$

Inoltre, vale la seguente **relazione**:

$$\|u_0\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|(u, e_j)\right|^2 \leq \|u\|^2$$

Se il **sistema ortonormale $\boldsymbol{(e_j)_{j \in \mathbb{N}}}$** è in uno **spazio di Hilbert $\boldsymbol{H}$**, questa disuguaglianza $\forall u \in H$ diventa:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left|(u, e_j)\right|^2 \leq \|u\|^2$$

E viene detta **disuguaglianza di Bessel**. **La serie al primo membro converge** ($\lim_{j \to +\infty} \left|(u, e_j)\right|^2 = 0$, $(u, e_j) \to 0$) ed è possibile dire che:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} (u, e_j) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \left|(u, e_j)\right|^2$$

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA IN SPAZI PRE – HILBERTIANI

Ipotesi:

$\forall H$ spazio pre – hilbertiano

Tesi:

$$u_n \xrightarrow{n\to+\infty} u \wedge v_n \xrightarrow{n\to+\infty} v \Rightarrow (u_n, v_n) \xrightarrow{n\to+\infty} (u, v) \wedge \|u_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} \|u\|$$

ENUNCIATO TEOREMA DI EQUIVALENZA ALL'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

Ipotesi:

$\forall H$ spazio di Hilbert di dimensione finita

$\forall (e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ successione di vettori ortonormale

Tesi:

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo;
2. $u = \sum_{j=1}^{+\infty}(u, e_j)e_j \ \forall u \in H$;
3. $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty}\left|(u, e_j)\right|^2 \ \forall u \in H$ (uguaglianza di Parseval).

Sia $\boldsymbol{H}$ **uno spazio di Hilbert**, $\boldsymbol{(e_j)_{j\in\mathbb{N}}}$ **un sistema ortonormale in** $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{u}$ **un elemento di** $\boldsymbol{H}$, allora **i numeri reali** $\boldsymbol{(u, e_j)}$ al variare di $j \in \mathbb{N}$ sono detti **coefficienti di Fourier dell'elemento** $\boldsymbol{u}$ **rispetto al sistema ortonormale** $\boldsymbol{(e_j)_{j\in\mathbb{N}}}$. Dalle proprietà delle basi hilbertiane segue che se **il sistema** $\boldsymbol{(e_j)_{j\in\mathbb{N}}}$ **è completo** e $\boldsymbol{u \neq 0}$ allora **esiste necessariamente un coefficiente di Fourier non nullo**. La serie:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(u, e_j)e_j$$

È detta **serie di Fourier dell'elemento** $\boldsymbol{u}$ **rispetto al sistema** $\boldsymbol{(e_j)_{j\in\mathbb{N}}}$.

Sia $p \in \mathbb{R} : \ 1 \leq p < +\infty$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, si definisce:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ è misurabile} \wedge \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Inoltre, si definisce la **norma**:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \ \forall f \in L^p(\Omega)$$

Per le funzioni $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R}$ **misurabili e non negative è possibile introdurre l'estremo superiore essenziale di** $\boldsymbol{f}$ **su** $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) = \inf\left\{\alpha \geq 0 : m\left(f^{-1}\big((\alpha,+\infty)\big)\right) = 0\right\} = \inf\{\alpha \geq 0 : m(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}) = 0\} \in [0,+\infty]$$

Essenzialmente **l'estremo superiore della funzione a meno di insiemi di misura nulla**. Si pone:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ è misurabile} \land \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| < +\infty\right\}$$

Su di esso si definisce la **norma**:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| \;\; \forall f \in L^\infty(\Omega)$$

Ciò significa che **le funzioni $\boldsymbol{f}$ di questo spazio sono limitate quasi ovunque**:

$$f \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ q.o.} x \in \Omega$$

Infatti, sono dette anche **funzioni essenzialmente limitate**. Dalla definizione, segue che:

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

Ma se $\boldsymbol{f}$ **è continua su un aperto $\boldsymbol{A}$**:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f(x)|$$

Questo risultato deriva dal fatto che:

$$\{x \in A : |f(x)| > t\} = \{x \in A : f(x) < -t\} \cup \{x \in A : f(x) > t\} = f^{-1}\big((-\infty,-t)\big) \cup f^{-1}\big((t,+\infty)\big)$$

Ed è un **insieme aperto** in quanto **unione di insiemi aperti**; un aperto $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **non vuoto** è sicuramente un **insieme di misura positiva**:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U \land m\big(B_\varepsilon(x)\big) > 0$$

Per cui, in questo caso:

$$m(\{x \in A : |f(x)| > t\}) = 0 \Leftrightarrow \{x \in A : |f(x)| > t\} = \emptyset$$

Sia $1 \leq p \leq +\infty$, si definisce $\boldsymbol{p'}$ **esponente coniugato di $\boldsymbol{p}$** se:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Adottando la **convenzione per cui $\boldsymbol{1/\infty = 0}$**. Si può osservare che, necessariamente, $1 \leq p' \leq +\infty$; in particolare:

$$p = 1 \Rightarrow p' = +\infty$$

$$p = +\infty \Rightarrow p' = 1$$

$$p = 2 \Rightarrow p' = 2$$

L'esponente coniugato gioca un ruolo **fondamentale** nella **disuguaglianza di Hölder**.

ENUNCIATO TEOREMA DELLA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER

Ipotesi:

$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile

$\forall p, p' \in [0, +\infty]$ esponenti coniugati

$\forall f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$

Tesi:

$fg \in L^1(\Omega) \wedge \int_\Omega |fg| dx = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$

Da questo teorema discendono le seguenti **proprietà**. Sia $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ **misurabile**:

- $m(\Omega) < +\infty \Longrightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)\ \forall 1 \leq p < q \leq +\infty \wedge \|u\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q\ \forall u \in L^q(\Omega)$, adottando la convenzione per cui $q = +\infty \Longrightarrow 1/q = 0$;
- $\forall 1 \leq p < q < +\infty, \forall f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \Longrightarrow f \in L^r(\Omega)\ \forall p < r < q$;
- $f \in L^p(\Omega) : \|f\|_p \leq M\ \forall 1 \leq p < \infty \Longrightarrow f \in L^\infty(\Omega) \wedge \|f\|_\infty \leq M$;
  - Alternativamente si può dire che, **se una funzione è in tutti gli spazi $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$** (sufficientemente elevati) **con norma uniformemente limitata**, allora **è anche in $\boldsymbol{L^\infty(\Omega)}$**.

Gl**i spazi $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$ sono spazi vettoriali e $\|\cdot\|_p$ è una norma per ogni $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, +\infty]$** (sempre a condizione di identificare funzioni q.o. uguali). In questo modo è possibile definire una **convergenza nel senso della norma di $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$**; infatti, una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ in $L^p(\Omega)$ se:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA IN $L^p(\Omega)$

Ipotesi:

$\forall 1 \leq p \leq +\infty$

$\forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$

Tesi:

Valgono le seguenti proposizioni:

- $f_n \to f$ in $L^p(\Omega) \Longrightarrow \exists \left(f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, h \in L^p(\Omega) : f_{n_k} \to f$ q.o. $x \in \Omega \wedge \left|f_{n_k}(x)\right| \leq h(x)$ q.o. $x \in \Omega$;
- $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \exists B \subset \Omega : m(B) = 0 \wedge f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \backslash B$.

Quest'ultima proposizione, **in corrispondenza di funzioni continue in un aperto Ω**, permette di dire che **l'insieme di misura nulla è l'insieme vuoto** e che **la successione converge uniformemente alla funzione in tutto Ω**.

ENUNCIATO TEOREMA DI L^p COME SPAZIO DI BANACH

Ipotesi:

$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile

$\forall 1 \leq p \leq +\infty$

Tesi:

Lo spazio vettoriale normato $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach

In particolare, **$L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert** (**unico tra gli L^p**) **con prodotto scalare**:

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \,, \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

Inoltre:

- $1 \leq p < +\infty$, lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile;
- $p = +\infty$, lo spazio $L^p(\Omega)$ non è separabile.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f \in C^0(\Omega)$, si definisce **supporto della funzione f la chiusura** (relativa in Ω) **dell'insieme dove $f(x) \neq 0$**:

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega$$

Poiché **il supporto di una funzione deve essere incluso nel suo dominio**, è necessario **intersecare la chiusura dell'insieme con Ω**; infatti, può capitare che la chiusura comprenda punti della frontiera $\partial\Omega$, che non appartengono all'insieme aperto. Si definisce spazio delle funzioni test in Ω l'insieme di funzioni regolari su Ω che si annullano prima di raggiungere la frontiera $\partial\Omega$ o prima di raggiungere l'infinito, se Ω è illimitato:

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt} f \text{ è compatto}\}$$

Un esempio di **funzione test di $\mathbb{R}^n$** è:

$$u(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} \Leftrightarrow \|x\| < 1 \\ 0 \Leftrightarrow \|x\| \geq 1 \end{cases} \in D(\mathbb{R}^n)$$

Poiché **la derivata di una funzione test è il limite del rapporto incrementale**, e poiché questo è nullo al di fuori del supporto della funzione, allora:

$$g \in D(\Omega) \Longrightarrow g' \in D(\Omega) \wedge \operatorname{spt} g' \subset \operatorname{spt} g$$

Le funzioni di $\boldsymbol{D(\Omega)}$ sono molto importanti perché hanno **ottime proprietà** e perché **approssimano bene le funzioni di $\boldsymbol{L^p}$**.

ENUNCIATO TEOREMA DI DENSITÀ

Ipotesi:

$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto

Tesi:

$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0\ \exists f_\varepsilon \in D(\Omega) :\ \int_\Omega |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p dx < \varepsilon$

Il teorema afferma che **$\boldsymbol{D(\Omega)}$ è denso in $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$**, $\forall 1 \leq p < +\infty$. A volte può essere utile definire anche la **versione locale degli spazi $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$**:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \in L^p(K) : K \subset \Omega \text{ è compatto}\}$$

Una funzione di **$\boldsymbol{L^p_{loc}(\Omega)}$ ha un buon comportamento all'interno di $\boldsymbol{\Omega}$** ma **non restituisce informazioni nei pressi di $\boldsymbol{\partial\Omega}$**; ad esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1\big((0, +\infty)\big) \wedge f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{loc}\big((0, +\infty)\big)$$

Si può dire che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^p_{loc}(\Omega)$ a $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f_n \to f$ in $L^p(K)$ $\forall K \subset \Omega$ compatto.

Siano **$\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ funzioni misurabili in $\mathbb{R}^n$**, si definisce **prodotto di convoluzione** (o semplicemente **convoluzione**) **di $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$** la funzione:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Ed è **definita per tutti i valori di $\boldsymbol{x}$ per cui tale integrale esiste finito**. Per la convoluzione valgono le seguenti proprietà:

- **Proprietà di bilinearità;**
- **Proprietà commutativa**, $f * g = g * f$;
- **Proprietà associativa**, $(f * g) * h = f * (g * h)$;

- $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall p \in [1, +\infty] \Rightarrow f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$;
- $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$;
- **Disuguaglianza di Young**, $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)\ \forall p, q, r \in [1, +\infty] : \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \Rightarrow f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \wedge \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI PERIODICHE

Una **funzione $\boldsymbol{f}$**: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è detta **periodica di periodo $\boldsymbol{T}$** se:

$$f(x + T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

In realtà **il periodo di una funzione periodica non è unico**, nell'esempio di funzione appena descritto il periodo è $kT\ \forall k > 1$; tuttavia, è molto più comodo andare a lavorare con il **periodo fondamentale**, ovvero **il più piccolo periodo di una funzione periodica**, che nell'esempio è T. **Una qualsiasi funzione $\boldsymbol{f}$: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathbb{C}$ può essere prolungata ad una funzione $\tilde{\boldsymbol{f}}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica di periodo $\boldsymbol{b - a}$**, detta **prolungamento periodico di $\boldsymbol{f}$**; poiché **ogni numero reale può essere espresso nella forma $\boldsymbol{x + n(b - a)}$**, con opportuni $x \in [a, b)$ e $n \in \mathbb{Z}$, è sufficiente porre:

$$\tilde{f}\big(x + n(b - a)\big) = f(x)$$

Con:

$$n = \left[\frac{a - x}{b - a}\right]$$

Indicando con $[x]$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$.

La corrispondenza di queste due funzioni è biunivoca, quindi sarà possibile **studiare una funzione periodica di periodo $\boldsymbol{T}$ su tutto $\mathbb{R}$ o su un intervallo di ampiezza $\boldsymbol{T}$**. Questo artificio risulta comodo in diverse situazioni; ad esempio, **l'unica funzione periodica in $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$ è la funzione nulla**, mentre **in $\boldsymbol{L^2}\big((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big)$ ce ne sono in gran quantità**.

Si può osservare come **il prolungamento periodico** (di periodo $b - a$) **di una funzione non sia necessariamente continua nel punto $\boldsymbol{x = a + n(b - a)}$**, anche se la funzione da cui origina è continua in tale punto; in particolare:

$$\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in C\big([a, b)\big) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(a)$$

Inoltre, **tutte le funzioni periodiche di periodo $\boldsymbol{T > 0}$ costituiscono uno spazio vettoriale**.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI PERIODICHE

Ipotesi:

$\forall f$ periodica di periodo $T > 0$

Tesi:

$\forall a \in \mathbb{R}\ \int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$

Dimostrazione:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$

Imponendo al secondo integrale $x = y + T$ e visto che la funzione è periodica su T:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(y)dy - \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

CVD

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DI PERIODIZZAZIONE TRA FUNZIONI

Ipotesi:

$\forall f$ periodica di periodo $T_1 > 0$

$\forall T_2 > 0$

Tesi:

$g(x) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right)$ è periodica di periodo T_2

Dimostrazione:

Applicando la definizione di funzione periodica:

$$g(x + T_2) = f\left(\frac{T_1}{T_2}(x + T_2)\right) f\left(\frac{T_1}{T_2}x + T_1\right) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right) = g(x)$$

CVD

Un **ambito funzionale adatto a studiare le serie di Fourier** è lo **spazio di Hilbert $\boldsymbol{L^2\big((-\pi,\pi)\big)}$** con il **prodotto scalare**:

$$(u, v)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\bar{v}(x)dx\ \ \forall u, v \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$$

E con la **norma indotta**:

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \ \forall u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$$

Inoltre, **l'insieme numerabile $\mathcal{S}$**:

$$\mathcal{S} = \left\{e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, e_1' = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, e_2 = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, e_2' = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, e_n = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, e_n' = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

È **ortonormale rispetto al prodotto scalare definito**; ciò segue dalle seguenti relazioni valide per ogni $k, h \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = k\pi \ \forall k \geq 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(hx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(hx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(hx)\, dx = 0 \ \forall h, k \geq 0, h \neq k$$

Infine, si può affermare che **lo spazio $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ è separabile e un sistema ortonormale completo è dato da $\mathcal{S}$**.

Considerato $u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$, lo **sviluppo in serie di Fourier di u relativo al sistema $\mathcal{S}$** è, grazie al teorema di equivalenza e all'uguaglianza di Parseval:

$$u(x) = (u, e_0)_{L^2} e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(u, e_n)_{L^2} e_n + (u, e_n')_{L^2} e_n'\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Con:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(nx)\, dx \wedge b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin(nx)\, dx \ \ \forall n \geq 0$$

Questa definizione di questi parametri **è valida solo sotto le ipotesi di $u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$**. Si può osservare, a partire da queste definizioni, che:

- u è pari $\Longrightarrow b_n = 0 \ \forall n$;
- u è dispari $\Longrightarrow a_n = 0 \ \forall n$.
- $b_0 = 0$

In realtà **la formula di sviluppo in serie di Fourier va intesa nel senso che u è il limite in $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ della successione delle somme parziali**:

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Ovvero che la successione $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ **converge a $u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ in media quadratica**:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)-S_N(x)|^2dx=0$$

Cioè:

$$\|u(x)-S_N(x)\|_{L^2}\xrightarrow{N\to+\infty}0$$

Nonostante non verrà mostrata la dimostrazione (per una questione di difficoltà), è bene sapere che **la serie di Fourier di una funzione $\boldsymbol{u\in L^2\big((-\pi,\pi)\big)}$ converge quasi ovunque a $\boldsymbol{u}$**.

In $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ il seguente teorema prende anche il nome di **Teorema infinito – dimensionale di Pitagora**.

ENUNCIATO TEOREMA DELL'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

Ipotesi:

$\forall u\in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$

Tesi:

$\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)|^2dx=\|u\|_{L^2}{}^2=\pi\left[\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\right]$

$a_n,b_n\xrightarrow{n\to+\infty}0$ (detto Lemma di Riemann – Lebesgue)

Sfruttando le **Leggi di Eulero**, è possibile **descrivere la serie di Fourier di $\boldsymbol{u\in L^2\big((-\pi,\pi)\big)}$ in termini di fasori complessi**:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right]\end{aligned}$$

Con:

$$\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)(\cos(nx)-i\sin(nx))dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{-inx}dx$$

$$\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)(\cos(nx)+i\sin(nx))dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{inx}dx$$

Ponendo:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-ikx}dx \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

La serie di Fourier di $u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ diventa:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Poiché **la convergenza nel senso di L^2 non implica la convergenza puntuale**, si vogliono individuare **i teoremi che permettono di assicurare la convergenza della serie di Fourier in senso puntuale**.

Una **funzione** viene detta **continua a tratti in un intervallo $[a,b)$** se **è continua in $[a,b)$ a meno di un numero n finito di discontinuità $\xi_1,\dots,\xi_n$ per le quali esiste il limite destro e sinistro**:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi_i^+} u(x) = u(\xi+0) \\ \lim\limits_{x\to\xi_i^-} u(x) = u(\xi-0) \end{cases} \forall i \in [0,n]$$

Una **funzione** viene detta **regolare a tratti in un intervallo $[a,b)$** se è **derivabile in $[a,b)$ a meno di un numero n finito di punti $\xi_1,\dots,\xi_m$ (in cui non è continua) $\eta_{m+1},\dots,\eta_n$ e se la derivata, laddove esista, è limitata**.

Una **funzione** viene detta **continua a tratti** (dualmente **regolare a tratti**) **in** $\mathbb{R}$ **se è continua a tratti** (dualmente **regolare a tratti**) **in ogni intervallo $[a,b)$** $\subseteq \mathbb{R}$.

Si può osservare che **le funzioni regolari a tratti hanno al più un numero finito di salti e punti angolosi ma non possono avere asintoti verticali, punti a tangente verticale o cuspidi**. Inoltre, una **funzione u continua a tratti è limitata e**, avendo un numero finito di discontinuità, **è integrabile in ogni intervallo $[a,b)$**.

Una funzione u periodica di periodo T sarà **completamente nota** una volta che è **nota in un intervallo $[a,a+T)$ di ampiezza T**; dualmente, **una funzione u definita in un intervallo $[a,a+T)$ potrà sempre essere prolungata** al di fuori di tale intervallo **ad una funzione u^* periodica di periodo T**. Analiticamente:

$$u^*(x) = u(x-kT) \text{ se } x \in [a+kT, a+kT+T)$$

Anche **se u fosse regolare**, il suo prolungamento **u^* avrà un salto nei punti $a, a\pm T, a\pm 2T$ ... di ampiezza**:

$$s = \lim_{x\to a^+} u(x) - \lim_{x\to(a+T)^-} u(x)$$

Oltre la convergenza in media quadratica, **nell'analisi delle serie di Fourier ci sono anche altri tipi di convergenza di interesse**; uno tra questi, come è stato già anticipato, è la **convergenza puntuale**, di cui un primo risultato è il teorema seguente.

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE DELLA SERIE DI FOURIER

Ipotesi:

$\forall u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti

Tesi:

$\frac{u(x+0)+u(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$

Questo risultato equivale a dire che **la serie di Fourier di u converge puntualmente a $u(x)$ nei punti in cui questa è continua** e **alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità**; si può, quindi, desumere che **la serie di Fourier di u converge uniformemente a u in $[a, b]$ se la funzione è continua in $[a, b]$**.

Se **l'ipotesi di regolarità a tratti è necessaria** affinché la serie converga puntualmente, **l'ipotesi di continuità sull'intervallo sopra mostrata è sufficiente**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA TOTALE DELLA SERIE DI FOURIER

Ipotesi:

$\forall u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione periodica di periodo 2π, regolare a tratti e continua su $\mathbb{R}$

Tesi:

La serie di Fourier di u converge totalmente (e quindi uniformemente) a u su $\mathbb{R}$

Il teorema può essere ulteriormente **generalizzato**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CONVERGENZA UNIFORME DELLA SERIE DI FORURIER

Ipotesi:

$\forall u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti

Tesi:

La serie di Fourier di u converge uniformemente a u in ogni intervallo $[a, b]$ in cui u è continua

Naturalmente, quanto detto finora può essere **esteso a intervalli $(0, T)$ con $T > 0$**; in tal caso, la funzione **$u \in L^2((0, T))$ ha coefficienti di Fourier**:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx \wedge b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx \ \forall n \geq 0$$

Ed il corrispettivo **sviluppo in serie di Fourier è**:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right]$$

E **l'identità di Parseval** diventa:

$$\|u\|_{L^2(0,T)}{}^2 = \frac{T}{2}\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\right]$$

Oltre alla forma reale, **si può esprimere questa serie di Fourier in forma esponenziale complessa**. Fissata $u \in L^2\big((0,T)\big)$, considerato il **sistema ortonormale**:

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{e^{in\frac{2\pi}{T}x}}{\sqrt{T}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

E i coefficienti:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

La **serie di Fourier in forma fasoriale** è:

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

Tale uguaglianza **vale con convergenza in $\boldsymbol{L^2\big((0,T)\big)}$**. Con riferimento a questa forma, **l'uguaglianza di Parseval** diventa:

$$\|u\|_{L^2(0,T)}{}^2 = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

Sulla **convergenza puntuale** della serie di Fourier, un risultato più profondo è dato dal seguente teorema (sapendo che una funzione è monotona a tratti se in un intervallo se questo può essere diviso in un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali la funzione è monotona).

ENUNCIATO TEOREMA DI DIRICHLET

Ipotesi:

$\forall u: [0,T] \to \mathbb{R}$ limitata in $[0,T]$ e monotona a tratti

Tesi:

La serie di Fourier di u converge a u in ogni punto con somma $s(x) = \frac{u(x+0)+u(x-0)}{2}$

In particolare, **in ogni punto di $(0, T)$ in cui la funzione u è continua la serie converge a $u(x)$**; **negli estremi** questo è valido **solo se $u(0) = u(T)$**. La **condizione di raccordo** garantisce la continuità in $\mathbb{R}$ della funzione periodizzata.

Per **analisi armonica di una funzione periodica u di periodo T** si intende l'operazione di **scomposizione di tale funzione in una somma** (finita o infinita) **di armoniche semplici**:

$$a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Il cui **primo termine** è detto **armonica fondamentale**. Supponendo che **$u(t)$ rappresenti l'ampiezza di un segnale T – periodico all'istante t**, allora la sua **energia** sarà:

$$E(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2 dt$$

Se **$u(t)$ viene sviluppato in serie di Fourier**, **ogni armonica di cui sarà composta sarà caratterizzata da una propria energia**, detta **energia dell'armonica di ordine $n \geq 1$**:

$$E_n = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right]^2 dt = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Per $n = 0$:

$$E_0 = \frac{a_0^2}{4} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\right)^2$$

Pertanto, **l'uguaglianza di Parseval si riscrive**:

$$E(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n$$

Ed ha un'interpretazione notevole: l'energia del segnale viene determinata come somma delle energie delle singole armoniche, inclusa quella dell'armonica fondamentale (che è il quadrato del valor medio).

LA TRASFORMATA DI FOURIER

Viene detta **trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$** il **funzionale**:

$$\hat{f}: w \in \mathbb{R} \to \hat{f}(w) = \mathcal{F}[f(x)]\,(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iwx}dx$$

Indicando $\boldsymbol{f(x)}$ **un segnale**, $\boldsymbol{x}$ **è il tempo**, $\boldsymbol{w}$ **è la frequenza** e $\hat{\boldsymbol{f}}$ **è lo spettro di** $\boldsymbol{f}$; di conseguenza, si può dire che **la trasformata di Fourier operi dallo spazio dei tempi allo spazio delle frequenze**.

Si osserva che **l'integrale con cui è definita la trasformata è ben posto grazie all'ipotesi di sommabilità di** $\boldsymbol{f}$ per la quale $\left|e^{-iwx}f(x)\right| \leq |f(x)|\ \forall x, w \in \mathbb{R}$; inoltre, si potrebbe dimostrare che **l'applicazione**:

$$f \to \hat{f}$$

È un operatore lineare e continuo (anzi **Lipschitziano**) **da** $\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ **in** $\boldsymbol{L^\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: se $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è una **successione convergente in norma** $\boldsymbol{L^1}$ **a** $\boldsymbol{f}$ (cioè $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$) allora **la successione delle trasformate di Fourier converge uniformemente alla trasformata della funzione limite**:

$$\left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Questo risultato è da attribuire alla **disuguaglianza di Hölder** (con $p = 1$ e $p' = \infty$):

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Infine, **la trasformata di Fourier è iniettiva** e:

$$\mathcal{F}[f(x)](0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

In letteratura **la definizione di trasformata di Fourier viene data sotto diverse forme**, in cui il nucleo e^{-iwx} è sostituito con uno dei seguenti:

$$e^{-2\pi iwx} \vee \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iwx}$$

La scelta tra un nucleo e un altro **non altera il risultato** ma nasce dalla mera esigenza di semplificare le costanti che compaiono nelle varie formule. Sviluppando l'esponenziale complesso si può ottenere un'ulteriore rappresentazione della trasformata:

$$\mathcal{F}[f(x)](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(wx)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(wx)\,dx$$

ENUNCIATO PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Ipotesi:

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Tesi:

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\hat{f}$ è lineare e uniformemente continua in $\mathbb{R}$;

2. $\hat{f}$ è infinitesima all'infinito (lemma di Riemann – Lebesgue), $\lim_{|w| \to +\infty} \hat{f}(w) = 0$
3. f reale e pari $\Longrightarrow \hat{f}$ reale e pari;
4. f reale e dispari $\Longrightarrow \hat{f}$ immaginaria e dispari.

Indicando con $\boldsymbol{C_0}(\mathbb{R})$ **il sottospazio di** $\boldsymbol{C}(\mathbb{R})$ **delle funzioni infinitesime all'infinito**:

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \right\}$$

È evidente che $\boldsymbol{C_0}(\mathbb{R}) \subset \boldsymbol{L^\infty}(\mathbb{R})$; tale insieme è un **sottospazio chiuso di** $\boldsymbol{C}(\mathbb{R})$ e può essere definito anche come **l'insieme delle funzioni continue** $\boldsymbol{f}$ **per le quali l'insieme** $\boldsymbol{f^{-1}}([\boldsymbol{\varepsilon}, +\infty])$ **è compatto** $\forall \boldsymbol{\varepsilon}$.

Le proprietà sopra elencate indicano che **la trasformata di Fourier è un'applicazione lineare da** $\boldsymbol{L^1}$ **in** $\boldsymbol{C_0}$:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$

Ma questa applicazione **non è suriettiva**.

Nelle applicazioni pratiche è **molto importante saper ricostruire la funzione** $\boldsymbol{f}$ **partendo dalla sua trasformata di Fourier**; a tal proposito viene data la seguente definizione. Considerata una funzione $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L^1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, viene detta **antitrasformata di Fourier la funzione**:

$$\mathcal{F}^{-1}[f(w)](x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{iwx} dw$$

L'applicazione $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{\tilde{f}}$ **gode delle stesse proprietà di linearità e di continuità di cui gode la trasformata di Fourier**. Il nome di **antitrasformata** viene attribuito in merito alla **seguente proprietà**; siano $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, **supponendo che** $\boldsymbol{f}$ **sia continua in** $\boldsymbol{x}$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)](w)](x) = f(x)$$

Questa proprietà preannuncia il processo di **inversione della trasformata**, con cui è possibile ottenere il risultato che funge da premessa all'antitrasformata.

ENUNCIATO TEOREMA DI INVERSIONE DELLA TRASFORMATA

Ipotesi:

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a tratti e con $f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Tesi:

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iwx} dx \right) e^{iwx} dw$

In particolare, **se la trasformata è sommabile ($\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) la formula di inversione si semplifica**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)e^{iwx}dw \text{ q.o. in } \mathbb{R}$$

In tal caso **la funzione f coincide q.o. con una funzione continua**. Una conseguenza della formula di inversione generalizzata è la **formula di dualità**:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)](w)](w) = 2\pi f(-x)$$

E, **se la funzione è pari**:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)](w)](w) = 2\pi f(x)$$

Di seguito sono elencate alcune **proprietà della trasformata di Fourier**. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Proprietà di time scaling**

$$\mathcal{F}[f(cx)](w) = \frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{w}{c}\right)$$

2. **Proprietà di time shifting**

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](w) = a^{-i\alpha w}\hat{f}(w)$$

3. **Proprietà di frequency shifting**

$$\mathcal{F}\left[e^{i\alpha w}f(x)\right](w) = \hat{f}(w-\alpha)$$

4. **Proprietà di derivazione**, con $f \in C^1$ a tratti e $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\mathcal{F}[f'(x)](w) = iw\hat{f}(w)$$

5. **Proprietà di derivazione n – esima**, con $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f^{(n)}$ continua a tratti su $\mathbb{R}$ e $f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right](w) = (iw)^n\hat{f}(w)$$

In particolare:

$$\hat{f}(w) = o\left(\frac{1}{w^n}\right), |w| \to +\infty$$

$$n \geq 2 \Longrightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

6. **Proprietà di derivazione della trasformata**; se per qualche intero $n \geq 1$ la funzione $x \to x^n f(x)$ è sommabile su $\mathbb{R} \Longrightarrow \hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$

$$\hat{f}^{(n)}(w) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](w) = (-i)^n\mathcal{F}[x^n f(x)](w)$$

In particolare:

$$\hat{f}'(w) = -i\mathcal{F}[xf(x)](w)$$

Inoltre, da quest'ultima proprietà **si può desumere che maggiore è il decadimento all'infinito di $\boldsymbol{f}$ e maggiore sarà la regolarità di $\hat{\boldsymbol{f}}$;** se $\boldsymbol{f}$ **è a supporto compatto**, allora $\hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$.

ENUNCIATO TEOREMA DELLA TRASFORMATA DI CONVOLUZIONE

Ipotesi:

$\forall f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Tesi:

$\mathcal{F}[f_1 * f_2(x)](w) = \widehat{f_1 * f_2}(w) = \widehat{f_1}(w)\widehat{f_2}(w)$

ENUNCIATO FORMULA DI MOLTIPLICAZIONE

Ipotesi:

$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Tesi:

$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)g(w)dw = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx$

Si denota con $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ **lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida**, cioè l'**insieme di funzioni** $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **di classe** $\boldsymbol{C}^\infty$ e **tali che** $\forall p, q \in \mathbb{N}\ \exists C \propto p, q, f$ per cui:

$$\left|x^p f^{(q)}(x)\right| \leq C\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Sia $f \in S(\mathbb{R})$, $\forall k, h \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$x^h f, f^{(k)} \in S(\mathbb{R})$$

Si può osservare che $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$, con:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty : \operatorname{spt} f \text{ è compatto in } \mathbb{R}\}$$

Infatti, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ per definizione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; inoltre, con $C = \|x^p f^q\|_\infty$, è soddisfatta anche la seconda condizione (perché le derivate di una funzione a supporto compatto continuano ad avere supporto compatto) e ne segue che $f \in S(\mathbb{R})$. Si può anche affermare che **lo spazio $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ è contenuto nello spazio $\boldsymbol{C_0}(\mathbb{R})$ di funzioni che si annullano all'infinito** e che $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}) \subset \boldsymbol{L^1}(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}\left(\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})\right)$.

Con queste proprietà a disposizione, si può dire che **la funzione $f \to \hat{f}$ è biunivoca dallo spazio $S(\mathbb{R})$ su sé stesso**.

ENUNCIATO TEOREMA DI CONSERVAZIONE DEL PRODOTTO SCALARE

Ipotesi:

$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{S}$

Tesi:

$2\pi\langle f_1, f_2\rangle_{L^2} = \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2\rangle_{L^2}$

ENUNCIATO TEOREMA DI PLANCHEREL

Ipotesi:

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

Tesi:

$f_n(w) = \int_{-n}^{n} e^{-iwx} f(x)dx = \mathcal{F}\left[\chi_{[-n,n]} f(x)\right](w) \in L^2(\mathbb{R}) \to g(w) \in L^2(\mathbb{R})$

La funzione g **è ancora detta Trasformata di Fourier di f**, per la quale **vale l'uguaglianza di Plancherel**:

$$2\pi\|f\|_{L^2}{}^2 = \|g\|_{L^2}{}^2$$

Se poi **f appartiene anche a $L^1(\mathbb{R})$**, la funzione **g coincide quasi ovunque con la trasformata di Fourier nel senso di L^1**:

$$g(w) = \hat{f}(w) \text{ q.o.} w \in \mathbb{R}$$

Un'immediata conseguenza di questa identità è:

$$f_n \to f \text{ in } L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Leftrightarrow \hat{f}_n \to \hat{f} \text{ in } L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

Ci si chiede quale possa essere il **legame tra la serie e la trasformata di Fourier**. Sia considerata la funzione sviluppabile in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x} \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi k}{T}x}dx \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sia $\tilde{f}(x) = \chi_{\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]} f(x)$, allora:

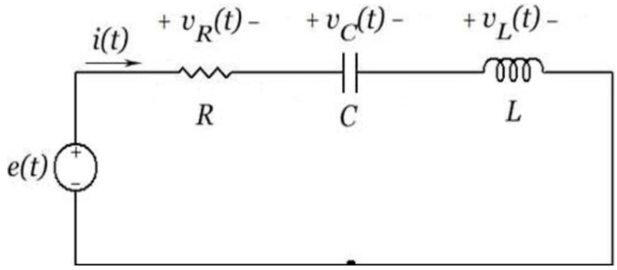
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-i\frac{2\pi k}{T}x}dx = \frac{1}{T}\mathcal{F}[\tilde{f}(x)]\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ed è un **legame tramite i coefficienti**.

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Come si è potuto constatare, **l'operatore di trasformata di Fourier interagisce bene con l'operazione di derivazione**, trasformando una derivata in moltiplicazione per la variabile. A questo punto, si potrebbe pensare di **usare la trasformata di Fourier per calcolare la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria**; tuttavia, **l'operazione non terrebbe conto di eventuali condizioni iniziali** e restituirebbe **solo funzioni sommabili in** $\mathbb{R}$.

Nelle applicazioni reali, come nella teoria dei circuiti o nella teoria dei sistemi, **si presenta spesso il problema alle condizioni iniziali** ed è un passaggio molto importante, **rappresentando i parametri regolari del sistema fisico la cui evoluzione viene determinata univocamente a partire da esse**. Nel circuito elettrico seguente, costituito da un induttore, un resistore e un condensatore in serie, è applicata una forza elettromotrice *e*:



Ponendo, per semplicità, $v = v_C$ ed utilizzando le leggi di Kirchhoff si ottiene il seguente **problema di Cauchy** (supponendo $v(0)$ e $v'(0)$ assegnati):

$$\begin{cases} v'' + \frac{R}{L}v' + \frac{1}{LC}v = \frac{e}{LC} \\ v(0) = v'(0) = 1 \end{cases}$$

Supponendo il forzamento nullo per semplicità, **la trasformata di Fourier restituirebbe solo la funzione identicamente nulla come soluzione**, che **non soddisfa le condizioni iniziali**. È **necessario**, quindi, **un operatore di trasformata che nei confronti della derivazione si comporta come la trasformata di Fourier** e **che nei confronti delle soluzioni delle equazioni differenziali non presenti lo stesso problema**.

Considerata una funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \to \mathbb{C}$ **definita sull'intervallo** $\boldsymbol{I}$, **misurabile secondo Lebesgue**, che **contiene il semiasse reale positivo**, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \subseteq I$, si dirà che $\boldsymbol{f}$ **è trasformabile secondo Laplace** (o $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ **– trasformabile**) se:

$$\exists s \in \mathbb{C} : e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

Si può mostrare che **se la funzione** $\boldsymbol{f}$ **è** $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ **– trasformabile per un dato** $\boldsymbol{s_0} \in \mathbb{C}$, allora è $\mathcal{L}$ – trasformabile **per ogni** $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C} : \boldsymbol{Re(s) > Re(s_0)}$**;** infatti:

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-Re(s)t}|f(t)| < e^{-Re(s_0)t}|f(t)| = |e^{-s_0t}f(t)|$$

Quindi, la funzione $\boldsymbol{t \to |e^{-st}f(t)|}$ **è sommabile perché maggiorata da una funzione sommabile**. A questo punto, si definisce **ascissa di convergenza di una funzione $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ – trasformabile**:

$$\lambda_f = \inf\{Re(s) : e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)\} \in \mathbb{R}$$

Segue che la **funzione**:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt\,, \forall s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_f$$

È detta **trasformata di Laplace della funzione $\boldsymbol{f}$** ed è **un'applicazione a valori complessi il cui dominio è un semipiano contenuto nel piano complesso**. Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nulla in $(-\infty, 0)$ e $\mathcal{L}$ – trasformabile è detta segnale.

In definitiva, sia $\boldsymbol{\lambda_f}$ **l'ascissa di convergenza della funzione $\boldsymbol{f: I}$** $\supseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, allora per $s \in \mathbb{C}$ tale che:

- $Re(s) > \lambda_f \Rightarrow f$ è **$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ – trasformabile**;
- $Re(s) < \lambda_f \Rightarrow f$ **non è $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ – trasformabile**;
- $Re(s) = \lambda_f \Rightarrow$ **non si può dire nulla sulla $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ – trasformabilità di $\boldsymbol{f}$**;
- $\lambda_f = -\infty \Rightarrow f$ **è** $\mathcal{L}$ – **trasformabile** $\forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{C}$;

Ad esempio, siano prese le funzioni:

$$f(t) = e^{-t^2} \wedge g(t) = e^{t^2}$$

f è trasformabile; infatti $t \to e^{-(t^2+st)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ $\forall s \in \mathbb{C}$, con ascissa di convergenza $\lambda_f = -\infty$. Non si può dire altrettanto della funzione g, dal momento in cui:

$$\lim_{t\to+\infty} \left|e^{t^2-st}\right| = +\infty \ \forall s \in \mathbb{C}$$

In tal caso $\lambda_f = +\infty$ e la funzione non è $\mathcal{L}$ – trasformabile. Si può affermare che se f è $\mathcal{L}$ – trasformabile ed ha supporto compatto in $[0, +\infty)$, allora la sua ascissa di convergenza è $\lambda_f = -\infty$.

Una funzione $\boldsymbol{f: I \to}$ $\mathbb{C}$ **è detta di ordine esponenziale $\boldsymbol{\alpha}$** $\in \mathbb{R}$ se **esiste una costante $\boldsymbol{C > 0}$** per cui:

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t \in I$$

Dove $\boldsymbol{\alpha}$ **e $\boldsymbol{C}$ dipendono dalla funzione $\boldsymbol{f}$**. Si può osservare come **le funzioni limitate siano funzioni di ordine esponenziale $\boldsymbol{\alpha = 0}$**:

$$|f(t)| \leq C, \forall t \in I$$

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ - TRASFORMABILITÀ

Ipotesi:

$\forall f: I \to \mathbb{C}$ di ordine esponenziale $\alpha \in \mathbb{R}$

Tesi:

f è $\mathcal{L}$ – trasformabile

Dimostrazione:

$$|f(t)e^{-st}| \leq e^{-Re(s)t}Ce^{\alpha t} = Ce^{-(Re(s)-\alpha)t}$$

Ma $e^{-(Re(s)-\alpha)t} \in L^1\big([0,+\infty)\big)$ se $Re(s) > \alpha$; pertanto, l'ascissa di convergenza di questa funzione è un numero reale:

$$\lambda_f \leq \alpha$$

E la trasformata di Laplace esiste per $s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha$.

CVD

DIMOSTRAZIONE CONDIZIONE NECESSARIA PER LA $\mathcal{L}$ - TRASFORMABILITÀ

Ipotesi:

$\forall f$ segnale misurabile

f è $\mathcal{L}$ – trasformabile

Tesi:

$f \in L^1_{loc}([0,+\infty])$

Dimostrazione:

Se la funzione è $\mathcal{L}$ – trasformabile, $\exists s_0 = \sigma_0 + i\omega_0 : e^{-\sigma_0 t}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Ovvero:

$$\int_0^{+\infty} |e^{-\sigma_0 t}f(t)|dt < +\infty$$

Ma:

$$\int_0^T |f(t)|dt \leq \min\{1, e^{-\sigma_0 t}\} \cdot \int_0^T |f(t)|dt < \int_0^T e^{-\sigma_0 t}|f(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} |e^{-\sigma_0 t}f(t)|dt$$

Quindi:

$$\int_0^T |f(t)|dt < +\infty \Leftrightarrow f \in L^1_{loc}([0,+\infty])$$

CVD

Viene definita **funzione di Heavside $\boldsymbol{H(t)}$ la funzione caratteristica di** $\mathbb{R}_+$:

$$H(t) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow t \geq 0 \\ 0 \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

Ed è una **funzione di ordine esponenziale zero**:

$$H(t) \leq 1 \cdot e^{0t} = 1$$

Posto $s = \sigma + i\omega$, si vuole determinare la **trasformabilità** (e un'eventuale **trasformata**) **della funzione di Heavside**. Poiché $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$, la funzione:

$$t \rightarrow e^{-st}$$

È sommabile su $[0, +\infty)$ solo per $\sigma > 0$. Ciò equivale a dire che **la funzione di Heavside è $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ – trasformabile, ha ascissa di convergenza $\boldsymbol{\lambda_H = 0}$ e la sua trasformata di Laplace è**:

$$\mathcal{L}[H(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \forall s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_H = 0$$

Considerato, per $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R_+}$**, l'impulso di durata $\boldsymbol{h}$** (che **origina dalla funzione di Heavside**):

$$\chi_{[0,h)}(t) = H(t) - H(t-h) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow 0 \leq t < h \\ 0 \Leftrightarrow t < 0 \vee t \geq h \end{cases}$$

La sua trasformata di Laplace è:

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[0,h)}(t)\right](s) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-hs}}{s} \Leftrightarrow s \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^h e^{-st} dt = h \Leftrightarrow s = 0 \end{cases}$$

La funzione ottenuta ha una **singolarità eliminabile nell'origine**, **calcolata con il valore accordato per $\boldsymbol{s = 0}$**:

$$\lim_{s \to 0} \frac{1 - e^{-hs}}{s} = h$$

Segue che $\boldsymbol{\mathcal{L}\left[\chi_{[0,h)}(t)\right](s)}$ **è una funzione intera** e, pertanto, **la sua ascissa di convergenza è**:

$$\lambda_{\chi_{[0,h)}} = -\infty$$

La trasformazione di Fourier non si applica a funzioni esponenziali del tipo $\boldsymbol{e^{i\alpha t}} : \boldsymbol{Im(\alpha) \neq 0}$, escludendone l'applicabilità da alcune situazioni concrete importanti. **La trasformata di Laplace**, che ha proprietà strettamente analoghe a quelle della trasformata di Fourier, **è una sorta di famiglia ad un parametro di trasformate di Fourier**; infatti, data $f \in L^1_{loc}([0, +\infty))$ con ascissa di convergenza $\lambda_f < +\infty$ si ha, per $\sigma > \lambda_f$, che:

$$t \rightarrow e^{-\sigma t} f(t) \in L^1([0, +\infty))$$

Si può quindi affermare che **la trasformata di Fourier**:

$$\omega \to \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}e^{-\sigma t}f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sigma+i\omega)t}f(t)dt$$

È il valore in $\sigma + i\omega$ della trasformata di Laplace:

$$s \to \mathcal{L}[f(t)](s)$$

Sulla retta $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = \sigma\}$.

ENUNCIATO TEOREMA DI RELAZIONE TRA $\mathcal{F}$ E $\mathcal{L}$ – TRASFORMATA

Ipotesi:

$\forall f$ $\mathcal{L}$ – trasformabile

Tesi:

$e^{-\sigma t}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{L}[f(t)](\sigma + i\omega) = \mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t)](\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \wedge \sigma > \lambda_f$

Il teorema appena enunciato è fondamentale, **permette di individuare le proprietà della trasformata di Laplace a partire da quelle della trasformata di Fourier**.

ENUNCIATO PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Ipotesi:

$\forall f$ $\mathcal{L}$ – trasformabile

Tesi:

1. $\mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq \lambda_0\}, \forall \lambda_0 > \lambda_f$;
2. $\lim_{Re(s)\to+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0$, ovvero:
   a. $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s_n) = 0\ \forall (s_n) : \lim_{n\to+\infty} Re(s_n) = +\infty$
3. L'operatore di trasformata di Laplace è un operatore lineare e iniettivo:
   a. $\forall f_1, f_2$ funzioni $\mathcal{L}$ – trasformabili, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ la funzione $t \to c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$ – trasformabile nel semipiano aperto $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\}$, con $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1\mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2\mathcal{L}[f_2(t)](s)$;
   b. $\forall f, g\ \exists \beta \in \mathbb{R} : \mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s)\ \forall s \in \mathbb{C} : Re(s) > \beta \Longrightarrow f = g$ q.o.;
4. $\mathcal{L}[f(t)](s)$ è olomorfa in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_f\}$;
5. $\forall n \geq 1$ la funzione $t \to t^n f(t)$ è $\mathcal{L}$ – trasformabile con ascissa di convergenza λ_f e si ha $\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = (-1)^n\mathcal{L}[t^n f(t)](s)$;
   a. In particolare, $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s)$.

ENUNCIATO TEOREMA DEGLI EFFETTI DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Ipotesi:

$\forall f$ segnale : $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$

$\forall c > 0, \alpha \in \mathbb{C}$

Tesi:

1. Effetto omotetia, $\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right)$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > c\lambda_f\}$;
2. Effetto traslazione, $\mathcal{L}[f(t-c)](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)](s)$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_f\}$;
3. Effetto smorzamento, $\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha)$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_f + Re(\alpha)\}$ (infatti, $Re(s-\alpha) = Re(s) - Re(\alpha)$);
4. Effetto periodicità, f è $T_0 \in [0, +\infty)$ periodica $\Longrightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-sT_0}}\int_0^{T_0} e^{-st}f(t)dt = \frac{\mathcal{L}[f(t)\cdot\chi_{[0,T_0]}(t)](s)}{1-e^{-sT_0}}$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$;
5. Effetto divisione, $\frac{f(t)}{t}$ è $\mathcal{L}$ – trasformabile $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \lambda_f\}$.

ENUNCIATO TEOREMA DEL VALOR FINALE

Ipotesi:

$\exists \lim_{t\to+\infty} f(t) = l$

Tesi:

$\lim_{s\to 0} s \cdot \mathcal{L}[f(t)](s) = l$

ENUNCIATO TEOREMA DELLA TRASFORMATA DI CONVOLUZIONE

Ipotesi:

$\forall f_1, f_2$ segnali $\mathcal{L}$ – trasformabili

Tesi:

$f_1 * f_2$ è $\mathcal{L}$ – trasformabile

$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)](s) = \mathcal{L}[f_1(t)](s)\mathcal{L}[f_2(t)](s)$ in $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\}$

Ricordando che:

$$f_1 * f_2(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t) f_2(x-t)dt \Leftrightarrow x > 0 \\ 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

Con il teorema appena enunciato si può calcolare l**a trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di una funzione f per la funzione di Heavside**:

$$\mathcal{L}[(H * f)(t)](s) = \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s} \text{ in } \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max\{0, \lambda_f\}\}$$

ENUNCIATO TEOREMA DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA DERIVATA

Ipotesi:

$\forall f: [0, +\infty) \to \mathbb{C} : f \in C^1([0, +\infty))$ a tratti (può andare bene l'ipotesi più debole di assoluta continuità)

f' è $\mathcal{L}$ – trasformabile

Tesi:

Valgono le seguenti proposizioni:

1. f è $\mathcal{L}$ – trasformabile con $\lambda_f \leq \max\{0, \lambda_{f'}\}$;
2. Posto $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$, si ha $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C} : R(s) > \max\{0, \lambda_{f'}\}$;
3. $f \in C^m([0, +\infty))$, con derivata m – esima $\mathcal{L}$ – trasformabile $\Longrightarrow f, f', \dots, f^{(m)}$ sono $\mathcal{L}$ – trasformabili, con ascissa di convergenza minore o uguale a $\max\left\{0, \lambda_{f^{(m)}}\right\}$ e $\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right](s) = s^m\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{m-1}f(0^+) - s^{m-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(m-1)}(0^+), \forall s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max\left\{0, \lambda_{f^{(m)}}\right\}$;
4. La primitiva di una funzione $\mathcal{L}$ – trasformabile f è anch'essa una funzione $\mathcal{L}$ – trasformabile e verifica la relazione $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s), \forall s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max\{0, \lambda_f\}$.

ENUNCIATO TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

Ipotesi:

$\forall f: [0, +\infty) \to \mathbb{C} : f \in C^1([0, +\infty))$ a tratti

f e f' sono $\mathcal{L}$ – trasformabili

Tesi:

$\exists \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) \wedge \lim_{Re(s)\to +\infty} s\mathcal{L}[f(t)](s) = f(0^+)$

Sia dal punto di vista matematico che applicativo, **è utile affrontare il tema dell'antitrasformazione anche per la trasformata di Laplace**; il problema si riduce a **trovare quella funzione $\boldsymbol{f(t)}$ localmente sommabile in $[\mathbf{0}, +\infty)$ e nulla per $\boldsymbol{t < 0}$ che**, **a partire da una funzione $\boldsymbol{F(s)}$ definita in un insieme che contiene il semipiano $\boldsymbol{Re(s) > \lambda_f}$**:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$$

La funzione in questione, **unica** per iniettività della trasformata, sarà detta **antitrasformata di Laplace della funzione $\boldsymbol{F(s)}$** e verrà indicata con:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

In base alle proprietà precedentemente descritte per la trasformata di Laplace, segue chiaramente che **la funzione $\boldsymbol{F(s)}$ deve essere analitica e tale che**:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x + iy) = 0 \; \forall y \in \mathbb{R}$$

Affinché possa esistere la sua antitrasformata.

ENUNCIATO TEOREMA DI RIEMANN – FOURIER

Ipotesi:

$\forall f$ segnale C^1 a tratti

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$

$f(t^{\pm}) = \lim_{x\to t^{\pm}} f(x)$

Tesi:

$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds \, , \forall \alpha > \lambda_f$

Se $\boldsymbol{F}$ **è analitica in** $\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C} : \boldsymbol{Re(s) > \sigma_0}\}$ e se **esiste un $\boldsymbol{k > 1} : \boldsymbol{F(s) = O(1/s^k)}$** (questa condizione di crescita **rende l'olomorfia sufficiente**) **per $\boldsymbol{s \to +\infty}$,** allora **per $\boldsymbol{\alpha > \sigma_0}$**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds$$

È un segnale continuo, **indipendente da $\boldsymbol{\alpha > \sigma_0}$** e tale che:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$$

Per applicare questo teorema è **necessario integrare una funzione nel campo complesso lungo la retta di equazione $\boldsymbol{x = \alpha}$ nel piano di Gauss**; tale retta prende il nome di **retta di Bromwich**. Si noti che **la formula precedente non dipenda da $\boldsymbol{\alpha}$ fintantoché $\boldsymbol{\alpha > \lambda_f}$**.

L'integrale:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st}F(s)ds$$

È detto **valor principale di Cauchy e può essere indicato anche come**:

$$\text{v. p.}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds$$

Chiaramente, **se f è continua in t, la formula di inversione diventa**:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\text{v. p.}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds\,,\forall\alpha>\lambda_f$$

Sia considerata **la formulazione alternativa della formula di inversione** (quella che si ha quando F è analitica in $\{s\in\mathbb{C}: Re(s)>\sigma_0\}$ e quando esiste un $k>1 : F(s)=O(1/s^k)$ per $s\to+\infty$); se la funzione $\boldsymbol{F(s)}$ **è razionale con grado del denominatore strettamente maggiore del grado del numeratore**, allora **è una trasformata di Laplace di una funzione $\mathcal{L}$ – trasformabile e l'inversione può essere effettuata mediante la decomposizione di F in fratti semplici**.

ENUNCIATO FORMULA DI INVERSIONE E DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

Ipotesi:

$\forall F(s)=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0} : n>m,\forall s\in\mathbb{C}$

Siano $z_1 \dots z_N \in\mathbb{C}$ le radici distinte del denominatore di molteplicità $r_1 \dots r_N \in\mathbb{N}$

Tesi:

$\forall k\in[1,N], j\in[1,r_k]\ \exists c_{kj}\in\mathbb{C} : F(s)=\sum_{j=1}^{r_1}\frac{c_{1j}}{(s-z_1)^j}+\sum_{j=1}^{r_2}\frac{c_{2j}}{(s-z_2)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{r_N}\frac{c_{Nj}}{(s-z_N)^j}$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)=\left(\sum_{j=1}^{r_1}\frac{c_{1j}t^{j-1}e^{z_1 t}}{(j-1)!}+\cdots+\sum_{j=1}^{r_N}\frac{c_{Nj}t^{j-1}e^{z_N t}}{(j-1)!}\right)H(t)$

ENUNCIATO FORMULA DELLO SVILUPPO DI HEAVSIDE

Ipotesi:

$\forall F(s)=\frac{P_m(s)}{Q_n(s)} : m<n\wedge z_k$ zeri di $Q(s)$ sono semplici ($r_k=1\ \forall k$)

Tesi:

$F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s) : f$ è $\mathcal{L}$ – trasformabile

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = H(t) \sum_k \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} e^{z_k t}$

La **determinazione dell'antitrasformata per valori di n molto grandi risulta laboriosa e pesante**; tuttavia, **la procedura è semplificata dalla formula appena enunciata** (che fornisce esplicitamente c_{k1}).

La **trasformata di Laplace** risulta particolarmente utile sia per la **risoluzione di equazioni differenziali ordinarie** (ad esempio, lineari a coefficienti costanti) che per le **equazioni integro – differenziali**.

Un'equazione differenziale lineare di ordine k è un'equazione del tipo:

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + y^{(k)}(t) = f(t)$$

Dove $a_0 \dots a_k \in \mathbb{R}$ **sono detti coefficienti dell'equazione differenziale** e, nel caso considerato, sono **costanti**. Viene detto **polinomio caratteristico (o associato)** il polinomio:

$$P_k(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

A questo punto, **il primo membro dell'equazione differenziale può essere visto come il risultato dell'applicazione che associa al polinomio caratteristico l'operatore differenziale della funzione incognita y**:

$$\mathcal{G}\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \cdots + a_{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} + \frac{d^k}{dt^k}$$

Eventualmente, **il secondo membro si potrebbe individuare con la funzione inversa di $\mathcal{G}$**. Si consideri **una soluzione dell'equazione differenziale sopra riportata che soddisfi le seguenti condizioni iniziali**:

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(0) = y_{k-1}$$

Si assuma che, **moltiplicando l'equazione per e^{-st}** con $s \in \mathbb{C}$ e integrando su $[0, +\infty)$, **abbiano senso gli integrali**:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \wedge Y_n(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} y^{(n)}(t) dt, \forall n \in [0, k]$$

L'equazione differenziale diventa:

$$a_0 Y_0(s) + a_1 Y_1(s) + \cdots + a_{k-1} Y_{k-1}(s) + Y_k(s) = F(s)$$

Integrando per parti si ha:

$$Y_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} y'(t) dt = -y_0 + sY_0(s)$$

Pertanto:

$$Y_n(s) = s^n Y_0(s) - \sum_{h=0}^{n-1} s^{n-1-h} y_h, \forall 1 \le n \le k$$

Ne segue che, **sostituendo queste espressioni nell'equazione differenziale**:

$$p(s)Y_0(s) + q(s) = F(s)$$

Dove $p(s)$ **è il polinomio caratteristico dell'equazione e $q(s)$ un polinomio di grado al più $k-1$** con **coefficienti dipendenti dalle condizioni iniziali e dai coefficienti dell'equazione**. Si può concludere che:

$$Y_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st} y(t)dt = \frac{F(s) - q(s)}{p(s)}$$

Da cui è possibile **ottenere la soluzione $y(t)$ attraverso le condizioni iniziali assegnate**, sempre che **si riesca ad invertire l'operatore integrale**:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} y(t)dt$$

Esso **stabilisce una certa corrispondenza tra le algebre degli operatori differenziali del tipo $\mathcal{G}$ e l'algebra dei polinomi su $\mathbb{C}$**.

Questo metodo di risoluzione delle equazioni differenziali può essere **applicato anche per la risoluzione del problema di Cauchy con dati nell'origine**, in quanto tali dati compaiono direttamente nella formula di trasformazione delle derivate. Sia considerato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Con **a, b, y_0 e y_1 costanti assegnate e $f(t)$ funzione assegnata**. Si supponga che l**a soluzione $y(t)$ e il termine noto $f(t)$ siano funzioni $\mathcal{L}$ – trasformabili** e si indichino con **$Y(s)$ e $F(s)$ le loro trasformate di Laplace**. Applicando tale operatore all'equazione differenziale:

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) + a\mathcal{L}[y'(t)](s) + b\mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + a\big(sY(s) - y(0)\big) + bY(s) = F(s)$$

$$(s^2 + as + b)Y(s) = F(s) + (sy_0 + ay_0 + y_1)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + \frac{sy_0 + ay_0 + y_1}{s^2 + as + b} = F(s)H_1(s) + G(s)$$

Dove:

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} \wedge G(s) = \frac{sy_0 + ay_0 + y_1}{s^2 + as + b}$$

Essendo **funzioni razionali**, è possibile **antitrasformarle nelle funzioni $h(t)$ e $g(t)$**. Ricordando il **teorema di convoluzione**, si ottiene univocamente:

$$y(t) = (f * h)(t) + g(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau + g(t)$$

Che rappresenta **la formula di rappresentazione della soluzione dell'equazione differenziale. H_1 prende il nome di funzione di trasferimento del sistema**, perché è **responsabile di come** (a livello delle trasformate di Laplace) i**l sistema trasferisce l'informazione della forzante esterna f alla soluzione y**.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

Siano X **e** Y **due spazi normati** (dotati delle norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$), sia $T: X \to Y$ **un'applicazione**:

- **Lineare**

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \wedge T(ax) = aT(x)\ \forall x, y \in X\ \forall a \in \mathbb{R}$$

- **Continua in $x_0 \in X$**

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0, \lim_{n\to+\infty} \|T(x_n) - T(x_0)\|_Y = 0$$

- **Limitata**

$$\exists c > 0 :\ \|T(x)\|_Y \le c \cdot \|x\|_X\ \forall x \in X$$

In realtà, dire che **l'operatore è continuo in $\underline{0} \in X$ è sufficiente per dire che è continuo in X e che è limitato**, anche se queste tre affermazioni sono equivalenti. Sia la **norma $\|T\|$**:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \wedge x \neq \underline{0}\right\} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \le 1\}$$

Sia definito **lo spazio di operatori T lineari e continui**:

$$L(X,Y) = \{T: X \to Y : T \text{ è lineare e continuo}\}$$

È uno **spazio di Banach rispetto alla norma $\|T\|$ se è uno spazio di Banach Y**.

La **teoria delle distribuzioni** rappresenta il cardine della matematica del XX secolo e fu introdotta nel 1950 da **Laurent Schwartz**. Si tratta di una **generalizzazione del concetto di funzione**, concepita per **descrivere fenomeni fisici la cui descrizione in termini matematici classici riuscirebbe difficoltosa, se non impossibile**; l'esempio più comune di distribuzione è quello della "delta" di Dirac, un impulso unitario fornito ad un sistema in un intervallo di tempo "infintamente breve", cioè istantaneo. L'impulso di una forza $F(t)$ in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$$

Ma se $F(t) = 0\ \forall t$ ad eccezione di un numero finito di punti (q.o.), allora l'impulso è nullo. Tuttavia, si consideri la seguente situazione: un punto materiale di massa m si muove di moto rettilineo uniforme su di un piano orizzontale privo di attrito prima di urtare in modo perfettamente elastico contro una parete verticale e perpendicolare alla direzione del moto. In questa situazione ideale, in t_0 avviene un'istantanea inversione di marcia: il punto materiale rimbalza indietro, con velocità scalare invariata ma verso del vettore opposto. Il teorema dell'impulso afferma che se sul punto agisce una forza $F(t)$ dipendente dal tempo, l'impulso in un intervallo di tempo è pari alla variazione di quantità di moto:

$$m(v_2 - v_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$$

Sia nel caso in cui l'urto avvenga prima che dopo l'intervallo di tempo, la formula qui riportata è veritiera: in un caso è nulla la variazione di quantità di moto e nell'altra la forza che è applicata sul punto. Se, però, l'urto avviene tra t_1 e t_2 le cose si complicano: la quantità di moto totale è $2mv_1 \neq 0$ ma l'impulso è nullo, la formula cessa di avere valore.

Nonostante nella realtà le cose avvengano in maniera leggermente diversa (una piccola compressione rende l'urto non istantaneo ma solo breve), il problema permase fino all'introduzione della teoria delle distribuzioni; **l'idea alla base della soluzione prevede l'introduzione di oggetti simili alle funzioni ma che possono essere nulli ovunque tranne che in un solo punto (ovvero nulle q.o.) e possono mantenere un integrale non nullo**.

In seguito, verrà indicato con **$\boldsymbol{\Omega}$ un qualsiasi sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**, pur non escludendo il caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. **La derivata rispetto alla $\boldsymbol{j}$ – esima variabile viene indicata con**:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \forall j \in [1, n]$$

Si denota con $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}$ **l'insieme dei multi – indici $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$** per cui $\alpha_j \in \mathbb{N}$. Per $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si definiscono:

$$\operatorname{ord}(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1!\, a_2! \dots \alpha_n!$$

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$$

Il numero intero e non negativo **$\operatorname{ord}(\boldsymbol{\alpha})$ è detto ordine del multi – indice $\boldsymbol{\alpha}$** ed è spesso denotato anche con $|\boldsymbol{\alpha}|$. Se $\boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\alpha}$, cioè se $\beta_i \leq \alpha_i\ \forall j \in [1, n]$, si può anche definire:

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

Con **$\boldsymbol{C^k}(\boldsymbol{\Omega})$ (dove $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$) si denota lo spazio delle funzioni a valori complessi**, **definite in $\boldsymbol{\Omega}$ e aventi tutte le derivate continue fino all'ordine $\boldsymbol{k}$ in $\boldsymbol{\Omega}$**; mentre con **$\boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\Omega})$ si denota lo spazio di funzioni a valori complessi, definite in $\boldsymbol{\Omega}$ e aventi le derivate di ogni ordine continue in $\boldsymbol{\Omega}$**.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f \in C(\Omega)$, si definisce **supporto della funzione f l'insieme**:

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega$$

Ovvero, **la chiusura relativa in Ω dell'insieme dove la funzione non si annulla**; essendo un aperto, Ω non comprende i punti di frontiera, che possono tranquillamente essere punti della chiusura a cui si fa riferimento nella definizione, rendendo necessaria l'intersezione.

Il **supporto** in questione è **il complementare rispetto a Ω del più grande aperto su cui la funzione è nulla ed è un insieme chiuso**, in quanto intersezione di un insieme chiuso e uno aperto; ne segue che **un punto di Ω che è di accumulazione per $\operatorname{spt} f$, appartiene a $\operatorname{spt} f$**. Mentre un punto $\boldsymbol{x_0} \notin$ **$\operatorname{spt} f$ se esiste un intorno aperto $\boldsymbol{I(x_0)} : \boldsymbol{f(x) = 0}\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I(x_0)}$**, ovvero se in tale intorno la funzione è identicamente nulla.

Siano $f, g \in C(\Omega)$, allora valgono le seguenti proprietà:

- $f(x) = 0\ \forall x \in \Omega \Longrightarrow \operatorname{spt} f = \emptyset$;
- $\operatorname{spt} fg \subset (\operatorname{spt} f \cap \operatorname{spt} g)$;
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \operatorname{spt} D^{\boldsymbol{\alpha}} f \subset \operatorname{spt} f\ \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$.

Una successione $(\boldsymbol{\varphi_j})_{j\in\mathbb{N}}$ **si dice convergente in $\boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$ a $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$** se $\forall \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{\Omega}$ **compatto e** $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}$, **$\boldsymbol{D^\alpha \varphi_j}$ converge uniformemente su $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{D^\alpha \varphi}$ per $\boldsymbol{j} \to +\infty$** e si scrive:

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{E}(\Omega)} \varphi$$

Si osservi che **una successione di funzioni $\boldsymbol{C^\infty}$ può essere convergente in $\boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$ senza convergere uniformemente in $\boldsymbol{\Omega}$**; per esempio, sia $\Omega = \mathbb{R}$, $\varphi_j = x/j$ e $\varphi = 0$.

Le **funzioni $\boldsymbol{C^\infty(\Omega)}$** il cui **supporto è un insieme compatto** contenuto in Ω sono dette **funzioni test**, mentre lo **spazio vettoriale di funzioni test** è definito come:

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt} f \subset\subset \Omega\}$$

Dove con **$\boldsymbol{K} \subset\subset \boldsymbol{\Omega}$ si indica che $\boldsymbol{K}$ è un compatto contenuto in $\boldsymbol{\Omega}$**, ovvero **esiste una distanza non nulla tra $\boldsymbol{K}$ e il complementare di $\boldsymbol{\Omega}$**; in termini di funzioni di $C^\infty(\Omega)$, esse **si annullano in un intorno della frontiera di $\boldsymbol{\Omega}$**.

Nonostante **lo spazio delle funzioni test non sia uno spazio normato**, è comunque possibile **introdurre il concetto di convergenza**; una successione $(\boldsymbol{\varphi_j})_{j\in\mathbb{N}}$ **viene detta convergente in $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$ a $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$** se:

1. $\exists K \subset \Omega$ compatto : $\operatorname{spt} \varphi_j \subset K\ \forall j \in \mathbb{N}$;
2. $D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi_j$ converge uniformemente a $D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi$ per $j \to +\infty, \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$.

E si scrive:

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

Segue dalla definizione che:

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longrightarrow D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi, \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$$

DIMOSTRAZIONE LEMMA DI PERMANENZA NELLO SPAZIO $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\Omega})$

Ipotesi:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Tesi:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)\ \forall i \in [1, n]$

Dimostrazione:

Dalla definizione di spazio delle funzioni test segue che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C^\infty(\Omega)$$

Inoltre, se $x_0 \notin \operatorname{spt} \varphi$, essendo il complementare di un supporto un insieme aperto, esiste un intorno I di x_0 in cui $\varphi(x) = 0\ \forall x \in I$; di conseguenza, risulta:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = 0\ \ \forall x \in I$$

In particolare:

$$\frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_i} = 0$$

Segue che $x_0 \notin \operatorname{spt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, cioè:

$$\operatorname{spt} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \subset \operatorname{spt} \varphi$$

CVD

Una proprietà interessante delle funzioni test riguarda la facilità con cui esse possono essere generate.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DI GENERAZIONE DELLE FUNZIONI TEST

Ipotesi:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tau \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Tesi:

$\varphi(x+\tau), \varphi(-x), \varphi(\alpha x), g(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Dimostrazione:

Tutte queste funzioni, essendo composizione di funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, appartengono a tale spazio; inoltre, sono a supporto compatto, essendo il loro una traslazione/riflessione/dilatazione del supporto di φ, che è compatto. Segue la loro appartenenza allo stesso spazio delle funzioni test della funzione da cui originano.

CVD

DIMOSTRAZIONE LEMMA DI HADAMARD

Ipotesi:

$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Tesi:

$\exists\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t)dt = x\int_0^1 \varphi'(xs)ds$$

La tesi segue dal teorema di passaggio a limite sotto al segno di integrale ponendo:

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xs)ds$$

CVD

Una **distribuzione** è un **operatore $\boldsymbol{u}$ che associa ad ogni funzione test $\boldsymbol{\varphi}$ un numero** (reale o complesso) **$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle$, detto dualità tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\varphi}$**, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\langle u, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle u, \varphi\rangle + \beta\langle u, \psi\rangle, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, **proprietà di linearità**;
2. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longrightarrow \langle u, \varphi_n\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle u, \varphi\rangle$, **proprietà di continuità**.

In maniera del tutto equivalente, si può dire che **una distribuzione è un funzionale lineare e continuo su $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$**. Con le operazioni di **somma e prodotto per uno scalare** introdotte nella definizione, **lo spazio delle distribuzioni $\boldsymbol{\mathcal{D}'(\Omega)}$ è uno spazio vettoriale**; infatti:

1. $\langle u + v, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle v, \varphi\rangle\ \forall u, v \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
2. $\langle\alpha u, \varphi\rangle = \alpha\langle u, \varphi\rangle\ \forall\alpha \in \mathbb{C}, \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Due distribuzioni, $\boldsymbol{T_1}$ **e** $\boldsymbol{T_2}$**, sono uguali se, sulla stessa funzione test, agiscono allo stesso modo**; ovvero:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Una successione di distribuzioni $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$ **converge nel senso delle distribuzioni a** $\boldsymbol{u \in \mathcal{D}'(\Omega)}$ **se**:

$$\langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

E si scrive:

$$u_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} u$$

Supponendo $u, u_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$, si assumerà per convenzione che:

$$u_\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\to} u \Leftrightarrow \forall \left(\varepsilon_j\right)_{j\in\mathbb{N}} : \varepsilon_j \xrightarrow{j\to+\infty} 0, u_{\varepsilon_j} \overset{\mathcal{D}'}{\xrightarrow{j\to+\infty}} u$$

ENUNCIATO TEOREMA DI COMPLETEZZA

Ipotesi:

$\forall \left(u_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ \exists \lim\limits_{j\to+\infty} \langle u_j, \varphi \rangle$

Tesi:

$\exists u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ u_j \overset{\mathcal{D}'}{\to} u$

ENUNCIATO TEOREMA DI CONTINUITÀ DEL LIMITE DI SUCCESSIONI

Ipotesi:

$\forall \left(u_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ u_j \overset{\mathcal{D}'}{\to} u$

$\forall \left(\varphi_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \ \varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$

Tesi:

$\lim\limits_{j\to+\infty} \langle u_j, \varphi_j \rangle = \langle u, \varphi \rangle$

Si osservi che **nessuna funzione elementare** (in particolare nessuna funzione analitica), ad eccezione della **funzione identicamente nulla**, **è una funzione test**; questa proprietà è una diretta conseguenza del **teorema del prolungamento analitico**, per il quale due **funzioni analitiche definite su $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{C}$ coincidono in $\boldsymbol{\Omega}$ se coincidono in un segmento non banale $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{\Omega}$**.

Una distribuzione è nota quando è definita una regola per valutare la sua dualità con ogni funzione test; inoltre, **non si attribuisce alcun significato al valore puntuale di una distribuzione**.

Una funzione $\boldsymbol{u}$ **è a simmetria radiale** se:

$$u(x) = u(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| = \|y\|$$

L'esempio fondamentale di distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è la **delta di Dirac**, denotata con $\boldsymbol{\delta}$ e definita come:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

La delta di Dirac concentrata in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è:

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \wedge \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

δ è una distribuzione, la linearità è evidente dalla definizione e la continuità è immediata, con $j \to +\infty$:

$$\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi \Longrightarrow \langle \delta_{x_0}, \varphi_j \rangle = \varphi_j(x_0) \overset{\mathcal{D}'}{\to} \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Ogni funzione localmente sommabile individua una distribuzione (detta distribuzione regolare) mediante l'operatore integrale:

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow u_f \in \mathcal{D}'(\Omega) :\ \langle u_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

La proprietà di linearità segue dalla definizione, mentre per la continuità $\forall j > j_0$:

$$\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi, \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \Omega : \left|\varphi_j(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon\ \Longrightarrow \left|\int_\Omega f(x)\varphi_j(x)dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| < \varepsilon \int_K |f(x)|dx$$

Dove $\boldsymbol{K}$ **è un compatto di $\boldsymbol{\Omega}$ che contiene tutti i supporti di $\boldsymbol{\varphi_j}$**; ne segue che:

$$\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi\ \Longrightarrow \langle f, \varphi_j \rangle \overset{\mathcal{D}'}{\to} \langle f, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Questo esempio permette di **immergere**:

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

L'immersione è una relazione tra due spazi tali che uno dei due contiene un sottoinsieme che conserva tutte le strutture dell'altro.

ENUNCIATO TEOREMA DELLE IMMERSIONI CONTINUE

Ipotesi:

$\forall f \in L^1_{loc}(\Omega), u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ l'applicazione $f \to u_f$ è lineare e iniettiva

$\forall 1 \leq p \leq +\infty$

Tesi:

$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

Ciò significa che se $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$ o in $L^1_{loc}(\Omega)$, allora $u_j \to u$ anche in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ENUNCIATO LEMMA DI DU BOIS – REYMOND

Ipotesi:

$\forall f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Tesi:

$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f(x) = 0$ q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

$\int_\Omega [f(x) - g(x)]\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

Se fossero anche continue, coinciderebbero ovunque. Di seguito, **la dualità tra la distribuzione f è la funzione test φ verrà denotata anche con**:

$$\int_\Omega f\varphi = \langle f, \varphi \rangle \ \forall f \in \mathcal{D}'(\Omega) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ricordando che $\int$ **non indica l'operatore di integrazione a meno che la distribuzione f non sia associata ad una funzione $L^1_{loc}(\Omega)$**. Questo metodo di rappresentazione risulta utile, ad esempio, per estendere la **formula del cambiamento di variabile degli integrali multipli alla dualità tra distribuzioni e funzioni test** (limitatamente a cambiamenti di coordinate che risultino affini e invertibili):

$$\int_\Omega f(\mathbb{A}x + b)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{A}(\Omega)+b} f(y)\varphi\big(\mathbb{A}^{-1}(y - b)\big)|\det \mathbb{A}^{-1}|dy$$

Con $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ **e $\mathbb{A}$ matrice invertibile**. Questa identità va interpretata come la definizione della distribuzione $f(\mathbb{A}x + b)$ nel caso in cui sia nota la $f(x)$.

Si osservi come le espressioni $\boldsymbol{f(\mathbb{A}x + b)}$ **e** $\boldsymbol{f(x)}$ **perdano di significato una volta fissato** $\boldsymbol{x}$, dal momento in cui **non è definito il valore puntuale di una distribuzione** (neanche quasi ovunque); **la variabile indipendente svolge il ruolo di "variabile di integrazione" o di "variabile muta"** perché le distribuzioni non sono definite da valori puntuali ma dalle dualità con tutte le possibili funzioni test in $\mathcal{D}(\Omega)$. Si può concludere dicendo che conoscere una distribuzione f significa saper calcolare $\langle f, \varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ DI NON SURIETTIVITÀ DELL'IMMERSIONE

Ipotesi:

Sia considerata la distribuzione δ di Dirac

Tesi:

$\nexists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \delta = f$, ovvero δ non è una funzione

Dimostrazione:

Si ragioni per assurdo e si supponga l'esistenza di una funzione sommabile $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \; f = \delta$:

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Da cui:

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \operatorname{spt} \varphi \subset \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Ma, per il lemma di Du Bois – Reynold:

$$f = 0 \text{ q. o. } x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Ovvero in $\mathbb{R}$. Segue che:

$$\varphi(0) = 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Si è raggiunti ad una contraddizione; infatti, è possibile prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi(0) = 1$ ma non esiste una tale distribuzione f. Si è raggiunti l'assurdo che desume dal fatto che si è supposta la delta di Dirac una funzione.

CVD

Un modo equivalente con cui è enunciato questo teorema consiste nell'affermare che **non tutte le distribuzioni possono essere rappresentate da una funzione** $\boldsymbol{L^1_{loc}}$ tramite la relazione:

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, sono date le seguenti definizioni:

- $\boldsymbol{u}$ **è una distribuzione radiale** se $\forall \mathbb{A}$ matrice ortogonale

$$u(\mathbb{A}x) = u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- $\boldsymbol{u}$ **è una distribuzione** $\boldsymbol{\lambda}$ **– omogenea** se

$$u(tx) = t^\lambda u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- $\boldsymbol{u}$ **è una distribuzione pari** se

$$u(-x) = u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- $\boldsymbol{u}$ **è una distribuzione dispari** se

$$u(-x) = -u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- $\boldsymbol{u}$ **è una distribuzione** $\boldsymbol{T}$ **– periodica** se

$$u(T + x) = u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Tutte queste **definizioni** sono **ben poste**, essendo $\mathbb{A}x$, tx, $-x$ e $T + x$ funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bigettive e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le loro inverse.

Ad esempio, **la delta di Dirac è una distribuzione radiale**, pari e $(-n)$ – omogenea in $\mathbb{R}^n$:

- $\boldsymbol{\delta}$ **è radiale**, con $\mathbb{A}$ matrice ortogonale e $b = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbb{A}x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi(\mathbb{A}^{-1}y)|\det \mathbb{A}^{-1}|dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi(\mathbb{A}^{-1}y)dy = \varphi(0)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)dx$$

Essendo $\varphi(\mathbb{A}^{-1}\ \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Segue che:

$$\delta(\mathbb{A}x) = \delta(x)$$

- $\boldsymbol{\delta}$ **è pari**, sia $\mathbb{A} = -\mathbb{I}$ con $\mathbb{I}$ la matrice identica

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(-x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi(-y)|\det(-\mathbb{I})|dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi(-y)dy = \varphi(-0) = \varphi(0)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)dx$$

Segue che:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

- $\boldsymbol{\delta}$ **è** $(-\boldsymbol{n})$ **– omogenea**, $\forall t > 0$ e $\mathbb{A} = t\mathbb{I}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(tx)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\left|\det\left(\frac{\mathbb{I}}{t}\right)\right| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\varphi\left(\frac{y}{t}\right) t^{-n} dy = t^{-n}\varphi(0)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\delta(x)\varphi(x)dx$$

Segue che:

$$\delta(tx) = t^{-n}\delta(x)$$

ENUNCIATO TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE

Ipotesi:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e non vuoto

Tesi:

$\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{D}'(\Omega)$, ovvero $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \exists u_n \in \mathcal{D}(\Omega) : u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$

ENUNCIATO TEOREMA DI FUNZIONALI LINEARI COME DISTRIBUZIONI

Ipotesi:

$\forall u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ funzionale lineare

Tesi:

$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall K \subset \Omega$ compatto $\exists C = C(K)$ costante e $m = m(K)$ intero non negativo : $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_x |D^\alpha \varphi(x)|\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{spt}\varphi \subset K$

Una distribuzione $\boldsymbol{u}$ **è detta di ordine finito se vale il teorema appena enunciato con** $\boldsymbol{m}$ **indipendente dal compatto** $\boldsymbol{K}$; in caso contrario, è detta di **ordine infinito**. **L'ordine della distribuzione è dato dal più piccolo valore di** $\boldsymbol{m}$ **per cui vale la disuguaglianza enunciata nel teorema**, mentre si parla di **misure** facendo riferimento a **distribuzioni di ordine zero**.

Una **distribuzione regolare** è una **distribuzione di ordine zero**, quindi una **misura**; infatti, se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\langle u_f, \varphi\rangle\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|dx \leq \|f\|_{L^1(\operatorname{spt}\varphi)}\|\varphi\|_{L^\infty}$$

La delta di Dirac è una misura, infatti:

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \le \|\varphi\|_{L^\infty}$$

Sia $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, viene definita la distribuzione $\boldsymbol{\psi u}$ **il prodotto di una distribuzione per una funzione**:

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi\varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ad esempio, $\forall \psi \in C^\infty(\Omega), x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\langle \psi \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \psi\varphi \rangle = \psi(x_0)\varphi(x_0) \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\psi \delta_{x_0}(x) = \psi(x_0)\delta_{x_0}(x)$$

Per individuare il **supporto di una distribuzione**, si vuole caratterizzare **il più piccolo insieme al di fuori del quale una distribuzione $\boldsymbol{T}$ si annulla**; essendo le distribuzioni definite su funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ e non su sottoinsiemi $\mathbb{R}^n$, **non si può procedere definendo supporto la chiusura dell'insieme in cui essa è diversa da zero**, si deve seguire una via indiretta. Si inizia dicendo che **una distribuzione $\boldsymbol{T \in \mathcal{D}'(\Omega)}$ si annulla su un aperto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ se**:

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{spt} \varphi \subset A$$

Sia $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ **l'insieme aperto formato dall'unione di tutti gli aperti $\boldsymbol{A}$ su cui $\boldsymbol{T}$ si annulla**, allora si definisce **supporto della distribuzione $\boldsymbol{T \in \mathcal{D}'(\Omega)}$** l'insieme:

$$\operatorname{spt} T = \Omega \backslash \mathcal{A}$$

Nonostante la complessità di questa definizione, si scorge la sua utilità nel momento in cui è possibile con essa **dare la definizione di supporto per funzioni $\boldsymbol{L^1(\Omega)}$ non continue**. Si può dire che **il supporto della distribuzione $\boldsymbol{T}$ è relativamente chiuso in $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$**, cioè esiste un chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$: $\operatorname{spt} T = C \cap \Omega$.

Un punto $x_0 \notin \operatorname{spt} T \Leftrightarrow \exists V(x_0) : \langle T, \varphi \rangle = 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(V)$, mentre $x_0 \in \operatorname{spt} T \Leftrightarrow \forall V(x_0) \; \exists \varphi \in \mathcal{D}(V) : \langle T, \varphi \rangle \neq 0$, dove $V(x_0)$ è un intorno di x_0.

Si denota con $\boldsymbol{\mathcal{E}'(\Omega)}$ **lo spazio delle distribuzioni il cui supporto è compatto**, cioè **limitato e con distanza positiva dalla frontiera dell'aperto $\boldsymbol{\Omega}$**. A tal proposito, possono essere evidenziate le seguenti **proprietà**:

- Se una **distribuzione ha supporto compatto**, allora ha **ordine finito**;
- **La delta di Dirac ha supporto compatto**, $\operatorname{spt} \delta = \{0\}$ e $\delta \in \mathcal{E}'(\Omega)$;
- Se $\boldsymbol{T = u_f}$ **per qualche funzione $\boldsymbol{f \in C(\Omega)}$**, allora $\boldsymbol{\operatorname{spt} T = \operatorname{spt} f}$;
- Una **distribuzione ha supporto compatto $\Leftrightarrow$ si estende ad un funzionale lineare e continuo su $\boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$**; in tal caso, la dualità agisce tra $\mathcal{E}'(\Omega)$ e $\mathcal{E}(\Omega)$ e verifica per ogni $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$:
    - $\langle v, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle v, \varphi \rangle + \beta\langle v, \psi \rangle \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}(\Omega)$;
    - $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \Longrightarrow \langle v, \varphi_j \rangle \to \langle v, \varphi \rangle$.

Quelle che seguono sono le definizioni di due spazi particolarmente importanti. È detto **spazio di Schwartz** (o spazio **delle funzioni a decrescenza rapida**) lo spazio:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \left|x^{\boldsymbol{\beta}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(x)\right| < \infty \ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n\right\}$$

Una successione di funzioni $(\boldsymbol{\psi_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ **converge in $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ alla funzione $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$** se e solo se $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n$:

$$x^{\boldsymbol{\beta}} D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_j(x) \to x^{\boldsymbol{\beta}} D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(x) \text{ uniformemente in } \mathbb{R}^n$$

Non è difficile dimostrare che **la trasformata di Fourier $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \to \hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ è continua rispetto alla convergenza definita in $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$**.

Viene indicato con $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R})$ **lo spazio di distribuzioni temperate**, composto dalle d**istribuzioni che possono essere estese su $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ come funzionali lineari e continui rispetto alla convergenza in $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$**. Quindi, una distribuzione $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R})$ **è una distribuzione temperata** (o a **crescita lenta**) **quando**:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} uv_k = 0$$

Per ogni successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ che tende a zero nel senso di $\mathcal{S}$. I seguenti sono esempi di **distribuzioni temperate**:

- **Funzioni a crescita lenta**, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : u = Pw$ con $w \in L^1(\mathbb{R})$ e P polinomio; funzioni a crescita lenta sono:
  - **Funzioni $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})$**, infatti $u = 1 \cdot u$;
  - **Funzioni $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$**, infatti $u = u \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot (1 + x^2) = u_1(x)(1 + x^2)$;
  - **Funzioni $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R})$**;
  - **Polinomi di ordine $\boldsymbol{h}$**, infatti $u = u \cdot \frac{1}{1+x^{2m}} \cdot (1 + x^{2m}) = u_1(x)(1 + x^{2m})$ con $2m \geq h + 2$.
- **Distribuzioni a supporto compatto** (come la delta di Dirac).

Riprendendo la definizione di **distribuzione $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R})$ periodica di periodo $\boldsymbol{T > 0}$**:

$$u(x) = u(x + T) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x - T)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Si può affermare che **tutte le distribuzioni periodiche sono temprate**. Un esempio di distribuzione periodica è il **pettine di Dirac** (o treno di impulsi); sia $l > 0$:

$$\delta_l^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nl)$$

È una **distribuzione periodica di periodo $\boldsymbol{l}$**, infatti:

$$\langle \delta_l^*(x), \varphi(x + l)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nl + l) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varphi(pl) = \langle \delta_l^*(x), \varphi(x)\rangle$$

Si può provare che **tale serie converge nel senso delle distribuzioni**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta(x-nl), \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nl) = \sum\nolimits_{nl \in \operatorname{spt} \varphi} \varphi(nl)$$

Che è una **somma finita**, in quanto costituita da un numero finito di addendi.

Una successione $(\boldsymbol{u_k})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{\mathcal{S}'}(\mathbb{R})$ **converge in** $\boldsymbol{\mathcal{S}'}(\mathbb{R})$ **a** $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}'}(\mathbb{R})$ se:

$$\int_{\mathbb{R}} u_j \psi \to \int_{\mathbb{R}} u\psi \ \ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Valgono le seguenti **inclusioni** (tutte **proprie**):

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Inoltre, valgono le seguenti **relazioni tra le varie convergenze**:

$$\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi$$

$$\psi_j \xrightarrow{\mathcal{E}'} \psi \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \psi \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} \psi$$

ENUNCIATO TEOREMA DI RELAZIONE TRA CONVERGENZA IN $\boldsymbol{L^1_{loc}}$ E $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$

Ipotesi:

$u_j \xrightarrow{L^1_{loc}} u$

Tesi:

$u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$

Si può ben capire come sia importante **trovare successioni di funzioni localmente sommabili che convergono in distribuzione alla distribuzione $\boldsymbol{\delta}$ di Dirac**. Ad esempio, sia $\boldsymbol{B_\varepsilon} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ il disco di raggio ε e centro l'origine e $\boldsymbol{\chi_{B_\varepsilon}}$ **la sua funzione caratteristica**, si può provare che:

$$\frac{1}{m(B_\varepsilon)} \chi_{B_\varepsilon} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta \ \ \varepsilon \to 0^+$$

Si può applicare il **teorema di completezza**; infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, per il **teorema della media** $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in B_\varepsilon$:

$$\frac{1}{m(B_\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B_\varepsilon}(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{m(B_\varepsilon)}\int_{B_\varepsilon}\varphi(x)dx = \varphi(x_\varepsilon)$$

Dalla continuità di φ segue:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{m(B_\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B_\varepsilon}(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n}\delta\varphi$$

Oppure, sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{k\to+\infty} k^n u(kx) = c\delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \wedge c = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx$$

Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, infatti:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} k^n u(kx)\varphi(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(0)dx = c\varphi(0) = c\int_{\mathbb{R}^n}\delta\varphi dx$$

Grazie al teorema della **convergenza dominata**, dato che:

- $\left|u(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right)\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}|u(y)|$;
- $\lim_{k\to+\infty} u(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right)$ q.o. in $\mathbb{R}^n$.

Anche la successione:

$$\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{(-k^2x^2)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

Converge in distribuzione alla delta di Dirac. Infine, ultimo esempio riportato, si dimostri che **ogni funzione η_ε che gode delle seguenti proprietà è dotata di limite nel senso delle distribuzioni e che esso è proprio la delta di Dirac**:

1. $\eta_\varepsilon(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x)dx = 1$;
3. $\int_{|x|\geq r}\eta_\varepsilon(x)dx \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+\ \forall r > 0$.

Bisogna provare che:

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \varphi(0)\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Per la continuità di φ in zero, fissato un $\lambda > 0\ \exists\alpha > 0$:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \lambda\ \forall|x| \leq \alpha$$

Quindi:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx\right|$$
$$\leq \int_{|x|\leq\alpha} \eta_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx + \int_{|x|>\alpha} \eta_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx$$
$$\leq \lambda + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \int_{|x|>\alpha} \eta_\varepsilon(x)dx \leq \lambda$$

Per ε sufficientemente piccolo. Ma, poiché λ è arbitrario, segue che:

$$\eta_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta$$

LA DERIVATA DISTRIBUZIONALE

Per le distribuzioni **viene introdotto un operatore di derivazione diverso da quello classico**, ovvero il limite puntuale del rapporto incrementale, **che sia comunque una sua estensione**; tale estensione sarà fatta **sulla base della formula di integrazione per parti**.

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si sa che **il prodotto $f\varphi$ risulta di classe $C_0^1(\mathbb{R})$**. Per φ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ per cui:

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = 0 \; \forall x \notin (a, b)$$

Segue che, per **la formula di integrazione per parti $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$**:

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx$$

Ovvero:

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega f'(x)\varphi(x)dx$$

Visto che, **al di fuori del compatto, $f(x)\varphi(x)$ si annulla**. Si può, quindi, dire:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle \; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Questo risultato mostra che **il funzionale $u_{f'}$** (indicato con f') **coincide con il funzionale**:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \to \langle f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{R}$$

Ma **questo integrale ha senso anche se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$**, cioè se non è necessariamente dotata di derivata. Supposto $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, si pone:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle \; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Dove **il primo membro è solo un simbolo usato per indicare il funzionale lineare definito attraverso il secondo membro**. Il funzionale in questione è detto **derivata distribuzionale di $\boldsymbol{f}$**; in tal modo, **risulta definita la derivata di ogni funzione localmente integrabile**, che è un funzionale non necessariamente identificato da una funzione. Rimane ora da definire **quando tale funzionale è una funzione**, ovvero quando esiste una $g \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$\langle f, \varphi' \rangle = -\langle g, \varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

In tal caso $\boldsymbol{g = f'}$ e viene detta **derivata nel senso delle distribuzioni** (o **derivata debole**) **di $\boldsymbol{f}$**. In genere, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

E **il funzionale definito al secondo membro** (indicato attraverso il simbolo al primo membro) **è detto derivata distribuzionale di $\boldsymbol{f}$ di ordine $\boldsymbol{k}$**. Si rileva che se **$\boldsymbol{f \in L^1_{loc}(\Omega)}$ esistono le derivate distribuzionali di qualsiasi ordine ma non esiste necessariamente la derivata debole**.

Si proceda a definire le **derivate distribuzionali** che siano delle **distribuzioni**, **che esistano sempre e che coincidano con le derivate classiche nel caso in cui anche queste esistano**. Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, **la derivata distribuzionale di $\boldsymbol{u}$ è la distribuzione $\boldsymbol{u' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$ definita univocamente** da:

$$\int_\mathbb{R} u'\varphi dx = -\int_\mathbb{R} u\varphi' dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

In $\mathbb{R}^n$ invece, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la **derivata distribuzionale di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla variabile $\boldsymbol{x_j}$** (j – esima componente di $x \in \mathbb{R}^n$) è la **distribuzione $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)}$ definita univocamente** da:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

In generale si definisce la **derivata distribuzionale $\boldsymbol{D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \in \mathcal{D}'(\Omega)}$**, con $\boldsymbol{\alpha}$ multi – indice, mediante:

$$\int_\Omega D^\alpha u\varphi dx = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int_\Omega uD^\alpha \varphi dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Se una derivata classica esiste ed è continua in tutto $\boldsymbol{\Omega}$ allora essa coincide con la relativa derivata distribuzionale (discende dalla regola di integrazione per parti valida per funzioni C^1); inoltre, se $f \in C^k$ e $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$ allora:

$$D^\alpha u_f = u_{D^\alpha f}$$

Valgono le seguenti proprietà per le derivate distribuzionali:

- **Ogni distribuzione risulta derivabile infinite volte**;

- **La derivazione è continua rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$**:

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi \Longrightarrow D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$$

- **Formula di Leibniz** per la derivazione del prodotto:

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}(uv) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\alpha}} \binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} (D^{\boldsymbol{\alpha}}u)\left(D^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}v\right) \ \forall v \in \mathcal{E}(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega), \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$$

- **Teorema di Schwartz** relativo alle derivate miste (**senza ipotesi**):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}u = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}u \ \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ \forall j,k \in [1,n]$$

Si individui la **derivata distribuzionale della funzione di Heavside** centrata in t_0:

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow t \ge t_0 \\ 0 \Leftrightarrow t < t_0 \end{cases}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} H'\varphi = -\int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi'(t)dt = -\int_{t_0}^{+\infty} \varphi'(t)dt = \lim_{a \to +\infty}[\varphi(a) - \varphi(t_0)] = \varphi(t_0) = \delta(t-t_0)$$

Per quanto riguarda la derivata distribuzionale della funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$:

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow t \in [a,b] \\ 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}\backslash[a,b] \end{cases}$$

Poiché $\chi_{[a,b]}(t)$ può essere espressa come particolare forma della funzione di Heavside:

$$\chi_{[a,b]}(t) = H(t-a) - H(t-b) \Longrightarrow \chi'_{[a,b]}(t) = \delta(t-a) - \delta(t-b) = \delta_a(t) - \delta_b(t)$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DERIVAZIONE IN UNA DISCONTINUITÀ

Ipotesi:

$\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ è derivabile ovunque tranne che nel punto x_0, dove f presenta al più un salto o una discontinuità eliminabile

$f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\backslash\{x_0\})$

Tesi:

$u_f'(x) = \left(f(x_0-0) - f(x_0-0)\right)\delta_{x_0}(x) + u_{f'}(x)$

Dimostrazione:

Dalla definizione di derivata di una distribuzione:

$$\langle u_f'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle u_f(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Se in x_0 si fa valere la funzione, continua su $(-\infty, x_0)$, il suo limite sinistro $f(x_0 - 0)$, poiché la funzione è ovunque derivabile e poiché φ è a supporto compatto, integrando per parti:

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx = f(x_0 - 0)\varphi(x_0) - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx$$

Similmente:

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{+\infty} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$
$$= -f(x_0 - 0)\varphi(x_0) - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Sostituendo nella precedente relazione si può dimostrare la tesi.

CVD

Con riferimento al risultato precedente, si noti che **nel caso in cui la funzione f sia continua in x_0** (anche se non necessariamente derivabile in tale punto) **si ha che la derivata della distribuzione u_f non contiene parte singolare**:

$$u_f' = u_{f'}$$

La seguente proposizione **estende il teorema appena dimostrato a funzioni con un numero finito di salti** ma il risultato che segue può essere esteso anche ad un **insieme di salti S infinito**.

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVAZIONE IN UN SALTO

Ipotesi:

$\forall I$ intervallo aperto

$\forall S \subset I$: S è privo di punti di accumulazione interni a I

$\forall f \in L_{loc}^1(I) : f \in C^1(I \backslash S)$ e ha in ogni punto di S una discontinuità eliminabile o un salto

Tesi:

$u_f'(x) = \sum_{z\in S}\big(f(z+0) - f(z-0)\big)\delta_z(x) + u_{f'}$

Le **derivate distribuzionali** godono di **proprietà simili a quelle della derivata di funzioni**. Siano $T, T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, $x_0, a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$:

1. $(aT_1 + bT_2)' = aT_1' + bT_2'$;
2. $\left(T(x - x_0)\right)' = T'(x - x_0)$;
3. $\left(T(cx)\right)' = cT'(cx)$;
4. $\left(\psi(x)T(x)\right)' = \psi'(x)T(x) + \psi(x)T'(x)$.

ENUNCIATO LEMMA DEI SUPPORTI DELLE DERIVATE

Ipotesi:

$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Tesi:

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, \operatorname{spt} D^{\alpha} T \subset \operatorname{spt} T$

$\forall f \in C^\infty(\Omega), \operatorname{spt} fT \subset \operatorname{spt} T \cap \operatorname{spt} f$

Si suppongano $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, allora $u * v \in L^1(\mathbb{R})$, mentre se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $v \in L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto, allora $u * v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVATA DISTRIBUZIONALE DELLA CONVOLUZIONE

Ipotesi:

$\forall u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $v \in L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto

$v \in C^k(\mathbb{R}^n)$

Tesi:

$u * v \in C^k(\mathbb{R}^n)$

$D^{\alpha}(u * v) = u * D^{\alpha} v \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n : \operatorname{ord}(\boldsymbol{\alpha}) \leq k$

Se, inoltre, $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ allora $u * v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Siano $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la funzione:

$$y \to \varphi(x - y)$$

Appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, quindi è definita in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione:

$$(u * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x-y)dy$$

E prende il nome di **convoluzione tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\varphi}$**; la definizione si può **estendere anche a $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}), \boldsymbol{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ e a $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}), \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$**. Un esempio molto pratico di convoluzione tra distribuzioni e funzioni test coinvolge la delta di Dirac; infatti, vale la seguente relazione $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(\delta * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\delta(x-y)dy = \varphi(x)$$

ENUNCIATO TEOREMA DI DERIVATA DELLA CONVOLUZIONE

Ipotesi:

$\forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : u \vee v$ ha supporto compatto (cioè $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \vee v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)

Tesi:

$u * v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$

Date due **distribuzioni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$** tali che **almeno una di esse abbia supporto compatto**, si definisce la convoluzione tra distribuzioni come:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u * v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u(\tilde{v} * \varphi)\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Con $\tilde{v}(x) = v(-x)$. **La convoluzione tra due distribuzioni $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n)$ è ancora una distribuzione $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$** e verifica le seguenti proprietà:

$$\operatorname{spt} u * v \subset \overline{\operatorname{spt} u \cap \operatorname{spt} v}$$

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$$

Si osservi esplicitamente che **se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ hanno supporto compatto**, allora $u * \boldsymbol{v}$ **ha supporto compatto**. Un esempio di convoluzione tra distribuzioni è:

$$u * \delta = u = \delta * u\ \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI INTEGRALE DELLA TRASFORMATA

Ipotesi:

$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Tesi:

$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)g(w)dw = \int_{\mathbb{R}} f(w)\hat{g}(w)dw$

Dimostrazione:

Per il teorema di Fubini si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)g(w)dw = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iwx}dx\right)g(w)dw = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-iwx}dx\right)f(w)dw$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(w)\hat{g}(w)dw$$

CVD

Il teorema appena dimostrato permette di definire la **trasformata di Fourier per una distribuzione temperata**. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, cioè $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ il teorema permette di dire che:

$$\langle \hat{f}, v\rangle = \langle f, \hat{v}\rangle$$

Equivale a dire che **la distribuzione $\hat{f}$ assume, in corrispondenza della funzione test v, lo stesso valore della distribuzione f in corrispondenza della funzione test $\hat{v}$**. Quindi, $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\langle \hat{f}, v\rangle = \langle f, \hat{v}\rangle \ \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Definendo, così, **una distribuzione temperata $\hat{f}$**, in quanto **composta dalle trasformazioni lineari e continue**:

$$v \to \hat{v} \to \langle f, \hat{v}\rangle$$

Poiché **sia δ che δ_{x_0} sono distribuzioni temperate** $\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \hat{\delta}(x), v(x)\rangle = \langle \delta(x), \hat{v}(x)\rangle = \hat{v}(0) = \int_{\mathbb{R}} v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot v(x)dx \Rightarrow \hat{\delta}(x) = 1$$

$$\langle \hat{\delta}(x - x_0), v(x)\rangle = \langle \delta(x - x_0), \hat{v}(x)\rangle = \hat{v}(x_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_0x}v(x)dx = \langle e^{-ix_0x}, v(x)\rangle \Rightarrow \hat{\delta}_{x_0}(w)$$
$$= e^{-ix_0w}$$

Si osservi come **$w \to e^{-ix_0w}$ sia una funzione limitata** e, come tale, **induce una distribuzione temperata**.

Parlando di trasformate di Fourier, è possibile **adattare anche la formula di dualità in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ partendo dal fatto che essa è valida in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$**; infatti, sia $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha.

$$\langle \hat{\hat{f}}(x), v(x)\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{v}(x)\rangle = \langle f(x), \hat{\hat{v}}(x)\rangle = 2\pi\langle f(x), v(-x)\rangle = 2\pi\langle f(-x), v(x)\rangle$$

Quindi, $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\hat{\hat{f}} = 2\pi f(-x)$$

La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gode di proprietà analoghe alla trasformata di Fourier di funzioni. Siano $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{C}$ e $c > 0$:

1. $\mathcal{F}(aT + bS)(w) = a\mathcal{F}(T)(w) + b\mathcal{F}(S)(w)$;
2. $\mathcal{F}\big(T(x - x_0)\big)(w) = e^{-ix_0w}\mathcal{F}\big(T(x)\big)(w)$;
3. $\mathcal{F}\left(e^{iw_0x}T(x)\right)(w) = \mathcal{F}\big(T(x)\big)(w - w_0)$;
4. $\mathcal{F}\big(T(cx)\big)(w) = \frac{1}{c}\mathcal{F}\big(T(x)\big)\left(\frac{w}{c}\right)$;
5. $\mathcal{F}\big(T'(x)\big)(w) = iw\mathcal{F}\big(T(x)\big)(w)$;
6. $\frac{d}{dw}\mathcal{F}\big(T(x)\big)(w) = \mathcal{F}\big(-ixT(x)\big)(w)$;
7. T è a supporto compatto e $S * T \in \mathcal{S}' \Longrightarrow \mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$.