

FISICA GENERALE II

Prof. Elvira Rossi – A.A. 2022/23

Luca Maria Incarnato

INDICE DEGLI ARGOMENTI

ELETROSTATICA

1. LE INTERAZIONI FONDAMENTALI (p. 3)
2. ELETROSTATICA ED ELETTRICITÀ (p. 4)
3. LA LEGGE DI COULOMB (p. 7)
4. IL CAMPO ELETTRICO (p. 8)
5. LAVORO DELLA FORZA ELETTRICA (p. 10)
6. DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA (p. 15)
7. FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS (p. 22)
8. POTENZIALE ELETROSTATICO (p. 32)
9. MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETROSTATICO (p. 39)
10. DIPOLO ELETTRICO (p. 40)
11. CONDUTTORI ED ISOLANTI (p. 47)
12. CONDENSATORI (p. 52)
13. DIELETTRICI (p. 60)
14. LA CORRENTE ELETTRICA E LE LEGGI DI OHM (p. 64)
15. I RESISTORI E LE LEGGI DI KIRCHHOFF (p. 73)
16. PROCESSI DI CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE (p. 79)

MAGNETISMO

17. I FENOMENI MAGNETICI (p. 83)
18. ELETTRICITÀ E MAGNETISMO (p. 84)
19. EFFETTO HALL (p. 90)
20. MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO MAGNETICO (p. 91)
21. CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CORRENTE (p. 95)
22. LA LEGGE DI AMPERE E LA LEGGE DI GAUSS (P. 104)

ELETROMAGNETISMO

23. LE EQUAZIONI DI MAXWELL (p. 108)
24. LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ (p. 109)
25. CAMPI SOLENOIDALI E LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL (p. 111)
26. APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI FARADAY (p. 114)
27. AUTOINDUZIONE (p. 116)
28. MUTUA INDUZIONE (p. 123)

ELETROSTATICA

LE INTERAZIONI FONDAMENTALI

In seno all'obiettivo di trovare una teoria unificata della fisica che spieghi qualsiasi fenomeno che avviene nell'universo, sono stati individuati **quattro tipi di interazione** a cui si riduce **ogni fenomeno osservabile nel nostro cosmo**; esse sono dette **interazioni fondamentali**. Esse sono:

- **Interazione forte;**

Essa è responsabile del **legame tra i protoni** di uno stesso atomo che, per natura elettrica, tendono a respingersi. Affinché l'atomo esista il nucleo deve essere ben saldo, quindi si necessita una forza che equilibri la forza repulsiva dei protoni.

- **Interazione debole;**

È responsabile del **decadimento degli atomi**, tendendo quindi alla trasformazione della materia piuttosto che alla sua coesione

- **Interazione gravitazionale;**

È responsabile dell'**attrazione di due corpi** ed è il concetto su cui si basa la nozione di gravità

- **Interazione elettromagnetica;**

È responsabile del **campo magnetico**, cioè la rappresentazione spaziale dell'interazione di due o più corpi dotati di carica elettrica.

Interazione	Mediatore	Intensità relativa	Andamento asintotico	Raggio d'azione
Forte	Gluone	$10^{38} N$	r	$1.4 \cdot 10^{-15} m$
Debole	Fotone	$10^{25} N$	$\frac{e^{-Mr}}{r}$	$10^{-18} m$
Gravitazionale	Bosoni W e Z	$10^0 N$	$\frac{1}{r^2}$	∞
Elettromagnetica	Gravitone (?)	$10^{36} N$	$\frac{1}{r^2}$	∞

Già dal seguente schema è possibile notare una **similitudine tra l'interazione gravitazionale e quella elettromagnetica**, che verrà approfondita in seguito. Basti sapere che l'interazione gravitazionale avviene tra **due corpi di masse m_1 e m_2 a distanza r** , molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi. **I due corpi interagiscono con un'intensità direttamente proporzionale alle masse e inversamente proporzionale alla distanza al quadrato dei due corpi**:

$$\bar{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

La forza gravitazionale è una forza centrale, cioè è determinata in funzione della distanza tra i due corpi interagenti ed è posizionata sul raggio d'azione dei due e inoltre, individua un campo gravitazionale. Tutte queste caratteristiche si ritrovano simmetricamente nell'interazione elettromagnetica, in particolare con la legge di Coulomb, dove le masse sono sostituite dalle cariche.

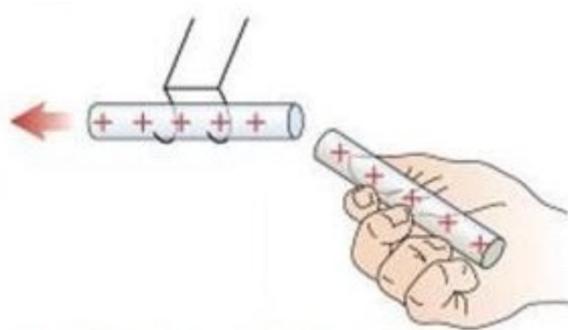
ELETROSTATICA ED ELETTRICITÀ

L'**elettrostatica** è una branca dell'**elettromagnetismo** che studia le **interazioni di cariche elettriche statiche nel tempo**, cioè di quelle cariche generatrici del **campo elettrostatico**. Il termine elettricità deriva dalla parola greca **elektron**, cioè **ambra**; infatti, sin dai tempi di Talete si era notato che strofinando dell'ambra con un panno di lana si potessero attrarre oggetti molto piccoli, come paglia o piume.

Ad oggi si sa che questo fenomeno è **dovuto all'esistenza di due stati elettrici**: lo stato **positivo (+)**, individuato dal vetro elettrizzato con un panno di seta, e lo stato **negativo (-)**, individuato dall'ambra strofinata con la lana. Tuttavia, non tutti i materiali, se strofinati, attraggono oggetti; pertanto, si fa la distinzione tra **materiali isolanti**, cioè quelli che trattengono la carica e permettono l'attrazione di oggetti piccoli, e i **materiali conduttori**, che non trattengono la carica ma la lasciano libera di fluire, con la conseguenza che non attraggono corpi. Quando **un corpo è elettrizzato**, quindi in grado di attrarre oggetti, è detto **elettricamente carico**.

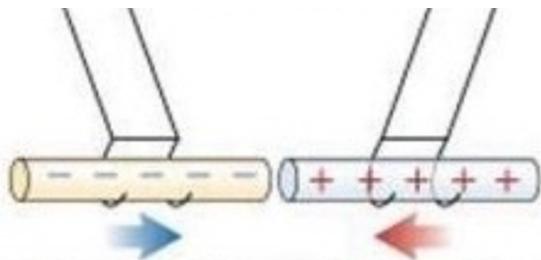
La maggior parte dei fenomeni che si vedono nel mondo naturale sono **un risultato dell'interazione elettromagnetica**, che permette la coesione di nucleo ed elettroni per formare atomi stabili, di atomi per formare molecole e di molecole per formare corpi complessi. L'**interazione elettromagnetica**, come suggerisce il nome, non coinvolge solo il fenomeno dell'elettricità, ma anche quello del magnetismo; i due fenomeni, infatti, sono legati da una proprietà comune, detta **carica elettrica**.

Andando ad analizzare meglio il fenomeno osservato dai greci, si nota che, **strofinando due bacchette di vetro con un panno di seta** e appesa una delle due ad un filo, **le due bacchette si respingono**. Ciò accade perché durante lo strofinio i corpi diventano elettricamente carichi e, avvicinandosi, applicano l'uno sull'altro una forza elettrica.

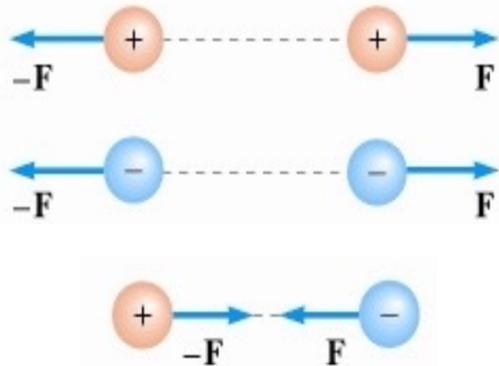


Lo stesso accade se si strofinano due bacchette di plastica su un panno di pelo; tuttavia, quando si avvicinano una bacchetta di plastica e una di vetro elettrizzate, si nota che esse non si respingono ma si attraggono. Da ciò si può dedurre che le cariche che hanno elettrizzato i due corpi sono diverse, in quanto se fossero simili (come lo sono in due bacchette di vetro elettrizzate)

esse si respingerebbero. Si definiscono **cariche positive** quelle del vetro e **cariche negative** quelle della plastica; la nomenclatura è una pura convenzione e il termine positivo è stato associato solo in quanto le relative cariche sono state scoperte “prima” della controparte.



Si notò che questo fenomeno non accade finché la bacchetta non viene strofinata con un panno; ciò è dovuto al fatto che **un corpo, di per sé, è elettricamente neutro**, cioè ha in egual parti cariche negative e positive. Quando il corpo viene strofinato, alcune cariche migrano sull’oggetto con cui si sta strofinando, caricando il corpo; da quel momento in poi uno ha un eccesso di carica positiva e l’altro di carica negativa. Quando due corpi hanno eccessi di cariche dello stesso segno si respingono, se gli eccessi di carica sono di segno opposto i corpi si attraggono.



Fino al XIX secolo la natura di queste cause rimase ignota, la carica continuava ad apparire come **causa di un elevatissimo numero di portatori** ma non si sapeva cosa essi fossero. Intorno a quel periodo si andarono ad osservare due **particelle elementari** che furono identificate come **costituenti elementari della materia e portatori delle cariche elettriche**: il **protone** e l'**elettrone**, a cui si aggiunge il neutrone di carica nulla.

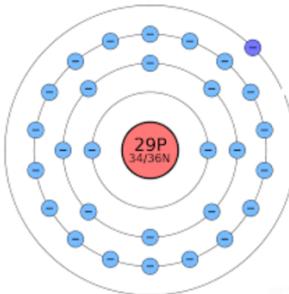
Particella	Massa	Carica
Protone	$m_p = 1.6725 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$	$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elettrone	$m_e = 9.1091 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$	$-e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Neutrone	$m_n = 1.6725 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$	0 C

Si può notare come, anche se hanno due masse ben diverse, **il protone e l'elettrone hanno stessa carica ma segno inverso**, quindi i due saranno rispettivamente la carica positiva e la carica negativa.

Avendo a disposizione le conoscenze sulla struttura di un atomo si può andare ad osservare più a fondo il fenomeno del passaggio di cariche: in un **isolante gli elettroni sono rigidamente legati al nucleo atomico** e non sono in grado di fluire da un corpo ad un altro (polarizzazione), mentre nei

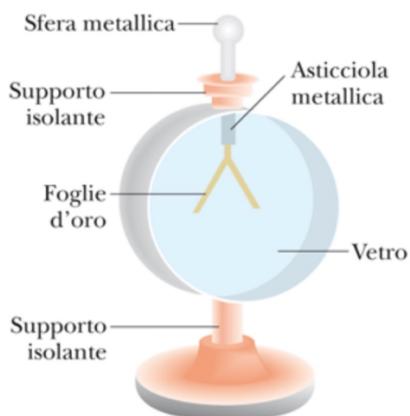
conduttori il guscio elettronico esterno non è completo e gli elettroni sono liberi di arrivare o andare via dal nucleo (induzione), generando il passaggio di cariche elettrice.

Ad esempio, l'atomo di rame (Cu) ha 29 protoni e 29 elettroni; tuttavia, nel guscio esterno è allocato solo un elettrone, che è libero di muoversi e andare via, oppure è possibile che altri elettroni da altri atomi vi si leghino per raggiungere una maggior stabilità.



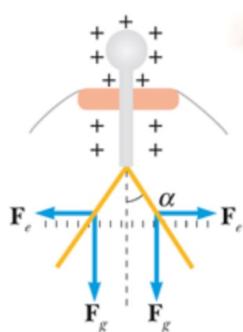
Attraverso questo meccanismo si può facilmente notare che **sono gli elettroni a muoversi**, a creare una regione positiva quando si allontanano da un atomo e una regione negativa quando vi si avvicinano, quindi sono essi **i portatori di carica**.

Lo strumento usato per determinare se un corpo è elettricamente carico si chiama **elettroscopio a foglie**:



Avvicinando una bacchetta elettricamente carica **le due foglie d'oro** (l'oro è uno dei migliori conduttori) **si allargano**, indipendentemente dalla carica della bacchetta. Infatti:

- Se la bacchetta è carica positivamente, verranno attratti sulla sfera metallica gli elettroni e le foglie d'oro saranno cariche positivamente, respingendosi a vicenda;
- Se la bacchetta è carica negativamente, verranno respinti gli elettroni e le foglie d'oro saranno cariche negativamente, respingendosi a vicenda.

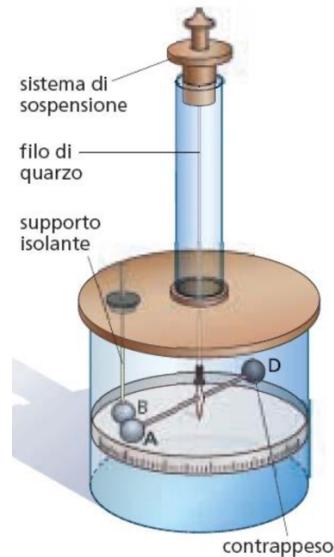


È possibile elettrizzare un corpo in due modi:

- **Elettrizzazione per induzione**, avvicinando (non toccando) un corpo carico negativamente ad un corpo neutro gli elettroni verranno attratti al lato più vicino/lontano (in base al caso);
- **Elettrizzazione per contatto**, ponendo in contatto un corpo carico e un corpo neutro, gli elettroni si sposteranno fisicamente da un corpo all'altro.

LA LEGGE DI COULOMB

Nel **1785** Augustin Coulomb determinò una legge che descrive il **comportamento di due cariche poste in uno stesso spazio**, servendosi di uno strumento chiamato bilancia a contrappeso:



La scoperta fu così importante che Coulomb ricevette un posto riservato nel Sistema Internazionale, come unità di misura della carica elettrica.

Considerando **due cariche elettriche puntiformi q e q_0 a distanza r** , su di esse agisce una forza **direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza** (proprio come l'interazione gravitazionale):

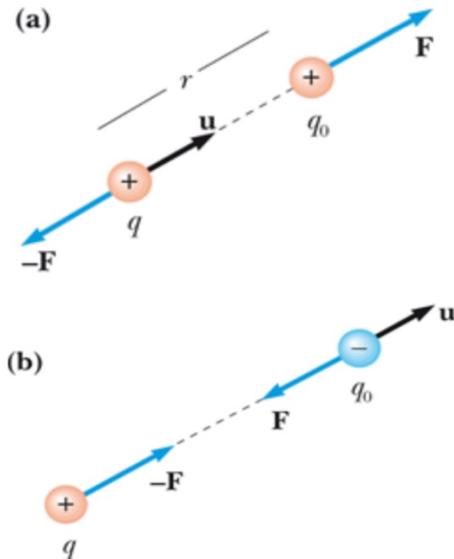
$$\bar{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{u}_r$$

Come suggerisce la formula, **la forza sarà appoggiata sulla congiungente alle due cariche** (dipende dal sistema di riferimento) perché se non fosse le cariche svilupperebbero un momento ma esse non possono perché sono **puntiformi**. Si può notare, inoltre, che quando le due cariche sono **concordi** allora la **forza è positiva**, quindi è **repulsiva**, mentre se sono **discordi** è **negativa**, quindi **attrattiva**.

Nella formula è presente un termine aggiuntivo, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, dove ϵ_0 è la **costante dielettrica** (o permittività) **del vuoto** e il suo valore è:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Anche la **legge di Coulomb** è soggetta alla **terza legge della dinamica di Newton**; pertanto, si individueranno **due forze** ma la formula ne produce una. Ciò è dovuto al fatto che si calcola la legge di Coulomb in funzione di una delle due cariche (q_0) e dipende dal sistema di riferimento. Tuttavia, il quadro generale si configura come segue:



La **forza di Coulomb** è una **forza centrale**; infatti, il suo **modulo dipende dalla distanza** di una carica da un “centro” (che è la posizione di q_0) e **direzione e verso** sono determinati dal relativo **versore**.

IL CAMPO ELETTRICO

Fino ad ora la legge di Coulomb è stata vista come una **forza di interazione tra due corpi**, mentre è possibile metterla sotto un’ottica diversa: si può considerare che la **carica q** , detta carica sorgente, **crea attorno a se un campo vettoriale \bar{E}** che viene percepito dalla carica **q_0** , detta carica di prova. Raggruppando i termini nel seguente modo può risultare più chiara questa definizione:

$$\bar{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{u}_r = q_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \right)$$

La **forza di Coulomb** è una **forza “mediata”**, mentre il **campo elettrico** è il **“mediatore”**. Analiticamente viene definito campo elettrico la quantità che moltiplica la carica di prova:

$$\bar{E}(x; y; z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r = \frac{\bar{F}_q(x; y; z)}{q_0} = \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right]$$

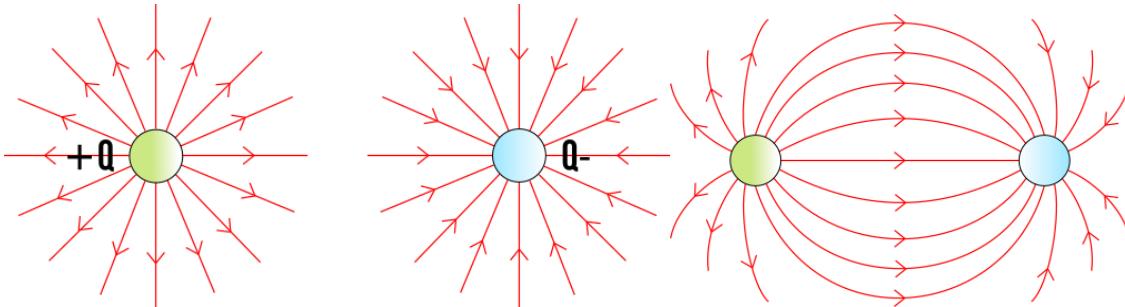
La formula del campo elettrico viene sviluppata in **funzione delle tre coordinate spaziali** perché essa **dipende dalla posizione della carica di prova** ($r \propto (x; y; z)$); infatti, il campo elettrico (in quanto campo vettoriale) non fa altro che rappresentare in un determinato punto il vettore forza elettrica che agisce sulla carica di prova se posta in quel determinato punto.

Una definizione più accurata di campo elettrico si ottiene quando si va a specificare che la **carica di prova deve essere talmente piccola da non influenzare** notevolmente il **campo elettrico**, infatti:

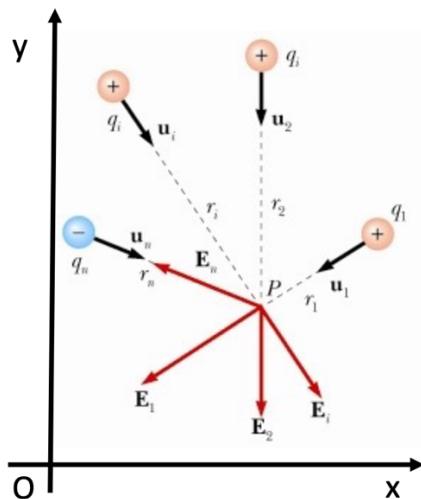
$$\bar{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\bar{F}_q}{q_0}$$

In quanto campo vettoriale, **il campo elettrico** sarà **graficamente rappresentato da una serie di linee orientate la cui tangente è il vettore forza elettrica in quel determinato punto** e la cui densità è determinata dal **valore del campo elettrico in quella regione di spazio**; esse sono definite **linee di campo** e variano in funzione della quantità di cariche che modificano attivamente il campo elettrico.

Un campo elettrico uniforme (cioè con una sola carica che influenza il campo) è caratterizzato da un **fascio proprio di rette**, mentre se si introducono più cariche le linee di campo si fanno più complesse. Tutte però vengono determinate prendendo in considerazione la carica di prova come positiva.



Grazie al **principio di sovrapposizione** è possibile calcolare un **campo elettrico generato da n cariche** come la **somma vettoriale dei campi generati da ciascuna delle n cariche**:



$$\bar{E}_i(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \right)$$

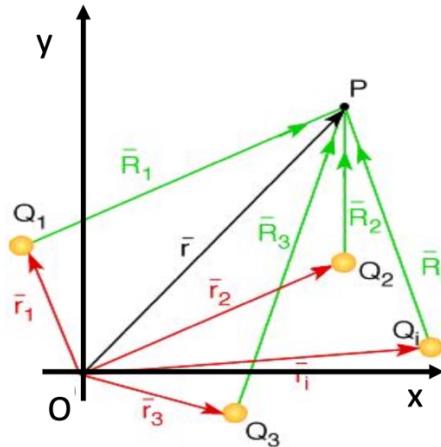
Un discorso analogo può essere fatto con la relativa **forza elettrostatica**, considerando nel punto P una carica puntiforme q_0 :

$$\bar{F}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \left(q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \right) = q_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \right) = q_0 \sum_{i=1}^n \bar{E}_i(\bar{r})$$

Ovviamente, rispetto ad un **sistema di riferimento**:

$$\bar{R}_i = \bar{r} - \bar{r}_i$$

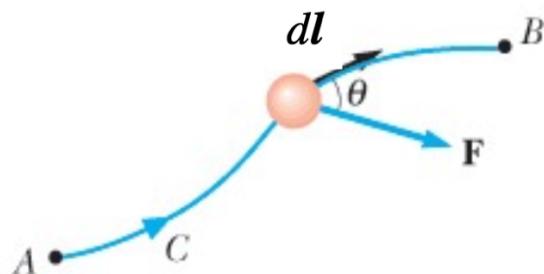
$$\hat{R}_i = \frac{\bar{R}_i}{R_i}$$



LAVORO DELLA FORZA ELETTRICA

Il **lavoro infinitesimo di una forza lungo una traiettoria infinitesima** è definito come:

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{l}$$



Per ottenere il **lavoro totale di una forza lungo uno spostamento** si integrano entrambe le quantità:

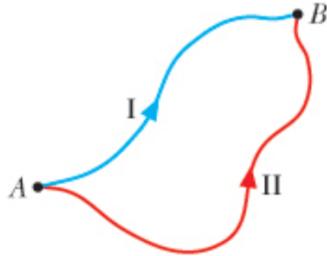
$$W_{AB} = \int_{A,\gamma}^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_{A,\gamma}^B F \cdot \cos \theta \cdot dl$$

Sapendo che l'integrale viene effettuato su una curva, quindi è un **integrale di linea**, $d\bar{l}$ è il vettore spostamento infinitesimo tangente alla traiettoria e \bar{F} è un campo vettoriale. Quando si decompone la formula nei moduli, la quantità $F \cdot \cos \theta$ viene definita **componente tangenziale** alla curva del campo.

Poiché si sta lavorando con integrali di linea, è **importante specificare il verso di percorrenza** della curva e la sua traiettoria, infatti valgono le seguenti relazioni:

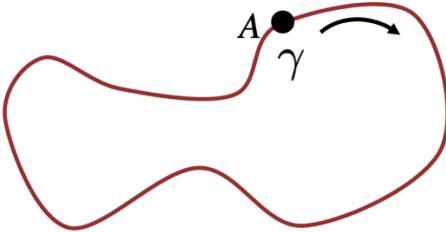
$$\int_{A,\gamma_1}^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = - \int_{B,-\gamma_1}^A \bar{F} \cdot d\bar{l}$$

$$\int_{A,\gamma_1}^B \bar{F} \cdot d\bar{l} \neq \int_{A,\gamma_2}^B \bar{F} \cdot d\bar{l}$$



Quando **la traiettoria è chiusa**, cioè il punto iniziale coincide con il punto finale, l'integrale prende il nome di **circuitazione del campo vettoriale** e non è detto che sia necessariamente nulla:

$$\int_{A,\gamma}^A \bar{F} \cdot d\bar{l} = \oint \bar{F} \cdot d\bar{l}$$



Quando l'integrale **non dipende dalla traiettoria** ma unicamente dal punto iniziale e dal punto finale, il **campo vettoriale** si dice **conservativo**. Se i due punti coincidono in un campo vettoriale conservativo, la **circuitazione è pari a zero**:

$$\int_{A,\gamma_1}^B \bar{F}_{CONS} \cdot d\bar{l} = \int_{A,\gamma_2}^B \bar{F} \cdot d\bar{l} \vee \oint \bar{F}_{CONS} \cdot d\bar{l} = 0$$

Quando un campo vettoriale è conservativo è possibile definire una **funzione dello spazio** che associa al **lavoro** una **differenza di energia**:

$$\int_{A,\gamma_1}^B \bar{F}_{CONS} \cdot d\bar{l} = -\Delta U = -[U(B) - U(A)] = U(A) - U(B)$$

Dove U è definita **energia potenziale**. La legge, in funzione dello spazio, dell'energia potenziale viene **definita a meno di una costante arbitraria** che non interviene nel calcolo della differenza:

$$U(x; y; z) \rightarrow U'(x; y; z) = U(x; y; z) + k$$

Infatti:

$$U(A) - U(B) = U'(A) - U'(B)$$

L'energia potenziale si definisce per differenza rispetto ad un punto scelto come riferimento, cioè si prende un punto A come riferimento in cui si suppone conosciuto il valore dell'energia potenziale, si prende in considerazione un punto B e una traiettoria che unisca i due punti (arbitraria, tanto il campo è conservativo) e calcolare $U(B)$ come:

$$U(B) = U(A) - \int_A^B \bar{F}_{CONS} \cdot d\bar{l}$$

Dove $U(A) = U(x_0; y_0; z_0)$, $A \equiv (x_0; y_0; z_0)$ e $B \equiv (x; y; z)$.

Il lavoro della forza elettrica viene identificato come il **lavoro infinitesimo che compie la forza elettrica sulla carica q per spostarla da un punto A ad un punto B**, ciò significa che esso è **compiuto dal campo elettrico**:

$$dW = q_0 \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Di conseguenza è possibile andare a definire l'**elemento di circuitazione del campo elettrico** come **il lavoro del campo per unità di carica**:

$$\frac{dW}{q_0} = \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

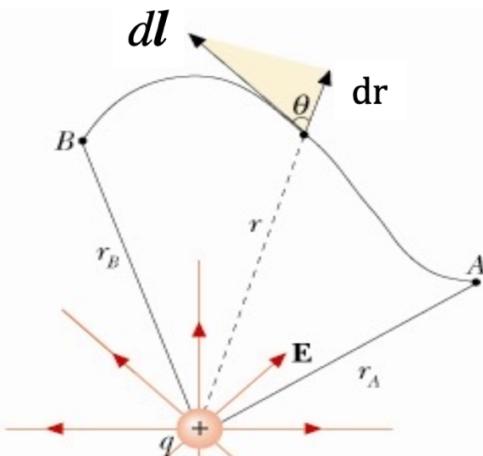
Il **campo elettrico** generalmente **non è un campo vettoriale conservativo**, lo è solo nel caso in cui la **natura** del campo stesso è **elettrostatica** (cioè viene generato da cariche non in movimento). Per dimostrare che il campo elettrostatico è un campo conservativo si può partire dalla legge di Coulomb ed estenderla grazie al principio di sovrapposizione.

Sapendo che la **forza di Coulomb è una forza centrale** (forza radiale il cui modulo dipende dalla distanza da un centro):

$$\bar{F}_q = f(r) \cdot \hat{r} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \right) \hat{u}_r$$

Di conseguenza **anche il campo elettrico**, generato da una carica puntiforme, è **un campo centrale**:

$$\bar{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) \hat{u}_r = f(r) \hat{u}_r$$



$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = f(r) \cdot \hat{r} \cdot d\bar{l} = f(r) \cdot dl \cos \theta = f(r) \cdot dr$$

Infatti, $\hat{r} \cdot d\bar{l} = dl \cos \vartheta = dr$. Con questo risultato è dimostrato che **il lavoro non dipende dalla traiettoria $d\bar{l}$** :

$$\int_{A,\gamma}^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \cdot dr$$

Il lavoro del campo elettrico così scritto può anche essere detto **potenziale elettrostatico $V(\bar{r})$** :

$$\int_{A,\gamma}^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \cdot dr = -\Delta V = V(r_A) - V(r_B) = -\Delta V$$

Oppure:

$$\Delta V = V(r_B) - V(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Questo significa che il **lavoro** può essere espresso **in funzione del potenziale elettrostatico**:

$$q_0 \int_{A,\gamma}^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = -q_0 \cdot \Delta V$$

Il segno negativo deriva dal fatto che **il campo elettrico si oppone al movimento**. L'**unità di misura del potenziale elettrico**, il **volt**, viene definita in funzione della relazione:

$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{dW}{q_0}$$

$$[V] = \frac{[J]}{[C]}$$

Poiché il **raggio d'azione della forza di Coulomb è infinito**, si può scrivere il potenziale elettrico (definito per differenza rispetto ad un punto scelto come riferimento) come:

$$V(r) = V(\infty) + \int_r^\infty \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R} \right]_r^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Quindi:

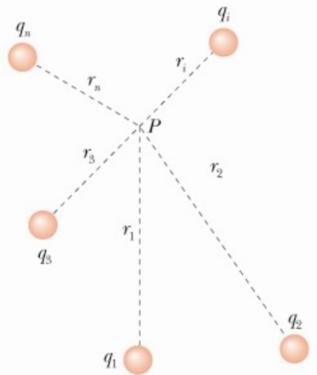
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Cioè si prende **il punto di riferimento del potenziale elettrico all'infinito**, dove il campo elettrico è pari a zero, ma questa convenzione è **possibile quando le cariche sono confinate**. Dunque, per una **distribuzione finita di sorgenti** (cioè le sorgenti sono racchiudibili in un volume finito) è conveniente porre la **costante arbitraria del potenziale** tale che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$$

Ovviamente, il **principio di sovrapposizione** garantisce che anche il **campo elettrico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche ferme sia conservativo**; in tal caso:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$



Mentre per il lavoro della forza elettrica:

$$\begin{aligned} V(A) - V(B) &= \int_{A,\gamma}^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{r_A}^{r_B} \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot dr = \sum_{i=1}^n \left(\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{A_i}} - \frac{1}{r_{B_i}} \right) \right] = \sum_{i=1}^n V(A)_i - V(B)_i \end{aligned}$$

Ciò significa che la **differenza di potenziale generata dalla distribuzione** di cariche è pari alla **somma delle differenze di potenziale generate da ciascuna sorgente** in maniera indipendente.

Con il concetto di potenziale elettrico è possibile definire l'**energia potenziale elettrostatica** tra due cariche, q e q_0 , come l'**energia posseduta dalla carica di prova nel campo prodotto da q** ; si calcola come il lavoro da produrre per portare all'infinito la carica di prova:

$$U(r) = U(r) - U(\infty) = \int_r^\infty q_0 \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R} \right]_r^\infty = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = q_0 V(r)$$

Si può notare che in un **campo elettrostatico repulsivo** (cariche concordi) l'energia potenziale elettrostatica è maggiore di zero, il che significa che **si deve “spendere” energia** affinché le due cariche siano in tale posizione; se il **campo elettrostatico è attrattivo** (cariche discordi) l'energia potenziale elettrostatica è minore di zero e **si deve effettuare un “lavoro negativo”** per tenere le due cariche in tale posizione.

L'**energia potenziale elettrostatica di un sistema di n cariche** può essere calcolata sfruttando il principio di sovrapposizione. Si supponga di avere tre cariche (verrà generalizzato per n cariche):

1. **La prima** carica ha energia potenziale elettrostatica nulla perché non c'è alcun'altra carica che genera campo elettrico;

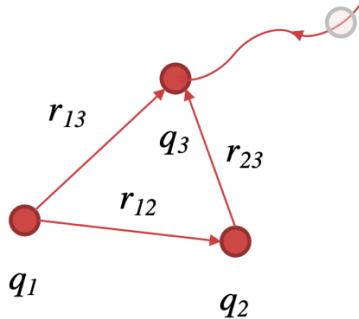
$$U_{TOT} = 0$$

2. Con **la seconda** carica si aggiunge un contributo dovuto al lavoro che le due cariche effettuano le une sulle altre;

$$U_{TOT} = 0 + q_2 V_1(r_{12})$$

3. Con **la terza** carica il potenziale viene generato sia dalla carica 1 che dalla 2.

$$U_{TOT} = 0 + q_2 V_1(r_{12}) + q_3 (V_1(r_{13}) + V_2(r_{23}))$$



In generale, tra due cariche:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

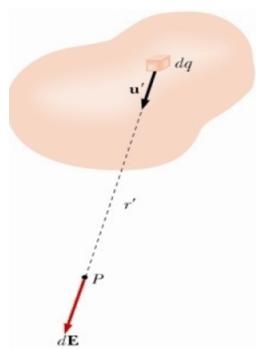
Mentre la componente totale, con n cariche:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{2} U_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Poiché $U_{ij} = U_{ji}$ si dimezza l'energia totale, in quanto essa riguarda la singola coppia ij e va contata una sola volta.

DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

I fenomeni elettrici su corpi macroscopici affrontati in precedenza, come l'attrazione delle bacchette di plastica una volta strofinite, sono dovuti ad un forte squilibrio numerico tra protoni ed elettroni, quindi ad un grande numero di elettroni in eccesso o in difetto. Di conseguenza è possibile considerare la carica come una distribuzione continua di elementi infinitesimi di carica dq :



Per trattare questo tipo di configurazione, nel quale sono presenti infiniti contributi infinitesimi, bisogna sfruttare la nozione di **integrale**. L'integrale deve essere configurato **in funzione del tipo di distribuzione**, che può essere di tre tipologie:

- **Distribuzione lineare**, nella quale la carica è distribuita lungo un filo sottile e dove $dq \rightarrow dl$;
- **Distribuzione superficiale**, nella quale la carica è distribuita su una lastra sottile e dove $dq \rightarrow dS$;
- **Distribuzione volumica**, nella quale la carica è distribuita in un volume e dove $dq \rightarrow dV$.

In queste condizioni è possibile trattare **il campo elettrico in un generico punto P come la somma dei contributi di tutti gli infinitesimi elementi dq** , considerati come **cariche puntiformi**. Si ricorre quindi al **principio di sovrapposizione esteso ad una quantità infinita di elementi infinitesimi**; pertanto, la sommatoria diventa un'integrale, il che giustifica la precedente affermazione. Calcolando il campo elettrico generato dalla carica infinitesima, si può ottenere il campo elettrico totale integrando tale quantità:

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{u}$$

Dove \hat{u} è il versore della congiungente che va da dq ad r .

Una quantità da tenere in considerazione quando si vanno a studiare delle distribuzioni continue di carica è la **densità di carica**, cioè **quanta carica è distribuita nello lo spazio a disposizione**. In base al tipo di distribuzione la densità assume forme diverse:

- **Distribuzione lineare**, si ha la **densità lineare**

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

- **Distribuzione superficiale**, si ha la **densità superficiale**

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

- **Distribuzione volumica**, si ha la **densità di volume**

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

Prendendo in considerazione una **distribuzione lineare** (il ragionamento è analogo per gli altri tipi) si può calcolare la **carica totale in funzione della densità lineare**:

$$dq = \lambda dl$$

$$Q = \int_0^L dq = \int_0^L \lambda dl = \lambda L$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{u}$$

Ma tale operazione è possibile solo nel caso in cui la **densità sia costante**, se essa dipende dalla lunghezza questa associazione non è corretta. Analogamente per una **distribuzione superficiale**:

$$dq = \sigma dS$$

$$Q = \int_0^Q dq = \iint_0^\Sigma \sigma dS$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_0^\Sigma \frac{\sigma dS}{r^2} \hat{u}$$

E per una **distribuzione volumica**:

$$dq = \rho dV$$

$$Q = \int_0^Q dq = \iiint_0^V \rho dV$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_0^V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{u}$$

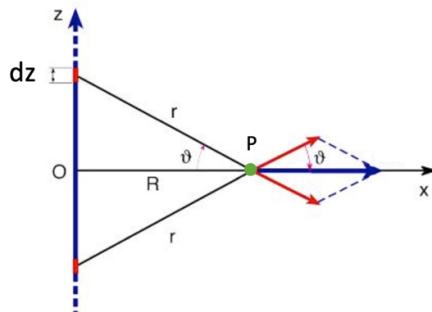
Se il **campo elettrico** viene **calcolato in funzione di un origine** che è lontana sia dalla carica di prova che dal filo, il versore congiungente la carica infinitesima e la carica di prova si calcola:

$$\hat{u} = \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

Dove \bar{r} è la **congiungente dell'origine alla carica di prova e \bar{r}' alla carica infinitesima.**

DISTRIBUZIONE LINEARE

Un caso particolare di distribuzione lineare è quella di un **filo infinito uniformemente carico**; si vuole calcolare il campo elettrico prodotto da questo filo infinito su una carica di prova posta ad un **punto P ortogonale al filo** (dal momento in cui il filo è infinito esisterà sempre una perpendicolare al filo passante per un punto esterno).

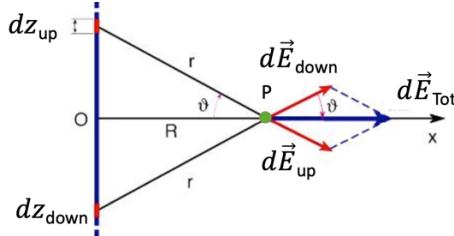


Poiché il filo è uniformemente carico, la **densità di carica lineare è costante**, quindi:

$$dq = \lambda dl$$

Tracciando il campo elettrico generato dalle due componenti dz evidenziate si nota che, qualunque essi siano, la componente parallela al filo del campo elettrico è sempre 0, e quindi:

$$d\bar{E}_{TOT} = \{dE_x, dE_z\} = \{dE_x, 0\}$$



Sempre perché la densità lineare è costante, le componenti lungo i rispettivi assi dei contributi up e down sono uguali, tuttavia lungo x non si annullano perché hanno lo stesso verso ma lungo z si annullano a causa del verso opposto.

$$dE_x^{up} = dE_x^{down} = dE \cos \vartheta$$

$$dE_z^{up} = dE_z^{down} = dE \sin \vartheta$$

Quindi:

$$d\bar{E}_z^{TOT} = d\bar{E}_z^{up} + d\bar{E}_z^{down} = 0$$

$$d\bar{E}_x^{TOT} = d\bar{E}_x^{up} + d\bar{E}_x^{down} = 2d\bar{E}_x^{up} = 2d\bar{E} \cos \vartheta$$

Dove dE è il contributo delle cariche dz_{up}/dz_{down} che è uguale perché la distribuzione è uniforme.
Riassumendo:

$$d\bar{E}_{TOT} = dE_x^{TOT} \cdot \hat{i}_x = 2dE \cos \vartheta \cdot \hat{i}_x$$

Come mostrato in precedenza, è possibile calcolare la carica in funzione della distanza in cui essa è distribuita; in questo caso:

$$z = R \tan \vartheta \Rightarrow dz = \frac{R}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$$

Ma poiché $dq = \lambda dz$ e $r = \frac{R}{\cos \vartheta}$:

$$dq = \lambda \frac{R}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$$

E quindi il campo elettrico generato da una carica infinitesima del filo è:

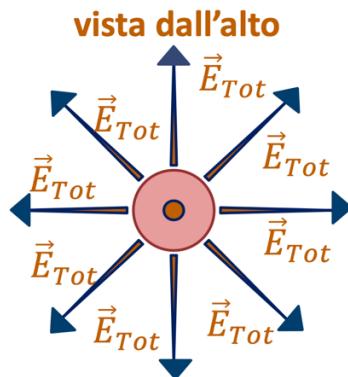
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \frac{R}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\vartheta}{R}$$

Con la formula generale del campo elettrico è possibile calcolare il campo elettrico che subisce la carica di prova nel punto P:

$$d\bar{E}_{TOT} = dE_x^{TOT} \cdot \hat{i}_x = 2dE \cos \vartheta \cdot \hat{i}_x = 2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda d\vartheta}{R} \cos \vartheta \cdot \hat{i}_x$$

$$\bar{E}_{TOT} = 2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \frac{\lambda}{R} \cdot \hat{i}_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta = \left(\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \right) \cdot \hat{i}_x$$

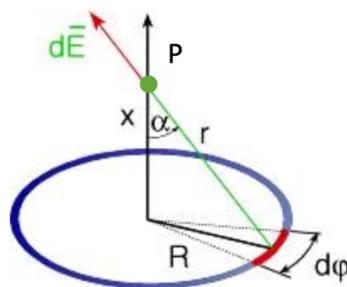
Il campo elettrico in questa configurazione è caratterizzato da **simmetria cilindrica**, cioè presa una circonferenza di raggio R il campo elettrico sarà uguale lungo tutti i punti di tale circonferenza; inoltre, si nota sempre l'**inversa proporzionalità dalla distanza R** , che è peculiare del campo elettrico.



Un altro esempio di distribuzione lineare uniforme coinvolge un **anello sottile carico uniformemente**, dove la densità di carica è:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

Si consideri un punto che poggia sull'asse passante per il centro dell'anello e si calcoli il campo elettrico in tale punto.



Ricordando che:

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi = \frac{Q}{2\pi} d\varphi$$

Con un ragionamento analogo a quello del caso precedente, è possibile affermare che **del campo elettrico si manifesta solo la componente verticale**, quindi quella lungo l'asse x:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \alpha \, d\varphi$$

Sapendo che $\cos \alpha = \frac{x}{r}$. Integrando per ottenere il campo elettrico totale:

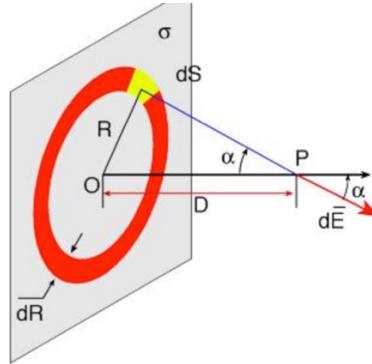
$$E_x = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tale formula ha lo **stesso comportamento del campo generato da due cariche uguali equidistanti dall'asse** (calcolato col principio di sovrapposizione):

$$\bar{E}(0, 0, z) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE

Si calcoli il campo generato da una **distribuzione piana uniforme e infinita**, considerando una carica di prova posizionata in un punto P appartenente all'asse di un anello di raggio R poggiato sulla lastra carica. Tale anello avrà densità lineare di $\lambda = \sigma dR$.



$$E_x = \frac{\lambda R \cos \alpha}{2\epsilon_0 r^2}$$

Considerando il contributo infinitesimo, grazie alla **relazione tra densità superficiale e lineare**:

$$dE_x = \frac{\sigma R \cos \alpha}{2\epsilon_0 r^2} dR$$

Tale contributo è **infinitesimo** perché **il raggio dell'anello e l'anello stesso sono infinitesimi**. Sia considerata la distanza tra l'infinitesima superficie dell'anello e il punto P come:

$$r = \frac{D}{\cos \alpha}$$

Mentre il raggio della circonferenza:

$$R = D \tan \alpha \Rightarrow dR = \frac{D}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Sostituendo nella formula del campo elettrico si ottiene:

$$dE_x = \frac{\sigma \sin \alpha}{2\epsilon_0} d\alpha$$

Integrando per ottenere il **campo elettrico totale**:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \sin \alpha}{2\epsilon_0} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

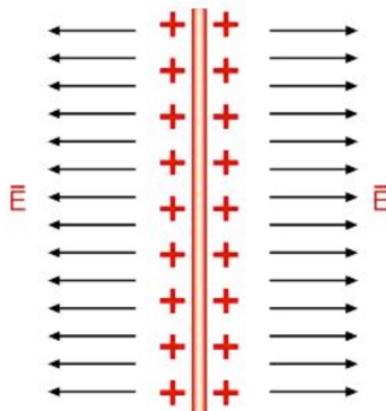
Queste considerazioni valgono nel caso in cui si prende $D > 0$, se accade che $D < 0$ si considera $D = -|D|$ e il campo elettrico va a puntare nel verso opposto:

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

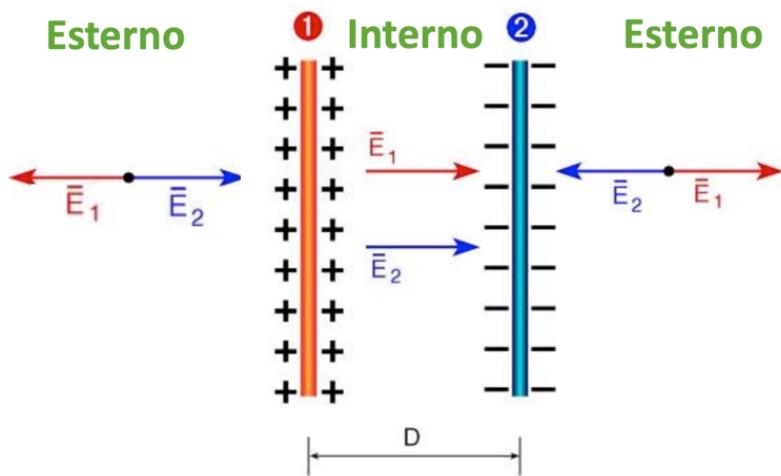
Per il verso si può effettuare un ragionamento analogo a come è stato sviluppato il problema fino ad ora e dire che il campo elettrico è sempre ortogonale alla superficie:

$$\bar{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Dove \hat{n} è il versore normale al piano.



Siano considerate **due lastre infinite uniformemente caricate** che sono poste l'una di fronte l'altra, come segue:



In tale caso **le componenti esterne si eliminano a vicenda**:

$$\bar{E}_{ex} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} = 0$$

Mentre **all'interno saranno sempre rivolte dalla lastra positiva a quella negativa**:

$$\bar{E}_{in} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Tale configurazione prende il nome di **condensatore**.

Si calcoli il campo elettrico di un **disco sottile carico uniformemente**. Considerando q come la carica complessiva del disco:

$$q = \sigma \pi R^2$$

Mentre la carica infinitesima:

$$dq = \sigma d\Sigma = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Tale formulazione può essere giustificata derivando le quantità totali:

$$dq = d(\sigma \pi r^2) = \sigma \pi d(r^2) = \sigma \pi 2r dr = 2\sigma \pi r dr$$

Come dimostrato in precedenza, il **campo elettrico infinitesimo** si configura come:

$$d\bar{E}(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u} = \frac{2\sigma \pi r dr}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}$$

Integrando per ottenere il **campo elettrico totale**:

$$\bar{E} = \frac{2\sigma x}{4\epsilon_0} \hat{u} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{u}$$

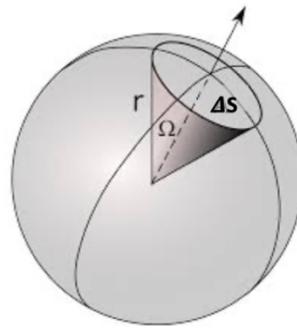
Dove il segno \pm sta ad indicare che il **campo elettrico avrà un segno** piuttosto che un altro **in base a quale semiasse x si considera** per posizionare il punto P.

Questa particolare configurazione gode di due **proprietà**:

- $x \gg R$, il **disco** può essere visto come una **carica puntiforme**;
- Per $x \rightarrow 0$ il **limite destro e sinistro** sono diversi.

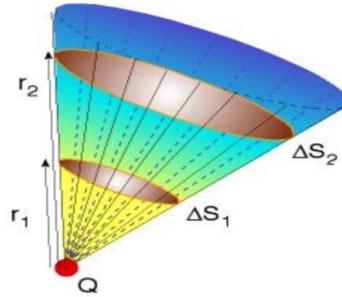
FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS

Per definizione, si parla di **angolo solido** per definire l'**angolo sotteso ad una superficie ΔS** e si misura col **rapporto fra l'area della superficie di una calotta sferica di raggio r e il quadrato del raggio stesso**; inoltre, la sua unità di misura non è il radiante ma lo **steradiante**.



$$\Omega = \frac{\Delta S}{r^2}$$

Si può notare che le linee di flusso che **attraversano una superficie ΔS_1 , attraversano anche la superficie ΔS_2** (che sottende lo stesso angolo solido) come in figura:



Calcolando la **densità delle N linee di flusso** si può notare che essa è **direttamente proporzionale al campo elettrico**:

$$n = \frac{N}{\Delta S} = \frac{N}{\Delta \Omega \cdot r^2} \propto \frac{1}{r^2} \propto E$$

Dal momento in cui l'angolo solido è sotteso da entrambe le superfici:

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2}$$

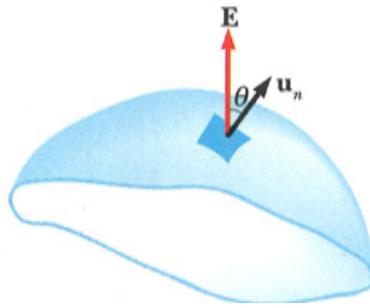
Quindi:

$$n_1 = \frac{N}{\Delta S_1} = \frac{N}{\Delta \Omega \cdot r_1^2} \propto \frac{1}{r_1^2} \propto E_1$$

$$n_2 = \frac{N}{\Delta S_2} = \frac{N}{\Delta \Omega \cdot r_2^2} \propto \frac{1}{r_2^2} \propto E_2$$

Sia considerata una **superficie dS sulla quale è definito un campo elettrico \bar{E} e la si orienti lungo il vettore normale** (uscente dalla superficie). Si definisce il **flusso infinitesimo $d\Phi$** del campo elettrico \bar{E} attraverso la superficie infinitesima dS :

$$d\Phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

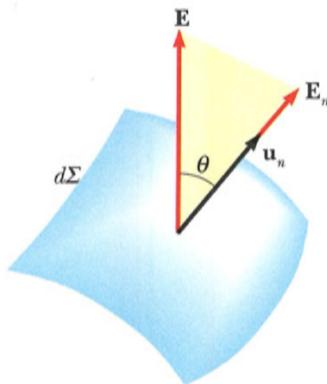


Per semplicità spesso si può trovare la forma sintetica della formula che considera la superficie come un vettore; tale assunzione è errata in quanto la superficie è una grandezza scalare, nonostante si intenda il vettore superficie come il prodotto scalare con il versore normale:

$$\hat{u}_n dS \Rightarrow d\bar{S}$$

Il flusso è una grandezza scalare, pertanto è possibile calcolarne il valore sfruttando l'angolo di inclinazione del vettore campo elettrico con il vettore normale della superficie:

$$d\Phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = E_n \cdot dS = E \cdot dS \cdot \cos \vartheta$$



Questa quantità infinitesima può essere integrata per ottenere il **flusso del campo elettrico attraverso una superficie**:

$$\Phi(\bar{E}) = \iint_0^S \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS$$

Solo nel caso in cui la **superficie è chiusa** è possibile semplificare la formula in:

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS$$

Il flusso può presentarsi, dal punto di vista numerico, in tre forme:

- $\Phi(\bar{E}) > 0 \Leftrightarrow \bar{E} \cdot \hat{u}_n > 0$, in tal caso il flusso è uscente dalla superficie;
- $\Phi(\bar{E}) < 0 \Leftrightarrow \bar{E} \cdot \hat{u}_n < 0$, in tal caso il flusso è entrante nella superficie;
- $\Phi(\bar{E}) = 0 \Leftrightarrow$ il flusso uscente equipara quello entrante.

In questa sede si sta trattando il flusso in stretta correlazione al campo elettrostatico; tuttavia, esso è un **concetto matematico** che può essere **applicato a qualsiasi campo vettoriale**, non accompagnandosi necessariamente al passaggio attraverso una superficie S di materia o di energia.

DIMOSTRAZIONE LEGGE DI GAUSS

Ipotesi:

Sia considerata una superficie, chiusa e orientata, sede di un campo elettrico

Tesi:

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i^{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i^{INT}}{\epsilon_0}$$

Ovvero, il flusso uscente del campo elettrostatico è pari al rapporto tra la somma algebrica di tutte le cariche presenti all'interno della superficie e la costante dielettrica del vuoto.

Dimostrazione:

La dimostrazione si completa considerando i due casi:

- Singola carica puntiforme;

Calcolando campo elettrico e flusso:

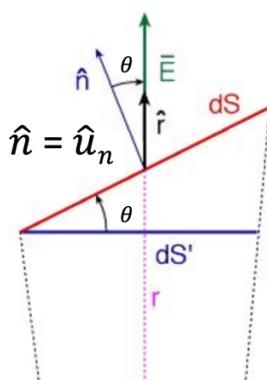
$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS$$

Il relativo contributo infinitesimo:

$$d\Phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cdot \cos\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS'$$

Dove dS' è la proiezione della superficie lungo la calotta sferica di raggio r



Ricordando che:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$$

Integrando per ottenere il flusso totale:

$$\Phi(\bar{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^S \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi$$

Sapendo che l'angolo solido totale di una carica interna è sempre 4π . Quindi:

$$\Phi(\bar{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- N cariche puntiformi;

Nel caso in cui non ci sia una sola carica ma, bensì, diverse cariche puntiformi si applica il principio di sovrapposizione e si sfrutta la linearità dell'integrale:

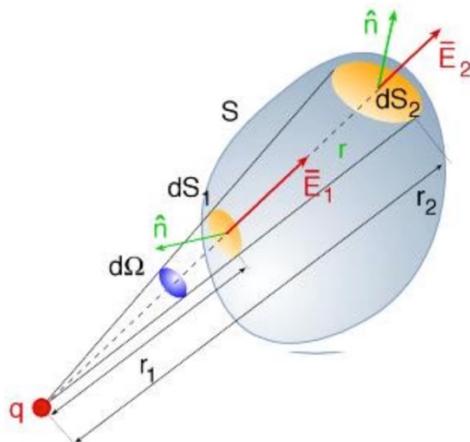
$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \bar{E}_{TOT} \cdot \hat{u}_n dS = \Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \sum_{i=1}^N \bar{E}_i \cdot \hat{u}_n dS = \sum_{i=1}^N \oint_0^S \bar{E}_i \cdot \hat{u}_n dS$$

Ma per la singola carica i-esima è stato già dimostrata la valenza della formula di Gauss, quindi:

$$\Phi(\bar{E}) = \sum_{i=1}^N \oint_0^S \bar{E}_i \cdot \hat{u}_n dS = \sum_{i=1}^N \frac{q_i^{INT}}{\epsilon_0}$$

CVD

Sia considerato il caso in cui **la carica sia puntiforme ma esterna alla superficie**; in tale situazione il flusso totale del campo elettrico è nullo, infatti:



$$d\Phi_1(\bar{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} dS' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2(\bar{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Infatti, **l'angolo solido rimane costante ma il segno si inverte** perché il vettore normale una volta è diretto verso la carica e una volta lontano da essa, quindi:

$$d\Phi(\bar{E}) = d\Phi_1(\bar{E}) + d\Phi_2(\bar{E}) = 0$$

Sia considerata una superficie S chiusa ed orientata, sede di un campo elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche, il flusso del campo può essere alternativamente calcolato tenendo in considerazione che:

$$dq = \rho dV$$

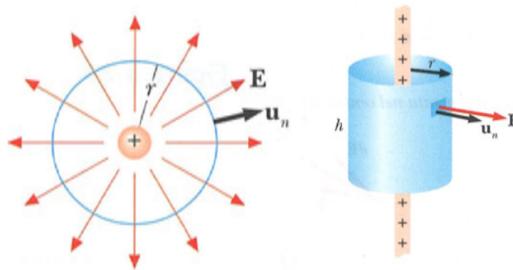
$$Q^{int} = \int_0^Q dq = \iiint_0^V \rho dV$$

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^S \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{Q^{int}}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_0^V \rho dV}{\epsilon_0}$$

Di seguito sono considerate alcune **applicazioni della legge di Gauss**, tentando di determinare una superficie chiusa su cui applicare la formula e di estrarre informazioni sul vettore campo elettrico.

APPLICAZIONE 1

Sia preso un **filo indefinito** e si scelga come **superficie chiusa** un **cilindro coassiale al filo**; per simmetria, il campo è uniforme alla superficie e dipende solo dalla distanza dal filo:



Il flusso totale si va a comporre di tre componenti: due lungo le basi del cilindro e una lungo il lato, ma poiché le prime sono il prodotto scalare di due vettori ortogonali, esse si annullano.

$$\Phi(\bar{E}) = \iint_0^{B_1} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS + \iint_0^{B_2} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS + \iint_0^{LAT} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \iint_0^{LAT} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS$$

Cioè:

$$\Phi(\bar{E}) = \iint_0^{LAT} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = E(r) \cdot 2\pi rh$$

Applicando la legge di Gauss, sapendo che la carica interna è pari alla carica su una porzione di filo lungo h:

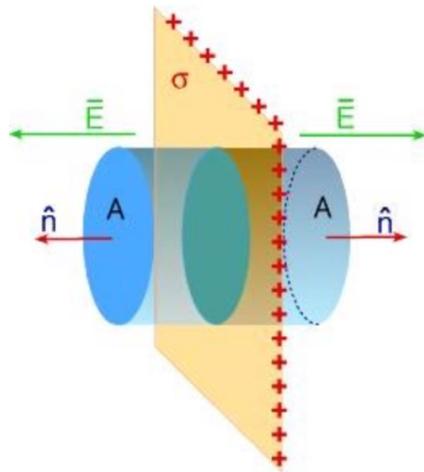
$$\Phi(\bar{E}) = E(r) \cdot 2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Ricavando il campo elettrico:

$$\bar{E} = E(r) \cdot \hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \hat{r}$$

APPLICAZIONE 2

Sia presa una **distribuzione piana uniformemente carica positivamente** e ne si calcoli il campo elettrico; se si sceglie come **superficie un cilindro con asse ortogonale alla distribuzione** si ottiene un **campo elettrico perpendicolare alle basi del cilindro stesso**. Inoltre, per simmetria, il campo è **uniforme su tutta la superficie** e potrebbe “eventualmente” dipendere solo dalla distanza dal piano.



Analogamente al caso precedente:

$$\Phi(\bar{E}) = \int_0^{B_1} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS + \iint_0^{B_2} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS + \iint_0^{LAT} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS$$

Ma questa volta ad annullarsi è la componente laterale, in quanto il vettore normale alla superficie è ortogonale a quello del campo:

$$\Phi(\bar{E}) = \iint_0^{B_1} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS + \iint_0^{B_2} \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = E(r)A + E(r)A = 2E(r)A$$

Dove A è la superficie delle basi del cilindro. Per la legge di Gauss, sapendo che la carica può essere espressa in funzione della densità superficiale:

$$\Phi(\bar{E}) = 2E(r)A = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

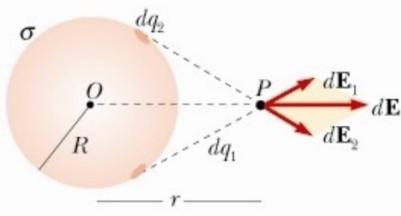
Quindi il campo elettrico risulta:

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Da questo risultato si evince che **il campo elettrico dipende unicamente da costanti**, non più dalla distanza dalla distribuzione, di conseguenza è **uniforme**.

APPLICAZIONE 3

Si calcoli il campo elettrostatico di una **distribuzione superficiale sferica di cariche positive**, il quale può essere visto come una **forza centrale** grazie alla simmetria della sfera:



$$\bar{E} = E(r) \cdot \hat{r}$$

Dunque, la **direzione è la congiungente** del punto di cui si sta calcolando il campo elettrico con il centro della sfera, mentre il segno dipende dalla carica che si sta considerando.

Si possono considerare tre casi, il primo in cui il punto è ad una distanza $r > R$, dove R è il raggio della sfera, il secondo in cui $r = R$ e il terzo caso in cui $r < R$:

- $r > R$

Calcolando il flusso del campo elettrico con la legge di Gauss

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^{\Sigma} E(r) \hat{r} \cdot \hat{n} dS = \oint_0^{\Sigma} E(r) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

Ed estraendo il campo elettrico si ottiene:

$$E(r) = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Ma si può notare che il campo elettrico di una distribuzione sferica superficiale di cariche è uguale al campo elettrico di una carica puntiforme di egual valore posta nel centro della sfera, infatti:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Andando a calcolare il potenziale in funzione della distanza r :

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \bar{E}(r) \cdot d\bar{r} = \frac{q}{4\pi r \epsilon_0} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

Oppure, in forma alternativa:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi r \epsilon_0}$$

Risultato grazie al quale è possibile fare un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza per il campo elettrico relativo alla carica puntiforme di egual valore.

- $r = R$

$$V(R) = \frac{q}{4\pi R \epsilon_0} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$E(R) = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Che è un valore costante in quanto dipende da una quantità che non cambia.

- $r < R$

Anche in questo caso il campo elettrico è radiale, dal momento in cui la simmetria della sfera individuata nel primo caso può essere analogamente applicata in questo:

$$\bar{E} = E(r) \cdot \hat{r}$$

Tuttavia, applicando il teorema di Gauss si può notare che la carica interna totale è nulla:

$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^\Sigma E(r) \hat{r} \cdot \hat{u}_n dS = \oint_0^\Sigma E(r) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$q_{int} = 0$$

Quindi:

$$E(r) = \frac{q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 0$$

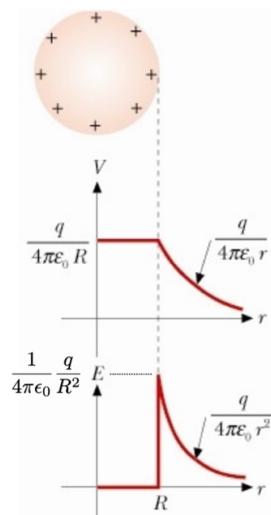
Tuttavia, ciò non equivale a dire che il potenziale è nullo, infatti:

$$V(r) - V(R) = \int_r^R \bar{E}(r) \cdot d\bar{r} = 0 \Rightarrow V(r) = V(R)$$

Ma tale valore del potenziale è già stato calcolato:

$$V(r) = V(R) = \frac{q}{4\pi R \epsilon_0} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

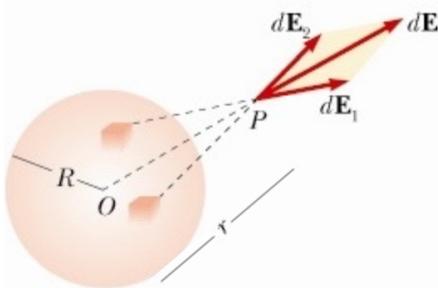
Che è un valore costante. Con queste informazioni è possibile generalizzare un grafico in funzione della distanza per determinare campo elettrico e potenziale:



APPLICAZIONE 4

Si prenda in considerazione una **sfera uniformemente carica** e ne si calcoli il **campo elettrostatico** che, per simmetria, sarà **radiale**:

$$\bar{E} = E(r) \cdot \hat{r}$$



- Considerando una **carica esterna**

Il caso è analogo a quello mostrato in precedenza relativo alla carica posta sulla superficie della sfera, infatti:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Dal momento in cui la carica è:

$$q = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Il campo elettrico totale è:

$$E(r) = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

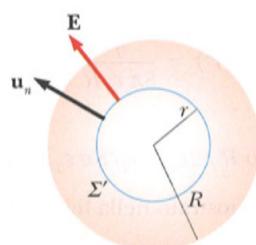
Per quanto riguarda il potenziale:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \bar{E}(r) \cdot d\bar{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r}$$

Calcolando il potenziale sulla superficie della sfera:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 R} = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}$$

- Considerando una **carica interna** alla sfera



$$\Phi(\bar{E}) = \oint_0^\Sigma E(r) \hat{r} \cdot \hat{u}_n dS = \oint_0^\Sigma E(r) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Ma sapendo che la carica interna è:

$$q = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Il campo elettrico può essere calcolato:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Per quanto riguarda il potenziale:

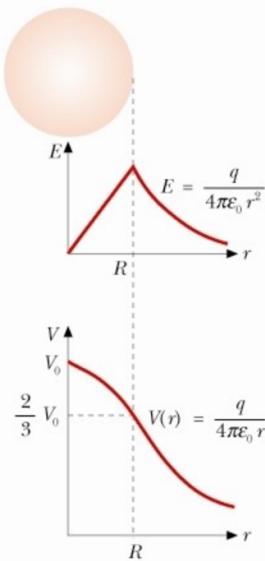
$$V(R) - V(r) = - \int_r^R \bar{E}(r) \cdot d\bar{r} = - \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot dr = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

Quindi:

$$V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) + V(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Da ciò si può dedurre che il potenziale elettrostatico in questa configurazione è uguale a quello di una carica puntiforme di egual valore posta al centro della superficie sferica.

È possibile generalizzare e determinare un grafico in funzione della distanza dal centro che determini il campo elettrostatico e il potenziale di questa configurazione:



POTENZIALE ELETTROSTATICO

Nell'analisi matematica la **conservatività di un campo vettoriale** (in questa sede si studia quello elettrostatico) è determinata usando il concetto di **forma differenziale**, grazie alla quale un vettore

viene scomposto nelle sue componenti cartesiane (è un'estensione del concetto di funzione a più variabili):

$$\bar{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

$$d\bar{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

Di conseguenza, il **prodotto scalare** tra questi due vettori in forma differenziale è:

$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = E_x(x, y, z)dx + E_y(x, y, z)dy + E_z(x, y, z)dz$$

La forma differenziale ottenuta da questo prodotto scalare è un **differenziale esatto**, cioè esiste una **funzione scalare** (nel caso del campo elettrostatico è $V(x, y, z)$) che, differenziata, riproduce la **forma differenziale** in esame:

$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = -dV$$

Ciò è possibile grazie al **teorema del differenziale totale**, il quale afferma che **una funzione $V: R^n \rightarrow R$ derivabile in un intorno U di un punto P_0 e dotata di derivate parziali continue nel punto è differenziabile in quel punto**:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Dove $\frac{\partial V}{\partial x}$ è la **derivata parziale**. Si possono uguagliare le due equazioni appena ricavate:

$$E_x(x, y, z)dx + E_y(x, y, z)dy + E_z(x, y, z)dz = \bar{E} \cdot d\bar{l} = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Ma tale uguaglianza è **vera solo se essa vale componente per componente**, dunque:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Fornendo quindi un **collegamento tra la forma differenziale e la derivata di una funzione a più variabili** (garantito anche dal teorema del differenziale totale).

Si introduce il concetto di **gradiente** e di **operatore vettoriale nabla**. Tale operatore viene definito come segue:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Con questo operatore è possibile andare a **definire alternativamente il campo elettrostatico in un punto come il gradiente del potenziale elettrostatico calcolato nel medesimo punto ma cambiato di segno** (possibile in quanto il campo elettrostatico è conservativo):

$$\bar{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V$$

Avendo a disposizione queste informazioni è possibile esprimere in due forme diverse il concetto di potenziale elettrostatico:

FORMA LOCALE

$$\bar{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V$$

$$dV = -\bar{E} \cdot d\bar{l} = \vec{\nabla} V \cdot d\bar{l}$$

FORMA INTEGRALE

$$V_A - V_B = \int_A^B dV = - \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\bar{l}$$

La forma integrale è resa possibile grazie al **teorema del gradiente**, o **teorema fondamentale del calcolo per integrali di linea**, il quale afferma che l'**integrale di linea di un campo vettoriale conservativo (quindi gradiente di un campo scalare)** è calcolabile valutando il campo scalare considerato (noto a meno di una costante) agli estremi della curva su cui si è svolta l'integrazione. Si tratta di un **caso particolare del teorema (generale) di Stokes**.

Fino ad ora l'operatore nabla è stato usato per il calcolo della funzione gradiente, ma può essere usato in altre occasioni:

Gradiente	$\text{grad}: f \rightarrow \vec{\nabla}f$	$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right)$
Divergenza	$\text{div}: \bar{v} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \bar{v}$	$\text{div } \bar{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$
Rotore	$\text{rot}: \bar{v} \rightarrow \vec{\nabla} \times \bar{v}$	

Per quanto riguarda il calcolo del rotore di un vettore \mathbf{F} si fa riferimento al determinante di questa matrice:

$$\vec{\nabla} \times \bar{F} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Usando la proprietà del vettore gradiente grazie alla quale è possibile restituire la derivata direzionale lungo una direzione quando il vettore vi è proiettato, è possibile ottenere le **componenti cartesiane del gradiente**:

$$\vec{\nabla} f \cdot \hat{x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \hat{y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \hat{z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Inoltre, il **teorema del gradiente** afferma che, se la funzione è differenziabile, allora il differenziale della funzione può essere scritto:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\bar{l}$$

Dove $\vec{\nabla} f$ è il campo conservativo che forma il differenziale esatto. Da tale formula si deduce l'integrale calcolato su una qualunque curva AB:

$$f(A) - f(B) = \int_A^B df = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\bar{l}$$

Come prima anticipato, il **teorema del gradiente** è un caso particolare del **teorema di Stokes**, il quale afferma che la circuitazione di un campo vettoriale lungo la linea chiusa e orientata C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualsiasi superficie, che abbia C come contorno, orientata concordemente a C con la regola della vite destrogiro:

$$\oint_0^C \vec{E} \cdot d\bar{l} = \int_0^\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Ma poiché il campo elettrostatico è conservativo:

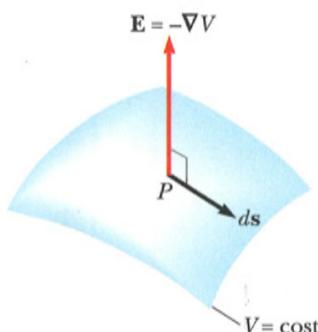
$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

E quindi la circuitazione è nulla:

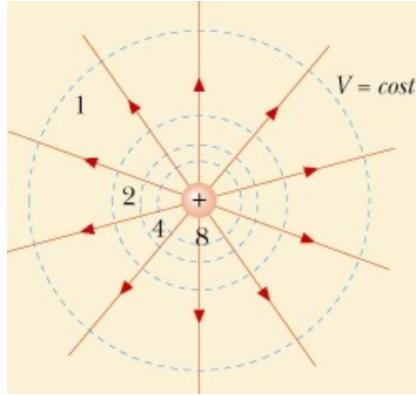
$$\oint_0^C \vec{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Ricapitolando:

- Il campo elettrostatico è un **campo vettoriale conservativo**, ciò gli permette di essere espresso come **gradiente di una funzione scalare** cambiata di segno che si chiama potenziale elettrico;
- Il campo elettrostatico è **ortogonale alle superfici equipotenziali**;
- Il campo **punta dove il potenziale decresce**.



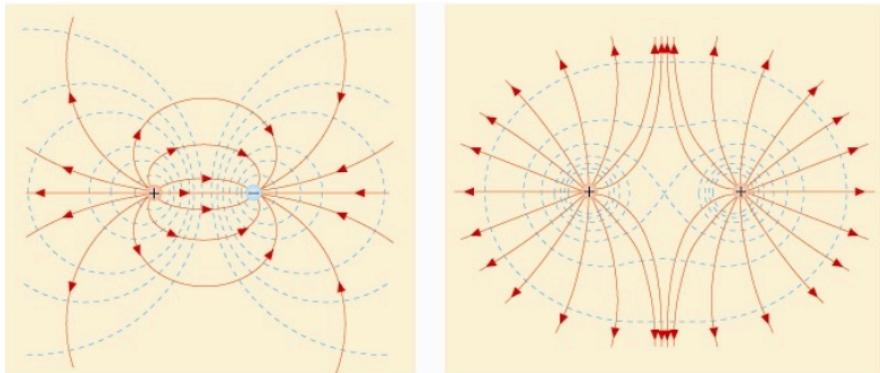
Per **superficie equipotenziale** si intendono i punti dello spazio dove il potenziale elettrostatico è costante; ad esempio, nella configurazione di campo generato da una carica puntiforme le superfici equipotenziali sono circonferenze con centro nella carica:



Dove il potenziale è:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Mentre nella configurazione di campo generato da due cariche sono ellissi con uno dei due fuochi su una delle due cariche:



Dove il potenziale è:

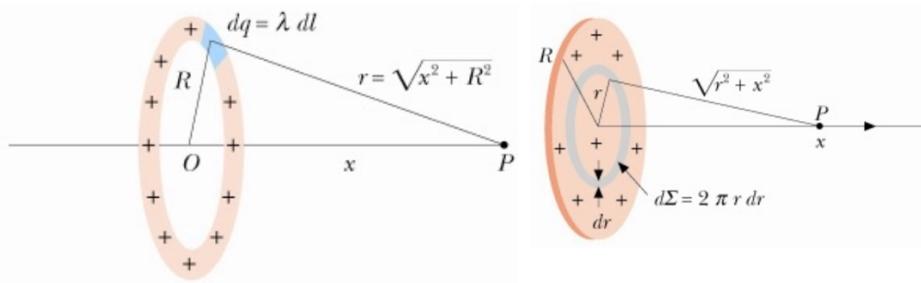
$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} + C$$

Per **cariche distribuite in maniera continua su una curva/superficie/volume** il potenziale è:

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\gamma \frac{\lambda(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} dl + C$$

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\Sigma \frac{\sigma(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} dS + C$$

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\tau \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} d\tau + C$$



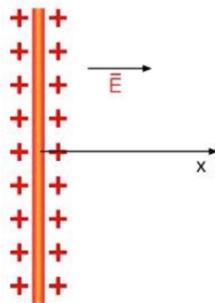
La **relazione tra campo elettrostatico e potenziale elettrostatico** può essere **ambivalente**, cioè è possibile calcolare uno partendo dall'altro in entrambi i versi. Tuttavia, **dal punto di vista computazionale**, è comodo **partire dal potenziale e giungere al campo** perché il potenziale, essendo una funzione scalare, è più facile da determinare con il principio di sovrapposizione, con il quale si vanno a sommare tutti scalari, non vettori; il prezzo da pagare per tale comodità è l'**attenzione da riservare ad eventuali punti in cui il potenziale non è differenziabile** e non lo si può calcolare con il gradiente (ad esempio, dentro e fuori la sfera con cariche solo sulla superficie o dentro e fuori una sfera/cilindro uniformemente carica/o).

Su un **piano infinito** il campo è:

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$$

Dunque, il potenziale è:

$$V(x) - V(0) = - \int_0^x \bar{E} d\bar{l} = - \int_0^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx'$$



$$V(x) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

Supponendo $x > 0$; nel caso in cui $x = 0$ il potenziale è nullo, quindi esso diverge all'infinito e le cariche non sono confinate.

Su un **filo infinito** si procede analogamente:

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \hat{x}$$

$$V(x) - V(x_0) = - \int_{x_0}^x \bar{E} d\bar{l} = - \int_{x_0}^x \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x'} dx'$$

$$V(x) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x}{x_0}$$

Supponendo $x > 0$; nel caso in cui $x = x_0$ il potenziale è nullo, quindi esso diverge all'infinito e le cariche non sono confinate.

Per quanto riguarda un **anello uniformemente carico**:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^A dV = \int_0^A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Sapendo che:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}; dq = \lambda dl; r = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

Da ciò si ricavi il campo elettrico (diretto lungo l'asse x):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda un **disco uniformemente carico**:

$$V(x) = \int_0^R dV(x) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(x^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Sapendo che:

$$d\Sigma = 2\pi r dr; dq = \sigma d\Sigma = \sigma 2\pi r dr$$

Da ciò si ricava il campo elettrico:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(x^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{u} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

Per spostare una carica da un punto A ad un punto B è necessaria una **forza** che va **quantizzata in funzione della forza di Coulomb**:

$$\bar{F} = q\bar{E} = m\bar{a}$$

Dove l'**accelerazione della carica** coinvolta può essere espressa come:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\bar{E}$$

Di conseguenza la **velocità della particella** in un determinato istante di tempo si può calcolare:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{a} dt = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{q}{m} \bar{E} dt$$

Mentre lo **spostamento**:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{v} dt$$

Si può notare come l'**accelerazione è costante se il campo elettrostatico è uniforme**, risultando quindi un **moto uniformemente accelerato**. Se il campo elettrico non è uniforme si genera un moto vario.

In un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

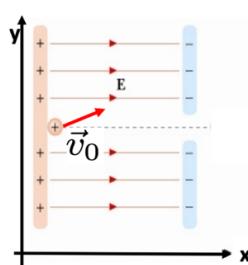
$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Nel caso in cui le condizioni iniziali sono nulle ($x_0 = 0$ e $v_0 = 0$):

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

$$v(t) = \frac{qE}{m} t$$

$$v^2(x) = 2 \frac{qE}{m} x$$



Sia supposto il campo elettrostatico uniforme, la velocità iniziale assume la forma:

$$\bar{v}_0 = \{v_0 \cos \vartheta; v_0 \sin \vartheta\}$$

Nel momento in cui $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Il moto della carica è parabolico, infatti:

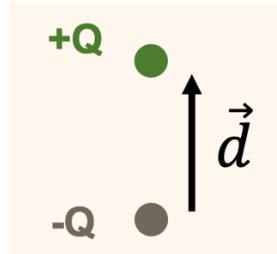
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \vartheta + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \\ y(t) = v_0 \sin \vartheta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \vartheta + \frac{qE}{m} t \\ v_y(t) = v_0 \sin \vartheta \end{cases}$$

Dove la componente accelerata è quella x.

IL DIPOLO ELETTRICO

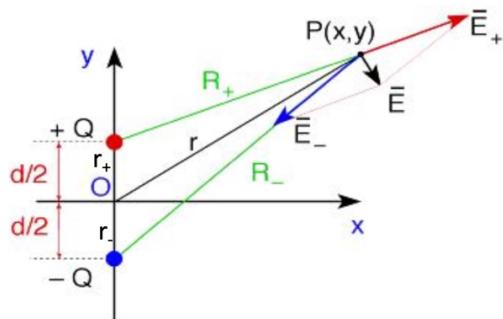
Un **dipolo elettrico** è un **sistema** costituito da **una distribuzione di carica positiva e una di carica negativa a distanza relativa costante**:



Si definisce il **momento di dipolo elettrico** il vettore che ha la stessa direzione della congiungente tra le due distribuzioni, verso che va dalla distribuzione negativa alla positiva e avente modulo pari al prodotto del valore assoluto della carica per la distanza tra le distribuzioni:

$$\bar{p} = Q \bar{d}$$

Sia preso un **sistema di riferimento centrato nel punto medio della distanza tra le distribuzioni** del dielettrico e sia individuato un **generico punto $P(x, y)$** nel piano in modo da **calcolare il campo elettrico in quel punto** con il principio di sovrapposizione:



Si possono determinare le seguenti **distanze**:

$$\bar{r}_- = \left(0, -\frac{d}{2}, 0\right)$$

$$\bar{r}_+ = \left(0, \frac{d}{2}, 0\right)$$

$$\bar{r} = (x, y, 0)$$

$$\bar{R}_+ = \bar{r} - \bar{r}_+ = \left(x, y - \frac{d}{2}, 0\right)$$

$$\bar{R}_- = \bar{r} - \bar{r}_- = \left(x, y + \frac{d}{2}, 0\right)$$

Mentre per il **campo elettrico** si può dire:

$$\bar{E}(x, y, 0) = \bar{E}_+ + \bar{E}_- = E_x(x, y, 0)\hat{i} + E_y(x, y, 0)\hat{j}$$

Si può notare come **in nessun calcolo risulti presente la componente z**, che verrà omessa di qui in avanti. Applicando il principio di sovrapposizione:

$$E_x(x, y) = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

$$E_y(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y - \frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y + \frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

Si può notare che **se il punto giace sull'asse y** (quindi componente x nulla), **il campo elettrico è diretto lungo tale asse**; infatti:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_x(0, y) = 0 \\ E_y(y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \right] \end{cases}$$

Quando si considerano punti lontani dal dipolo, **il campo decresce con r^3** :

$$E_y(y) \propto \frac{1}{y^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2y}\right)^2} \right] = \frac{1}{y^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{d}{y} + \frac{d^2}{4y^2}} - \frac{1}{1 + \frac{d}{y} + \frac{d^2}{4y^2}} \right]$$

$$\approx \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{d}{y}} - \frac{1}{1 + \frac{d}{y}} \right) = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\frac{2d}{y}}{1 - \left(\frac{d}{y}\right)^2} \right) \approx \frac{2d}{y^3}$$

Quindi:

$$d \ll y \Rightarrow E_y(y) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{y^3}$$

Con un discorso analogo si può mostrare come, se il punto giace sull'asse x (quindi con ordinata y nulla), il campo elettrico è sempre diretto lungo l'asse y:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_x(x) = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] = 0 \\ E_y(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] \end{cases}$$

Dunque, lontano dal dipolo il campo decresce sempre con r^3 :

$$\begin{aligned} E_y(x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\frac{d}{2}}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{x^3} \frac{1}{\left[1 + \frac{d^2}{4x^2}\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

Quindi:

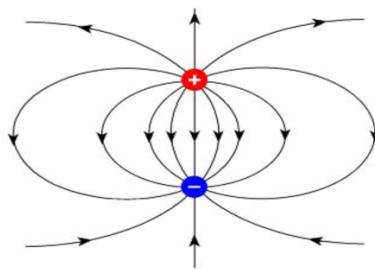
$$d \ll x \Rightarrow E_y(x) \approx -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{x^3}$$

Quando il punto è generico, non giace necessariamente su un asse particolare, si può notare che il campo ha entrambe le componenti e, quando il punto è a grandi distanze, il campo elettrico del dipolo si scrive:

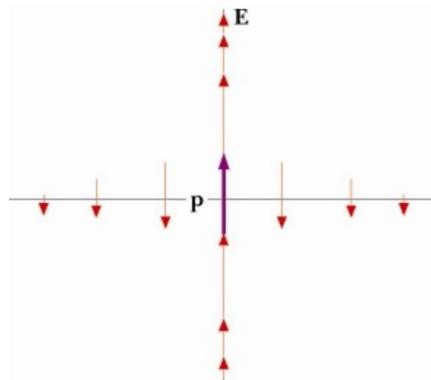
$$\bar{E}(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{p}{r^3} [3(\hat{r} - \hat{p})\hat{r} - \hat{p}]$$

Dove p è il momento di dipolo elettrico precedentemente mostrato; si può anche notare la permanenza della decrescita con r^3 .

Le linee di campo del dipolo sono le stesse di una distribuzione di due cariche di segno opposto:



Mentre il vettore campo elettrico al variare della posizione sugli assi è:



Il momento di dipolo si può generalizzare anche ad una qualsiasi distribuzione neutra di cariche:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^N q_i \bar{r}_i$$

Oppure nel caso di distribuzioni continue:

$$\bar{p} = \int_0^{V'} \rho(\bar{r}') \bar{r}' dV'$$

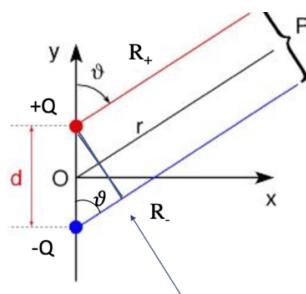
Considerando sempre un punto $P(x, y)$ a grande distanza dal dipolo si calcola il potenziale del dipolo elettrico per tale punto:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_- - R_+}{R_+ R_-} \right)$$

Ma dal momento in cui si sta supponendo $d \ll r$, è possibile scrivere alternativamente le distanze:

$$R_+ R_- \approx r^2$$

$$R_- - R_+ \approx d \cos \vartheta$$



Di conseguenza **il potenziale può essere approssimato** come segue:

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \vartheta}{r^2} \right)$$

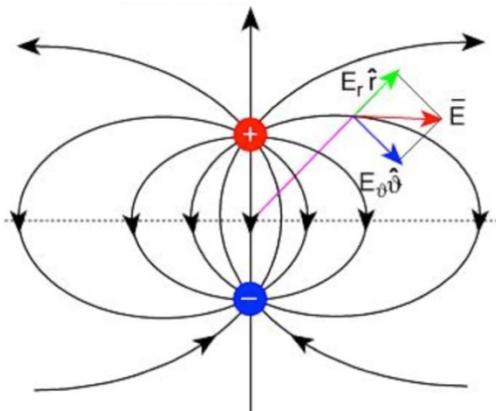
Ma si può associare la carica Q con la distanza d e sfruttare il prodotto scalare per giustificare il coseno al fine di ottenere la seguente forma:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^3} \right)$$

Con cui ritorna l'**inversa proporzionalità con r^3** che è stata notata in precedenza. Usando il **gradiente in coordinate polari sferiche** è possibile ottenere il campo elettrico e le linee di campo a partire dal potenziale:

$$E_r(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}$$



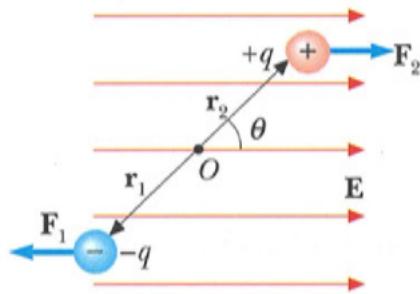
Tenendo anche conto che **sull'asse z non ci sono alcuni contributi** (infatti la componente colatitudinale è zero, $E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$). Calcolando il modulo del **campo elettrico totale**:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

Da cui si può notare sempre la **decrescenza con il cubo della distanza radiale**, la novità è la **decrescenza anche con l'angolo polare**.

AZIONE MECCANICA SUL DIPOLO 1

Sia preso un **dipolo elettrico posizionato in una zona con un campo elettrico uniforme**:

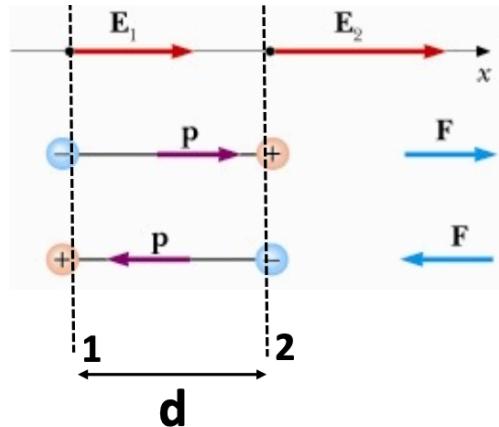


Il campo elettrico impone **due forze uguali ed opposte sulle due cariche**, una controcorrente al campo e una nello stesso verso; poiché tali forze sono di ugual modulo ma verso opposto, si può pensare che il dipolo sia fermo, in realtà esso **subisce un momento delle forze complessivo non nullo** e, dunque, è **in rotazione concorde al campo**:

$$\bar{M} = \bar{\delta} \times \bar{F} = \bar{\delta} \times q\bar{E} = q\bar{\delta} \times \bar{E} = \bar{p} \times \bar{E}$$

AZIONE MECCANICA SUL DIPOLO 2

Sia preso un **dipolo elettrico in una zona in cui è presente un campo elettrico non uniforme**, ad esempio un **campo parallelo all'asse x ma con modulo crescente all'aumentare di x**:



Dove $E_2 > E_1$. Approssimando il valore di queste due quantità:

$$E_2 = E_1 + \frac{\partial E}{\partial x} d$$

Le cariche del dipolo, avendo posizioni diverse, **risentono di due campi diversi. La forza F generata dal campo** è:

$$\bar{F} = q(E_2 - E_1)\hat{i} = qd \frac{\partial E}{\partial x} \hat{i} = p \frac{\partial E}{\partial x} \hat{i}$$

In questa configurazione, **oltre al momento** che tende ad allineare il dipolo, **è applicata la forza elettrica**, che è diversa da zero perché il campo elettrico non è uniforme. In base al dipolo tale forza può essere:

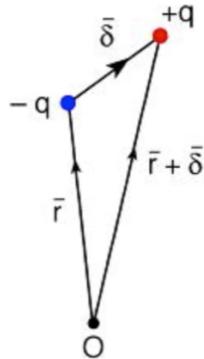
- **$F > 0$, il dipolo è concorde al campo** e si sposta verso punti in cui il campo è più intenso;
- **$F < 0$, il dipolo è discorda al campo** e si sposta verso punti in cui il campo è meno intenso.

AZIONE MECCANICA SUL DIPOLO 3

Valutando con maggior dettaglio le **azioni meccaniche su un dipolo elettrico in una zona in cui è presente un campo elettrico qualunque**, si può considerare l'**energia potenziale del sistema** definendola nel seguente modo:

$$U_- = -qV(\bar{r})$$

$$U_+ = qV(\bar{r} + \bar{\delta}) = qV(\bar{r}) + qdV$$



Il contributo totale è:

$$U = U_- + U_+ = -qV(\bar{r}) + qV(\bar{r}) + qdV = qdV$$

Proiettando il gradiente lungo il dipolo:

$$qdV = q(\vec{\nabla}V) \cdot \bar{\delta} = -\vec{E} \cdot q\bar{\delta} = -\bar{p} \cdot \vec{E}$$

Riassumendo:

$$U = -\bar{p} \cdot \vec{E}$$

Il lavoro infinitesimo compiuto da un sistema di forze può sempre essere scritto come il lavoro compiuto dalla risultante delle forze più il lavoro compiuto dal momento risultante ma sarà sempre **opposto alla variazione di energia potenziale** (perché il campo elettrostatico è conservativo):

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{l} + \bar{M} \cdot d\bar{\vartheta}$$

Dove $d\bar{\vartheta} = d\vartheta \hat{k}$. Inoltre:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta$$

Sapendo che $dU = -dL$, è possibile **uguagliare le due espressioni membro a membro** e ottenere:

$$\frac{\partial U}{\partial l} dl = -\bar{F} \cdot d\bar{l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = -\bar{M} \cdot d\bar{\vartheta}$$

In alternativa è possibile scrivere:

$$\bar{F} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial U}{\partial l} dl = -\vec{\nabla}U \cdot d\bar{l} = \vec{\nabla}(\bar{p} \cdot \bar{E}) \cdot d\bar{l}$$

Di conseguenza è possibile esprimere **la forza come gradiente del prodotto scalare tra momento di dipolo e campo elettrico** (che è nullo se il campo è uniforme):

$$\bar{F} = \vec{\nabla}(\bar{p} \cdot \bar{E})$$

Per quanto riguarda il **momento** è possibile dire:

$$\bar{M} \cdot d\bar{\vartheta} = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = -\frac{\partial(-pE \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta = -pE \sin \vartheta d\vartheta = (-\bar{E} \times \bar{p}) \cdot d\bar{\vartheta}$$

Da cui è possibile ricavare l'espressione:

$$\bar{M} = -\bar{E} \times \bar{p} = \bar{p} \times \bar{E}$$

Sapendo che **l'angolo è misurato dal campo verso il dipolo**, da cui discende il segno.

CONDUTTORI ED ISOLANTI

Un **conduttore** è un **materiale attraverso il quale la carica può fluire facilmente**, di contro un **isolante** è un **materiale attraverso il quale la carica non può fluire liberamente**. In un materiale **conduttore** si trova un **reticolo di ioni positivi fissi** e degli **elettroni liberi** che sono in grado di muoversi in presenza una differenza di potenziale, infatti gli elettroni sono i cosiddetti **"portatori di carica"** perché sono loro a portare la corrente lungo i conduttori, mentre **negli isolanti gli elettroni non sono liberi di muoversi**.

In genere i **metalli** sono **buoni conduttori** e i **non metalli buoni isolanti**; anche i **liquidi** possono portare carica, ma in quel caso **non sono gli elettroni a muoversi** ma gli **ioni positivi e negativi**. Esiste un terzo tipo di materiale, i materiali **semiconduttori**, caratterizzati da una struttura che **permette agli elettroni di muoversi solo in determinate condizioni**.

In presenza di un **campo elettrostatico** i portatori di carica di un materiale conduttore sono **liberi di migrare in accordo alle linee di campo**, generando un **nuovo campo elettrico** che **bilancia il precedente** (differenza di potenziale). Tale migrazione **si arresta** nel momento in cui **il campo elettrico totale**, e quindi la differenza di potenziale, è **nullo** e si è raggiunto l'**equilibrio elettrostatico**.

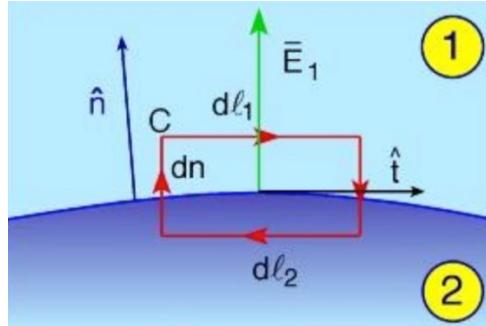
Quando si raggiunge l'equilibrio elettrostatico in un conduttore, **le cariche si possono distribuire unicamente lungo la superficie esterna** del corpo; infatti, è possibile affermare, grazie al **teorema di Gauss**, che **non ci possono essere eccessi di carica all'interno** del conduttore. In queste condizioni la carica si distribuisce con una densità superficiale $\sigma(x, y, z)$, che determina il modulo del campo elettrico (il cui vettore è ortogonale alla superficie nel punto in cui è calcolato):

$$E = \frac{\sigma(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Dove $\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$. Poiché si è raggiunto l'equilibrio elettrostatico e poiché il potenziale elettrico è considerato la variazione di campo elettrico, **sia il campo elettrico che il potenziale elettrostatico saranno nulli:**

$$E = 0 \wedge V = 0$$

Si valuta cosa accade al campo elettrico lungo la superficie di separazione fra due diversi materiali considerando una curva chiusa C, in particolare un rettangolo con due lati ortogonali $d\ell_1$ e due lati tangenti alla superficie in esame, e ne si fa la circuitazione.



Sfruttando la conservatività del campo elettrostatico:

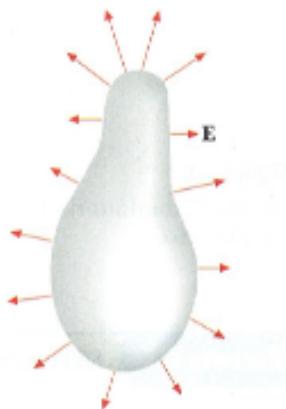
$$\oint_0^C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int (E_{1t} - E_{2t}) dl = 0$$

Ciò significa che **si conserva la componente tangenziale del campo elettrico**, ovvero è continua:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

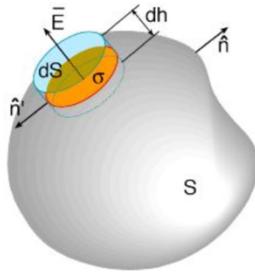
Applicando questo risultato al caso dei conduttori si può affermare che, **essendo nullo il campo elettrico interno, è nulla anche la componente tangenziale del campo fuori dal conduttore**; quindi, **il campo elettrico all'esterno di un conduttore è ortogonale al conduttore stesso**:

$$\bar{E} = E\hat{n}$$



Ciò implica che anche **la superficie del conduttore** (ed il suo interno) è **equipotenziale**.

Sia considerato, in un intorno di un punto, un **cilindro di base dS ed altezza dh** (infinitesimo di ordine superiore) e si applichi il **teorema di Gauss**:



$$\begin{aligned}\Phi(\bar{E}) &= \iint_0^{cil} \bar{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_0^{s \text{ lat.}} \bar{E} \cdot \hat{n} dS + \iint_0^{\text{base in.}} \bar{E} \cdot \hat{n} dS + \iint_0^{\text{base ex.}} \bar{E} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_0^{\text{base ex.}} \bar{E} \cdot \hat{n} dS = E_n S = \frac{Q^{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Quindi:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Con questi ragionamenti è stato mostrato che:

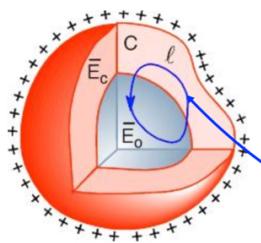
1. **In prossimità della superficie** di separazione fra due mezzi diversi, **il campo elettrostatico ha componente tangenziale che si conserva e componente ortogonale che varia;**
 - a. Il concetto di **prossimità alla superficie** (limite per i punti dello spazio che si avvicinano alla superficie) è **dovuto** al fatto che il lato del rettangolo infinitesimo **dh** è un **infinitesimo di ordine superiore** al lato **dl** ;
2. Nel caso di superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico, poiché **il campo elettrostatico interno deve essere nullo**, sono **nulle le componenti tangenziali e la componente normale interna**;
3. **Il campo elettrostatico all'esterno in prossimità della superficie è esclusivamente normale e proporzionale alla densità superficiale di carica locale** (ovvero il suo valore nel punto in cui si calcola il campo)

$$\bar{E}(x, y, z) = \left. \frac{\sigma(x, y, z)}{\epsilon_0} \right|_{(x, y, z) \in \Sigma} \hat{n}$$

Quest'ultimo risultato è soprannominato **teorema di Coulomb**.

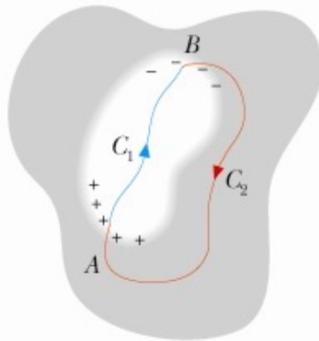
Si consideri il caso di un **conduttore cavo** in cui **nella cavità non sia presente alcuna carica**, in tal caso essa si disporrà unicamente sulla superficie. Grazie alla conservatività del campo elettrostatico si ha:

$$\oint_0^C \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \Rightarrow E_0 = 0$$



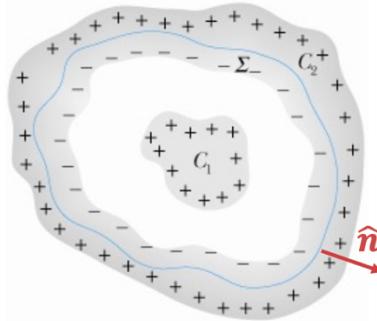
Ragionando per assurdo, se ci fosse un accumulo locale in un punto A ci sarebbe un punto B con un accumulo di cariche opposte (perché il conduttore è neutro). A questo punto si può immaginare un circuito chiuso e farne la circuitazione:

$$\oint_0^{C_1+C_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_0^{C_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} + \oint_0^{C_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_0^{C_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} \neq 0$$



Il pezzo di circuitazione dentro la cavità non può essere compensato e, di conseguenza, deve essere necessariamente nullo.

Se nella cavità del conduttore si introduce una porzione di carica elettrica Q , si produce un fenomeno di **induzione elettrostatica completa**: si forma sulla superficie interna una carica pari a $-Q$, in modo da consentire il bilanciamento, mentre all'esterno si accumula una carica Q pari a quella interna:



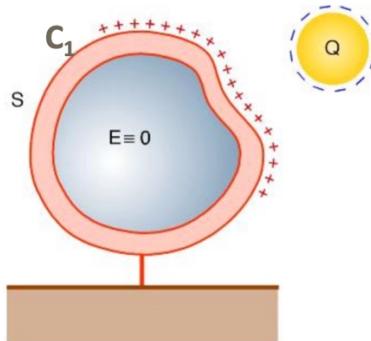
Tale fenomeno si realizza quando le linee di forza uscenti dall'intera superficie del conduttore C_1 terminano tutte sulla superficie del conduttore C_2 . Applicando il **teorema di Gauss** alla superficie Σ si ottiene:

$$\Phi(\bar{E}) = \iint_0^{\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q - Q}{\epsilon_0} = 0$$

Ciò significa che gli effetti della carica all'interno del conduttore cavo si propagano all'esterno, visto che un conduttore non scherma dalle cariche interne.

Collegando, invece, un conduttore cavo a terra (viene posto in contatto con la Terra, anch'essa un conduttore), una carica esterna Q produce unicamente una carica indotta, uguale ed opposta, sulla superficie esterna del conduttore C_1 , mentre nella cavità e all'interno del conduttore la carica è nulla.

Questa configurazione costituisce uno **schermo elettrostatico**, o **gabbia di Faraday**.



Trasferendo una carica elettrica su un conduttore isolato, essa si andrà a **distribuire sulla superficie** in modo che il **conduttore sia equipotenziale** (come mostrato precedentemente). Il valore del potenziale (assunto nullo all'infinito) dipende da come si distribuiscono le cariche il che, a sua volta, dipende dalla forma del conduttore:

$$V = \int_0^{\infty} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Ma per il principio di sovrapposizione per il potenziale, esso è **proporzionale alla carica elettrica**:

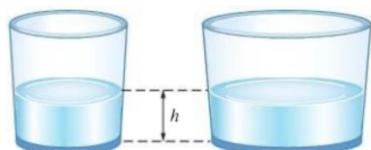
$$\frac{Q}{V} = \text{cost}$$

Si parla di **capacità elettrica del conduttore** quando si fa riferimento alla **costante** che deriva dal **rappporto di carica e potenziale**:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{[C]}{[V]} = [F]$$

La capacità **dipende solo dalla forma e dalle dimensioni del conduttore** e si calcola in **Farad**. Il Farad è un'**unità di misura molto grande**, infatti per conduttori della grandezza di 1m la capacità è dell'ordine dei nanofarad, $10^{-10} F = 100 pF = 0.1 nF$.

Per capire il ruolo della capacità si può pensare che, a parità di differenza di potenziale, un conduttore con **una capacità maggiore può accumulare più carica** di un conduttore con una capacità inferiore. Il discorso è analogo a due recipienti di pari altezza che possono contenere volumi di acqua diversi.



Ad esempio, si calcoli la **capacità di una sfera conduttrice di raggio R**, caricata con una **carica Q positiva** che si dispone sulla superficie in maniera **uniforme**. Calcolando il **campo elettrico** con il **teorema di Gauss**:

$$\bar{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Dove $r \geq R$. Se si calcolasse il campo elettrico **lungo la superficie**:

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il potenziale della sfera è:

$$V(R) = V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

E la capacità della sfera:

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Che si può notare essere **indipendente da alcuna variabile**.

CONDENSATORI

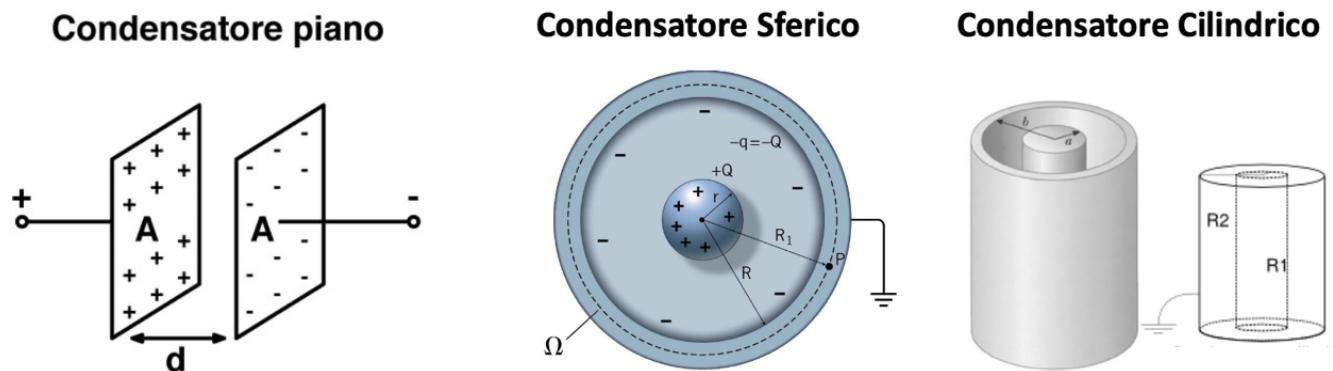
Un sistema costituito da **due conduttori carichi** tra i quali c'è **induzione completa** è detto **condensatore**, mentre i **due conduttori** prendono il nome di **armature del condensatore**. La definizione di **capacità elettrica** può essere **ampliata ai condensatori**, come il **rapporto tra la carica e la differenza di potenziale tra le armature**; anche in questa configurazione la capacità elettrica **dipende unicamente dalla forma e dalle dimensioni del condensatore** ed è una **costante numerica calcolata in Farad**:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = [F]$$

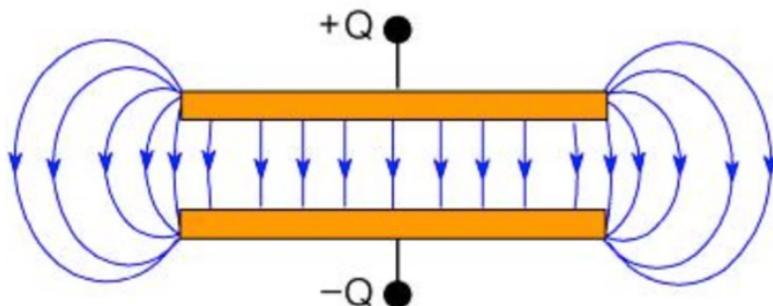
All'equilibrio, le armature di un condensatore avranno **uguali cariche ma di segno opposto**. Il simbolo elettrico che specifica per il condensatore è quello seguente:



Ma può essere rappresentato anche in altri modi:



Prendendo in considerazione un **condensatore piano**, esso è costituito da **due armature piane e infinite con un doppio strato carico**; la configurazione è chiaramente **ideale** ma si può effettuare una **buona approssimazione** quando la **distanza fra le armature è molto più piccola della dimensione lineare della loro superficie**, approssimazione grazie alla quale si possono **trascurare gli effetti di bordo**:



Il **campo elettrico** di questo condensatore è **conservativo**, è **regolare solo nella zona centrale** del condensatore mentre ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno.

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0$$

Dove:

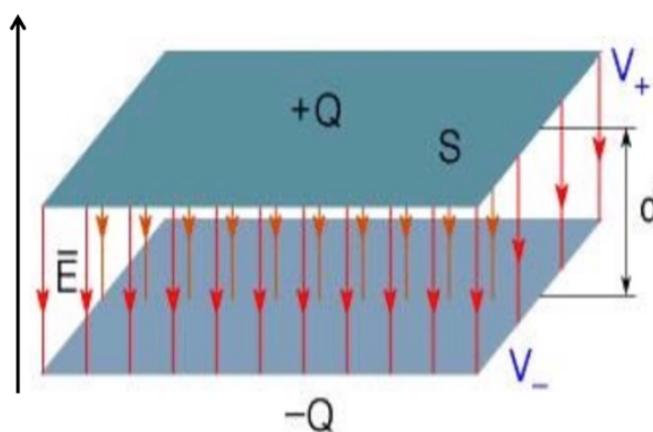
$$\bar{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Per quanto riguarda la **differenza di potenziale**:

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_0^d \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{S\epsilon_0}$$

Di conseguenza la **capacità elettrica** di questo condensatore è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



Per quanto riguarda un **condensatore sferico**, si considerano **due sfere cave, conduttrici e concentriche**, aventi raggi $R_1 < R_2$, dove l'armatura esterna è caricata di $-Q$ e quella interna di $+Q$. Calcolando il **campo elettrico** nella zona fra R_2 e R_1 :

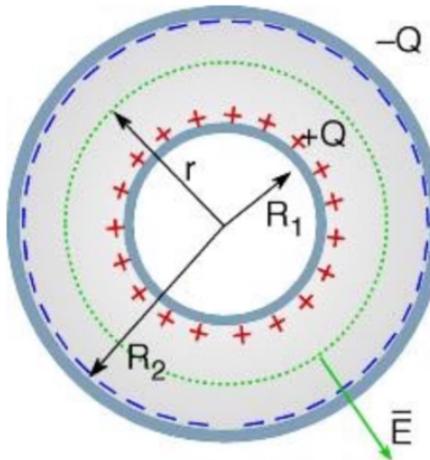
$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Mentre il **potenziale elettrico**:

$$\begin{aligned} \Delta V = V_+ - V_- &= V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \end{aligned}$$

Di conseguenza la **capacità elettrica** è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



Considerando il caso in cui **la differenza tra le armature è piccola rispetto alla dimensione lineare della superficie**, si può notare che il caso diventa **analogo a quello di un condensatore piano infinito**:

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \Rightarrow R_1 = R - \frac{d}{2} \wedge R_2 = R + \frac{d}{2}$$

Quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\left(R - \frac{d}{2}\right)\left(R + \frac{d}{2}\right)}{d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2 - \frac{d^2}{4}}{d} \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Invece, in un **condensatore cilindrico** si trovano **due armature cilindriche di raggi $R_1 < R_2$** con una **densità lineare λ** :

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

Applicando il **teorema di Gauss per il calcolo del campo elettrico**:

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Quindi il **potenziale**:

$$\Delta V = V_+ - V_- = V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Infine la **capacità**:

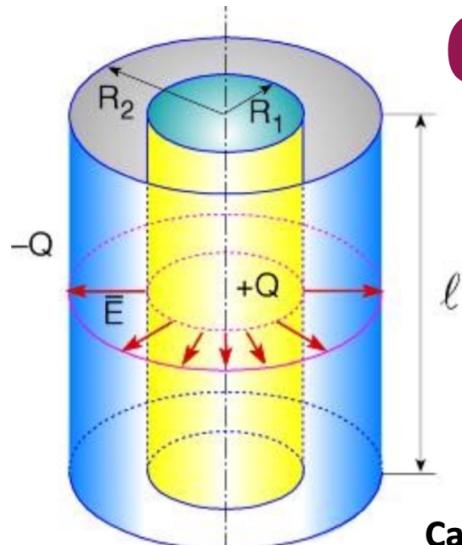
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Analogamente al caso precedente, si studia la **capacità a distanza fra le armature piccola** rispetto alla dimensione lineare delle superfici:

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \Rightarrow \ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + d}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \approx \frac{d}{R_1}$$

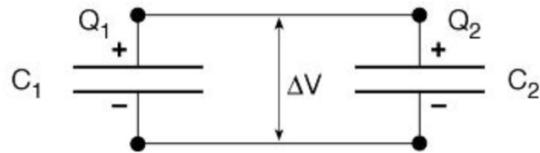
Quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{lR_1}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



I condensatori possono essere combinati in diverse configurazioni per formare dei **sistemi di condensatori**; esistono **due tipologie di sistemi**, i condensatori in **serie** e in **parallelo**.

In due **condensatori in parallelo** i morsetti delle armature a **potenziale più alto** sono collegati tra **di loro** (analogamente per quelli a potenziale più basso):



Calcolando **le cariche in funzione delle capacità**, sapendo che la differenza di potenziale è costante:

$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

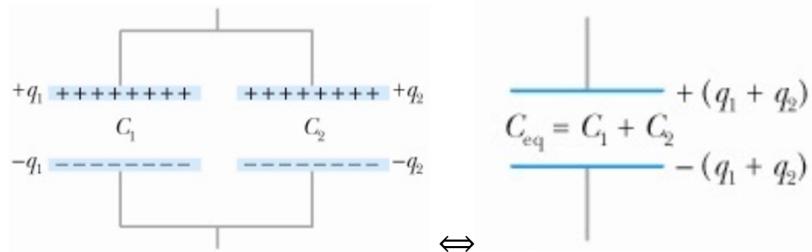
Dove la **carica totale** è:

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = \Delta V(C_1 + C_2)$$

Mentre la **capacità totale**, o equivalente, è:

$$C_{TOT} = \frac{Q_{TOT}}{\Delta V} = \frac{\Delta V(C_1 + C_2)}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

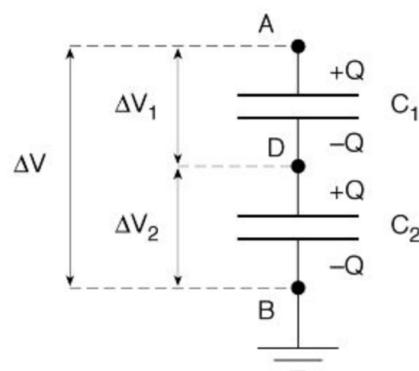
Si può quindi affermare che **nel collegamento in parallelo le capacità si sommano**. Con questa relazione è possibile notare che due condensatori in parallelo, C_1 e C_2 , possono essere considerati come un solo condensatore di capacità $C_{eq} = C_1 + C_2$.



Si può **generalizzare la definizione ad un sistema di n condensatori** di capacità C_i tutti collegati in parallelo:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Due condensatori sono in serie se il morsetto collegato all'**armatura negativa di un condensatore** è collegato anche all'**armatura positiva** dell'altro:



Dove:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Calcolando la **capacità equivalente**:

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Quindi:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

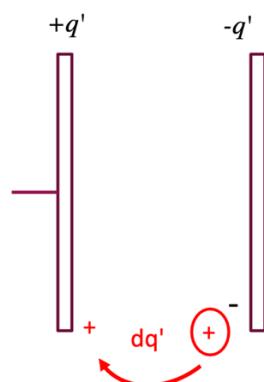
Analogamente al caso precedente è possibile affermare che **due condensatori in serie, C_1 e C_2 , possono essere considerati come un solo condensatore di capacità $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$** .

Generalizzando la definizione per un sistema di n condensatori di capacità C_i tutti collegati in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Nel processo di **carica di un condensatore**, durante il quale **la carica sulle armature va da 0 a $+q/-q$** con una differenza di potenziale $\Delta V = Q/C$, è **necessario compiere un lavoro**, il quale dipenderà **unicamente dagli stati iniziale e finale** perché **il campo elettrico è conservativo**.

Per semplicità di calcolo si suppone che **il processo di carica** (avviato da un agente esterno) avvenga **sottraendo da un'armatura, che diventerà carica negativamente, una porzione di carica dq' e aggiungendola all'altra, che diventerà positiva**; alla fine del processo si avranno le due armature cariche sulle quali si sarà generata una differenza di potenziale. Ovviamente lungo tutto il processo **la carica totale sarà nulla**, visto che nessuna carica si allontana dal condensatore.



Il lavoro effettuato contro la forza elettrostatica, che si oppone all'accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia potenziale elettrostatica**:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

$$W = \int dW = \int V' dq' = \int \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Quindi l'**energia potenziale elettrostatica** è:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$

Una carica q possiede un'energia potenziale elettrostatica U_e se si trova ad un certo potenziale V; inoltre, l'**energia elettrostatica totale** è data dalla **somma delle energie potenziali elettrostatiche delle singole cariche**.

L'espressione dell'energia elettrostatica può essere anche **legata al campo elettrico** prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso, cioè le cariche (formulazione appena mostrata). Considerando potenziale elettrostatico, volume del condensatore e capacità:

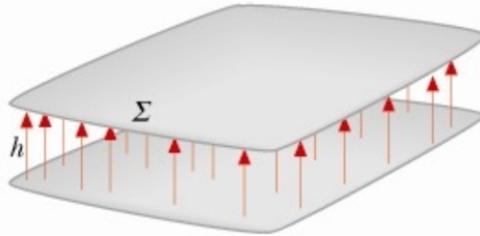
$$V = Eh$$

$$\tau = \Sigma h$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

L'**energia potenziale elettrostatica** è quindi calcolata:

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

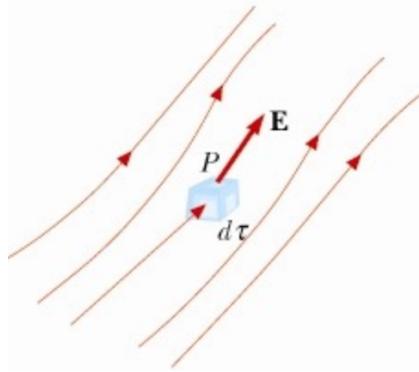


Supponendo che la **distribuzione dell'energia è uniforme**, si può individuare una **densità di energia potenziale elettrostatica**:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

Come si può notare, la densità **dipende unicamente dal campo e dal mezzo** e non dalla particolare configurazione, infatti lo si può applicare a qualsiasi caso.

In una regione in cui è definito un campo elettrostatico, l'**energia è immagazzinata in porzioni di volume $d\tau$ al cui interno il campo vale E**:



$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

$$U_e = \int dU_e = \int u_e d\tau = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Dove U_e corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione che da origine al campo elettrostatico.

L'energia elettrostatica può anche essere calcolata sulle configurazioni prima accennate, ad esempio in un condensatore sferico di raggi $R_1 < R_2$, si possono considerare il campo elettrico e il volume del guscio sferico infinitesimo con raggio compreso tra r e $r + dr$ come:

$$E(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$$

Quindi l'energia elettrostatica è:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ma sapendo che, in questa configurazione:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

Allora:

$$U_e = \frac{q^2}{2C}$$

Si consideri un **condensatore piano**, di **area Σ** e le cui armature distano **h** con **carica q** . Si conoscono le formulazioni della capacità e dell'energia elettrostatica:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

Per uno **spostamento infinitesimo dh** dell'armatura positiva, l'**energia elettrostatica diminuisce di:**

$$dU_e = \frac{q^2 dh}{2\epsilon_0 \Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh < 0$$

E viene **fornito dalla forza un lavoro:**

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{h} = -dU_e = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh > 0$$

Da questa espressione si estrapola la forza:

$$F = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma$$

Dalla quale si può definire la **pressione elettrostatica p :**

$$p = \frac{|F|}{\Sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Come si può notare, **p è una grandezza che dipende unicamente dal campo elettrico e dal mezzo,** ma non dal particolare caso considerato; pertanto, si può applicare in qualsiasi situazione.

Inoltre, si può notare che la pressione elettrostatica **ha la stessa formulazione della densità di energia potenziale elettrostatica:**

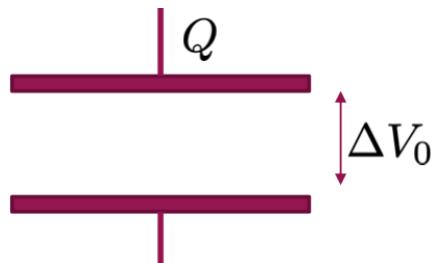
$$p = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{U_e}{\tau} = u_e$$

DIELETTRICI

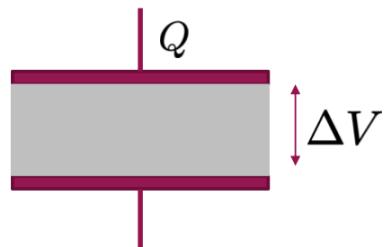
Si definisce **dielettrico** ogni **mezzo non conduttore di elettricità** e, in quanto tale, **elettricamente isolante**. Questa definizione fu introdotta con riferimento al fatto che **in un dielettrico può essere stabilito e mantenuto un campo elettrico senza una sensibile dissipazione di energia**; infatti, i termini “**dielettrico**” e “**isolante elettrico**”, sebbene usati spesso come sinonimi, fanno riferimento a **due comportamenti diversi** di un materiale non conduttore: per il primo ci si riferisce ai **fenomeni che interessano i non conduttori quando sono in presenza di campi elettrici**, per il secondo al **fenomeno di limitazione o annullamento della conduzione elettrica**. Da un punto di vista microscopico, **il dielettrico è costituito da molecole o ioni vincolati ad occupare posizioni ben definite**, intorno alle quali possono solo elongarsi o ruotare; **questo comportamento cessa** se il campo elettrico cui è sottoposto il dielettrico supera una certa soglia, che prende il nome di **rigidità elettrica**: in questo caso **il campo elettrico è così intenso che le molecole vengono “rotte”**, innescando un meccanismo di conduzione.

Tra un condensatore in cui tra le armature c’è il vuoto e un condensatore in cui tra le armature c’è un dielettrico si può (sperimentalmente) notare un **abbassamento di potenziale** che conduce ad una **maggiori capacità del condensatore**:

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}$$



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



Dove:

$$\Delta V < \Delta V_0 \Rightarrow C > C_0$$

Pertanto, si parla di **costante dielettrica relativa** come il rapporto tra queste due quantità, sempre maggiore di uno:

$$k_e = \varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} > 1$$

A volte si fa riferimento alla **costante dielettrica assoluta del mezzo**:

$$\varepsilon = k_e \varepsilon_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

La diminuzione di potenziale non è dovuta ad una diminuzione di cariche sulle armature, dal momento in cui esse sono isolate.

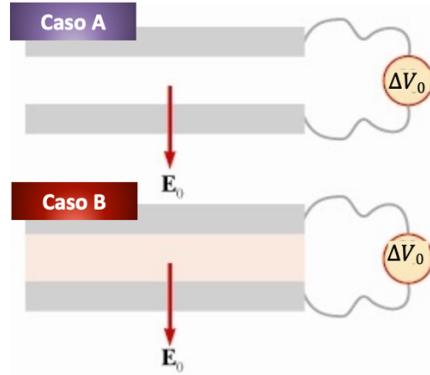
Se il materiale **occupa tutto lo spazio fra le armature**, il **rapporto fra i potenziali** corrisponde al **rapporto fra il campo elettrico presente nel condensatore vuoto e quello presente in caso di dielettrico**; a parità di condizioni, con un dielettrico il **potenziale tra le armature, il campo elettrico e l'energia elettrostatica diminuiscono**:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\Delta V}{\Delta V_0} = \frac{1}{k_e} < 1$$

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\frac{1}{2} Q \Delta V}{\frac{1}{2} Q \Delta V_0} = \frac{\Delta V}{\Delta V_0} = \frac{1}{k_e} < 1$$

Siccome **U diminuisce**, quando il dielettrico viene inserito c'è **una forza elettrica che tende ad attrarre il dielettrico nella regione compresa tra le due armature**.

Si consideri un **condensatore piano con armature di area Σ e a distanza h** a cui viene collegato un generatore che mantiene costante la differenza di potenziale ΔV_0 tra le armature. Una lastra di dielettrico viene inserita tra le armature riempiendo completamente il volume. Si distinguono le seguenti proprietà prima e dopo l'inserimento della lastra:



Caso A:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

$$q_0 = C_0 \Delta V_0$$

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{\Sigma}$$

$$E_0 = \frac{\Delta V_0}{h} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$U_e = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2$$

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Caso B:

$$C = C_0 \epsilon_r$$

$$q = C \Delta V_0 = \epsilon_r q_0$$

$$\sigma = \frac{q}{\Sigma} = \frac{C \Delta V_0}{\Sigma} = \frac{\epsilon_r C_0 \Delta V_0}{\Sigma} = \epsilon_r \sigma_0$$

$$E = E_0 = \frac{\Delta V_0}{h}$$

$$U'_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \epsilon_r U_e$$

$$u'_e = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \epsilon_r u_e$$

Ricapitolando, quando un dielettrico viene posto tra le armature di un condensatore carico non connesso ad un generatore, il campo elettrico E diminuisce nonostante la carica Q rimanga invariata, mentre se il dielettrico è inserito senza scollegare il generatore, il potenziale e il campo restano invariati anche se la carica Q su ciascuna armatura aumenta.

Questa fenomenologia può essere spiegata solo considerando il contributo di altre cariche, dette “cariche di polarizzazione”; la polarizzazione del dielettrico può avvenire per:

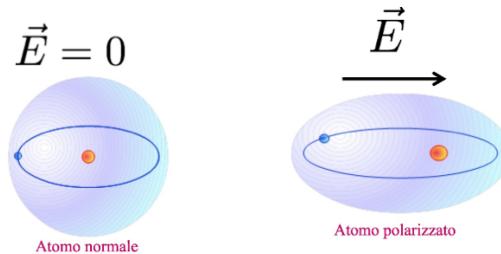
- Deformazione;
- Orientamento.

In entrambi i casi si può definire il vettore di polarizzazione \bar{P} come il momento di dipolo per unità di volume:

$$\bar{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{p}_i}{\Delta\tau} = \frac{dN\langle\bar{p}\rangle}{d\tau}$$

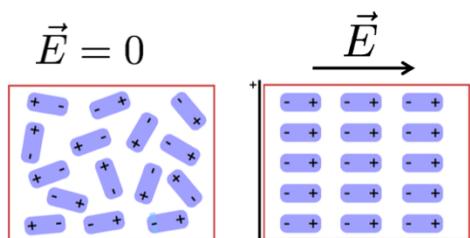
È una grandezza macroscopica che riassume il comportamento di un materiale dielettrico in presenza di un campo elettrostatico ed è proporzionale al momento di dipolo medio delle molecole e al numero di molecole dN contenute nell'elemento di volume. Nel vuoto, il vettore di Polarizzazione è nullo per definizione.

Nella polarizzazione per deformazione, l'atomo elettricamente neutro sotto l'azione di un campo elettrico è soggetto a deformazione a causa del fatto che la forza subita dalle cariche positive è diretta in verso opposto a quella delle cariche negative. In questo modo il baricentro delle cariche positive e quello delle cariche negative si allontanano, formando un dipolo elettrico:



$$\bar{p} = \gamma \bar{E}$$

Nella polarizzazione per orientamento, le molecole hanno già un momento di dipolo intrinseco (dovuto alla disuniformità nella distribuzione delle cariche) ma, in generale, sono orientati in modo casuale, con un valore totale nullo. In presenza di un campo elettrico esterno i singoli dipoli elementari subiscono un momento delle forze che li fa ruotare e raggiungere una posizione di equilibrio in cui si dispongono parallelamente al campo elettrico.



$$\langle\bar{p}\rangle = 0 \quad \langle\bar{p}\rangle = \gamma \bar{E}$$

LA CORRENTE ELETTRICA E LE LEGGI DI OHM

Nei conduttori, come già mostrato, alcuni elettroni possono migrare da un posto all'altro quando hanno energia sufficiente a farlo; in un metallo il **numero di elettroni** che hanno questo comportamento, i “**portatori carichi**”, si aggira intorno ad **uno per atomo**:

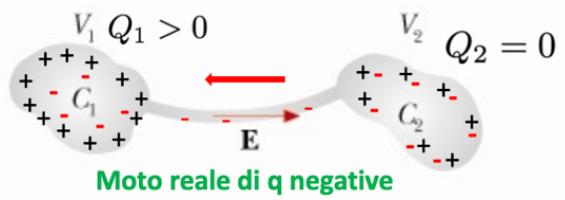
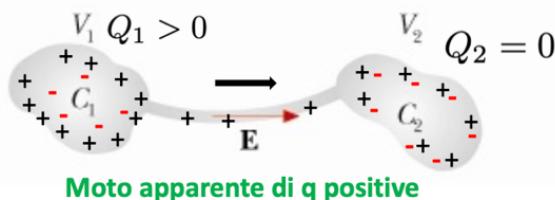
$$\alpha \approx 1$$

Commensurato questo numero per unità di volume si ottiene il **numero di portatori di carica per unità di volume**:

$$n = \alpha n_A = \alpha \frac{N_A \rho}{A}$$

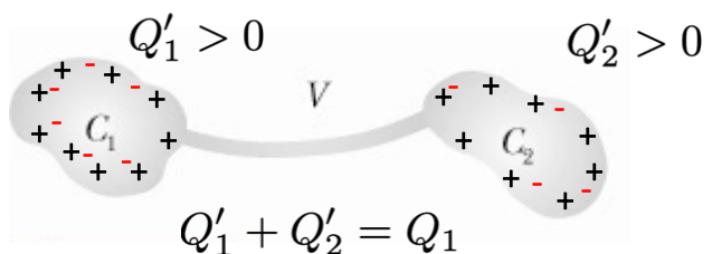
Dove **n_A** è il **numero di atomi per unità di volume**, il quale può essere espresso come rapporto tra il **numero di Avogadro (N_A)**, la **densità di massa (ρ)** e la **massa atomica (A)**, la massa in grammi di una mole). In genere per tutti i metalli l'ordine di grandezza di questo numero si aggira intorno ai 10^{22} portatori per cm^3 .

Si prendano **due conduttori a potenziale diverso** e li si colleghi tramite un **filo conduttore**; l'**eccesso di elettroni si sposta** dal conduttore a **potenziale più basso (C_2)** verso il conduttore a **potenziale più alto (C_1)**. Questo spostamento di cariche risulta in un **moto apparente di portatori di carica positiva da C_1 a C_2** :

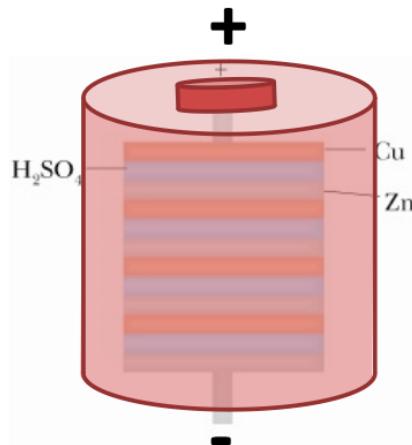


$$V_2 < V_1$$

La **migrazione** osservata prende il nome di **conduzione elettrica**, mentre la **quantità di carica che si sposta nell'unità di tempo** prende il nome di **corrente elettrica**. Se non si interviene dall'esterno a mantenere la differenza di potenziale fra i conduttori, il fenomeno risulta **transitorio** e termina quando il potenziale tra i due è uguale, cioè all'**equilibrio elettrostatico**:

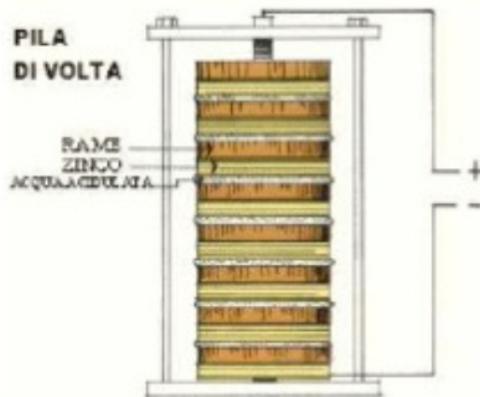


Lo studio dei fenomeni di conduzione elettrica ha avuto origine dall'invenzione della **pila di Volta**, un dispositivo capace di generare un campo elettromotore al suo interno, ovvero una **forza elettromotrice** ai suoi capi. Nella pila di Volta questo campo è generato dalla differenza di potenziale elettrochimico tra lo Zinco (Zn) e il Rame (Cu) rispetto ad una soluzione acida (H_2SO_4), con il trasferimento di elettroni tra lo zinco e la soluzione.



La pila di Volta fu ingegnerizzata dall'omonimo **Alessandro Volta nel 1799**, riprendendo gli studi di **Luigi Galvani** sulla corrente elettrica. Tale strumento era composto da:

- Un **supporto in legno** posto verticalmente su una base circolare;
- **Dischetti di rame e zinco;**
- **Un panno imbevuto di una soluzione acida;**
- Due **fili di rame.**



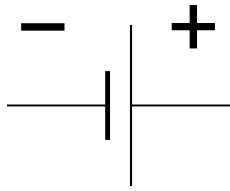
La **forza elettromotrice**, comunemente detta f.e.m., è il **rapporto tra il lavoro compiuto da un generatore elettrico per far muovere le cariche** (convenzionalmente positive) dal polo a basso potenziale a quello a potenziale più alto, e **l'unità di carica spostata**. Tale grandezza corrisponde alla **differenza di potenziale**:

$$\xi = \oint_0^C \bar{E} \cdot d\bar{s} > 0$$

Infatti, la forza elettromotrice può essere anche definita come la **circuitazione non nulla di un campo elettromotore** ed è legata anche al concetto di **tensione elettrica**, cioè il lavoro per unità di carica compiuto da un campo elettrico:

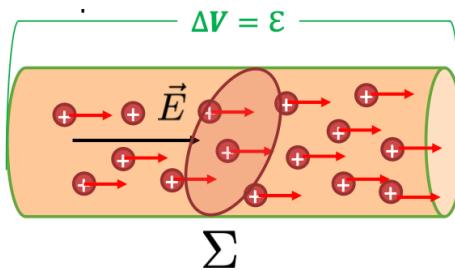
$$T_{AB} = \int_{A,\gamma}^B \bar{E} \cdot d\bar{s} > 0$$

Il **simbolo circuitale della forza elettromotrice** è:



Si prenda in considerazione un **conduttore** in cui è presente una **densità n** di portatori di carica **positiva** q^+ e si applichi ai suoi capi una **differenza di potenziale**. Grazie all'aiuto di un generatore di f.e.m. **nasce un campo elettrico** e sui portatori agisce la relativa forza elettrica, per cui essi si mettono in movimento ad una **velocità di deriva** che segue le **linee del campo elettrico** in un moto simile al **moto in un mezzo viscoso**:

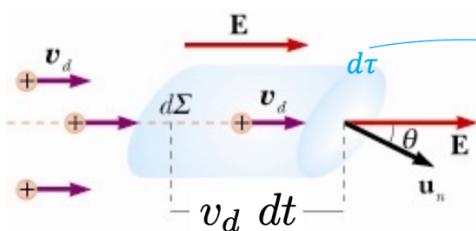
$$\bar{F} = q\bar{E} \Rightarrow \bar{v}_d \rightarrow \text{mm/s}$$



Si definisce **corrente elettrica I** che scorre attraverso la superficie Σ , la **quantità di carica dq** che attraversa Σ nell'**unità di tempo dt** e si misura in **Ampere**:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{[C]}{[s]} = [A]$$

La corrente elettrica, così come la differenza di potenziale, è una **quantità macroscopica** che si misura in laboratorio con opportuni strumenti; al contrario, la **densità di corrente** è una grandezza fisica **legata al moto dei portatori** e, in quanto tale, è **“locale”**, cioè **relativa a cosa succede in un punto di un conduttore**, non lungo tutta la sezione presa in considerazione.



Per la sua definizione bisogna tenere in considerazione il **volumen infinitesimo** alla base di una sezione infinitesima del conduttore:

$$d\tau = v_d dt \cdot d\Sigma \cos \vartheta$$

Mentre la **carica infinitesima** contenuta in tale volume è:

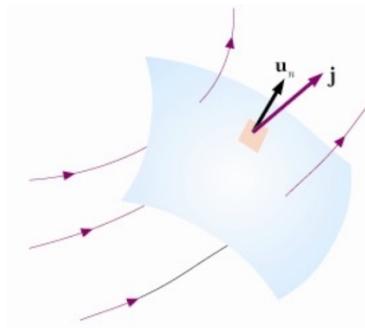
$$dq = n_+ q_+ d\tau = n_+ q_+ v_d dt \cdot d\Sigma \cos \vartheta$$

Dove n_+ è il numero di portatori di carica positivi e q_+ la carica di tali portatori. L'**intensità infinitesima di corrente nell'unità di tempo attraverso la superficie $d\Sigma$** risulta essere:

$$di = n_+ q_+ v_d d\Sigma \cos \vartheta$$

Mentre per **densità di corrente** si intende:

$$\bar{J} = n_+ q_+ \bar{v}_d = \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

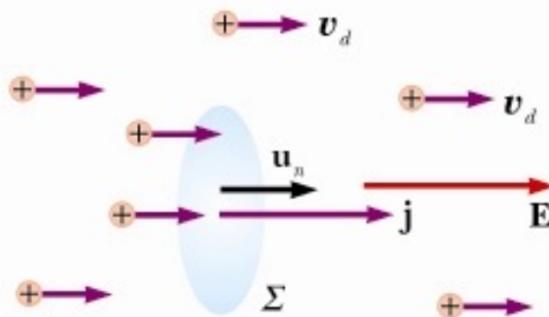


Da cui si può dedurre un **modo alternativo** di definire la corrente elettrica:

$$di = \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \Rightarrow i = \int_0^\Sigma \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Questa formulazione può essere **semplificata solo se la superficie è ortogonale al vettore densità** (e quindi alla velocità) e **se questo è costante**, cioè ha lo **stesso valore in tutti i punti della superficie**:

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$



In questo modo si può definire la **densità di corrente come la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche**.

Finora è stato mostrato il caso in cui **i portatori di carica sono solo positivi** ma, **nel caso dei metalli e dei semiconduttori**, ciò **non accade**; infatti, i portatori di carica sono solo negativi o sia negativi che positivi e pertanto:

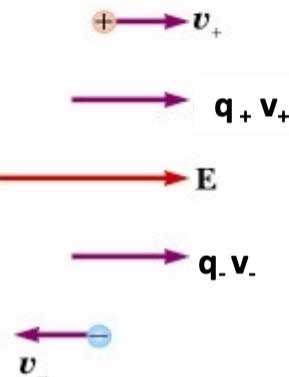
- **Nei metalli**

$$\bar{J}_- = n_- q_- \bar{v}_d$$

- **Nei semiconduttori**

$$\bar{J} = \bar{J}_+ + \bar{J}_- = n_+ q_+ \bar{v}_d + n_- q_- \bar{v}_d$$

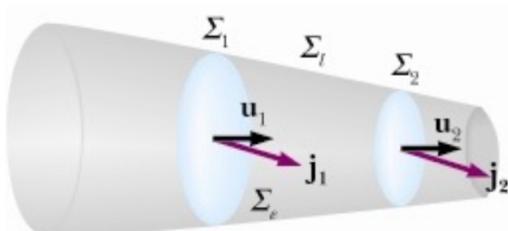
Tenendo però a mente il seguente schema di vettori:



La densità di corrente è sempre concorde con il campo elettrico; infatti, a parità di differenza di potenziale si hanno gli stessi effetti sia se la conduzione è dovuta a cariche positive con moto concorde ad \bar{E} sia se la conduzione è dovuta a cariche negative con moto discorde ad \bar{E} . Solo tramite un **comportamento microscopico** (effetto Hall) è possibile **determinare il segno dei portatori di carica**; pertanto, **per convenzione il segno della corrente elettrica è quello del moto delle cariche positive**, quindi quello che va da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale minore.

Sia considerato un **conduttore con una sezione non uniforme**; poiché la carica elettrica si deve conservare e in condizioni stazionarie non si possono creare accumuli o svuotamenti di carica, **il flusso di cariche entrante attraverso la superficie Σ_1 deve uguagliare quello uscente dalla superficie Σ_2** . Si definisce, pertanto, **condizione di stazionarietà** la condizione in cui l'intensità di corrente è costante lungo ogni sezione del conduttore:

$$i_1 = \int_0^{\Sigma_1} \bar{J}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma_1 = \int_0^{\Sigma_2} \bar{J}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = i_2$$



In un **conduttore** sottoposto ad una **differenza di potenziale in regime stazionario**, la **densità di corrente** è data da:

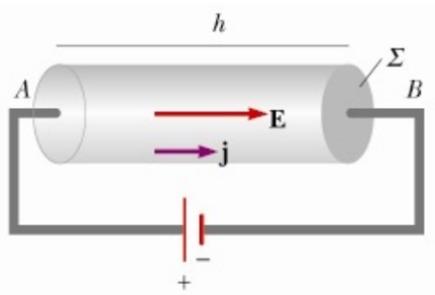
$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

Dove **σ è la condutività elettrica**, una grandezza **caratteristica del conduttore**. Questa formulazione, ricavata sperimentalmente, può anche essere formulata in funzione della **resistività del conduttore** (l'inverso della condutività elettrica):

$$\bar{E} = \frac{1}{\sigma} \bar{J} = \rho \bar{J}$$

In un conduttore metallico cilindrico:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = Eh = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$



Si definisce **resistenza di un conduttore R**, calcolato in **Ohm**:

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} = \frac{[V]}{[A]} = [\Omega]$$

La resistenza è un valore tipico del conduttore preso in esame; esistono **alcuni materiali**, detti **superconduttori**, che **in prossimità dello zero assoluto** (-273.15 K) hanno una **resistività** (e quindi una resistenza) **nulla**.

Con la formulazione della resistenza si possono **mettere in relazione potenziale elettrico e corrente**:

$$\Delta V = Ri$$

Quest'ultima formula prende il nome di **Legge di Ohm per i conduttori metallici**. Se il conduttore è **a sezione variabile**, la legge di Ohm si trasforma:

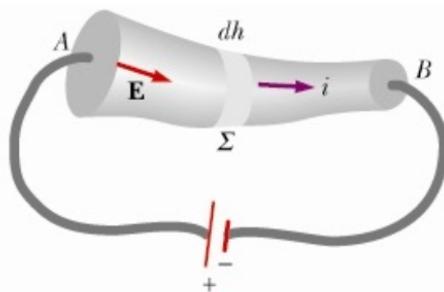
$$-dV = \bar{E} \cdot d\bar{l} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} i = \left(\int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} \right) i = Ri$$

Dove:

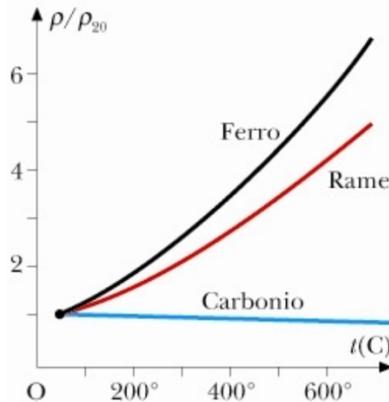
$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

Questa formula è inverata anche dal fatto che la **corrente è costante**, in quanto si è **in regime stazionario**.



Sperimentalmente si è osservato che **la resistività aumenta con l'aumentare della temperatura**:

$$\rho = \rho(T)$$



Mentre **in un intorno di 20° l'andamento è quasi lineare**. Pertanto:

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha\Delta T)$$

Dove $\Delta T = T - T_{20}$ e α è il **coefficiente termico dei conduttori**:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$$

La ricerca e lo studio sulla corrente elettrica furono svolti in un **periodo di passaggio per la fisica**, in cui si tentava di associare ogni teoria alla **meccanica classica**, incontrando degli **ostacoli per i quali era necessario osservare il mondo da un'altra prospettiva**, secondo la **meccanica quantistica**. In maniera analoga, agli inizi del XX secolo, il fisico **Drude** formulò un **modello basato sulla meccanica classica** che avrebbe dovuto **spiegare la conduzione elettrica**; il modello spiegava **buona parte della fenomenologia** ma, come anticipato, **alcuni fenomeni erano limitati al mondo quantistico**, che spiega la totalità delle osservazioni sperimentali.

La necessità di un modello, seppur elementare, nasce da questa osservazione: **se in un conduttore si fa agire un campo elettrico costante nel tempo, perché se si applica una differenza di potenziale costante nel tempo, si osserva una corrente costante nel tempo?** Ciò **contrasta l'idea che il portatore di carica sia totalmente libero**; infatti, in tal caso, subendo una forza elettrica costante nel tempo si dovrebbe avere un moto uniformemente accelerato ed una **corrente che cresce linearmente nel tempo**:

$$V(t) = k \wedge \bar{E}(t) = k \wedge \bar{F}(t) = q\bar{E}(t) = m\bar{a}(t) = k$$

↓

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t = \bar{v}_0 + \frac{\bar{F}}{m}t$$

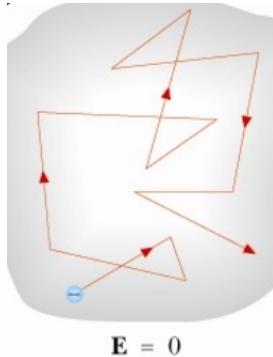
↓

$$I(t) = I_0 + \alpha t$$

Ma **sperimentalmente ciò non accade**.

Secondo il modello di Drude, **in assenza di un campo elettrico, gli elettroni si muovono in maniera caotica con un'energia cinetica proporzionale alla temperatura assoluta**; inoltre, interagiscono con gli ioni reticolari del metallo con **urti che cambiano la loro quantità di moto**, mentre gli urti con altri elettroni sono trascurabili. Però, poiché **tutte le direzioni sono equiprobabili, il valore medio del vettore velocità è nullo**:

$$\langle \bar{v}_i \rangle = 0$$

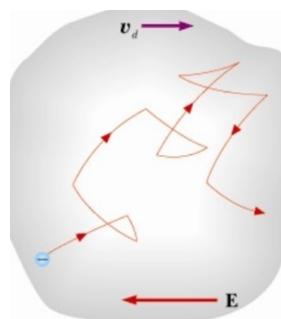


Applicando un **campo elettrico**, ogni elettrone, fra un urto ed un altro, subisce la **forza elettrica**:

$$\bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i - \frac{e\bar{E}\tau}{m}$$

Dove **τ** è **il tempo fra due urti successivi**, cioè il **tempo di rilassamento del metallo**. Facendo nuovamente la media su tutti i portatori, si ha la nascita di un **moto di deriva collettivo**, \bar{v}_d :

$$\bar{v}_d = \langle \bar{v}_{i+1} \rangle = \langle \bar{v}_i \rangle - \frac{e\bar{E}\tau}{m} = - \frac{e\bar{E}\tau}{m}$$



Si può notare che, sia sperimentalmente che formalmente, **il moto è proporzionale al campo elettrico e dipeso dal segno del portatore**.

La relazione, secondo Drude, fra **densità di corrente elettrica e campo** è:

$$\bar{J} = n(-e)\bar{v}_d = \left(\frac{ne^2\tau}{m} \right) \bar{E} = \sigma \bar{E}$$

Che coincide con quanto detto finora. La **conducibilità elettrica**, inoltre, è **proporzionale al tempo fra due urti**, quindi la **resistività cresce con τ e con la temperatura**. Dai valori sperimentali di conducibilità elettrica si ricava l'ordine di grandezza del tempo di rilassamento, ad esempio nel rame:

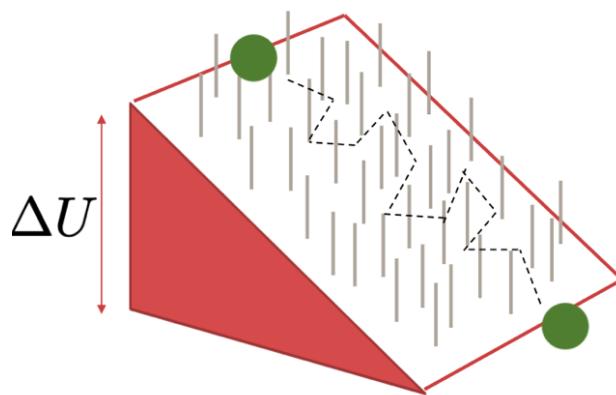
$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} \approx 2.5 \cdot 10^{-14} s$$

Mentre per la velocità di deriva è di $1 A$ in un filo di sezione di $1 mm^2$:

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{I}{\Sigma ne} \approx 0.073 mm/s$$

Si possono fare analogie con la forza peso e l'energia potenziale gravitazionale, infatti in entrambi i casi:

- La forza costante tira in giù il soggetto;
- A causa degli urti avanza a velocità costante;
- La differenza di energia ai capi è costante;
- La variazione di energia cinetica è nulla.



$$\Delta U \rightarrow \Delta V \wedge q\bar{E} \rightarrow m\bar{g}$$

Questo modello spiega numerosi fenomeni ma presenta dei **limiti**:

- **La velocità media di agitazione termica è sottostimata** di un fattore 100;
- **Non spiega correttamente il rapporto fra conducibilità elettrica e termica** nei metalli;
- **Non spiega gli andamenti decrescenti della resistività con la temperatura** nel carbonio.

Il modello di Drude fu **migliorato da Sommerfeld**, il quale tenne in conto la **meccanica quantistica**.

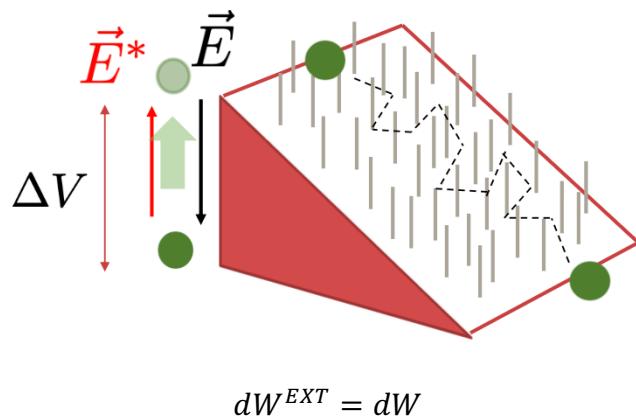
Un'ulteriore osservazione sperimentale mostra che **il passaggio di corrente elettrica in un conduttore produce una dissipazione energetica sotto forma di calore**, la cui potenza è proporzionale al quadrato della corrente che scorre nel conduttore e direttamente proporzionale alla resistenza elettrica del conduttore:

$$P = \frac{dW}{dt} = Ri^2 = \frac{\Delta V^2}{R} = \Delta Vi$$

Ma l'**energia la fornisce il lavoro del campo elettrico sui portatori**, infatti:

$$dW = \Delta V dq = \Delta V idt = Ri^2 dt$$

Tale fenomeno prende il nome di **effetto Joule**. Per riportare nuovamente le cariche ad un potenziale maggiore occorre un nuovo campo elettrico che faccia da “ascensore” di potenziale per le cariche q :



I RESISTORI E LE LEGGI DI KIRCHHOFF

Per **resistore** si parla di **conduttori ohmici** (cioè conduttori per cui vale la Legge di Ohm) caratterizzati da un **determinato valore della resistenza a temperatura ambiente**. Sono elementi spesso usati nei **circuiti elettrici** e, oltre al valore della resistenza, sono **caratterizzati anche da un valore massimo di potenza che può essere dissipata** (tramite effetto Joule) **senza causare alterazioni irreversibili**. Il simbolo circuitale di un resistore è:

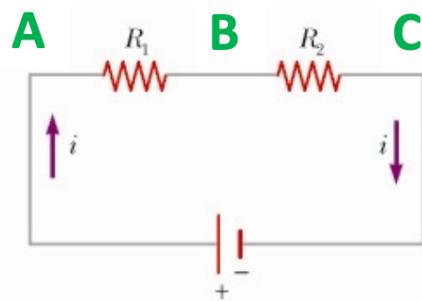


$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

Come i condensatori, anche i resistori possono essere **combinati in sistemi**, i quali anch'essi possono essere **in serie o in parallelo**. Due resistori sono **collegati in serie quando condividono un'estremità**, cioè sono **attraversati dalla stessa corrente** quando sono **in regime stazionario**:



Applicando a ciascun resistore la legge di Ohm:

$$V_A - V_B = R_1 i$$

$$V_B - V_C = R_2 i$$

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2)i = R_{eq}i$$

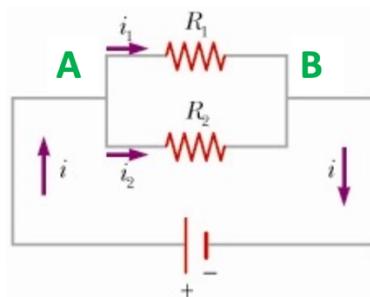
Da ciò si deduce che **due resistori collegati in serie possono essere considerati come un solo resistore la cui resistenza è la somma delle resistenze iniziali**:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Generalizzando ad un sistema di n resistori collegati in serie, ciascun resistore è attraversato dalla medesima corrente e la resistenza equivalente è la somma di tutte le resistenze dei singoli componenti:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Due resistori sono collegati in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi. In questo caso l'elemento in comune ai due resistori non è la corrente, che è diversa in maniera proporzionale alla resistenza di ciascun componente, ma la differenza di potenziale:



Per la **condizione di stazionarietà**:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

Anche in questo caso si può **considerare il sistema di resistori in parallelo come un solo resistore di resistenza**:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Mentre le correnti nei due resistori sono:

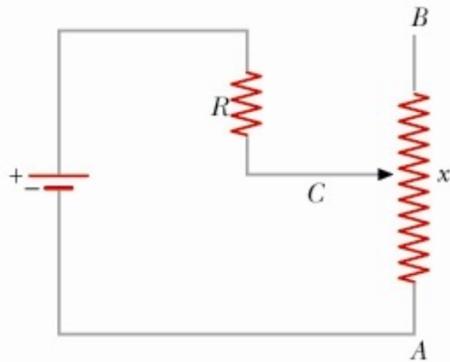
$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Generalizzando ad un sistema di n resistori collegati in parallelo, ciascun resistore è alla medesima differenza di potenziale e la resistenza equivalente è la somma dei reciproci delle resistenze dei singoli componenti:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Si definisce **reostato** un dispositivo con una **resistenza variabile**, cioè un **conduttore omogeneo** (con resistività ρ uniforme), **avente sezione Σ costante ma con un valore di resistenza che cambia al variare della sua lunghezza**:

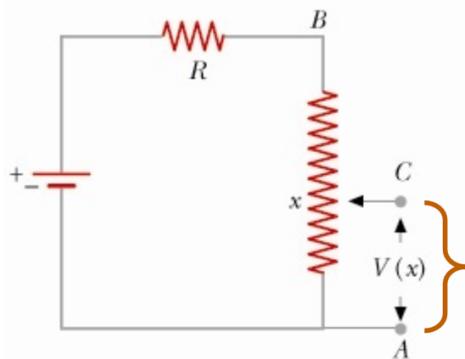


$$R(x) = \frac{\rho x}{\Sigma} = rx$$

Dove **r** è la **resistenza per unità di lunghezza del conduttore**. Disponendo, come in figura, un **contatto mobile C** che scorre sul conduttore come un **cursor**, si può ottenere l'effetto fisico della **resistenza variabile**, con una continuità ed una legge ben nota. Un **reostato**, inserito **in serie** in un circuito, **permette di variare con continuità l'intensità di corrente**, spostando il cursor tra la posizione $x_0 = 0$ (reostato escluso) e la posizione $x_l = l$ (reostato completamente inserito):

$$i = \frac{V}{R + R(x)} = \frac{V}{R + rx}$$

Si parla, invece, di **potenziometro**, facendo riferimento ad **un reostato collegato ad un generatore di f.e.m. in modo che tra il cursor C e il polo A ci sia una differenza di potenziale variabile linearmente**:



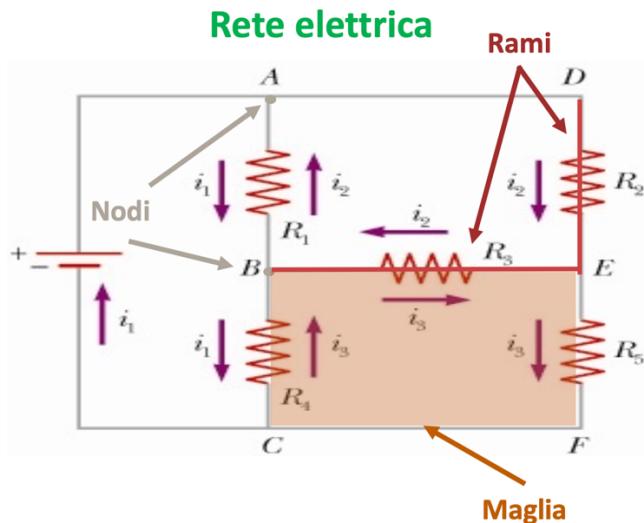
$$V_C - V_A = V(x) = \frac{\xi}{R + rl} rx = vx$$

Dove **v** è la **differenza di potenziale per unità di lunghezza** del sistema.

Si definisce una **rete elettrica** un **circuito semplice o complesso** in cui si possono distinguere i seguenti **elementi geometrici**:

- **Nodi**, sono punti nel quale convergono almeno tre conduttori;

- **Rami**, sono gli elementi di collegamento dei nodi in cui possono esserci componenti attivi (come generatori) o passivi (come resistori);
- **Maglie**, determinati cammini chiusi costituiti da più rami, i quali possono pertanto appartenere a più maglie.

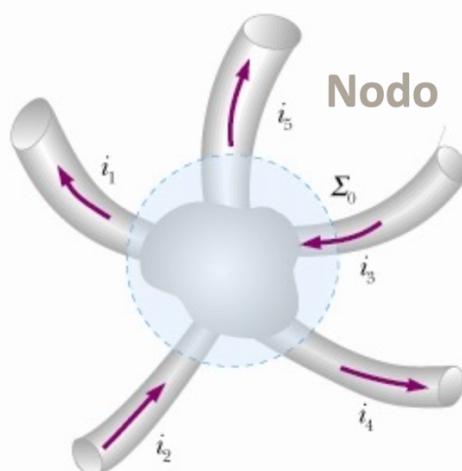


Per **maglia indipendente** si intende una maglie che **contiene almeno un lato che non appartiene a nessun'altra maglia**. In genere, vale la seguente relazione (tenendo conto che m è il numero di maglie indipendenti, l di lati e n di nodi):

$$m = l - n + 1$$

L'analisi delle reti elettriche è sviluppata sulla base di due leggi generali, dette **Leggi di Kirchhoff**. La **prima legge di Kirchhoff**, o **legge dei nodi**, afferma che **la somma algebrica delle correnti che confluiscano in un nodo è nulla**:

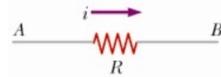
$$\sum_k i_k = 0$$



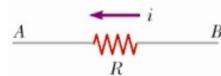
Infatti, la corrente entrante nel nodo ha segno negativo, mentre quella uscente ha segno positivo. La **seconda legge di Kirchhoff**, o **legge delle maglie**, afferma che **la somma algebrica delle forze elettromotrici presenti nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica delle differenze di**

potenziale ai capi dei resistori situati nei rami della maglia (comprese le resistenze interne dei generatori):

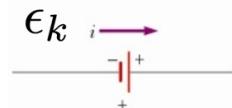
$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \xi_k$$



$$V_A - V_B = Ri$$



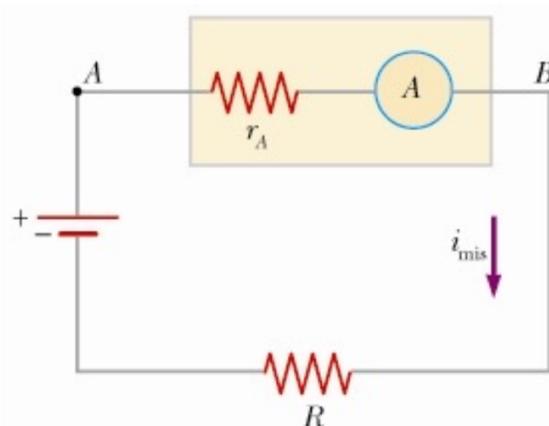
$$V_A - V_B = -Ri$$



I segni dei vari termini devono **rispettare le seguenti regole**:

- Se nel ramo in considerazione **la corrente è concorde al verso scelto nella maglia**, $R_k i_k$ ha **segno positivo** (viceversa negativo);
- Se la sorgente di f.e.m. in considerazione **viene attraversata dal senso di percorrenza fissato nel verso che va dal polo negativo a quello positivo**, essa va presa col **segno positivo** (viceversa negativo).

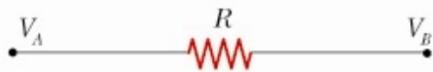
L'amperometro è uno strumento che permette la **misurazione dell'intensità di corrente** attraverso una serie di **resistenze "shunt"**, cioè dei **deviatori di corrente**, un tipo di resistenza che devia una parte più o meno consistente della corrente circolante in un circuito principale a cui è collegato in parallelo.



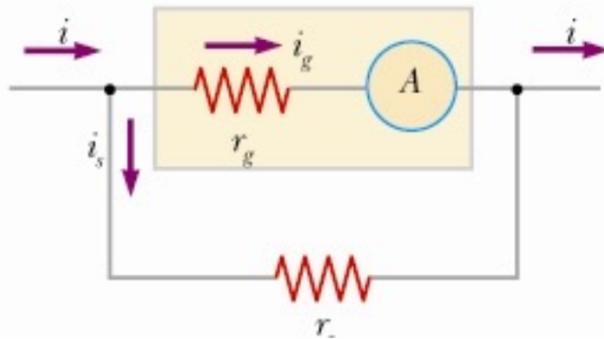
La resistenza interna dell'amperometro (r_A) altera la resistenza della maglia (R), risultando in una corrente misurata alterata ma tanto più vicina al valore originale quanto più r_A è minore di R :

$$i_{\text{mis}} = \frac{\xi}{R + r_A} < \frac{\xi}{R} = i$$

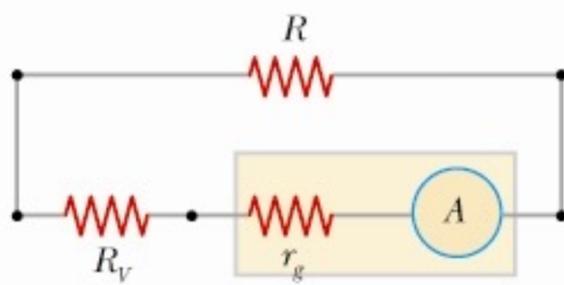
Il **voltmetro**, analogamente, è uno strumento che **misura la differenza di potenziale ai suoi capi**.



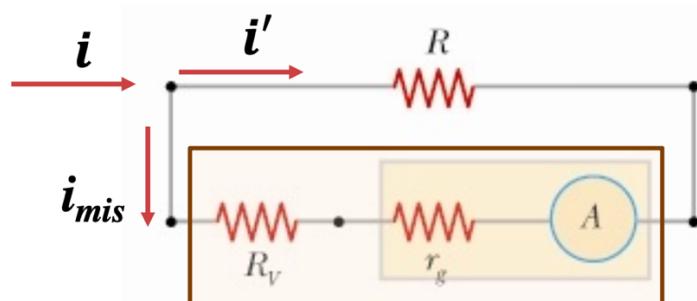
Essenzialmente è costituito da un **galvanometro** (strumento che misura intensità e verso della corrente) a cui è stata aggiunta una resistenza R_V . Infatti un **galvanometro** è figurato come:



Mentre un **voltmetro**:



Esso si posiziona in parallelo rispetto al bipolo (resistore o condensatore) di cui si vuole misurare la differenza di potenziale ai capi; la resistenza interna dello strumento va a costruire un nuovo nodo, che altera la corrente che scorre sul bipolo. Come nel precedente caso, il potenziale misurato sarà sempre minore di quello reale ma la perturbazione è tanto più piccola quanto R_V è maggiore di R :



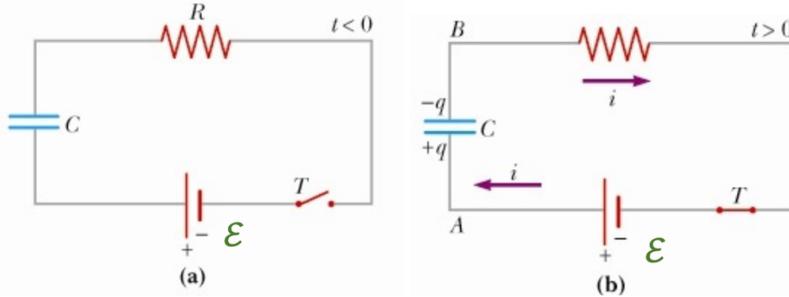
$$V_{mis} = (R_V + R_g)i_{mis} = r_i i_{mis}$$

$$i = i' + i_{mis}$$

$$V_{mis} = i'R = r_i i_{mis} < Ri = V$$

PROCESSI DI CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE

Fino a questo momento sono stati considerati **circuiti in cui la corrente è costante nel tempo**, tuttavia questa condizione **non è sempre presente**. Si prendano in esame **circuiti** nei quali **la corrente varia nel tempo** con una legge nota:



Inizialmente l'interruttore T è aperto, il che significa che nel circuito non circola corrente e il condensatore C è scarico. Ad un istante di tempo t_0 viene chiuso l'interruttore e il generatore inizia a prelevare cariche dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle verso il polo positivo, in modo che sulle armature del condensatore compaiano $+q$ e $-q$. Il processo continua finché la carica del condensatore non raggiunge il valore massimo $Q = C\xi$, a cui corrisponde la differenza di potenziale $V_A - V_B$ tra le armature, pari alla forza elettromotrice del generatore.

In questo tipo di circuito, che prende il nome di **circuito RC**, la **forza elettromotrice** è data dalla **differenza di potenziale ai capi del condensatore e ai capi del resistore**:

$$\xi = V_R(t) + V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Questa legge obbedisce sia alla legge di Ohm che alla seconda legge di Kirchhoff e suppone che la **resistenza interna del generatore sia trascurabile rispetto alla resistenza esterna** (oppure compresa nel suo valore). Isolando l'espressione della legge di Ohm:

$$Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt} = \xi - \frac{q(t)}{C}$$

Che equivale a dire:

$$\frac{dq(t)}{q - C\xi} = -\frac{dt}{RC}$$

Che si mostra nella forma di un'equazione differenziale del primo ordine. Integrando per ottenere la **legge della carica in funzione del tempo**:

$$\int_0^q \frac{dq(t)}{q - C\xi} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln \left(\frac{q - C\xi}{-C\xi} \right) = -\frac{t}{RC}$$

Da cui si estrapolano le seguenti leggi:

$$q(t) = C\xi \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\xi}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \xi \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$V_R(t) = Ri(t) = \xi e^{-\frac{t}{RC}}$$

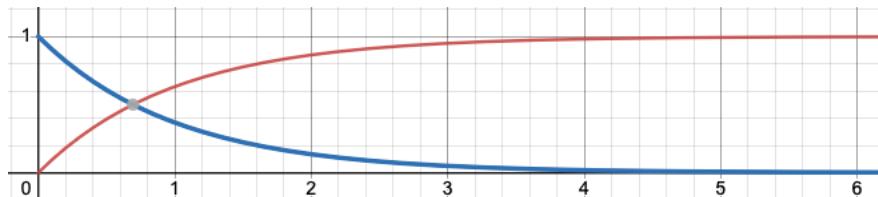
Si definisce **costante di tempo RC** il tempo necessario al condensatore per caricarsi al 63,2% della sua carica totale, infatti:

$$\tau = RC \Rightarrow 1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} = 0.632$$

Generalmente, anche se matematicamente è sbagliato, si dice che **un condensatore è carico dopo 3τ** . È un'affermazione errata perché matematicamente la funzione di carica rispetto al tempo ha in 1 un asintoto orizzontale, il che significa che il condensatore non si può mai caricare al 100%; tuttavia, l'affermazione può essere accettata perché:

$$\frac{q(3\tau)}{q(\infty)} = 1 - e^{-3} \approx 0.95$$

L'andamento delle due funzioni è:



Da queste leggi è possibile ricavare sia la **potenza** che l'**energia totale erogata dal generatore**, quella **immagazzinata nel condensatore** e quella **dissipata per effetto joule**:

$$P_{GEN} = \xi i(t) = \frac{\xi^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$W_{GEN} = \int_0^{+\infty} \xi i(t) dt = \frac{\xi^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = \xi^2 C$$

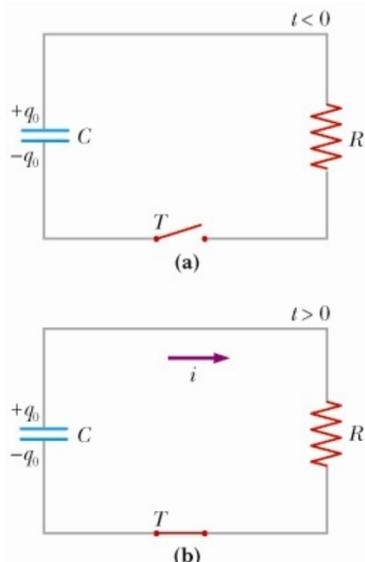
$$U_C = \frac{1}{2} W_{GEN} = \frac{1}{2} \xi^2 C$$

$$W_{DIS} = \int_0^{+\infty} R i^2(t) dt = \frac{\xi^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} \xi^2 C$$

Questo processo prende il nome di **carica di un condensatore**. Sia invece considerato il **circuito** composto da un **condensatore**, con **carica iniziale q_0** , un **resistore R** e un **interruttore T**,

inizialmente aperto. All'istante t_0 si chiude l'interruttore e le cariche si muovono dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore, dando luogo a una **corrente positiva** lungo il resistore e iniziando un processo di scarica del condensatore:

$$i = -\frac{dq}{dt}$$



Dove il segno meno è una **conseguenza della diminuzione della carica nel tempo**. In un istante di tempo generico la **differenza di potenziale ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi del resistore**, infatti secondo la **seconda legge di Kirchhoff e la legge di Ohm**:

$$0 = V_C + V_R$$

$$V_C = V_R$$

Inoltre, come conseguenza di questa relazione:

$$0 = \frac{q}{C} + Ri \Rightarrow i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC}$$

Integrando per ottenere la **legge della carica in funzione del tempo**:

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

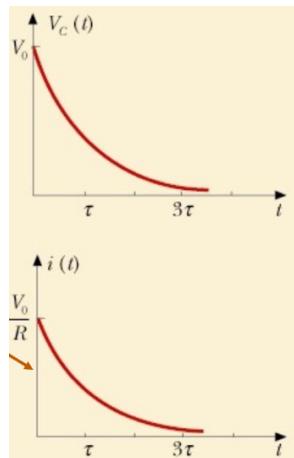
$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Da cui derivano le seguenti formule:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_C(t)}{R}$$



Infine, si può dimostrare che l'energia dissipata nel processo è pari all'energia elettrostatica iniziale del condensatore.

MAGNETISMO

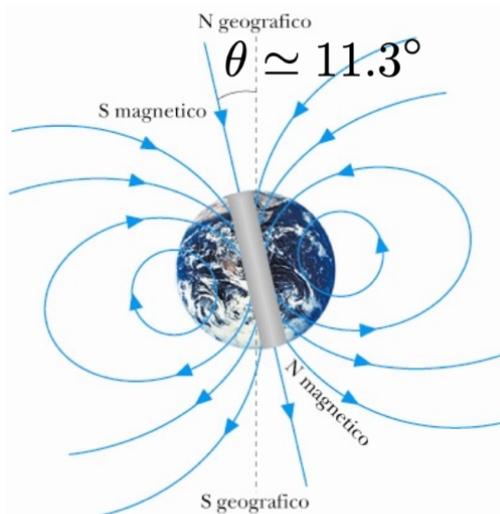
I FENOMENI MAGNETICI

Fin dall'antichità (VIII a.C.) erano note le **proprietà di alcuni minerali ferrosi**, come la **magnetite**, di **attrarre la limatura di ferro**; i greci notarono che quando il minerale era sagomato a forma di cilindro o a ferro di cavallo la limatura si concentrava alle estremità dell'magnete, tali estremità prendono il nome di **"poli del magnete"**. Nel **XVI secolo iniziarono i primi studi sistematici** dei fenomeni magnetici, anche **in comparazione con i fenomeni elettrici**, ad opera di **Gilbert**, il quale costruì le basi per gli approfondimenti di Coulomb.

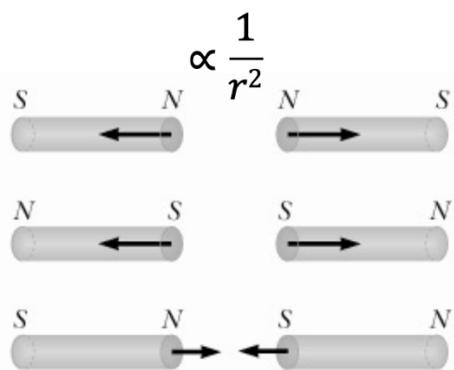
L'**interazione tra i due poli** può essere **attrattiva o repulsiva** e si può immaginare essere **mediata da un campo vettoriale, il campo magnetico**. Come per i fenomeni elettrici, esistono **due particolari stati magnetici** che giustificano i versi del relativo campo e i modi con cui due magneti si attraggono: **poli omologhi si respingono e poli opposti si attraggono**. Si potrebbe pensare che i fenomeni magnetici siano semplicemente dei fenomeni elettrici, tuttavia tale assunzione è sbagliata visto che la magnetite è un conduttore neutro.

Avvicinando un pezzo di ferro ad un magnete si può notare che anch'esso guadagna la caratteristica di attrarre limatura di ferro, quindi si **magnetizza**; un corpo di questo tipo è detto **magnete artificiale**, mentre se ha la forma di un cilindro sottile filiforme è detto **ago magnetico**. Un ago magnetico lasciato libero di muoversi **si orienta automaticamente in maniera approssimativamente parallela al meridiano terrestre**; questa esperienza ha permesso di **determinare l'esistenza di un campo magnetico terrestre** dotato di due poli, **polo Nord e polo Sud**.

La Terra si comporta come un **magnete permanente**, generando di conseguenza un **campo magnetico** dove il **polo Sud coincide quasi con il polo Nord geografico** e viceversa, se non per una **differenza di 11.3°** , mentre l'**ago magnetico** di una bussola si orienta **seguendo le linee di campo** che vanno **dal Nord verso il Sud**. Il **valore** varia con la latitudine tra circa **0.2 G e 0.7 G** (dove G, Gauss, è un sottomultiplo del T, Tesla, $1G = 10^{-4}T$):

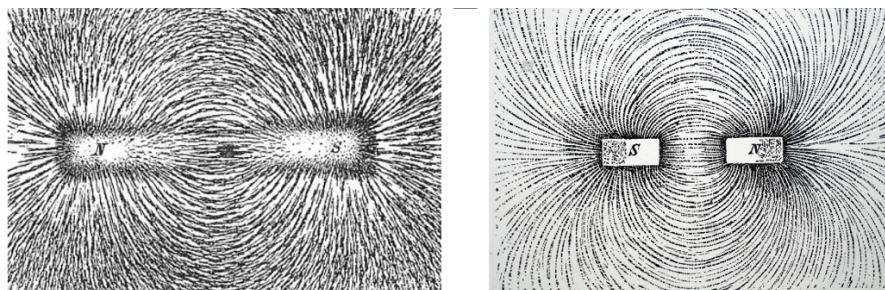


Studi quantitativi successivi, effettuati da Coulomb, hanno determinato che, **per magneti lunghi e sottili**, l'**interazione era inversamente proporzionale al quadrato della distanza** tra le due calamite:



Tuttavia, ad oggi, non si è ancora riusciti a trovare un modo di isolare un polo, spezzando un magnete esso sarà sempre caratterizzato da un polo Nord e un polo Sud; pertanto, si dice che **non c'è evidenza sperimentale di cariche magnetiche unipolari isolate**, o di monopoli magnetici.

Osservando il comportamento di un ago magnetico e della limatura di ferro, si può affermare la **similitudine tra i dipoli elettrici e i magneti**:



Tuttavia, le **linee di campo magnetico** (a differenza di quelle di campo elettrico) appaiono sempre come **linee chiuse, che partono da un polo e terminano sull'altro**. Successivamente verrà data anche una dimostrazione formale di questa proprietà.

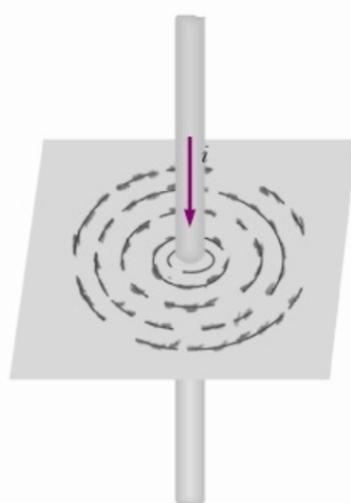
Le osservazioni sperimentali inducono ad introdurre, come anticipato in precedenza e in analogia con i fenomeni elettrostatici, un nuovo campo vettoriale responsabile dei fenomeni magnetici: il campo magnetico, \vec{B} . Lo **studio del campo magnetico** coinvolge:

- Lo **studio delle azioni prodotte**, cioè quali forze conseguono dal campo magnetico;
- Lo **studio delle sorgenti**, cioè come si produce il campo magnetico.

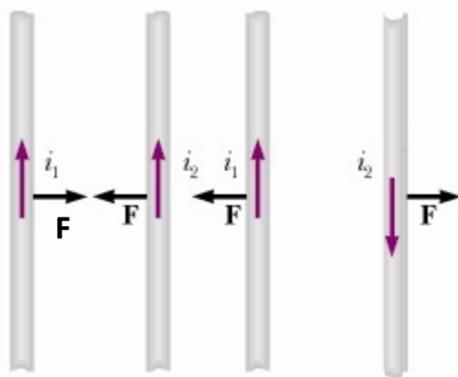
ELETTRICITÀ E MAGNETISMO

Fu solo dopo la scoperta della pila di Volta e l'avvio dello studio delle correnti elettriche che si iniziò a studiare in maniera estesa la connessione fra correnti elettriche e magnetismo; particolare risonanza ebbero le esperienze effettuate da **Oersted** e **Ampere**.

Oersted evidenziò che **un ago magnetico si orienta nel piano ortogonale ad un filo percorso da corrente elettrica secondo delle circonferenze, in maniera proporzionale all'intensità e al verso della corrente**; in seguito, Oersted ripeté questo esperimento con la limatura di ferro, notando che le linee di campo magnetico sono circonferenze chiuse:



D’altro canto, Ampere mostrò che **due fili rettilinei e paralleli percorsi da corrente elettrica interagiscono tra loro con una forza che dipende dall’intensità, dal verso della corrente e dalla distanza tra i fili**, in particolare notò che se le correnti nei due fili sono equiveverse la forza è attrattiva, repulsiva se le correnti sono in verso opposto:



Unendo i risultati di queste due esperienze, si può affermare che **il campo magnetico è il mediatore di un’interazione tra cariche elettriche in movimento**. Questo rapporto tra cariche in movimento e campo magnetico può essere analizzato in due modi: considerando come **le cariche in movimento producono campo magnetico** e come **il campo magnetico condiziona una carica in movimento**.

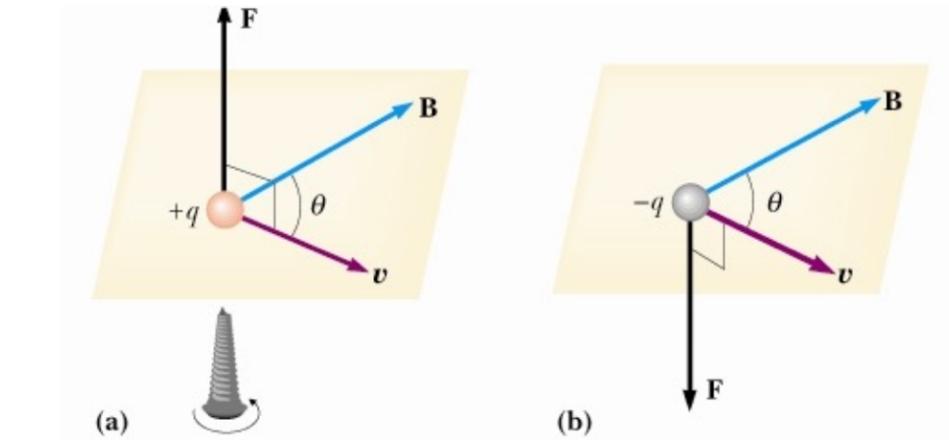
Considerando quest’ultimo punto di vista, si definisce **forza di Lorentz** la **forza che il campo magnetico produce su cariche in movimento**:

$$\bar{F}_L = q\bar{v} \times \bar{B}$$

Dalla formula si evince che questa forza esiste nel momento in cui **le cariche non sono ferme e se la loro velocità non è parallela al campo**, infatti il modulo è:

$$F = qvB \sin \vartheta$$

Con velocità nulla o con un angolo di π (velocità parallela e seno nullo) la forza è nulla. Per determinare direzione e verso del vettore forza si ricorre alla **regola della mano destra** (o della vite destrosgira) **ponderata al segno della carica**:



Infatti, la **forza di Lorentz discrimina il segno della carica**: se la carica è negativa il verso va invertito rispetto a quello determinato con la regola della mano destra, cioè **cariche opposte vengono deviate in direzioni opposte**.

La forza di Lorentz può essere usata come **definizione operativa del campo magnetico**, che si misura in **tesla**:

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{[N]}{[C] \left[\frac{m}{s} \right]} = \left[\frac{N}{Am} \right] = [T]$$

Il tesla è un'unità di misura molto grande, il campo magnetico terrestre è nell'ordine dei microtesla mentre il valore più alto registrato si aggira intorno ai 5 o 6 tesla.

Poiché ortogonale allo spostamento per definizione, la **forza di Lorentz non effettua lavoro**, a differenza della forza elettrica. È possibile mettere in relazione queste due forze, infatti **il campo magnetico fa curvare le cariche in moto senza alterare la loro velocità**, mentre **il campo elettrico si occupa di accelerarle**, quindi la prima forza è responsabile di un'accelerazione centripeta, la seconda di un'accelerazione tangenziale:

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

$$\bar{B} \rightarrow \bar{a}_c$$

$$\bar{E} \rightarrow \bar{a}_t$$

Il lavoro di Lorentz fu svolto all'inizio del XIX secolo ma si ebbero evidenze sperimentali solo un secolo più tardi, anche se l'interazione fra corrente elettrica e campo magnetico era già nota. Pertanto, per il suo studio venne in aiuto la **seconda legge sperimentale di Laplace**, che mette in evidenza come una porzione infinitesima di filo percorso da corrente subisca una forza:

$$d\bar{F} = id\bar{l} \times \bar{B}$$

In realtà le due forze non sono scollegate, si può considerare la **forza di Lorentz** come un'**espressione macroscopica della seconda legge di Laplace**. Sia considerata la forza di Lorentz che agisce sul singolo elettrone in movimento:

$$\bar{F}_L = (-e)\bar{v}_d \times \bar{B}$$

In una porzione di conduttore dl di sezione Σ è presente un **numero di portatori** pari a:

$$dN = n\Sigma dl$$

Gli elettroni di conduzione “trasmettono” la forza risultante agli ioni del conduttore, che subisce anch’esso una forza pari a:

$$d\bar{F} = dN\bar{F}_L = n\Sigma dl(-e)\bar{v}_d \times \bar{B} = \Sigma jd\bar{l} \times \bar{B} = id\bar{l} \times \bar{B}$$

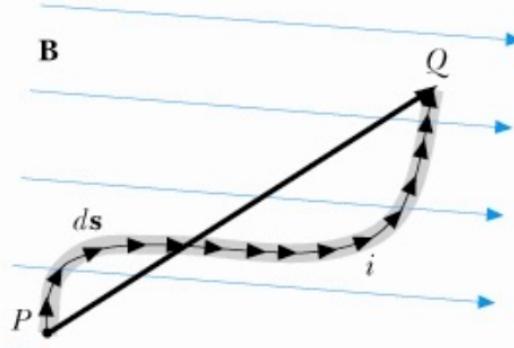
Che è l'espressione della seconda legge di Laplace. Si supponga che il **fìlo sia finito e contenuto in un piano**:

$$\bar{F} = \int_0^{filo} d\bar{F} = i \int_P^Q d\bar{l} \times \bar{B}$$

Se il **campo magnetico è uniforme**:

$$\bar{F} = i \int_P^Q d\bar{l} \times \bar{B} = i \left(\int_P^Q d\bar{l} \right) \times \bar{B} = i \overline{PQ} \times \bar{B}$$

Con questo risultato si può affermare che **la forza magnetica non dipende dalla forma assunta dal filo** ma solo dal segmento congiungente i suoi estremi:



Se il filo è **chiuso su se stesso** (spira piana percorsa da corrente) e il **campo magnetico è uniforme**, **la forza totale sulla spira è nulla**:

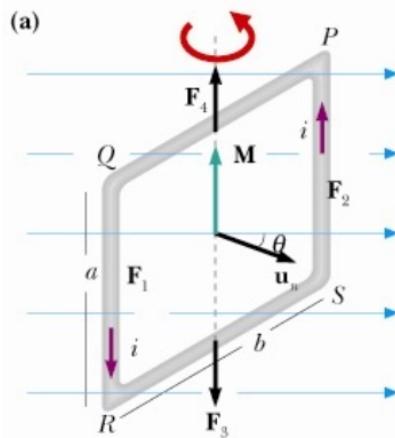
$$\bar{F} = i \oint d\bar{l} \times \bar{B} = i \left(\oint d\bar{l} \right) \times \bar{B} = 0$$

Ma se il campo magnetico non è uniforme si avrà una risultante delle forze agente sulla spira piana che è diversa da zero.

Si prenda in considerazione un caso analogo, in cui **la spira piana è rigida e immersa in un campo magnetico uniforme**; poiché la risultante delle forze è nulla, essa **non si deforma e il suo centro di massa non si muove**, tuttavia **non è nullo il momento delle forze risultante**:

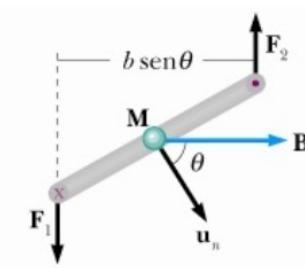
$$F_3 = F_4 = ibB \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$$

$$F_1 = F_2 = iaB$$



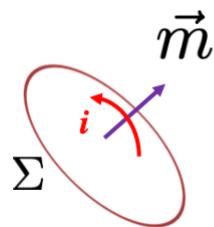
$$M = F_1 b \sin \vartheta = iabB \sin \vartheta = i\Sigma B \sin \vartheta$$

$$\bar{M} = i\Sigma \hat{u}_n \times \bar{B}$$



Dove \hat{u}_n è il versore ortogonale alla spira con verso orientato secondo la regola della mano destra rispetto al verso corrente. Si definisce **momento di dipolo magnetico** di una spira piana di superficie Σ percorso dalla corrente i come:

$$\bar{m} = i\Sigma \hat{u}_n$$



Con questa definizione il momento delle forze sulla spira piana nel campo magnetico diventa:

$$\bar{M} = \bar{m} \times \bar{B}$$

Con ciò si può concludere che la spira subisce un momento delle forze che la fa ruotare in modo da avere il momento magnetico parallelo al campo magnetico.

L'analogia tra dipolo elettrico e dipolo magnetico è incentivata dalla somiglianza delle azioni meccaniche eseguite sui due, infatti:

$$\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E}$$

$$\bar{M} = \bar{m} \times \bar{B}$$

In entrambi i casi:

$$M = -pE \sin \vartheta = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

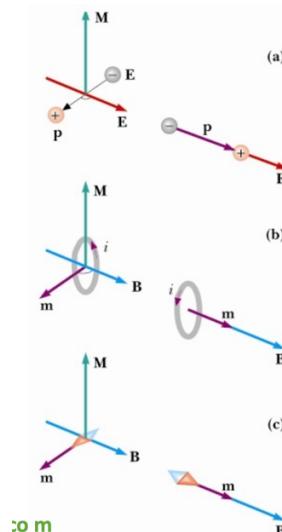
$$M = -mB \sin \vartheta = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

E per piccole oscillazioni, il relativo moto armonico ha periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB}}$$

Considerando anche che **un ago magnetico si comporta come una piccola spira** di momento dipolo magnetico m .



Sempre in analogia al caso del dipolo elettrico, è possibile **definire l'energia potenziale del dipolo magnetico** in un campo magnetico:

$$U_P = -\bar{m} \cdot \bar{B}$$

Dove:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = \bar{F} \cdot d\bar{l} + \bar{M} \cdot d\bar{\vartheta} = -dL$$

Di conseguenza:

$$\bar{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\bar{m} \cdot \bar{B})$$

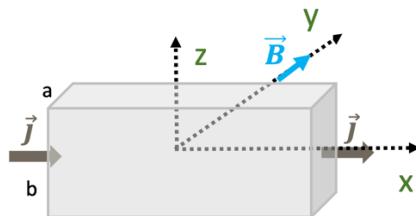
Che risulta essere una **quantità nulla se il campo magnetico è uniforme**, se il campo non è uniforme, il momento di dipolo magnetico **risente della forza**:

$$F = m \frac{dB}{dx}$$

Che tende a spostarlo nel verso in cui B aumenta. Per la **forza di Lorentz** non si può definire l'**energia potenziale** dal momento in cui essa **non fa lavoro**, mentre per la forza macroscopica che agisce sul conduttore si, perché è conservativa e fa lavoro.

EFFETTO HALL

Sia preso in considerazione un **conduttore a forma di nastro** sottile di sezione $\Sigma = ab$, dove $a \ll b$, e siano analizzati i **portatori di carica positivi**:



Dove la **densità di corrente** è:

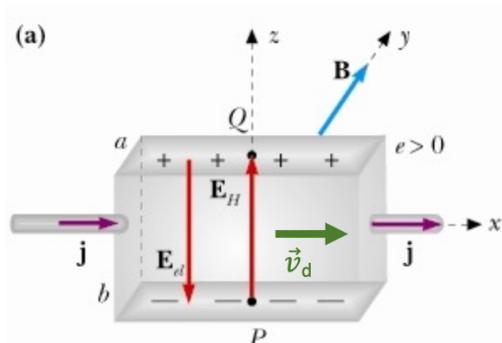
$$\bar{j} = ne\bar{v}_d = \frac{I}{ab} \hat{u}_x$$

Se è presente un campo magnetico ortogonale al verso della corrente, sui **portatori agisce la forza di Lorentz**:

$$\bar{F}_L = e\bar{v}_d \times \bar{B}$$

I portatori **migrano verso l'alto** seguendo le linee di un campo elettromotore (non conservativo, di origine magnetica), detto **campo di Hall**:

$$\bar{E}_H = \frac{\bar{F}_L}{e} = \bar{v}_d \times \bar{B}$$



Con la nascita del campo di Hall e la conseguente migrazione di cariche positive verso l'alto, si raggiunge un **equilibrio** solo con il **bilanciamento del campo elettrostatico**:

$$\bar{E}_{el} + \bar{E}_H = 0$$

Ciò significa che **tra le due estremità del nastro si genera una differenza di potenziale pari alla tensione del campo di Hall**:

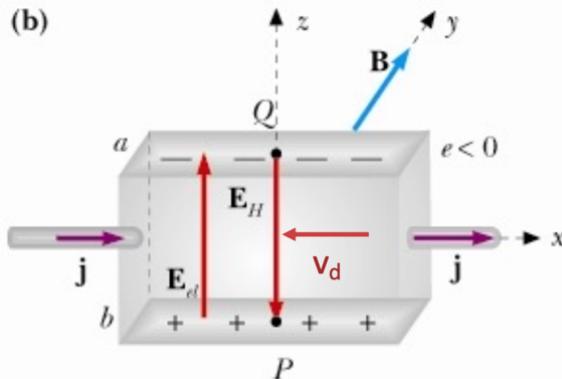
$$\xi_H = \int_P^Q \bar{E}_H \cdot d\bar{l} = E_H \int_P^Q d\bar{l} = E_H \overline{PQ} = E_H b = v_d B b = \frac{I}{neab} B b = \frac{IB}{nea} > 0$$

Questo ragionamento è stato sviluppato in funzione di **portatori** di carica positivi, per quelli **negativi** invece:

$$\bar{J} = n(-e)\bar{v}_d = n(-e)(-v_d)\hat{u}_x = \frac{I}{ab}\hat{u}_x$$

$$\bar{F}_L = (-e)\bar{v}_d^{neg} \times \bar{B}$$

$$\bar{E}_H = \frac{\bar{F}_L}{-e} = \bar{v}_d^{neg} \times \bar{B}$$



L'equilibrio elettrostatico verrà raggiunto cambiando la polarità del campo di Hall e del campo elettrostatico, che si genera dall'accumulo dei portatori sulla faccia alta del nastro. Anche in questo caso si sviluppa una **tensione di Hall** ma essa assumerà un **valore negativo**:

$$\xi_H = \int_P^Q \bar{E}_H \cdot d\bar{l} = -E_H \int_P^Q d\bar{l} = -E_H \overline{PQ} = -E_H b = -v_d B b = -\frac{I}{neab} B b = -\frac{IB}{nea} < 0$$

Misurando la polarità della tensione di Hall fra i due lati del nastro conduttore **si può capire se i portatori sono negativi o positivi**; ciò ha rappresentato l'**evidenza sperimentale** del fatto che **i portatori di carica sono negativi**.

L'effetto Hall si usa per costruire **sensori di campo magnetico** (le **sonde di Hall**), strumenti che misurano il campo magnetico B a partire dalla corrente I che scorre nel nastro e dalla tensione di Hall misurata.

MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO MAGNETICO

Sia considerato un **campo magnetico uniforme** dove le particelle che lo attraversano hanno **traiettoria ortogonale alle linee di campo**, quindi $\bar{v}_d \perp \bar{B}$. In queste condizioni, **anche la forza di Lorentz è ortogonale al campo**:

$$\bar{F} = q\bar{v}_d \times \bar{B}$$

La quale produce una **variazione della direzione della velocità**, che però risulta **essere sempre ortogonale alle linee di campo**. La **legge del moto**, quindi, è:

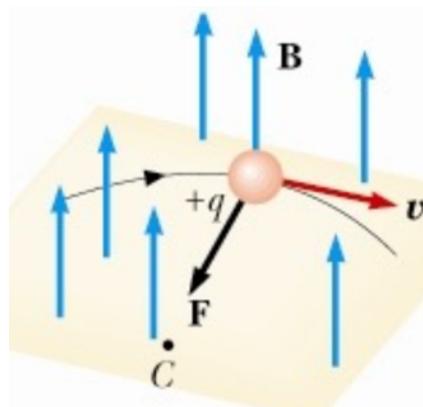
$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} = m\bar{a}$$

$$qvB \sin \frac{\pi}{2} = ma_n = m \frac{v^2}{r}$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

Da cui si può calcolare il **raggio di curvatura della traiettoria**:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$



Infatti, la **traiettoria** della particella deviata è un **arco di circonferenza di raggio r** , o una **circonferenza**, nel caso in cui resti sempre nella regione in cui è definito B . In tal caso il **moto circolare uniforme** ha velocità uguale a quella iniziale e velocità angolare pari a:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

$$v = v_d$$

In quantità vettoriali:

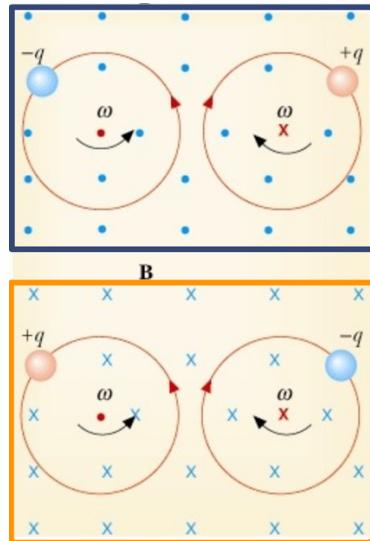
$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v}$$

Quindi la forza:

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} = m\bar{\omega} \times \bar{v} = -q\bar{B} \times \bar{v} = -m\bar{v} \times \bar{B}$$

Poiché la **velocità angolare** è indipendente dal valore dell'angolo, essa è o **parallela** o **antiparallela** a \bar{B} , a seconda della carica elettrica della particella.



Sebbene nella formula della velocità angolare sia menzionata la velocità, i due valori sono indipendenti; infatti, **r varia proporzionalmente a v** e il loro rapporto è costante, ciò significa che **il periodo del moto circolare uniforme non dipende dal raggio dell'orbita** e dalla velocità con cui essa viene descritta:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Si consideri sempre un **campo magnetico uniforme** ma con **angolo generico** tra la velocità e le linee di campo; tale moto prende il nome di **moto elicoidale** di una particella in un campo magnetico uniforme:

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$$

$$\bar{v} = \{v_n; v_p\} = \{v \sin \vartheta; v \cos \vartheta\}$$

Dove:

$$\bar{v}_n \perp \bar{B}$$

$$\bar{v}_p \parallel \bar{B}$$

Ciò significa che:

$$\bar{v}_p \times \bar{B} = 0$$

E cioè che **nella direzione di B non ci sono forze**, il **moto è rettilineo uniforme**. Al contrario, **nel piano ortogonale a B c'è la forza di Lorentz** che rende il **moto circolare uniforme**:

$$\bar{F} = q\bar{v}_n \times \bar{B}$$

Dove il **raggio di curvatura** è:

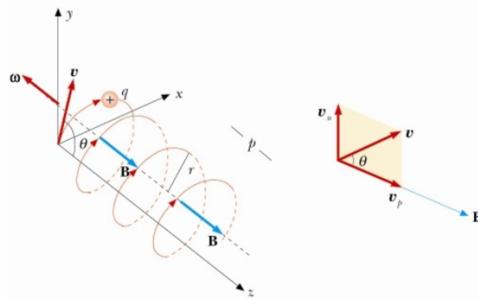
$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv \sin \vartheta}{qB}$$

Con **velocità angolare**:

$$\bar{\omega} = -\frac{q}{m} \bar{B}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

L'unione del moto rettilineo uniforme su un piano e del moto circolare uniforme su un altro rendono la **caratteristica elicoidale** di questo moto, dove l'asse è la direzione di B:



Si indica come **passo dell'elica** lo spostamento della particella in un periodo:

$$p_e = v_p T = \frac{2\pi m v \cos \vartheta}{qB}$$

Il verso di percorrenza dell'elica, fissato B, corrisponde al **verso del moto circolare** e quindi si può determinare con il metodo mostrato precedentemente.

Un utilizzo pratico di questo meccanismo si riscontra nello **spettrometro di massa**, un dispositivo che **separa le particelle della stessa carica ma con masse diverse**, ad esempio ioni di isotopi dello stesso elemento. Essi vengono **emessi da una sorgente ed accelerati da un campo elettrico uniforme**, che gli associa un'energia cinetica:

$$k = \frac{1}{2} mv^2 = qV$$

Dove la velocità:

$$v = \sqrt{\frac{q}{m} 2V}$$

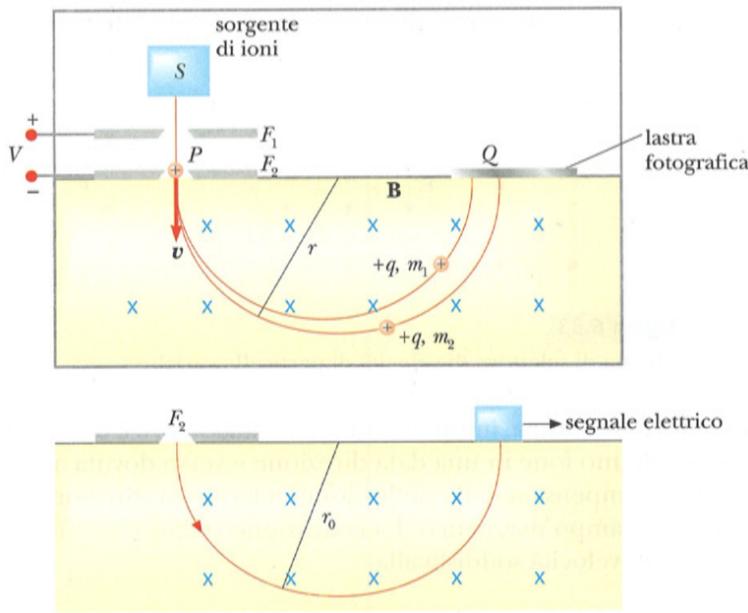
Ma gli ioni **curvano a causa della forza di Lorentz** $\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$:

$$r = \frac{m}{qB} v = \sqrt{\frac{m^2}{q^2 B^2} \frac{q}{m} 2V} = \sqrt{\frac{m}{q} \frac{2V}{B^2}}$$

Il rapporto delle masse non dipende né dal potenziale né dal campo magnetico:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

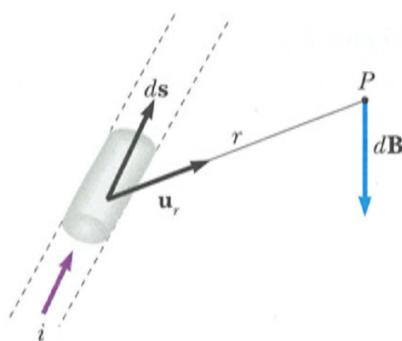
Quindi osservando il raggio di curvatura è possibile **distinguere le varie particelle in base alla massa**.



CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CORRENTE

Passando allo **studio delle sorgenti**, con le esperienze di Ampere è stato mostrato che **un filo percorso da corrente è una sorgente di campo magnetico \mathbf{B}** . Utilizzando il **principio di sovrapposizione**, si può pensare di **individuare in un piccolo pezzo di filo percorso da corrente una “sorgente elementare” di \mathbf{B}** , la cui legge sarà **teorica e non sperimentale** (non esiste nella realtà un piccolo pezzo di filo). La legge in questione è la **prima legge elementare di Laplace**, che afferma che **il contributo infinitesimo di campo magnetico $d\mathbf{B}$ prodotto da un tratto infinitesimo di filo ds percorso da corrente i in un punto P distante r dal filo è:**

$$d\bar{\mathbf{B}} = k_m i \frac{d\bar{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = k_m \frac{id s}{r^2} \hat{u}_t \times \hat{u}_r$$



Dove \hat{u}_r è il versore della direzione orientata da $d\bar{s}$ al punto P , \hat{u}_t il versore tangente al filo e k_m una costante che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo materiale (nel vuoto $10^{-7} \frac{Tm}{A}$):

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Da questa formula è possibile calcolare la **permeabilità magnetica del vuoto**:

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{Tm}{A}$$

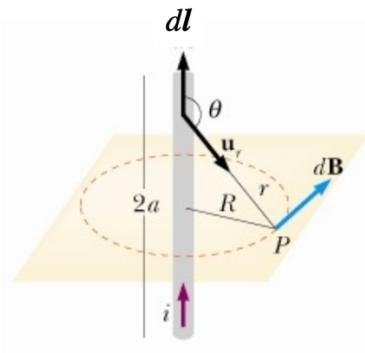
Questa quantità è legata alla costante dielettrica del vuoto, infatti $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. La **prima legge di Laplace** può essere scritta:

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\bar{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \hat{u}_t \times \hat{u}_r$$

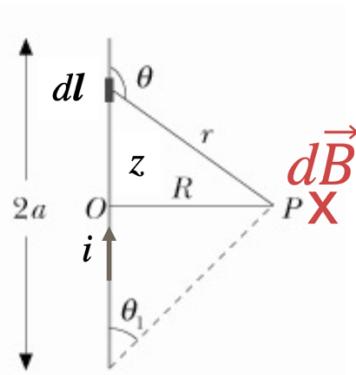
È possibile dire che **il campo magnetico elementare di un tratto infinitesimo di circuito risulta proporzionale alla corrente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza**, in una formulazione simile a quella del campo elettrico. L'orientamento di \mathbf{B} è legato al **verso della corrente**, cioè al **versore \hat{u}_t** e lo si determina con la **regola della vite destrogiro** o con la **regola della mano destra**.

Con la legge di Laplace si può calcolare il **campo prodotto da un filo rettilineo** di lunghezza $L = 2a$. Nel piano ortogonale al filo passante per il suo punto medio:

$$\bar{B} = \int_0^L d\bar{B} = \int_0^L \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\bar{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$



Tale legge prende il nome di **legge di Ampere-Laplace**. Usando il **principio di sovrapposizione** per integrare lungo tutto il filo, si può affermare che **tutti i contributi si sommano perché il campo magnetico è sempre entrante**:



Il modulo del campo magnetico vale:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} \sin \vartheta \, dl$$

Poiché:

$$r \sin \vartheta = R$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2}$$

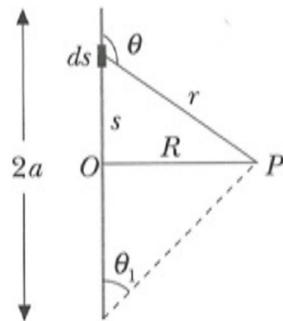
E:

$$\frac{R}{a} = \tan(\pi - \vartheta)$$

Allora:

$$dl = d(R \cot(\pi - \vartheta))d\vartheta = \frac{R d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

Andando a considerare anche l'angolo interno opposto all'angolo finora considerato:



$$\cos \vartheta = -\cos \vartheta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

Sostituendo nell'integrazione precedente:

$$\begin{aligned} B = \int_0^L dB &= \int_{-a}^a \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \sin \vartheta dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2} \sin \vartheta \frac{R d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} [-\cos \vartheta]_{\vartheta_1}^{\vartheta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} 2 \cos \vartheta = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \end{aligned}$$

Considerando il risultato dal punto di vista vettoriale:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \hat{u}_t$$

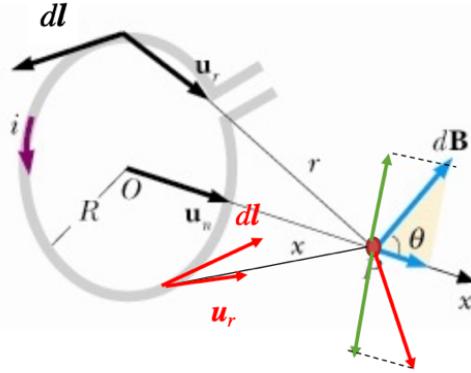
Se il filo è infinitamente lungo, oppure per $a \gg R$, si ha che $\vartheta \rightarrow \pi$ e si ottiene (**sperimentalmente**) la legge di Biot-Savart:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_t$$

Il campo magnetico di un filo finito può essere **calcolato anche a partire dalla legge di Ampere**, che risulta molto **più semplice ed intuitivo** del metodo mostrato di sopra.

Considerando una **spira circolare di raggio R percorsa da una corrente i** , è possibile calcolare il campo magnetico sul suo asse con la prima legge di Laplace:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl$$



Dove le componenti x si sommano e quelle trasversali si elidono a due a due, infatti:

$$d\bar{l} \perp \hat{u}_r$$

La componente lungo x è:

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl \cos \vartheta$$

Integrando:

$$\bar{B} = \oint \frac{\mu_0 i \cos \vartheta}{4\pi r^2} \hat{u}_n dl = \frac{\mu_0 i \cos \vartheta}{4\pi r^2} \left(\oint dl \right) \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i \cos \vartheta}{4\pi r^2} 2\pi R \hat{u}_n$$

Dove:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\cos \vartheta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Poiché **B ha lo stesso verso in tutti i punti dell'asse**:

$$\bar{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_n$$

Si può concludere che, poiché il campo magnetico sull'asse è inversamente proporzionale alla distanza dalla spira, in posizione $x = 0$ (cioè al centro della spira stessa) il campo magnetico ha il suo valore massimo:

$$\bar{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_n$$

Mentre all'allontanamento dalla spira tende a zero:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{B}(x) \rightarrow 0$$

Diversamente, se $x \gg R$:

$$\bar{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \hat{u}_n$$

Questa quantità può essere espressa anche in funzione del **momento magnetico della spira**:

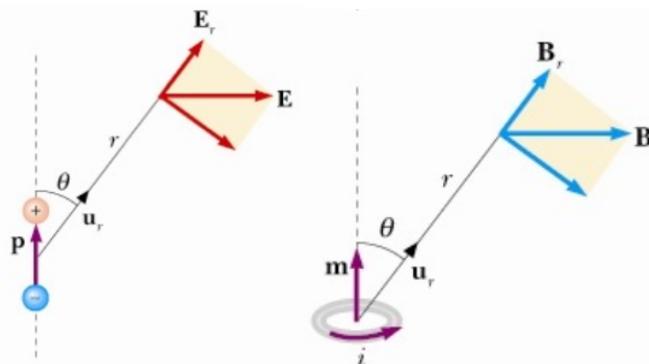
$$\bar{m} = i \Sigma \hat{u}_n = i \pi R^2 \hat{u}_n$$

$$\bar{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i 2\pi R^2}{4\pi x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\bar{m}}{x^3}$$

Da cui si può apprezzare un'ulteriore **analogia con il dipolo elettrico**, infatti:

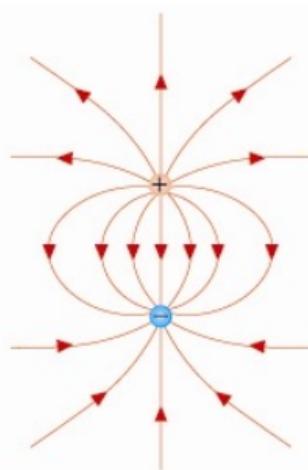
$$\bar{E}(x) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\bar{p}}{x^3}$$

L'analogia non vale solo sui punti dell'asse ma **in qualsiasi punto dello spazio**:

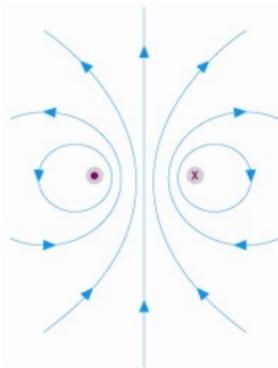


Tuttavia, i due fenomeni non possono essere completamente sovrapposti, infatti esistono alcune **differenze**:

- Nel **campo elettrostatico** le linee di forza escono ed entrano nelle cariche sorgenti



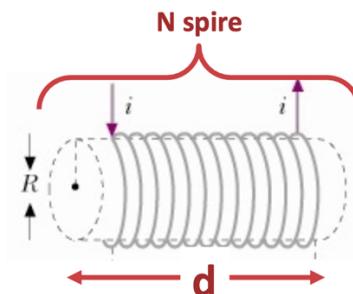
- Nel **campo magnetico** le linee sono chiuse, senza inizio e senza fine



Questo risultato non è legato al caso particolare ma ai due campi, infatti **la prima configurazione va in accordo con la circuitazione del campo elettrico** (che è diversa da zero) mentre **la seconda con la circuitazione del campo magnetico** (che è pari a zero).

Un **solenoido rettilineo** è un dispositivo costituito da un **filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo**; se l'avvolgimento è abbastanza fitto, il solenoide si può considerare distribuito in continuità, quindi come **tante piccole spire affiancate** dove nel tratto dx ci sono ndx spire (n è la densità di spire). Il **valore del campo magnetico** in un punto P sull'asse si calcola con la formula del campo di ndx spire percorse dalla corrente i , mentre **la direzione è parallela all'asse x e il verso dipende da quello della corrente** (regola della vite destrogiro):

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx$$

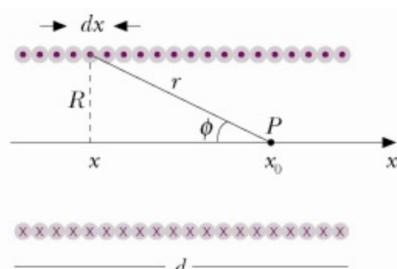


Per esprimere questa formula in funzione dell'angolo di inclinazione da una spira del solenoide si può considerare:

$$R = r \sin \phi$$

$$x - x_0 = -R \cot \phi$$

$$dx = \frac{R d\phi}{\sin^2 \phi}$$

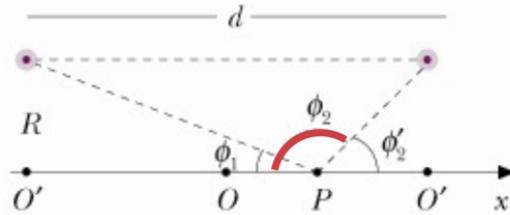


Quindi il **campo magnetico**:

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx = \frac{\mu_0 ni}{2} \sin \phi \, d\phi$$

Integrando tra gli angoli ϕ_1 e ϕ_2 , considerando che $\phi_2 = \pi - \phi'_2$:

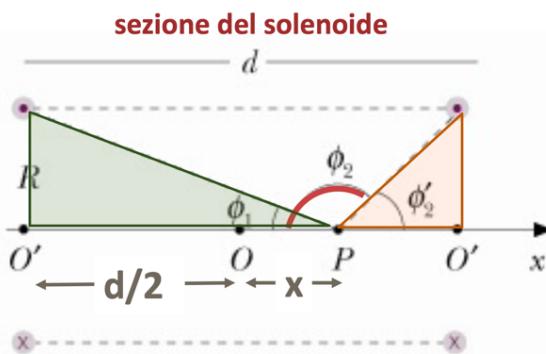
$$B = \frac{\mu_0 ni}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi \, d\phi = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi'_2)$$



Misurando x (OP) rispetto al centro del solenoide:

$$\frac{d}{2} + x = \left(\sqrt{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + R^2} \right) \cos \phi_1$$

$$\frac{d}{2} - x = \left(\sqrt{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + R^2} \right) \cos \phi'_2$$



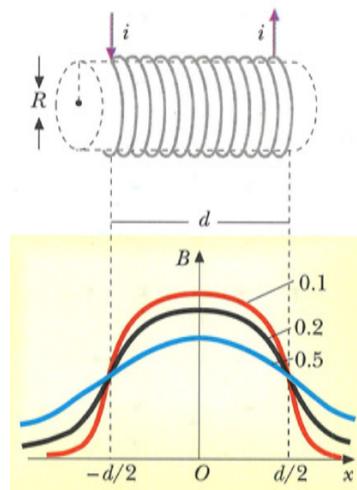
Di conseguenza il campo può essere riscritto:

$$B(x) = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi'_2) = \frac{\mu_0 ni}{2} \left(\frac{d + 2x}{\sqrt{(d + 2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d - 2x}{\sqrt{(d - 2x)^2 + 4R^2}} \right)$$

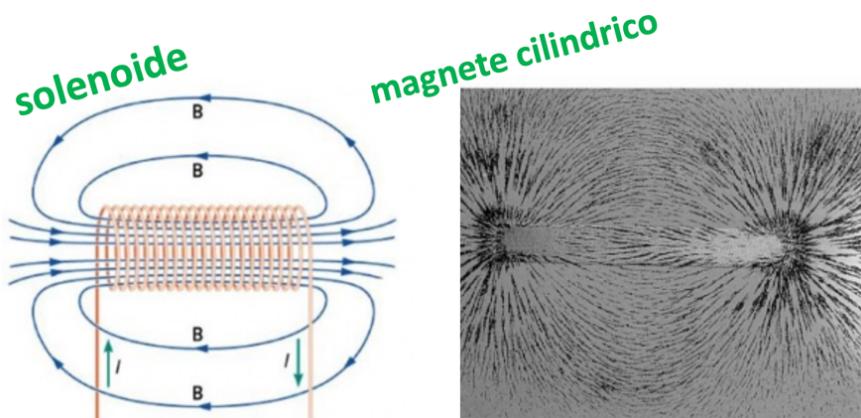
Avendo la legge del campo magnetico in funzione della distanza dal centro, è possibile affermare che esso ha il suo **valore massimo** quando il punto in considerazione è al **centro del solenoide**, quindi $x = 0$, infatti:

$$B(0) = \frac{\mu_0 ni}{2} \left(\frac{2d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \right)$$

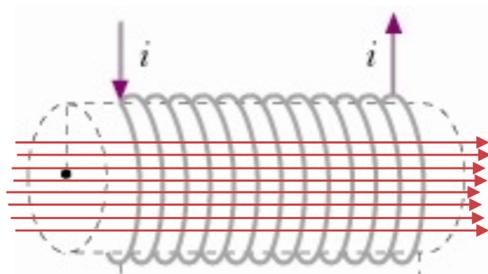
Ma nella valutazione del solenoide anche **il rapporto tra il raggio della spira R e la lunghezza d** ha la sua importanza, infatti **più il solenoide è stretto e lungo e più si avvicina alla condizione ideale** in cui all'esterno il campo è nullo e all'interno uniforme e indipendente da x :



Osservando le **linee di campo** di un **solenoido rettilineo uniforme** si può notare che esse sono simili a quelle di un **magnete cilindrico**:



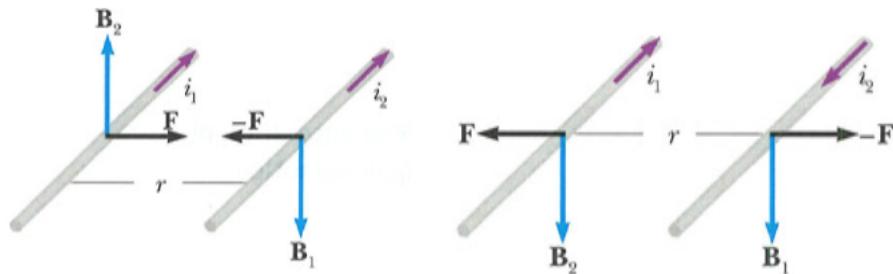
Ma quando si va a considerare la **condizione ideale** (**solenoido rettilineo infinito, $d \gg R$**) tale similitudine cessa, perché **all'esterno il campo sarebbe nullo e all'interno uniforme**:



In questo caso gli **angoli** precedentemente individuati vanno a tendere a **0** e i relativi **coseni ad 1**:

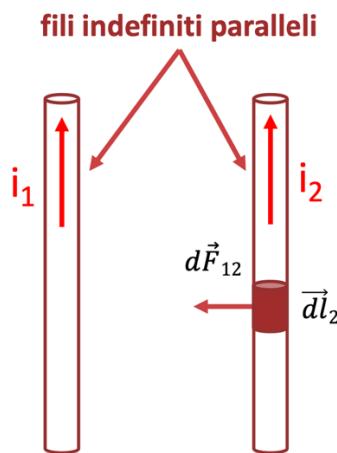
$$\phi_1 = \phi'_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \phi_1 = \cos \phi'_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi'_2) = \mu_0 n i$$

Si prenda in considerazione la configurazione mostrata nell'**esperienza di Ampere**, quindi **due fili affiancati parallelamente percorsi da corrente**. Ampere mostrò come **ognuno dei due fili percepisce la forza del campo magnetico dell'altro** in base al verso della corrente:



Il ragionamento può essere sviluppato a partire da una **porzione infinitesima di filo**, la quale risentirà di una **forza infinitesima**:

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 d\vec{l}_2 \hat{u}_2 \times \vec{B}_1$$



Dove \hat{u}_2 è il versore parallelo al verso della corrente. Calcolando la **forza per unità di lunghezza**:

$$\bar{F}_{12} = i_2 \hat{u}_2 \times \bar{B}_1$$

E sostituendo il campo magnetico con la **legge di Biot-Savart** (dove r è la distanza tra i due fili):

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$

Lungo tutto il filo:

$$F = F_{12}d$$

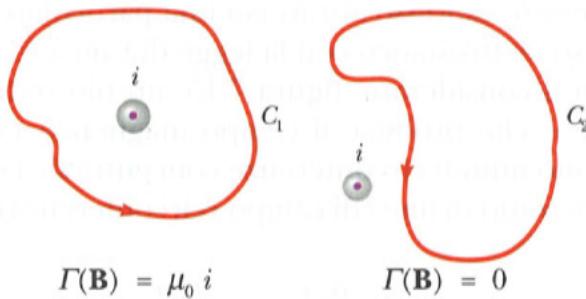
Con questa esperienza, Ampere è riuscito a dare una **definizione operativa della corrente**: si definisce **1A la corrente che passa tra due fili rettilinei paralleli distanti 1m che da luogo ad una forza $F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} N$** . Con questa definizione si fissa il valore della **permeabilità magnetica** a:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

LA LEGGE DI AMPERE E LA LEGGE DI GAUSS

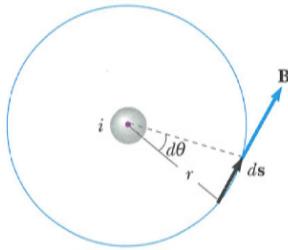
Così come avviene per la legge di Gauss e il campo elettrostatico, è possibile **definire una legge integrale che metta in relazione le correnti e il campo magnetico da esse prodotto**, la legge di Ampere. Essa afferma che **la circuitazione del campo magnetico** (cioè l'integrale di linea lungo un circuito chiuso) è **pari alla somma algebrica delle correnti concatenate** (con verso positivo se con il campo magnetico concordano la regola della vite destrogira) **moltiplicata per la permeabilità magnetica**:

$$\Gamma(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k$$



Si consideri un **filo rettilineo indefinito** su cui scorre una **corrente che produce un campo magnetico** con circonferenze concentriche come linee di campo. Il valore del campo sarà dato dalla **legge di Biot-Savart**:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_t$$



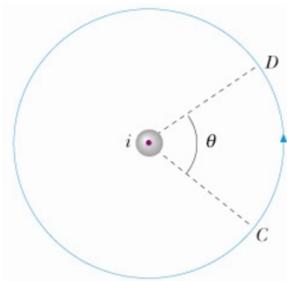
Mentre lo **spostamento infinitesimo**:

$$dl = rd\vartheta$$

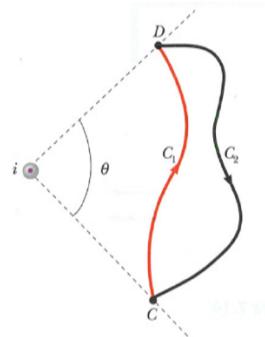
Calcolando la **circuitazione**:

$$\Gamma(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} d\vartheta$$

Prendendo in considerazione un **arco di circonferenza di angolo ϑ** , si può notare che **l'integrale di linea non dipende dal particolare percorso ma solo dall'angolo**:



$$\int_C^D \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\vartheta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta \quad \int_D^C \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\vartheta = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta$$



Per fare la circuitazione si distinguono due casi:

- **La linea chiusa concatena il filo**

In questo caso il verso di percorrenza è **sempre orario o sempre antiorario**, la circuitazione non cambia verso e **i contributi si sommano sempre**:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\vartheta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$



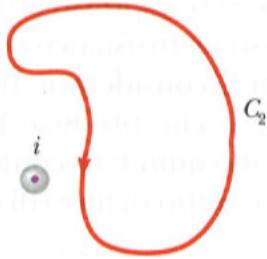
- **La linea chiusa non concatena il filo**

In questo caso si rientra nella situazione mostrata in precedenza, quindi si possono individuare **due punti** per cui:

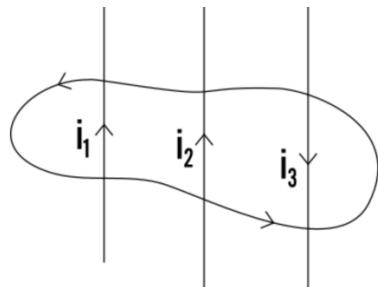
$$\int_C^D \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\vartheta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta \quad \int_D^C \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\vartheta = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta$$

E la **circuitazione** è:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \vartheta = 0$$



Che dimostra la **legge di Ampere**. Le correnti concatenate devono essere **prese col segno positivo o negativo** a seconda che vedano **circolare intorno a sé la linea** (rispettivamente) **in senso antiorario o orario**. Se la concatenazione di una corrente è multipla, la somma dovrà considerare ogni concatenazione.

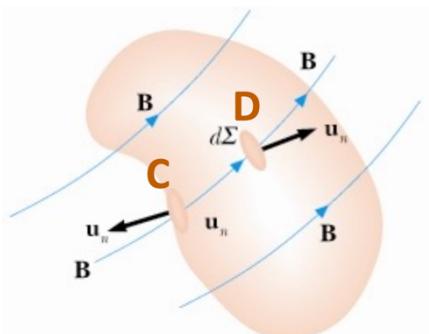


$$\Gamma(\bar{B}) = \mu_0(i_1 + i_2 - i_3)$$

Si può notare che nel caso statico, **la circuitazione del campo elettrico è sempre 0**, che permette l'**esistenza di un potenziale elettrostatico** definito in tutto lo spazio; per il **campo magnetico la circuitazione è (di base) diversa da 0**, quindi **non esiste un potenziale scalare "magnetostatico"** definibile in maniera univoca in tutto lo spazio.

In precedenza è stata dimostrata la **legge di Gauss sul flusso del campo elettrico** ma è possibile applicarla anche al campo magnetico, con un risultato leggermente diverso. Secondo la legge, **il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa ha un valore indipendente dalla superficie in esame**; per il campo magnetico, l'assenza di un'evidenza sperimentale di monopoli magnetici implica che **il flusso attraverso una superficie chiusa sia sempre nullo**:

$$\phi(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS = 0$$



Infatti **il campo magnetico è un campo solenoidale**, cioè le linee di campo sono sempre chiuse e tutto il flusso entrante in una superficie sarà sempre bilanciato da un flusso uscente.

ELETTROMAGNETISMO

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Nel **1861 J.C. Maxwell** effettuò un lavoro di **interpretazione di tutti i fenomeni elettrici e magnetici** fino ad allora noti, a cui seguirono diverse pubblicazioni che portarono all'**unificazione delle due teorie** e al raggruppamento di quattro leggi fondamentali su cui si basano tutti i fenomeni descritti finora, le **leggi di Maxwell**. Considerando i campi stazionari nel tempo:

Legge	Descrizione	Formula
Legge di Gauss per E	Il flusso di E da una superficie chiusa dipende dalle cariche sorgenti contenute all'interno	$\phi(\bar{E}) = \oint \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{q^{int}}{\epsilon_0}$
Circuitazione di E	E è un campo conservativo e la sua circuitazione è nulla	$\Gamma(\bar{E}) = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$
Legge di Gauss per B	Il flusso di B da una superficie chiusa è sempre nullo	$\phi(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS = 0$
Legge di Ampere	La circuitazione di B dipende dalle correnti sorgenti concatenate	$\Gamma(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{conc}$

Quelle analizzate finora sono le **uniche possibili interazioni tra campi elettrici e magnetici statici nel tempo**; tuttavia, gli **esperimenti** condotti da **Faraday** in Inghilterra e da **Henry** negli USA misero in evidenza un'ulteriore connessione tra i due fenomeni: essi rilevarono che **un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo** che in opportuni dispositivi può dare luogo ad una **forza elettromotrice** e ad una **corrente** in un circuito chiuso. Successivamente **Maxwell dimostrò che un campo elettrico variabile nel tempo da origine ad un campo magnetico**, da cui si giunse alla conclusione che **il campo elettrico e il campo magnetico variabili nel tempo non possono esistere indipendentemente l'uno dall'altro, ma coesistono sotto il concetto più generale di campo elettromagnetico**. Come conseguenza della soluzione delle omonime equazioni, Maxwell rilevò anche che **il campo elettromagnetico si può propagare con velocità pari a quella della luce**, pertanto si giunse a conclusione che esso **si presenta e si propaga come un'onda**.

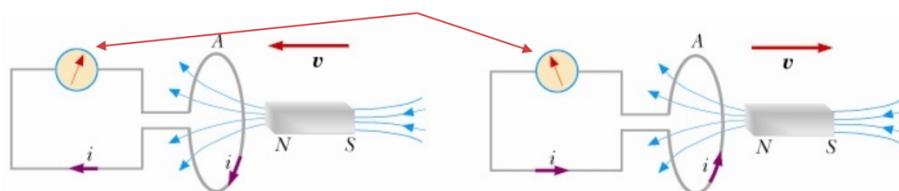
L'**energia potenziale**, finora definita solo per il campo elettrico conservativo, **si può definire anche per il campo magnetico** ma solo sotto opportune ipotesi, ovvero **solo nelle regioni in cui vi è assenza di correnti elettriche**; infatti, in tale situazione, **il rotore del campo è nullo** ($\bar{\nabla} \times \bar{B} = 0$) e l'**energia potenziale può essere definita come il lavoro della forza magnetica** (cioè del momento meccanico) **nel ri-allineare il momento di dipolo magnetico**.

Per quanto riguarda le equazioni di Maxwell nel caso di campi non stazionari nel tempo, le due leggi di Gauss non perdono la loro veridicità, **il flusso dei due campi è lo stesso sia se cambiano sia se non cambiano nel tempo**; per quanto riguarda le circuitazioni, lo studio effettuato da Faraday e da Henry condusse a catena altre ricerche, le quali portarono alla scoperta di due nuove formulazioni che si adattano al caso dinamico. Di conseguenza **le equazioni di Maxwell nel caso dinamico sono:**

Legge	Descrizione	Formula
Legge di Gauss per E	Il flusso di E da una superficie chiusa dipende dalle cariche sorgenti contenute all'interno	$\phi(\bar{E}) = \oint \bar{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{q^{int}}{\epsilon_0}$
Legge di Faraday-Neumann-Lenz	La circuitazione di E è pari all'opposto della variazione nel tempo del flusso B lungo qualsiasi superficie che si appoggia al circuito	$\Gamma(\bar{E}) = \oint \bar{E}_i \cdot d\bar{l} = -\frac{d\phi(\bar{B})}{dt}$
Legge di Gauss per B	Il flusso di B da una superficie chiusa è sempre nullo	$\phi(\bar{B}) = \oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS = 0$
Legge di Ampere-Maxwell	La circuitazione di B dipende dalle correnti sorgenti concatenate, siano esse di conduzione che di spostamento	$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi(\bar{E})}{dt} \right)$

LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN LENZ

Sia considerata una **spira A** di filo conduttore legata ad un circuito con un galvanometro a zero centrale. Si può notare che, avvicinando un magnete alla spira, il galvanometro segna un valore diverso da zero, mentre se il magnete è allontanato il valore segnato cambia di segno; tuttavia, quando il magnete è fermo l'indicatore del galvanometro non segnala alcuno spostamento. Questo stesso effetto **si verifica anche nel caso in cui a muoversi sia il circuito con la spira A o se è un secondo circuito con una spira A' connessa ad un generatore di corrente.**



Da queste esperienze si può osservare una corrente "indotta" in un circuito quando vi è un moto relativo tra il circuito stesso ed una fonte di campo magnetico ma, poiché secondo la legge di Ohm una corrente in un circuito chiuso si può produrre solo grazie ad una forza elettromotrice, tale corrente è prodotta da una forza elettromotrice "indotta" generata dal moto stesso.

Da questa esperienza nasce la **legge di Faraday-Neumann-Lenz**, la quale afferma che **la variazione di flusso del campo magnetico nel tempo genera una forza elettromotrice indotta**:

$$\xi_i = -\frac{d\phi(\bar{B})}{dt}$$

Se R è la resistenza del circuito:

$$i_i = \frac{\xi_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi(\bar{B})}{dt}$$

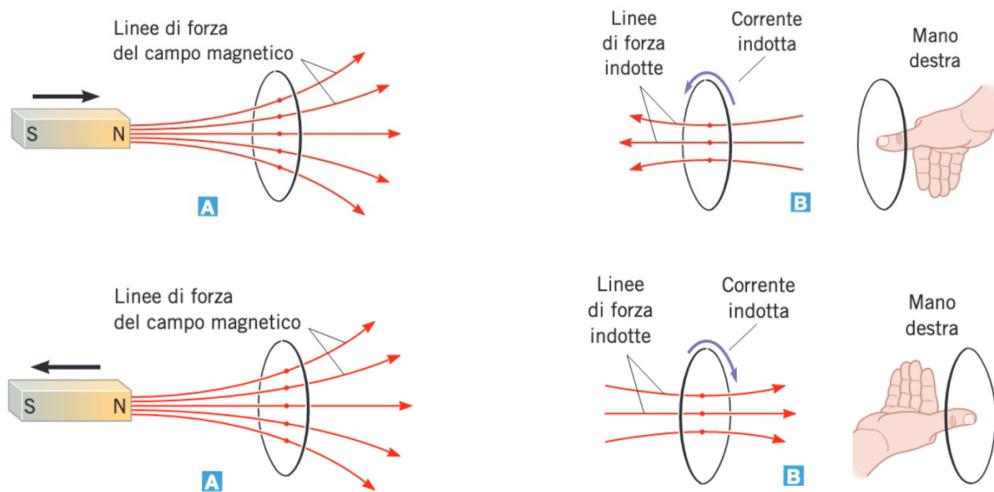
La conseguenza principale del fenomeno è la **forza elettromotrice**, la corrente è un effetto **secondario** che dipende anche dalla presenza di una resistenza.

Con la definizione di forza elettromotrice si può giungere anche alla **formulazione della circuitazione del campo elettrico indotto**, infatti:

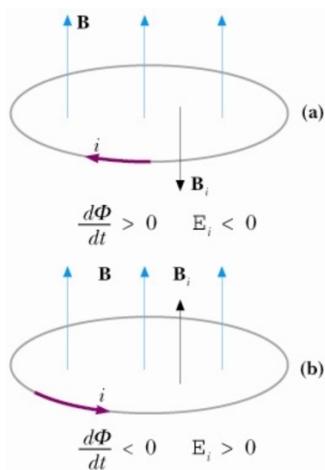
$$\xi_i = \oint \bar{E}_i \cdot d\bar{l} = - \frac{d\phi(\bar{B})}{dt}$$

Si può concludere dicendo che la **variazione di flusso del campo magnetico produce anche un campo elettrico indotto** la cui **circuitazione non è nulla**, ciò significa che tale campo non è conservativo.

La legge prende il nome di tre fisici: **Faraday**, che fu colui a scoprire questo fenomeno ma non diede mai una formulazione scientifica al fenomeno per ragioni ideologiche (pensava che tutti dovessero essere in grado di comprendere la fisica e non voleva usare formule per escludere gli ignoranti), **Neumann**, che diede una formulazione rigorosa alla legge, e **Lenz**, che aggiunse il **segno meno** per indicare l'opposizione della forza elettromotrice alla causa che ha generato il fenomeno (possono essere varie, infatti la derivata è totale) e la tendenza all'equilibrio:



Infatti, la **forza elettromotrice indotta produce una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni di flusso; senza considerare tale opposizione, la legge avrebbe violato il principio di conservazione dell'energia**:



È possibile calcolare la **carica complessiva** che scorre sotto l'azione di una **forza elettromotrice indotta** come la **variazione complessiva di flusso del campo magnetico in rapporto alla resistenza**:

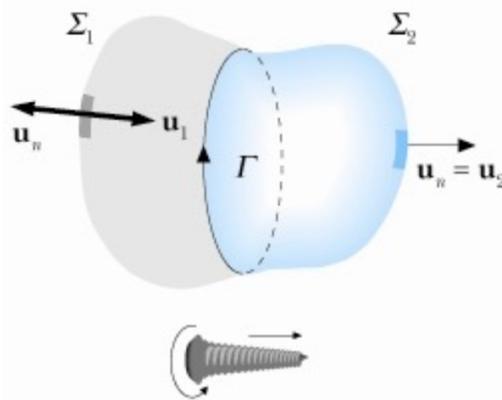
$$\Delta Q = \frac{1}{R} (\phi_1(\bar{B}) - \phi_2(\bar{B}))$$

Questo risultato, che prende il nome di **legge di Felici**, deriva dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz; infatti, partendo dalla definizione di corrente:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{R} \frac{d\phi(\bar{B})}{dt} dt = \int_{\phi(\bar{B})_1}^{\phi(\bar{B})_2} -\frac{1}{R} d\phi(\bar{B}) = -\frac{1}{R} \int_{\phi(\bar{B})_1}^{\phi(\bar{B})_2} d\phi(\bar{B}) \\ &= -\frac{1}{R} (\phi_2(\bar{B}) - \phi_1(\bar{B})) = \frac{1}{R} (\phi_1(\bar{B}) - \phi_2(\bar{B}))\end{aligned}$$

CAMPI SOLENOIDALI E LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL

Un **campo** si dice **solenoidale** se il suo **flusso lungo una qualsiasi superficie chiusa è nulla**; il **campo magnetico** e il **vettore densità di corrente nel caso stazionario \bar{J}** sono esempi visti in precedenza di campo solenoidale (come evidenziato dalla legge di Kirchoff sui nodi). Sia considerata una **curva chiusa Γ** , con un proprio verso di percorrenza, e **due superfici arbitrarie Σ_1 e Σ_2 che abbiano Γ come bordo**; il verso della curva definisce i vettori normali alle due superfici. Considerata l'**unione delle due superfici $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$** , il **vettore normale dovrà essere necessariamente uscente** (perché la superficie è chiusa), quindi sarà **concorde ad uno solo dei due vettori normali rilevati dalla curva**:



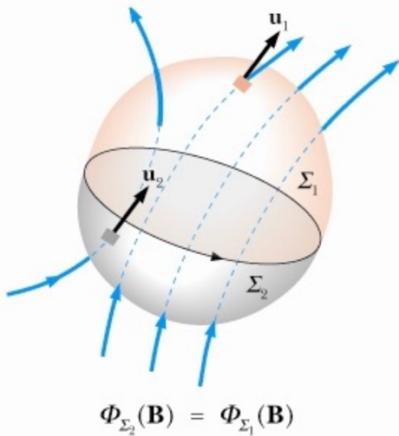
$$-\bar{u}_1 = \bar{u}_n = \bar{u}_2$$

Si calcoli il **flusso di B attraverso la chiusa Σ** :

$$\int_0^{\Sigma=\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS = \int_0^{\Sigma_1} \bar{B} \cdot (-\hat{u}_1) dS + \int_0^{\Sigma_2} \bar{B} \cdot \hat{u}_2 dS = - \int_0^{\Sigma_1} \bar{B} \cdot \hat{u}_1 dS + \int_0^{\Sigma_2} \bar{B} \cdot \hat{u}_2 dS = 0$$

Risultato a cui si poteva giungere intuitivamente visto che la configurazione sviluppata è tipica di un campo solenoidale; tuttavia, **da questa dimostrazione si può dedurre che in un campo solenoidale si può parlare univocamente di "flusso concatenato" ad una linea chiusa**, perché tale flusso è lo stesso qualunque sia la superficie considerata che abbia come bordo la curva:

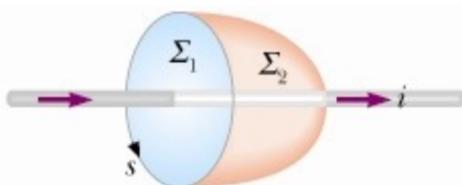
$$\int_0^{\Sigma_1} \bar{B} \cdot \hat{u}_1 dS = \int_0^{\Sigma_2} \bar{B} \cdot \hat{u}_2 dS$$



Questa proprietà è stata già sfruttata, inconsapevolmente, nella legge di Faraday-Neumann-Lens: non ci si preoccupa della superficie che si appoggia sulla linea chiusa del circuito dove nasce la forza elettromotrice indotta perché essa non disturba il flusso.

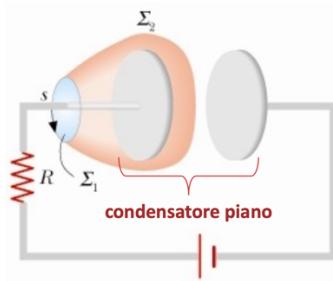
In concordanza con quanto appena detto, **il campo magnetico B nel vuoto soddisfa la legge di Ampere**, infatti:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 i_c$$



Dove i_c è la corrente di conduzione concatenata alla linea chiusa s su cui viene effettuato il calcolo della circuitazione; se si applica la legge di Ampere lungo s , per il calcolo della corrente concatenata si possono prendere in considerazione sia Σ_1 che Σ_2 , entrambe aventi s come bordo, in quanto la corrente i_c che li attraversa è la stessa. Ciò equivale a dire che la legge di Ampere vale quando, presa una superficie chiusa qualunque, l'intensità di corrente di conduzione i_c che entra è uguale all'intensità di corrente di conduzione i_c che esce, ovvero ci si ritrova in una condizione di stazionarietà.

Applicando la legge ad un circuito nel quale **un generatore sta caricando un condensatore piano**, si giunge ad un **paradosso**: fissata una linea s che concatena il filo, la circuitazione di B nella superficie Σ_1 , che incontra il filo, segue la legge di Ampere ma in Σ_2 , che non incontra il filo, è nulla; ciò significa che, **considerando la superficie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, la condizione di stazionarietà non è più rispettata per la corrente concatenata, che entra ma non esce**.



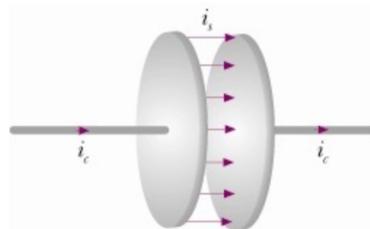
Così come è scritta, **la legge di Ampere non vale nel caso non stazionario** perché manca la condizione di stazionarietà:

$$\sum i_c = \int_0^{\Sigma_c} \bar{J} \cdot \hat{u}_n dS = 0$$

Parlando del processo di carica e scarica del condensatore, è stato ammesso che **la corrente $i(t)$ circolasse ovunque, anche tra le due armature dove si trova un mezzo isolante nel quale non può circolare corrente di conduzione**; nonostante ciò, **sulle armature del condensatore** durante la carica e la scarica **si rileva una variazione di carica nel tempo** (positiva ed entrante su un'armatura e negativa e uscente sull'altra) **che viene definita di corrente di spostamento**. Questa corrente dipende direttamente dalla variazione di campo elettrico all'interno del condensatore:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\phi(\bar{E})}{dt}$$

Ciò significa che **la corrente che attraversa questo circuito è di conduzione nei fili e di spostamento tra le armature del condensatore**:



Il termine, coniato da Maxwell, non deve trarre in inganno: **la corrente di spostamento non è legata ad alcun movimento di carica** perché la seconda armatura del condensatore si carica per induzione. È possibile aggiornare la legge di Ampere per includere il caso non stazionario e completare il quadro delle equazioni di Maxwell: **tra le correnti concatenate non vanno indicate solo quelle di conduzione ma anche quelle di spostamento**; in questo modo al secondo membro si potrà avere un termine che ricorda la legge nel caso stazionario ma che contempla anche il caso opposto.

La **legge di Ampere-Maxwell** si configura come:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\phi(\bar{E})}{dt} \right)$$

Questa legge completa anche il discorso fatto in precedenza riguardo i campi che si generano reciprocamente quando essi variano nel tempo: è stato già mostrato come la variazione di campo magnetico produca campo elettrico con la legge di Faraday-Neumann-Lenz, ma con la questione appena risolta si mostra anche come **la variazione di campo elettrico produca campo magnetico**.

Le due leggi menzionate non sono completamente scollegate, infatti supponendo che non ci siano correnti di conduzione ma che ci siano variazioni di campo elettrico nel tempo, allora la circuitazione di \mathbf{B} diventa:

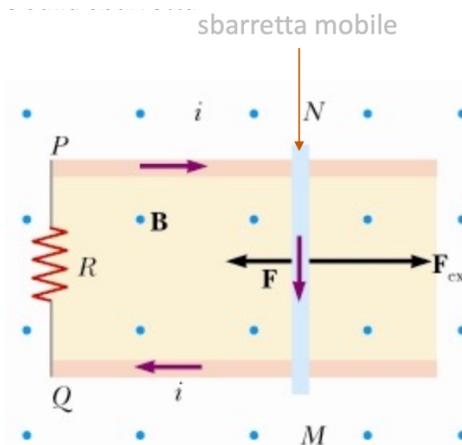
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi(\bar{E})}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\phi(\bar{E})}{dt} \approx - \frac{d\phi(\bar{B})}{dt} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Infatti:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI FARADAY

Sia preso in considerazione un circuito rettangolare, dove un lato è costituito da una sbarra conduttrice di lunghezza b mobile, che viene immerso perpendicolarmente in un campo magnetico uniforme e costante. Supponendo che la sbarra si muova di moto traslatorio con velocità v , si calcola la forza che agisce su di essa.



La **forza elettromotrice indotta** e la **superficie variabile della spira individuata dalla sbarra** saranno:

$$\xi_i = \oint \bar{E}_i \cdot d\bar{l} = - \frac{d\phi(\bar{B})}{dt}$$

$$S = bx(t) = bvt$$

Poiché il campo elettrico è parallelo al versore normale, il **flusso del campo magnetico** sarà:

$$\phi(\bar{B}) = \bar{B} \cdot \hat{u}_n S = BS = Bbvt$$

Dalla quale è possibile avere una stima più accurata della **forza elettromotrice** indotta:

$$\xi_i = - \frac{d\phi(\bar{B})}{dt} = -Bbv$$

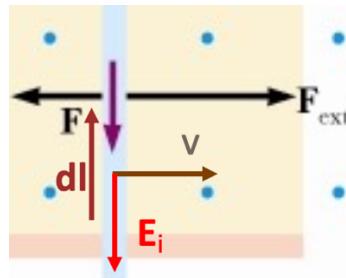
Applicando la legge di Ohm, sapendo che R è la resistenza esterna e r la resistenza della sbarretta mobile poste in serie:

$$i = \frac{\xi_i}{r + R} = -\frac{Bbv}{r + R}$$

Sui portatori di carica agisce un campo elettromotore generato dalla forza di Lorentz:

$$\bar{F}_L = q\bar{v} \times \bar{B}$$

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_L}{q} = \bar{v} \times \bar{B}$$



Questo risultato conferma quanto già detto sulla forza elettromotrice, infatti:

$$\xi_i = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = -Bbv$$

Inoltre, la corrente è oraria ma la circuitazione antioraria; infatti, i due vettori $d\bar{l}$ e \bar{E}_i hanno verso opposto. Calcolando la forza magnetica che agisce sulla sbarra con la seconda legge di Laplace:

$$\bar{F} = i\bar{b} \times \bar{B} = -\frac{B^2 b^2 \bar{v}}{r + R}$$

Questa forza ha modulo proporzionale alla velocità ma verso opposto al moto della sbarretta; infatti, il campo magnetico da un lato genera corrente e dall'altro una forza resistente di tipo viscoso, comunemente chiamata resistenza di attrito elettromagnetico. Per contrastare questa resistenza bisogna applicare una forza eguale e contraria a F , la cui potenza meccanica viene ritrovata integralmente sotto forma di potenza elettrica spesa per effetto Joule:

$$P = \bar{F}_{ex} \cdot \bar{v} = \frac{B^2 b^2 v^2}{r + R} = \xi_i i = (r + R)i^2$$

Il sistema può integralmente essere interpretato come un generatore in cui la potenza erogata proviene da una forza meccanica esterna, dove r è la resistenza interna al generatore e R la resistenza esterna.

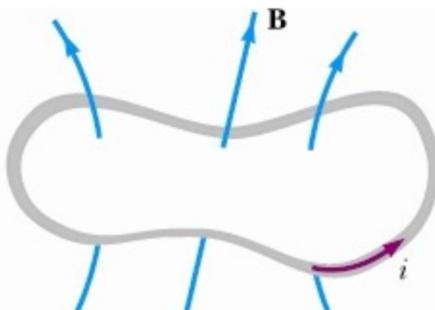
Se la forza magnetica non avesse il segno invertito nella sua formulazione, ovvero se la corrente indotta circolasse in verso tale che la forza non si opponesse al moto, basterebbe mettere in movimento la sbarra con un impulso per avere un generatore che fornisce potenza elettrica senza riceverne una quantità equivalente sotto altra forma, andando contro il principio di conservazione dell'energia. Poiché il segno meno è presente, se la sbarretta riceve un impulso si ferma quando la sua energia cinetica iniziale si è trasformata tutta in lavoro elettrico e alla fine in calore.

Il meccanismo appena mostrato è alla base di **molti strumenti utilizzati nella vita di tutti i giorni**, come le **dinamo** o i **generatori meccanici**, o in ambito industriale, come le **pale eoliche** o i **sistemi di generazione di energia idraulica**.

AUTOINDUZIONE

Come visto in precedenza, un **circuito di forma qualunque** percorso da corrente produce un **campo magnetico** secondo la **legge di Ampere-Laplace**:

$$\bar{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\bar{l} \times \hat{u}_r}{r^2}$$



Il **flusso** di questo **campo concatenato** è detto **autoflusso** e si determina:

$$\phi(\bar{B}) = \int \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\bar{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Si può notare che **entrambe le quantità sono direttamente proporzionali alla corrente**, il che può essere sfruttato per **definire l'autoflusso come**:

$$\phi(\bar{B}) = Li$$

Dove **L** è il **coefficiente di autoinduzione, o induttanza, del circuito e dipende dalla forma del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo**, tuttavia essa è **costante nel momento in cui il circuito risulta indefomabile**. Poiché dipende dal circuito, **l'induttanza può essere vista come un elemento circuitale**, identificato dal seguente simbolo:



L'unità di misura standard dell'induttanza è l'**Henry**, unità abbastanza grande che viene spesso usata nei suoi sottomultipli milli e micro ($1\text{ mH} = 10^{-3}\text{ H}$ e $1\text{ }\mu\text{H} = 10^{-6}\text{ H}$). Essa viene definita:

$$L = \frac{[Wb]}{[A]} = \frac{[V][s]}{[A]} = [\Omega][s] = [H]$$

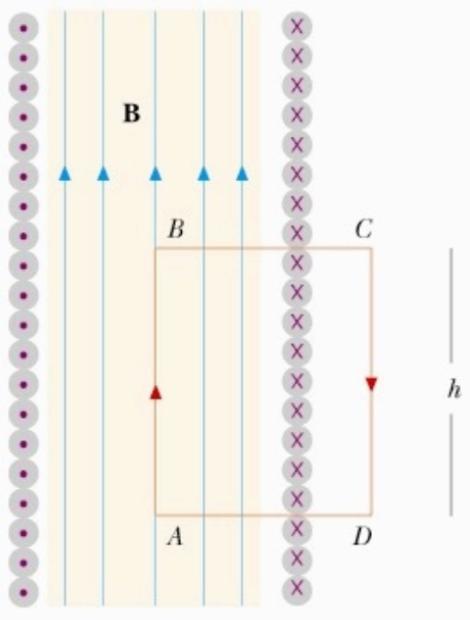
L'Henry non è utilizzato solo nell'induttanza, infatti:

$$\mu_0 = \frac{[Tm]}{[A]} = \frac{[Wb]}{[A][m]} = \frac{[H]}{[m]}$$

Sia considerato un **avvolgimento solenoidale lungo d e di raggio r , fatto di N avvolgimenti**, e ne si calcoli l'**induttanza**, ovviamente nell'ipotesi in cui $r \ll d$ in modo da approssimare al caso di un **solenoide infinito** dove il campo magnetico è uniforme all'interno:

$$B = \mu_0 n i$$

Dove **n** è la **densità di spire per unità di lunghezza**. Questo stesso risultato viene ritrovato in maniera semplice con il **calcolo della circuitazione e la legge di Ampere**; infatti, poiché il solenoide è infinito e le linee di campo sono approssimativamente delle rette parallele dentro e nulle fuori, si può considerare un circuito rettangolare ABCD del tipo:



Per motivi di simmetria **il campo magnetico è uniforme all'interno del solenoide**, quindi:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \bar{B} \cdot d\bar{l} = Bh$$

Questo risultato segue dal fatto che tra C e D non c'è campo magnetico e dal fatto che tra A e D e tra B e C il campo magnetico è ortogonale a $d\bar{l}$. Questo risultato può essere combinato con la legge di Ampere:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_C = \mu_0 M i = \mu_0 n h i$$

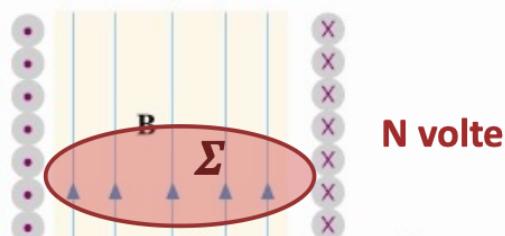
Dove **M** è il **numero di spire concatenate al percorso ABCD**, mentre il segno della corrente concatenata è positivo perché la circuitazione è oraria. Uguagliando i due risultati:

$$Bh = \mu_0 n h i$$

$$B = \mu_0 n i$$

Sia considerato invece il **flusso auto concatenato** (autoflusso), che è pari a:

$$\phi(\bar{B}) = N \int_0^\Sigma \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = N\pi r^2 B$$



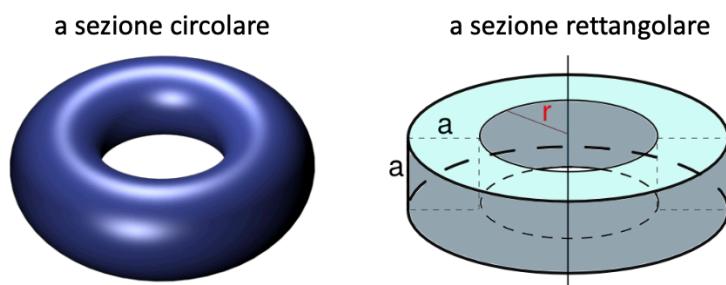
Dove N è il numero di spire e $\Sigma = \pi r^2$ la superficie di base del solenoide. Unendo le formulazioni dell'autoflusso e del campo magnetico appena ottenute:

$$\phi(\bar{B}) = N\pi r^2 \left(\mu_0 \frac{N}{d} i \right) = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{d} i$$

Di conseguenza, è possibile stimare l'**induttanza del solenoide**:

$$L = \frac{\phi(\bar{B})}{i} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{d} = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{d}$$

In geometria, un **toroide** è definito come una **superficie a forma di ciambella a sezione circolare o rettangolare**; nel campo semantico fisico il toroide è un **anello di materiale ferromagnetico in cui è avvolto un solenoide con un raggio molto maggiore della sua larghezza**, più banalmente è un **solenoide avvolto su sé stesso**:



In quanto particolare configurazione di un solenoide, **anche nel toroide è possibile calcolare l'induttanza**; pertanto, sia considerato un avvolgimento toroidale a sezione rettangolare di lati a e b , di raggio R e con N avvolgimenti:



Anche in questo caso, **il campo magnetico si calcola con la legge della circuitazione di Ampere**: il modulo del campo **dipende solo dalla coordinata radiale r per motivi di simmetria**, mentre le linee di campo sono circonferenze concentriche al toroide. Di conseguenza:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = B(r) \oint dl = B(r) 2\pi r$$

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_c = \mu_0 Ni$$

Da cui:

$$B(r) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

Per quanto riguarda il **flusso di una sola sezione** del toroide, si considera $dS = adr$, quindi:

$$\phi_1(\bar{B}) = \int_0^{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS = \int_R^{R+b} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} adr = \frac{\mu_0 Ni a}{2\pi} \int_R^{R+b} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 Ni a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

Mentre per il **flusso di N spire** lungo tutto il toroide:

$$\phi(\bar{B}) = N\phi_1(\bar{B}) = \frac{\mu_0 N^2 ia}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

Infine, l'**induttanza**:

$$L = \frac{\phi(\bar{B})}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

Nel caso in cui $b \ll R$ si può assumere il termine logaritmico come b/R , quindi l'induttanza risulterebbe:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \approx \frac{\mu_0 N^2 ab}{2\pi R} = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{d}$$

Considerando $\Sigma = ab$ come la sezione e $d = 2\pi R$ come la lunghezza del toroide. Inoltre, in ogni **toroide in cui il campo magnetico si può considerare approssimativamente costante** lungo la sua sezione trasversale vale la seguente approssimazione:

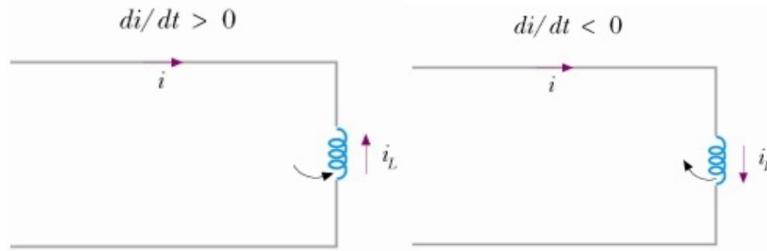
$$\phi(\bar{B}) = \int_0^{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{u}_n dS \approx B(R) \int_0^{\Sigma} dS = B(R)\Sigma$$

Da cui:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{2\pi R}$$

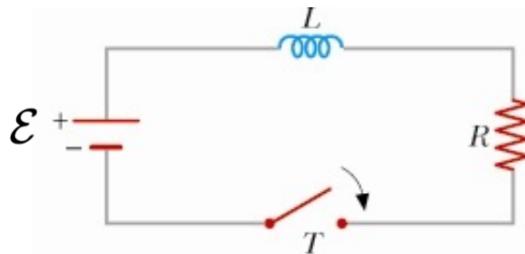
Quando la **corrente** che circola nel circuito **non è costante nel tempo**, la **variazione di flusso autoconcatenato produce una forza elettromotrice indotta** nel circuito stesso (detta autoinduzione) che, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, **ostacola la variazione di flusso** (e dunque della corrente che lo genera):

$$\xi_L = -\frac{d\phi(\bar{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

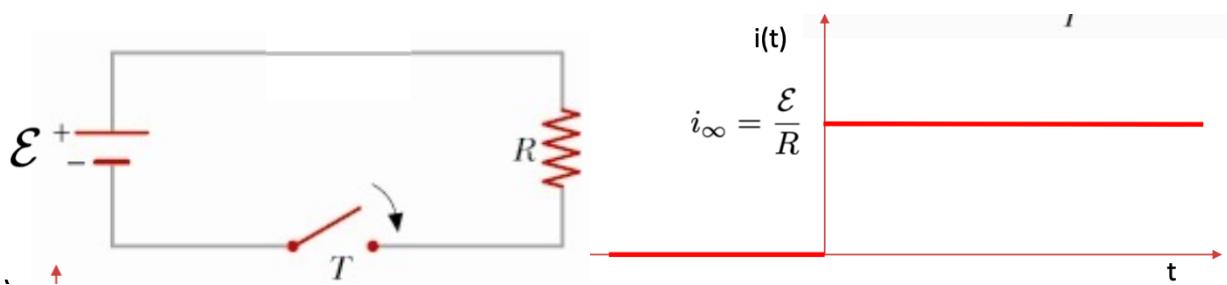


Dove il segno della forza elettromotrice di autoinduzione dipende dal segno della derivata nel tempo della corrente. **L'autoinduzione è presente in ogni circuito** ed è “diffusa” su tutto il circuito; tuttavia, **è particolarmente significativa solo nei circuiti con bobine, avvolgimenti o solenoidi**: se questi sono “concentrati” nello spazio, effettivamente **si misura come una caduta di tensione elettrica ai capi del componente**.

La presenza del **fenomeno di autoinduzione contrasta le variazioni repentine di corrente** e gli impedisce di avere variazioni istantanee. Il **circuito induttivo** più semplice in cui si può studiare questo fenomeno è il circuito denominato **RL serie**, in cui **nell'unica maglia è posizionato un resistore, un induttore, un generatore di forza elettromotrice costante e un interruttore** per consentire le variazioni repentine di corrente:



Nel caso in cui l'**induttanza** fosse **prossima allo zero**, cioè in assenza del fenomeno dell'autoinduzione, alla **chiusura dell'interruttore** ci si aspetta **una corrente che passa instantaneamente da 0 a ξ/R con discontinuità**:



Per la maglia in esame si applica la **legge di Kirchhoff**: esiste oltre al generatore “materiale” anche un generatore “immateriale” corrispondente alla **presenza di autoinduzione**:

$$\xi + \xi_L = Ri$$

$$\xi - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Da cui si ricava l'**equazione differenziale**:

$$\xi = L \frac{di}{dt} + Ri$$

I due modi di scrivere la legge di Kirchhoff hanno significati diversi: nel primo caso si sta facendo riferimento alla **presenza di una forza elettromotrice causata dal fenomeno dell'autoinduzione**, nel secondo caso si sta facendo riferimento alla **caduta di potenziale ai capi dell'induttore**. Risolvendo l'equazione per separazione di variabili:

$$\xi - Ri = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{i - \frac{\xi}{R}} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\int_0^{i(t)} \frac{di}{i - \frac{\xi}{R}} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

$$\ln\left(i - \frac{\xi}{R}\right) = -\frac{R}{L} t$$

Da cui:

$$i(t) = \frac{\xi}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Da questo risultato si può dedurre che, **alla chiusura dell'interruttore, la corrente arriva a regime con una costante di tempo $\tau = \frac{L}{R} = [s]$** , tendendo asintoticamente a:

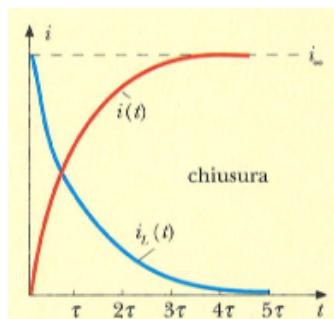
$$i_{\infty} = \frac{\xi}{R}$$

Detto **valore di regime**, che coincide con la **legge di Ohm** per le correnti costanti ed è raggiunto quando l'effetto ritardante che evita il brusco aumento di corrente tende a zero. Infatti:

$$i(t) = i_{\infty} - i_L(t)$$

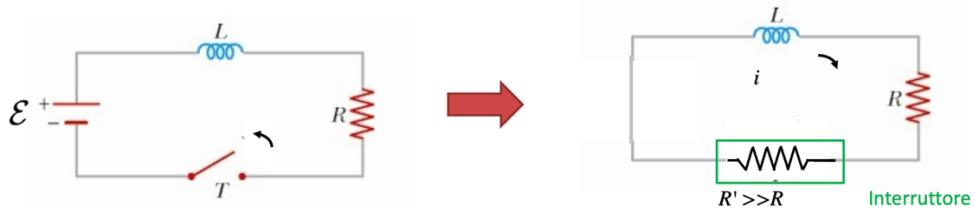
Dove $i_L(t)$ è l'**extracorrente di chiusura**:

$$i_L(t) = i_{\infty} - i(t) = \frac{\xi}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



Quando invece **si apre** il circuito la **corrente passa dal valore di regime a zero in un tempo breve ma non nullo**; l'interruttore in tale situazione **si comporta come un resistore di resistenza R' molto alta**, poiché al conduttore si sostituisce un dielettrico con conducibilità quasi nulla (nei casi

banali il dielettrico è l'aria fra i due capi del filo che sono staccati). Poiché i capi del filo sono staccati, il generatore di forza elettromotrice scompare, viene escluso dall'interruttore.



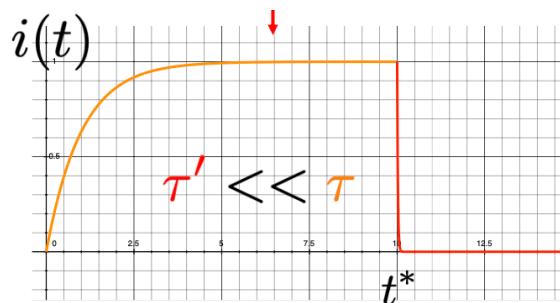
In queste condizioni la **legge di Kirchhoff** diventa:

$$-L \frac{di}{dt} = (R + R')i \approx R'i$$

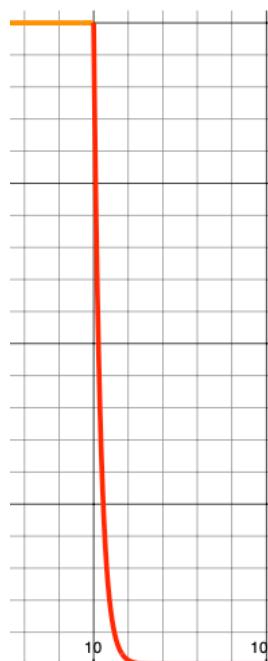
Con $i(t^*) = \frac{\xi}{R}$. Risolvendo per $t > t^*$:

$$i(t) = \frac{\xi}{R} e^{-\frac{(t-t^*)}{\tau'}}$$

$$\tau' = \frac{L}{R'}$$



Sebbene possa smembrarlo, **il fronte di discesa non è verticale**:



In pratica, **anche dopo l'apertura vi è corrente** (nota come extracorrente di apertura) dovuta alla **forza elettromotrice di autoinduzione**, non nulla per un **tempo brevissimo**:

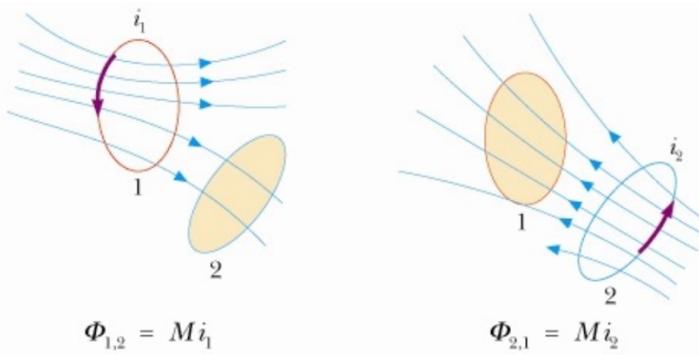
$$\xi_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R'}{R} \xi e^{-\frac{(t-t^*)}{\tau'}}$$

La forza elettromotrice di autoinduzione appena dopo l'apertura può essere molto alta e può causare la “rottura” del dielettrico, provocando una scintilla; per evitare questi fenomeni, si progettano speciali interruttori (ad esempio con i contatti immersi nell'olio) in modo da far avvenire l'interruzione del circuito senza danni.

$$\xi_L(t^*) = \frac{R'}{R} \xi(t^*) \gg \xi(t^*)$$

MUTUA INDUZIONE

Siano considerati **due circuiti sufficientemente vicini**, in questa configurazione si può valutare il **flusso del campo magnetico prodotto dalla corrente circolante nel primo circuito attraverso una qualunque superficie appoggiata al secondo circuito**: per ragionamenti analoghi a quelli che conducono alla definizione del coefficiente di autoinduzione, si può dire che tale flusso è proporzionale alla corrente i_1 :



$$\bar{B} \propto i \Rightarrow \phi(\bar{B}) \propto i$$

Il **coefficiente di mutua induzione M** dipende unicamente dalla **forma dei due circuiti**, dalla loro **mutua posizione** e dal **materiale in cui sono immersi**; inoltre, si misura in **Henry** come l'induttanza, d'altronde il modo in cui si misura è analogo:

$$\phi_{1,2}(\bar{B}) = M_{1,2}i_1 \wedge \phi_{2,1}(\bar{B}) = M_{2,1}i_2$$

Attraverso considerazioni generali sulle proprietà del campo magnetico (il fatto che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo) si può mostrare che:

$$M_{1,2} = M = M_{2,1}$$

Ciò significa che:

$$\phi_{1,2}(\bar{B}) = Mi_1 \wedge \phi_{2,1}(\bar{B}) = Mi_2$$

Anche per un sistema di due circuiti accoppiati si definisce un'**energia magnetica** in modo analogo a quanto visto per un circuito percorso da corrente:

$$\begin{cases} \xi_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ \xi_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali accoppiate è abbastanza complicata e non verrà affrontata in questa sede, basti pensare che essa **dipende non solo dai valori di L_1 , L_2 e M ma anche dalle condizioni iniziali in ciascuno dei due circuiti.**

Il fenomeno della mutua induzione è alla base dei **trasformatori elettrici**, oggetti di uso comune nella tecnologia commerciale:

