

# ***FONDAMENTI DI CIRCUITI***

***Prof. Luigi Verolino – A.A. 2023/24***

*Luca Maria Incarnato*

## ***INDICE DEGLI ARGOMENTI***

### **ELETROTECNICA**

1. LE GRANDEZZE FONDAMENTALI (p. 4)
2. BIPOLI E CIRCUITI DI BIPOLI (p. 9)
3. POTENZA ED ENERGIA ELETTRICA (p. 12)
4. LE LEGGI DI KIRCHHOFF E LA MATRICE DI INCIDENZA (p. 15)
5. LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE (p. 22)
6. I BIPOLI E LE LORO CARATTERISTICHE (p. 24)
7. RESISTORI (p. 27)
8. GENERATORI INDIPENDENTI (p. 33)
9. CONDENSATORI (p. 36)
10. INDUTTORI (p. 42)
11. LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI E L'APPROCCIO SISTEMATICO (p. 47)
12. SEMPLIFICAZIONI PER LA RISOLUZIONE DELLE RETI (p. 52)
13. FORMULA DI MILLMAN E TRASFORMAZIONI TRIANGOLO – STELLA (p. 55)
14. TEOREMI DEL GENERATORE EQUIVALENTE (p. 59)
15. TRASFERIMENTO MASSIMO DI POTENZA (p. 63)
16. MISURE IN REGIME STAZIONARIO (p. 65)
17. SIMMETRIA NELLE RETI ELETTRICHE (p. 75)
18. DOPPI BIPOLI: CARATTERISTICHE E CLASSIFICAZIONI (p. 80)
19. DOPPI BIPOLI CONTROLLATI IN CORRENTE E IN TENSIONE (p. 84)
20. CARATTERISTICHE IBRIDE E DI TRASMISSIONE (p. 87)
21. GENERATORI DIPENDENTI (p. 92)
22. RECIPROCITÀ NELLE RETI ELETTRICHE E IL TEOREMA DI COHN (p. 94)
23. CIRCUITI IN EVOLUZIONE DINAMICA: LIBERA E FORZATA (p. 97)
24. LA RISPOSTA AL GRADINO DEL CIRCUITO RLC (p. 104)
25. ALTRI TRANSITORI (p. 108)
26. TRANSITORI IN CIRCUITI CON GENERATORI CONTROLLATI (p. 114)
27. CIRCUITI SOTTOPOSTI A FORZAMENTO SINUSOIDALE (p. 115)
28. LA RISPOSTA ALL'IMPULSO (p. 118)
29. L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE (p. 124)
30. INTRODUZIONE AI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE (p. 126)
31. LE IMPEDENZE COMPLESSE E I CIRCUITI RLC (p. 135)
32. POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE (p. 141)
33. LA RISONANZA NEI CIRCUITI ELETTRICI (p. 145)
34. RIFASAMENTO E MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA (p. 153)
35. TRASFORMATORE E GIRATORE IDEALI (p. 157)
36. MISURE IN REGIME SINUSOIDALE (p. 160)
37. SISTEMI TRIFASE (p. 166)
38. I DIVERSI TIPI DI COLLEGAMENTO E CONFIGURAZIONE (p. 173)
39. LE POTENZE NEI SISTEMI TRIFASE (p. 178)
40. RIFASAMENTO DEI SISTEMI TRIFASE (p. 183)
41. I VANTAGGI DEI SISTEMI TRIFASE (p. 184)

### **MACCHINE ELETTRICHE E TRASFORMATORE**

42. GENERALITÀ SULLE MACCHINE ELETTRICHE (p. 187)
43. RENDIMENTO E PERDITE (p. 187)
44. IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DEI GENERATORI (p. 192)

- 45. IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DEL MOTORE ELETTRICO (p. 193)
- 46. IL TRASFORMATORE – LE ORIGINI E L'ACCOPPIAMENTO MUTUO (p. 196)
- 47. IL TRASFORMATORE REALE (p. 203)
- 48. EFFETTI NON LINEARI E VALORI NOMINALI (p. 209)
- 49. IL RENDIMENTO DI UN TRASFORMATORE (p. 211)
- 50. LE PROVE SUI TRASFORMATORI E LA CADUTA DI TENSIONE (p. 214)
- 51. TRASFORMATORI IN PARALLELO E L'AUTOTRASFORMATORE (p. 218)
- 52. TRASFORMATORI PER USI SPECIALI E TRASFORMATORI TRIFASE (p. 221)
- 53. NOTIZIE SULLA COSTRUZIONE E I DATI DI TARGA (p. 225ò)

## **IMPIANTI ELETTRICI**

- 54. GENERALITÀ SUGLI IMPIANTI ELETTRICI (p. 231)
- 55. IMPIANTI IN CORRENTE ALTERNATA E IN CORRENTE CONTINUA (p. 234)
- 56. LA PRODUZIONE DI ENERGIA ELETTRICA (p. 237)
- 57. IMPIANTI IN ALTA TENSIONE (p. 248)
- 58. L'EQUAZIONE DEI TELEGRAFISTI E IL PROBLEMA DELLE LK (p. 252)
- 59. PROTEZIONE E MANOVRA DI IMPIANTI IN ALTA TENSIONE (p. 261)
- 60. IMPIANTI IN MEDIA TENSIONE (p. 268)
- 61. IL FENOMENO DELLA FULMINAZIONE (p. 275)
- 62. PROTEZIONI DAI FULMINI PER LA MEDIA TENSIONE (p. 278)
- 63. SICUREZZA IN BT: FUSIBILI E RELÈ (p. 280)
- 64. IMPIANTI IN BASSA TENSIONE (p. 288)
- 65. TIPOLOGIE DEGLI IMPIANTI UTILIZZATORI (p. 291)
- 66. PROTEZIONI E SORGENTI DI CAMPO IN AMBIENTE DOMESTICO (p. 296)
- 67. PRINCIPI INTRODUTTIVI DI SICUREZZA ELETTRICA (p. 300)
- 68. LA DISPERSIONE DELLA CORRENTE A TERRA (p. 306)
- 69. GLI IMPIANTI DI TERRA (p. 311)
- 70. I TIPI DI CONTATTO, DI ISOLAMENTO E DI PROTEZIONE (p. 321)
- 71. ALTRI TIPI DI PERICOLI ELETTRICI E IL SOCCORSO DI EMERGENZA (p. 328)

## ELETTROTECNICA

### LE GRANDEZZE FONDAMENTALI

Le diverse cariche elettriche possono interagire tra di loro, ma solo in due modi: per attrazione o repulsione; in particolare, cariche omopolari si respingono e cariche eteropolari si attraggono. Questo fenomeno rende necessario associare un segno allo scalare che descrive “l'elettricità di un corpo” e per convenzione questo segno è stato associato in funzione delle particelle che compongono gli atomi:

- **Elettrone**, particella dotata di **carica negativa** ( $-1.602 \cdot 10^{-19} C$ ) che orbita attorno al nucleo dell'atomo;
- **Protone**, particella dotata di **carica positiva** ( $1.602 \cdot 10^{-19} C$ ) che compone il nucleo di un atomo.

L'interazione tra cariche elettriche appena accennata viene ricondotta ad una legge elementare che prende il nome di **Legge di Coulomb**: la legge parte dalle ipotesi di **carica puntiforme**, cioè si suppone che il **corpo materiale** in esame sia concentrato in un ideale **volume nullo** ma con **massa non nulla** (e quindi riconducibile ad un punto geometrico) e **che porti una carica positiva o negativa**. L'idealizzazione del volume nullo non è completamente priva di fondamento fisico, sebbene sia una condizione matematica impossibile, perché i volumi che gli elettroni e i protoni (sfera di raggio  $10^{-15} cm$ ) occupano possono essere approssimati a zero in relazione alla scala di grandezza sfruttata in questa sede.

La Legge di Coulomb afferma che, **se due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  fossero poste (ferme) a distanza  $r$  l'una dall'altra, su ciascuna di esse agirebbe una forza direttamente proporzionale alle due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza**; in particolare, la carica  $q_1$  effettuerebbe su  $q_2$  una forza:

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Dove  $\hat{r}_{12}$  è il versore che congiunge la carica  $q_1$  a  $q_2$ ; infatti poiché è una forza, essa dovrà essere caratterizzata da una **direzione e un verso**, che coincidono proprio con la **congiungente di  $q_1$  a  $q_2$** . Tuttavia, **il verso della forza non dipenderà solo dal versore  $\hat{r}_{12}$  ma anche dal prodotto delle due cariche**, in particolare per **cariche eteropolari** il verso verrà condizionato da un **segno negativo** e la forza verrà detta **attrattiva**, mentre per **cariche omopolari** il verso verrà condizionato da un segno **positivo** e la forza verrà detta **repulsiva**.

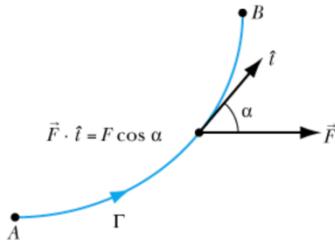
Si supponga di avere una **distribuzione di cariche** (ferme o in movimento, non ci si occuperà delle caratteristiche del sistema ma solo dell'effetto che le une hanno sulle altre) e **si immagini di avere a disposizione una carica positiva capace di non alterare la posizione o il movimento delle altre**; le cariche  $q$  che compongono la distribuzione vengono definite **cariche sorgenti**, mentre la carica positiva  $q_0$  è detta **carica di prova**. In qualsiasi punto venga posizionata, **la carica di prova subirà una forza prodotta da ognuna delle altre cariche  $q$**  (in movimento a velocità  $v$  o in stasi) e descritta dall'espressione di Lorentz:

$$\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v} \times \bar{B}$$

Si può osservare come la **forza percepita** dalla carica di prova **non dipenda solo dalla carica** che produce la forza stessa **ma anche dalla sua velocità**; tuttavia, la **componente magnetica** (che dipende dalla velocità in questione) **non effettua lavoro su  $q_0$** .

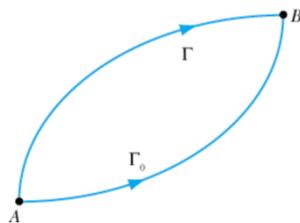
**Immaginando di portare la carica di prova  $q_0$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$  seguendo un percorso  $\Gamma$ ,** la forza di Lorentz compirà un **lavoro** che, per unità di carica, si può scrivere come:

$$T_{A\Gamma B} = \int_{A\Gamma B} \hat{t} \cdot \frac{\vec{F}}{q} dl = \int_{A\Gamma B} \hat{t} \cdot (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) dl = \int_{A\Gamma B} \hat{t} \cdot \bar{E} dl$$



Si può notare, come anticipato, che la **componente magnetica  $\hat{t} \cdot \bar{v} \times \bar{B}$  non compie lavoro** perché **il versore tangente alla curva  $\hat{t}$  e la velocità  $\bar{v}$  sono (in ogni punto del percorso) paralleli**. L'integrale  $T_{A\Gamma B}$  viene definito **tensione lungo la linea  $\Gamma$ , valutata tra i punti  $A$  e  $B$** , e si misura in **volt ( $V$ )**; per poter parlare di tensione è necessario, non solo specificare i punti  $A$  e  $B$ , ma anche la curva che ne descrive il percorso e il verso di percorrenza. Per quanto appena detto, **spostando la carica di prova tra gli stessi punti ma seguendo una curva  $\Gamma_0 \neq \Gamma$** , si può dire che **tendenzialmente le due tensioni non coincidono**; tuttavia, **in determinate situazioni può accadere che l'integrale non dipenda dalla particolare curva ma solo dal punto iniziale e dal punto finale**. In queste ipotesi è possibile **associare al campo vettoriale  $\bar{E}$** , di cui si sta facendo l'integrale, una **funzione** (detta **potenziale elettrico**) che permette di **descrivere la tensione come differenza di potenziale** (anche perché dipende solo da punto iniziale e finale):

$$T_{A\Gamma B} = e_B(t) - e_A(t)$$

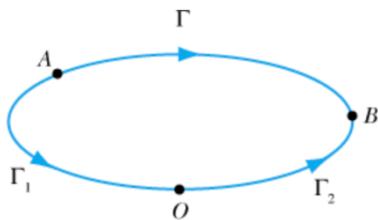


In genere una situazione che permette questo procedimento si verifica nel momento in cui **tutte le cariche sono ferme o si muovono a velocità relativamente basse**. Prendendo in considerazione le due curve precedentemente definite,  $\Gamma$  e  $\Gamma_0$  che condividono punto iniziale e punto finale, se **si inverte il segno di una delle due e le si unisce si ottiene un percorso chiuso**; se si può definire il **potenziale elettrostatico** si può dimostrare come esso sia **nullo su questo tipo di curva chiusa**:

$$\int_{A\Gamma B} \hat{t} \cdot \bar{E} dl + \int_{A(-\Gamma_0)B} \hat{t} \cdot \bar{E} dl = e_B(t) - e_A(t) - e_B(t) + e_A(t) = 0$$

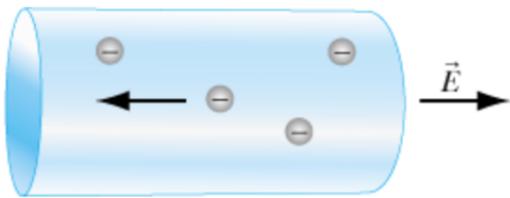
In queste ipotesi, si può **prendere un qualsiasi circuito che vada da  $A$  e  $B$  e farlo passare per un punto  $O$  in cui la funzione potenziale è nulla** e dividere il percorso in  $O\Gamma_1 B$  e  $A\Gamma_2 O$ , ottenendo:

$$T_{A\Gamma B} = e_B(t) - e(t)_A = e_B(t) - e_O(t) + e_O(t) - e_A(t) = T_{O\Gamma_1 B} + T_{A\Gamma_2 O}$$



Si definisce il punto **O** come **punto di riferimento dei potenziali** e si parla di **lavoro positivo** se il **potenziale di B è maggiore di quello di A**: solo in tal caso si può dire che le sorgenti effettuano un lavoro sulla carica di prova. Di qui in avanti si andranno ad uniformare gli usi dei termini “tensione” e “differenza di potenziale” ma bisogna comunque ricordare che alla loro radice ci sono definizioni e ipotesi diverse.

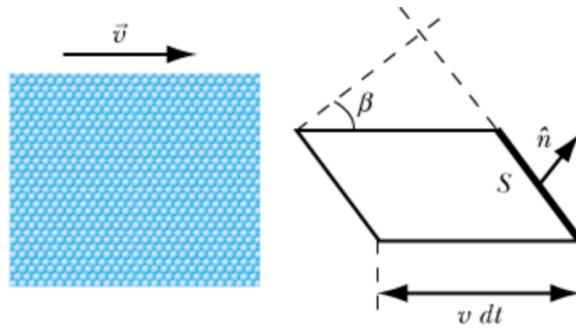
Il fenomeno di conduzione elettrica può essere visto come il **movimento contemporaneo di tanti elettroni in ogni punto di un circuito** (come il traffico stradale) ad una velocità molto modesta, si parla infatti di frazioni di millimetro al secondo. La corrente elettrica in quanto moto di elettroni nel verso opposto al campo elettrico può essere vista anche come **moto di cariche positive nello stesso verso del campo elettrico**, in quanto il **movimento di cariche elettriche negative** verso sinistra ad un millimetro al secondo è **equivalente al movimento di cariche elettriche positive** verso destra ad un millimetro al secondo.



In tutti i casi precedentemente descritti i **portatori di carica sono in movimento**, quindi si può affermare che sia una **condizione necessaria per generare corrente elettrica**; siano presi in considerazione un **elevato numero di questi portatori**, tutti della stessa **carica q**, tutti **in movimento a velocità v̄** e tutti che **occupano un volume tanto piccolo** (si è comunque nell’idealizzazione di carica puntiforme) **da poter essere descritti con una funzione densità n**: sia  $dV$  il volume infinitesimo in cui questi portatori sono allocati, il **loro numero ammonta a  $dN = n \cdot dV$**

Si consideri una **superficie S in cui la distribuzione di portatori di carica si trova a passare mentre si muove**; per calcolare la **quantità di carica che passa nel tempo attraverso la superficie S** si costruisce un **cilindro che ha la base appoggiata alla superficie e altezza nella stessa direzione del moto dei portatori**, pari a  $v \cdot dt$ . Siano considerate **solo le particelle che attraversano il cilindro nel tempo dt**, le altre o non percorreranno una traiettoria sufficientemente lunga a raggiungerlo o non avranno modo di intercettarlo; ciò significa che **il numero di portatori che attraverseranno la superficie S nel tempo dt è pari al numero di portatori che si trovano nel cilindro di volume  $S \cdot vdt \cdot \cos \beta$** , quindi:

$$dN = n \cdot S v dt \cdot \cos \beta$$



Dove  $\beta$  è l'angolo di inclinazione tra il lato del cilindro (ovvero la velocità dei portatori) e la normale alla superficie. Ma poiché tutti i portatori hanno la stessa carica, si può determinare la carica totale come:

$$dQ = q \cdot nSvdt \cdot \cos \beta$$

Che, nell'unità di tempo diventa:

$$i = \frac{dQ}{dt} = nqSv \cos \beta \quad \left[ A = \frac{C}{s} \right]$$

A tale grandezza viene dato il nome di **intensità di corrente elettrica** e, come si può notare dalla definizione, **necessita di una superficie attraverso cui valutare il flusso di portatori, di un orientamento normale a tale superficie e di un verso a cui associare il movimento di carica**. In seguito, non si andrà più a specificare la superficie di flusso e la sua normale perché **il movimento sarà vincolato ad una superficie implicita, ovvero quella del conduttore**. Per quanto riguarda il verso, esso **dovrà sempre essere specificato** in un circuito ma la definizione di **intensità di corrente** è la definizione di uno scalare, non è introdotto alcun verso o direzione nell'espressione analitica; è necessario, quindi, **associare un vettore all'intensità di corrente**, definito come **densità di corrente**:

$$\bar{j} = nq \cdot \bar{v} \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right]$$

Le precedenti relazioni possono essere riscritte:

$$dQ = \bar{j} \cdot \hat{n}S dt$$

$$i = \bar{j} \cdot \hat{n}S$$

Da cui si può anche determinare la **corrente che passa per la superficie infinitesima dS**:

$$di = \bar{j} \cdot \hat{n} dS$$

Per una superficie finita:

$$i = \int_S \bar{j} \cdot \hat{n} dS$$

Dove  $\hat{n}$  fa sempre riferimento alla normale della superficie presa in considerazione. Si può osservare come la **corrente** figura, nella sua più elementare espressione, come un **flusso dipendente**

**da una superficie e da un vettore densità di corrente;** ciò si accomuna con la tensione per la necessità di scegliere un verso di riferimento.

Con questo discorso sulla densità di corrente si è chiarita anche l'ambiguità che sorge quando si vanno ad **orientare le correnti in un circuito: il verso e la direzione non si vanno ad associare all'intensità di corrente elettrica ma al vettore densità di corrente** in relazione con la corrente in esame.

Come accennato in precedenza, **esistono dei mezzi per cui la conduzione elettrica non è facilitata dalla composizione atomica del materiale**, ovvero gli isolanti; essi possono anche essere definiti **dielettrici**, nel senso che **le forze che agiscono sulle cariche non producono un apprezzabile movimento di insieme delle stesse**. I fenomeni elettrici che si verificano nei dielettrici non sono da attribuire ad un vero e proprio spostamento di cariche ma alle **variazioni temporali di campo elettrico**, tanto che si può definire la **densità di corrente di spostamento** (nonostante non ci sia alcuno spostamento) come la **variazione nel tempo del campo elettrico** per mezzo del vettore:

$$\bar{J}_s = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Dove  **$\bar{D}$**  è il vettore spostamento elettrico. La corrente di spostamento può essere determinata con la stessa relazione della corrente di conduzione, ovviamente sostituendo adeguatamente il vettore densità di corrente:

$$i = \int_S \bar{J}_s \cdot \hat{n} dS$$

La considerazione della corrente di spostamento trova molte **giustificazioni sperimentali** e, al pari della corrente di conduzione, **genera un campo magnetico**; inoltre, è alla base delle concezioni di **Maxwell sulla propagazione dell'energia tramite onde elettromagnetiche**.

**In un circuito qualsiasi possono essere presenti sia la corrente di spostamento che di conduzione;** quindi, si può vedere il vettore densità di corrente totale come la somma dei due contributi:

$$\bar{J}_t = \bar{J} + \bar{J}_s$$

E quindi, **l'intensità di corrente totale**:

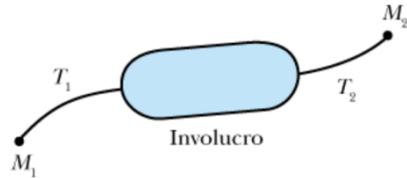
$$i_t = \int_S \bar{J}_t \cdot \hat{n} dS = i = \int_S (\bar{J} + \bar{J}_s) \cdot \hat{n} dS = i + i_s$$

Si può quindi affermare che **l'intensità di corrente in un circuito ha diverse origini**, in particolare è data dalla somma della **corrente di conduzione** (moto particellare dovuto ad un gradiente di particelle cariche, cioè ad una diversa concentrazione) e della **corrente di spostamento** (legato alle variazioni di campo elettromagnetico).

Con quanto appena detto su corrente e tensione si chiude il discorso sul **movimento delle cariche elettriche**, affrontato dapprima in maniera **dinamica** (con la tensione, in cui intervengono forze) e infine in maniera **meccanica** (con la corrente, dove si da spazio al concetto di velocità e movimento in sé e per sé).

## BIPOLI E CIRCUITI DI BIPOLI

Un **bipolo** è un **qualunque dispositivo elettrico contenuto in un involucro e al quale sono collegati due fili conduttori**; sul bipolo si possono distinguere i **terminali  $T_1$  e  $T_2$** , che corrispondono ai due fili, e i **morsetti  $M_1$  e  $M_2$** , le estremità dei due fili. In genere i due terminali escono insieme dall'involucro e sono uniti in un solo cavo che termina con una spina, i cui spinotti sono un unico morsetto del bipolo.

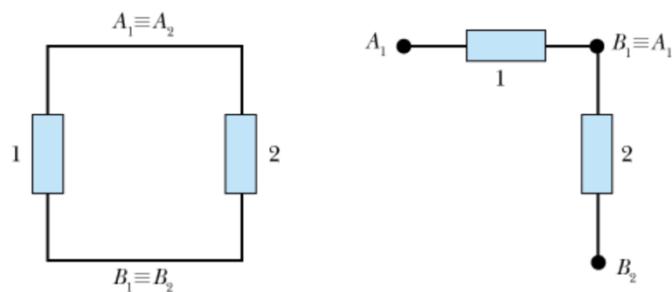


Formalmente, un **bipolo** è rappresentato da una scatola chiusa (black box) che comunica con l'esterno, dal punto di vista elettromagnetico, con i due morsetti; inoltre, un bipolo presenta le seguenti proprietà:

- La corrente che entra in un morsetto è uguale a quella che esce dall'altro;
- La tensione tra i due morsetti del bipolo è indipendente dal percorso scelto per calcolarla rispetto ad ogni linea che non entra nella “scatola” del bipolo, ovvero è possibile esprimerla come differenza di potenziale.

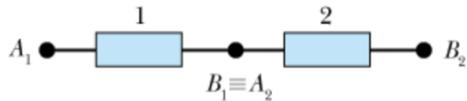
Il **bipolo più semplice** è un **filo conduttore** che serve a collegare tra loro altri bipoli e nel quale l'involucro è costituito dalla superficie stessa del filo.

Un **circuito di bipoli** (o rete di bipoli) è un **insieme di bipoli collegati tra di loro in corrispondenza dei rispettivi morsetti**. Il più semplice circuito di bipoli **collega due bipoli**, detti '1' e '2', dotati di **quattro morsetti  $A_1, B_1, A_2$  e  $B_2$** ; se le due coppie di morsetti sono collegate tra di loro, il circuito si dice chiuso. Tuttavia, la **chiusura di un circuito non è una proprietà necessaria alla sua definizione**, possono esistere dei circuiti aperti ma **quello che non può esistere è un circuito (aperto o chiuso) dove almeno un bipolo ha un morsetto collegato all'involucro di un altro bipolo**: il collegamento di due bipoli può avvenire **esclusivamente tra i suoi morsetti**.

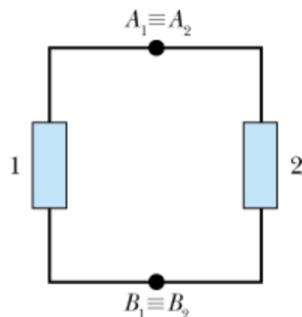


Con quanto detto finora è chiaro che una rete di bipoli può raggiungere complessità anche elevate; tuttavia, nella maggior parte dei casi i **collegamenti tra due o più bipoli si riducono a due schemi fondamentali: il collegamento in serie e quello in parallelo**.

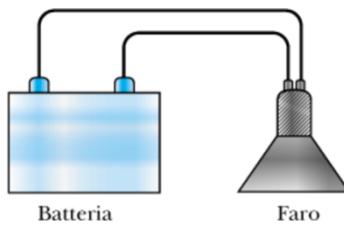
Una coppia di bipoli è **collegata in serie** se i suoi componenti condividono un morsetto al quale non sia collegato alcun terminale e hanno gli altri terminali liberi (la corrente si conserva):



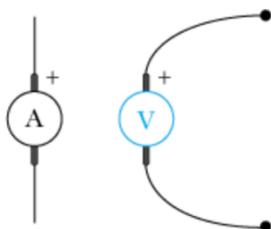
Una coppia di bipoli è collegata **in parallelo** se ciascun morsetto di un bipolo è collegato al morsetto dell’altro bipolo, componendo un circuito chiuso (la differenza di potenziale si conserva):



**Un circuito composto da una batteria per auto e un faro è un circuito di bipoli;** infatti, le due componenti dell’automobile sono considerabili dei bipoli, hanno la loro coppia di morsetti collegata con la rispettiva controparte. Si può notare che, composto così, il circuito fa funzionare il faro, **che emette luce, più o meno luminosa in base alla corrente che passa attraverso i due bipoli e alla tensione ai loro capi.**



Per misurare queste grandezze è necessaria l’introduzione di due strumenti: **l’amperometro e il voltmetro.** Essendo due bipoli, essi saranno caratterizzati da due morsetti, uno dei quali è contrassegnato con un +, ma hanno anche un indicatore mobile su una scala graduata che comunica il valore registrato dalla misurazione; l’unica differenza materiale tra i due strumenti è una coppia di cordoni conduttori flessibili presente nel voltmetro ma non nell’amperometro. Come suggerisce il nome, **l’amperometro misura l’intensità di corrente** che circola in un bipolo e **il voltmetro la differenza di potenziale** fra i suoi morsetti.



Si vogliono effettuare le seguenti operazioni:

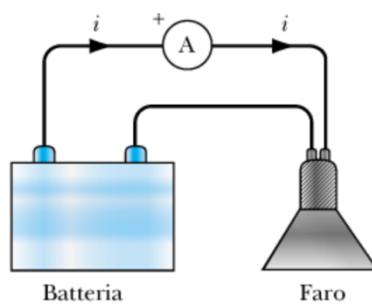
- Misura della corrente nel bipolo

Per prima cosa, bisogna **determinare una convenzione sul segno della corrente nel circuito** (indicando una freccia su uno dei terminali del bipolo, la freccia opposta sull’altro e un simbolo arbitrario che rappresenta l’intensità di corrente da misurare); dopodiché si **collega l’amperometro**

**in modo che la corrente entri nello strumento attraverso il morsetto + ed esca attraverso l'altro.**  
L'ultima cosa da fare è osservare il valore misurato dallo strumento.

In base al segno dell'intensità di corrente misurata si possono fare delle considerazioni: se **la corrente misurata è positiva, il movimento di cariche positive segue il percorso scelto e gli elettroni si spostano in verso opposto**, se invece **la corrente misurata è negativa il movimento di elettroni segue il verso prefissato e quello di cariche positive è invertito**. Ovviamente questo **non significa che il movimento degli elettroni è forzato alla scelta (arbitraria) del verso della corrente**; infatti, invertendo il segno si dovrebbe invertire anche il posizionamento dell'amperometro, corrispondendo in un valore di corrente di segno opposto a quello in precedenza misurato, ma il verso di percorrenza degli elettroni non cambia.

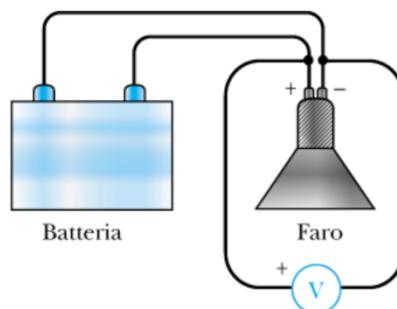
Bisogna notare che nella misurazione dell'intensità di corrente con l'amperometro è necessario tagliare il filo conduttore tra i due bipoli per permettere l'inserimento dello strumento.



- Misura della differenza di potenziale ai morsetti del bipolo

Per prima cosa, bisogna **determinare arbitrariamente un morsetto positivo (+) e uno negativo (-)** a cui associare **il segno della differenza di potenziale misurata**, la quale verrà individuata con  $v(t) = e_p(t) - e_N(t)$ , ovvero come la **differenza del potenziale sul morsetto positivo e del potenziale sul morsetto negativo**; successivamente si collega **il morsetto contrassegnato dal + del voltmetro con il morsetto contrassegnato dal + del bipolo** (e specularmente con il morsetto -) e si osserva il valore misurato. Una **differenza di potenziale misurata positiva** (analogamente se negativa) **sta a significare che il potenziale  $e_p(t)$  supera di quel valore il potenziale  $e_N(t)$** , ma non che entrambi i potenziali sono positivi (si misura la differenza tra i due potenziali, non i potenziali stessi).

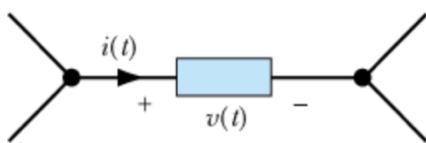
Come per la misura dell'intensità di corrente, anche per la differenza di potenziale **non ha alcun effetto la scelta arbitraria del segno dei morsetti**, non può determinare quale dei due morsetti del bipolo abbia potenziale maggiore dell'altro. Per ora **entrambi i dispositivi sono delle black box**, cioè non interessa la loro composizione interna ma solo il loro funzionamento esterno.



## POTENZA ED ENERGIA ELETTRICA

Nei capitoli precedenti sono state individuate nella corrente e nella tensione le grandezze fondamentali per descrivere un circuito, ma perché proprio tensione e corrente? Il motivo risiede nella capacità di queste due grandezze fisiche di derivare le altre; infatti, ogni altra grandezza di interesse per un circuito può essere ricavata a partire da queste prime due; in particolare, ciò che interessa in questa sede sono le grandezze “energetiche”, ovvero la potenza e l’energia elettrica. Di seguito non verranno date le definizioni più complete di potenza ed energia, essenzialmente perché sono molto astratte e neanche i fisici sanno bene cosa sia l’energia; invece, verranno esposte delle definizioni più limitate ma precise, in particolare ci si soffermerà al calcolo dell’energia elettrica e della potenza in un qualsiasi bipolo, proprio come si è fatto per la tensione e la corrente.

Sia considerato un bipolo che, inserito in un circuito, è percorso da corrente e presente una differenza di potenziale ai morsetti, come in figura:



**La potenza elettrica assorbita** da questo tipo di bipolo è una grandezza che dipende in maniera qualsiasi dal tempo ed è data per definizione dalla seguente espressione:

$$p_{ASS}(t) = +v(t)i(t) [W]$$

In genere viene **misurata in watt** ma ancora oggi è diffuso il “cavallo”, definito come:

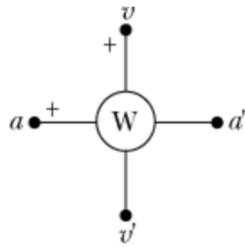
$$1CV = 0.736W \wedge 1W = 1.36CV$$

La definizione duale alla potenza elettrica assorbita da un bipolo è quella della **potenza elettrica erogata** dal bipolo stesso:

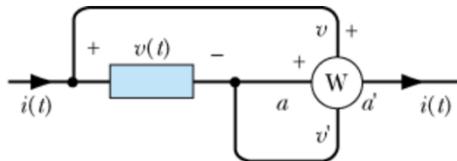
$$p_{ERO}(t) = -v(t)i(t) = -p_{ASS}(t)$$

**La differenza tra potenza erogata e potenza assorbita da un bipolo si compone del solo segno -,** a significare che **una volta la potenza viene ceduta dal bipolo e una volta immagazzinata**, ma ovviamente un dato può essere espresso in funzione di una o dell’altra definizione; ad esempio, se si consumano 6 watt di energia, si sta contemporaneamente assorbendo una quantità di -6 watt. Non è importante che la potenza assorbita da un bipolo sia sempre positiva o quella erogata sempre negativa, **l’importante è che in uno stesso bipolo l’una deve essere l’opposto dell’altra.**

Per misurare questa grandezza si può, intuitivamente, calcolare differenza di potenziale e intensità di corrente con i relativi strumenti e applicare la formula sopra elencata; è una strada corretta ma non la più pratica, visto che tensione e corrente possono variare nel tempo in un circuito. Un approccio più pratico consiste nell’utilizzo di uno strumento, il **wattmetro**, che permette di calcolare la potenza di un bipolo se opportunamente collegato ad esso; proprio come per l’amperometro e il voltmetro, anche il wattmetro sarà, per il momento, una black box. Il wattmetro è un dispositivo che presenta due coppie di morsetti: una coppia  $a$  e  $a'$ , detta **amperometrica**, e una coppia  $v$  e  $v'$  detta **voltmetrica**, ognuna delle quali ha un morsetto contrassegnato con il + e uno con il -.



**Il corretto collegamento del wattmetro al bipolo prevede che i morsetti amperometrici siano collegati in modo tale che la corrente li attraversi dal verso + al verso -, mentre quelli voltmetrici devono collegarsi ai rispettivi morsetti del bipolo (+ con + e - con -); lo strumento, con un apposito indicatore e la relativa scala graduata, restituisce il valore della potenza, negativa o positiva che essa sia. Il wattmetro collegato ad un bipolo figura come segue:**



La necessità del wattmetro rispetto alla tecnica inizialmente proposta risiede nel fatto che **la potenza è una grandezza istantanea, cioè cambia al variare del tempo**: calcolando prima la corrente di un bipolo e poi la differenza di potenziale per poi farne il prodotto, viene restituito solo il valore della potenza ad un istante di tempo specifico, ma in quello successivo potrebbe cambiare; di contro **il wattmetro rileva il valore della potenza istante per istante e aggiorna l'indicatore in tempo reale**.

**L'energia elettrica assorbita da un bipolo in un certo intervallo di tempo** è la seconda delle grandezze “energetiche” che dipendono da corrente e tensione e viene espressa come:

$$U_{ASS}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ASS}(t)dt = [J \approx kWh]$$

Dualmente, **l'energia elettrica erogata dal bipolo nello stesso intervallo di tempo**:

$$U_{ERO}(t_1, t_2) = -U_{ASS}(t_1, t_2) = -\int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ERO}(t)dt$$

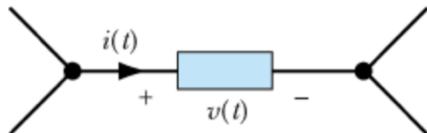
Si può ben notare come **la definizione di energia sia legata a quella di potenza dall'operatore integrale** (relazione integrale), in realtà è **la potenza** che, nella sua definizione fisica, è **la variazione di energia nel tempo** (forma differenziale). Questa definizione **permette di capire con più precisione perché la potenza è una grandezza istantanea e perché l'energia**, come figura dalla sua espressione, **sia una grandezza integrale**; inoltre, osservandola si può comprendere meglio l'espressione che è stata mostrata in precedenza:

$$p(t) = \frac{dU}{dt} = v(t) \frac{dq}{dt} = v(t)i(t)$$

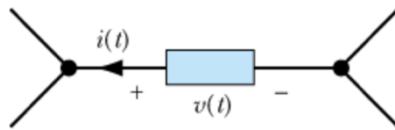
Se l'unità di misura della **potenza** è il **watt**, per misurare l'**energia** si può usare il **kilowattora** ( $1kWh = 3600kJ$ ) e rappresenta l'energia assorbita da un bipolo per un ora ad una potenza costante di  $1kW$ ), tuttavia **il SI prevede che l'unità di misura canonica per l'energia sia il Joule**.

Restano da determinare, per ora, ancora due incognite: **come si determina l'energia elettrica assorbita da un bipolo in un dato intervallo di tempo e come cambiano le formule di potenza ed energia quando cambia la convenzione fatta finora.** Alla prima domanda si risponde semplicemente: con un **contatore**, un dispositivo che si trova in tutte le abitazioni che calcola l'energia assorbita di tutti i bipoli della struttura; per il secondo quesito, **si possono considerare due convenzioni:**

- **Convenzione dell'utilizzatore** (o standard), è quella fatta finora, la quale prevede che la corrente entri nel bipolo dal morsetto contrassegnato con il + relativo alla differenza di potenziale;



- **Convenzione del generatore** (o non standard), opposta alla precedente, prevede che la corrente entri nel bipolo dal morsetto contrassegnato con il - relativo alla differenza di potenziale.



Finora è sempre stata utilizzata la convenzione dell'utilizzatore, quindi le relazioni espresse in precedenza sono relative a tale convenzione. **Poiché il verso della corrente è arbitrario, è arbitraria anche la convenzione**, quindi scegliere una o l'altra è equivalente fintantoché si adeguano le formule e le considerazioni ad essa.

**Usando la convenzione del generatore le formule relative all'altra convenzione devono solo cambiare di segno per adeguarsi alla nuova situazione** (ovviamente non per l'energia, visto che dipende sempre dalla relativa potenza). Riassumendo le leggi di potenza ed energia per le due convenzioni:

- **Convenzione dell'utilizzatore**

$$\begin{cases} p_{ASS}(t) = v(t)i(t) \\ p_{ERO}(t) = -v(t)i(t) = -p_{ASS}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{ASS}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ASS}(t)dt \\ U_{ERO}(t_1, t_2) = -\int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ERO}(t)dt \end{cases}$$

- **Convenzione del generatore**

$$\begin{cases} p_{ASS}(t) = -v(t)i(t) \\ p_{ERO}(t) = v(t)i(t) = -p_{ASS}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{ASS}(t_1, t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ASS}(t)dt \\ U_{ERO}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p_{ERO}(t)dt \end{cases}$$

La prima cosa da capire per **studiare un bipolo** è se esso sia **passivo o attivo**, ovvero **capire se il bipolo cede o acquista energia dalla rete**. In una rete è importante capire **da dove proviene il bilancio energetico**, ovvero **sapere quali particolari bipoli consumano o cedono energia**; ad esempio, una stufa assorbe energia dalla rete e la trasforma in calore, mentre un pannello solare la fornisce.

Si dirà che **un bipolo è passivo se, fatta su di esso la convenzione dell'utilizzatore, per ogni possibile sua condizione di funzionamento e per ogni istante di tempo risulta:**

$$U_{ASS}(-\infty, t) = \int_{-\infty}^t p_{ASS}(\tau)d\tau \geq 0 \quad \forall t$$

Ma la presenza di  $-\infty$  come estremo di integrazione rende questa definizione poco pratica all'utilizzo; pertanto, si usa una definizione più comoda: **un bipolo è passivo se esiste una condizione iniziale, ad un istante  $t_0$ , tale che, per ogni condizione di funzionamento che parta da  $t_0$  risulta:**

$$U_{ASS}(t_0, t) = \int_{t_0}^t p_{ASS}(\tau)d\tau \geq 0 \quad \forall t \geq t_0$$

Da cui si può dedurre che **un bipolo passivo assorbe energia dalla rete a cui è collegato**. Di contro, **si dice che un bipolo è attivo se non è passivo**; affinché un bipolo sia attivo è, quindi, sufficiente trovare almeno una condizione di funzionamento che renda negativa l'energia elettrica assorbita, il che significa che il bipolo è capace di fornire energia al resto del circuito. Più generalmente, si può vedere se un bipolo è passivo se, fatta una convenzione, il segno dell'energia è costante.

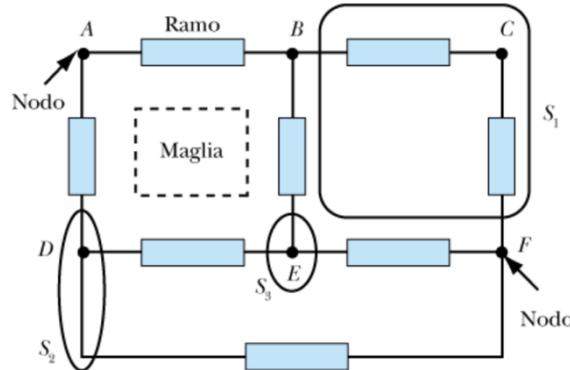
## LE LEGGI DI KIRCHHOFF E LA MATRICE DI INCIDENZA

Nei capitoli precedenti sono state introdotte le grandezze fondamentali, sapendo che **possono variare arbitrariamente nel tempo** in base a quale circuito descrivono, ma prima di poter risolvere qualsiasi rete bisogna **conoscere le leggi che ci permettono di farlo**. In questa ottica si inseriscono le **leggi di Kirchhoff** (d'ora in poi riferite come LK), una coppia di leggi fondamentale per la risoluzione dei circuiti, perché **non esiste rete che non possa essere risolta usandole, prima o poi**, e perché **evitano i formalismi delle leggi di Maxwell**; in questa sede non ci si interesserà di come esse derivino dalle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, basterà conoscerle e saperle applicare.

Prima di poter conoscere le LK bisogna **introdurre alcune definizioni preliminari** che coinvolgono la nomenclatura delle varie componenti di un circuito. Viene detto:

- **Ramo** (o lato), ogni bipolo che costituisce la rete;
- **Nodo**, ogni morsetto dei suddetti bipoli;

- **Superficie gaussiana**, ogni superficie chiusa che racchiuda al suo interno una parte del circuito (ovvero un numero arbitrario di terminali) senza però tagliare l'involturo di alcun bipolo;
- **Maglia**, ogni linea chiusa che collega un numero arbitrario di nodi;
- **Albero**, un insieme di rami che unisce fra loro tutti i nodi della rete senza formare alcuna maglia.

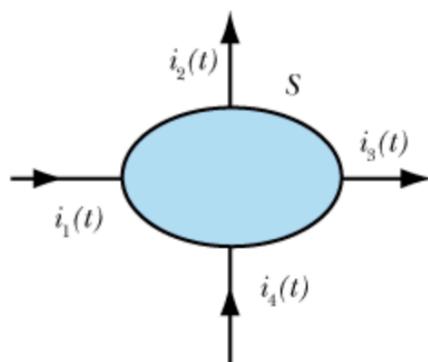


Chiaramente, se una rete ha  **$n$  nodi** saranno necessari  **$n - 1$  rami** per collegare tutti i nodi, di conseguenza **ogni albero della rete dovrà essere composto di  $n - 1$  rami**. Definendo **coalbero** l'insieme di rami non coinvolti nella costruzione di un albero, se in una rete a  **$n$  nodi e  $r$  rami** un albero sarà composto da  $n - 1$  rami, il **coalbero** sarà composto necessariamente da  **$r - (n - 1)$  rami**.

Con queste definizioni si è pronti ad enunciare le LK: esse sono due e vengono dette **Legge di Kirchhoff per le correnti** (d'ora in poi riferita come LKC) e **Legge di Kirchhoff per le tensioni** (d'ora in poi riferita come LKT).

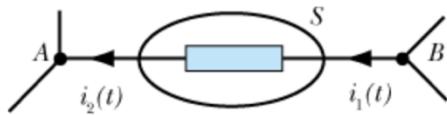
#### LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE CORRENTI

Per poter enunciare e definire la Legge di Kirchhoff per le Correnti è necessario effettuare alcune operazioni preliminari: in primis va **definita una superficie gaussiana** su cui applicare la legge e poi bisogna individuare e dare un nome a tutte le correnti della rete, con tanto di verso. Con queste premesse si passa ad enunciare la LKC:  $\forall S_g \subseteq C : S_g$  è una superficie gaussiana del circuito  $C$ , sia  $n$  il numero di terminali tagliati da  $S_g$ ,  $\sum_{k=1}^n (\pm) i_k(t) = 0, \forall t$ .



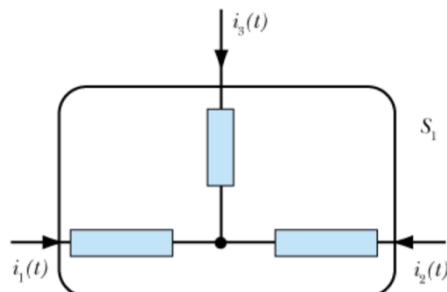
Si può interpretare la LKC come segue: **la somma algebrica** (per cui i segni delle correnti sono necessari) **delle correnti che circolano nei terminali tagliati dalla superficie gaussiana**, in ogni istante di tempo, **è nulla** (si può semplificare l'enunciato della LKC andando a considerare le correnti come **entrant** o **uscent** dalla superficie gaussiana).

Prendendo in considerazione una **superficie gaussiana che racchiude in sé un unico bipolo** e applicando la LKC, si può ben notare come **la corrente che circola in un terminale è uguale a quella che circola nell'altro**:



Questa considerazione **giustifica l'affermazione "corrente che circola in un bipolo"** fatta finora. La LKC è anche detta, riduttivamente, **legge dei nodi** perché **può essere applicata** in generale a **qualsiasi nodo**, basta che si prenda una **superficie gaussiana che racchiuda in sé il nodo** in questione.

Poiché **i versi delle correnti sono scelti in modo arbitrario** (in base alla convenzione fatta) non deve spaventare se in una superficie gaussiana si trovano **tutte correnti entranti/uscenti**; infatti, **non ci sarà alcun accumulo di carica** all'interno della regione in esame perché **la LKC garantisce l'annullamento della loro somma algebrica**, ciò significa che almeno una di queste correnti deve avere segno opposto rispetto alle altre. Ad esempio:



$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$i_1(t) = -i_2(t) - i_3(t)$$

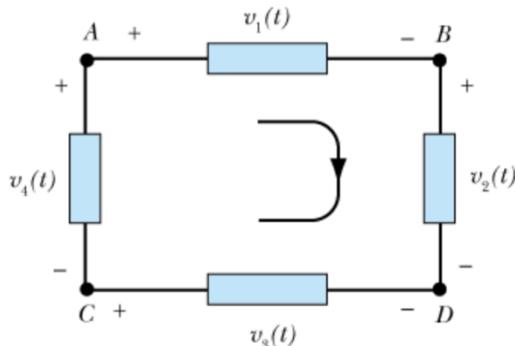
La LKC, prescindendo la natura dei bipoli del circuito, impone una relazione lineare tra le **correnti che circolano in essi**; dal punto di vista fisico si può dire che, **dal momento in cui le correnti sono una misura del tasso al quale le cariche elettriche attraversano i lati della rete**, la LKC asserisce che esse **non si accumulano in alcun modo**, ovvero che **la carica elettrica totale in un circuito si conserva**.

#### LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE TENSIONI

In maniera analoga alla LKC, per la **Legge di Kirchhoff per le Tensioni** (o, riduttivamente, legge delle maglie perché la si può applicare a qualsiasi maglia del circuito) bisogna adottare una **convenzione per la quale si associano ai morsetti di ogni bipolo della rete in esame un segno + e uno - e un nome alle relative tensioni**.

Fatte queste premesse, si può passare ad enunciare la LKT:  **$\forall M \subseteq C : n$  è il numero di bipoli della maglia  $M$ ,  $\sum_{k=1}^n (\pm)v_k(t) = 0, \forall t$** ; in termini più formali, **la LKT afferma che in ogni maglia del circuito e in ogni istante di tempo la somma algebrica delle tensioni è nulla**. Ciò significa che verranno associati il segno + alle tensioni dei bipoli percorsi dal + al - e il segno - a quelli percorsi dal - al + in senso orario; da questa affermazione si può evincere l'importanza della convenzione fatta in precedenza.

Ci si può facilmente convincere che, esprimendo ogni tensione di lato come differenza di potenziale ai morsetti, la LKT è automaticamente verificata. Ad esempio, considerando il seguente circuito:



$$v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) - v_4(t) = 0$$

$$[e_A(t) - e_B(t)] + [e_B(t) - e_D(t)] - [e_C(t) - e_D(t)] - [e_A(t) - e_C(t)] = 0$$

Anche per la LKT il legame imposto alle tensioni è lineare e prescinde dalla natura dei bipoli in esame.

Le due leggi appena enunciate possono essere riassunte in un semplice schema:

Legge	Enunciato	Dominio di valenza
Legge di Kirchhoff per le Correnti (LKC)	$\sum_k (\pm)i_k(t) = 0$	Per ogni superficie gaussiana
Legge di Kirchhoff per le Tensioni (LKT)	$\sum_k (\pm)v_k(t) = 0$	Per ogni percorso chiuso

Come già anticipato, le due **Leggi di Kirchhoff** servono a risolvere qualsiasi circuito, ma non possono lavorare da sole perché esse agiscono unicamente dal punto di vista **topologico, non eziologico** visto che **non prendono in considerazione la natura dei componenti del circuito** su cui agiscono; inoltre, l'ambiguità del  $(\pm)$  viene rimossa tenendo conto che per la LKC si considera il verso negativo per le correnti entranti e positivo per le uscenti dalla gaussiana, mentre per la LKT si considera il segno del primo morsetto del bipolo incontrato percorrendo la maglia.

Dal punto di vista fisico è stata fatta un'imprecisione, infatti **non è vero che le LK sono applicabili in ogni tipologia di circuito** ma solo in un caso particolare; infatti, la LKC ha validità solo quando il vettore densità di corrente è solenoidale e la LKT solo quando il campo elettrico è irrotazionale, ma queste due condizioni codificano un **regime filiforme stazionario**.

Dunque, le LK valgono precisamente solo in regime stazionario (da cui derivano) ma, all'atto pratico, esse possono essere applicate con tranquillità se le dimensioni del circuito non diventano paragonabili (o maggiori) della lunghezza d'onda associata alla più alta frequenza di interesse. Questo significa che, indicando con  $D$  la dimensione del circuito, con  $c$  la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche e con  $\lambda$  la lunghezza d'onda della più alta frequenza di interesse, le LK sono applicabili con una buona approssimazione se il **tempo  $\tau$  necessario ad una**

**perturbazione elettromagnetica per propagarsi da un estremo ad un altro del circuito è trascurabile rispetto al periodo corrispondente alla più alta frequenza di lavoro:**

$$\frac{D}{c} = \tau \ll T = \frac{1}{\lambda}$$

I circuiti in cui sono presenti queste condizioni, e in cui quindi si possono applicare le LK, sono detti “**circuiti a parametri concentrati**” e si distinguono dai “**circuiti a parametri distribuiti**” per la rilevanza della propagazione dei segnali elettromagnetici, che non può essere trascurata in questi ultimi; il motivo per cui questa approssimazione è possibile è dovuto al fatto che **le LK sono comunque derivate dalle leggi di Maxwell** che descrivono e regolano il campo elettromagnetico.

Di seguito si affronteranno **prevalentemente circuiti a parametri concentrati**, infatti facendo un esempio per capire quanto poco interessano i circuiti a parametri distribuiti, si prenda in considerazione un circuito audio funzionante alla frequenza di  $f = 50 \text{ kHz}$ , la cui lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^3} \text{ m} = 6 \text{ km}$$

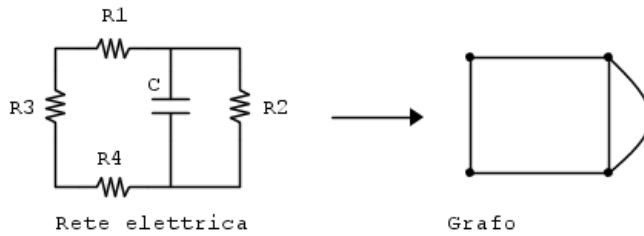
Che è una lunghezza d'onda certamente più piccola del più grande impianto stereofonico che si può immaginare in questa sede. Tuttavia, questo risultato non impedisce il presentarsi di casi particolari, come ad esempio la costruzione di un circuito a microonde ( $\lambda$  corrisponde a qualche millimetro) in cui le dimensioni del circuito iniziano ad essere importanti in relazione alla lunghezza d'onda in esame.

**Il confine tra i due modelli non è ben chiaro**, anche perché **in uno stesso circuito si possono presentare le ipotesi per entrambi**; quando però si considera il modello di circuiti a **parametri concentrati** basta ricordare che **la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è virtualmente infinita** ed i relativi fenomeni si svolgono in **punti ad estensione nulla**. Ne consegue che **il campo elettrico e magnetico possono essere confinati in regioni di spazio ben definite, in componenti chiamati condensatori e induttori**, mentre **i fenomeni di dissipazione dell'energia si verificano in componenti chiamati resistori**. Se invece il modello in considerazione è quello a **parametri distribuiti**, **le distanze fisiche riprendono importanza**, mentre campo elettrico e magnetico cessano di essere confinati in regioni di spazio ben definito ma sono distribuiti in tutto lo spazio.

In conclusione, **il modello di Kirchhoff può essere applicato in regime stazionario o quasi stazionario**, ovvero a frequenze basse, e perde di validità per frequenze alte o in regimi ottici.

Come preannunciato in precedenza, **le LK permettono la risoluzione** (o di trovare il punto di funzionamento) **dei circuiti ed in esse sono contenute anche le informazioni circa il numero di equazioni indipendenti** che è necessario scrivere per assolvere a tale compito, in particolare in un circuito composto da  $n$  nodi e  $r$  rami sono necessarie  $r$  equazioni totali, di cui  $n - 1$  LKC e  $r - (n - 1)$  LKT.

Dal momento in cui non si sta ancora deliberando sulla natura dei bipoli in esame (visto che le LK non ne tengono conto) è superfluo e può portare confusione disegnare le scatolette che rappresentano i bipoli quando si va a raffigurare il circuito; per semplificare la questione si fa riferimento al **grafo**, uno schema che si ottiene semplicemente rimuovendo le scatolette dal circuito e lasciando solo segmenti. È un termine del gergo che **non aggiunge informazioni a quanto detto finora ma semplifica l'interpretazione della rete**.

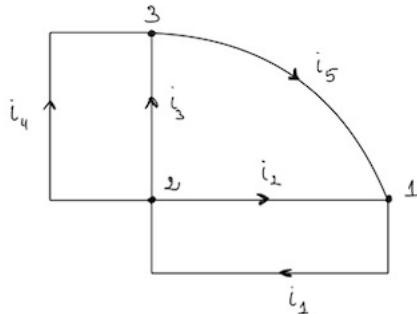


Un grafo si compone, quindi, **solo di nodi e rami** e, se **conserva le convenzioni fatte su corrente e tensione per ogni ramo**, viene detto **orientato**. Esiste un modo per scrivere automaticamente le **equazioni risolventi per una rete**, che permette di descrivere il grafo del circuito in questione per mezzo della **matrice di incidenza**, tutto ciò nell'ottica di poter fornire ad un calcolatore una rete e ricevere automaticamente la sua soluzione.

Sia assegnata una **rete di  $n$  nodi e  $r$  rami**, le **informazioni** contenute in questa rete possono essere di due tipologie: **quantitative**, la rete può descrivere **il modo in cui i diversi bipoli sono collegati tra loro**, e **qualitative**, per la quale **deve essere fornita la natura di ogni bipolo**. Concentrandosi sul primo tipo di informazione, si può asserire che essa è **contenuta automaticamente nel grafo della rete**, che ha come scopo primario proprio quello di descrivere i collegamenti della rete stessa, bisogna solo portare quest'informazione in una **forma più analitica** di quella del semplice grafo. Sia costruita la matrice  $A_C$  di  $n$  righe e  $r$  colonne, in cui l'elemento generico è:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{dal nodo } i \text{ parte il ramo } j \\ -1 & \Leftrightarrow \text{al nodo } i \text{ arriva il ramo } j \\ 0 & \Leftrightarrow \text{il nodo } i \text{ non è interessato dal ramo } j \end{cases}$$

È chiaro come questa matrice (detta matrice d'incidenza completa della rete) **rappresenti analiticamente tutto ciò che era graficamente espresso nel grafo orientato della rete** (sono portati anche i segni delle correnti). Ad esempio, sia osservato il seguente grafo di una rete:



La matrice d'incidenza completa della rete è:

$$A_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove **le tre righe rappresentano i tre nodi** della rete e **le cinque colonne i cinque rami**. Inoltre, vale la pena notare come **la somma algebrica degli elementi di una colonna sia sempre nulla**, a rappresentare l'equilibrio tra correnti uscenti ed entranti nei nodi di uno stesso ramo.

Dal momento in cui le righe rappresentano i nodi della rete, **moltiplicando la matrice di incidenza con il vettore colonna delle correnti nei rami si ottiene un sistema di equazioni lineari che rappresenta tutte le equazioni di Kirchhoff per i nodi:**

$$A_C \cdot I = 0$$

Infatti, per ogni singolo nodo la corrente  $i_k$  comparirà con il verso + o - in base come si presenta oppure non comparirà se non percorre il nodo. Riprendendo l'esempio di prima:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{cases} i_1 - i_2 - i_5 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \end{cases}$$

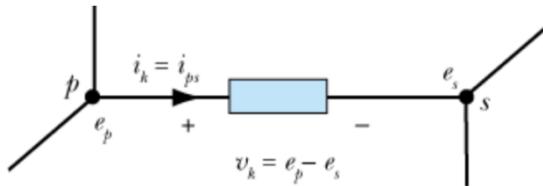
Ma è stato in precedenza detto che **non tutte le equazioni del sistema sono necessarie**; infatti, le LKC indipendenti sono solo  $n - 1$  e in questo esempio particolare va **eliminata un'equazione**. Riducendo la matrice di incidenza ad una matrice  $(n - 1) \times r$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Che viene detta **matrice d'incidenza ridotta**. Per quanto riguarda le LKT, è stato già mostrato come, **considerando le tensioni di lato come differenze di potenziale, le equazioni sono automaticamente soddisfatte**; supponendo che sul lato  $k$  insistano i nodi  $s$  e  $p$ :

$$v_k(t) = e_p(t) - e_s(t)$$

Dove  $e_p$  e  $e_s$  sono i potenziali dei nodi  $p$  e  $s$  rispetto ad un riferimento preso arbitrariamente (ad esempio il nodo escluso dalle equazioni di Kirchhoff) e sia fatta la **convenzione dell'utilizzatore** sul ramo.



Con le convenzioni fatte, è possibile esprimere le  $r$  tensioni di lato attraverso gli  $n - 1$  potenziali ai nodi. Indicando con  $E$  il vettore colonna dei potenziali di tali nodi (di cui si sono scritte le LKC), si può affermare che **le  $r$  relazioni che esprimono le tensioni di lato in funzione dei potenziali ai nodi hanno l'espressione matriciale**:

$$V = A^T \cdot E$$

Dove  $A^T$  è la matrice  $r \times (n - 1)$  trasposta di  $A$ . Ne consegue che nell'espressione della generica tensione di lato  $v_k$  compariranno i potenziali dei due nodi a cui il lato  $k$  afferisce, con il segno positivo o negativo a seconda dell'orientamento del lato stesso; chiaramente, se sul lato  $k$  insiste il nodo il cui potenziale è preso a riferimento nullo, nell'espressione della tensione di lato interverrà solo il potenziale dell'altro nodo.

Essendo tutti sistemi di equazioni lineari omogenei, **ammettono sempre la soluzione banale**, che viene **esclusa** perché codifica una rete in cui non passa corrente e in cui non c'è tensione, ovvero una **rete inutile**.

## LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE

Una conseguenza diretta delle LK è il **Teorema di Tellegen**, con il quale si dimostra la **conservazione delle potenze elettriche all'interno di una rete**; in realtà, il teorema ha una forma più generale: “**la somma algebrica delle potenze elettriche virtuali assorbite da tutti i bipoli di due reti topologicamente uguali è nulla in qualsiasi istante di tempo**”.

**In un circuito si consumano forme di energie**, altrimenti esso sarebbe in quiete e non ci sarebbero interrogativi a cui rispondere, ma **dell'energia non si sa nulla se non il fatto che essa si conserva**; il **Teorema di Tellegen** fornisce un **affaccio globale sul tema della conservazione di energia** perché permette di dire che **tra due sistemi elettricamente scollegati la potenza** (e quindi l'energia) **si conserva**.

## DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI TELLEGGEN

*Ipotesi:*

$\forall C, C^*$ : sono due circuiti topologicamente uguali ( $r$  rami e  $n$  nodi con lo stesso grafo)

$V = \{v_k(t) \in C\}$  soddisfa le LKT

$I = \{i_k^*(t) \in C^*\}$  soddisfa le LKC

Sia fatta su entrambe le reti la stessa convenzione (dell'utilizzatore per comodità)

$\forall k : \text{ramo della rete } \exists v_k(t) \cdot i_k^*(t) : v_k(t) \in C, i_k^*(t) \in C^*$

*Tesi:*

$$\sum_{k=1}^r v_k(t) i_k^*(t) = 0$$

*Dimostrazione:*

La sommatoria potrebbe essere espressa anche in funzione dei nodi che individuano un ramo; tuttavia, questo processo è poco pratico senza fare alcune modifiche perché non è noto a priori quali rami, tra i nodi  $p$  e  $s$ , siano effettivamente presenti nella rete; infatti, in un grafo non tutti i nodi sono collegati tra di loro. L'ostacolo può essere superato considerando tra i nodi che non sono collegati nel grafo dei “**bipoli aperti**” a cui viene associata corrente nulla (come se il ramo fosse tagliato); né la rete né la sommatoria del teorema di Tellegen vengono modificate perché il prodotto  $v_k(t) \cdot i_k^*(t) = v_k(t) \cdot 0$  è nullo ed il ramo viene rimosso dal risultato finale ma in questo modo tutti i nodi possono essere collegati tra loro in una sommatoria. Con queste premesse il teorema di Tellegen viene alternativamente esposto:

$$\sum_{k=1}^r v_k(t) i_k^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n v_{ps}(t) \cdot i_{ps}^*(t) = 0$$

Dove  $\frac{1}{2}$  serve a non far ripetere i termini omonimi (ad esempio,  $ps$  e  $sp$ ). Dal momento in cui le tensioni della prima rete soddisfano le LKT, le si può esprimere sottoforma di differenza di potenziale:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n [e_p(t) - e_s(t)] i_{ps}^*(t) = \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n e_p(t) i_{ps}^*(t) - \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n e_s(t) i_{ps}^*(t)$$

Ma i due potenziali si possono portare fuori da una delle due sommatorie:

$$\sum_{p=1}^n e_p(t) \cdot \sum_{s=1}^n i_{ps}^*(t) - \sum_{s=1}^n e_s(t) \sum_{p=1}^n i_{ps}^*(t)$$

Ma poiché le correnti della seconda rete soddisfano le LKC:

$$\sum_{s=1}^n i_{ps}^*(t) = 0, \forall p \in [1, n]$$

$$\sum_{p=1}^n i_{ps}^*(t) = 0, \forall s \in [1, n]$$

In altri termini, fissato un nodo la sommatoria delle correnti uscenti o entranti nel nodo è nulla; questa affermazione è valida solo se si è nell'ipotesi della stessa convenzione tra le due reti. Da quanto appena detto si desume:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r v_k(t) i_k^*(t) &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n v_{ps}(t) \cdot i_{ps}^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n [e_p(t) - e_s(t)] i_{ps}^*(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n e_p(t) i_{ps}^*(t) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n e_s(t) i_{ps}^*(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n e_p(t) \cdot \sum_{s=1}^n i_{ps}^*(t) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n e_s(t) \sum_{p=1}^n i_{ps}^*(t) = 0 \end{aligned}$$

CVD

La potenza del **Teorema di Tellegen** sta nel fatto che **non vanno specificate le nature dei vari bipoli**, per cui è **ancora valido in occorrenza di bipoli non lineari** e, in particolare, **di due reti coincidenti** (grafo uguale a sé stesso); in quest'ultimo caso particolare il teorema si riduce ad affermare che **la somma delle potenze assorbite dai bipoli nel circuito è sempre nulla**.

Va fatta molta attenzione sul termine “**assorbite**”, infatti esso va a **dipendere dalle scelte inizialmente fatte sui versi di corrente e tensione**, ma nel circuito potrebbero figurare anche dei **generatori** per i quali andrebbe usato il termine “**fornito**” e l'enunciato potrebbe essere

alternativamente espresso come segue: **la potenza fornita dai generatori è pari a quella assorbita dai bipoli della rete**, in accordo con il **principio di conservazione dell'energia**.

Come considerazione finale sul **Teorema di Tellegen** bisogna interrogarsi sulla **fine che fa la potenza assorbita dai bipoli**; in generale la risposta a questo interrogativo è: **dipende dai bipoli**. Ci sono alcuni bipoli (come stufe e lampadine) **dove la potenza assorbita viene integralmente trasformata in calore** ed altri bipoli (come macchine termiche o elettriche) dove **l'80-90 % della potenza viene trasformata in energia meccanica e il restante in calore**.

## I BIPOLI E LE LORO CARATTERISTICHE

Con quanto detto finora, in particolare con le Leggi di Kirchhoff, non si è ancora entrati nel **dominio eziologico dei bipoli** ma si è solo affrontato il punto di vista **topologico**; di seguito si entrerà nel discorso introducendo il concetto di **caratteristica del bipolo**. Le LK permettono di scrivere, in una rete di  $r$  rami,  $r$  equazioni indipendenti ma **per risolvere un circuito è necessario conoscere sia la corrente che la tensione di ogni ramo**, ovvero conoscere  $2r$  parametri; in aiuto alle LK ci sarà ciò che proprio le LK avevano trascurato, ovvero le caratteristiche proprietarie dei bipoli.

La **caratteristica** di un bipolo è il **legame funzionale che collega la tensione e la corrente** del bipolo in esame; essa può essere rappresentata, indipendentemente dalla convenzione adottata, da un **funzionale che collega le variabili che descrivono il comportamento elettrico del bipolo ed alcune loro derivate**:

$$F\left(t, v, i, \frac{dv}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \frac{d^2i}{dt^2}, \dots\right) = 0$$

Se questo legame **non dipende dal tempo**, il **bipolo** è detto **tempo-invariante** e il funzionale si trasforma:

$$F\left(v, i, \frac{dv}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \frac{d^2i}{dt^2}, \dots\right) = 0$$

In entrambi i casi le grandezze elettriche non vengono mostrate in funzione del tempo per una questione di semplicità.

Detto in questi termini, la **caratteristica di un bipolo può essere un legame qualsiasi**, di tipo **algebrico e/o differenziale**, tra tensione e corrente che, nella **forma implicita** indicata, risulta difficile da manipolare; nella pratica il funzionale in forma implicita sarà possibile ridurlo in **forme più o meno trattabili e/o esplicabili**.

L'esempio più semplice di caratteristica di un bipolo è la **caratteristica statica**, in cui il funzionale viene espresso **solo su corrente e tensione, escludendo le loro derivate**:

$$F(v, i) = 0$$

Un bipolo con questo tipo di caratteristica viene detto **bipolo senza memoria**, in quanto sono le derivate che tengono traccia dell'andamento della grandezza.

Quando il **funzionale della caratteristica** di un bipolo può essere espresso in **forma esplicita**, il bipolo stesso viene detto **diniano**; tra i bipoli diniani si distinguono:

- **Bipoli controllati in corrente**, dove è la tensione ad essere espressa univocamente in funzione della corrente e, quindi, ad ogni corrente corrisponde certamente una sola tensione

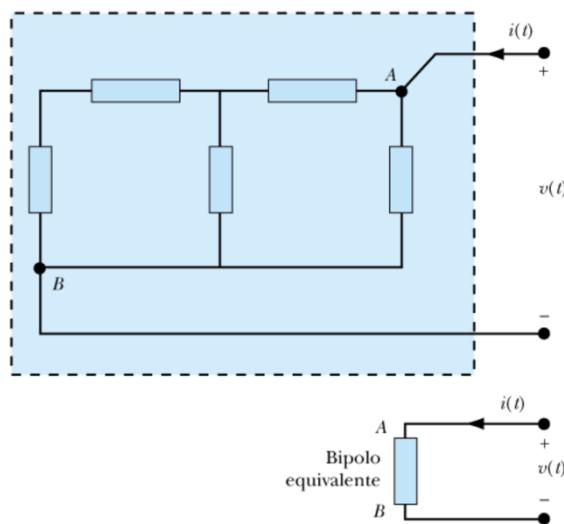
$$v = r(i)$$

- **Bipoli controllati in tensione**, dove è la corrente ad essere espressa univocamente in funzione della tensione e, quindi, ad ogni tensione corrisponde certamente una sola corrente

$$i = g(v)$$

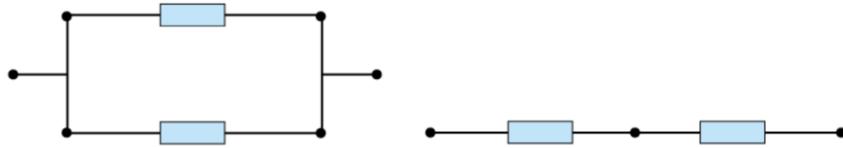
I bipoli possono essere classificati anche in base alla linearità del proprio funzionale, se tale è o no il legame tra tensione, corrente e le loro derivate.

Sia considerata una rete qualsiasi in cui **tra un morsetto A e un morsetto B sussistono una serie di bipoli collegati arbitrariamente tra loro** in modo tale che la rete, vista dai morsetti **A e B**, possa presentarsi come un **unico bipolo**. È chiaro che **tra i due morsetti sussiste un legame tensione-corrente che dipenderà da quali e come sono legati tra di loro i bipoli della rete**; questo legame costituisce la **caratteristica del bipolo visto dai morsetti A e B**. Si può, quindi, sostituire la rete **tra i due morsetti in questione con un bipolo dotato della stessa caratteristica rilevata tra A e B** in modo da **non far rendere conto al resto della rete del cambiamento**, ovvero senza far cambiare tensione e corrente sugli altri rami della rete; se questa operazione è possibile, **il nuovo bipolo e la rete vista dai morsetti A e B vengono detti equivalenti**. In sintesi, **due bipoli sono equivalenti se presentano la stessa caratteristica**, tuttavia l'**equivalenza si ferma all'esterno del bipolo**, perché all'interno possono esserci dinamiche diverse.



Per descrivere l'equivalenza tra due bipoli sono necessarie due precisazioni: in primis i morsetti tra i quali definire l'equivalenza e, infine, che tra il bipolo sostituito e quello iniziale sussiste solo l'equivalenza degli effetti esterni.

Nei capitoli precedenti sono stati individuati **due possibili collegamenti tra i bipoli**, il collegamento **in serie** e il collegamento **in parallelo**; si vuole individuare la caratteristica del bipolo equivalente al collegamento, note le caratteristiche dei bipoli che lo compongono. Sia preso, in prima istanza, il **collegamento in parallelo** e si applichi la **LKT alla maglia di cui è composto**:



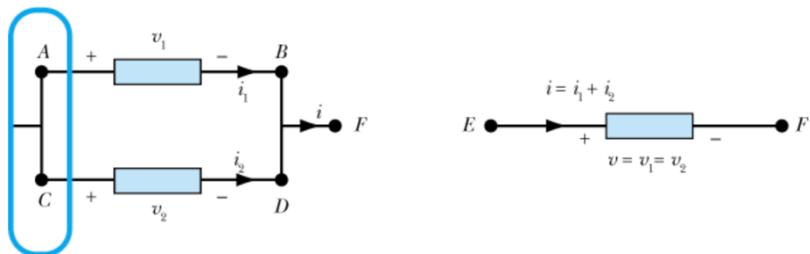
$$-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v$$

Si può, quindi, affermare che nel collegamento in parallelo **si conserva la tensione**, che è uguale nei due bipoli della rete e nel bipolo equivalente; con la LKC si può ottenere **la sua caratteristica**; infatti, in una **qualsiasi superficie gaussiana** che includa i nodi *A* e *B* (oppure *C* e *D*) ma che non include *E* (oppure *F*) la corrente che attraversa il bipolo equivalente è **uguale alla somma delle correnti che circolano nei bipoli che compongono il parallelo**:

$$i = i_1 + i_2$$

La **caratteristica** del bipolo equivalente si ottiene considerando **la tensione che circola tra i morsetti *E* e *F*** e **la somma delle correnti che circolano nei bipoli del parallelo**.

Per quanto riguarda il **collegamento in serie** la situazione **si inverte**; infatti, **a conservarsi non sono le tensioni ma le correnti**: la corrente che entra in un bipolo è la stessa che esce dall'altro. Applicando la LKC:



$$-i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 = i$$

Per quanto riguarda le **tensioni**, invece, applicando la **LKT alla maglia evidenziata** si può dire che **la tensione del bipolo equivalente è uguale alla somma delle tensioni relative ai bipoli che compongono il collegamento**:

$$v = v_1 + v_2$$

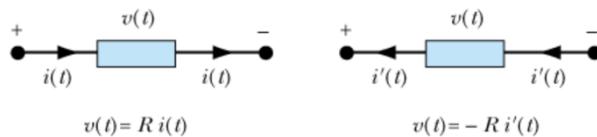
Infine, la **caratteristica** di questo bipolo equivalente si ottiene considerando **la corrente che entra nel primo bipolo della serie e la somma delle tensioni di tutti i suoi bipoli**.

Ogni bipolo ha delle **condizioni ideali di funzionamento** (dette “**condizioni nominali**”) definite dal **costruttore** al fine di far funzionare al meglio il bipolo; queste condizioni sono descritte nella **targa del bipolo** e costituiscono una **serie di istruzioni su come corrente e tensione devono circolare in esso al fine di farlo funzionare con una certa efficienza**. Superare o non arrivare alle condizioni nominali non significa che il bipolo non funziona, ma solo che esso produrrà un effetto di intensità minore (nel caso di una lampadina una luce più fioca) oppure un effetto di maggior intensità ma con un usura nettamente maggiore (nel caso di una lampadina una luce più intensa ma a temperature più alte per le quali si potrà deteriorare in minor tempo).

## RESISTORI

Per un gran numero di conduttori sussiste una **relazione di proporzionalità tra la differenza di potenziale e la corrente prodotta**: a questa relazione viene dato il nome di **prima Legge di Ohm**. Contestualizzata al periodo storico in cui è stata scoperta (primi decenni del XIX secolo), la legge di Ohm ha rappresentato una breccia importante nel mondo dell'elettromagnetismo ma, con le conoscenze odierne, si può marginalizzare la sua importanza ad un **ruolo unicamente statico**; infatti, è una legge che vale solo per certi tipi di bipoli (detti resistori), **non è generale come le LK**.

Si supponga di avere un **corpo conduttore** (un bipolo, ad esempio) e di individuare sulla superficie che lo racchiude **due punti a cui applicare una differenza di potenziale  $v(t)$** ; si supponga, inoltre, di poter **essere in grado di far circolare nel corpo una qualsiasi corrente  $i(t)$**  (senza curarsi di chi applica  $v(t)$  e  $i(t)$ ). Si può sperimentalmente osservare come, se agli stessi punti individuati si applichi una differenza di potenziale **x volte maggiore a  $v(t)$ , si potrà osservare una corrente x volte maggiore a  $i(t)$** . Per entrambe le **convenzioni** (rispettivamente **dell'utilizzatore e del generatore**) si può esprimere questo rapporto proporzionale come:



Dove  $R \geq 0$  viene detta **resistenza del corpo** in esame (quando alimentato nella maniera indicata) e **si misura in Ohm  $\Omega$** ; in particolare, un resistore ha una resistenza di  $1\Omega$  quando, alimentato da una differenza di potenziale di  $1V$ , è percorso da una corrente di  $1A$ . Quanto appena detto è **la forma più generale della legge**; infatti, la resistenza  **$R$  dipende anche dai punti a cui viene applicata la differenza di potenziale e dalle superfici attraverso cui la corrente viene portata e prelevata**; infatti, per evitare complicazioni si sono supposti gli elettrodi puntiformi.

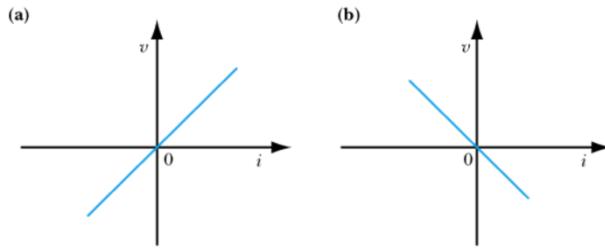
Ohm, padre fisico del bipolo resistore, era essenzialmente un fisico classico e, pertanto, ha visto nella corrente la derivazione del vettore densità di corrente e nella tensione l'integrale di una forza; ciò condusse il fisico a vedere il piano tensione – corrente come un piano forza – velocità. Dalle osservazioni effettuate sulla resistenza, Ohm ha rilevato notevoli similitudini con il moto viscoso; infatti, gli elettroni in movimento grazie all'azione del campo elettrico  $\vec{E}$  subiscono una resistenza viscosa prodotta dal reticolo cristallino e dalla configurazione atomica del conduttore. La resistenza ohmica si comporterebbe, pertanto, come una resistenza viscosa al passaggio delle cariche elettriche.

Il resistore è un bipolo **controllato in corrente**, ma può essere espresso come un bipolo **controllato in tensione** (per entrambe le convenzioni) grazie al concetto di conduttanza:

$$i(t) = G \cdot v(t) \vee i(t) = -G \cdot v(t)$$

Per **conduttanza** si intende  $G = \frac{1}{R} \geq 0$  e **si misura in Siemens  $S$**  (o Mho in letteratura anglosassone, Ohm al contrario).

Tra la **Legge di Ohm** con la **convenzione del generatore** e con la **convenzione dell'utilizzatore** cambia unicamente il **segno meno**, il quale non è **associato** alla resistenza (che rimane sempre la stessa) ma **alla corrente**. A cambiare è anche il grafico di proporzionalità:



Con una più attenta analisi della Legge di Ohm si possono osservare i vari componenti che indicano la **dipendenza della resistenza dal materiale o dalla sua forma**; prendendo per semplicità un **cilindro abbastanza lungo rispetto alla sua dimensione trasversale**, è stato osservato sperimentalmente da Ohm che per la resistenza, nella maggior parte dei conduttori metallici e in un ampio campo di valori, vale:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Detta **seconda Legge di Ohm**;  $\rho$  è la resistività (il suo inverso  $\sigma$  è detto conducibilità), dipende dalla natura e dalle condizioni fisiche del materiale e si misura in  $\Omega \cdot m$  (la conducibilità  $S/m$ ), mentre il rapporto lunghezza-superficie  $L/S$  va a indicare la **dipendenza dalla forma del conduttore**. La **differenza sostanziale tra resistività e resistenza** è proprio nel **conduttore**: la prima fa riferimento solo al materiale di cui il conduttore è composto mentre la seconda al conduttore stesso, quindi alla sua forma geometrica.

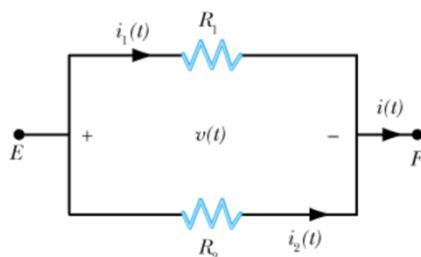
**Un fattore importante da cui dipende la resistività di un materiale è la temperatura**, con una **relazione quasi lineare** (è un approssimazione fatta sui buoni conduttori e in un vasto campo di temperature):

$$\rho(T) = \rho(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Dove  $\alpha$  è definito come il **coefficiente di temperatura del materiale** e si misura in  $K^{-1}$ . Per essere precisi, **quando si riscalda un corpo non cambia solo la sua resistività ma anche la sua forma geometrica**; la relazione tra resistività e resistenza suggerisce di **considerare tutti questi fattori quando si calcola R a diverse temperature**; tuttavia, dato che il coefficiente di dilatazione lineare della maggior parte dei metalli è dell'ordine di  $10^{-5} K$  i fenomeni di dilatazione sono trascurabili rispetto alle variazioni di resistività (sono ordini di grandezza molto diversi).

Si considerino **due resistori in parallelo** di resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , facendo su di essi la **convenzione dell'utilizzatore**, si può scrivere (grazie alla LKT applicata alla maglia):

$$v(t) = R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t)$$



D'altra parte, per la LKC applicata ai nodi in comune dei resistori, **la corrente del bipolo equivalente deve essere la somma delle due correnti in esame**:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} = v(t) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v(t)}{R_E}$$

Dove  $R_E$  è la resistenza del bipolo equivalente, che si può calcolare:

$$R_E = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Poiché in futuro l'operazione del parallelo verrà fatta con una certa frequenza, si introduce il simbolo  $\parallel$ :

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Per  $n$  resistori in parallelo tra i morsetti  $A$  e  $B$ , la corrente k-esima:

$$i_k(t) = \frac{v_{AB}(t)}{R_k} = G_k v_{AB}(t)$$

Ma, applicando la LKC:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n G_k v_{AB}(t) = v_{AB}(t) \sum_{k=1}^n G_k = v_{AB}(t) G_E$$

Ma:

$$R_E = \frac{1}{G_E} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

È necessario, adesso, stabilire il metodo con cui si ripartiscono le correnti nel parallelo di due resistenze. Sapendo che:

$$v(t) = i(t) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

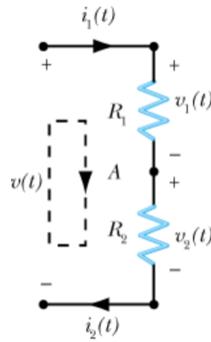
La regola del **partitore di corrente** è:

$$i_1(t) = i(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \wedge i_2(t) = i(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Il partitore di corrente permette di **determinare le singole correnti** che passano in una delle due resistenze in parallelo a partire dalla corrente totale che entra/esce dai morsetti del circuito.

Adesso si considerino **due resistori in serie** di resistenze  $R_1$  e  $R_2$ : si possono fare dei **ragionamenti analoghi per determinare la resistenza del bipolo equivalente**, applicando quindi la LKC al nodo A:

$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} = \frac{v_2(t)}{R_2}$$



Mentre per la LKT alla maglia del circuito:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = i(t)R_1 + i(t)R_2 = i(t)(R_1 + R_2) = i(t)R_E$$

Da cui si desume che:

$$R_E = R_1 + R_2$$

**Per un sistema di  $n$  resistori in serie:**

$$R_E = \sum_{k=1}^n R_k$$

Analogamente a quanto fatto per la corrente nel parallelo, si vuole stabilire il **metodo con cui ripartire le tensioni in una serie** di due resistenze. In base a quanto appena detto:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Dove ognuna delle tensioni è:

$$v_1(t) = i(t)R_1 \wedge v_2(t) = i(t)R_2$$

Si può quindi scrivere:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2}$$

Da cui:

$$v_1(t) = v(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \wedge v_2(t) = v(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Detta **regola del partitore di tensione**.

Si determini la **potenza assorbita da un resistore**, sia nel caso in cui si sia adottata la convenzione dell'utilizzatore che quella del generatore:

$$p_{ASS}(t) = v(t)i(t) = [R \cdot i(t)]i(t) = R \cdot i(t)^2 = \frac{v(t)^2}{R}$$

$$p_{ASS}(t) = -v(t)i(t) = -[-R \cdot i(t)]i(t) = R \cdot i(t)^2 = \frac{v(t)^2}{R}$$

In entrambi i casi, con  $R > 0$ , la potenza assorbita dal resistore è sempre positiva; bisogna ora determinare che fine fa questa potenza e in aiuto ci viene la Legge di Joule, per cui ogni resistore nel tempo trasforma in calore un'energia elettrica pari a:

$$\Delta U = \int_{\Delta t}^{\square} p(t)dt = R \int_{\Delta t}^{\square} i(t)^2 dt$$

Si può dire che la Legge di Joule impone che la quantità di calore sviluppata da una corrente elettrica che attraversa un conduttore di resistenza  $R$  in un determinato intervallo di tempo è:

$$\Delta Q = \frac{\Delta U}{4186} = 0.00024 \cdot R \int_{\Delta t}^{\square} i(t)^2 dt$$

Supponendo che la corrente non cambia nel tempo:

$$\Delta Q = 0.00024 \cdot R i^2 \cdot \Delta t$$

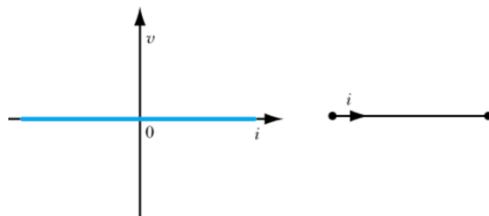
Da cui si può evincere che il calore sviluppato dipende proporzionalmente dalla resistenza del conduttore, dal quadrato della corrente che vi passa e dal tempo  $\Delta t$  in cui essa circola. L'effetto prodotto, descritto dalla Legge di Joule, prende il nome di effetto Joule ed è particolarmente dannoso quando i due poli di un generatore di tensione vengono messi in contatto tra loro senza l'intermediazione di un apparecchio di resistenza sufficiente, cioè vengono messi in cortocircuito: l'intensità di corrente è limitata dalla sola resistenza interna del generatore e può raggiungere valori talmente alti da produrre un calore tale da bruciare il circuito; tuttavia, l'effetto Joule ha importanti applicazioni pratiche nel momento in cui esso è controllato e circoscritto, ad esempio in molti apparecchi domestici come i ferri da stirare, le stufe o gli asciugacapelli.

In base alla relazione ohmica tra corrente e tensione, detto  $\alpha$  l'angolo di inclinazione della retta, si possono individuare due situazioni notevoli:

- $\alpha = 0$

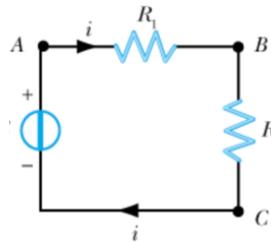
In questo caso si descrive il bipolo cortocircuito, la resistenza è nulla e dalla Legge di Ohm discende:

$$v(t) = 0 \quad \forall i(t)$$



Ciò significa che per qualunque corrente che circola in questo particolare resistore, la differenza di potenziale ai suoi morsetti è nulla. Un buon cortocircuito (non ideale ma buono) viene realizzato mediante un "chiodo" di rame abbastanza corto ed abbastanza robusto (1cm di lunghezza e 1cm di diametro) in modo tale da abbassare notevolmente il valore della resistenza.

In genere **al cortocircuito sono associati effetti catastrofici**, e la spiegazione di questa credenza comune è semplice: sia considerato il seguente circuito, dove **un generatore di tensione che eroga ai suoi capi una tensione costante  $E$  alimenta due resistori in serie**.



Si può facilmente intuire che in tutto il circuito passa la stessa corrente  $i$ , quindi per la LKT:

$$v_{AB}(t) + v_{BC}(t) + v_{CA}(t) = 0$$

Applicando la Legge di Ohm ai resistori:

$$R_1 i + R_2 i - E = 0$$

Da cui:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

La cui potenza assorbita è:

$$p_{ASS} = E \cdot i = \frac{E^2}{R_1 + R_2}$$

Supponendo  $E = 1kV$ ,  $R_1 = 1\Omega$  e  $R_2 = 100\Omega$ , si ha:

$$i = 10 A \wedge p_{ASS} = 10 kW$$

Che è un valore reale, infatti l'utilizzatore ( $R_2$ ) corrisponderebbe ad una decina di scaldabagni. Se, per un incidente, **l'utilizzatore si rompe** (ovvero la sua resistenza cala a zero ed esso diventa un cortocircuito), rifacendo i conti da capo:

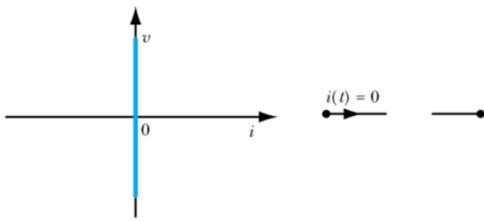
$$i = 1kA \wedge p_{ASS} = 1MW$$

In seguito all'incidente **la potenza assorbita centuplica e, per la Legge di Joule, si trasforma automaticamente in calore**. Il generatore, il resistore  $R_1$  e i fili di collegamento devono dissipare tutta questa energia riscaldandosi, ma **la potenza è tanto alta che tendono ad arroventarsi e ad incendiarsi**, producendo la catastrofe tanto aspettata da un innocuo bipolo.

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$

In questo caso **la corrente è nulla qualsiasi sia la tensione ai morsetti**:

$$i(t) = 0 \forall v(t)$$

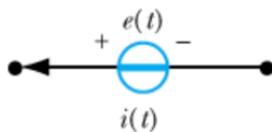


Il bipolo in questione viene definito **bipolo circuito aperto** (o a vuoto) e la sua realizzazione avviene ponendo tra i morsetti un perfetto materiale non conduttore (un isolante). In analogia con il resistore, il bipolo in questione può essere visto come un **conduttore a conducibilità elettrica nulla**; infatti, in tale situazione, la corrente che passa nel conduttore è nulla per qualsiasi tensione ai suoi capi.

Contrariamente al bipolo cortocircuito, **al circuito aperto non vengono quasi mai associate situazioni catastrofiche**, sebbene esso possa causare situazioni pericolose che verranno affrontate in seguito.

## GENERATORI INDIPENDENTI

**Il resistore è un bipolo passivo**, infatti è stato dimostrato come la potenza assorbita sia sempre maggiore di zero, si passa ad osservare quei bipoli che invece cedono energia alla rete, cioè i **bipoli attivi**. L'esempio ideale di bipolo attivo è il **generatore di corrente e tensione**, ma si inizi ad approfondire il **bipolo generatore di tensione**: la sua caratteristica permette di **imporre una tensione variabile nel tempo con una forma d'onda ben nota ed indipendente dalla corrente che in esso circola**.



$$v(t) = e(t), \forall i(t)$$

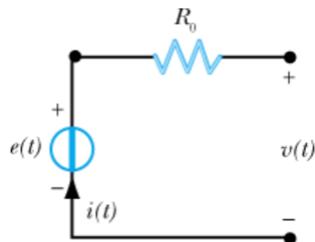
Il fatto che il generatore eroghi sempre la stessa tensione quale che sia la corrente che circola in esso implica che, **indipendentemente dal circuito a cui è collegato, la tensione ai suoi capi rimarrà sempre la stessa**. In precedenza, è stato assunto per vero che il generatore di tensione sia attivo, ma questa proprietà può essere dimostrata; considerando un **circuito su cui è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore**, in cui circola una corrente  $i(t)$  e a cui è collegato un generatore di tensione che eroga una tensione  $e(t)$  con una ben nota forma d'onda, **l'energia assorbita dal sistema in un certo intervallo è**:

$$U_{ASS}(t, t_0) = \int_{t_0}^t e(t)i(t)dt$$

**Ma la corrente che attraversa il generatore dipende dalla rete, non dal generatore stesso;** quindi, può essere definitivamente positiva o negativa oppure a segni alterni; ciò fa sì che **l'energia assorbita dal generatore possa essere negativa** e quindi che eroghi e non assorba. Si deduce, quindi, che **il generatore di tensione è un bipolo attivo**.

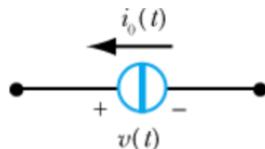
Nella caratteristica del generatore di tensione è **implicito che si possa erogare una qualsiasi tensione**, al limite infinita quando la corrente va ad infinito; chiaramente questa condizione è **ideale**,

e nella realtà quando la corrente che circola nel generatore diventa troppo grande la tensione non si mantiene uguale al valore che assume a corrente nulla (detta tensione a vuoto), bensì diminuisce fino a tendere a zero e a cambiare segno per un valore di corrente finito che prende il nome di **corrente di cortocircuito del generatore**. Per rappresentare al meglio un generatore di tensione reale si può collegare in serie ad un generatore ideale (con tensione erogata pari alla tensione a vuoto) un resistore, che porta in conto gli effetti della “**resistenza interna del generatore**”. Ovviamente, più la resistenza interna del generatore tende a zero più il modello reale si avvicina a quello ideale.



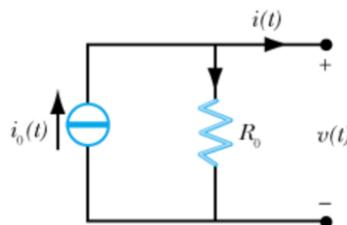
$$v(t) = e(t) - R_0 \cdot i(t)$$

In maniera analoga si può definire il **bipolo generatore di corrente** (ideale): in esso **circola una corrente con una forma d'onda assegnata ed indipendente dalla tensione tra i suoi terminali**.



$$i(t) = i_0(t), \forall v(t)$$

Ripetendo le stesse considerazioni di prima, si può dimostrare come anche il **generatore di corrente** sia un **bipolo attivo** e come esso sia ben **lontano dal modello reale**; tuttavia, la schematizzazione circuitale del generatore di corrente reale è diversa da quella del generatore di tensione perché **il resistore è in parallelo** e non in serie:



$$i(t) = i_0(t) - \frac{v(t)}{R_0}$$

Nonostante vi sia la massima libertà di scelta, spesso **quando si lavora con i generatori** non conviene adottare la convenzione dell'utilizzatore ma l'altra, detta appunto **convenzione del generatore**.

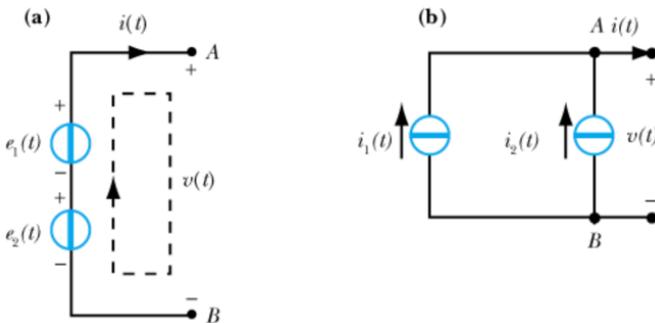
I **collegamenti in serie e in parallelo** dei due generatori si comportano in maniera **speculare**; infatti, per il generatore di tensione le tensioni si sommano in serie e per quello di corrente in parallelo. Più nel dettaglio, siano considerati:

- **Due generatori di tensione in serie**, si può applicare la LKT alla maglia del circuito e mostrare come la tensione equivalente sia la somma delle tensioni:

$$e_E(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

- **Due generatori di corrente in parallelo**, applicando la LKC al nodo A si può mostrare come la corrente equivalente sia la somma delle correnti:

$$i_E(t) = i_1(t) + i_2(t)$$



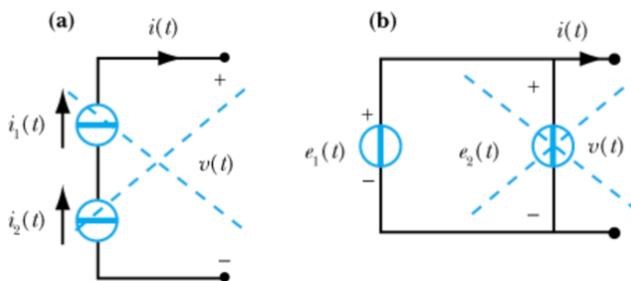
I casi rimanenti, ovvero la serie per i generatori di corrente e il parallelo per quelli di tensione, conducono inevitabilmente a contraddizioni insanabili:

- **Due generatori di tensione in parallelo**, con tensioni diverse, tenderanno ad imporre ai morsetti del generatore equivalente la propria tensione, ma in esso non può che essercene una sola; di conseguenza:

$$v(t) = e_1(t) \wedge v(t) = e_2(t) : e_1(t) \neq e_2(t)$$

- **Due generatori di corrente in serie**, con correnti diverse, tenderanno ad imporre ai morsetti del generatore equivalente la propria corrente, ma in esso non può che essercene una sola; di conseguenza:

$$i(t) = i_1(t) \wedge i(t) = i_2(t) : i_1(t) \neq i_2(t)$$



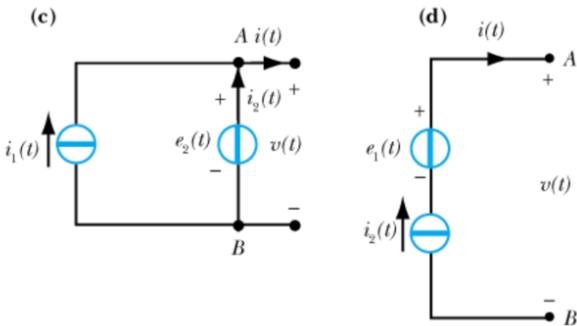
Da cui sorgono le contraddizioni preannunciate. Nonostante nel caso reale la situazione è sanabile, è sempre meglio evitare questo tipo di schematizzazioni perché possono portare ad altre complicazioni che verranno chiarite in seguito. **Possono essere analizzati due ulteriori casi, “misti”, ovvero:**

- **Un generatore di tensione in parallelo ad un generatore di corrente**, in questo caso non basta considerare che il generatore di tensione impone ai morsetti del bipolo equivalente la propria tensione ma bisogna anche mostrare che tale bipolo deve essere in grado di erogare qualsiasi corrente mantenendo costante la sua tensione ai morsetti. Ciò è vero perché, essendo

la corrente erogata dal generatore di tensione arbitraria, anche la corrente totale lo è, in quanto somma di una corrente fissa (prodotta dal generatore di tensione) e una arbitraria:

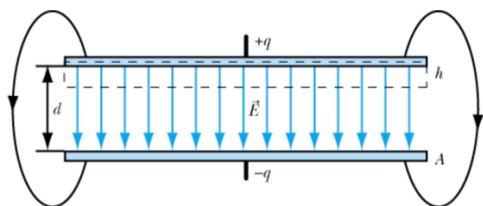
$$i(t) = i_{GC}(t)[\text{fissa}] + i_{GT}(t)[\text{arbitraria}]$$

- **Un generatore di corrente in serie ad un generatore di tensione**, in maniera del tutto analoga al caso precedente si può dimostrare che il bipolo equivalente è un generatore ideale di tensione.



## CONDENSATORI

Il **bipolo condensatore** può essere facilmente schematizzato ponendo **faccia a faccia, ad una distanza  $d$ , due conduttori piani in un mezzo isolante**; d'ora in poi, indipendentemente dalla loro forma, i due conduttori verranno detti **armature del condensatore**. Per comprendere il nome di questo bipolo si supponga che sulle due armature, isolate da ciò che le circonda, siano posizionate cariche di segno opposto,  $q$  e  $-q$ ; il campo elettrico sostenuto da questa distribuzione di cariche è costituito da linee di campo parallele che escono da un'armatura ed entrano nell'altra, equipassiate nella regione centrale (compresa tra i due conduttori) e che si diradano nella regione più esterna (non mostrata in figura). Questa configurazione suggerisce l'idea per cui le **linee di campo si condensano**, si accumulano, in una certa regione e supportano l'intuizione per cui gran parte dell'energia del campo si condensa al centro delle due armature. Per il momento **si suppone che il dielettrico tra le due armature sia il vuoto**, ma in seguito quest'ipotesi verrà rimossa e si analizzerà il caso di un generico dielettrico.



Da ciò si può desumere che **il condensatore è caratterizzato da due grandezze**: la **carica  $q$** , che non è la carica totale del condensatore (che è nulla) ma corrisponde al valore assoluto della carica che viene posizionata su ognuna delle due armature, e la **differenza di potenziale  $V_0$**  che si instaura tra di esse. Queste due grandezze sono in una **relazione lineare tra di loro**:

$$q = C \cdot V_0$$

Dove la costante di proporzionalità  **$C$  è chiamata capacità del condensatore e dipende dalla forma e dalla posizione relativa delle due armature**, nonché dal dielettrico interposto tra di esse. La sua

unità di misura è il **farad**, in onore del fisico inglese **Michael Faraday** che si occupò, tra le molte cose a cui ha lavorato, di sviluppare il concetto di capacità; si può notare come questa unità derivi dal **coulomb** e dal **volt**, infatti:

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{[C]}{[V]} = [F]$$

Nella pratica, vengono usati i sottomultipli del farad: il **microfarad**  $1\mu F = 10^{-6}F$ , il **nanofarad**  $1nF = 10^{-9}F$  e il **picofarad**  $1pF = 10^{-12}F$ ; ciò è dovuto al fatto che **il farad è un'unità di misura eccessivamente grande per le applicazioni reali**. Come si potrà meglio notare dopo aver parlato dell'induttore, la nomenclatura del condensatore non rispecchia quella degli altri bipoli: **resistore – resistenza, induttore – induttanza**; questo accade perché i nomi comunemente associati al condensatore sono di origine recente, in precedenza era chiamato **capacitore – capacità**.

Per non complicare troppo la trattazione del bipolo condensatore è **necessario trovare una condizione per la quale il campo elettrico all'esterno del condensatore sia nullo**; tuttavia, a rigore, **questa condizione non è reale**, dal momento in cui l'assenza di campo elettrico al di fuori delle armature produrrebbe un'insanabile contraddizione per le **equazioni dell'elettromagnetismo** di Maxwell. Si supponga che **la distanza tra le due sia molto più piccola della loro lunghezza**: si può osservare che **il campo elettrico diventa pressoché uniforme** e le linee di campo parallele ed ugualmente spaziate, con degli **effetti di bordo quasi nulli che possono essere trascurati**, rientrando nel caso comodo alla trattazione in questa sede.

Per ottenere analiticamente la formula sopra mostrata è necessario **applicare il teorema di Gauss per il campo elettrico**; il **caso generale** prevede che al posto del vuoto sia inserito un **dielettrico generico**, ma come si vedrà in futuro questa ipotesi è facilmente riconducibile alla semplificazione fatta in precedenza. Come **superficie** si scelga un **parallelepipedo di altezza  $h$  racchiuso tra le superfici piane di area  $A$**  della stessa forma e dimensione delle armature del condensatore, allora si può dire che **il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa  $\Sigma$  appena mostrata è pari alla carica totale racchiusa nel volume di  $\Sigma$  a meno della costante di proporzionalità  $\epsilon_0$** :

$$\oint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

Non resta altro che **applicare questa formula alla geometria appena rilevata**: si può subito notare come il campo elettrico  $\bar{E}$ , nell'ipotesi di assenza di effetti di bordo, elida molti contributi scomodi del flusso; infatti **ad annullarsi non è solo il contributo della superficie che interseca l'interno dell'armatura**, in quanto la carica totale dentro un conduttore è nulla, **ma anche tutti i contributi delle superfici laterali**, perché il campo elettrico in questa configurazione è uniforme e ha linee di campo parallele che vanno da un'armatura ad un'altra, sono ortogonali alla normale a tali superfici e quindi il loro prodotto scalare si annulla. **L'unico contributo rimasto è costituito dalla superficie rivolta verso l'interno del condensatore**: le linee di campo e la normale alla superficie sono vettori sempre paralleli in questa regione di spazio, inoltre il campo elettrico assume lo stesso valore in tutti i punti del condensatore (essendo uniforme) quindi:

$$\oint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \hat{n} dS = EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{A\epsilon_0}$$

Conoscendo il campo elettrico si è in grado di ricavare la differenza di potenziale tra le armature del condensatore, sapendo che essa è l'integrale di linea del campo elettrico valutato a partire da un punto  $P_{INF}$  sull'armatura inferiore ad un punto  $P_{SUP}$  sull'armatura superiore, ma **non è vietato scegliere questi due estremi sulla stessa linea di campo elettrico**:

$$V_0 = \int_{P_{INF}}^{P_{SUP}} \bar{E} \cdot \hat{t} dl = \int_{P_{INF}}^{P_{SUP}} \frac{q}{A\epsilon_0} \hat{t} \cdot \hat{t} dl = \frac{qd}{A\epsilon_0}$$

Dove  **$d$  è la distanza tra le due armature**, associata al percorso  $\overline{P_{INF}P_{SUP}}$  scelto sulla linea di campo elettrico; queste ipotesi sono possibili solo perché **il campo elettrico è conservativo rispetto alla circuitazione nel caso stazionario**; quindi, essa non dipende dal particolare percorso congiungente i due estremi. Dall'ultima relazione si può ricavare la **capacità**, in quanto **costante di proporzionalità tra carica e differenza di potenziale**:

$$\begin{cases} C = \frac{q}{V_0} \\ V_0 = \frac{qd}{A\epsilon_0} \end{cases} \Leftrightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Da questo risultato, valido per i condensatori piani, si può notare che **la capacità è una quantità dipendente solo dalla forma, dalla geometria del condensatore e dalle caratteristiche elettriche del mezzo interposto tra le due armature**.

Per condensatori di **altre forme geometriche** ci sono delle **formule apposite** che discendono da **ragionamenti simili** ma in questa sede non saranno dimostrate; al fine pratico interessano i **condensatori cilindrici** e i **condensatori sferici**, in quanto sono quelli più comunemente adottati in **ambito industriale**. Un condensatore cilindrico è composto da due cilindri coassiali di raggi  $a$  e  $b$  e lunghi  $L$ , la cui capacità è:

$$C = \frac{q}{V_0} = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln \frac{b}{a}}$$

Mentre un condensatore sferico è composto da due sfere concentriche di raggi  $a$  e  $b$ :

$$C = \frac{q}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

**Portando il raggio della sfera esterna ad infinito ( $b \gg a$ )** si può ottenere la **capacità di una sfera isolata**, ovvero di un condensatore sferico la cui distanza tra le armature è infinita:

$$C = \frac{q}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b} = 4\pi\epsilon_0 a$$

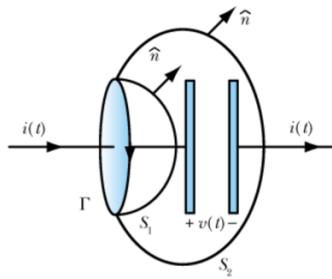
Ciò che accomuna tutti i condensatori appena elencati è la dipendenza della capacità dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal dielettrico interposto tra le armature. Infatti, in tutte le formule di capacità mostrate, compaiono informazioni sulla geometria delle armature ma, soprattutto, la costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$ , che è relativa solo al vuoto; se però, nel condensatore ci fosse un **altro tipo di dielettrico**, basterebbe solo moltiplicare quella quantità per la **costante dielettrica relativa del mezzo** ed ottenere  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ , che generalizza il discorso fatto finora.

Indipendentemente dal valore della capacità, la sua espressione permette di **determinare anche la corrente che circola in un condensatore**, sapendo che essa è la **variazione di carica nel tempo**:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} [C \cdot v(t)] = C \cdot \frac{d}{dt} v(t)$$

Il ragionamento appena fatto non tiene conto di alcune condizioni necessarie affinché possa essere definita la **corrente in un condensatore**; infatti, a priori non esiste **corrente di conduzione** in esso perché **non c'è attraversamento di cariche tra un'armatura ed un'altra**. Sia considerato il circuito in figura e, per le considerazioni a venire, la superficie così costruita; quando le cariche mosse dalla corrente di conduzione giungono all'armatura convenzionalmente positiva del condensatore, si verifica un fenomeno per cui cessa **alcun tipo di fenomeno di conduzione ma la corrente continua a circolare**. Per comprendere la causa di queste osservazioni si può osservare la **Legge di Ampere-Maxwell**, una diretta conseguenza di questo fenomeno:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \hat{t} dl = \int_{S_{\Gamma}} \left( \bar{J}_{LIB} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = 0$$



Dove  $\bar{H}$  è il vettore spostamento magnetico (ovvero il campo magnetico che si propaga in un materiale),  $\Gamma$  una qualsiasi curva che concatena il circuito e  $S_{\Gamma}$  una superficie chiusa che abbia  $\Gamma$  come bordo. L'integrale di superficie può essere espresso in funzione dei due addendi della somma considerando le superfici  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \hat{t} dl = \int_{S_1} \bar{J}_{LIB} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_2} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Ma il primo termine corrisponde alla definizione di corrente di conduzione:

$$i(t) = \int_{S_1} \bar{J}_{LIB} \cdot \hat{n} dS$$

In seno alla Legge di Ampere-Maxwell, il secondo termine della somma (flusso della corrente di spostamento attraverso la superficie  $S_2$ ) deve essere uguale al primo; quindi, è chiaro che **al di fuori del condensatore la corrente è rappresentata dalla normale corrente di conduzione, che si trasforma in corrente di spostamento tra le armature del condensatore**.

Con questo discorso si afferma anche che, **per studiare il comportamento elettrico di un condensatore, non ci si può limitare al modello stazionario ma, per tenere conto delle correnti di spostamento** (e quindi della densità di corrente di spostamento) pur trascurando la derivata temporale del campo di induzione magnetica, si deve ricorrere al modello elettrico quasi stazionario delle equazioni di campo.

Con quanto appena detto, si può considerare un **nuovo vettore densità di corrente totale** che tenga conto di entrambe le correnti:

$$\bar{J}_{TOT} = \bar{J}_{LIB} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Si riconosce, in tutta generalità, che **la corrente totale che attraversa una qualsiasi superficie chiusa  $\Sigma$  (come  $S_\Gamma$ ) è nulla**; ciò significa che anche il **nuovo vettore densità di corrente è solenoidale**, infatti:

$$\int_{\Sigma} \bar{J}_{TOT} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Sigma} \left( \bar{J}_{LIB} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = 0, \forall \Sigma \text{ chiusa}$$

In accordo con le Leggi di Maxwell. Questa relazione rappresenta l'**equazione di continuità della corrente applicata al vettore densità di corrente totale**.

In definitiva, la **caratteristica del bipolo condensatore ideale** è, per definizione:

$$i(t) = \pm C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Dove  **$C \geq 0$  caratterizza il condensatore, mentre il segno dipende dalla convenzione adottata**. Il condensatore si distanzia notevolmente dal resistore per la **presenza della variabile temporale sotto forma di derivata**, motivo per cui è detto **bipolo a memoria** e costituisce una vera e propria **caratteristica dinamica**; infatti, dal punto di vista circuitale **nel condensatore circola, in ogni istante, una corrente non dipendente dalla tensione in quell'istante ma dalla sua variazione nel tempo**, cioè **tiene in considerazione lo stato energetico del bipolo istante per istante**. Da ciò consegue che, in un determinato istante di tempo, **le cariche possono migrare sia da potenziali più alti a più bassi che viceversa**.

Nei **regimi stazionari** si suppone per ipotesi che **la tensione sia costante in tutto il circuito** ed in ogni istante di tempo, ciò porta a pensare automaticamente che **la corrente che passa in un condensatore in regime stazionario sia nulla e che quindi il bipolo si comporti come un circuito aperto**; perciò, **non verrà mai usato un condensatore in regime stazionario**, visto che esso può direttamente sostituito da un circuito aperto. L'utilizzo pratico dei condensatori è limitato a tensioni in corrente alternata, come:

$$v(t) = V \sin(\omega t)$$

Che verrà approfondita in seguito. Sia supposto, a scopo puramente dimostrativo, che un condensatore a facce piane di area  $S$  e distanti  $d$  sia posto in un circuito in cui la tensione segue la legge riportata qui sopra, allora la corrente di conduzione è:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \omega CV \cos(\omega t)$$

Detto  $E(t)$  il campo elettrico (uniforme) sostenuto dal condensatore, la corrente di spostamento è:

$$i_s(t) = S\varepsilon \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{S\varepsilon}{d} \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \frac{S\varepsilon\omega V}{d} \cos(\omega t) = \omega CV \cos(\omega t)$$

Dal semplice confronto si giunge al risultato enunciato in precedenza per cui **corrente di conduzione e corrente di spostamento sono uguali**.

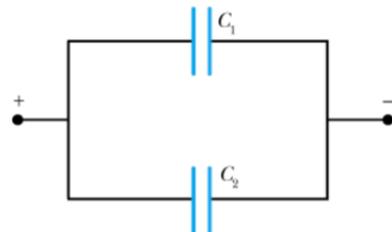
Passando a discutere dell'energia immagazzinata dal bipolo, si può osservare come **il condensatore sia un ottimo serbatoio di energia**; infatti, fatta sul circuito in cui esso è inserito la convenzione dell'utilizzatore, **l'energia immagazzinata dipende unicamente dalla tensione ai capi del condensatore**:

$$U_C(t) = \int_0^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = C \int_0^t v(\tau) \cdot \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} C [v(t)]^2$$

Si assume come istante iniziale  $t_0 = 0$  e che il condensatore vi sia scarico  $v(0) = 0$ . Poiché l'energia ha sempre lo stesso segno, il bipolo **condensatore** è un bipolo **passivo**; tuttavia, è un particolare caso di passività perché **può sia dare che ricevere energia ma non darà mai più di quanto esso riceve**.

In determinati contesti è utile, anziché usare un solo condensatore, usarne diversi opportunamente collegati: **due condensatori in serie restituiranno una capacità minore di ogni singolo condensatore che compone il bipolo equivalente, mentre se in parallelo restituiranno una capacità maggiore**. Di preciso, considerati **due condensatori in parallelo**, si può applicare la LKC per ottenere il valore della capacità equivalente:

$$i_1(t) = C_1 \frac{dv(t)}{dt} \wedge i_2(t) = C_2 \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = i_1(t) + i_2(t) = (C_1 + C_2) \frac{dv(t)}{dt}$$



Da cui si desume che **la capacità equivalente di  $n$  condensatori in parallelo è la somma delle capacità dei singoli condensatori**:

$$C_{EQ} = \sum_{i=1}^n C_i > C_i, \forall i = 1..n$$

Per quanto riguarda, invece, **due condensatori collegati in serie**, si può applicare la LKT per ottenere il valore della capacità equivalente:

$$i(t) = C_{EQ} \frac{dv(t)}{dt} = C_{EQ} \left[ \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{dv_2(t)}{dt} \right] = C_{EQ} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i(t)$$



Da cui:

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} < C_1, C_2$$

Per generalizzare a  $n$  condensatori:

$$\frac{1}{C_{EQ}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Si può facilmente dimostrare la relazione tra capacità equivalente e capacità singola per entrambi i collegamenti; siano presi due condensatori di uguale capacità:

- **Collegamento in serie**

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0}} = \frac{C_0^2}{2C_0} = \frac{C_0}{2} < C_0$$

- **Collegamento in parallelo**

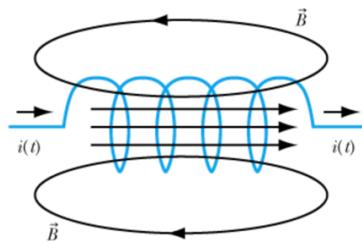
$$C_{EQ} = C_0 + C_0 = 2C_0 > C_0$$

È appropriato notare come le regole generali per i collegamenti in serie e in parallelo dei condensatori sono speculari rispetto a quelle per i collegamenti dei resistori.

## INDUTTORI

Si immagini di **avvicinare due spire metalliche, una delle quali percorsa da corrente, ad una prefissata distanza per cui una genera un flusso di induzione magnetica nell'altra**: per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la **variazione di questo flusso, dovuto ad esempio ad una corrente variabile nella prima spira, produrrà nella seconda una forza elettromotrice indotta**. Questo appena mostrato è il caso più generico di **induzione elettromagnetica**, tuttavia non è necessaria la seconda spira dal momento in cui far variare la corrente nella prima produce automaticamente **una forza elettromotrice autoindotta nella spira stessa**; se si considera una **bobina composta da  $N$  spire molto vicine tra loro** (realizzando un solenoide), il flusso  $\vec{\phi}_B(t)$  associato ad ogni singola spira sarà lo stesso quando ci si trova nel caso **quasi stazionario magnetico**; pertanto, la legge di Faraday-Neumann-Lenz per la bobina diventa:

$$v(t) = \frac{d}{dt} [N \cdot \vec{\phi}_B(t)] = N \cdot \frac{d\vec{\phi}_B(t)}{dt}$$



Dove  $v(t)$  è la tensione ai capi del solenoide al quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore. Si può allora considerare la grandezza fondamentale del sistema il flusso concatenato, il quale si può dimostrare essere dipendente dalla corrente che circola nell'avvolgimento tramite una costante di proporzionalità  $L$ , nota come **induttanza** che, come nel caso del condensatore, dipende solo dalla geometria del sistema:

$$N\phi_B(t) = Li(t)$$

Questa relazione è vera solo nel momento in cui si considerano mezzi a comportamento lineare, con dei materiali magnetici cessa di essere valida. La tensione ai capi del solenoide può, sotto queste ipotesi, essere espressa:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Dove l'induttanza è misurata in **henry**, un'unità di misura derivata che prende il nome dal fisico americano **Joseph Henry**, contemporaneo di Faraday, e si può esprimere come:

$$L = \frac{[V]}{\left[\frac{A}{s}\right]} = \frac{[V] \cdot [s]}{[A]} = [H]$$

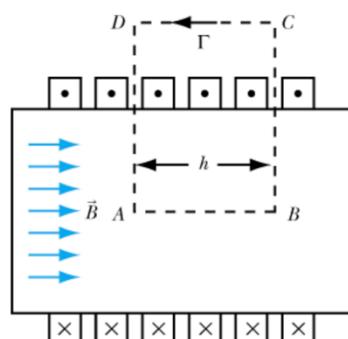
Una delle caratteristiche importanti di questo bipolo, che d'ora in poi verrà chiamato **bipolo induttore**, è la presenza di un **campo magnetico al suo interno, proprio come per il condensatore era presente un campo elettrico**; inizia così a delinearsi una **certa dualità tra i due dispositivi** che porterà ad uniformare molte definizioni e molte relazioni tra di essi.

Di seguito verrà fatto un processo di studio e di determinazione dell'induttanza di alcuni induttori di forma notevole proprio come è stato fatto per il condensatore. Si partirà dalla formula di induttanza indicata in precedenza con lo scopo di determinare la sua formulazione particolare al centro del dispositivo; partendo dal **caso più semplice**, ovvero quello di un **induttore solenoidale molto compatto** (cioè con le spire molto vicine tra di loro) e **disposto in aria**, si consideri un **tratto centrale del solenoide di lunghezza  $h$**  e si supponga la **sezione trasversale del solenoide di superficie  $S$** , allora il flusso del campo magnetico è:

$$\phi_B = B \cdot S$$

Da cui:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{NBS}{i}$$



Dove  $N$  è il numero di spire del solenoide. Indicando con  $n$  il numero di spire contenute nella sezione considerata,  $h$ :

$$n = \frac{N}{h}$$

E supponendo che il campo magnetico all'interno del solenoide sia uniforme e pari a  $B = \mu n i$ , si ha:

$$L = \frac{N \mu n i S}{i} = \mu \frac{N^2 S}{h} = \mu n^2 S h$$

Dimostrando che l'induttanza del solenoide in esame è direttamente proporzionale al suo volume  $Sh$  e al quadrato del numero di spire per unità di lunghezza, attraverso la costante di proporzionalità  $\mu$ , detta permeabilità magnetica del mezzo di cui è riempito il solenoide. La dipendenza quadratica non è una sorpresa, infatti raddoppiando il numero di spire non solo raddoppia  $N$  ma anche  $\phi_B$ , per cui l'induttanza va a quadruplicare.

Nei calcoli fatti finora è stata solo supposta la formulazione del campo magnetico; tuttavia, c'è un modo più generale di esprimere la formula che conduce anche a quel caso particolare. Sia considerato sempre il caso del solenoide, un filo conduttore avvolto ad elica a passo corto in cui passa una corrente  $i$  e dove lo sviluppo longitudinale è prevalente rispetto a quello trasversale; si può, con una buona approssimazione, affermare che il campo magnetico all'interno di questo dispositivo è uniforme e diretto lungo la direzione del cilindro, mentre al di fuori è nullo. In realtà, affinché le equazioni di Maxwell siano vere è necessario che ci sia un campo magnetico all'esterno del solenoide, tuttavia nelle applicazioni reali lo si può omettere (come nel caso del condensatore) in quanto è di un ordine di grandezza inferiore rispetto al campo magnetico interno. Applicando la Legge di Ampere-Maxwell al circuito  $\Gamma$  in figura si può ottenere la formula precedentemente enunciata:

$$\oint_{\Gamma} \bar{B} \cdot \hat{i} dl = n \cdot \mu i$$

Considerando  $\Gamma$  come composizione di quattro segmenti, la circuitazione può essere semplificata in quattro integrali curvilinei:

$$\oint_{\Gamma} \bar{B} \cdot \hat{i} dl = \int_A^B \bar{B} \cdot \hat{i} dl + \int_B^C \bar{B} \cdot \hat{i} dl + \int_C^D \bar{B} \cdot \hat{i} dl + \int_D^A \bar{B} \cdot \hat{i} dl = \int_A^B \bar{B} \cdot \hat{i} dl = Bh$$

Questo risultato è dovuto principalmente all'ipotesi di campo magnetico uniforme fatta in precedenza; infatti, tra  $A$  e  $D$  e tra  $B$  e  $C$  il campo magnetico è perpendicolare all'elemento infinitesimo di spostamento considerato, quindi il prodotto scalare è nullo, mentre tra  $C$  e  $D$  il campo magnetico è nullo perché ci si trova fuori dal solenoide.

Al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell, oltre  $\mu$ , non è rappresentata la corrente che passa nell'avvolgimento ma la corrente che circola nell'avvolgimento moltiplicata per il numero di spire che si concatenano nel tratto  $h$  con la curva  $\Gamma$ . Se si considera con  $n$  il numero di spire per unità di lunghezza, si può facilmente concludere che la corrente che compare nella legge è  $inh$ , infatti  $nh$  è il numero di spire concatenate nel tratto  $h$ . La legge di Ampere-Maxwell si può, quindi, ridurre a:

$$Bh = \mu n h i$$

Da cui:

$$B = \mu n i$$

Questa relazione **dimostra che il campo di induzione magnetica di un solenoide percorso da corrente non dipende da null'altro che dalla densità di spire e dalla corrente**. Per quanto riguarda l'effetto del campo esterno, si potrebbero fare considerazioni analoghe a quelle fatte per il condensatore, concludendo che affinché siano rispettate le equazioni di Maxwell il campo all'esterno dell'avvolgimento non può essere rigorosamente nullo.

Prima di procedere oltre, **si riporta il valore dell'induttanza di un cavo coassiale**, di raggio interno  $a$  (anima), raggio esterno  $b$  (calza) e lunghezza  $h$ :

$$L = \mu \frac{h}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Volendo riassumere quanto detto finora, si può affermare che la **caratteristica di un induttore** è:

$$v(t) = \pm L \frac{d}{dt} i(t), \text{ con } L \geq 0$$

Dove **l'ambiguità del segno dipende dalla convenzione fatta ai capi del circuito**. Si può notare una differenza dal resistore (entrambi bipoli controllati in corrente): **nell'induttore un brusco aumento della tensione non corrisponde ad un altrettanto brusco aumento della corrente, come accade nel resistore, ma solo un'accelerazione (derivata) nella sua crescita**. Da questo punto di vista, si può vedere l'induttore come una macchina a scarsa ripresa, infatti schiacciando “l'acceleratore” della tensione la “velocità” della corrente non aumenta bruscamente ma gradualmente, **come se l'induttore conservasse una certa memoria della condizione in cui funzionava prima** (perciò è definito bipolo a memoria).

**La potenza elettrica assorbita dall'induttore è, in ogni istante di tempo, immagazzinata e neanche una piccola quantità viene trasformata in calore**; infatti, esso è un perfetto serbatoio di energia senza buchi. Per calcolare l'energia magnetica assorbita si può integrare la formula della potenza e ottenere:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \geq 0$$

Come si può notare, **questa quantità dipende solo dalla corrente che circola istante per istante, e non dalla tensione applicata ai suoi morsetti**.

**L'induttore condivide con il condensatore molte proprietà**: sono entrambi **bipoli a memoria**; quindi, entrambi **non figurano in corrente continua**, la loro **energia è variabile ma ha sempre segno costante**, nonostante ricevano ed eroghi energia **non restituiscono mai più di quanto danno**, in entrambi è **presente campo magnetico/elettrico** e in entrambi si possono fare le stesse supposizioni sul comportamento di tale campo all'esterno del dispositivo.

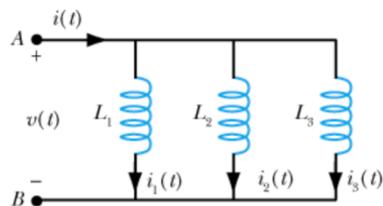
**Come il condensatore in regime stazionario si comporta come un circuito aperto, l'induttore in regime stazionario si comporta come un cortocircuito**, infatti:

$$v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = L \cdot 0 = 0$$

Ed è per ciò che **questi due bipoli verranno ignorati parlando di regime stazionario e riappariranno solo dopo aver introdotto il regime sinusoidale.**

Spesso è utile usare, anziché un solo induttore, più induttori opportunamente collegati tra loro per ottenere lo stesso effetto: in questa ottica si possono osservare i collegamenti in serie e in parallelo tra induttori. Come verrà formalmente mostrato a breve, se si vuole alzare il valore dell'induttanza in un circuito si devono collegare due o più induttori in serie, mentre se li si collega in parallelo si abbassa il valore totale, contrariamente a quanto accade nei condensatori e parallelamente ai resistori. Preso l'esempio di un circuito in cui si collegano tre induttori, siano considerati i vari casi enunciati:

- **Induttori in parallelo**



Poiché si conserva la tensione ai capi del circuito:

$$v(t) = L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) = L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) = L_3 \cdot \frac{d}{dt} i_3(t)$$

Mentre la corrente totale del sistema è espressa come somma delle singole correnti che circolano nei vari induttori:

$$\frac{v(t)}{L_{EQ}} = \frac{d}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} [i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)] = \frac{v(t)}{L_1} + \frac{v(t)}{L_2} + \frac{v(t)}{L_3}$$

Da cui:

$$\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

$$L_{EQ} = \frac{L_1 L_2 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

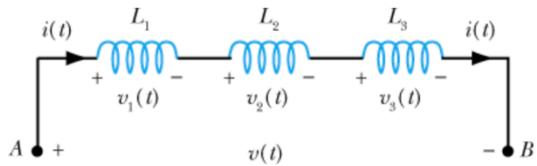
Generalizzando il collegamento ad  $n$  induttori:

$$\frac{1}{L_{EQ}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} < L_k, \forall k \in [1, n]$$

Quest'ultima affermazione può essere giustificata considerando due induttori con la stessa induttanza  $L_0$  in parallelo:

$$L_{EQ} = \frac{L_0^2}{2L_0} = \frac{L_0}{2} < L_0$$

- **Induttori in serie**



Per la LKC, la corrente che entra nel primo induttore è uguale a quella che esce dal terzo induttore, quindi si conserva; a non conservarsi è la tensione che, per la LKT, è:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{d}{dt} i(t) = L_{EQ} \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

Da cui:

$$L_{EQ} = L_1 + L_2 + L_3$$

Generalizzando il collegamento ad  $n$  induttori:

$$L_{EQ} = \sum_{k=1}^n L_k > L_k, \forall k \in [1, n]$$

Quest'ultima affermazione può essere giustificata considerando due induttori con la stessa induttanza  $L_0$  in serie:

$$L_{EQ} = L_0 + L_0 = 2L_0 > L_0$$

## LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI E L'APPROCCIO SISTEMATICO

La **sovraposizione degli effetti** è una **tecnica di risoluzione dei sistemi lineari** molto potente e facile da applicare; non è circoscritta alla risoluzione dei circuiti ma è **una proprietà generale dei sistemi (solo) lineari**. Questo metodo permette di dividere un sistema in due sottosistemi più semplici da risolvere singolarmente andando ad intervenire sui termini noti; per comprendere, sia considerato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 20 \end{cases}$$

Il sistema può facilmente essere risolto con il metodo della sostituzione, ottenendo  $x = 6$  e  $y = -7$  come soluzioni ma per gli interessi in gioco lo si può anche **dividere in due sistemi, dove il primo ha uno dei due termini noti nulli e l'altro invariato e il secondo viceversa**:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 5 \\ x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 20 \end{cases}$$

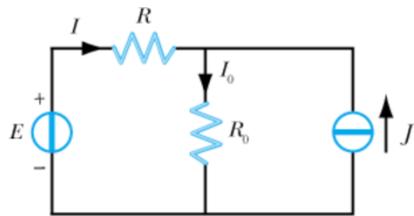
Le soluzioni di questi due sistemi sono  $x_1 = 2, y_1 = 1$  e  $x_2 = 4, y_2 = -8$ . Per ottenere da questa duplicazione i risultati del sistema originale non bisogna fare altro che **sommare le radici omonime**:

$$x = x_1 + x_2 = 2 + 4 = 6$$

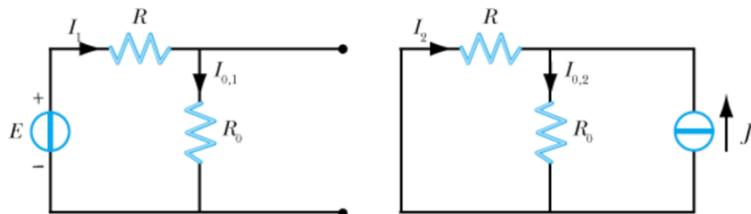
$$y = y_1 + y_2 = 1 - 8$$

Il procedimento può essere generalizzato ad un sistema di  $n$  equazioni lineari: dovranno essere risolti  $n$  sistemi diversi, ognuno dei quali dovrà avere una sola equazione con il termine noto non nullo, e sommare le  $n$  soluzioni ottenute.

Dalla formula generale può sorgere una domanda: **conviene risolvere  $n$  sistemi al posto di risolverne uno solo?** Posta così, la domanda sembra avere risposta banale, tuttavia nel dominio dei circuiti elettrici il principio di sovrapposizione degli effetti costituisce un metodo molto potente. Ad esempio, sia preso il circuito seguente:



Viene chiesto di **determinare il valore della corrente  $I$** . Nell'applicare alla rete il principio di sovrapposizione degli effetti c'è da determinare preliminarmente **quali saranno i termini noti delle equazioni**, nel caso particolare in esame essi sono **i valori dei generatori indipendenti di tensione e di corrente**; pertanto, considerare un'equazione del sistema come un'**equazione omogenea associata** equivale a **spegnere il generatore indipendente che gli corrisponde**, ovvero porre la sua **tensione/corrente a zero** (cortocircuito ideale/circuito aperto). Applicando quanto appena detto al circuito, si possono facilmente individuare i due circuiti parziali, la cui sovrapposizione restituirà la rete di partenza:



Come si può notare, **nel primo circuito parziale è stato spento il generatore di corrente** (oppure è stato sostituito da un **circuito aperto**) ed è stato lasciato acceso quello di tensione, **nel secondo è stato spento il generatore di tensione** (oppure è stato inserito un **cortocircuito ideale**) ed è stato lasciato acceso quello di corrente. Osservando il primo circuito si può concludere che:

$$I_1 = I_{0,1} = \frac{E}{R + R_0}$$

Per il secondo circuito:

$$I_2 = -J \cdot \frac{R_0}{R + R_0} \wedge I_{0,2} = J \cdot \frac{R}{R + R_0}$$

La soluzione del circuito di partenza si ottiene sommando le soluzioni omonime:

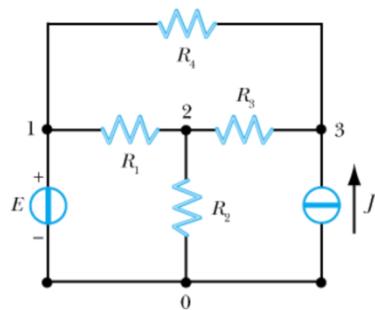
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 = \frac{E - JR_0}{R + R_0} \\ I_0 = I_{0,1} + I_{0,2} = \frac{E + RJ}{R + R_0} \end{cases}$$

In conclusione, **in una rete lineare in cui agiscono due o più generatori indipendenti**, invece che risolvere la rete data così com'è, **si possono risolvere due o più reti in cui agiscono, uno alla volta, i diversi generatori**; ovviamente bisogna avere l'accortezza di spegnere adeguatamente i generatori giusti nelle reti giuste e sostituirli con i bipoli equivalenti corretti. Questo metodo è spesso conveniente rispetto ad altri perché risulta facile risolvere reti con un solo generatore indipendente, potendo usare semplicemente i bipoli equivalenti con i collegamenti in serie e parallelo.

Un **circuito di  $r$  rami** può essere risolto anche con un altro tipo di approccio algebrico, detto **approccio sistematico**, che consiste nell'**applicare le Leggi di Kirchhoff e di risolvere le equazioni relative alle caratteristiche di ogni bipolo**. Per tutta la rete, sia le LK indipendenti che le caratteristiche di tutti i bipoli sono  $r$ , quindi **l'approccio sistematico permette di risolvere un circuito con  $2r$  equazioni**, dove  $r$  incognite saranno correnti e  $r$  incognite tensioni.

<b>Equazioni indipendenti ai nodi (LKC)</b>	$n - 1$
<b>Equazioni indipendenti alle maglie (LKT)</b>	$r - (n - 1)$
<b>Equazioni caratteristiche dei bipoli</b>	$r$
<b>Totale equazioni</b>	$2r$
<b>Numero di incognite</b>	$r$ correnti + $r$ tensioni
<b>Totale incognite</b>	$2r$

Per rendere concreto quanto appena detto, si analizzi il metodo sistematico tramite un esempio. Sia presa la seguente rete, composta di  $n = 4$  nodi e  $r = 6$  lati:



#### EQUAZIONI INDIPENDENTI AI NODI

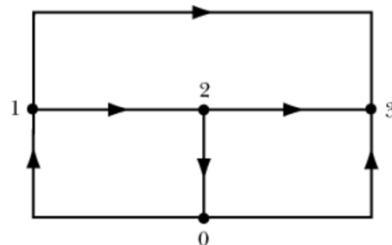
La rete ha **4 nodi**, per scrivere le  **$n - 1$  equazioni indipendenti** bisogna escludere un nodo dalla valutazione delle LKC; supponendo di voler escludere il nodo 0, le **LKC indipendenti sono:**

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \end{cases}$$

Si può facilmente verificare che le equazioni sono indipendenti notando che **non c'è una corrente che figura contemporaneamente in tutte le equazioni scritte**. Per ottenere l'**equazione al nodo 0** bisogna semplicemente **sommare tutte e tre le equazioni in esame**.

### EQUAZIONI INDIPENDENTI ALLE MAGLIE

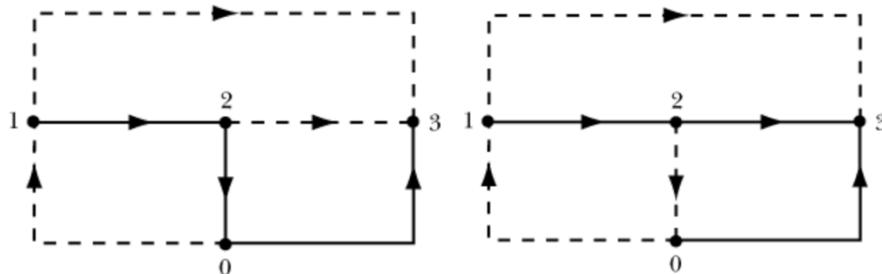
Per poter valutare **quali equazioni sono indipendenti** è necessario porre l'attenzione sul **grafo** della rete e **ignorare completamente la natura dei bipoli**:



Dalle formule ricavate in precedenza, si può dire che **le equazioni indipendenti alle maglie sono  $m = 6 - (4 - 1) = 3$**  e per individuare quali esse siano si potrebbe **costruire un albero e poi completarlo**, di volta in volta, **con i rami del coalbero**; tuttavia, soprattutto per reti piccole, si può evitare un procedimento così complesso ed **osservare la rete**: in questo esempio il circuito è composto da **tre anelli che contengono almeno un ramo che gli altri non contengono**, quindi saranno questi le **maglie indipendenti**. Dalle rilevazioni appena fatte, **le LKT indipendenti sono**:

$$\begin{cases} V_4 - V_3 - V_1 = 0, \text{ ai rami } R_4 - R_3 - R_1 \\ V_1 + V_2 - E = 0, \text{ ai rami } R_1 - R_2 - E \\ V_3 + V_J - V_2 = 0, \text{ ai rami } R_3 - J - R_2 \end{cases}$$

**Per verificare il risultato, sia applicato il metodo di albero e coalbero.** Un albero è un insieme di rami che unisce tutti i nodi senza creare una maglia, nella rete in esame sono possibili questi due alberi:



Sia preso il secondo (sono equivalenti), per ottenere le equazioni alle maglie scritte di sopra si possono prendere uno ad uno i rami del coalbero e aggiungerli per accrescimento all'albero; le maglie da considerare sono quelle che si vanno a formare ramo a ramo.

### EQUAZIONI CARATTERISTICHE DEI BIPOLI

Riassumendo **le equazioni che sono risultate dalle LK**:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \\ V_4 - V_3 - V_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - E = 0 \\ V_3 + V_J - V_2 = 0 \end{cases}$$

**A queste equazioni bisogna aggiungere quelle relative ai singoli bipoli.** Si può notare come la specifica dei due generatori sia banale ( $E, \forall I_E$  e  $J, \forall V_J$ , pertanto le si può omettere), per quanto riguarda i resistori:

$$\begin{cases} V_1 = R_1 I_1 \\ V_2 = R_2 I_2 \\ V_3 = R_3 I_3 \\ V_4 = R_4 I_4 \end{cases}$$

Di conseguenza le **equazioni necessarie a risolvere la rete sono:**

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \\ V_4 - V_3 - V_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - E = 0 \\ V_3 + V_J - V_2 = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} V_1 = R_1 I_1 \\ V_2 = R_2 I_2 \\ V_3 = R_3 I_3 \\ V_4 = R_4 I_4 \end{cases}$$

In questo sistema di equazioni lineare **figurano tutte le equazioni e tutte le incognite necessarie per ottenere i valori di tensione e corrente della rete.**

**Quando la rete tende a diventare più grande, l'approccio sistematico diventa sempre meno pratico** e conveniente; perciò, è stato **necessario sviluppare altri metodi** che verranno approfonditi in futuro. Per **risolvere questo sistema** bisogna necessariamente **ridurre il numero di equazioni**; la scelta delle incognite tra tensione e corrente è arbitraria ma, **convenzionalmente, si decide di esprimere tutte le equazioni con le correnti come incognite**. A questo punto si potrebbero semplicemente andare a sostituire nelle equazioni le specifiche dei bipoli:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \\ R_4 I_4 - R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 - E = 0 \\ R_3 I_3 + V_J - R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

Sebbene il numero di equazioni e di incognite sia stato diminuito, **non si è ancora arrivati ad avere cinque equazioni in cinque incognite** perché **il generatore di corrente**, che permette di sapere già la corrente sul proprio ramo, **non permette di sapere a priori la tensione ai suoi capi**; l'**equazione in più è proprio quella** con al suo interno la tensione  $V_J$ , ma **la si può rimuovere e calcolare tale tensione una volta risolto il sistema** perché compare in una sola equazione:

$$V_J = R_2 I_2 - R_3 I_3$$

Ma cosa rappresenta l'equazione appena eliminata? Essa non è altro che la LKT alla maglia che conteneva su un lato il generatore di corrente. Il sistema adesso figura come segue:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \\ R_4 I_4 - R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 - E = 0 \end{cases}$$

Ma in maniera del tutto analoga, si può rimuovere anche la prima equazione perché contiene la corrente  $I$  (relativa al ramo con il generatore di tensione) che è presente solo in quella equazione.

$$I = I_1 + I_4$$

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_4 = 0 \\ R_4 I_4 - R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 - E = 0 \end{cases}$$

Riassumendo, come si può fare per ottenere il sistema nelle sole correnti? Basta non tenere in considerazione i rami su cui ci sono generatori indipendenti di corrente per formare le maglie indipendenti (ai nodi sì). Il sistema ottenuto è di semplice risoluzione.

## SEMPLIFICAZIONI PER LA RISOLUZIONE DELLE RETI

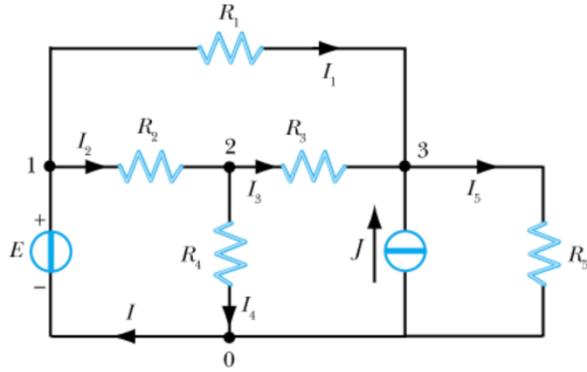
In seguito a quanto appena detto, è chiaro che la difficoltà nella risoluzione di una rete è composta dalla dimensione che può assumere il sistema di equazioni corrispondente; per oltrepassare questo ostacolo possono venire in aiuto diverse tecniche, in questa sede verranno analizzate solo le due più usate: il metodo dei potenziali nodali e il metodo delle correnti di maglia.

### METODO DEI POTENZIALI NODALI

Il punto cruciale per applicare questo metodo consiste nel considerare, né le tensioni sui lati né le correnti nei rami, bensì i potenziali dei singoli nodi: la tensione ai morsetti di un bipolo può essere vista come la differenza dei potenziali ai morsetti stessi. La differenza  $V_B - V_A$  assume quindi un significato diverso da quello affibbiatogli finora ( $V_B - V_A = E$  e null'altro), infatti vengono presi singolarmente  $V_A$  e  $V_B$  in quanto potenziali dei nodi  $A$  e  $B$ , valutati rispetto ad un riferimento arbitrario; per comodità si può porre come potenziale di riferimento ( $V = 0$ ) uno dei nodi, in modo tale da ridurre il numero di incognite a  $n - 1$ .

Il nodo appena rilevato è detto **nodo di riferimento** o **nodo a terra**; questa seconda nomenclatura ha le origini nel consueto processo industriale di collegare sempre una rete con il terreno, tramite un opportuno filo conduttore, per ragioni di sicurezza o per non alterare i valori dei potenziali dei nodi in seguito ad eventi esterni alla rete stessa.

Per comprendere al meglio il metodo, lo si applica alla rete seguente, con  $E = 50$ ,  $J = 0.75$ ,  $R_1 = 800$ ,  $R_2 = 80$ ,  $R_3 = 40$  e  $R_5 = 200$ :



Per i potenziali ai nodi (ovvero l'incognita da considerare) **non è necessario scrivere le LKT**, dal momento in cui esse **sono soddisfatte per ipotesi**, infatti alla maglia costituita dai resistori  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ :

$$+V_1 - V_3 + V_3 - V_2 + V_2 - V_1 = 0$$

**Ogni potenziale appare con il segno – e con il segno +**, quindi si elidono e le leggi sono verificate; il ragionamento è valido anche per le altre maglie della rete. Essendo automaticamente soddisfatte tutte le equazioni alle maglie, **ciò che rimane da risolvere sono le  $n - 1$  equazioni indipendenti ai nodi**. Scegliendo come nodo a terra il nodo 0 (in genere conviene scegliere quello in cui converge un numero maggiore di lati) **le correnti, risultate dalle equazioni caratteristiche dei resistori, sono:**

$$I_1 = \frac{V_1 - V_3}{R_1}, I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, I_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_3}, I_4 = \frac{V_2}{R_4}, I_5 = \frac{V_3}{R_5}$$

La corrente  $I$  non può essere espressa in funzione dei potenziali ai nodi 1 e 0 perché il generatore di tensione non lo permette ma è ancora possibile calcolarla con la LKC al nodo 1, tenendo in considerazione che è possibile determinare  $V_1$ , dal momento in cui  $V_0 = 0$ :

$$V_1 = E = 50$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E - V_3}{R_1} + \frac{E - V_2}{R_2}$$

**Le variabili si riducono ai soli potenziali  $V_2$  e  $V_3$ , per i quali si possono scrivere le LKC ai relativi nodi ottenendo un sistema di due equazioni lineari in due incognite:**

$$\begin{cases} \frac{E - V_2}{R_2} = \frac{V_2 - V_3}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} \\ \frac{V_2 - V_3}{R_3} + \frac{E - V_3}{R_1} + J = \frac{V_3}{R_5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) V_2 - \frac{V_3}{R_3} = \frac{E}{R_2} \\ \frac{V_2}{R_3} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) V_3 = -J - \frac{E}{R_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.0575 \cdot V_2 - 0.025 \cdot V_3 = 0.625 \\ 0.025 \cdot V_2 - 0.03125 \cdot V_3 = -0.8125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = 34 \\ V_3 = 53.2 \end{cases}$$

In questo sistema di equazioni (facilmente risolvibile) ogni coefficiente ha le dimensioni di una conduttanza ed ogni termine noto di una corrente. **Una volta risolto il sistema, è possibile rilevare tutte le correnti in precedenza enunciate:**

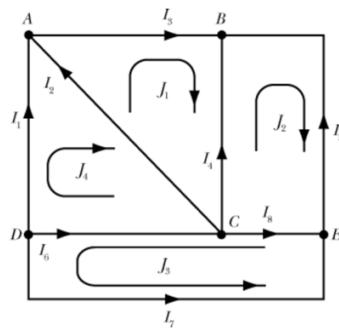
$$V_2 = 34, V_3 = 53.2$$

$$I_1 = -4 \text{ mA}, I_2 = 0.2, I_3 = -0.48, I_4 = 0.68, I_5 = 0.266, I = 0.196$$

### METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

La **comodità del metodo dei potenziali nodali** sta nel fatto che le variabili prese in considerazione (ovvero i potenziali dei singoli nodi) **rispettano automaticamente le LKT**; è possibile sviluppare un **metodo duale che prende in considerazione un sistema di variabili che rispetta automaticamente le LKC** ai nodi della rete, ovvero il **metodo delle correnti di maglia**. Per costruire un tale sistema vanno considerate in prima istanza le maglie indipendenti, cioè quelle che danno luce ad equazioni LKT indipendenti; si immagini, poi, in modo del tutto fittizio che in ciascuna maglia circoli una corrente, detta appunto **corrente di maglia**. Queste correnti **non esistono nella realtà fisica**, perché quelle reali sono solo le correnti che circolano nei rami e nei bipoli della rete; tuttavia, le **correnti fantasma** sono utili per **definire un sistema risolvente ridotto**.

Ancora una volta è utile approfondire con un esempio per chiarire meglio il discorso; **sia preso in considerazione il circuito in figura** in cui si individuano le **quattro correnti fantasma**  $J_1, J_2, J_3$  e  $J_4$ , tutte con verso di circolazione orario ad eccezione di  $J_3$ .



Dal momento in cui le correnti fantasma circolano all'interno delle maglie e non dei lati, **le correnti sui lati condivisi da più maglie verranno espresse come una somma di correnti fantasma**:

$$I_4 = J_2 - J_1$$

In definitiva **tutte le correnti della rete sono esprimibili in questi termini**. Il punto cruciale del metodo è stato analizzato, infatti la **definizione di questo nuovo tipo di corrente fittizia ha permesso di ridurre il numero delle incognite da  $r$  a  $r - (n - 1)$** ; ovviamente va menzionato anche l'altro punto di forza di questo metodo, già anticipato in precedenza e costituito dall'automatica valenza delle LKC ai nodi della rete, ad esempio al nodo A:

$$-J_4 + J_4 - J_1 + J_1 = 0$$

In maniera del tutto analoga al metodo dei potenziali nodali, **si è giunti alla seguente situazione**:

- Si è ridotto il numero di incognite di partenza;

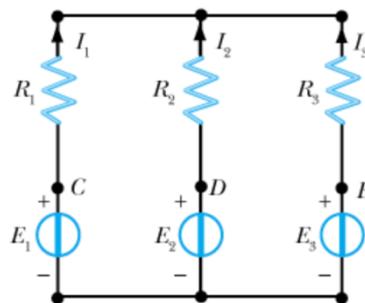
- Ci si può limitare a scrivere le sole equazioni corrispondenti alle LKT alle maglie indipendenti scelte.

Assegnata una qualsiasi rete, per la sua risoluzione si possono intraprendere le seguenti strade:

- **Correnti di lato**, bisogna risolvere  $r$  equazioni;
- **Potenziali nodali**, bisogna risolvere  $n - 1$  equazioni (conviene nel momento in cui  $2(n - 1) < r$ );
- **Correnti di maglia**, bisogna risolvere  $r - (n - 1)$  equazioni (conviene nel momento in cui  $2(n - 1) > r$ ).

## FORMULA DI MILLMAN E TRASFORMAZIONI TRIANGOLO – STELLA

La **formula di Millman** è un metodo di risoluzione delle reti **utile per i sistemi trifase** e una diretta conseguenza del metodo dei potenziali nodali. Sia considerata una rete come quella in figura, costituita da tre rami collegati in parallelo dove ognuno dei quali contiene un resistore e un generatore ideale:



Si consideri il **nodo B** come riferimento e vengano introdotte le **conduttanze relative ai rispettivi resistori**:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; G_2 = \frac{1}{R_2}; G_3 = \frac{1}{R_3}$$

L'unica incognita da determinare è il **potenziale del nodo A**; infatti, sfruttando le caratteristiche dei bipoli è possibile ricavare tutte le correnti che passano nei vari rami:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_c - V_A}{R_1} = G_1(E_1 - V_A) \\ I_2 = \frac{V_d - V_A}{R_2} = G_2(E_2 - V_A) \\ I_3 = \frac{V_e - V_A}{R_3} = G_3(E_3 - V_A) \end{cases}$$

Mentre la **LKC al nodo A** stabilisce che:

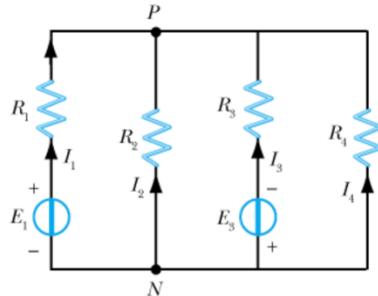
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$G_1(E_1 - V_A) + G_2(E_2 - V_A) + G_3(E_3 - V_A) = 0$$

Si ottiene quindi un'**equazione di primo grado nell'incognita  $V_A$** , che trova soluzione in:

$$V_A = \frac{G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Quanto appena rilevato vale anche se manca qualche generatore oppure se la sua polarità è invertita rispetto all'esempio mostrato. Nella seguente rete vengono prese in considerazione queste variazioni:



Adoperando la formula di Millman:

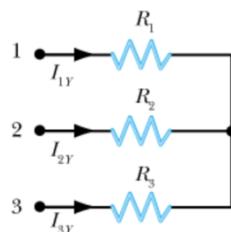
$$V_A = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

Da cui si possono ricavare facilmente le correnti. Si può notare come nei rami in cui il generatore manca il termine al numeratore si annulla ( $E_k = 0$ ) mentre quando la polarità è invertita si cambia il segno della tensione imposta (la convenzione rimane la stessa ma cambia il verso).

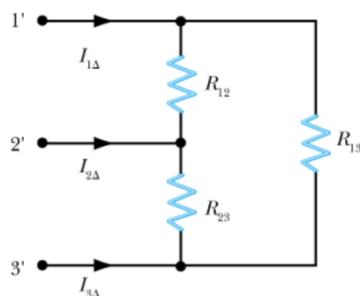
**La formula di Millman può essere generalizzata al caso ipotetico di  $n$  rami in parallelo:**

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^n G_k E_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

Tre **resistori** si dicono **a stella (Y)** quando sono collegati come in figura:



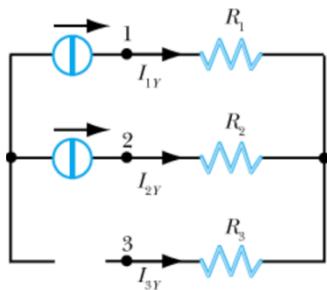
Mentre si dicono **a triangolo ( $\Delta$ )** quando sono collegati come segue:



**Quando i resistori collegati a stella sono alimentati da generatori di corrente che erogano la stessa corrente dei generatori che alimentano i resistori collegati a triangolo, per qualsiasi valore essi siano, le tensioni ai capi dei morsetti di ogni resistore sono uguali per le due configurazioni:**

$$I_{1\Delta} = I_{1Y} \wedge I_{2\Delta} = I_{2Y} \wedge I_{3\Delta} = I_{3Y} \Rightarrow V_{12\Delta} = V_{12Y} \wedge V_{23\Delta} = V_{23Y} \wedge V_{31\Delta} = V_{31Y}$$

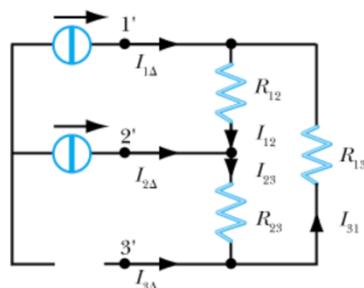
Da ciò si può dedurre che **un sistema di resistori collegati a triangolo è equivalente al sistema degli stessi resistori collegati a stella e viceversa**. Per trovare le relazioni che intercorrono tra le due configurazioni sia considerata la seguente rete:



In questo particolare collegamento a stella **i primi due resistori sono alimentati da due generatori di corrente mentre il terzo da una corrente nulla**; quest'operazione è possibile dal momento in cui l'**equivalenza vale per qualsiasi corrente** passi nei rami del circuito. Osservando i primi due rami, collegati in parallelo, si può dedurre la resistenza equivalente:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Si faccia la stessa cosa per i resistori nel circuito a triangolo seguente:



$$R_{eq} = R_{12} \parallel (R_{13} + R_{23}) = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Poiché i circuiti sono equivalenti, anche le resistenze equivalenti devono uguagliarsi:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

**Riproponendo questo ragionamento ma con le altre due resistenze alimentate da una corrente nulla:**

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Queste equazioni, che **devono essere vere contemporaneamente**, costituiscono un **sistema di tre equazioni lineari in tre incognite**:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{cases}$$

Che, **una volta risolto**, fornisce i legami di tra i tre resistori a stella e i tre resistori a triangolo:

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO – STELLA (Incognite  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ )

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

TRASFORMAZIONE STELLA – TRIANGOLO (Incognite  $R_{12}$ ,  $R_{13}$  e  $R_{23}$ )

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

Nel caso particolare in cui le tre resistenze di ogni sistema siano uguali le relazioni diventano:

$$R_Y = \frac{1}{3}R_\Delta$$

Dove  $R_Y$  è il valore della resistenza dei resistori a stella e  $R_\Delta$  il valore della resistenza dei resistori a triangolo. Queste trasformazioni avranno particolare cardinalità nella risoluzione dei sistemi trifase, come la formula di Millman.

## TEOREMI DEL GENERATORE EQUIVALENTE

Prima di discutere i teoremi del generatore equivalente è utile andare ad osservare un **teorema precursore** molto potente, in quanto **applicabile ad ogni rete** (lineare e no, tempo invariante e non) **univocamente risolubile**: il **teorema di sostituzione**. Il teorema permette di **sostituire qualsiasi ramo con un generatore indipendente**, di tensione o corrente in base ad una scelta convenzionale, **senza che alcuna corrente o tensione su un lato venga alterata**; l'utilità e la potenza di questo teorema sta **nella semplicità che la rete può raggiungere** e nella **compatibilità con la maggior parte delle reti che in questa sede verranno affrontate**. L'enunciato del teorema afferma che **se in una rete di bipoli lineare si sostituisce, ad un ramo interessato dalla tensione  $V$ , un generatore di forza elettromotrice  $E = V$ , nulla cambia nel resto della rete** (in maniera duale anche per il generatore di corrente).

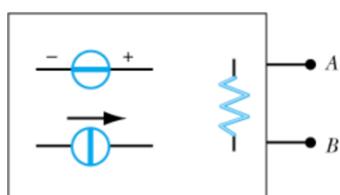
**Il teorema è facilmente dimostrabile** dal momento in cui **il cambiamento di bipolo sul ramo in esame**, effettuato senza alterare la tensione (dualmente la corrente), **non cambia la topologia della rete**; di conseguenza, **le LKC e le LKT per ogni nodo e per ogni maglia restano le stesse** e la **nuova rete è univocamente risolubile come la precedente**, mentre **le equazioni di lato non vengono alterate se non per il lato su cui è stato applicato il teorema**, su cui, però, **insiste la stessa tensione** (dualmente la corrente). In seno all'unicità della soluzione, **la corrente** (dualmente la tensione) **sostenuta dal bipolo equivalente alla restante parte della rete non può che essere identica a quella presente nel ramo della rete in esame**.

Dalle due forme possibili del teorema discendono due importanti considerazioni:

- **Se due punti di una rete lineare sono allo stesso potenziale, essi possono essere collegati con un bipolo cortocircuito senza modificare in alcun modo il funzionamento della rete;**
- **Se in un ramo di una rete lineare non circola corrente, tale ramo può essere sostituito con un bipolo circuito aperto senza modificare in alcun modo il funzionamento della rete.**

Si può rilevare facilmente **il collegamento tra queste considerazioni e il teorema** osservando che **un generatore di tensione ideale che eroga una forza elettromotrice nulla è equivalente ad un bipolo cortocircuito** e che **un generatore di corrente ideale che eroga una corrente nulla è equivalente ad un bipolo circuito aperto**.

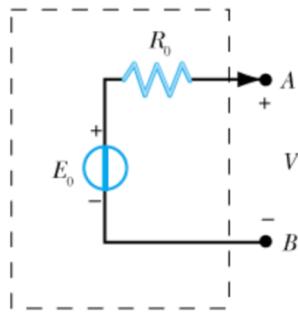
Sia considerata una rete lineare costituita da un numero arbitrario di generatori di tensione, di corrente e di resistori; come mostrato in figura, si evidenzino due morsetti e li si colleghi all'esterno ai morsetti **A** e **B** di un bipolo qualsiasi, anche non lineare. I teoremi del generatore equivalente, detti anche **teorema di Thévenin** e **teorema di Norton**, consentono di determinare la **caratteristica del bipolo equivalente alla rete in esame**, visto dai morsetti **A** e **B**. Lo strumento che forniscono questi due teoremi è particolarmente efficace per la risoluzione dei circuiti ma è strettamente legato all'ipotesi di rete lineare; pertanto, **se nella rete fossero presenti elementi non lineari (come i diodi), non lo si potrebbe usare**. Di seguito sono proposti separatamente i due teoremi prendendo in considerazione la seguente rete black box.



## TEOREMA DEL GENERATORE EQUIVALENTE DI TENSIONE (DETTO DI THEVENIN)

Il teorema afferma che per quanto complessa possa essere la rete (ovvero per quanti possano essere i generatori e i resistori contenuti), tra i morsetti **A** e **B** la si può sempre vedere come un sistema composto da:

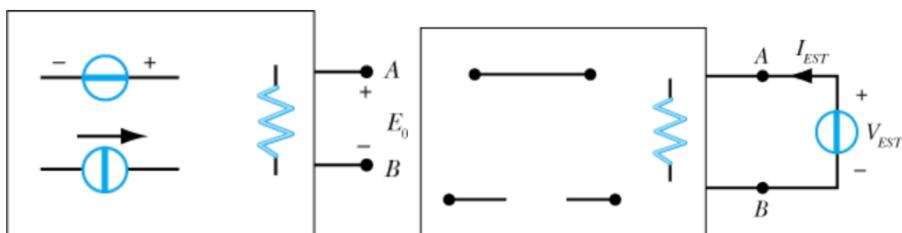
- **Un solo generatore indipendente di tensione  $E_0$ ;**
- **Un solo resistore  $R_0$  in serie al generatore.**



Si può già notare l'importanza del teorema: **non è cosa da poco poter sostituire un intero pezzo di una rete con uno semplificato senza che all'esterno cambi qualcosa**. A tal fine è necessario che i valori del resistore e del generatore siano adatti a restituire ai morsetti lo stesso output della rete precedente alla sostituzione; per calcolare questi valori è necessario tenere in considerazione il loro ruolo in relazione alla rete sostituita:

- **$E_0$  rappresenta la tensione che si presenta tra i morsetti **A** e **B** quando sono aperti e viene definita anche tensione a vuoto tra i morsetti **A** e **B**;**
- **$R_0$  rappresenta la resistenza che si misura tra i morsetti in esame quando la rete è stata resa passiva**, cioè quando tutti i generatori indipendenti sono stati spenti (sostituiti con cortocircuiti e circuiti aperti) e viene chiamata anche **resistenza equivalente**.

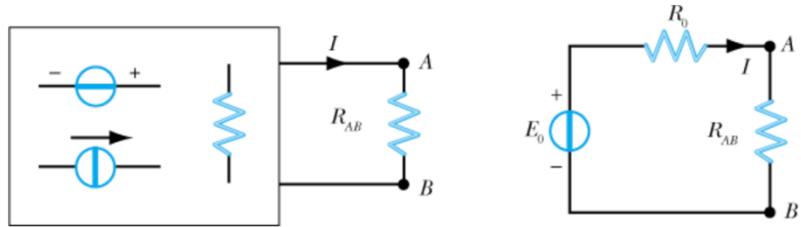
Per calcolare questi due parametri si seguono gli schemi astratti dai circuiti seguenti:



Quanto detto in precedenza implica che, per calcolare il valore di corrente che passa in un ramo  $AB$  (di resistenza  $R_{AB}$ ) in una generica rete, ci si può riferire ad una rete equivalente dal punto di vista topologico ma di più maneggevole:

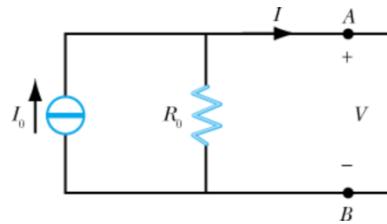
$$-E_0 + (R_0 + R_{AB})I = 0$$

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R_{AB}}$$



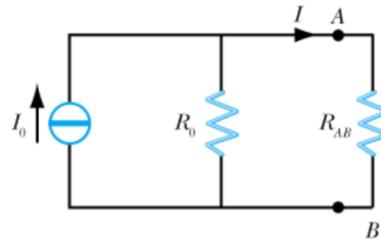
### TEOREMA DEL GENERATORE EQUIVALENTE DI CORRENTE (DETTO DI NORTON)

Prendendo sempre in considerazione la rete black box precedente, **il teorema di Norton afferma che tra i morsetti A e B essa è equivalente alla rete che segue, composta da un generatore di corrente ideale in parallelo ad un resistore:**



**Il calcolo della resistenza  $R_0$  è analogo rispetto a quello fatto nelle considerazioni del teorema di Thevenin, mentre la corrente erogata dal generatore ideale  $I_0$  è pari a quella che circolerebbe nel circuito se tra A e B fosse posto un cortocircuito.** Pertanto, se si volesse calcolare la corrente che circola nel ramo AB di resistenza  $R_{AB}$ , come in figura, si avrebbe:

$$I = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_{AB}}$$



Si può dimostrare che i due teoremi, pur applicando metodologie diverse, applicano lo stesso principio e ottengono gli stessi risultati. Calcolando la corrente di cortocircuito con il teorema di Thevenin:

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

Da cui:

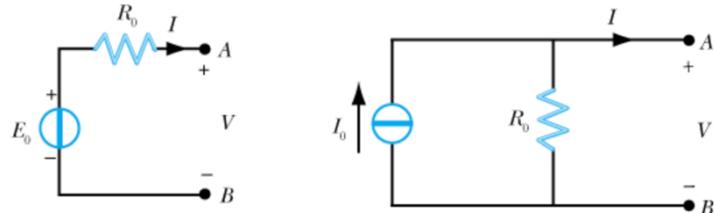
$$I = \frac{E_0}{R_0 + R_{AB}} = \frac{E_0}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_{AB}} = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_{AB}}$$

Che è lo stesso risultato ottenuto applicando il teorema di Norton.

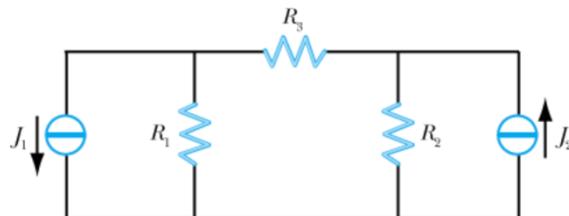
Una delle possibili implicazioni dei teoremi del generatore equivalente permette di trasformare un generatore di tensione in uno di corrente e viceversa senza che la rete subisca variazioni

all'esterno. L'operazione che si effettua è detta **trasformazione di sorgenti** e coinvolge il generatore in esame con una resistenza in serie o in parallelo a seconda di quale tipo di generatore si vuole trasformare; in particolare, è possibile **sostituire un generatore ideale di tensione in serie ad una resistenza** (Thevenin) **con un generatore ideale di corrente in parallelo alla stessa resistenza** (Norton), a patto che la tensione e la corrente erogate dai due dispositivi rispettino la seguente relazione:

$$E_0 = R_0 I_0$$



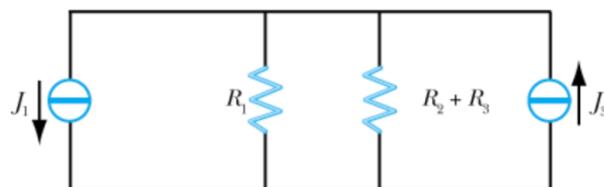
Per comprendere meglio questo tipo di operazione, sia calcolata la potenza erogata dal generatore di corrente  $J_1$  della rete seguente:



Si **trasformi il generatore di corrente  $J_2$  in un generatore di tensione** di valore  $E_2 = R_2 I_2$ ; si può notare che, una volta fatto ciò, le resistenze  $R_2$  e  $R_3$  vanno a trovarsi in serie, per cui si può nuovamente **sostituire il generatore di tensione con uno di corrente** tale che:

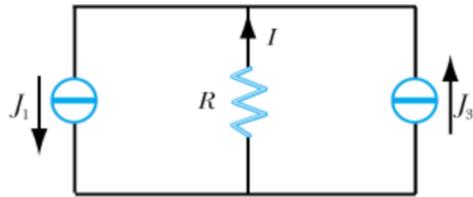
$$I_3 = \frac{E_2}{R_3 + R_2}$$

Queste due trasformazioni portano la rete nella seguente configurazione, la quale differisce dalla rete iniziale per l'assenza del resistore sul lato superiore:



Le due **resistenze in parallelo** possono essere semplificate con la relativa **resistenza equivalente**, ottenendo una **rete ulteriormente semplificata**:

$$R = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

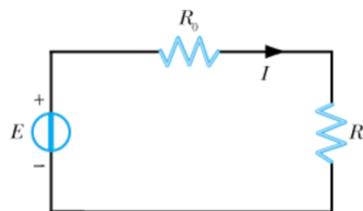


Una volta fatto è semplice determinare la **potenza del generatore  $J_1$** :

$$P_1 = RIJ_1 = RJ_1(J_1 - J_3)$$

## TRASFERIMENTO MASSIMO DI POTENZA

Sia presa in considerazione il circuito in figura, nel quale sono inseriti **un generatore reale di tensione in serie ad una resistenza** (oppure una rete qualsiasi rappresentato attraverso l'equivalente di Thevenin):



La corrente che attraversa l'unica maglia vale:

$$I = \frac{E}{R + R_0}$$

Per cui la **potenza assorbita dal carico** è:

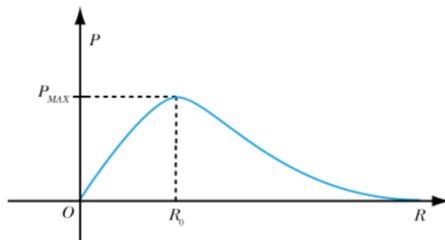
$$P = RI^2 = E^2 \frac{R}{(R + R_0)^2}$$

Ovviamente vista così, è **una quantità che dipende da diversi parametri**, in particolare dalle caratteristiche del generatore reale in esame; **si supponga, tuttavia, che l'unica quantità variabile tra tutte sia la resistenza  $R$** . Si vuole determinare il valore di  $R$  per cui la potenza è massima:

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{(R + R_0)^2} \right) = E^2 \frac{(R + R_0)^2 - 2R(R + R_0)}{(R + R_0)^4} = E^2 \frac{R_0 - R}{(R + R_0)^3}$$

È chiaro che il punto  $R = R_0$  è **un punto stazionario** ma si può facilmente dimostrare che esso è un **punto di massimo**, infatti:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dR} > 0 \Leftrightarrow R < R_0 \\ \frac{dP}{dR} < 0 \Leftrightarrow R > R_0 \end{cases}$$



Quindi la potenza massima si avrà per il valore  $R = R_0$ :

$$P_{MAX} = \frac{E^2}{4R_0}$$

**Il generatore di tensione del circuito eroga potenza ad entrambi i carichi:**

$$P_E = R_0 I^2 + RI^2 = EI$$

Si definisce **rendimento del circuito** il rapporto tra la potenza assorbita da  $R$  e quella erogata dal generatore:

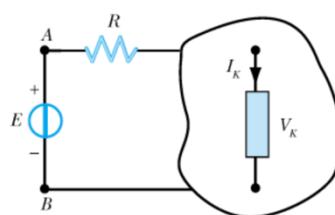
$$\eta = \frac{P}{P_E} = \frac{RI^2}{EI} = \frac{RI}{E} = \frac{R}{R + R_0}$$

Nonostante il rendimento venga sempre definito come una quantità compresa tra 0 e 1, in questo caso **il rendimento massimo si ha quando è massima la potenza assorbita dal carico  $R$** , ovvero quando  $R = R_0$ :

$$\eta_{MAX} = \frac{R_0}{2R_0} = \frac{1}{2}$$

Ciò vuol dire che, nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza al carico  $R$ , solo il 50% della potenza erogata dal generatore viene assorbita dal carico, il resto è dissipato o perso.

Un'altra proprietà delle reti di bipoli è quella che viene definita **proprietà di non amplificazione delle tensioni** (a volte etichettato anche come **teorema**). Si supponga di considerare una rete elettrica **in regime stazionario che ha un unico lato attivo**, come mostrato in figura, in cui è evidenziato l'unico generatore di tensione presente.



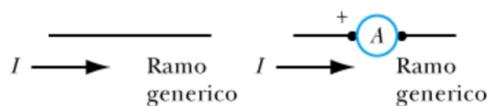
Il teorema afferma che, per una tale rete, i potenziali dei due nodi su cui si appoggia il lato attivo sono l'uno il massimo (A) e l'altro il minimo (B) tra tutti i potenziali dei nodi della rete. Il teorema presenta anche una forma duale, detta **proprietà di non amplificazione delle correnti**, che coinvolge i generatori di corrente.

## MISURE IN REGIME STAZIONARIO

Per **misure in regime stazionario** si intende la misura delle seguenti quantità:

### MISURA DI CORRENTI CONTINUE

Per misurare una **corrente in regime stazionario** è necessario **tagliare il ramo in cui circola la corrente in esame** e posizionare tra gli estremi un amperometro. Dalla schematizzazione fatta in figura, si può notare un **segno + su uno dei due terminali dello strumento**, ad indicare che quello è **il punto di entrata della corrente quando essa è positiva**; ciò significa che la misura di una corrente positiva (viceversa negativa) indica che la corrente entra dal terminale contrassegnato dal + (viceversa esce).

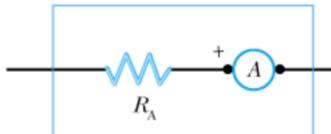


Al passaggio in un conduttore, **la corrente produce effetti di vario genere più o meno utili alla misura** della corrente stessa:

- **Effetti magnetici**, dovuti al fatto che cariche in movimento in un conduttore producono un campo magnetico radiale all'asse del conduttore stesso. Questa proprietà viene sfruttata per misurare la corrente attraverso l'utilizzo di magneti permanenti che rilevano la forza di attrazione magnetica prodotta dalla corrente stessa; i dispositivi di questo tipo sono detti bussole delle tangenti (su cui sono basati anche i più moderni strumenti a bobina mobile, oggi in via di sostituzione con gli strumenti digitali);
- **Effetti termici**, dovuti all'effetto Joule prodotto da una corrente che passa in un conduttore e per il quale si verifica un aumento della temperatura del conduttore stesso. Questa proprietà viene sfruttata da alcuni dispositivi per il calcolo della corrente, andando a misurare prima la variazione di temperatura (amperometri a termocoppia) o la dilatazione del conduttore (amperometri a filo caldo) per poi convertire tale misura in un valore di corrente;
- **Effetti chimici**, dovuti al fatto che se la corrente elettrica attraversa una cella elettrolitica, costituita da due elettrodi metallici immersi in una soluzione elettrolitica (solitamente un sale), causa il deposito di metalli di cui il sale è formato su uno dei due elettrodi. Questa proprietà può essere usata sfruttando la prima legge di Faraday, che mette in relazione le proprietà del metallo depositato (tra cui massa  $M$ , peso atomico  $A$  e valenza dello ione depositato  $Z$ ) con la carica  $Q$  che ha attraversato la cella; facendo scorrere la corrente per un certo periodo di tempo e misurando il peso degli elettrodi prima e dopo, si può determinare una misura della corrente assoluta (cioè avulsa da preliminari calibrazioni). L'efficacia di questa tecnica ha permesso di definire l'ampere internazionale in funzione di una misura non dipendente dalla calibrazione dello strumento; infatti, un ampere è definito come la corrente che, passando in una cella elettrolitica con catodo di platino e anodo di argento immersi in una soluzione acquosa di nitrato di argento, deposita al catodo 1.118 mg di argento al secondo.

$$M = \frac{1}{FZ} A Q$$

Gli **amperometri** di cui si è parlato finora sono sempre stati **strumenti ideali**, cioè **bipoli puramente attivi che non assorbono alcuna potenza**. La realtà è ben diversa e per **simulare il comportamento reale** di un amperometro va tenuta in considerazione **una resistenza**, seppur piccola, che **non trascura l'autoconsumo dello strumento**, ovvero la potenza assorbita necessaria al funzionamento.



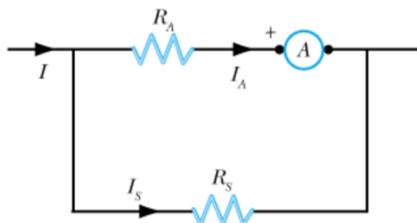
In figura è rappresentato il **modello reale di un amperometro**; tuttavia, non è stata considerata una problematica di rilievo per la misurazione di una corrente stazionaria: **gli amperometri a bobina mobile** (quelli più usati) sono costruiti per **sopportare una corrente non più grande di 0.1A**. Ne consegue che, **per evitare danni allo strumento, la corrente deve essere parzialmente reindirizzata verso un'altra resistenza**, detta **resistenza shunt**, posta in parallelo allo strumento; le due correnti che si vanno a generare sono:

$$I_A = I \frac{R_S}{R_A + R_S}$$

$$I_S = I \frac{R_A}{R_A + R_S}$$

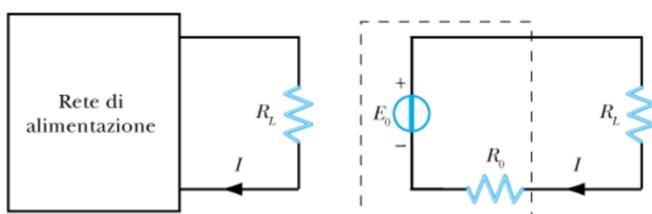
**Il valore che misura l'amperometro**, pertanto, non è quello della corrente  $I$  ma quello della **corrente  $I_A$** , ovvero di una parte della corrente che è stata sezionata per evitare di sovraccaricare (e quindi surriscaldare) **lo strumento**. A partire dall'espressione di questa corrente, è possibile ricavare la misura desiderata:

$$I = I_A \frac{R_A + R_S}{R_S} = \alpha I_A$$



**La costante  $\alpha$  deve essere impostata nello strumento in modo tale da permettere di agire in condizioni di fondo scala**, detto anche “portata” e inteso come **il massimo valore che l'amperometro può misurare**. Le misure fatte in **fondo scala riducono gli errori di misura**, in quanto **rendono minimo l'errore relativo**, e sono a **livelli di rendimento più alti**; per ottenere questo effetto è necessario impostare adeguatamente la resistenza shunt.

**La presenza della resistenza interna all'amperometro**, che lo classifica come amperometro reale, **induce nella misura un errore sistematico** (detto **errore di inserzione**) che è importante rilevare. Per determinare la cardinalità di questo errore sia considerato l'esempio che segue, in cui va misurata la corrente  $I$  che attraversa il resistore  $R_L$ , connesso ad una determinata rete di alimentazione che, in forza del teorema di Thevenin, viene schematizzata come in figura:

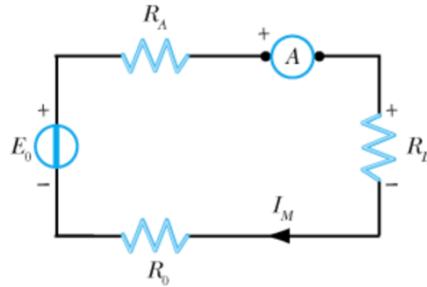


Il valore atteso della corrente  $I$  è:

$$I = \frac{E_0}{R_L + R_0}$$

Ma, inserendo l'amperometro, si misura il seguente valore, alterato dalla resistenza interna  $R_A$ :

$$I_M = \frac{E_0}{R_L + R_0 + R_A}$$



Poiché la resistenza dell'amperometro è inserita in serie ad  $R_L$ , il valore misurato sarà certamente più piccolo di quello atteso, con un errore sistematico  $\varepsilon$ :

$$I_M < I \Rightarrow \varepsilon = I - I_M$$

Per una **misura più accurata**, chiaramente è importante **tenere l'errore sistematico al minimo**; sia, allora, manipolata la corrente misurata nella sua forma equivalente:

$$I_M = \frac{E_0}{R_L + R_0 + R_A} = \frac{E_0}{R_L + R_0} \cdot \frac{R_L + R_0}{R_L + R_0 + R_A} = I \left( \frac{R_L + R_0}{R_L + R_0 + R_A} \right) = \frac{I}{1 + \frac{R_A}{R_L + R_0}}$$

Da cui:

$$\varepsilon = I - I_M = I \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_L + R_0}} \right) = I \cdot \frac{R_A}{R_L + R_0 + R_A}$$

Da questa relazione è possibile astrarre un criterio per cui rendere l'errore sistematico più piccolo possibile, ovvero misurare una corrente il più vicina possibile a quella reale:

$$\frac{R_A}{R_L + R_0} \ll 1 \Leftrightarrow R_A \ll R_L + R_0$$

In altri termini, **il valore della resistenza interna all'amperometro deve essere molto più piccolo rispetto ai valori di resistenza che si trovano nel circuito in cui effettuare la misura.**

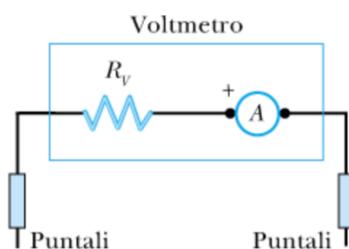
## MISURA DI TENSIONI CONTINUE

Per **misurare una tensione in corrente continua** si usano i **voltmetri**, una classe di strumenti che possono sfruttare **tre diversi principi elettrici**:

- Il primo tipo di strumento sfrutta le **azioni elettrostatiche** e prende il nome di **elettmetro**;
- Il secondo tipo di strumento misura le **correnti che passano attraverso una resistenza** ben nota posta tra due punti del circuito di cui si vuole conoscere la differenza di potenziale e prende il nome di **voltmetro magnetoelettrico**;
- Il terzo tipo di strumento **compara la tensione incognita con una tensione ben nota** e prende il nome di **voltmetro digitale**, che verrà di seguito approfondito.

Lo schema con cui si rappresentano più frequentemente i voltmetri è quello relativo al secondo tipo di strumento, ovvero il voltmetro magnetoelettrico (o amperometrico). Un voltmetro di questo tipo non è altro che **un amperometro reale in serie ad un resistore  $R_V$**  di valore molto alto, che può essere interpretata come la **resistenza equivalente di un collegamento in serie tra il resistore interno all'amperometro  $R_A$  ed uno esterno  $R$** :

$$R_V = R_A + R$$



Anche in questo caso si potrebbero ripetere le considerazioni fatte sull'amperometro reale circa l'**errore sistematico di inserzione dello strumento**, concludendo che per una **misura più accurata possibile** il valore di resistenza interna  $R_V$  deve essere **più alto possibile**; tuttavia, non può essere infinito, dal momento in cui la piccola corrente che giunge all'amperometro permette di determinare la misura di tensione. Per **aumentare la sensibilità dello strumento** possono essere usati **amplificatori in corrente continua** al cui ingresso viene applicata la tensione in esame; il risultato sono **tensioni che raggiungono la sensibilità dei microvolt**, con resistenze interne dell'ordine dei megaohm o più.

Per **sensibilità di un voltmetro amperometrico** non si intende la quantità fisica associata ad ogni strumento di misura ma:

$$K = \frac{1}{I_{MAX}} \approx 10^4 \frac{\Omega}{V}$$

Dove  $I_{MAX}$  è la **corrente di fondo scala dell'amperometro inserito nello strumento**; Conoscendo la **sensibilità del voltmetro**, si è in grado di rilevare anche il valore di resistenza interna  $R_V$  misurando la tensione di fondo scala  $V_{FS}$ :

$$R_V = \frac{V_{FS}}{I_{MAX}} = KV_{FS}$$

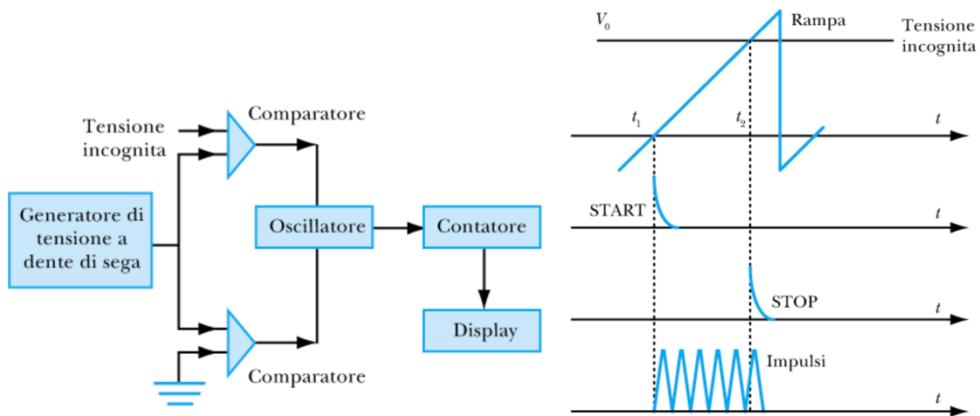
Il motivo per cui è così importante il valore di resistenza interna dei voltmetri nasce dalla **necessità di valutare la perturbazione indotta dallo strumento**.

I **voltmetri digitali** sono strumenti di uso sempre più diffuso grazie ai vantaggi che essi portano alle misurazioni; con il termine **digitale ci si riferisce sia all'elettronica in uso sia al modo di rappresentare la misura**, che rappresenta il vero e proprio vantaggio di questo tipo di strumenti: nei

dispositivi analogici il fenomeno elettrico provoca, attraverso determinati movimenti meccanici, la deflessione di un ago su una scala graduata, mentre nei dispositivi elettrici il valore è direttamente indicato su un display, evitando eventuali errori di parallasse e la dipendenza da sistemi meccanici. Infine, **la differenza più importante** (che ha determinato la fama dei voltmetri digitali) è nel possibile valore più elevato di resistenza interna  $R_V$ , che porta ad una **misura più accurata**.

I voltmetri digitali hanno riscosso successo anche grazie alla loro **possibilità, attraverso una serie di commutatori, di misurare correnti e resistenze**: per le prime, si misurano le differenze di potenziale che si generano ai capi di resistori tarati, per le seconde si misurano le tensioni conseguenti al passaggio di una corrente nota attraverso i resistori in esame; vi è, inoltre, la **possibilità di variare ampiamente il fondo scala**, in alcuni casi manualmente e in altri automaticamente. Con strumenti di questo genere si possono misurare tensioni che vanno dai microvolt ai kilovolt, correnti che vanno da  $10^{-15}$  ampere a qualche ampere, e resistenze che vanno dai milliohm a qualche migliaio di megaohm.

Si analizzi, di seguito, il **principio di funzionamento dei voltmetri digitali**, sfruttando lo schema in figura:



La **tensione incognita** ed una **tensione a dente di sega** (una rampa lineare fornita da un apposito generatore) sono **applicate agli ingressi di un comparatore**, che **fornisce in uscita un segnale solo quando le due tensioni sono uguali**. La stessa rampa lineare è **applicata ad un secondo comparatore**, il cui ingresso è a terra (ovvero tensione nulla); quest'ultimo comparatore **restituirà un segnale solo quando la tensione della rampa è nulla**. Si possono, quindi, individuare **due segnali distinti**: un **segnale di START**, fornito dal secondo comparatore, che indica il momento in cui la tensione della rampa è nulla, e un **segnale di STOP**, fornito dal primo comparatore, che indica il momento in cui la tensione della rampa è uguale a quella da misurare; questi due segnali **comandano l'inizio e la fine dell'emissione di segnali a frequenza determinata da parte di un oscillatore**, il cui **tempo di funzionamento** è **direttamente proporzionale alla tensione da misurare**. In funzione di tale intervallo e dell'inclinazione della rampa (nota a priori) si può determinare il valore della tensione incognita:

$$V_0 = M(t_2 - t_1)$$

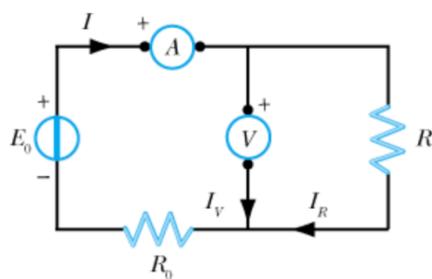
Poiché l'**intervallo di tempo in cui l'oscilloscopio funziona è individuato a partire dagli impulsi emessi**, espressi da una quantità intera  $N$ , il **valore della tensione  $V_0$**  viene dato per **intervalli discreti**, a differenza degli strumenti analogici che, in linea di principio, restituiscono un insieme continuo di valori. Risulta intuitivo comprendere che **la frequenza dell'oscillatore e l'inclinazione della rampa sono le misure indicative della "bontà" dello strumento** e che una rampa più lenta ed un oscillatore con maggiore frequenza corrisponderanno ad una maggiore sensibilità.

**I voltmetri digitali permettono di seguire l'andamento temporale di una tensione variabile per punti;** infatti, una volta terminata la misura, lo strumento è pronto ad eseguire un nuovo ciclo. Ciò è possibile **a patto che le variazioni temporali del segnale da misurare siano più lente del tempo caratteristico di risposta dello strumento.**

**L'accuratezza di questo tipo di strumento è maggiore delle sue controparti;** infatti, si possono ottenere misure inferiori di una parte su diecimila, con cinque o sei cifre significative, per un intervallo di misura che va da  $0.1mV$  a  $1kV$ .

#### MISURA DI RESISTENZA CON IL METODO VOLT – AMPEROMETRICO

Questa tecnica di misura consiste nell'**applicare la legge di Ohm ad un resistore:** si misura la corrente che passa per il bipolo in esame e la si mette in relazione alla tensione misurata ai suoi poli. Per comprendere meglio sia fatto l'esempio con la rete seguente:



**Il voltmetro misura la tensione ai capi del resistore  $R$ , mentre l'amperometro misura una corrente più piccola di quella che attraversa  $R$  (dal momento in cui il voltmetro assorbe un una certa corrente):**

$$I = I_R + I_V$$

Dato che:

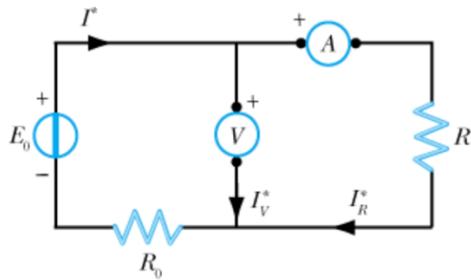
$$R = \frac{V}{I_R} \wedge R_V = \frac{V}{I_V}$$

Con  $R_V$  la resistenza interna del voltmetro, si ha:

$$R = \frac{V}{I_R} = \frac{V}{I - I_V} = \frac{V}{I - \frac{V}{R_V}}$$

**Il risultato è più soddisfacente quanto più sensibile è il voltmetro e quanto più il valore di resistenza da misurare è contenuto rispetto alla resistenza interna.** Lo schema appena mostrato è molto utile per la misura delle piccole resistenze, inferiori all'ohm, in cui può essere rilevante l'errore dovuto alle resistenze introdotte dai contatti, tanto piccole quanto grande la resistenza del circuito voltmetrico.

Si analizzi un **circuito analogo** a quello appena mostrato, dove **l'unica differenza sta nel posizionamento dell'amperometro in serie al resistore**, in modo che la corrente misurata sia quella che attraversa il bipolo da misurare:



In questo caso, il voltmetro andrà a misurare una tensione che è somma di quella ai capi di  $R$  e di quella ai capi dell'amperometro:

$$V = I_R^*(R_A + R) \Rightarrow R = \frac{V}{I_R^*} - R_A$$

A differenza del caso precedente, se  $R_A \ll R$  allora:

$$R = \frac{V}{I_R^*}$$

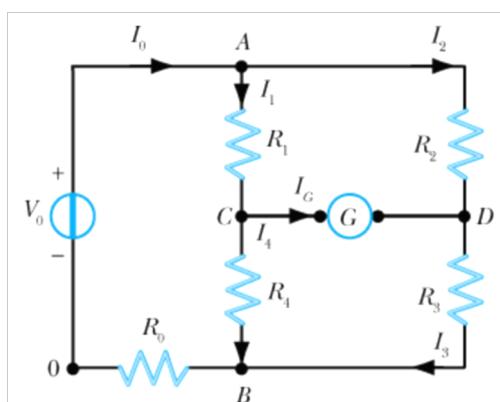
Pertanto, questo schema è comodo per misurare alti valori di resistenza in relazione alla resistenza interna, mentre lo schema precedente per valori contenuti.

Spesso si associano bassi valori di resistenza ad alti valori di induttanza, come nel caso degli avvolgimenti nelle macchine elettriche. In questo caso occorre tener presente il comportamento del circuito durante le fasi transitorie e inserire il voltmetro solo a regime, al fine di non danneggiare lo strumento per le sovratensioni che si presentano sull'induttanza.

#### MISURA DI RESISTENZA CON IL PONTE DI WHEATSTONE

Il metodo volt-amperometrico appena mostrato permette di effettuare misure con una precisione del  $\pm 0.5\%$ ; un altro metodo che sfrutta delle reti a ponte, detto ponte di Wheatstone, permette di misurare resistenze tra qualche ohm e  $1M\Omega$  con una precisione del  $\pm 0.1\%$  (per misure maggiori diventa rilevante l'errore dovuto alle resistenze di dispersione ed è necessario effettuare opportune schermature).

Una rete a ponte di questo tipo è composta, come indicato in figura, da quattro resistenze, una sorgente in continua in serie ad una resistenza  $R_0$  (che avvicina il modello alla realtà) ed un rilevatore; quest'ultimo è un galvanometro (spesso schematizzato con una resistenza  $R_G$  per ricordarne la presenza).



**Il galvanometro elettromagnetico è uno strumento indicatore**, in grado di rilevare correnti estremamente piccole (nell'ordine dei nano – ampere) **senza però misurarne il valore**; con lo zero al centro della scala, il galvanometro è **in grado di comunicare solo se c'è passaggio di corrente e il segno delle variazioni attorno lo zero**.

Si dice che **il ponte è all'equilibrio quando il galvanometro non rileva passaggio di corrente**; in tal caso, **i valori delle quattro resistenze non possono essere indipendenti**, dal momento in cui deve permanere la relazione:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

In altre parole, **occorre che almeno una delle quattro resistenze sia variabile per ottenere la condizione di equilibrio e che le altre due siano rapportate all'ordine di grandezza della resistenza da misurare**. All'equilibrio, il galvanometro riporta una **corrente nulla**, ovvero una corrente che è sostenuta dalle seguenti relazioni:

$$I_1 = I_4 \wedge I_2 = I_3$$

**Applicando due volte la Legge di Kirchhoff alle tensioni**, risulta che:

$$\begin{cases} V_{AC} + V_{CB} = V_{AD} + V_{DB} \\ V_{AC} = V_{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_4)I_1 = (R_2 + R_3)I_2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{cases}$$

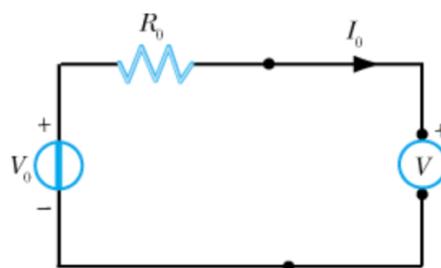
**Dividendo membro a membro** le ultime due relazioni si ottiene:

$$\frac{R_1 + R_4}{R_1} = \frac{R_2 + R_3}{R_2} \Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$$

**Con questa relazione è poi possibile misurare una resistenza quando le altre sono note.**

#### MISURA DELLA F.E.M. DI UN GENERATORE

Per definizione, **la forza elettromotrice di un generatore è la tensione misurata a vuoto tra i morsetti dello stesso**, quindi per misurarla **occorre un voltmetro ad elevata sensibilità** posto come in figura:

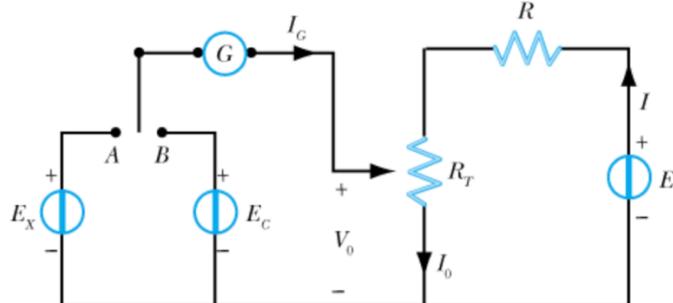


In realtà, con questo metodo **non si misura la vera f.e.m., perché il voltmetro assorbe sempre un po' di corrente** ma per tensione a vuoto si intende la tensione che si ha quando il generatore non eroga alcuna corrente. L'inserimento del voltmetro, pertanto, causa una piccola caduta di tensione ai capi della resistenza interna del generatore, pari a:

$$V_0 = R_0 I_0 + V = (R_0 + R_V) I_0$$

Chiaramente, per voltmetri ad elevata sensibilità  $V_0 \geq V$ .

La misura della f.e.m. di un generatore può essere **fatta anche con il metodo di opposizione**, o **metodo di Poggendorff**, nel quale è usata la rete seguente:



$$R_T = R_A + R_B$$

In essa sono presenti il generatore la cui f.e.m.  $E_x$  va misurata, delle batterie campione che erogano una tensione  $E_C$  nota con estrema precisione e un potenziometro  $R_T$ , ovvero una resistenza che può essere divisa in due parti,  $R_A$  e  $R_B$ . L'esecuzione della misura prevede due prove:

- Il commutatore è posizionato al nodo **A**, in corrispondenza della f.e.m. da misurare, mentre il cursore del reostato va regolato in modo da azzerare la corrente individuata dal galvanometro **G**. In questa condizione di equilibrio si può scrivere:

$$E_x = R_B^{(1)} I_0^{(1)} = R_B^{(1)} \frac{E}{R + R_T}$$

- Il commutatore è posizionato al nodo **B**, in corrispondenza della f.e.m. campione, mentre il cursore del reostato va regolato in modo da raggiungere la condizione di equilibrio, per la quale:

$$E_C = R_B^{(2)} I_0^{(2)} = R_B^{(2)} \frac{E}{R + R_T}$$

Dividendo membro a membro le due equazioni rilevate si ottiene la formula da cui rilevare la misura della f.e.m. incognita:

$$\frac{E_x}{E_C} = \frac{R_B^{(1)}}{R_B^{(2)}} \Rightarrow E_x = E_C \frac{R_B^{(1)}}{R_B^{(2)}}$$

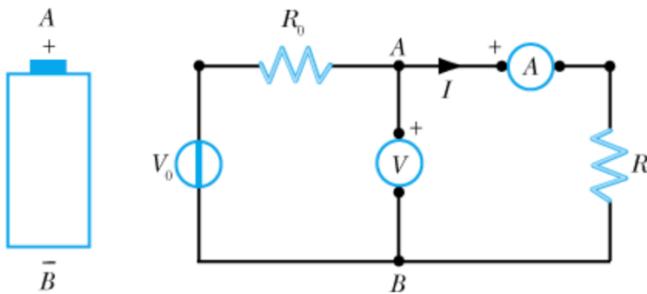
Più precise sono le misure delle due resistenze  $R_B^{(1)}$  e  $R_B^{(2)}$  (con un ponte di Wheatstone ad esempio) e più è precisa la misura della f.e.m. in esame.

#### RILIEVO DELLA CARATTERISTICA DI UN GENERATORE

Parlando dei **generatori ideali**, è stata menzionata la **difficoltà di riprodurre tali bipoli nella realtà**, per cui è necessario **introdurre il concetto di generatore reale** come collegamento in serie tra un generatore ideale e un resistore interno. **Una batteria a pila da 1.5V è un esempio di generatore reale**, la cui **caratteristica** sarà descritta dalla seguente equazione:

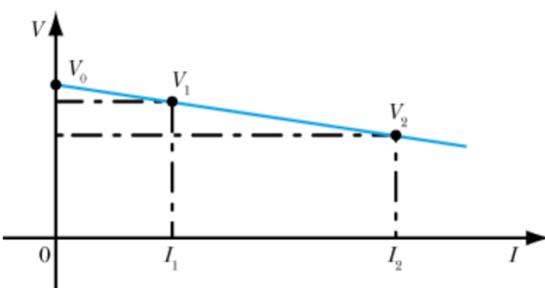
$$V = V_0 - R_0 I$$

Dove  $V_0$  rappresenta la caratteristica del relativo generatore ideale e  $R_0$  il valore di resistenza del resistore interno; un generatore di questo tipo potrà essere raffigurato sul piano tensione – corrente come una retta che al valore di corrente nullo toccherà l'asse delle ordinate nel punto  $V_0$



Dal momento in cui è nota la linearità della tensione in funzione della corrente, non è difficile astrarre dal modello reale la caratteristica del generatore in esame; è sufficiente trovare la tensione a due valori distinti della corrente, calcolare il valore di resistenza interna e prolungare la retta fino all'asse delle ordinate, ottenendo così anche il valore di tensione a vuoto:

$$\begin{cases} V_1 = V_0 - R_0 I_1 \\ V_2 = V_0 - R_0 I_2 \end{cases} \Rightarrow R_0 = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1}$$



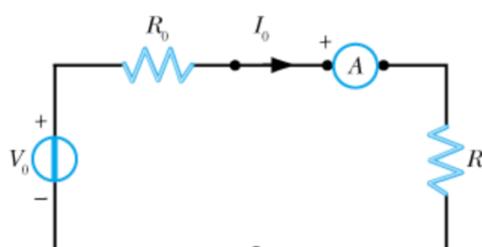
### MISURA DELLA POTENZA

In corrente continua, la misura della potenza assorbita da un bipolo può essere fatta seguendo uno degli schemi proposti di seguito, ognuno dei quali sfrutta una delle diverse formulazioni della potenza:

- **Primo schema**

Sfruttando lo schema in figura, si alimenta il resistore con una batteria e si misura la corrente che lo attraversa per mezzo di un amperometro, per poi determinare la potenza:

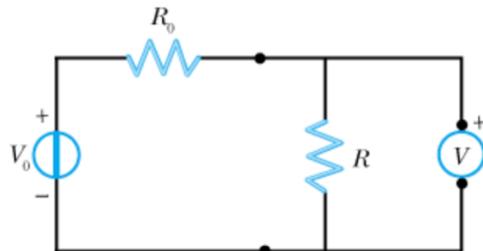
$$P = RI_0^2$$



- **Secondo schema**

Nella situazione mostrata di seguito, si alimenta il resistore con una batteria e si misura la tensione ai suoi capi con un voltmetro, per poi determinare la potenza:

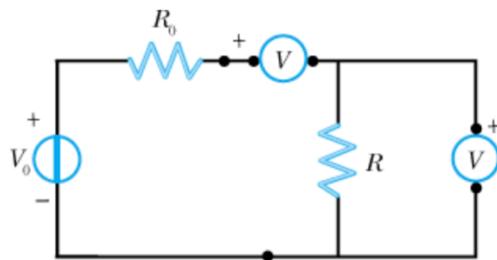
$$P = \frac{V^2}{R}$$



- **Terzo schema**

In quest'ultimo caso la potenza è:

$$P = VI$$

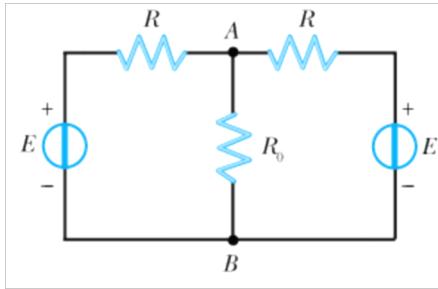


**Ma si commette un errore sistematico di inserzione**, per cui è bene valutare l'ordine di grandezza della resistenza per decidere se inserire a monte del resistore un amperometro o un voltmetro; **l'unico vantaggio di questa misura risiede nel fatto che non è necessario conoscere a priori il valore di resistenza.**

## SIMMETRIA NELLE RETI ELETTRICHE

Per **simmetria**, dal greco συμμετρία, si intende la **corrispondenza tra le differenti parti di un sistema rispetto ad un punto di riferimento**. Il concetto di simmetria ha origine nella civiltà greca, in quanto espressione di equilibrio estetico, ed ha plasmato la cultura occidentale a tal punto che non è più possibile dare una definizione di simmetria generalizzata senza tenere conto dei vari contesti in cui essa è usata; si parla di simmetria nell'arte, nell'architettura, nella biologia, nella matematica, nella fisica, nella geometria, nella mineralogia, nella musica, nella letteratura e in molto altro. In questa sede si vuole approfondire il tema della **simmetria** in relazione alle **reti elettriche** ed al modo in cui essa permette di **semplificare diverse operazioni**.

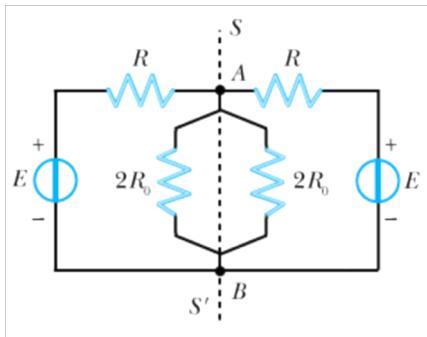
Per comprendere i vantaggi dell'uso della simmetria nelle reti elettriche, sia considerato l'esempio che segue:



La differenza di potenziale tra il nodo **A** e il nodo **B** può essere facilmente calcolata con la **formula di Millman**:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R} + \frac{E}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}} = 2E \frac{R_0}{R + 2R_0}$$

Questa relazione servirà come **conferma al risultato ottenuto manipolando la rete in esame per simmetria**. Sia tracciata una retta che tagli il circuito a metà all'altezza dei due nodi **A** e **B**:



Per rendere simmetrica questa rete, **il resistore  $R_0$  è stato sostituito con il circuito equivalente composto da due resistori  $2R_0$  in parallelo**. Posto così, il problema permette di **risolvere l'intera rete lavorando solo sulla sua metà**, semplificando notevolmente i calcoli.

Detta **I** la corrente che circola nella “mezza” rete, viene naturale scrivere:

$$I = \frac{E}{R + 2R_0}$$

Da cui **discende automaticamente il risultato rilevato con la formula di Millman**:

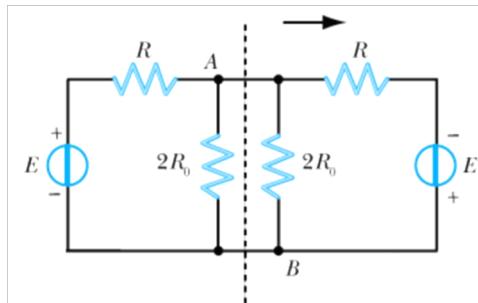
$$V_{AB} = 2 \cdot \frac{ER_0}{R + 2R_0} = 2E \frac{R_0}{R + 2R_0}$$

Per approfondire il discorso, si può dire che **le proprietà del campo elettromagnetico si possono tradurre in altrettante proprietà di simmetria per i circuiti elettrici**. Di seguito sarà affrontato il tema della **simmetria rispetto ad un piano**, in quanto è il tipo di simmetria più interessante; **un circuito è simmetrico rispetto ad un piano  $\pi$  quando:**

1. **Ha un grafo simmetrico rispetto a  $\pi$**  (per ogni nodo e per ogni ramo della rete esistono nel grafo anche il nodo e il ramo simmetrico);

2. **Ha componenti simmetrici rispetto a  $\pi$**  (in lati simmetrici sono posti componenti dello stesso tipo e con lo stesso valore del parametro);
3. **Ha grandezze impresse poste in posizione simmetrica ed uguali.**

Mentre si dice che **una rete è antisimmetrica rispetto al piano  $\pi$  quando**, al valere delle prime due condizioni di simmetria, **le grandezze impresse poste in posizioni simmetriche sono opposte**; ad esempio, nella rete seguente l'antisimmetria è garantita dall'inversione della polarità del generatore di tensione, che porta i nodi  $A$  e  $B$  allo stesso potenziale, il che significa che nei resistori trasversali non passa corrente sebbene nei due anelli che costituiscono il circuito passino correnti uguali in modulo e opposte in direzione:



$$I = \frac{E}{R}$$

Di seguito sono enunciati i teoremi sulla simmetria che discendono direttamente da queste considerazioni.

### **ENUNCIATO PRIMO TEOREMA DELLA SIMMETRIA NELLE RETI ELETTRICHE**

*Ipotesi:*

$\forall C$  : è un circuito simmetrico rispetto al piano  $\pi$

*Tesi:*

Due nodi simmetrici hanno lo stesso potenziale

Due lati simmetrici sono percorsi dalla stessa corrente

La corrente di un lato collegato tra due nodi simmetrici è nulla

### **ENUNCIATO SECONDO TEOREMA DELLA SIMMETRIA NELLE RETI ELETTRICHE**

*Ipotesi:*

$\forall C$  : è un circuito antisimmetrico rispetto al piano  $\pi$

*Tesi:*

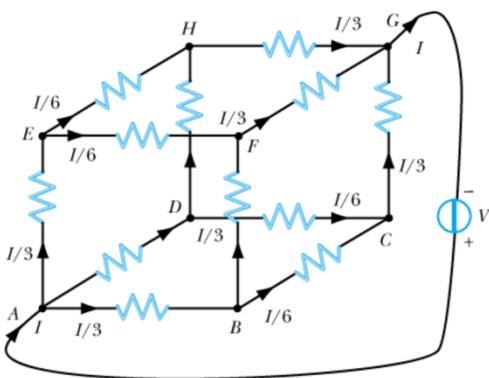
Due nodi simmetrici hanno potenziali opposti

Due lati simmetrici sono percorsi da correnti opposte

Tutti i nodi che stanno sul piano di simmetria hanno lo stesso potenziale

Per concretizzare quanto detto finora sia considerato il classico **problema del cubo di resistori**, affrontandolo con due diversi approcci. Siano posti sugli spigoli di un cubo **12 resistori con lo stesso valore di resistenza  $R$** , si vuole **determinare la resistenza equivalente del circuito**; si potrebbe benissimo **risolvere la questione con le Leggi di Kirchhoff**, ottenendo però un sistema di **molte equazioni in molte incognite** che risulta **poco pratico da maneggiare**. Per semplificare il tutto, si sfruttino le proprietà di simmetria della rete collegando i vertici  **$A$  e  $G$**  ad un generatore di tensione ed indicando con  $I$  la corrente entrante ed uscente dal cubo.

Per simmetria, **la corrente che entra nel nodo  $A$  si dividerà in tre correnti uguali in ciascuno dei rami ortogonali  $AB$ ,  $AD$  e  $AE$** ; a sua volta, **la terza parte della corrente originaria che adesso circola nel ramo  $AB$  si dividerà, all'altezza del nodo  $B$ , in due correnti uguali in ciascuno dei nodi ortogonali  $BF$  e  $BC$** . Proseguendo in questo modo, le correnti si disporranno sugli spigoli del cubo come segue:



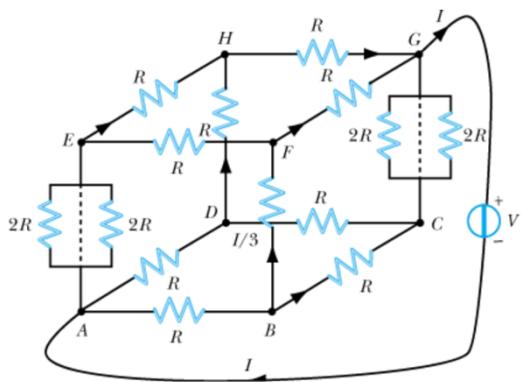
Per determinare la **tensione tra  $A$  e  $G$** , da cui poi rilevare la resistenza equivalente, sia scelto **un percorso che congiunga i due nodi** (ad esempio  $AEHG$ ) e **vi si applichi la LKT**:

$$V = V_{AE} + V_{EH} + V_{HG} = R \frac{I}{3} + R \frac{I}{6} + R \frac{I}{3} = \frac{5}{6} RI$$

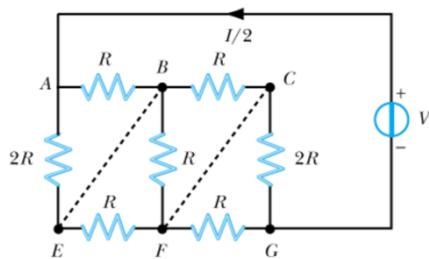
Ma poiché **in  $A$  entra e in  $G$  esce la corrente  $I$** , la resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = \frac{5}{6} R$$

Il **secondo approccio** al problema **considera il cubo come simmetrico rispetto alla diagonale  $AEGC$** , per il quale i resistori  **$AE$  e  $GC$**  sono stati ridisegnati come il parallelo di resistori di **doppia resistenza  $R$** :

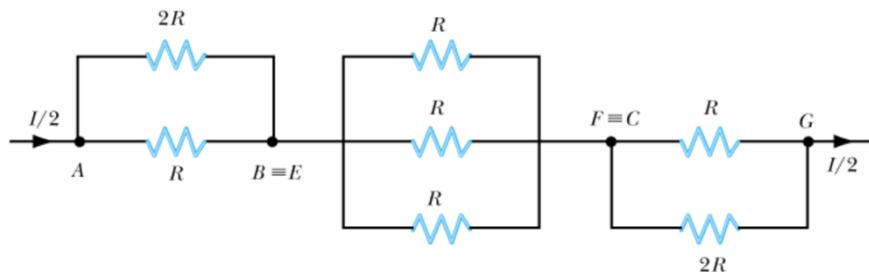


In questo modo la rete spaziale può essere immaginata come composta da due reti, perfettamente uguali ed in parallelo, una delle quali composta come segue:



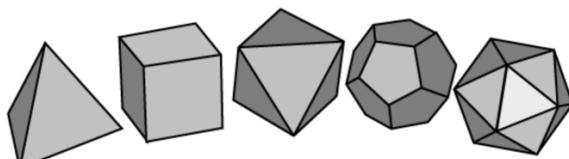
Le due linee tratteggiate rappresentano due cortocircuiti virtuali, dovuti al fatto che la simmetria impone che i potenziali dei nodi  $E$  e  $B$  siano uguali (come per  $F$  e  $C$ ). Sfruttando questa proprietà, la rete può essere ulteriormente ridisegnata, concludendo che:

$$\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R = \frac{V}{I/2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{5}{6}R$$



L'uso della simmetria può essere esteso anche agli altri solidi platonici, le cui resistenze equivalenti viste dai vertici opposti sono:

- tetraedro (facce triangolari)  $R_E = R/2$ ;
- esaedro o cubo (faccce quadrate)  $R_e = 5R/6$ ;
- ottaedro (facce triangolari)  $R_E = R/2$ ;
- dodecaedro (faccce pentagonali)  $R_E = R/2$ ;
- icosaedro (faccce triangolari)  $R_e = 7R/12$ .



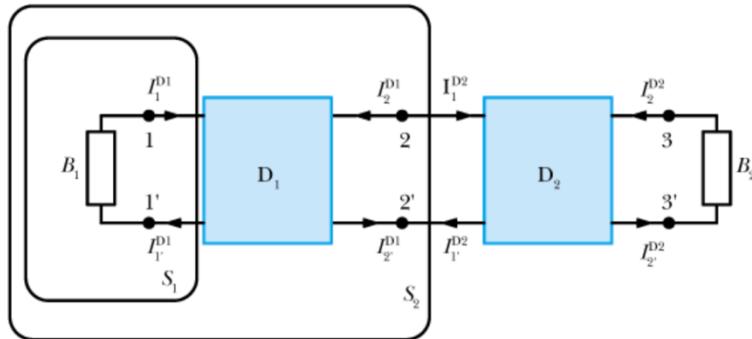
## DOPPI BIPOLI: CARATTERISTICHE E CLASSIFICAZIONI

Finora sono state studiate reti elettriche all'interno delle quali figurano solo bipoli; nella realtà, i circuiti elettrici possono essere composti da diverse tipologie di oggetti, i componenti, uno dei quali è il **doppio bipolo**. Si può dimostrare come le tecniche di risoluzione delle reti di bipoli affrontate nei capitoli precedenti si possano estendere anche a reti in cui compaiono anche doppi bipoli.

Il modello più astratto di doppio bipolo lo rappresenta come un dispositivo dotato di un corpo centrale dal quale fuoriescono due coppie di fili conduttori, una coppia primaria ( $1 - 1'$ ) e una secondaria ( $2 - 2'$ ):



I doppi bipoli possono essere tranquillamente collegati ad altri dispositivi, che siano essi bipoli o doppi bipoli, attraverso i morsetti presenti sui fili conduttori; inoltre, per i doppi bipoli **continuano a valere le Leggi di Kirchhoff**. Nella figura che segue è proposto l'esempio di una rete composta sia da bipoli che da doppi bipoli e non è difficile verificare la valenza delle LKC e delle LKT:



La validità delle due leggi porta con sé alcune conseguenze interessanti, per il cui studio è necessario (come sempre) associare alle correnti un verso di percorrenza ed una denominazione arbitraria; per semplicità le si ponga come nell'esempio appena riportato. Si applichi la LKC, prima alla superficie chiusa  $S_1$  e poi a  $S_2$ :

$$I_1^{D_1} - I_{1'}^{D_1} = 0 \Rightarrow I_1^{D_1} = I_{1'}^{D_1}$$

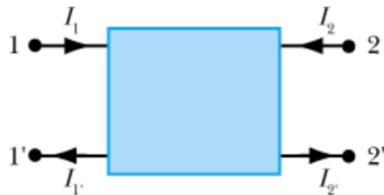
$$-I_2^{D_1} + I_{2'}^{D_1} = 0 \Rightarrow I_2^{D_1} = I_{2'}^{D_1}$$

Si può quindi dedurre che, **indipendentemente da come sia fatto il bipolo  $D_1$  e dalla sua eventuale caratteristica, la corrente che entra in uno dei due morsetti primari/secondari è uguale alla corrente che esce dall'altro**. Fatto un ragionamento analogo per  $D_2$ :

$$I_1^{D_2} = I_{1'}^{D_2}$$

$$I_2^{D_2} = I_{2'}^{D_2}$$

Quindi si può concludere che, **per qualunque doppio bipolo e comunque sia esso costituito al suo interno, in una coppia di terminali la corrente che entra in uno dei due deve essere uguale alla corrente che esce dall'altro.**



$$I_1 = I_{1'} \wedge I_2 = I_{2'}$$

Ciò significa che **i due morsetti primari 1 – 1'** (analogamente per quanto riguarda i secondari) rappresentano una vera e propria **porta primaria del doppio bipolo**, nella quale la corrente che entra in un morsetto esce dall'altro. Per questo motivo, **d'ora in poi si ometterà dalle raffigurazioni l'uguaglianza tra queste correnti**, riportando però le due differenze di potenziale  $V_1$  e  $V_2$ ; si può notare come **le considerazioni appena fatte rientrano nella definizione di convenzione dell'utilizzatore**, che sarà implicitamente usata a meno di appositi chiarimenti.



In definitiva, ciò che caratterizza un doppio bipolo è la presenza di due porte, una primaria e una secondaria, composte da due morsetti all'interno dei quali circola una corrente entrante ed una uguale corrente uscente e tra i quali si instaura una **differenza di potenziale il cui valore è, in linea di principio, associato arbitrariamente**.

Naturalmente, anche per i doppi bipoli è possibile dare le definizioni energetiche date per i bipoli, ovvero **definire l'energia e la potenza** (assorbita o erogata). Dal momento in cui si è fatta la **convenzione dell'utilizzatore**, la **potenza assorbita del doppio bipolo** viene definita come la somma delle potenze assorbite dalle due porte:

$$P_{ASS} = P_{ASS}^{(1)} + P_{ASS}^{(2)} = V_1 I_1 + V_2 I_2$$

Analogamente, la **potenza erogata**:

$$P_{ERO} = -P_{ASS} = -V_1 I_1 - V_2 I_2$$

E sono entrambe quantità **misurate in watt**. Per quanto riguarda il calcolo relative energie, poiché si è in regime stazionario non bisogna fare altro che moltiplicare la potenza in esame con l'**intervallo di tempo desiderato**; ad esempio, l'energia assorbita dal doppio bipolo tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ :

$$U_{ASS} = P_{ASS}(t_2 - t_1) = (V_1 I_1 + V_2 I_2)(t_2 - t_1)$$

Ed è chiaramente una quantità **misurata in joule**. Vale la pena osservare come il **Teorema di Tellegen sulla conservazione delle potenze elettriche valga ancora quando si parla di doppi bipoli**; il motivo è semplice e risiede nella **descendenza del teorema dalle Leggi di Kirchhoff**, la cui valenza

è stata già mostrata. Si può concludere **generalizzando il teorema a qualsiasi tipo di componente**, affermando che **la somma di tutte le potenze elettriche virtuali assorbite da una rete elettrica composta da bipoli o doppi bipoli è nulla**.

Uscendo dal vago, **è necessario andare a specificare quali sono e cosa fanno i diversi tipi di doppi bipoli**; tuttavia, proprio come è stato fatto per i bipoli, **è necessario individuare quell'elemento che permette di distinguere due dispositivi diversi** (come un transistor e un trasformatore). Per i bipoli la risposta era data dalla **caratteristica statica**, che associa al bipolo un principio di funzionamento unico; per i doppi bipoli si procede allo stesso modo, gli si associa una caratteristica statica. Ma se per i bipoli bastava una funzione del tipo:

$$I = f(V) \vee V = g(I)$$

**Per i doppi bipoli una sola funzione non è sufficiente a descrivere la caratteristica** perché nel dispositivo **intervengono quattro grandezze**: le **due correnti** ( $I_1$  e  $I_2$ ) e le **due tensioni** ( $V_1$  e  $V_2$ ) **alle due porte**. Quindi, **la caratteristica di un doppio bipolo sarà un funzionale del tipo**:

$$\begin{cases} V_1 = F_1(I_1, I_2) \\ V_2 = F_2(I_1, I_2) \end{cases}$$

In questo tipo di rappresentazione si possono riconoscere le **funzioni in due variabili  $F_1$  e  $F_2$**  grazie alle quali **le variabili controllate** (variabili dipendenti, ovvero le tensioni) **sono determinate in funzione delle variabili di controllo** (variabili indipendenti, ovvero le correnti) attraverso una **descrizione su base correnti**. In maniera del tutto analoga, **la caratteristica potrebbe essere espressa attraverso una descrizione su base tensioni**:

$$\begin{cases} I_1 = G_1(V_1, V_2) \\ I_2 = G_2(V_1, V_2) \end{cases}$$

In questo caso, **le variabili controllate sono le correnti e le variabili di controllo le tensioni**. Non sono precluse, tuttavia, **soluzioni ibride** in cui **le variabili di controllo sono una tensione e una corrente e le variabili controllate l'altra tensione e l'altra corrente**; in particolare, queste rappresentazioni sono due, in base alle due possibili combinazioni ibride:

$$\begin{cases} V_1 = H_1(I_1, V_2) \\ I_2 = H_2(I_1, V_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = L_1(V_1, I_2) \\ V_2 = L_2(V_1, I_2) \end{cases}$$

Infine, si possono utilizzare le **rappresentazioni di trasmissione**, in cui **le variabili di controllo sono le grandezze associate ad una delle due porte e le variabili controllate le grandezze associate all'altra porta**:

$$\begin{cases} I_2 = M_1(V_1, I_1) \\ V_2 = M_2(V_1, I_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = N_1(V_1, I_2) \\ V_1 = N_2(V_1, I_2) \end{cases}$$

**Riassumendo tutte le possibili rappresentazioni della caratteristica di un doppio bipolo:**

Rappresentazione	Variabili di controllo	Variabili controllate
Controllata in corrente	$I_1, I_2$	$V_1, V_2$
Controllata in tensione	$V_1, V_2$	$I_1, I_2$
Ibrida 1	$I_1, V_2$	$V_1, I_2$
Ibrida 2	$V_1, I_2$	$I_1, V_2$
Trasmissione 1	$V_1, I_1$	$V_2, I_2$
Trasmissione 2	$V_2, I_2$	$V_1, I_1$

Proprio come per i bipoli, **la caratteristica di un doppio bipolo permette di classificare il dispositivo secondo diversi parametri**, come l'attività o la passività, grazie ai quali si possono individuare diversi gruppi di componenti con proprietà simili.

### DOPPI BIPOLI ATTIVI E PASSIVI

Questa classificazione nasce dall'**esigenza di capire quale**, tra i diversi componenti di una rete, assorbe o fornisce energia. Un doppio bipolo operante in regime stazionario è **passivo se la potenza da esso assorbita è positiva o al più nulla**:

$$P_{ASS} \geq 0$$

$$P_{ASS} = V_1 I_1 + V_2 I_2 \geq 0$$

Anche se su una porta fosse fatta la convenzione del generatore e sull'altra quella dell'utilizzatore, la relazione appena enunciata deve essere sempre valida:

$$P_{ASS} = V_1 I_1 - V_2 I_2 \geq 0$$

Di contro, un **doppio bipolo è attivo quando la potenza da esso assorbita è negativa**:

$$P_{ASS} < 0$$

Ovvero se si può trovare un insieme di tensioni e correnti di porta per cui la potenza elettrica assorbita risulti negativa. Ad esempio, sia considerato il doppio bipolo con la seguente caratteristica:

$$\begin{cases} V_1 = -3I_1 \\ V_2 = 5I_2 \end{cases}$$

La cui potenza assorbita è:

$$P_{ASS} = -3I_1^2 + 5I_2^2$$

Supponendo la coppia di correnti  $(I_1, I_2) = (1,1)$  si ha:

$$P_{ASS} = 2$$

E il bipolo è passivo; tuttavia, se si tiene costante la prima corrente, la seconda va a zero e la potenza assorbita diventa negativa, risultando in un bipolo attivo. **È stato dimostrato come per questo particolare esempio esistano delle condizioni di funzionamento che rendono il doppio bipolo attivo.**

### DOPPI BIPOLI LINEARI E NON LINEARI

**La linearità della caratteristica di un bipolo in regime stazionario era rappresentata da una relazione del tipo:**

$$I = GV$$

Dove  $G$  è una conduttanza; analogamente, **un doppio bipolo è lineare se le relazioni che descrivono la sua caratteristica sono lineari rispetto a tutte le variabili indipendenti**. Ad esempio:

$$\begin{cases} I_1 = aV_1 + bV_2 \\ I_2 = cV_1 + dV_2 \end{cases}$$

**È un doppio bipolo lineare controllato in tensione**, dove  $a, b, c$  e  $d$  sono quattro costanti, reali ed omogenee ad una conduttanza, che definiscono il doppio bipolo. Di contro, **un doppio bipolo non è lineare quando la sua caratteristica non è descritta da una relazione lineare rispetto ad almeno una variabile indipendente**, ad esempio:

$$\begin{cases} I_1 = aV_1 + bV_2^2 \\ I_2 = cV_1^3 + d\sqrt{V_2} \end{cases}$$

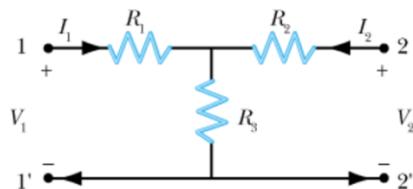
Di seguito verrà dato un maggior spazio ai doppi bipoli lineari, dato che sono quelli che occuperanno maggiormente la trattazione seguente. Ovviamente quanto detto finora si può estendere ad ogni tipo di rappresentazione della caratteristica del doppio bipolo in esame.

### DOPPI BIPOLI CONTROLLATI IN CORRENTE E IN TENSIONE

Siano considerati **doppi bipoli lineari, controllati in corrente e in regime stazionario**; per quanto detto finora, **la loro caratteristica sarà del tipo**:

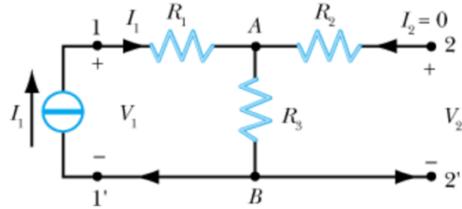
$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

Si può notare come **i coefficienti che moltiplicano le variabili di controllo siano delle resistenze**, misurate in ohm e dette **parametri resistivi**. Per comprendere come rilevarli una volta assegnato un doppio bipolo, si può considerare il seguente caso particolare (detto doppio bipolo a T):



Per determinare tali parametri si può usare la loro stessa definizione, per la quale **aprendo la seconda porta si ha**:

$$I_2 = 0 \Rightarrow R_{11} = \frac{V_1}{I_1} \wedge R_{21} = \frac{V_2}{I_1}$$



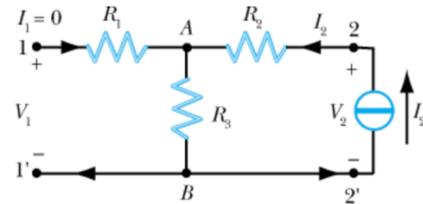
In termini circuituali è possibile vedere la **seconda porta come un circuito aperto** e la **prima come alimentata da un generatore di corrente** (visto che il bipolo è collegato in corrente) che **eroga  $I_1$** ; in questa configurazione la differenza di potenziale ai capi di  $R_2$  è nulla, i due resistori rimanenti diventano collegati in serie e i parametri diventano:

$$R_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(R_1 + R_3)I_1}{I_1} = R_1 + R_3$$

$$R_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{R_3 I_1}{I_1} = R_3$$

Quest'ultimo risultato discende dalla LKT applicata alla maglia “di uscita” 2AB2’. Una volta determinati i primi due parametri, si può procedere con gli altri seguendo un ragionamento speculare, ovvero chiudendo la porta 1 e alimentando la porta 2 con un generatore di corrente che eroga  $I_2$ :

$$I_1 = 0 \Rightarrow R_{12} = \frac{V_1}{I_2} \wedge R_{22} = \frac{V_2}{I_2}$$



Da cui:

$$R_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{R_3 I_2}{I_2} = R_3$$

$$R_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{(R_2 + R_3)I_2}{I_2} = R_2 + R_3$$

Da queste considerazioni si può rilevare una particolare proprietà dei doppi bipoli: le resistenze  $R_{12}$  e  $R_{21}$  sono uguali.

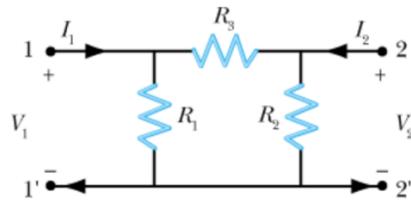
$$R_{12} = R_3 = R_{21}$$

Per un bipolo lineare e passivo questa proprietà è giustificata dal **Teorema di reciprocità**, che stabilisce l'**uguaglianza dei parametri resistivi “ibridi”**, detti **resistenze mutue**; ne consegue che le quantità da determinare realmente sono tre perché due dei quattro originari sono coincidenti.

Passando a studiare i **doppi bipoli controllati in tensione**, si ha che le **variabili di controllo sono le tensioni e quelle controllate le correnti**. Poiché si sta prendendo in considerazione il caso di doppi bipoli lineari, i **coefficienti** che moltiplicano le variabili indipendenti nell'espressione della caratteristica saranno delle **conduttanze**, dette **parametri conduttivi**, misurate in Siemens:

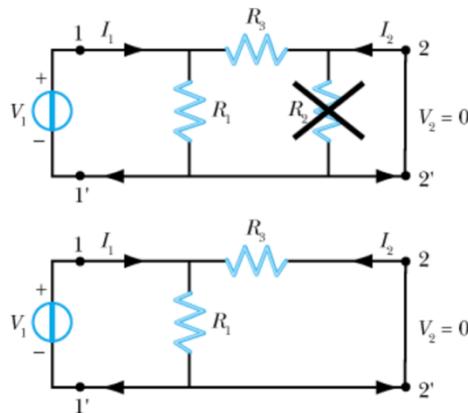
$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

Proprio come fatto per i doppi bipoli controllati in corrente, per comprendere come determinare i parametri conduttivi si procede osservando un caso particolare (detto doppio bipolo a  $\pi$ ):



Per determinare i primi due parametri,  $G_{11}$  e  $G_{21}$ , **si chiuda la seconda porta in cortocircuito e si alimenti la prima porta da un generatore di tensione che eroga  $V_1$** :

$$V_2 = 0 \Rightarrow G_{11} = \frac{I_1}{V_1} \wedge G_{21} = \frac{I_2}{V_1}$$



In queste condizioni il resistore  $R_2$  viene a trovarsi in parallelo con un cortocircuito, venendo così **annullato e rendendo i due resistori rimanenti in parallelo**; inoltre, poiché la conduttanza  $G_{11}$  è quella che si vede dalla porta primaria quando la secondaria è in cortocircuito:

$$G_{11} = G_1 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3}$$

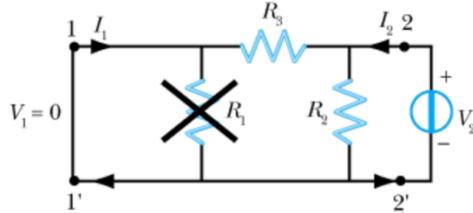
$$G_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} \frac{I_1}{V_1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_3} G_{11} = -\frac{R_1}{R_1 + R_3} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} = -\frac{1}{R_3} = -G_3$$

**Quest'ultimo risultato discende dalla regola del partitore di corrente:**

$$I_2 = -I_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Per determinare i parametri rimanenti si chiuda la prima porta in cortocircuito e si alimenti la seconda porta da un generatore di tensione che eroga  $V_2$ :

$$V_1 = 0 \Rightarrow G_{12} = \frac{I_1}{V_2} \wedge G_{22} = \frac{I_2}{V_2}$$



Con un ragionamento analogo a quello fatto per i primi due parametri conduttori:

$$G_{12} = -\frac{1}{R_3} = -G_3$$

$$G_{22} = G_2 + G_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$$

Si può notare come anche nel caso di doppi bipoli lineari controllati in tensione valga il Teorema di reciprocità, per il quale le conduttanze mutue sono uguali:

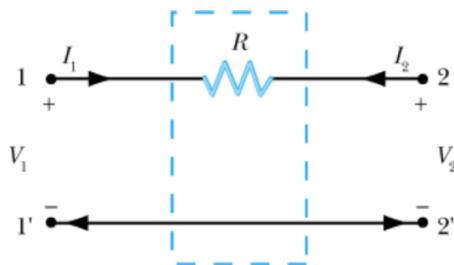
$$G_{12} = -G_3 = G_{21}$$

## CARATTERISTICHE IBRIDE E DI TRASMISSIONE

Per quanto riguarda la rappresentazione ibrida, assumendo sempre la linearità del doppio bipolo e che le variabili di controllo siano la corrente alla prima porta e la tensione alla seconda, si può notare una discontinuità con quanto detto finora: i coefficienti che moltiplicano le variabili indipendenti non hanno tutti la stessa dimensione. Come fatto per i doppi bipoli controllati in tensione e corrente, per trovare questi coefficienti si ricorre ad un esempio pratico, supponendo che la caratteristica del dispositivo sia:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

Preso il seguente circuito, racchiuso in un contenitore rettangolare:

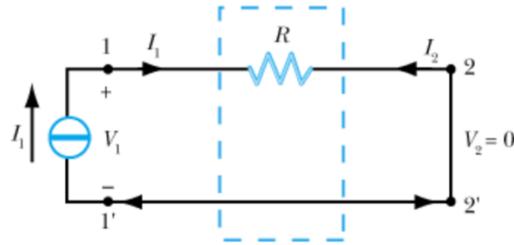


Com'è ormai chiaro, per determinare i parametri vanno fatte due prove sul doppio bipolo, in questo caso una prova in cortocircuito e una prova in circuito aperto (contro le due prove in cortocircuito o le due prove in circuito aperto dei casi precedenti):

- **Porta secondaria in cortocircuito**

I primi due parametri sono così determinati:

$$V_2 = 0 \Rightarrow h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \wedge h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$$



Si può subito osservare come  $h_{11}$  ha le dimensioni di una resistenza e come  $h_{12}$  sia privo di dimensioni. Si proceda a rilevare il valore di queste costanti:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{RI_1}{I_1} = R$$

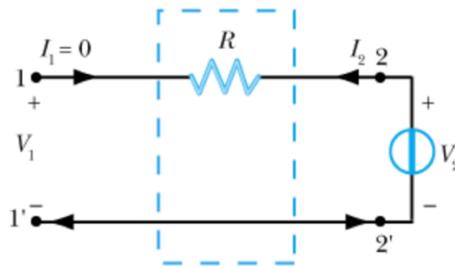
$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{I_1}{I_1} = -1$$

Quest'ultimo risultato discende dall'applicazione della LKC alla superficie che racchiude il resistore.

- **Porta primaria aperta**

Gli ultimi due parametri sono così determinati:

$$I_1 = 0 \Rightarrow h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \wedge h_{22} = \frac{I_2}{V_2}$$



Essendo la prima porta aperta, nel circuito non circola alcuna corrente; pertanto, la LKT applicata all'unica maglia del circuito permette di dire che:

$$V_2 - V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = V_1$$

Quindi:

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

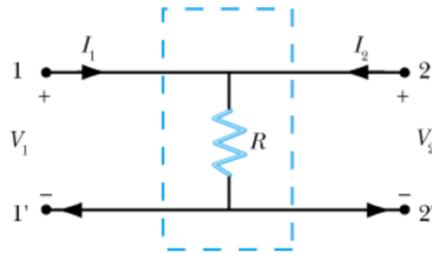
$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = 0$$

È importante notare come, analogamente a quanto visto per la prima prova, i coefficienti che si rilevano sono, dimensionalmente, una **costante adimensionale ( $h_{21}$ )** e una **conduttanza ( $h_{22}$ )** e che **sussiste la relazione:**

$$h_{12} = -h_{21}$$

Per completare lo studio della rappresentazione ibrida **si osservi anche il caso in cui le variabili di controllo siano la tensione alla prima porta e la corrente alla seconda:**

$$\begin{cases} I_1 = h_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$$



Con le prove effettuate su questo circuito, si determinano i coefficienti grazie alle seguenti definizioni:

$$I_2 = 0 \Rightarrow g_{11} = \frac{I_1}{V_1} \wedge g_{21} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$V_1 = 0 \Rightarrow g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \wedge g_{22} = \frac{V_2}{I_2}$$

Da cui si rileva che:

$$g_{11} = \frac{1}{R}$$

$$g_{12} = -1$$

$$g_{21} = 1$$

$$g_{22} = 0$$

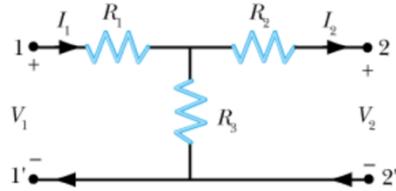
I coefficienti  **$g_{12}$  e  $g_{21}$  sono adimensionali**, mentre  **$g_{11}$  è una conduttanza e  $g_{22}$  una resistenza**. Anche in questa seconda rappresentazione ibrida **sussiste la relazione:**

$$g_{12} = -g_{21}$$

**L'ultimo tipo di caratteristica di un doppio bipolo è quella di trasmissione**, che si presenta in **due forme analoghe**; perciò, ne verrà analizzata solo una:

$$\begin{cases} V_2 = t_{11}V_1 + t_{12}I_1 \\ I_2 = t_{21}V_1 + t_{22}I_1 \end{cases}$$

Come di consueto, siano trovati i coefficienti del sistema per mezzo di un esempio:

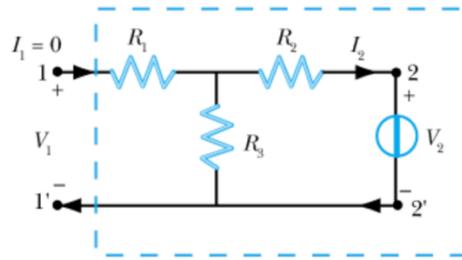


Come è consuetudine, per questo tipo di rappresentazione, **è stata fatta la convenzione del generatore sulla seconda porta**; il motivo risiede nella conseguente **comodità per il calcolo del doppio bipolo equivalente**, ottenuto collegando in cascata due o più doppi bipoli. Come per gli altri esempi fatti finora, **è necessario effettuare due prove per determinare i coefficienti**:

- **Porta primaria aperta**

Questa situazione permette di determinare:

$$I_1 = 0 \Rightarrow t_{11} = \frac{V_2}{V_1} \wedge t_{21} = \frac{I_2}{V_1}$$



Tuttavia, la cosa non è così immediata come per gli altri tipi di rappresentazione; ad esempio, la definizione del coefficiente  $t_{11}$  richiede che sulla stessa porta siano instaurati una corrente nulla ed una tensione arbitraria e diversa da zero. Pur essendo  $I_1$  e  $V_1$  variabili di controllo, non sono indipendenti e non possono assumere valori qualsiasi; di conseguenza risulta più pratico e comodo determinare il reciproco di tale coefficiente:

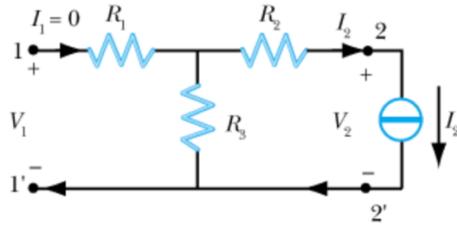
$$\frac{1}{t_{11}} = \frac{V_1}{V_2}$$

**Alimentando la porta 2 e lasciando aperta 1**, si sta considerando di fatto  **$V_2$  come variabile indipendente**. Usando la regola del patitore di tensione:

$$\frac{1}{t_{11}} = \frac{-R_3 I_2}{-(R_2 + R_3) I_2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow t_{11} = \frac{R_2 + R_3}{R_3}$$

$$\frac{1}{t_{21}} = \frac{V_1}{I_2} = -\frac{R_3 I_2}{I_2} = -R_3 \Rightarrow t_{21} = -\frac{1}{R_3}$$

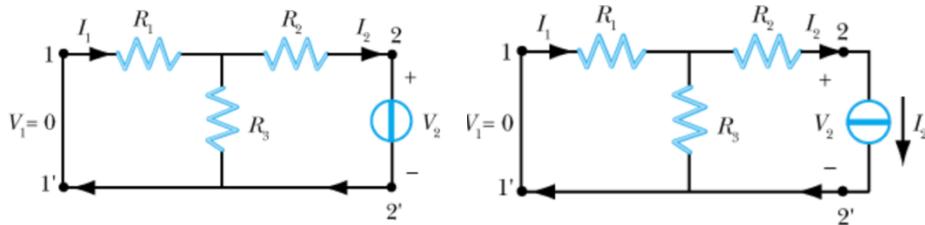
Quest'ultimo risultato è ottenuto adoperando lo stesso artificio, facendo riferimento alla seguente rete:



- **Porta primaria in cortocircuito**

Questa situazione permette di determinare:

$$V_1 = 0 \Rightarrow t_{12} = \frac{V_2}{I_1} \wedge t_{22} = \frac{I_2}{I_1}$$



Considerando anche per questo caso gli inversi dei parametri da individuare e sapendo che:

$$I_1 = I_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3} \wedge V_2 = -(R_2 + R_3 || R_1) I_2$$

Risulta:

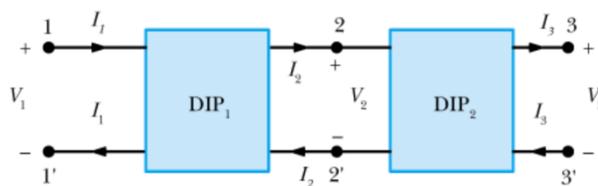
$$\frac{1}{t_{12}} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \frac{I_2}{V_2} = -\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \Rightarrow t_{12} = -\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}\right)$$

$$\frac{1}{t_{22}} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_2} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \Rightarrow t_{22} = \frac{R_1 + R_3}{R_3}$$

Anche per questo tipo di rappresentazione sussiste una **relazione particolare tra i coefficienti**, però questa volta coinvolge il **determinante della matrice associata**:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21} = \pm 1$$

Come già preannunciato, la **vera potenza della rappresentazione di un doppio bipolo con la matrice di trasmissione (o matrice catena)** si rivela quando due doppi bipoli sono connessi in **cascata**, ovvero quando l'uscita del primo viene usata come ingresso del secondo dispositivo:



Per un sistema così composto è facile intuire che:

1. È conveniente adottare la convenzione del generatore sull'uscita del singolo doppio bipolo;
2. Il sistema complessivo è equivalente ad un unico doppio bipolo, la cui matrice catena si ottiene dalle due componenti per moltiplicazione delle matrici.

$$T = T_1 \cdot T_2$$

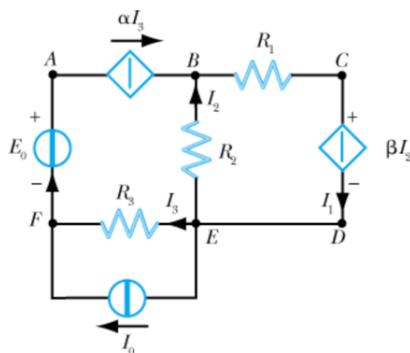
$$\begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(2)} & t_{12}^{(2)} \\ t_{21}^{(2)} & t_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(2)} & t_{12}^{(2)} \\ t_{21}^{(2)} & t_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11}^{(1)} & t_{12}^{(1)} \\ t_{21}^{(1)} & t_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

Generalizzando ad un collegamento in cascata di  $n$  doppi bipoli:

$$T = T_1 \cdot \dots \cdot T_n$$

## GENERATORI DIPENDENTI

Per **generatore dipendente** (o **controllato**) si intende un particolare **doppio bipolo**, industrialmente rilevante per le **maggiori prestazioni** che può raggiungere in relazione ad un comune generatore. Nella rete in figura si possono notare due nuovi oggetti, a **forma di rombo**, che rappresentano i **generatori controllati** di cui si discuterà in seguito:



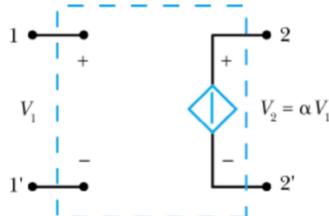
Sul **lato AB** si trova un **generatore di corrente** che, a differenza del suo omonimo indipendente, **eroga una corrente che dipende da quella che circola in un altro lato della rete**, ovvero quella che passa per il resistore  $R_3$ ; questa è la **peculiarità dei generatori controllati**: erogano una corrente/tensione che dipende dai parametri presenti in un'altra parte della rete, a differenza dei **generatori indipendenti** che **erogano la stessa corrente/tensione indipendentemente da ciò che li attraversa**. Si può dire **analogamente del dispositivo sul lato CD**: esso è un generatore di tensione controllato in corrente, ovvero un generatore che eroga una tensione che dipende dalla corrente che circola in un altro lato della rete, in particolare quella che circola in  $R_2$ .

Si può generalizzare il concetto di **generatore controllato** e definirlo come **un oggetto ideale nel quale la grandezza erogata è direttamente proporzionale ad una corrente** (oppure ad una tensione) **relativa ad un altro bipolo della rete**. Sebbene la rappresentazione in figura non faccia giustizia, i **generatori controllati sono dei doppi bipoli**, presentano quindi **due porte**, una **pilotata** e una **pilota**: la **porta pilota** è interessata dalla **grandezza che**, appunto, **pilota il generatore** (la corrente/tensione dell'altro bipolo), mentre la **porta pilotata** è interessata dalla **grandezza da erogare**. In genere un generatore controllato **non viene mai raffigurato come un doppio bipolo**, ignorando la porta pilota, **per una questione di semplicità** della raffigurazione; tuttavia, è importante ricordarlo quando li si manipola analiticamente.

L'applicazione pratica che coinvolge i generatori controllati risponde all'esigenza di rappresentare componenti complessi, come transistori o amplificatori operazionali, mediante schematizzazioni semplificate. Nell'esempio precedente sono stati menzionati due tipi di **generatori controllati**, in realtà ce ne sono di **quattro tipi**:

- **Generatore di tensione controllato in tensione (GTCT)**

È un doppio bipolo con una porta che opera come un circuito aperto, mentre l'altra come un generatore che eroga una tensione direttamente proporzionale alla tensione dell'altra porta:

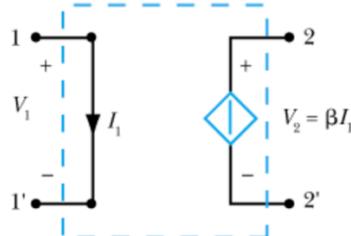


$$V_2 = \alpha V_1$$

Con  $\alpha$  costante adimensionale.

- **Generatore di tensione controllato in corrente (GTCC)**

È un doppio bipolo con una porta che opera come un cortocircuito, mentre l'altra come un generatore che eroga una tensione direttamente proporzionale alla corrente dell'altra porta:

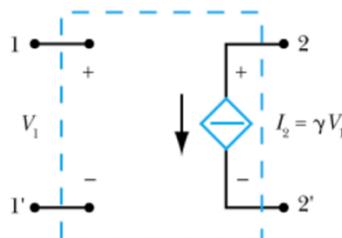


$$V_2 = \beta I_1$$

Con  $\beta$  che ha le dimensioni di una resistenza.

- **Generatore di corrente controllato in tensione (GCCT)**

È un doppio bipolo con una porta che opera come un circuito aperto, mentre l'altra come un generatore che eroga una corrente direttamente proporzionale alla tensione dell'altra porta:

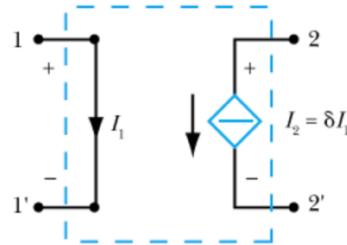


$$I_2 = \gamma V_1$$

Con  $\gamma$  che ha le dimensioni di una conduttanza.

- **Generatore di corrente controllato in corrente (GCCC)**

È un doppio bipolo con una porta che opera come un cortocircuito, mentre l'altra come un generatore che eroga una corrente direttamente proporzionale alla corrente dell'altra porta



$$I_2 = \delta I_1$$

Con  $\delta$  costante adimensionale.

Da quanto detto in precedenza, la **potenza assorbita da un doppio bipolo** è:

$$P_{ASS} = V_1 I_1 + V_2 I_2$$

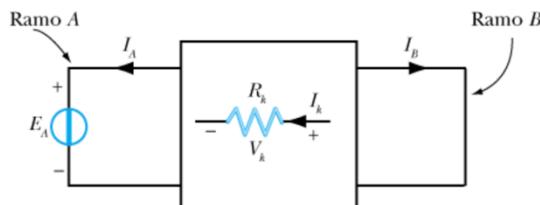
Ma per un generatore controllato il primo dei due addendi è sempre nullo, dal momento in cui la prima porta o è un **circuito aperto** o un **cortocircuito**. Ciò vuol dire che essa assorbe **potenza elettrica nulla**, mentre la **potenza assorbita dall'intero dispositivo** diventa:

$$P_{ASS} = V_2 I_2$$

Poiché questa quantità può assumere qualsiasi valore, i generatori controllati sono doppi bipoli attivi; sono, infatti, in grado sia di **assorbire** che di **erogare** potenza elettrica.

## RECIPROCITÀ NELLE RETI ELETTRICHE E IL TEOREMA DI COHN

La reciprocità è una proprietà delle reti elettriche molto interessante che è stata inconsapevolmente usata nello studio dei doppi bipoli; per comprendere come lavorare una rete per reciprocità sia analizzata la seguente rete:

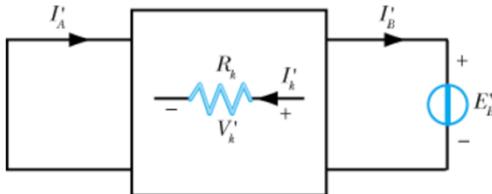


Si può notare come sia un circuito puramente resistivo, schematizzato dalla scatola centrale dalla quale escono due rami, uno dei quali ospita un generatore di tensione e l'altro percorso da una

corrente. Si noti come su tutti i resistori della rete sia stata fatta la convenzione dell'utilizzatore, per cui:

$$V_k = R_k I_k$$

Si consideri poi una **seconda rete**, che differisce dalla precedente solo per la posizione del **generatore** sul lato opposto:



Il **Teorema di Reciprocità** afferma che:

$$\frac{E_A}{I_B} = \frac{E'_B}{I'_A}$$

Che equivale a sostenere che **il rapporto tra causa in A ed effetto in B è uguale al rapporto tra causa in B ed effetto in A.**

Per dimostrare il teorema, si applichi il **Teorema di Tellegen alle due reti** tenendo in considerazione entrambe le forme:

$$E_A I'_A + \sum_k V_k I'_k = 0$$

$$E'_B I_B + \sum_k V'_k I_k = 0$$

Da cui:

$$E_A I'_A + \sum_k R_k I_k I'_k = 0$$

$$E'_B I_B + \sum_k R_k I'_k I_k = 0$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni:

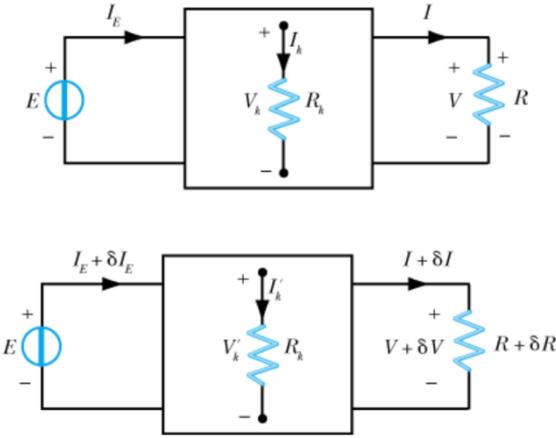
$$E_A I'_A + \sum_k R_k I_k I'_k - E'_B I_B - \sum_k R_k I'_k I_k = 0$$

$$E_A I'_A - E'_B I_B = 0$$

Da cui discende la tesi. Per una **rete lineare passiva**, la reciprocità comporta che **il rapporto tra la tensione, applicata tra due nodi della rete, e la corrente (di cortocircuito), che scorre tra altri due nodi, non cambia invertendo tra di loro le coppie di nodi.**

Sia considerata una **rete di soli bipoli lineari**, uno dei quali è un **generatore di tensione** ed il resto dei **resistori** su cui è fatta la **convenzione dell'utilizzatore**. Sia introdotto un **secondo circuito**, che

differisce dal primo solo per la **mutuazione della resistenza esterna da un valore  $R$  a  $R + \delta R$** , come in figura:



Si vuole determinare l'entità che tale perturbazione causa nelle tensioni e nelle correnti della rete; per farlo, si applichi il Teorema di Tellegen nelle sue due possibili forme:

$$E(I_E + \delta I_E) + \sum_k V'_k I'_k + V(I + \delta I) = 0$$

$$EI_E + \sum_k V'_k I_k + (V + \delta V)I = 0$$

**Sottraendo membro a membro** queste due relazioni:

$$E\delta I_E + V\delta I + I\delta V = 0$$

Nella prima rete in figura, la **resistenza misurabile dal generatore** è:

$$R_E = -\frac{E}{I_E} \Rightarrow \delta R_E = \frac{E}{I_E^2} \delta I_E \Rightarrow E\delta I_E = I_E^2 \delta R_E$$

Inoltre, poiché  $V = RI$ :

$$\delta V = R\delta I - I\delta R$$

Usando queste due relazioni appena trovate è possibile **semplificare il prodotto dell'applicazione del Teorema di Tellegen**:

$$E\delta I_E + V\delta I + I\delta V = I_E^2 \delta R_E + V\delta I - IR\delta I - I^2 \delta R = 0$$

$$I_E^2 \delta R_E - I^2 \delta R = 0$$

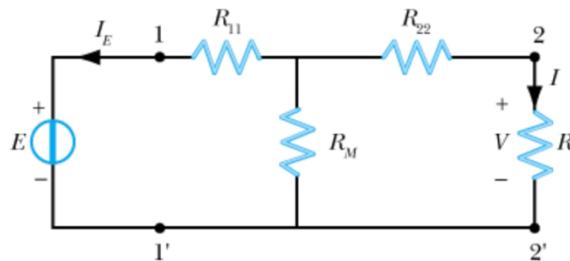
Da cui deriva il **Teorema di Cohn**:

$$I^2 = I_E^2 \frac{\delta R_E}{\delta R}$$

Il teorema afferma che l'influenza della variazione  $\delta R$  sulla resistenza  $R_E$  misurata sul ramo del generatore di tensione è pesata dal quadrato del rapporto fra la corrente sul ramo del resistore  $R$  e quella sul ramo del generatore in questione:

$$\delta R_E = \delta R \frac{I^2}{I_E^2}$$

**Un'altra dimostrazione** del teorema coinvolge le conoscenze acquisite sui **doppi bipoli**; sia considerata la rete seguente, in cui il doppio bipolo resistivo è stato sintetizzato grazie alla matrice delle resistenze:



Con la regola del partitore di corrente si deduce che:

$$I = -I_E \frac{R_M}{R + R_{22} + R_M}$$

D'altra parte, dato che:

$$R_E = \frac{V_1}{I_1} = R_{11} + R_M || (R + R_{22}) = R_{11} + \frac{R_M(R + R_{22})}{R + R_{22} + R_M}$$

Si ricava facilmente la tesi:

$$\delta R_E = R_M \frac{R + R_{22} + R_M - R - R_{22}}{(R + R_{22} + R_M)^2} \delta R = \frac{R_M^2}{(R + R_{22} + R_M)^2} \delta R = \frac{I^2}{I_E^2} \delta R$$

## CIRCUITI IN EVOLUZIONE DINAMICA: LIBERA E FORZATA

Finora sono state mostrate le principali proprietà dei circuiti elettrici in regime stazionario, senza soffermarsi sul modo in cui si stabilisce questa condizione di regime, oppure quali leggi regolano la transizione da un regime ad un altro quando un parametro nel circuito varia. Come si avrà modo di approfondire, queste transizioni possono innescarsi per diversi motivi ma sono legate al livello di energia posseduto dal circuito all'istante iniziale; quindi, è necessario introdurre i bipoli a memoria, cioè quei bipoli che sono in grado di immagazzinare energia, ovvero il condensatore e l'induttore. L'istante iniziale menzionato è definito dalla procedura che si mette in atto per effettuare i collegamenti tra gli elementi di un circuito, la quale è idealizzata mediante appositi dispositivi detti interruttori; un interruttore in chiusura è un bipolo che ha la caratteristica di un circuito aperto prima di un determinato istante  $t_0$ , detto istante di chiusura, e quella di un bipolo cortocircuito per tutti gli istanti successivi (in maniera analoga si definiscono gli interruttori in apertura).



Per chiarire il **comportamento dell'interruttore** si può schematizzare analiticamente la sua **caratteristica** come:

$$\begin{cases} i(t) = 0 & \forall t < t_0 \\ v(t) = 0 & \forall t > t_0 \end{cases}$$

La trattazione seguente si concentrerà principalmente sui **fenomeni transitori nel dominio del tempo**; per **transitorio** si intende un **qualsiasi fenomeno di passaggio da un regime ad un altro**, inteso come **transizione da e verso un regime stazionario o sinusoidale** (anche se non è facile e neanche utile dare una definizione rigorosa). Come accennato in precedenza, i **transitori sono legati all'operazione di commutazione**, cioè all'**apertura** o alla **chiusura di interruttori**, e il loro studio permette di evidenziare eventuali sovrattensioni o sovracorrenti che si instaurano nei diversi bipoli della rete.

È chiaro come lo **studio dei transitori prescinda la corrente continua**, è stato anche accennato in precedenza a come questa condizione precluda la possibilità di inserire in un circuito i bipoli a memoria; pertanto, è importante andare a definire tutte le **principali condizioni di funzionamento variabili nel tempo**:

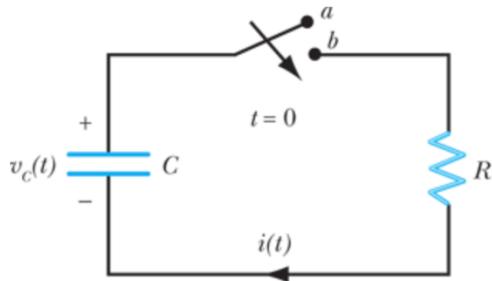
- **Regime periodico sinusoidale** (detto corrente alternata);
- **Regime periodico non sinusoidale**;
- **Funzionamento transitorio**;
- **Funzionamento in condizioni dinamiche generali**.

Ognuno di queste condizioni merita un approfondimento dedicato, anche se per il momento è sufficiente menzionare l'importanza del **regime sinusoidale** in quanto **principio di funzionamento della maggior parte dei dispositivi elettrici** (sia a livello domestico che industriale) e in quanto **base per l'analisi dei circuiti in regimi periodici non sinusoidali**.

Vengono definite **transitorie** quelle **condizioni di funzionamento di durata limitata** in cui in circuito si trova quando passa da una condizione di regime all'altra (dello stesso tipo o di tipo diverso); invece, sono **tipiche dei dispositivi elettronici** quelle in cui ciascuna grandezza varia nel tempo in maniera non prevedibile a priori ma solo tenendo conto delle informazioni che si vogliono comunicare (come radio, TV, computer...).

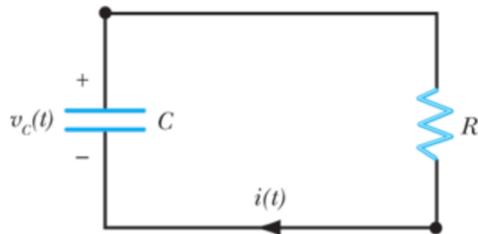
Sebbene dal punto di vista concettuale non cambierà nulla (le reti saranno sempre risolvibili con gli stessi metodi enunciati in regime stazionario), ciò che si complicherà saranno i calcoli: le **soluzioni di un sistema** non si andranno più a trovare in un numero, come è stato fatto finora, ma in **funzioni del tempo**, dal momento in cui tensione e corrente non saranno più quantità costanti; sarà necessaria, pertanto, la **risoluzione di equazioni differenziali**.

Sia considerato il **seguente circuito**, in cui un condensatore carico viene collegato ad un resistore per mezzo di un interruttore che si chiude all'istante  $t = 0$ :



Si può facilmente intuire come **il valore della tensione ai capi del condensatore all'inizio dell'osservazione del fenomeno**  $v_C(0) = V_0$  tradisca la presenza di energia elettrica che, una volta chiuso l'interruttore, permette la circolazione di corrente, la quale interessa anche il resistore; si deduce, quindi, che parte dell'energia immagazzinata nel condensatore prima della chiusura dell'interruttore viene dissipata dal resistore, determinando a sua volta **la variazione delle grandezze del circuito**.

Quando l'interruttore è commutato dalla posizione **a** alla posizione **b** (ovvero quando è chiuso) si può scrivere la **LKT** dell'unica maglia del circuito in questione:



$$v_C(t) - Ri(t) = 0$$

Tenendo anche in considerazione la **relazione tra corrente e tensione** relativa alla **caratteristica del condensatore**:

$$i(t) = -C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Si può **riscrivere la LKT**:

$$v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} = 0$$

Questa **equazione differenziale di primo ordine** definisce le **dinamiche della tensione**, ovvero stabilisce **come essa deve variare nel tempo**. Per risolverla si ricorre al seguente **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} = 0 \\ v_C(0) = V_0 \end{cases}$$

Ricorrendo all'equazione caratteristica:

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

Si deduce che:

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Dove  **$K$**  è una costante che si ricava sfruttando le condizioni iniziali fornite:

$$v_C(0) = Ke^{\frac{0}{RC}} = K = V_0$$

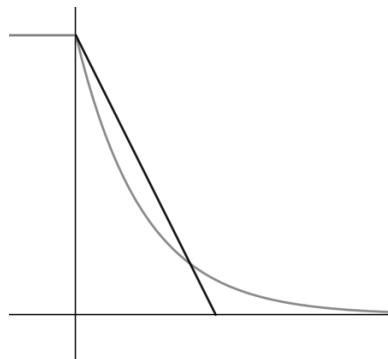
Da cui si ottiene la **soluzione particolare all'equazione differenziale** in esame:

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Tale soluzione, come si è avuto modo di vedere, **dipende dall'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore**:

$$U(0) = \frac{1}{2} Cv_C(0)^2 = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Dalla forma analitica della tensione si può dedurre che, **una volta chiuso l'interruttore, la tensione ai capi del condensatore tenderà esponenzialmente ad annullarsi** al crescere del tempo:



Tuttavia, **la grandezza importante** in quella formula non è il tempo in sé e per sé ma quella che viene definita **costante di tempo del circuito**:

$$\tau = RC$$

Si può facilmente dimostrare che tale prodotto ha le **dimensioni di un tempo** e rappresenta **il tempo che ci metterebbe la tensione  $v_C(t)$  ad annullarsi se il suo andamento fosse lineare**; la costante di tempo rappresenta la quantità che **da ritmo al circuito**. Dal punto di vista matematico si può affermare che **la tensione in questione non giunge mai allo zero** ( $y = 0$  è un asintoto per  $e^{-t}$ ), quando **le osservazioni empiriche mostrano il contrario**; questo screzio può essere facilmente aggirato considerando **10τ** come **il tempo sufficiente a rendere il valore della tensione praticamente nullo**, permettendo così di non attendere un intervallo di tempo infinito per osservare un condensatore scarico.

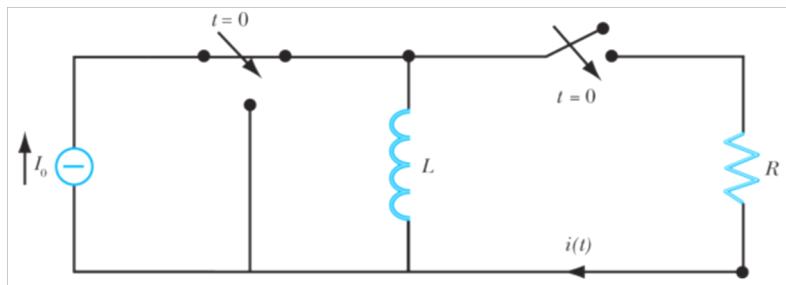
**Dopo  $10\tau$  il condensatore è scarico e tutta l'energia che in esso era immagazzinata è stata ceduta** alla restante parte del circuito. Una volta ottenuta l'espressione della tensione in funzione del tempo possono essere ricavate sia quelle della **corrente** che dell'**energia che scorre nella rete** dopo la scarica del condensatore:

$$i(t) = -C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{V_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U(0, \infty) = \int_0^\infty R i(t)^2 dt = R \frac{V_0^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{V_0^2}{R} \frac{RC}{2} = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Si può notare come l'energia ceduta alla rete sia esattamente la stessa che il condensatore aveva immagazzinato prima della scarica.

Di seguito è proposto un **esempio di scarica di un induttore**:



Con un **ragionamento analogo** a quello fatto per i condensatori si può trovare una corrente:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

In cui la **costante di tempo** è:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Anche in questo caso, la corrente tende esponenzialmente a zero all'aumentare del tempo.

Il processo appena illustrato prende il nome di **processo di scarica di un condensatore** (o di un induttore) e, come si è potuto apprezzare, è un **processo non istantaneo**, segue una **legge esponenziale** con la quale l'**energia inizialmente immagazzinata** viene **gradualmente rilasciata nella rete**. Di seguito si vuole studiare il modo in cui è possibile ottenere la carica di suddetti bipoli a memoria, inizialmente scarichi.

Prima di procedere allo studio vero e proprio del processo di carica, è bene affrontare la questione del **problema ai valori iniziali**, in particolare le **eventuali discontinuità** nella tensione e nella corrente che portano all'imposizione delle giuste condizioni iniziali. Sia considerato un **induttore**. Mentre per la tensione  $v(t)$  non si può escludere qualche discontinuità, per la corrente  $i(t)$  non si possono accettare; il problema è evidente quando si collega un induttore ad un generatore di tensione: ai capi del dispositivo è possibile **forzare qualsiasi tensione** (per definizione di generatore). Osservando la forma analitica dell'energia accumulata nell'induttore:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

Ne consegue che ad un'eventuale discontinuità della corrente segue una discontinuità nell'energia e una potenza infinita (si ricorda che la potenza è la variazione di energia nel tempo). Poiché è irrealizzabile un circuito di potenza infinita (e sarebbe anche controproducente), l'energia

non può avere discontinuità; pertanto, **la corrente non può seguire brusche variazioni e deve variare con continuità**.

Per il condensatore possono essere fatti ragionamenti duali, solo che in questo caso è **la tensione a non poter avere discontinuità**:

$$U_C(t) = \frac{1}{2} Cv(t)^2$$

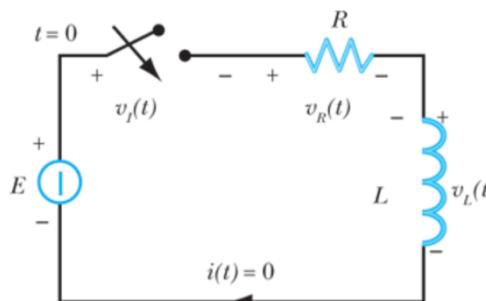
Questa dualità può essere raggruppata, evitando di ripetere due volte le stesse cose, attraverso il concetto di **variabile di stato**: per il condensatore è la **tensione** e per l'**induttore** la **corrente**.

Immaginando che la **commutazione di un interruttore** avvenga all'istante  $t = t_0$ , in seno a quanto detto precedentemente è **necessario che per ognuno dei due bipoli le relative variabili di stato non cambino agli istanti immediatamente precedente e immediatamente successivo** alla commutazione. Sulla base di questa necessità si possono **determinare i valori iniziali** con cui poi trovare la soluzione alle equazioni differenziali che descrivono la dinamica del transitorio; infatti, è sufficiente **prendere in esame il regime precedente alla commutazione** dell'interruttore e **calcolarne le variabili di stato**. Dopo aver manovrato l'interruttore esse rimarranno inalterate, permettendo di **identificare correttamente il problema di Cauchy**.

Il ragionamento appena mostrato permette di dire **che la continuità dell'energia comporta la continuità delle variabili di stato**, questa relazione è alla base dei transitori.

$$\begin{cases} i(t) = I_0 \quad \forall t < t_0 \\ v(t) = V_0 \quad \forall t < t_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(t_0) = I_0 \\ v(t_0) = V_0 \end{cases}$$

Sia preso in esame il seguente circuito, in cui un **generatore ideale di tensione** ( $E$  costante) è **posto in serie, attraverso un interruttore ideale, ad un resistore**, il quale è **in serie ad un induttore**:



Nelle condizioni iniziali, **l'interruttore è aperto e l'induttore si suppone scarico**, cioè **privo di energia da immagazzinare** e, quindi, **percorso da una corrente nulla**. La soluzione di questo circuito, in queste condizioni, è semplice ed è ricavata dalle LK: per la **LKC** si osserva che **nella rete circola una e una sola corrente** (visto che tutti i componenti sono in serie) ed essa è **nulla** perché l'interruttore è aperto, per la **LKT** si osserva che **nell'unica maglia**:

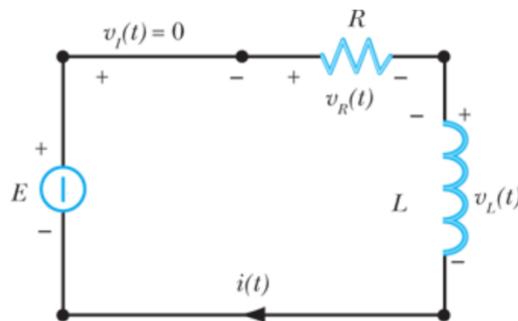
$$E = v_I(t) + v_R(t) + v_L(t)$$

Ma poiché la corrente che circola è nulla, nelle **condizioni iniziali**:

$$\begin{cases} i(t) = 0 \forall t \leq t_0 \\ v_L(t) = v_R(t) = 0 \forall t \leq t_0 \\ v_I(t) = E \forall t \leq t_0 \end{cases}$$

Ciò significa che **tutta la tensione erogata dal generatore viene applicata ai morsetti dell'interruttore**, e questa condizione può andare avanti finché non viene chiuso l'interruttore.

All'istante  $t_0$  l'interruttore viene bruscamente chiuso e si osserva il circuito. **L'interruttore inizia a comportarsi da bipolo cortocircuito**, quindi la tensione ai suoi morsetti non può che essere nulla, e inizia a circolare una corrente diversa da zero in tutto il circuito; si può ben notare che **dopo la chiusura dell'interruttore tutte le grandezze del circuito sono cambiate** ed è necessario individuare la **condizione di funzionamento** per tempi successivi a tale operazione.



In primis vanno **rilevate le condizioni iniziali della corrente**, ma poiché è stato affermato che prima della chiusura non circolasse corrente nella rete:

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$$

Quindi le condizioni iniziali prevedono una corrente nulla. Per quanto riguarda la **topologia della rete**, con la LKC si può ribadire il fatto che nel circuito circoli una sola corrente e con la LKT che:

$$E = v_R(t) + v_L(t)$$

Dal momento in cui  $v_I(t) = 0$ . **Sfruttando le caratteristiche dei bipoli** coinvolti:

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Pertanto, la risoluzione del circuito viene associata alla risoluzione della seguente equazione differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

La **soluzione dell'equazione omogenea** è:

$$i_0(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}}$$

Mentre, per quanto riguarda la **soluzione particolare**, poiché il forzamento (aka termine noto, si sta sfruttando il **metodo di verosimiglianza**) è costante la si va a cercare tra le funzioni costanti:

$$i_p(t) = c \Rightarrow Rc + L \frac{dc}{dt} = E$$

Ovvero:

$$i_p(t) = \frac{E}{R}$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale è:

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t) = K e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R}$$

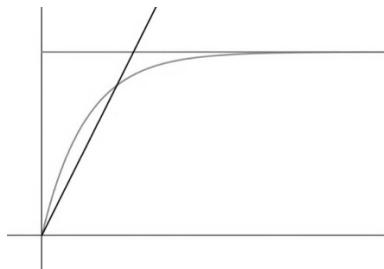
Resta da determinare la **soluzione particolare** sfruttando il valore iniziale:

$$i(0) = K + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

Quindi, la soluzione particolare del problema di Cauchy (e quindi del circuito) è:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Con un **tempo caratteristico**  $\tau = \frac{L}{R}$ . L'**andamento temporale** (detto transitorio di carica dell'induttore) della corrente è **di tipo esponenziale con un asintoto a  $E/R$** :



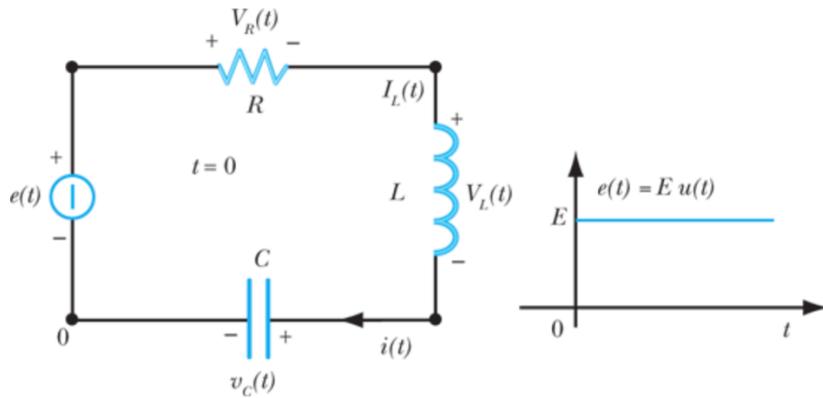
A **regime**, ovvero dopo che il transitorio è terminato (circa  $6\tau$ ), la **corrente che circola nella rete** è:

$$i(t) = \frac{E}{R}$$

Il **processo di carica** illustrato (come dualmente quello di scarica precedentemente menzionato) segue le stesse regole e lo stesso andamento sia per un induttore che per un condensatore.

## LA RISPOSTA AL GRADINO DEL CIRCUITO RLC

Proseguendo con lo studio dei transitori è importante notificare **esempi più complessi**, come quello di un **circuito RLC forzato con un generatore di tensione a gradino**:



La **funzione di Heavside**, detta anche **gradino unitario**, è definita come:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

Con un **valore non assegnato per  $t = 0$** . Non è difficile individuare con questa funzione la **caratteristica del generatore di tensione** in esame:

$$e(t) = Eu(t) = \begin{cases} E & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

Dal momento in cui **la rete per tempi  $t < 0$  è a riposo**, si supporranno le **variabili di stato** dei due bipoli a memoria **nulle**; pertanto, le **condizioni iniziali** saranno

$$\begin{cases} v_C(0) = 0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

Passando a scrivere **l'equazione differenziale che regola la dinamica della tensione del condensatore** (analogamente si potrebbe fare per la corrente dell'induttore), la LKT rileva:

$$-E + v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

Sfruttando le caratteristiche di ogni singolo bipolo del circuito e ricordando la relazione tra corrente (che nel circuito è unica per la LKC) e tensione del condensatore:

$$v_R(t) = Ri(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2}$$

Si rileva che:

$$LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = E$$

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{E}{LC}$$

L'equazione differenziale in questione descrive la dinamica della tensione ai capi del condensatore e, dal momento in cui **sono presenti due bipoli a memoria**, è **del secondo ordine**. Per **risolverla non**

**sono sufficienti le condizioni iniziali alla sola tensione** (ovvero le condizioni di raccordo) ma sono necessarie **anche quelle alla sua derivata**; per fortuna a disposizione ci sono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} v_c(0) = 0 \\ i(0^+) = C \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_c(0) = 0 \\ \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Da cui è possibile ottenere un **problema di Cauchy ben posto**:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = \frac{E}{LC} \\ v_c(0) = 0 \\ \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 \end{cases}$$

L'integrale particolare dell'equazione è da ricercare nelle funzioni costanti, visto che il forzamento è costante; in particolare:

$$v_{c_p}(t) = E$$

Questo risultato ha anche un senso pratico, visto che **a fine transitorio è ragionevole pensare che tutta l'energia erogata dal generatore si ritrovi ai capi del condensatore** (che a regime è un circuito aperto). Per l'integrale generale si ricorre alla risoluzione dell'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Che può avere due soluzioni, reale o complessa a seconda che:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \geq 0 \vee \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$$

Siano distinti i seguenti casi:

- $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Il discorso può essere generalizzato a partire dai valori  $R = 4$ ,  $L = 1mH$ ,  $C = 1/3mF$  e  $E = 2$ :

$$\lambda^2 + 4 \cdot 10^3 \lambda + 3 \cdot 10^6 = 0$$

L'equazione caratteristica ammette **due soluzioni reali**, che si riflettono nella soluzione generale:

$$\lambda_1 = -1000 \wedge \lambda_2 = -3000$$

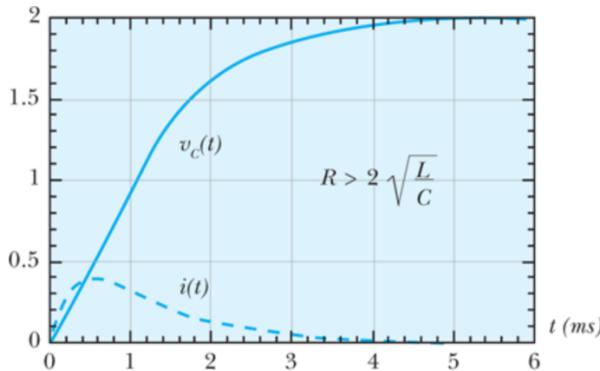
$$v_C(t) = 2 + K_1 e^{-1000t} + K_2 e^{-3000t}$$

Le costanti  $K_1$  e  $K_2$  si ricavano dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = -2 \\ K_1 + 3K_2 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene la soluzione:

$$v_c(t) = 2 - 3e^{-1000t} + e^{-3000t}$$



Si può subito notare come la scala dei tempi sia in millisecondi (quindi la variazione è rapida) e come al crescere del tempo l'andamento al valore di regime è monotono.

- $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$

Il caso in questione non presenta difficoltà aggiuntive rispetto al precedente, va solo puntualizzato che, per alcuni valori dei parametri della rete, l'andamento può essere non oscillante.

- $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$

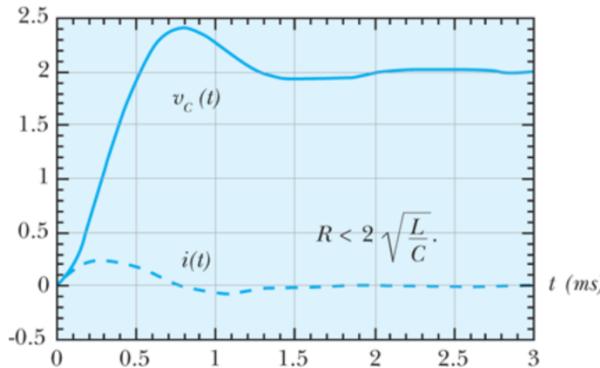
Il discorso può essere generalizzato a partire dai valori  $R = 4$ ,  $L = 1mH$ ,  $C = 1/20mF$  e  $E = 2$ :

$$\lambda^2 + 4 \cdot 10^3 \lambda + 3 \cdot 10^6 = 0$$

L'equazione caratteristica ammette **due soluzioni complesse coniugate**, che si riflettono nella soluzione generale:

$$\lambda_1 = -2000 + i400 \wedge \lambda_2 = -2000 - i400$$

$$v_c(t) = 2 - 2e^{-2000t} \left[ \cos(4000t) + \frac{1}{2} \sin(4000t) \right]$$



Si può notare come la tensione oscilli attorno al valore di regime fino a smorzarsi asintoticamente ad esso, anche superandolo, in un **andamento cissoidale**; è proprio il superamento che porta a quelle **sovratensioni** che, durante il transitorio, possono danneggiare la rete (un discorso analogo può essere fatto con le correnti). Proprio come nel caso di soluzioni reali, la **scala temporale** è in **millisecondi**, ad indicare **eventi e variazioni che avvengono in intervalli di tempo piccolissimi** ma, distanziandosi dal caso reale, si prevede che le **grandezze del circuito tendano** tutte ai relativi valori di regime **in maniera oscillante**.

Ciò che importa nei **transitori del secondo ordine** è il **segno della parte reale degli autovalori**  $\lambda_{1,2}$ : se fossero quantità positive la tensione andrebbe rapidamente ad infinito, se invece fossero nulle ci si troverebbe davanti un moto armonico puro; quindi, è **necessario che abbiano segno negativo per indurre l'andamento cissoidale**. Nei transitori del primo ordine questa necessità non traspare perché gli autovalori sono negativi per definizione, dal momento in cui  $\lambda = -1/\tau$ .

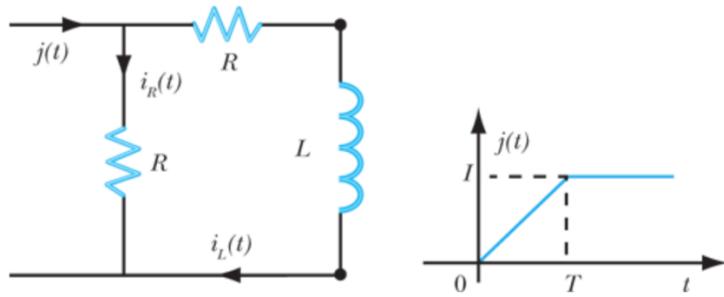
Per concludere, si possono rilevare le principali **differenze notate finora tra i transitori del primo e del secondo ordine**: per i primi le **condizioni di raccordo coincidono con le condizioni iniziali** (che non accade negli altri transitori) e tra i due **cambiano le dinamiche**, ovvero cambia il modo in cui la tensione e la corrente variano fino alla condizione di regime; in particolare per i transitori del primo ordine esiste una sola concavità, mentre per i transitori del secondo ordine ne esistono diverse.

## ALTRI TRANSITORI

Il circuito RLC rappresenta un esempio “canonico” per lo studio dei transitori, utile a focalizzare meglio le tecniche che verranno usate nello studio dei circuiti del primo e del secondo ordine.

### CIRCUITO DEL PRIMO ORDINE

In figura è mostrata una rete che si suppone a riposo per  $t < 0$  e della quale **si vuole determinare la tensione  $v_L(t)$  ai capi dell'induttore**:



Partendo dalla **forma della corrente erogata dal generatore**, si può rilevare una sua espressione analitica osservando la **forma d'onda** assegnata:

$$j(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{I}{T}t & \forall 0 \leq t < T \\ I & \forall t \geq T \end{cases}$$

Poiché per ipotesi la rete è a riposo per  $t < 0$ , si può impostare la **condizione iniziale** seguente:

$$i_L(0) = 0$$

La trattazione seguente prenderà in considerazione la corrente per poi rilevare la tensione per mezzo della relazione costitutiva del bipolo induttore.

Per un generico  $t > 0$ , la rete è descritta dal seguente modello matematico:

$$\begin{cases} j(t) = i_L(t) + i_R(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = Ri_R(t) \end{cases}$$

Evidenziando la corrente  $i_R(t)$  nella prima relazione e sostituendo nella seconda:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{j(t)}{2\tau}$$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata è:

$$i_{L_0}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Poiché la forzatura non è più costante a priori, come negli esempi precedenti, per l'integrale particolare si deve osservare la forma di tale funzione; in particolare, in questo caso va osservato l'intervallo di tempo in esame:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{I}{2T} \frac{t}{\tau} & \forall 0 \leq t < T \\ i_L(0) = 0 \end{cases}$$

In questo intervallo di tempo il forzamento è un polinomio di primo grado e la soluzione particolare va ricercata in funzioni del tipo:

$$i_{L_p}(t) = At + B$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$A + \frac{At + B}{\tau} = \frac{I}{2T} \frac{t}{\tau}$$

Invocando il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + \frac{B}{\tau} = 0 \\ A = \frac{I}{2T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{\tau I}{2T} \\ A = \frac{I}{2T} \end{cases}$$

La corrente, nella prima porzione di transitorio, deve essere:

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I\tau}{2T} \left( \frac{t}{\tau} - 1 \right)$$

Imponendo la condizione iniziale:

$$i_L(t) = \frac{I\tau}{2T} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1 \right) \quad \forall 0 \leq t < T$$

Per quanto riguarda la tensione si sfrutta la **caratteristica dell'induttore**:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{LI}{2T} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

**Nell'intervallo successivo:**

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{I}{2\tau} \quad \forall t > T \\ i_L(T) = \frac{I\tau}{2T} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{T}{\tau} - 1\right) \end{cases}$$

In questo caso l'integrale particolare nasce da una forzatura costante, quindi:

$$i_{L_p}(t) = D = \frac{I}{2}$$

L'integrale generale sarà del tipo:

$$i_L(t) = \bar{K} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I}{2}$$

Per la **soluzione particolare** si impone la **condizione iniziale**:

$$i_L(T) = \bar{K} e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{I}{2} \Rightarrow \bar{K} = \left[i_L(T) - \frac{I}{2}\right] e^{\frac{T}{\tau}}$$

Quindi, il **nuovo tratto di soluzione** è:

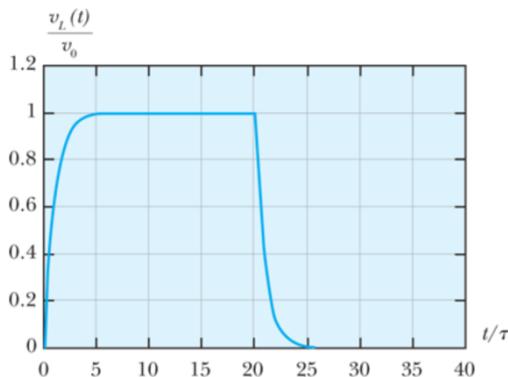
$$i_L(t) = \left[i_L(T) - \frac{I}{2}\right] e^{\frac{-(t-T)}{\tau}} + \frac{I}{2} \quad \forall t \geq T$$

Per quanto riguarda la tensione si sfrutta la **caratteristica dell'induttore**:

$$v_L(t) = \frac{L}{\tau} \left[ \frac{I}{2} - i_L(T) \right] e^{\frac{-(t-T)}{\tau}}$$

Con i valori reali  $R = 1, L = 1mH, T = 4ms, I = 2$  si può generalizzare il discorso:

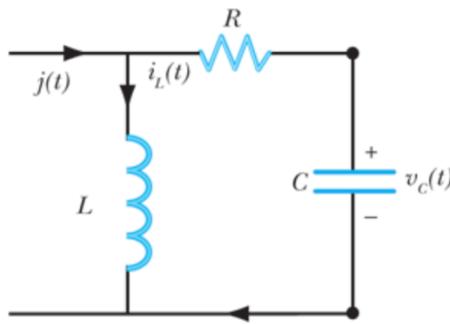
$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{LI}{2T} = \frac{1}{4} \\ -\frac{v_L(t)}{v_0} &= \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & \forall 0 \leq t < T \\ \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} & \forall t \geq T \end{cases} \end{aligned}$$



**La forma della tensione sembra quella di un'onda quadrata**, suggerendo che il circuito assegnato è in grado di trasformare la forma d'onda della corrente in ingresso in una che tende a diventare sempre più discontinua negli istanti 0 e  $T$ ; solo così la tensione ai capi dell'induttore approssima un'onda quadrata del genere. Ovviamente per realizzare ciò servirebbe una **costante di tempo  $\tau$  sufficientemente minore dell'intervallo  $[0, T]$** .

### CIRCUITO DEL SECONDO ORDINE

Si passi ora allo studio della rete in figura, supposta a **risposo per  $t < 0$** , con lo scopo di trovare l'andamento della tensione ai capi del condensatore:



Per prima cosa si costruisce il **modello matematico del circuito** sfruttando le LK:

$$\begin{cases} i_L(t) + C \frac{dv_C(t)}{dt} = j(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si può ricavare la **corrente dell'induttore**, per poi sostituirla nella seconda ed ottenere un'**equazione differenziale del secondo ordine**:

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{LC} = \frac{1}{C} \frac{dj(t)}{dt} = 0$$

Assumendo  $j(t) = Ju(t), J = 2mA, R = 2, L = 1mH, C = 1mF$ . Per **stabilire il carattere** della soluzione omogenea, è sufficiente **studiare l'equazione caratteristica**:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Poiché:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 0$$

L'equazione avrà **due soluzioni reali coincidenti**:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{2\tau}$$

La **soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea** associata è:

$$v_{C_0}(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Poiché la rete alimentata dal generatore  $j(t) = Ju(t)$  è a riposo per  $t < 0$ , si individuano le seguenti **condizioni iniziali**:

$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = 0 \wedge i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 0$$

Dal sistema di equazioni (LK) si ottiene:

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{j(0^+) - i_L(0^+)}{C} = \frac{J}{C} = 2$$

Il problema di Cauchy è così identificato:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{LC} = 0 \quad \forall t > 0 \\ v_C(0) = 0 \\ \frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{J}{C} \end{cases}$$

Disponendo già della soluzione dell'equazione omogenea associata, bisogna solo determinare le due costanti di integrazione imponendo le condizioni iniziali:

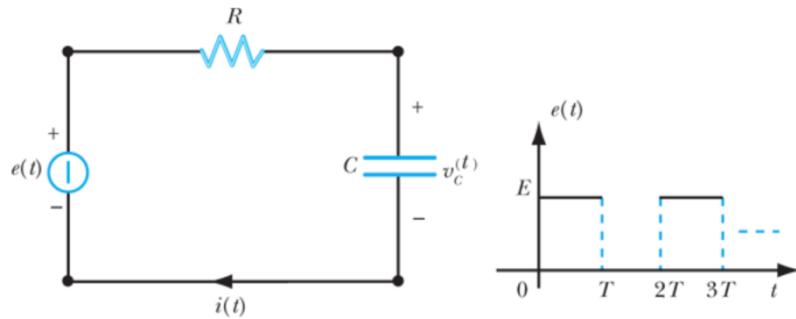
$$K_1 = 0 \wedge K_2 = \frac{J}{C}$$

Da cui si rileva la **soluzione particolare**:

$$v_C(t) = \frac{J}{C} te^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

## FORZAMENTO PERIODICO

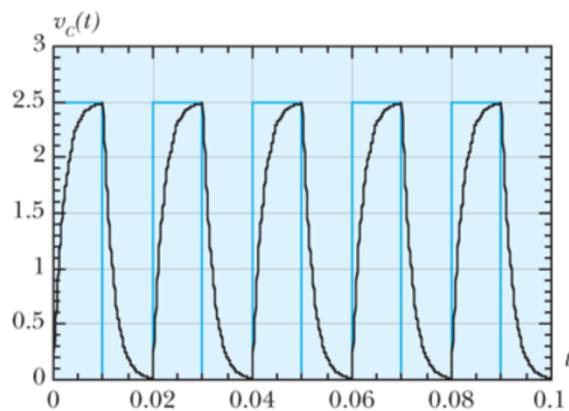
Sia considerato il seguente circuito:



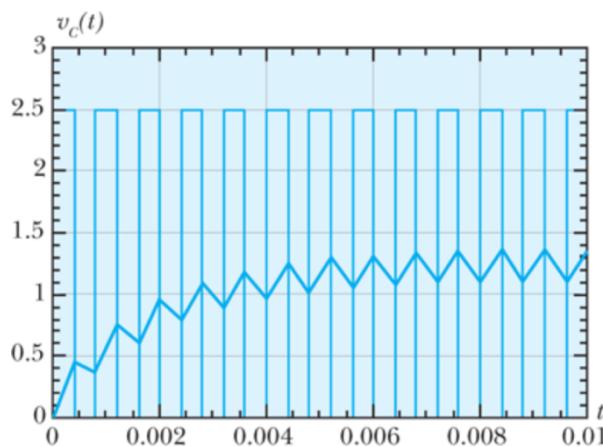
Si tratta di un **circuito RC forzato con una tensione a forma di onda quadra**, un tipo di generatore diffuso nella pratica tecnica, tale che per  $t < 0$  la tensione è nulla. L'onda quadra in questione è un **segnale periodico di periodo  $2T$**  caratterizzato come segue:

$$e(t) = \begin{cases} E & \forall t \in [kT, T + kT] \\ 0 & \forall t \in [T + kT, 2kT] \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Supponendo  $T = 5RC$ , ad ogni periodo la tensione sul condensatore prima giunge al valore di regime  $E$  e poi declina fino ad annullarsi, come in figura:

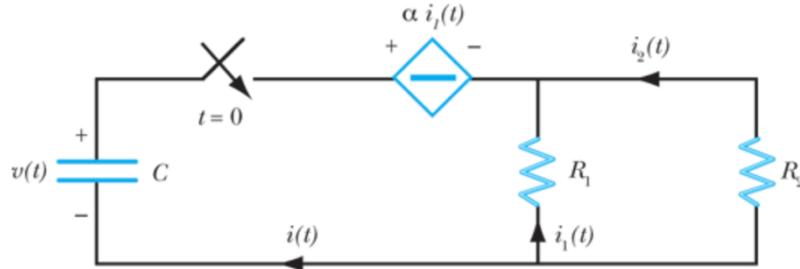


Se  $T < RC$ , la tensione sul condensatore non ha tempo sufficiente a caricarsi e a scaricarsi in un solo periodo, seguendo un **andamento irregolare, oscillante e asintotico**:



## TRANSITORI IN CIRCUITI CON GENERATORI CONTROLLATI

Si proceda allo studio della seguente rete, in cui un **condensatore carico** alla tensione  $v(0) = v_0$  si scarica su due resistori posti in parallelo e in presenza di un generatore di tensione controllato in corrente:



Assumendo le convenzioni sui bipoli come in figura, le LK e le relazioni caratteristiche impongono:

$$\begin{cases} i = -C \frac{dv(t)}{dt} \\ v = \alpha i_1 - R_1 i_1 = (\alpha - R_1) i_1 \\ i_1 = -i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Eliminando dal precedente sistema le due correnti, si ottiene l'**equazione differenziale che regola l'andamento della tensione**:

$$\frac{v}{\alpha - R_1} = C \frac{dv(t)}{dt} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0$$

Con:

$$\tau = CR_2 \frac{R_1 - \alpha}{R_1 + R_2}$$

Si può, quindi, individuare il seguente **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0 \\ v(0) = v_0 \forall t > 0 \end{cases}$$

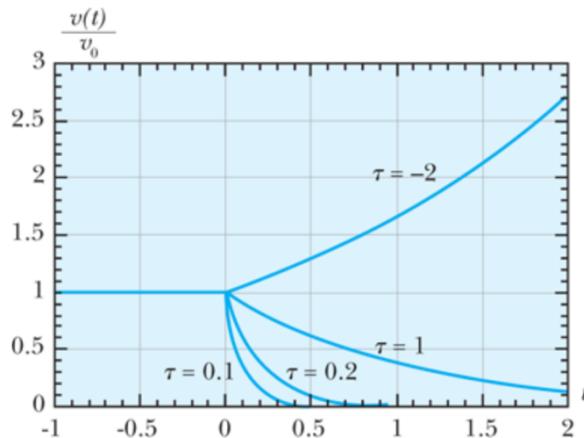
Il fatto che la **costante di tempo possa assumere valori negativi** (per  $R_1 < \alpha$ ) implica che la **tensione può aumentare al trascorrere del tempo**. Le **dinamiche esplosive** di questo tipo spaventano non poco ma la realtà è che **nessun circuito può produrre indefinitamente tali dinamiche**; infatti, prima o poi, intervengono **fenomeni di saturazione** per cui correnti e tensioni crescono fino a tal punto che **il funzionamento dei componenti relativi non è più lineare** e diventano importanti effetti che **arrestano la crescita esponenziale**. Ritornando al precedente problema di Cauchy, la soluzione è:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \forall t > 0$$

E rappresenta una **funzione**:

- **Esponenziale smorzato**  $\Leftrightarrow \tau > 0$ ;
- **Esponenziale esplosiva**  $\Leftrightarrow \tau < 0$

È interessante il caso (ideale) di **una costante di tempo**  $\tau = 0$ ; in tal caso, la tensione ai capi del condensatore potrebbe non essere più continua nell'istante di commutazione, esibendo un gradino all'istante iniziale:



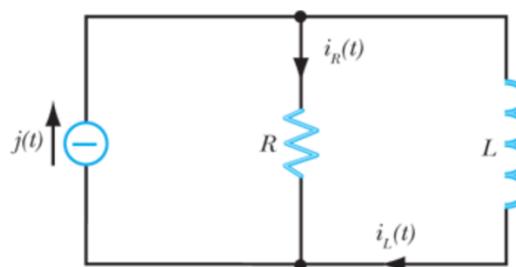
Tornando al caso  $\tau < 0$ , se la tensione cresce vuol dire che nella rete deve essere presente una **sorgente di energia**, in questo caso il **generatore controllato** (che è un dispositivo attivo). In conclusione, si può affermare che le **dinamiche instaurate in un circuito in cui sono presenti generatori controllati possono essere non convergenti al passare del tempo**.

## CIRCUITI SOTTOPOSTI A FORZAMENTO SINUSOIDALE

Si parla di **regime sinusoidale** quando i generatori che alimentano la rete erogano una tensione o una corrente descritta da leggi sinusoidali del tempo con la stessa frequenza; nei circuiti reali, il regime non si raggiunge immediatamente alla commutazione dell'interruttore ma si passa prima per un **transitorio**. Una volta terminata questa fase viene lasciato il posto alla soluzione di regime, il cui calcolo non è oggetto della trattazione attuale.

Si osservi l'**effetto del transitorio su una rete in regime sinusoidale**, come quella in figura, allo scopo di rilevare la corrente che fluisce nell'induttore una volta commutato l'interruttore; si supponga:

$$j(t) = I \sin(\omega t), \omega = 2\pi k \text{ rad/s}, I = 2, R = 1, L = \frac{1}{2\pi} \text{ mH}$$



**Supponendo la rete a riposo per  $t < 0$ ,** in questi istanti la **corrente** (che è l'unica variabile di stato) si suppone anch'essa **nulla** ed è ragionevole determinare le seguenti **condizioni iniziali**:

$$i_L(0) = 0$$

Una volta collegato il generatore alla rete, si applichino le LK al nodo e alla maglia RL:

$$\begin{cases} j(t) = i_R(t) + i_L(t) \\ Ri_R(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Da questo sistema si può ottenere l'**equazione differenziale che regola la dinamica della variabile di stato** da individuare:

$$\frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = j(t)$$

Riassumendo, la **corrente** che fluisce nell'induttore dopo la commutazione del generatore nella rete è descritta dal seguente **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{j(t)}{\tau} \\ i_L(0) = 0 \end{cases}$$

Con  $\tau = L/R$ . La soluzione dell'equazione omogenea associata è:

$$i_{L_0}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Mentre l'integrale particolare va ricercato tra una particolare classe di funzioni trigonometriche con la stessa pulsazione del forzamento (da cui discendono queste considerazioni):

$$i_{L_p}(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$$

Con  **$K_1$  e  $K_2$  costanti da determinare** supponendo che la funzione sia soluzione dell'equazione differenziale (con i dovuti raccoglimenti di coseni e seni):

$$\begin{cases} \frac{K_1}{\tau} + \omega K_2 = 0 \\ \frac{K_2}{\tau} - \omega K_1 = \frac{I}{\tau} \end{cases}$$

Da cui:

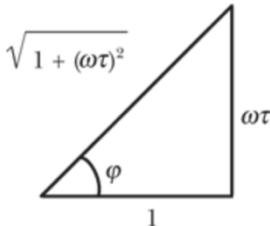
$$K_1 = -I \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \wedge K_2 = I \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Pertanto, l'**integrale particolare**:

$$i_{L_p}(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left[ -\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t) \right]$$

Considerando  $\varphi$  l'angolo costruito sul triangolo rettangolo che ha come cateti 1 e  $\omega\tau$ :

$$\sin \varphi = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \wedge \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Per cui, l'integrale particolare assume la forma:

$$i_{L_p}(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} [\cos(\varphi) \sin(\omega t) - \sin(\varphi) \cos(\omega t)] = \frac{I \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale originale è:

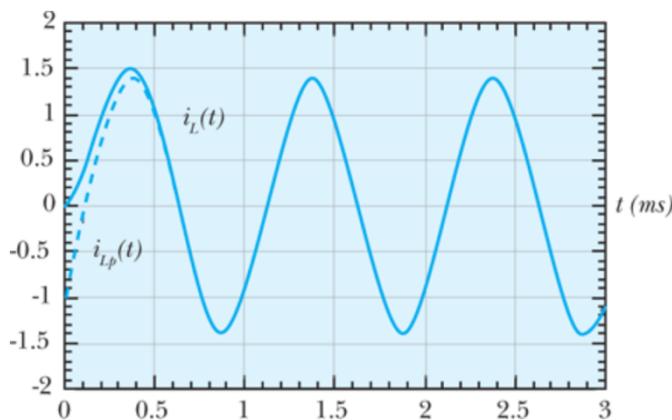
$$i_L(t) = \frac{I \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} + K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La soluzione particolare si ottiene sfruttando le condizioni iniziali:

$$i_L(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\varphi) \right]$$

In figura sono rappresentati, a tratto pieno la soluzione del transitorio (cioè la corrente che circola nell'induttore dopo aver commutato il generatore) e tratteggiata la soluzione particolare (cioè la corrente che circola nel circuito dopo il transitorio):

$$i_L(t) = \frac{I \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Si può notare come dopo un breve periodo di tempo i due andamenti risultano indistinguibili; la corrente particolare individuata sarà quella che è stata definita soluzione di regime, detta anche soluzione asintotica perché:

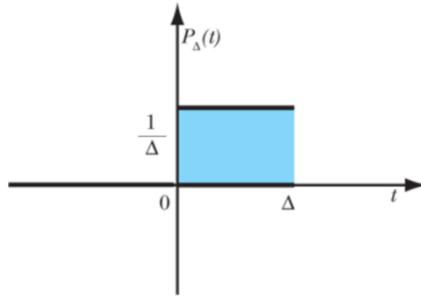
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i_L(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\varphi) \right] = \frac{I \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

**Il metodo simbolico** (manipolazione algebrica di fasori complessi al posto di sinusoidali reali) prende forza proprio in seno a questa relazione; infatti, **permette di determinare le soluzioni di regime**, quando il circuito è forzato da soli generatori sinusoidali, **senza ricorrere al complicato apparato di equazioni differenziali**.

## LA RISPOSTA ALL'IMPULSO

Un **impulso** è una relazione del tipo:

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \forall 0 < t < \Delta, \forall \Delta > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

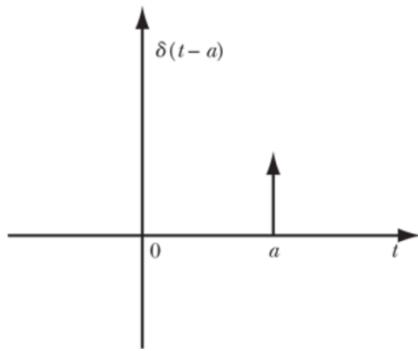


Ogni funzione appartenente alla classe di impulsi assume un **valore costante**, che **aumenta man mano che l'intervallo in cui è assunto diventa più piccolo**; geometricamente, l'**area sottesa dal grafico** (indipendente da  $\Delta$ ) è **costante**, ma se la **base si restringe l'altezza aumenta**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\Delta(t) dt = \int_0^\Delta P_\Delta(t) dt = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$$

Ci si può chiedere **come si comporta la funzione in esame per  $\Delta \rightarrow 0$**  e la risposta non è semplice come sembra; infatti, **per  $t \neq 0$  la funzione continuerebbe ad assumere valore nullo** ma per  **$t = 0$  cesserebbe di avere valore**, perché una funzione è una corrispondenza tra un valore della variabile indipendente e un certo valore numerico, **non è possibile scrivere  $P_\Delta(0) = +\infty$  perché  $+\infty$  non è un numero**.

Questa difficoltà ha spinto verso lo studio di una nuova **estensione del concetto di funzione**, le cosiddette **distribuzioni**, che includono sia le funzioni intese finora che oggetti simili a quello di cui si sta discutendo. Il risultato di queste analisi porta a concludere che **l'oggetto in esame può, a buon diritto, essere trattato come una funzione** che prende il nome di **funzione impulsiva unitaria di Dirac (o Delta di Dirac)  $\delta(t)$**  e che gode delle seguenti proprietà:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

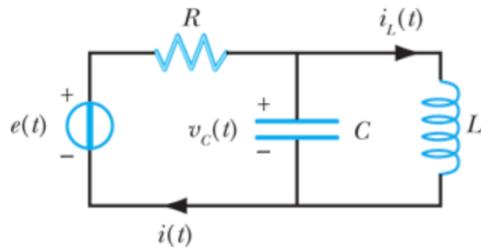
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-a) dt = (-1)^n f^{(n)}(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Anche se **a rigore le operazioni indicate non hanno senso compiuto**, i risultati cui si perviene tramite esse sono corretti. Infine, è importante **caratterizzare la finestra e la Delta di Dirac** come segue:

$$P_\Delta(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta} \wedge \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_\Delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Per comprendere **come risponde una rete lineare** (in figura) **ad un impulso**, si determini l'**andamento temporale della corrente nell'induttore** assumendo che il generatore di tensione imprima l'impulso:

$$e(t) = \phi \delta(t)$$



**Le equazioni che, in qualsiasi istante, descrivono la rete sono:**

$$e(t) = Ri(t) + v_C(t)$$

$$v_C(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_L + C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Da cui si può ottenere l'**equazione differenziale che caratterizza la corrente** in esame:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$$

Ma denominando  $\tau = 2RC = 10\mu s$  e  $\omega = \sqrt{1/LC} = 100 krad/s$  (quest'ultima è la frequenza di risonanza del circuito nel caso  $R = \infty$ ):

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di_L(t)}{dt} + \omega^2 i_L(t) = \frac{\phi}{RLC} \delta(t)$$

La **soluzione caratteristica** ammette soluzioni **reali coincidenti**:

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{\tau^2} - \omega^2 = 0$$

Pertanto, la **soluzione dell'equazione omogenea associata** è:

$$i_{L_0}(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La rete, per  $t < 0$  è a riposo, quindi  $v_C(t) = 0$  e  $i_L(t) = 0$ . La corrente sull'induttore non conterrà alcun impulso dato che quello imposto dalla sorgente interesserà solo la corrente del condensatore, come apparirà più chiaro in seguito.

A questo punto si analizzano indipendentemente le tre principali tecniche che, operando nel dominio del tempo, consentono di trovare la **risposta all'impulso per la rete**:

- **La risposta all'impulso discende da quella al gradino**

Per determinare la risposta della rete in esame all'impulso si può sfruttare il **gradino unitario**, secondo uno schema che può essere riassunto come segue:

$$\begin{aligned} u(t) &\rightarrow g(t) \\ \frac{d}{dt} \\ \delta(t) &= u'(t) \rightarrow \phi g'(t) = i_L(t) \end{aligned}$$

Ovvero, si può osservare la **risposta della rete al gradino unitario** ( $g(t)$ ) e poi derivare per ottenere la **risposta all'impulso**, essendo la derivata del gradino; ovviamente, con queste premesse è necessario impostare la rete **inizialmente a riposo**, altrimenti andrebbe verificata la coerenza delle condizioni iniziali. Per ottenere la risposta al gradino unitario bisogna risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{g(t)}{LC} = \frac{u(t)}{RLC} \\ g(0) = 0 \\ \frac{dg(0^+)}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è uguale a quello trovato in precedenza:

$$g_0(t) = (G_1 + G_2 t)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Mentre l'integrale particolare è:

$$g_p(t) = \frac{1}{R}$$

Da cui si ottiene la **soluzione generale all'equazione differenziale** in esame:

$$g(t) = (G_1 + G_2 t)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R}$$

Imponendo le **condizioni iniziali** si può scrivere:

$$G_1 + \frac{1}{R} = 0 \wedge G_2 - \frac{G_1}{\tau} = 0$$

Da cui:

$$G_1 = -\frac{1}{R} \wedge G_2 = -\frac{1}{R\tau}$$

Segue che **la risposta al gradino**, resa opportunamente nulla per  $t < 0$ , è:

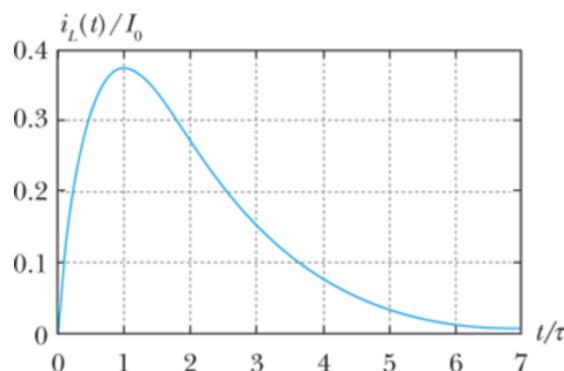
$$g(t) = \frac{1}{R} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

E **la risposta all'impulso** è (ricordando la proprietà di campionamento di  $\delta(t)$ ):

$$\begin{aligned} i_L = \phi g'(t) &= \frac{\phi}{R} \frac{d}{dt} \left[ u(t) - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \right] \\ &= \frac{\phi}{R} \left[ \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) + \frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) - \delta(t) \right] = \frac{\phi}{R} \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \end{aligned}$$

In definitiva:

$$i_L(t) = \frac{\phi}{RLC} t e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) = I_0 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$



Con:

$$I_0 = \frac{\phi\tau}{RLC}$$

- **Il metodo del bilanciamento degli impulsi**

Nella pratica, l'**impulso corrisponde ad un segnale elettrico** che agisce in un solo istante caricando gli elementi a memoria della rete; ciò comporta che la **dinamica seguente corrisponde all'evoluzione libera** e, pertanto, si può risolvere il problema assumendo la corrente che fluisce nel conduttore come il prodotto tra il gradino unitario e la soluzione dell'equazione differenziale non forzata:

$$i_L(t) = u(t)i_{L_0}(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

**Bilanciare gli impulsi** vuol dire rendersi conto se la **forma funzionale scelta per rappresentare la soluzione possa bilanciare tutti gli impulsi** presenti nel forzamento dell'equazione differenziale; nel caso in esame, il termine noto contiene un impulso, la derivata prima uno e la derivata seconda sia un impulso che una sua derivata prima:

$$\begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{di_{L_0}(t)}{dt}u(t) + K_1\delta(t) \\ \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} &= \frac{d^2i_{L_0}(t)}{dt^2}u(t) + \left(K_2 - \frac{K_1}{\tau}\right)\delta(t) + K_1\delta'(t) \end{aligned}$$

Con la forma funzionale scelta è possibile bilanciare l'unico impulso presente nel forzamento, per cui:

$$\left( \frac{d^2i_{L_0}(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di_{L_0}(t)}{dt} + \omega^2 i_{L_0}(t) \right)u(t) + \left( K_2 + \frac{K_1}{\tau} \right)\delta(t) + K_1\delta'(t) = \frac{\phi}{RLC}\delta(t)$$

Essendo  $i_{L_0}(t)$  **soluzione dell'equazione non forzata**, si può semplificare quanto appena detto:

$$\left( K_2 + \frac{K_1}{\tau} \right)\delta(t) + K_1\delta'(t) = \frac{\phi}{RLC}\delta(t)$$

Dando origine al seguente **sistema lineare**:

$$\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 + \frac{K_1}{\tau} = \frac{\phi}{RLC} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \frac{\phi}{RLC} \end{cases}$$

In conclusione:

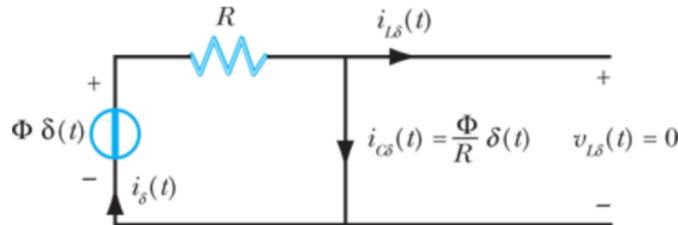
$$i_L(t) = \frac{\phi}{RLC}te^{-\frac{t}{\tau}}u(t) = I_0 \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

- **La determinazione diretta delle condizioni iniziali**

Poiché il **forzamento è impulsivo**, la **corrente nell'induttore è soluzione dell'equazione omogenea** associata per  $t > 0$  e, sapendo il **valore delle variabili di stato** nell'istante

immediatamente successivo alla commutazione (cioè in  $t = 0^+$ ), si potrebbero **conoscere anche le costanti di integrazione**.

Sebbene le **variabili di stato** possano essere **discontinue in presenza di generatori impulsivi, non possono essere degli impulsi loro stesse** perché si andrebbero a generare **correnti o tensioni che conterrebbero derivate di impulsi non bilanciabili** (ad esempio, un condensatore a tensione impulsiva produce una corrente contenente un impulso non bilanciabile nella LKC). Per determinare agevolmente la tensione sull'induttore e la corrente che fluisce nel condensatore per effetto della sollecitazione impulsiva, si può **considerare la rete ausiliaria ottenuta dalla sostituzione di tali bipoli con un circuito aperto e un cortocircuito**:



Note le componenti impulsive delle derivate delle variabili di stato ( $v_{L\delta}(t)$  e  $i_{C\delta}(t)$ ), per determinare le **condizioni iniziali** bisogna usare le **equazioni caratteristiche in forma integrale**:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_{L\delta}(t) dt \wedge v_C(0^+) = v_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_{C\delta}(t) dt$$

Risolvendo la **rete resistiva** riportata:

$$v_{L\delta}(t) = 0 \wedge i_{C\delta}(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\phi}{R} \delta(t)$$

Da cui segue:

$$i_L(0^+) = 0 \wedge v_C(0^+) = \frac{\phi}{RC}$$

Questo stesso risultato è ottenuto **integrando il sistema delle LK a cavallo dell'istante di applicazione dell'impulso**; imponendo che le variabili di stato non presentino termini impulsivi, che:

$$i_L(0^-) = 0 \wedge v_C(0^-) = 0$$

E che:

$$\int_{0^-}^{0^+} e(t) dt = \phi$$

Le equazioni diventano:

$$\phi = R \cdot \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt = R \cdot C v_C(0^+) \wedge i_L(0^+) = 0$$

$$i_L(0^+) = 0 \wedge v_C(0^+) = \frac{\phi}{RC}$$

Infine, ultimo metodo, si può **integrare membro a membro l'equazione differenziale** per la corrente nell'induttore tra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di_L(t)}{dt} + \omega^2 i_L(t) = \frac{\phi}{RLC} \delta(t)$$

Essendo una variabile di stato, solo il primo termine al primo membro contribuirà:

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} - \frac{di_L(0^-)}{dt} = \frac{\phi}{RLC} \rightarrow L \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{\phi}{RC} = v_C(0^+)$$

Quale che sia la strada percorsa, **imponendo la prima condizione sulla soluzione dell'omogenea**:

$$i_L(0^+) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$$

Imponendo la seconda:

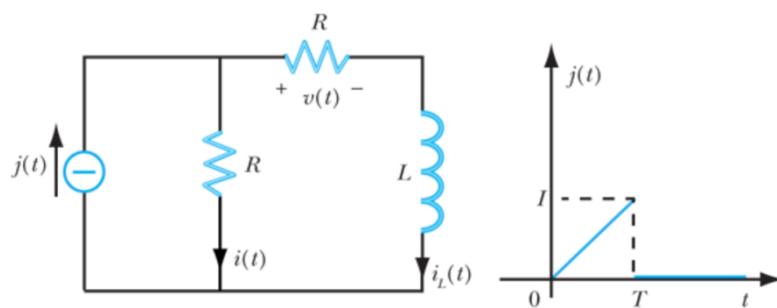
$$v_C(0^+) = \frac{\phi}{RLC} \Rightarrow K_2 = \frac{\phi}{RLC}$$

Da cui si giunge alla **conclusione**:

$$i_L(t) = \frac{\phi}{RLC} t e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) = I_0 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

## L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

La **risposta di una rete ad un forzamento** qualsiasi può essere ottenuta una volta che sia **nota la risposta all'impulso**, per mezzo dell'**integrale di convoluzione**. Quanto detto di seguito è un caso particolare di un metodo generale che può essere applicato a qualsiasi rete lineare su cui siano chiarite le variabili di ingresso e uscita; sia considerato il **circuito in figura**, nel quale la **variabile di ingresso** è la corrente impressa  $j(t)$  e quella d'uscita la tensione  $v(t)$ , che è da ricercare:



$$j(t) = \begin{cases} \frac{I}{T} t & \forall 0 \leq t < T \\ 0 & \forall t \geq T \end{cases}$$

Le due variabili sono **in relazione tra di loro mediante un integrale di convoluzione**:

$$v(t) = \int_{0^-}^{t^*} j(u) h(t-u) du = \int_{0^-}^{t^*} h(u) j(t-u) du$$

Dove  $h(t)$  rappresenta la tensione  $v(t)$  quando in ingresso al sistema si pone un impulso unitario di corrente. Appare evidente che l'uscita sia causale, cioè:

$$v(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Adoperando l'integrale di convoluzione al caso del segnale di ingresso assegnato, si può scrivere che:

$$v(t) = \frac{I}{T} \begin{cases} \int_{0^-}^{t^+} uh(t-u) du & \forall 0 \leq t < T \\ \int_{0^-}^{T^+} uh(t-u) du & \forall t \geq T \end{cases}$$

L'estremo superiore di integrazione è costante e pari a  $T^+$  per  $t \geq T$  perché l'integrando (proporzionale all'ingresso del sistema) è identicamente nullo per questi valori di tempo.

È noto che, ponendo all'ingresso della rete un impulso di corrente  $j(t) = Q\delta(t)$  esso si ritroverà integralmente nella corrente  $i(t)$  che attraversa il resistore trasversale, visto che all'istante  $t = 0$  l'induttore si comporta come un circuito aperto; in tal modo si può porre che:

$$i(t) = Q\delta(t) + i_0(t)$$

Laddove  $i_0(t)$  rappresenta l'evoluzione libera una volta che l'impulso è passato. Ne consegue che la corrente dell'induttore non risente dell'impulso, che ha il solo effetto di caricarlo istantaneamente; pertanto, si può scrivere:

$$i_L(t) = i_L(0^+) e^{-\frac{2Rt}{L}} u(t)$$

Questa relazione mette in chiaro il fatto che la tensione all'induttore  $v_L(t)$  ha una componente impulsiva. Il bilancio delle tensioni nella maglia che non contiene il generatore consente di determinare le condizioni iniziali della corrente:

$$Ri(t) = RQ\delta(t) + Ri_0(t) = v(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$$

**Integrando membro a membro a cavallo dell'istante di applicazione dell'impulso:**

$$R \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt = RQ = Li_L(0^+)$$

$$i_L(0^+) = \frac{RQ}{L}$$

È evidente che andrà scelto  $Q = 1$ , ma si è preferito non usare un impulso unitario per avere maggior controllo dimensionale sulle equazioni. Dai risultati finora rilevati discende che la risposta all'impulso  $h(t)$  è nota:

$$h(t) = Ri_L(t) = \frac{R^2}{L} e^{-\frac{2Rt}{L}} u(t)$$

Sapendo che:

$$\int ue^{au} du = \left( u - \frac{1}{a} \right) \frac{e^{au}}{a} + const$$

È possibile **calcolare le due determinazioni dell'integrale di convoluzione:**

$$v(t) = \frac{RI}{2} \begin{cases} \frac{t}{T} - \frac{L}{2RT} \left( 1 - e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) & \forall 0 \leq t < T \\ \left[ 1 - \frac{L}{2RT} \left( 1 - e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) \right] e^{-\frac{2R(t-T)}{L}} & \forall t \geq T \end{cases}$$

Si può notare come la tensione  $v(t)$  in esame sia **continua in  $t = T$ :**

$$v(T) = v(T^-) = \frac{RI}{2} - \frac{LI}{4T} \left( 1 - e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) = v(T^+)$$

La **dinamica della rete**, in evoluzione libera per  $t \geq T$ , si può ricondurre alla forma:

$$v(t) = v(T) e^{-\frac{2R(t-T)}{L}}$$

Se la durata della corrente di ingresso è molto più piccola rispetto alla costante di tempo del circuito ( $2RT/L \ll 1$ ), l'uscita  $v(t)$  è pressoché proporzionale all'ingresso:

$$v(t) \cong \frac{R}{2} j(t) \quad \forall 0 < t < T$$

Se invece risulta  $2RT/L \gg 1$  l'uscita, seppur mantenendo un andamento rettilineo, **non è più proporzionale all'ingresso:**

$$v(t) = \frac{R}{2} j(t) - \frac{LI}{4T} \quad \forall 0 < t < T$$

Non viene incluso  $t = 0$  perché tale approssimazione risulta particolarmente sbagliata in corrispondenza di quel valore.

## INTRODUZIONE AI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Nella **realizzazione pratica** dei circuiti sono esistiti **due paradigmi**: il primo predilige il **regime stazionario**, caratterizzato da **grandezze costanti** (dopo il transitorio), mentre il secondo predilige il **regime sinusoidale**, caratterizzato da **grandezze che variano seguendo funzioni sinusoidali**. Ad oggi in tutto il mondo industrializzato prevale questo secondo approccio, che sarà l'oggetto della trattazione seguente. Per **funzione sinusoidale** si intende un'espressione del tipo:

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$$

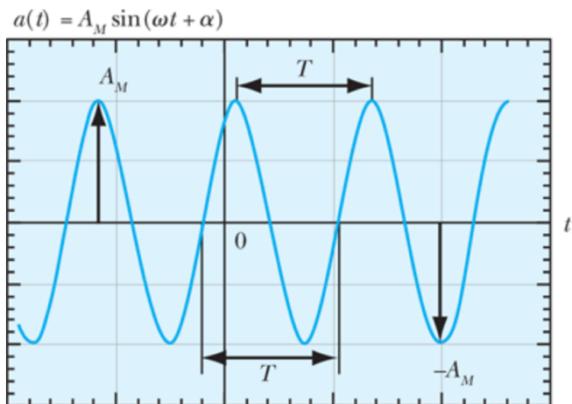
Con  $A_M$  un numero reale positivo detto **ampiezza della funzione**,  $\omega$  un numero reale positivo che va sotto il nome di **pulsazione della funzione** e  $\alpha$  un numero reale di segno qualsiasi che prende il nome di **fase della funzione**. Invece, la quantità:

$$\beta = \omega t + \alpha$$

Prende il nome di **argomento della funzione sinusoidale**. Dal momento in cui l'applicazione utile è quella di una **funzione del tempo**, il periodo viene misurato in secondi e la pulsazione in radianti/secondi.

Le **funzioni sinusoidali** sono caratterizzate da un'ulteriore grandezza, legata alla pulsazione e al periodo, molto usata nella pratica: la **frequenza**, misurata in hertz. La relazione tra queste tre quantità permette di conoscerle tutte anche solo avendone a disposizione una:

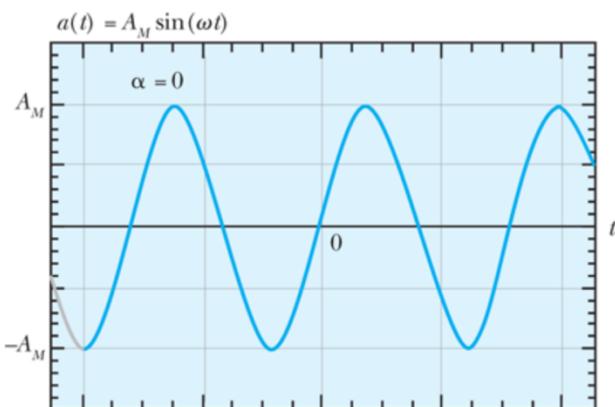
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$



Dal grafico rappresentato è possibile avere maggior consapevolezza di tutte le grandezze elencate: il **periodo** rappresenta l'intervallo di tempo più piccolo in cui la funzione compie un'oscillazione completa, la **frequenza** è la quantità di oscillazioni effettuate in un secondo e la **pulsazione** il prodotto tra la frequenza e la costante  $2\pi$ . Per quanto riguarda l'ampiezza della funzione (che verrà definita in seguito come  $A_M = A\sqrt{2}$ , dove  $A$  è il valore efficace di  $a(t)$ ) va ricordato che la **funzione seno oscilla tra 1 e -1**, che rappresentano il **massimo** e il **minimo** valore che la grandezza descritta in regime sinusoidale può raggiungere; pertanto, **moltiplicare il seno per un valore positivo  $A_M$**  equivale a dire che la **grandezza associata assume in tale valore il suo massimo e il suo minimo**.

Si conclude il discorso con un chiarimento sul ruolo della **fase  $\alpha$** ; essa rappresenta l'**angolo di inclinazione associato alla grandezza per l'istante  $t = 0$** . Per determinare la fase a partire dal grafico, si individua il primo punto  $P$  a sinistra dell'origine  $O$  che tocca l'asse temporale (che corrisponde al valore  $\omega t = \alpha$ ), si individua il segmento  $PO$  e si impone:

$$\omega \overline{PO} = \alpha$$



A partire dalla determinazione della fase si può comprendere meglio il suo ruolo in relazione alla pulsazione:  **$\omega$  è una quantità caratteristica della grandezza,  $\alpha$  della misura**; infatti, **il valore della fase dipende dal momento in cui viene iniziata la misurazione**, ovvero quando  $t = 0$ . Non esiste realmente l'origine dei tempi ma è un'idealizzazione che permette di agevolare i calcoli e il fatto che la grandezza esiste anche prima di questa origine ideale rende necessario introdurre una fase.

Quando **si osservano due grandezze** ( $a(t)$  e  $b(t)$ ), si può far coincidere **l'origine dei tempi** per i due fenomeni ma può capitare che essi **si trovino in due stati completamente diversi**, risultando in **due fasi diverse**. Si può determinare l'entità della differenza di fase attraverso una misura definita **sfasamento di  $b(t)$  rispetto ad  $a(t)$** :

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \wedge b(t) = B_M \sin(\omega t + \beta)$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

Quando  $\varphi > 0$  si dice che  **$a(t)$  è in anticipo rispetto a  $b(t)$** , viceversa **in ritardo**; inoltre, nel gergo elettrotecnico si dice che  **$a(t)$  è in quadratura d'anticipo (o di ritardo) su  $b(t)$**  quando  $\varphi = \pi/2$  (o  $\varphi = -\pi/2$ ), mentre quando  $\varphi = \pi$  le due sinusoidi sono in **opposizione**.

Una grandezza periodica come una **sinusoide** può essere **caratterizzata**, nella letteratura tecnica, mediante alcune **proprietà globali (integrali)**, come il **valor medio**:

$$A_M = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t}^{\square} a(t) dt$$

In questo caso **il dato viene mediato dall'intervallo di tempo  $\Delta t$** ; tuttavia, in genere **il valor medio viene individuato sull'intervallo  $[0, T]$**  che corrisponde ad **un periodo  $T$** :

$$A_M = \frac{1}{T} \int_T^{\square} a(t) dt$$

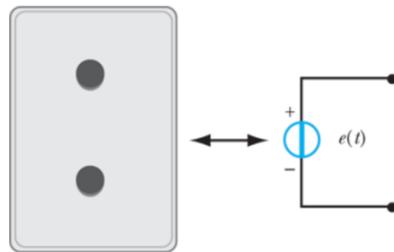
Le grandezze sinusoidali utili alle applicazioni in questo campo sono dette **grandezze alternate**, in quanto grandezze il cui **valor medio sul periodo è nullo**. Per questo motivo è utile andare a definire anche il **valor medio quadratico**:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T^{\square} a(t)^2 dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

Questa relazione **riprende la nomenclatura definita in precedenza**, per la quale è possibile chiamare il **valor medio quadratico** come **valore efficace** della sinusoide; ne consegue che è equivalente riferirsi ad uno piuttosto che all'altro. La dimostrazione è fornita di seguito:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_T^{\square} a(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{A_M^2}{T} \int_T^{\square} \sin^2(\omega t + \alpha) dt} = A_M \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_T^{2\pi} \sin^2(u) du} \\ &= A_M \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(2u)] du} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Al fine di rendere più concreto quanto detto finora, si chiarisca cosa rappresenta dal punto di vista circuitale una “presa di corrente”. Considerando la presa a tre ingressi che si trova nelle comuni abitazioni, si può subito dire che il foro centrale è elettricamente neutro e, per motivi che verranno illustrati in futuro, viene ignorato; pertanto, **si consideri (per semplicità) la presa di corrente a due fori** illustrata in figura:



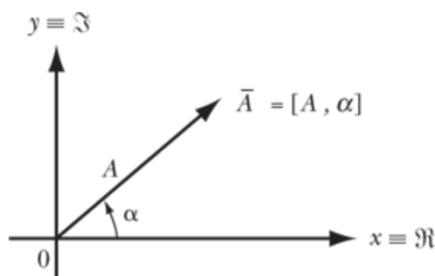
Da un punto di vista circuitale **un componente del genere può essere assimilato** con una buona approssimazione ( $\pm 5\%$ ) **ad un generatore indipendente di tensione**, la cui tensione erogata è descritta dalla seguente funzione sinusoidale nel tempo:

$$e(t) = 230\sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 50t + \alpha) = 230\sqrt{2} \sin(100\pi t + \alpha)$$

La frequenza di questa tensione è di  $50\text{hz}$ , il suo valore efficace  $230V$ , il suo periodo  $20ms$ , la pulsazione  $100\pi \text{ rad/s}$ , e l'ampiezza  $325V$ .

Si può quindi dire che **un circuito è in regime sinusoidale quando tutte le sue grandezze fondamentali sono descritte da funzioni sinusoidali variabili nel tempo e dotate della stessa pulsazione**. È necessario specificare che **a variare in maniera sinusoidale sono le grandezze fondamentali, non quelle derivate**; infatti, come si avrà modo di vedere in seguito, le grandezze come potenze ed energie non variano con leggi sinusoidali ma secondo criteri ben specifici.

Dal momento in cui la **pulsazione** (di conseguenza la **frequenza**) sono quantità normativamente stabilite ( $\omega = 2\pi \cdot 50$  in Europa e  $\omega' = 2\pi \cdot 60$  negli USA), per conoscere una grandezza fondamentale in regime sinusoidale è sufficiente conoscere il suo valore efficace (o la sua ampiezza) e la sua fase; ciò significa che **ogni corrente ed ogni tensione operante in regime sinusoidale è univocamente determinata** da queste due quantità e, pertanto, può essere espressa da un numero complesso che ha per **modulo il valore efficace e argomento principale la fase**:



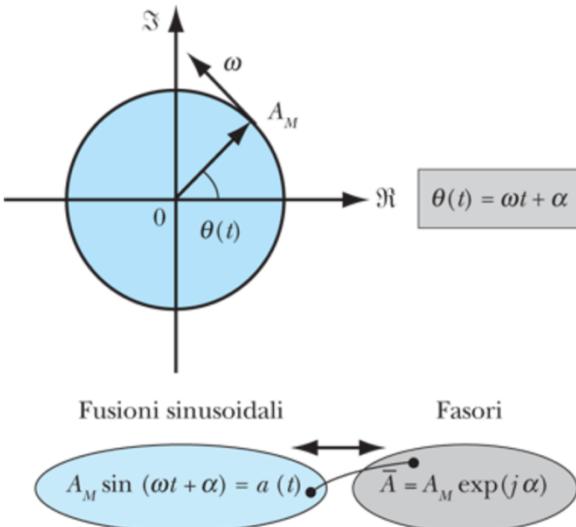
$$\bar{A} = [A, \alpha]$$

Questa sostituzione permette anche di **rappresentare una funzione sinusoide variabile nel tempo come un fasore complesso indipendente dal tempo**; il vantaggio è evidente, perché porta lo **studio delle reti ad una situazione simile a quella che c'era in regime stazionario**, in cui le incognite non dipendevano dal tempo e dove l'unica differenza sta nel campo complesso in cui cadono i valori numerici da manipolare.

Analiticamente, il passaggio da sinusoidi reali a vettori del campo complesso può essere espresso dalla **legge di Eulero**:

$$a_{\mathbb{C}}(t) = A_M e^{i(\omega t + \alpha)} = A_M [\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)]$$

Ciò che risulta è un fasore, **un vettore di modulo  $A_M$  che ruota nel piano di Gauss a partire dall'angolo  $\alpha$  con una velocità angolare  $\omega$** :



È evidente che la funzione complessa  $a_{\mathbb{C}}(t)$  è **caratterizzata dagli stessi parametri che caratterizzano la funzione  $a(t)$** , tra le quali sussiste la seguente **relazione**:

$$a(t) = \operatorname{Im}[a_{\mathbb{C}}(t)]$$

**La corrispondenza tra sinusoidi e fasori è biunivoca**, quindi si può effettuare la conversione in entrambi i versi. In realtà **la corrispondenza può essere ricondotta ad elementi ancora più semplici**; infatti, non è ancora molto pratico manipolare delle quantità che si muovono nel piano, sarebbe ideale andare a lavorare con **quantità costanti come i vettori**. In aiuto interviene il fatto che **la pulsazione delle sinusoidi è a priori stabilita** (anche se differisce negli USA), quindi **la si può omettere e considerare il numero complesso che non ruota**:

$$\bar{A} = A_M e^{i\alpha}$$

Il passaggio da sinusoidi a numero complesso è possibile dal momento in cui è possibile far corrispondere biunivocamente un fasore con il vettore complesso di  $t = 0$ ; pertanto, è possibile dire:

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow a_{\mathbb{C}}(t) = A_M e^{i(\omega t + \alpha)} \Leftrightarrow \bar{A} = A_M e^{i\alpha}$$

Si vuole dare il nome di **fasore** al **numero complesso in questione** e si vuole puntualizzare che **le operazioni tra sinusoidi diventano operazioni algebriche tra numeri complessi**. La corrispondenza biunivoca appena rilevata gode anche di un'altra interessante proprietà: **ad una combinazione lineare di grandezze sinusoidali corrisponde la stessa combinazione lineare dei fasori**; ovvero:

$$k \cdot a(t) + h \cdot b(t) = d(t) \Leftrightarrow k \cdot a_{\mathbb{C}}(t) + h \cdot b_{\mathbb{C}}(t) = d_{\mathbb{C}}(t) \Leftrightarrow k \cdot \bar{A} + h \cdot \bar{B} = \bar{D}$$

Infine, la **derivata temporale di un vettore rotante**:

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbb{C}}(t) = i\omega A_M e^{i(\omega t + \alpha)} = i\omega \bar{A} e^{i\omega t}$$

Essendo, in ultima analisi, un'operazione di combinazione lineare tra vettori rotanti, può essere messa in corrispondenza biunivoca con il fasore:

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbb{C}}(t) \Leftrightarrow i\omega \bar{A}$$

E quindi:

$$\frac{d}{dt} a(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} a_{\mathbb{C}}(t) \Leftrightarrow i\omega \bar{A}$$

In questo modo **all'operazione di derivata nell'insieme di funzioni sinusoidali corrisponde l'operazione di prodotto per il numero complesso  $i\omega$  nell'insieme di fasori**. Da quello che si è appena mostrato, si è in grado di sostituire un'**equazione differenziale di sinusoidi in un'**equazione algebrica nell'insieme di fasori****, che risulta un oggetto decisamente più semplice da manipolare.

Questa regola di derivazione permette di scrivere le **caratteristiche dinamiche dei bipoli a memoria come delle caratteristiche statiche** che collegano fra loro non più funzioni sinusoidali del tempo ma i fasori che le rappresentano. Il criterio con cui è possibile questa fondamentale trasformazione prevede che **la caratteristica di ciascuno dei tre bipoli fondamentali possa essere scritta fra i fasori rappresentativi della tensione e della corrente di ciascun bipolo** e che sia sempre nella forma:

$$\bar{V} = \pm \dot{Z} \bar{I}$$

Dove **il segno dipende dalla convenzione effettuata** (+ utilizzatore e - generatore),  $\bar{V}$  e  $\bar{I}$  sono i fasori rappresentativi della tensione e della corrente del bipolo e dove  **$\dot{Z}$  è un numero complesso caratteristico per ogni bipolo**; in particolare:

<b>Resistore</b>	$\dot{Z} = R$
<b>Induttore</b>	$\dot{Z} = i\omega L$
<b>Condensatore</b>	$\dot{Z} = -\frac{i}{\omega C}$

Negli ultimi due casi  **$\dot{Z}$  è un numero immaginario**, mentre nel primo caso è un **numero reale** ma è **sempre un numero complesso espresso in forma algebrica**; la differenza elencata è il motivo per cui **la caratteristica lineare non traspare nel campo reale per l'induttore e il condensatore ma per il resistore si**.

$\dot{Z}$  viene detta **impedenza** e, come si può intuire dalla generalizzazione della caratteristica, ha le **dimensioni di una resistenza** ed è **misurata in ohm**; questa proprietà permette di **unificare**, solo in campo complesso, **ogni bipolo fondamentale come una resistenza**. È possibile rilevare delle ulteriori caratteristiche a partire dalle tre impedenze, la prima coinvolge la resistenza  $R$  che è indipendente dalla pulsazione  $\omega$ , mentre si può individuare la quantità reale:

$$X_L = \omega L$$

Come **reattanza induttiva**, dipendente in maniera lineare dall'induttanza e dalla pulsazione, e come **reattanza capacitiva** la quantità reale:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Che dipende in maniera inversamente proporzionale dalla capacità e dalla pulsazione. Dal modo in cui le impedenze dipendono dalla pulsazione è possibile fare una **classificazione**:

- **Reattanza induttiva**, dipende linearmente quindi a frequenze basse tende allo zero e l'induttore tende a comportarsi come un cortocircuito, mentre come un circuito aperto per frequenze alte;
- **Reattanza capacitiva**, dipende in maniera inversamente proporzionale quindi a frequenze basse tende all'infinito e il condensatore tende a comportarsi come un circuito aperto, mentre come un cortocircuito per frequenze alte.

	Basse frequenze	Alte frequenze
Induttore	Cortocircuito	Circuito aperto
Condensatore	Circuito aperto	Cortocircuito

Una volta chiarito come un bipolo viene rappresentato in corrente alternata, sia mostrato come si adatta la sua caratteristica. Supponendo che su tutti i bipoli sia fatta la convenzione dell'utilizzatore, **si studi l'andamento temporale quando questi dispositivi sono alimentati da una corrente sinusoidale del tipo:**

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

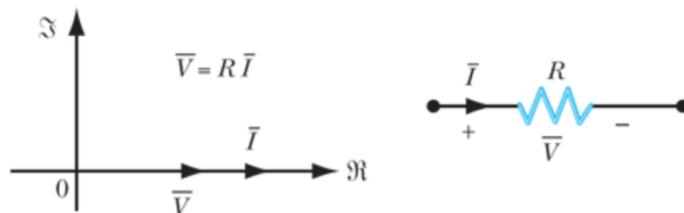
Che può essere rappresentata dal fasore complesso a fase nulla:

$$\bar{I} = I_0$$

Per il **resistore** risulta:

$$\bar{V} = R\bar{I} = RI_0$$

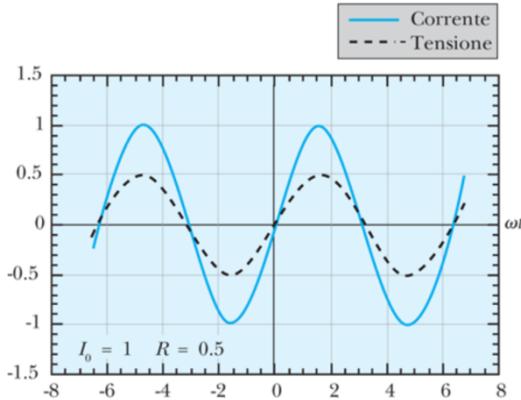
I due fasori,  $\bar{V}$  e  $\bar{I}$ , hanno entrambi fase nulla e si rappresentano come due vettori paralleli e diretti nella stessa direzione:



In forma sinusoidale, la tensione è:

$$v(t) = RI_0 \sin(\omega t)$$

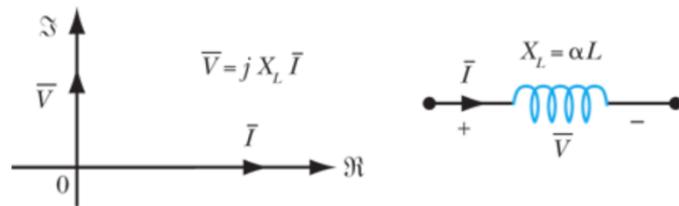
Comparando le due grandezze sinusoidali menzionate finora, si può notare come siano rappresentate da **sinusoidi sincrone**, cioè sinusoidi che assumono i valori di massimo e di minimo nelle stesse ascisse:



Per l'induttore risulta:

$$\bar{V} = i\omega L \cdot \bar{I} = iX_L \bar{I}$$

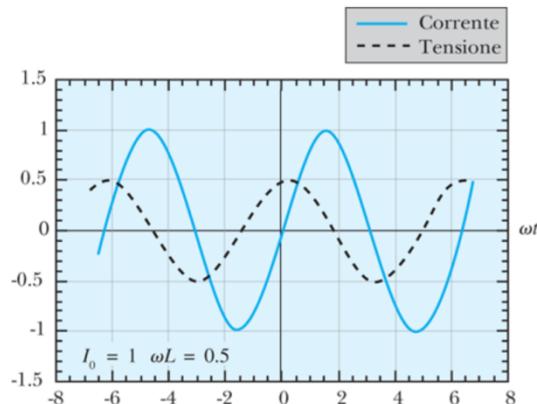
I due fasori,  $\bar{V}$  e  $\bar{I}$ , sono rappresentati come due vettori ortogonali e orientati di un angolo positivo  $\pi/2$ :



In maniera del tutto equivalente si può dire che le **due grandezze sono in quadratura**, oppure che **la corrente è in ritardo di  $\pi/2$  sulla tensione**. In forma sinusoidale la tensione:

$$v(t) = \omega L I_0 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

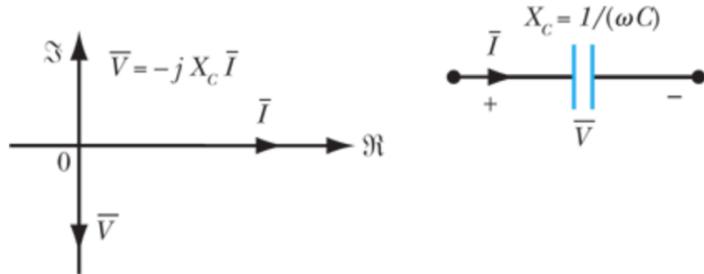
Il cui andamento nel tempo (in relazione alla corrente) è:



Per il **condensatore** risulta:

$$\bar{V} = -\frac{i}{\omega C} \cdot \bar{I} = -iX_C \bar{I}$$

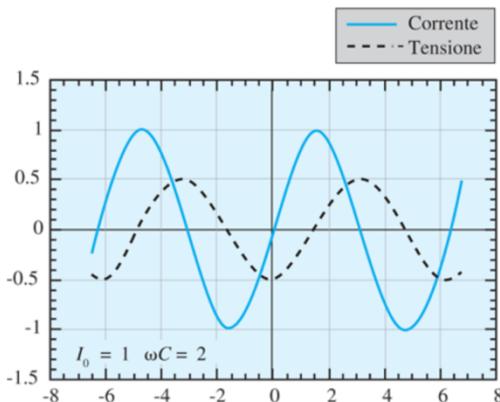
I due fasori,  $\bar{V}$  e  $\bar{I}$ , sono rappresentati come due vettori ortogonali e orientati di un angolo negativo  $\pi/2$ :



In maniera del tutto equivalente si può dire che le **due grandezze sono in quadratura**, oppure che **la tensione è in ritardo di  $\pi/2$  sulla corrente**. In forma sinusoidale la tensione:

$$v(t) = \frac{1}{\omega C} I_0 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il cui andamento nel tempo (in relazione alla corrente) è:



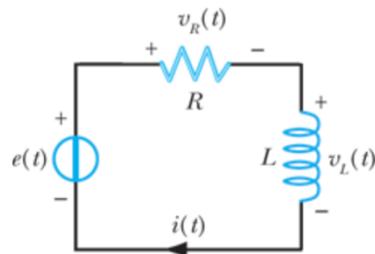
Risolvere “a mano” una rete in regime sinusoidale non è un’operazione difficile, soprattutto dopo aver mostrato le tecniche che permettono di evitare il passaggio per le funzioni sinusoidali; in ultima analisi, si tratta di ripercorrere passo dopo passo le stesse vie che si seguono in regime stazionario, con le sole differenze:

1. **Ciascuna incognita nella rete è rappresentata da un numero complesso non variabile nel tempo;**
2. **Le LK vanno scritte allo stesso modo di come sono state definite in regime stazionario**, a patto che vi si inseriscano i **numeri complessi** rappresentativi delle correnti e delle tensioni rispettive;
3. **La caratteristica di ciascun bipolo ideale va scritta**, con la convenzione dell’utilizzatore, **nella forma statica  $\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$** ;
4. **La caratteristica di un generatore sinusoidale di tensione è del tipo  $\bar{V} = \bar{E}$**  (con  $\bar{E}$  numero complesso noto), mentre quella di un **generatore sinusoidale di corrente è del tipo  $\bar{I} = \bar{J}$**  (con  $\bar{I}$  numero complesso noto).

**A parte ciò, nulla cambia** rispetto alla risoluzione di una rete in regime stazionario.

## LE IMPEDENZE COMPLESSE E I CIRCUITI RLC

Nel circuito mostrato in figura, la relazione risolvente è:



$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + i\omega L}$$

Essa mette in evidenza il fatto che **la tensione complessa  $\bar{E}$  agisce sull'impedenza complessa**:

$$\dot{Z} = R + i\omega L$$

Che, a differenza delle impedenze finora incontrate, è **un numero complesso dotato sia di parte reale che di parte immaginaria**. Il risultato non deve sorprendere, dal momento in cui il generatore vede **un'impedenza che è pari alla somma delle impedenze che rappresentano il resistore e l'induttore**, i quali sono **in serie perché percorsi dalla stessa corrente**; ciò significa che, in continuità con i circuiti in regime stazionario, **due impedenze in serie possono essere sostituite con un'impedenza equivalente pari alla somma delle impedenze originarie**:



$$\dot{Z}_e = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

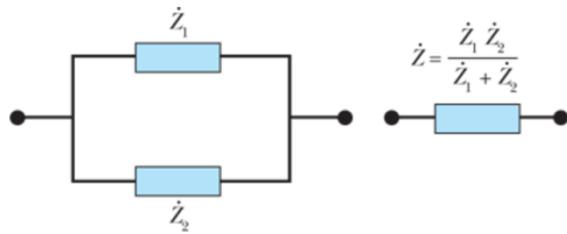
Estendendo il concetto a N impedenze:

$$\dot{Z}_e = \sum_{k=1}^N \dot{Z}_k$$

**Lo stesso discorso può essere esteso alle impedenze in parallelo**, definita l'**ammettenza** come **reciproco dell'impedenza**:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

Si può affermare che **due induttanze in parallelo possono essere rappresentate come un'ammettenza equivalente pari alla somma delle ammettenze associate a tali impedenze**:



$$\dot{Y}_e = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}$$

Estendendo il concetto a N impedenze:

$$\dot{Y}_e = \sum_{k=1}^N \dot{Y}_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\dot{Z}_k}$$

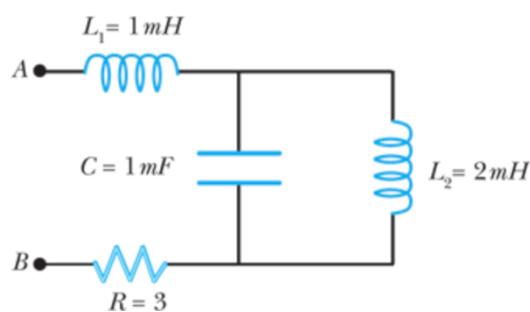
In genere, si può rappresentare l'impedenza (in gergo carico) in forma algebrica nei seguenti modi:

- $\dot{Z} = R$  per un **carico ohmico**;
- $\dot{Z} = R + iX$  per un **carico ohmico – induttivo**;
- $\dot{Z} = R - iX$  per un **carico ohmico – capacitivo**.

E in forma polare  $\dot{Z} = [Z, \varphi]$  con:

- $\varphi = 0$  per un **carico ohmico**;
- $\varphi > 0$  per un **carico ohmico – induttivo**;
- $\varphi < 0$  per un **carico ohmico – capacitivo**.

Questi criteri regolano anche quello che in gergo è chiamato **carattere dell'impedenza**; ad esempio, sia considerata la rete:



Con reattanze:

$$X_1 = \omega L_1 = 1 \wedge X_2 = \omega L_2 = 2 \wedge X_C = \frac{1}{\omega C} = 1$$

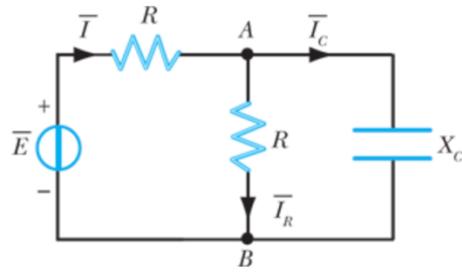
Eseguendo il parallelo:

$$\dot{Z} = \frac{iX_2(-iX_C)}{iX_2 - iX_C} = -2i$$

Per quanto riguarda la serie con la resistenza  $R$  e la reattanza  $X_1$ :

$$\dot{Z}_{AB} = R + iX_1 + \dot{Z} = 3 - j$$

In questo caso, l'impedenza  $\dot{Z}_{AB}$  ha una parte immaginaria negativa e, pertanto, un carattere **ohmico – capacitivo**. In maniera del tutto analoga a quanto mostrato per le impedenze in serie e in parallelo, anche per le regole del partitore di tensione e di corrente si procede in continuità con il regime stazionario; ad esempio, in questa rete:



La tensione  $\bar{V}_{AB}$  può essere calcolata con la regola del partitore di tensione:

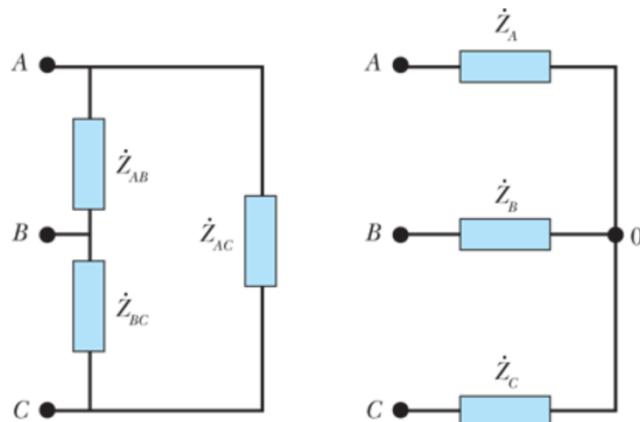
$$\bar{V}_{AB} = \bar{E} \frac{\dot{Z}}{R + \dot{Z}}$$

Mentre le correnti  $\bar{I}_C$  e  $\bar{I}_R$  con la regola del partitore di corrente:

$$\bar{I}_C = \bar{I} \frac{iX_C}{R - iX_C}$$

$$\bar{I}_R = \bar{I} \frac{R}{R - iX_C}$$

Infine, valgono in regime sinusoidale così come in regime stazionario le regole di trasformazione triangolo – stella e stella – triangolo per le impedenze:



$$\dot{Z}_A = \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{AC}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{AC}}$$

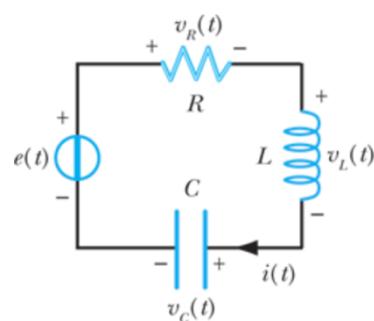
$$\begin{aligned}\dot{Z}_B &= \frac{\dot{Z}_{AB}\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{AC}} \\ \dot{Z}_C &= \frac{\dot{Z}_{AC}\dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{AC}} \\ \dot{Z}_{AB} &= \frac{\dot{Z}_A\dot{Z}_B + \dot{Z}_B\dot{Z}_C + \dot{Z}_A\dot{Z}_C}{\dot{Z}_C} \\ \dot{Z}_{BC} &= \frac{\dot{Z}_A\dot{Z}_B + \dot{Z}_B\dot{Z}_C + \dot{Z}_A\dot{Z}_C}{\dot{Z}_A} \\ \dot{Z}_{AC} &= \frac{\dot{Z}_A\dot{Z}_B + \dot{Z}_B\dot{Z}_C + \dot{Z}_A\dot{Z}_C}{\dot{Z}_B}\end{aligned}$$

Nel caso in cui le tre impedenze che costituiscono il collegamento abbiano lo stesso valore di impedenza:

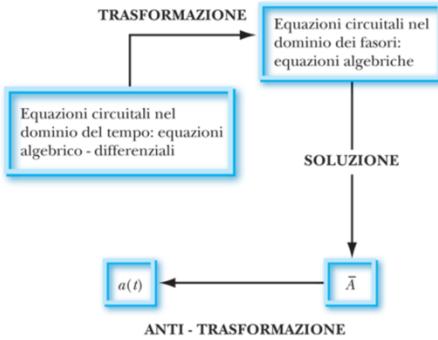
$$\dot{Z}_Y = \frac{1}{3}\dot{Z}_\Delta$$

Queste formule conducono ad un **fenomeno diegetico per il regime sinusoidale** che può apparire strano e imbarazzante: applicando le trasformazioni sopra elencate e fatta la convenzione dell'utilizzatore, **può capitare che la parte reale dell'impedenza equivalente** (che è stata associata ad un valore di resistenza) **possa essere negativa**, quando nella sua definizione è stata supposta positiva. In realtà **il problema non dovrebbe turbare più di tanto**, dal momento in cui le trasformazioni dicono che i **due elementi a tre morsetti**, quello a stella e quello a triangolo, **chiusi in una scatola non sono distinguibili per mezzo di esperimenti eseguiti all'esterno**; d'altra parte, in questa sede si sfruttano **resistori a resistenze negative**, i quali (in ultima analisi) **si comportano come un generatore**.

Nelle prossime pagine verrà presentato un circuito particolarmente ricorrente nello studio della risoluzione delle reti, il cosiddetto **circuito RLC**, composto da **una resistenza, un'induttanza e un condensatore in serie ad un generatore di tensione o in parallelo ad un generatore di corrente**:



In regime sinusoidale questo tipo di circuito viene risolto **sfruttando le due trasformazioni fasoriali** introdotte nei precedenti capitoli:



Supponendo che il generatore eroghi la tensione:

$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha)$$

Rappresentata dal seguente fasore:

$$\bar{E} = [E_M, \alpha] = E_M (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Si scrive la LKT relativa all'unica maglia della rete:

$$-e(t) + v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

Indicando con  $\bar{I}$  il fasore che rappresenta la corrente sinusoidale, introducendo le caratteristiche dei bipoli si può rilevare la seguente equazione:

$$-\bar{E} + R\bar{I} + iX_L\bar{I} - iX_C\bar{I} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + i(X_L - X_C)} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}}$$

Dove l'impedenza vista dal generatore:

$$\dot{Z} = R + i(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Con:

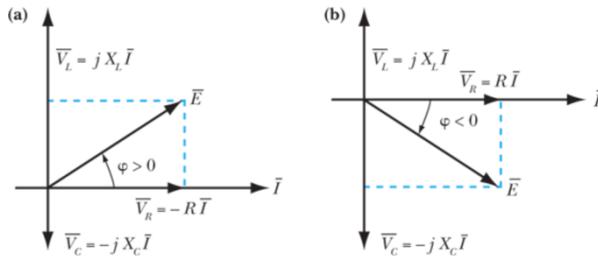
$$X_L = \omega L \wedge X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$$

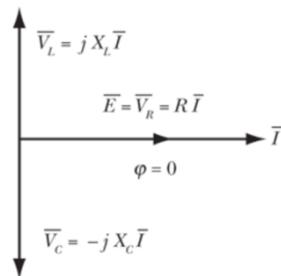
Se l'argomento dell'arcotangente è positivo allora l'angolo  $\varphi$  è positivo e viceversa, quindi:

$$X_L > X_C \Rightarrow \varphi > 0 \vee X_L < X_C \Rightarrow \varphi < 0$$

Il **diagramma vettoriale del circuito RLC serie** è molto semplice: si parte con la **rappresentazione del vettore corrente** per poi passare a quello della **tensione del generatore**, ottenuto **sommando i vettori caduta di tensione resistiva** ( $R\bar{I}$ , in fase con la corrente), **di quella induttiva** ( $iX_L\bar{I}$ , sfasata di  $\pi/2$  in anticipo) e **quella capacitiva** ( $-iX_C\bar{I}$ , sfasata di  $\pi/2$  in ritardo).



Come mostrato in figura, in base al segno della differenza tra le cadute di tensione induttiva e capacitiva l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente è positivo o negativo, ovvero ci si trova davanti un carico ohmico – induttivo o ohmico – capacitivo. L'unico caso che resta da analizzare è quello in cui  $X_L = X_C$ ; in tal caso, il diagramma vettoriale assume la forma seguente:



**Al generatore il carico appare unicamente resistivo**, visto che le cadute di tensione induttiva e capacitiva si compensano reciprocamente e l'angolo di sfasamento con la corrente è nullo. Ne consegue che **l'impedenza si riduce alla sola resistenza**, un numero reale.

Quanto detto finora per il circuito RLC serie può essere tradotto per la controparte in parallelo, solo che ci si troverà davanti un generatore di corrente del quale va valutata la tensione  $v(t)$  ai capi.

Per finire il discorso è utile approfondire **gli strumenti usati per misurare le quantità interessate in un circuito** che agisce in regime sinusoidale. Essi **si usano allo stesso modo in cui sono stati mostrati per il regime stazionario**, dal momento in cui la **topologia e le regole di risoluzione sono invariate**; ciò che cambia è il **valore misurato**, perché non si va più a misurare su quantità costanti ma su leggi variabili nel tempo. Ne consegue che **il valore numerico mostrato** sul display o sulla scala metrica dello strumento non sarà la rappresentazione della grandezza in sé e per sé, bensì il suo **valore efficace**.

Questa proprietà delle misure in regime sinusoidale introduce una possibile ambiguità: si potrebbero **misurare delle correnti** (o delle tensioni) che sulla carta rispettano la LKC (o la LKT), **le si potrebbero misurare** (ottenendo i valori efficaci) e **si potrebbe fare una verifica applicando a tali misure le LK**, notando che esse **non sono più verificate**; il motivo risiede nel fatto che **taли leggi valgono sulle funzioni sinusoidali** che descrivono la grandezza, non sul loro valore efficace.

Un'ultima interessante proprietà, che distingue gli strumenti di misura in regime sinusoidale da quelli in regime stazionario è la **polarità delle grandezze**; infatti, si può notare che **inserendo un amperometro** (così come qualsiasi altro strumento di misura adoperato in regime stazionario) **in una rete non sia più necessario indicare il segno + o – sullo strumento** perché **la corrente cambia continuamente polarità e perché lo strumento fornirà sempre il valore efficace**, che è una quantità a priori positiva.

## POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

Nel titolo del capitolo è stato usato **il plurale per il termine potenza** perché, a differenza del regime stazionario, in regime sinusoidale si possono definire ben cinque tipologie di potenza; per poterne parlare, però, è necessario partire dalla **definizione di potenza istantanea**, ovvero il prodotto tra tensione e corrente in funzione del tempo:

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Dove **tensione e corrente sono funzioni sinusoidali del tempo** che agiscono alla **stessa pulsazione e sfasate di un angolo**  $\varphi = \alpha - \beta$ :

$$v(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) \wedge i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta)$$

Che in termini di fasori:

$$\bar{V} = [V, \alpha] \wedge \bar{I} = [I, \beta]$$

Supponendo che sulla tensione agisca un'impedenza  $\dot{Z}$  tale che:

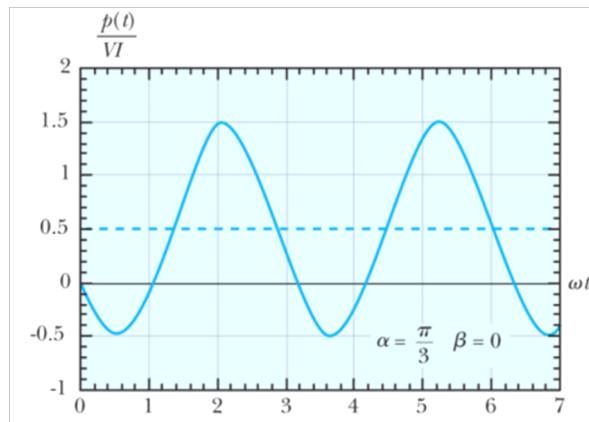
$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \left[ \frac{V}{I}, \alpha - \beta \right] = \left[ \frac{V}{I}, \varphi \right]$$

Si può notare come la fase dell'impedenza coincida con lo sfasamento delle due grandezze. La **potenza istantanea** è:

$$p(t) = 2VI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)$$

Sapendo che  $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ :

$$p(t) = VI[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)]$$

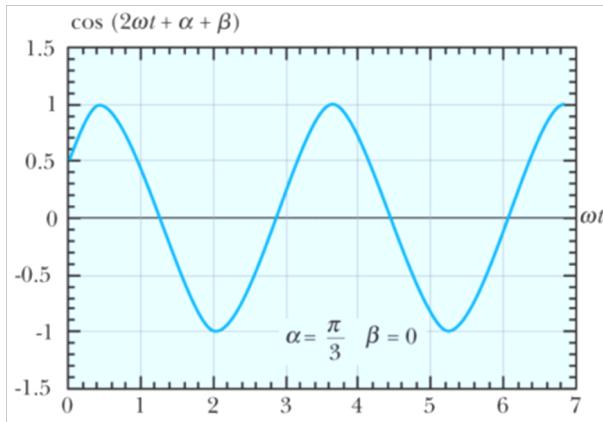


La potenza istantanea, quindi, sarà **composta da un termine oscillante** ( $VI \cdot \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$ ) con **una pulsazione doppia rispetto a quella della rete**, e di conseguenza **con un periodo  $T^*$  dimezzato**, traslato verso l'alto da un termine costante ( $VI \cdot \cos \varphi$ ).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \wedge T^* = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{1}{2}T$$

**Il termine oscillante ha valor medio nullo;** infatti, considerato da solo in un periodo  $T$ , esso compie due oscillazioni complete, in cui le semionde positive sono controbilanciate dalle semionde negative. Ne consegue che:

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \alpha + \beta) dt = 0$$



Il secondo tipo di potenza viene definita a partire da queste considerazioni, in quanto valor medio della potenza istantanea, ed è definita come **potenza attiva ( $P$ )**:

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{VI}{T} \int_0^T \cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha + \beta) dt = \frac{VI}{T} \int_0^T \cos \varphi dt = VI \cos \varphi$$

In letteratura, questa formula prende il nome di **Formula di Ferraris**. Si noti come **il termine oscillante non interviene minimamente sul valore della potenza attiva**, che è **influenzata solo dal periodo, dai valori efficaci e dallo sfasamento**; inoltre, proprio lo sfasamento permette di **garantire la sua positività**, dal momento in cui è **un angolo compreso tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$** , dove il coseno (detto fattore di potenza) è sempre positivo.

La potenza media permette di calcolare agevolmente il valore dell'energia assorbita dalla rete in un intervallo di tempo pari proprio al periodo  $T$ :

$$U = PT$$

Infine, **ci si aspetta che per la potenza media** (così come per l'energia) **valga un teorema di conservazione**: la potenza attiva fornita dai generatori deve essere uguale a quella usata dagli utilizzatori.

Il terzo tipo di potenza in regime sinusoidale è detta **potenza reattiva ( $Q$ )**:

$$Q = VI \cdot \sin \varphi$$

Sebbene per la potenza attiva si usi il watt, **per la potenza reattiva si usa il voltampere – reattivo ( $VAr$ )**; in realtà questo **non è altro che un modo alternativo di indicare la potenza e per distinguere le due**. Si noti bene che **il seno nell'intervallo tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  può assumere valori negativi**, corrispondendo in una potenza reattiva potenzialmente sia positiva che negativa.

Come la potenza attiva, **anche la potenza reattiva si conserva**, una proprietà interessante per la risoluzione delle reti; ad esempio, due carichi in parallelo di cui sono note le potenze attive e reattive

possono essere riassunti con un unico carico equivalente le cui potenze attive e reattive sono la somma algebrica dei due carichi originari. **Una potenza reattiva non nulla in una rete è indice della presenza di energie immagazzinate associate al campo elettrico o al campo magnetico.**

La **potenza reattiva non è una quantità fisica**, non esiste se non come modello matematico; infatti, più è alta e più è alto il massimo del fattore di potenza  $\cos \varphi$ . Nello studio delle potenze in regime sinusoidale ha uno spazio perché è una quantità che si conserva, proprietà utile e spesso ricercata.

Di seguito sono portati i valori di potenza attiva e di potenza reattiva per i tre bipoli fondamentali:

Bipolo	$\varphi$	Potenza attiva ( $P$ )	Potenza reattiva ( $Q$ )
Resistore	0	$VI$	0
Induttore	$\frac{\pi}{2}$	0	$VI$
Condensatore	$\frac{\pi}{2}$	0	$-VI$

È possibile **valutare potenza attiva e reattiva attraverso un'unica quantità**, detta **potenza complessa ( $\dot{P}$ )** in cui la **parte reale** coincide con la **potenza attiva** e la **parte immaginaria** con la **potenza reattiva**:

$$\dot{P} = P + iQ = VI(\cos \varphi + i \sin \varphi) = [VI, \varphi] = \bar{V}\bar{I}^*$$

Ricordando che  $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$ , si possono ottenere **altre due formulazioni per la potenza complessa**:

$$\dot{P} = \dot{Z}\bar{I}\bar{I}^* = \dot{Z}I^2$$

$$\dot{P} = \frac{\bar{V}\bar{V}^*}{\dot{Z}^*} = \frac{V^2}{\dot{Z}^*}$$

Inoltre, poiché  $\dot{Z} = R \pm iX$ , si possono ottenere **due formule comode per il calcolo delle potenze attiva e reattiva**, considerandole come parti reale e immaginaria della potenza complessa:

$$\begin{cases} Re(\dot{P}) = Re(\dot{Z}I^2) = P = RI^2 \\ Im(\dot{P}) = Im(\dot{Z}I^2) = Q = \pm XI^2 \end{cases}$$

Dal momento in cui le parti reale e immaginaria della potenza complessa sono quantità che si conservano, si può concludere che **anche quest'ultimo tipo di potenza si conserva**; pertanto, le potenze complesse erogate dai generatori sono pari a quelle assorbite dai carichi.

A partire dalla potenza complessa, si vuole ricavare l'impedenza:

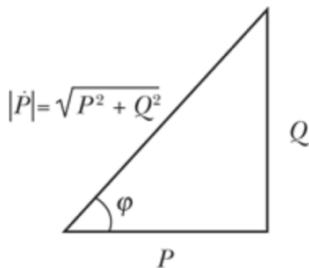
$$\dot{Z} = \frac{P}{I^2} + i \frac{Q}{I^2} = \frac{V^2}{P^2 + Q^2} (P + iQ) = \frac{V^2}{P^2 + Q^2} \dot{P}$$

Le precedenti formule mostrano che, anche nel calcolo delle potenze, **tra corrente continua e corrente alternata esiste uno stretto legame**, che permette di comprendere e interpretare al meglio i fenomeni fisici che si stanno studiando in queste pagine. Si supponga che **in un resistore di resistenza  $R$  circoli una corrente continua di valore  $I$ ; la potenza assorbita e dissipata per effetto Joule dal resistore è  $P = RI$** , tuttavia se lo stesso resistore è **attraversato da una corrente alternata il cui valore efficace è  $I$ , la potenza non cambia espressione**. Ciò permette di intuire che **il valore efficace di corrente alternata non è altro che il valore di corrente continua che, circolando nello stesso resistore, assorbe la stessa potenza della corrente alternata in questione**.

Il quinto tipo di potenza è detta **potenza apparente** e non è altro che il **modulo della potenza complessa**, che permette di mettere in un'ulteriore relazione le tre potenze precedentemente definite:

$$|P| = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI$$

Tale relazione può essere **rappresentata anche graficamente**, considerando le potenze attiva e reattiva come cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è il **modulo della potenza complessa** (la potenza apparente) e l'angolo che insiste è lo **sfasamento  $\varphi$** :



In generale, **le potenze apparenti non si conservano**.

Di seguito viene mostrata un'interessante **proprietà della potenza reattiva** che verrà sfruttata di seguito. Sia considerato un condensatore, la cui potenza reattiva è:

$$Q_C = -\frac{V^2}{X_C} = -\omega CV^2$$

Il fattore  **$CV^2$  corrisponde alla massima energia elettrica immagazzinabile dal condensatore**:

$$U_C(t) = \frac{1}{2}C \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2}C \cdot 2V^2 \sin^2(\omega t + \alpha) \Rightarrow U_{C-MAX} = CV^2$$

Per cui:

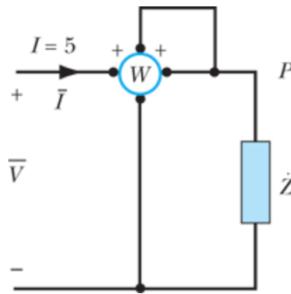
$$Q_C = -\omega U_{C-MAX}$$

Questa relazione mostra che **la potenza reattiva assorbita da un condensatore è proporzionale al massimo valore di energia che esso può immagazzinare**. Analogamente per un induttore:

$$Q_L = \omega LI^2 = \omega U_{L-MAX}$$

Ovvero, **la potenza reattiva assorbita da un induttore è proporzionale al massimo valore di energia che esso può immagazzinare**.

Per **misurare la potenza attiva  $P$**  si impiega l'uso di un **wattmetro**; tuttavia, è stato precedentemente detto che **i wattmetri misurano la potenza istantanea**, come si può coniugare questa discontinuità? Semplicemente, per motivi di realizzazione, il dispositivo non riesce a seguire le variazioni istantanee di  $p(t)$  e, pertanto, la misura si attesta sul suo valor medio, la **potenza attiva**.

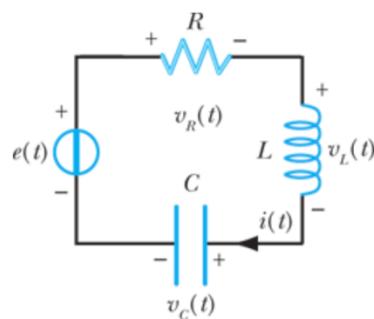


Spesso, in corrente alternata viene nominato il **Teorema di Tellegen come Teorema di Boucherot**, in onore dell'omonimo ingegnere elettrotecnico francese. Si afferma che **la somma delle potenze attive (o reattive) virtuali erogate dai generatori in un circuito lineare è uguale alla somma delle potenze attive (o reattive) virtuali assorbite da tutti gli altri bipoli**; questa forma **puntualizza che le due grandezze (potenza attiva e reattiva) sono completamente indipendenti**, giustificando anche l'uso della diversa unità di misura.

$$\sum_{k=1}^n \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \bar{0}$$

## LA RISONANZA NEI CIRCUITI ELETTRICI

Un circuito agisce in condizioni risonanti quando esiste un accordo tra la frequenza che impongono i generatori e quella caratteristica del circuito; la risonanza non è un fenomeno esclusivo dei circuiti elettrici, basti pensare a delle persone che camminano con lo stesso passo su un ponte, ma in questa sede verrà approfondito il suo impiego nelle reti elettriche e le varie applicazioni industriali che ne fanno uso.



Sia considerato un **circuito RLC serie** come quello in figura; in precedenza è stato detto che **quando la caduta di tensione induttiva e capacitiva si bilanciano**, agli occhi del generatore (che agisce in regime sinusoidale) **il circuito è puramente ohmico**. In queste condizioni **la rete deve operare ad una pulsazione** (in gergo si usa frequenza come sinonimo, in realtà le due quantità sono direttamente proporzionali e le si può usare equivalentemente ma non vanno trattate come la stessa cosa):

$$X_L = X_C \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Che corrisponde ad una **frequenza**:

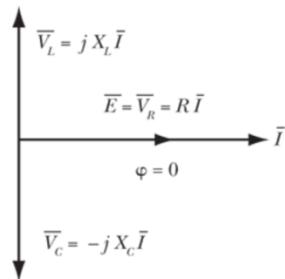
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

**Un circuito di questo tipo è risonante**, dal momento in cui la tensione erogata dal generatore (che in generale è la somma delle tre tensioni dei bipoli) si riduce alla sola tensione del resistore perché le altre si controbilanciano; quindi, è possibile concludere che l'impedenza diventa un numero complesso privo di parte immaginaria:

$$\dot{Z} = R + i(X_L - X_C) \Leftrightarrow \text{Im}(\dot{Z}) = 0$$

In tutte le considerazioni fatte finora, e anche in quelle che si faranno di seguito, bisogna tenere presente che **si è assunto essere a regime** (sinusoidale); ciò significa che **in un istante di tempo lontano**, di cui si sono perdute tracce tangibili, **il generatore è stato collegato alla rete tramite un interruttore**. Durante il transitorio, è noto che **il generatore ha fornito al complesso dei due elementi a memoria una certa quantità di energia**, per il condensatore direttamente proporzionale al quadrato della tensione ai suoi capi e per l'induttore al quadrato della corrente che lo attraversa; allora, se tensione e corrente sono in quadratura (come in questo caso), **nel momento in cui l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore è massima, quella magnetica immagazzinata nell'induttore è nulla e viceversa**. Segue questo andamento il successivo scambio periodico di energie tra campo magnetico e campo elettrico; inoltre, se le **energie massime immagazzinate nei due bipoli sono uguali**, a regime **tale scambio esclude il generatore**, che dovrà occuparsi solo di fornire la potenza dissipata nel resistore.

Negli impianti di potenza fenomeni di questo tipo andrebbero evitati, dal momento in cui possono portare **pericolose sovratensioni** (nel caso di RLC serie) o **sovracorrenti** (nel caso di RLC parallelo) e perché **i due bipoli a memoria immagazzinano energia che il generatore non vede**; osservando lo schema fasoriale di un circuito RLC serie in cui si verificano le condizioni di risonanza è facile capire il perché:



Le tensioni dell'induttore e del condensatore possono diventare, per determinati valori della rete, **enormemente più grandi della tensione di alimentazione** pur non apparendo all'esterno.

Il fenomeno della risonanza può essere visto anche da un altro punto di vista, tenendo conto che è **caratteristico di circuiti con la capacità di oscillare su frequenze proprie**; per comprendere meglio, sia fatto l'esempio di una rete elettrica in cui è inserito un generatore di tensione sinusoidale a frequenza variabile:

$$e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

Si supponga che sul generatore sia installata una sorta di manopola, in grado di cambiare la frequenza (e quindi la pulsazione) della tensione che viene erogata. Introducendo il numero complesso che rappresenta l'impedenza, si può notare meglio questa dipendenza dalla pulsazione:

$$\dot{Z} = R + i(X_L - X_C) = \left[ \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \right] = [Z(\omega), \varphi(\omega)]$$

**Per ciascuna frequenza, è possibile calcolare il valore del fasore della corrente:**

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + i(X_L - X_C)} = \frac{\bar{E}}{[Z(\omega), \varphi(\omega)]} = [I(\omega), -\varphi(\omega)]$$

Dove  $\bar{E}$  è il fasore di modulo  $E$  che rappresenta nel campo complesso la tensione sinusoidale erogata dal generatore. Per la presenza delle due reattanze, **il modulo della corrente  $I(\omega)$  è una quantità che dipende dalla pulsazione di funzionamento e, dal momento in cui  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ :**

$$X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Da cui il modulo della corrente:

$$I(\omega) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{L}{C} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Si definisce **fattore di qualità (o di merito)** il parametro adimensionale:

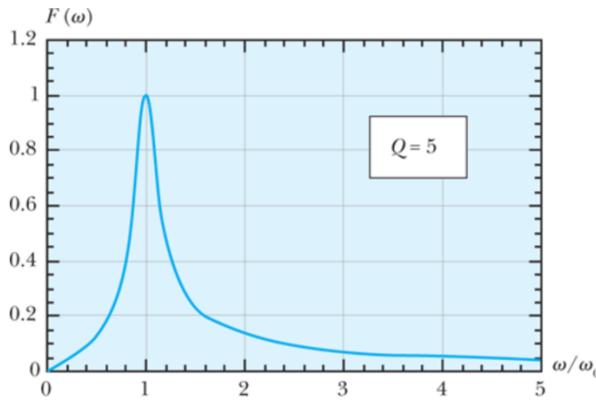
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Per cui

$$I(\omega) = \frac{E}{R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

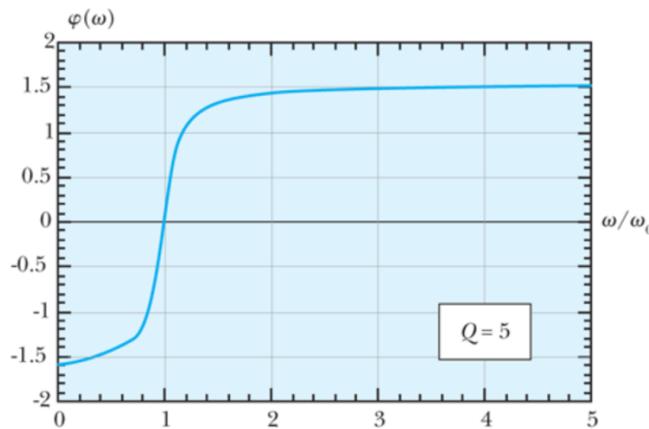
Il **modulo della corrente** può così essere riformulato in una nuova funzione della pulsazione:

$$F(\omega) = \frac{RI(\omega)}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$



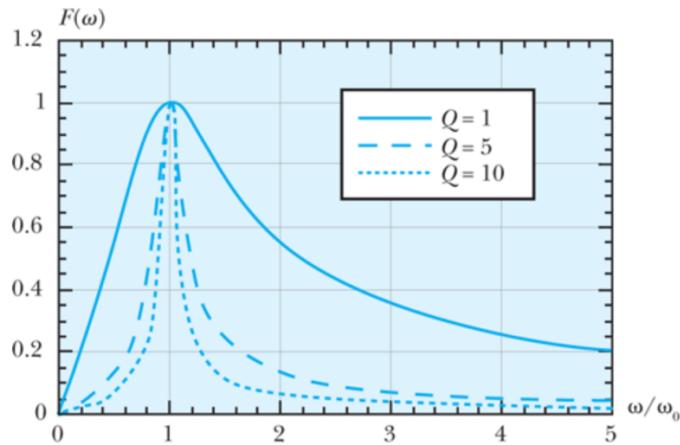
**$F$  è una funzione che rappresenta una quantità adimensionale** proporzionale alla corrente e viene definita come **curva di risonanza**. A basse frequenze, poiché il condensatore si comporta come un circuito aperto (impedenza infinita), nel circuito non circola corrente ( $F(0) = 0$ ), così come per **valori elevati di frequenza** per i quali l'induttore si comporta da circuito aperto ( $F(\infty) = 0$ ); invece, in corrispondenza della **pulsazione di risonanza**, il **modulo della corrente è ad un massimo di  $E/R$** , che corrisponde a  $F(\omega_0) = 1$ . Per una questione di completezza si riporta di seguito anche l'andamento della fase dell'impedenza  $\varphi(\omega)$ :

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

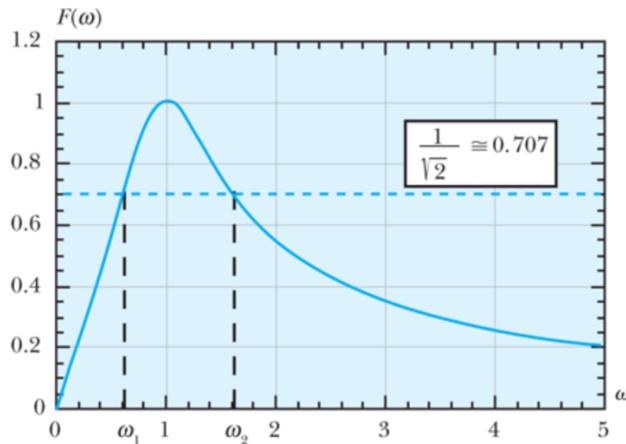


Per **frequenze di valore inferiore a quella di risonanza**, il **circuito RLC** si comporta come una rete a carattere **capacitivo**, l'impedenza relativa al condensatore prevale e la fase assume il valore  $\varphi(\omega) \cong -\pi/2$ ; per **frequenze di valore superiore a quella di risonanza**, il **circuito RLC** si comporta come una rete a carattere **induttivo**, l'impedenza relativa all'induttore prevale e la fase assume il valore  $\varphi(\omega) \cong \pi/2$ . Alla **frequenza di risonanza**, invece, è stato detto che il circuito ha un comportamento puramente **resistivo**, quindi la **fase è nulla**.

Il discorso sulla risonanza diventa più interessante quando si va ad osservare **l'intorno della frequenza di risonanza nella curva di risonanza al variare del fattore di qualità**; infatti, più esso aumenta e più la curva si fa ripida:



**Al crescere del valore del fattore di qualità si accentuano le caratteristiche filtranti del circuito.** In genere un circuito si comporta da filtro quando lascia passare di preferenza un determinato intervallo di frequenze, detto banda, e attenua tutte le altre; prendendo un qualunque valore di  $Q$ , la curva di risonanza assume una determinata inclinazione, consentendo il passaggio di una corrente significativa solo quando alle frequenze  $\omega$  corrispondono valori non nulli di corrente, ovvero in un intorno più o meno largo della frequenza di risonanza, la banda.



$$\Delta f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

La banda  $\Delta f$  è un intervallo di pulsazioni (o di frequenze) entro cui la curva della funzione  $F(\omega)$  si mantiene al di sopra di un prefissato valore di soglia (nell'esempio sopra riportato della banda a 3dB, il valore di soglia è  $F(\omega) = 1/\sqrt{2}$ ). Per un circuito RLC la banda indicata con  $\Delta f$  è data dalla formula:

$$\Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi Q}$$

Dove l'inverso del fattore di qualità è detto fattore di selettività. Questa formula mette in evidenza proprio la relazione tra ripidità della curva e il valore di tale fattore; infatti, all'aumentare di  $Q$  la banda diminuisce perché aumenta l'inclinazione dei fronti di salita e discesa della funzione  $F(\omega)$ .

Finora si è parlato del fattore di qualità senza dargli una giustificazione dal punto di vista fisico; a tal proposito sia considerata la corrente che circola nella rete in condizioni di risonanza:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \sqrt{2} \sin(\omega_0 t)$$

**L'energia assorbita dal resistore** in un intervallo di tempo pari al periodo  $T$ , sfruttando la definizione data di valore efficace, è:

$$U_R = PT = Ri(t)^2 T = \frac{2\pi}{\omega_0} RI^2$$

Mentre **l'energia immagazzinata dall'induttore**:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2 = LI^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Che assume il valore massimo quando  $\sin^2(\omega_0 t) = 1$ :

$$U_{L-MAX} = LI^2$$

Sia considerato, allora, il **rapporto tra il valor massimo di energia assorbito dall'induttore e l'energia assorbita dal resistore in un periodo**:

$$\frac{U_{L-MAX}}{U_R} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Q}{2\pi}$$

Dal momento in cui il massimo valore di energia immagazzinata dal condensatore è uguale a  $U_{L-MAX}$  (si potrebbe dimostrare ma non in questa sede), è possibile concludere che **il fattore di qualità rappresenta il rapporto tra il massimo valore di energia immagazzinata negli elementi a memoria ( $U_{M-MAX}$ ) e l'energia dissipata in un periodo dal resistore, a cui è moltiplicato  $2\pi$** :

$$Q = 2\pi \frac{U_{M-MAX}}{U_R}$$

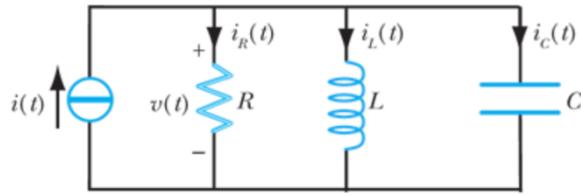
Chiaramente, un **fattore di qualità elevato** implica che **gli elementi a memoria immagazzinano più energia di quanta ne riesca a dissipare il resistore e viceversa**.

Per concludere, si osservi come, **in condizione di risonanza, le potenze reattive ai capi dell'induttore e del condensatore siano proporzionali ai valori massimi di energia immagazzinati** in ciascuno di essi:

$$Q_L = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega U_{L-MAX}$$

$$Q_C = \frac{V_C^2}{X_C} = -\omega C V_C^2 = -\omega U_{C-MAX}$$

**Del tutto equivalente è il comportamento del circuito RLC parallelo**, detto anche circuito antirisonante.



**La corrente erogata dal generatore**, che seguendo la LKC sarebbe la somma delle correnti che circolano nei tre bipoli, **si riduce ad essere la stessa corrente che circola nel resistore**, perché quelle che circolano **nell'induttore e nel condensatore si compensano a vicenda**; queste ultime due si calcolano come **rapporto tra la tensione applicata e la relativa impedenza**. In condizioni di **antirisonanza**, descritte dallo schema fasoriale riportato qui sotto, **la corrente erogata dal generatore è**:

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) \Rightarrow \bar{I} = I$$

Mentre la LKC impone:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

In condizioni di risonanza:

$$\bar{I} = \bar{I}_R \Rightarrow \bar{V} = R\bar{I} = [RI, 0] \Rightarrow v(t) = RI\sqrt{2} \sin(\omega_0 t)$$

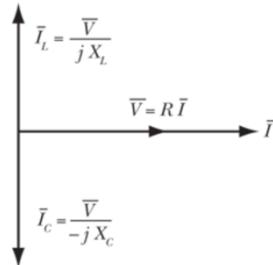
Da cui discende che la pulsazione di risonanza è:

$$\bar{I}_L + \bar{I}_C = 0 \Rightarrow \frac{\bar{V}}{iX_L} - \frac{\bar{V}}{iX_C} = \bar{0} \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Inoltre:

$$\bar{I}_L = -\bar{I}_C = \frac{RI}{i\omega_0 L} = \frac{R\sqrt{LC}}{L} I = \left[ RI \sqrt{\frac{C}{L}}, -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$i_L(t) = RI \sqrt{\frac{2C}{L}} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Si dirà, quindi, che **il circuito è in condizioni di antirisonanza** (in analogia con la risonanza) **quando l'ammettenza diventa un numero complesso privo di parte immaginaria**, dotato solo di parte reale:

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + i \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \Leftrightarrow \text{Im}(\dot{Y}) = 0$$

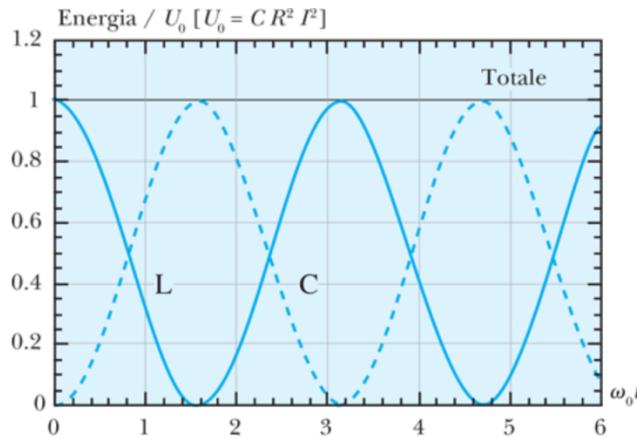
Le relazioni trovate permettono di **calcolare l'energia totale immagazzinata nei due bipoli a memoria:**

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L i_L(t)^2 = \frac{1}{2} L \cdot R^2 I^2 \frac{2C}{L} \cos^2(\omega_0 t) = R^2 I^2 C \cos^2(\omega_0 t) = U_0 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{2} C v_C(t)^2 = \frac{1}{2} C \cdot R^2 I^2 2 \sin^2(\omega_0 t) = R^2 I^2 C \sin^2(\omega_0 t) = U_0 \sin^2(\omega_0 t)$$

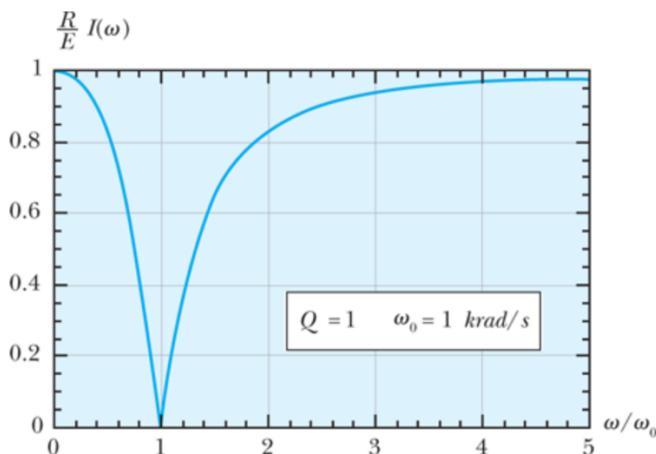
**L'energia totale immagazzinata nella rete è sempre la stessa,** e vale:

$$U(t) = U_L(t) + U_C(t) = U_0 (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = U_0$$



Anche per il circuito **RLC parallelo** può essere costruita una funzione  $F$  proporzionale alla corrente e **analogica alla curva di risonanza** ma, come verrà mostrato, essa **non amplifica** in corrispondenza delle frequenze di risonanza bensì **attenua**:

$$F(\omega) = \frac{RI(\omega)}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_0)^2}}}$$

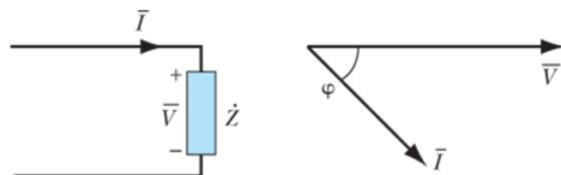


In questa situazione, per frequenze molto basse e frequenze molto alte, la corrente viene moltiplicato per un fattore approssimabile ad uno, mentre in un intorno della frequenza di antirisonanza esso è approssimabile a zero; il comportamento agli estremi è dovuto al fatto che a basse frequenze il condensatore si comporta come circuito aperto, l'induttore come cortocircuito e viceversa.

## RIFASAMENTO E MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA

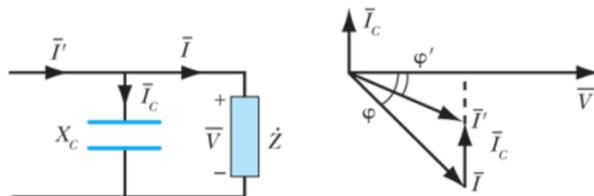
Uno dei pregi maggiori dell'energia elettrica è la sua incredibile trasportabilità: è possibile muovere e spostare energia elettrica dalle sedi di generazione alle sedi di utilizzo senza apprezzabili perdite; in particolare si stima che l'energia persa per dissipazione in calore lungo tratte anche abbastanza lunghe si attesti sul 12% di quella prodotta. A tal fine è importante impegnare correnti di valore efficace più basso possibile, in quanto portatrici di perdite ohmiche più piccole possibili; per rifasamento si intende quell'operazione con la quale si abbassa il valore efficace di corrente pur lasciando invariata la tensione sul carico e la potenza attiva da esso assorbita.

Un generico utilizzatore di tipo ohmico – induttivo, di impedenza  $\dot{Z}$ , è un dispositivo del tipo:



Per rifasare la corrente di linea  $\bar{I}$  è possibile aggiungere una corrente  $\bar{I}_c$  che la riduca al valore  $\bar{I}'$ , con la necessità di essere in anticipo di  $\pi/2$  rispetto alla tensione  $\bar{V}$ ; un comportamento di questo tipo può essere ottenuto collegando il carico in parallelo ad un condensatore, in modo che:

$$\bar{I}' = \bar{I} + i\omega C \bar{V}$$



Supponendo che la tensione  $\bar{V}$  sia concorde all'asse reale, l'equazione complessa scritta si riduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} I' \cos \varphi' = I \cos \varphi \\ -I' \sin \varphi' = -I \sin \varphi + \omega C V \end{cases}$$

La prima relazione suggerisce che si sta lavorando a parità di potenza attiva assorbita dal carico; infatti, moltiplicando ambo i membri per il valore efficace della tensione  $V$ :

$$VI' \cos \varphi' = VI \cos \varphi \Leftrightarrow P' = P$$

La seconda relazione permette di determinare il valore della capacità  $C$  con la quale è possibile effettuare il rifasamento del carico  $\dot{Z}$ , ovvero la riduzione dell'angolo della corrente da  $\varphi$  a  $\varphi'$ ; infatti, moltiplicando ambo i membri per il valore efficace della tensione  $V$ :

$$-VI' \sin \varphi' = -VI \sin \varphi + \omega CV^2$$

$$Q - Q' = \omega CV^2$$

$$P \tan \varphi - P' \tan \varphi' = \omega CV^2$$

$$P(\tan \varphi - \tan \varphi') = \omega CV^2$$

Da cui è facilmente ottenibile il valore della capacità  $C$ :

$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan \varphi - \tan \varphi')$$

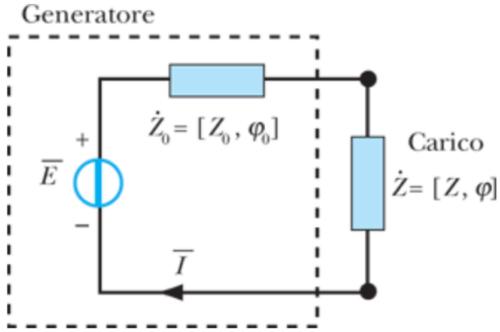
Si potrebbe pensare che convenga rifasare il carico fino ad un angolo  $\varphi' = 0$  ma non è corretto, dal momento in cui le linee di distribuzione sono lunghi fili con un comportamento di tipo ohmico – induttivo; infatti, se il carico variasse ( $\dot{Z}$  è un carico statistico, non reale), anche di poco, in modo tale da far anticipare la corrente  $\bar{I}$  rispetto alla tensione  $\bar{V}$ , la linea assumerebbe un comportamento di tipo ohmico – capacitivo con il rischio di pericolose sovratensioni o sovracorrenti, create a partire da indesiderate risonanze, in grado di danneggiare irreparabilmente tutto l'impianto di distribuzione. Pertanto, l'angolo di rifasamento non è mai nullo, è piccolo ma diverso da zero.

Il condensatore in opposizione di fase in prossimità del carico serve ad evitare che l'energia immagazzinata nel carico stesso, che notoriamente oscilla tra un massimo ed un minimo con un momento di nullo, venga continuamente trasferita lungo la linea, riducendo al minimo eventuali perdite. Quanto detto finora si adatta al caso più comune di utilizzatori a carattere ohmico – induttivo; se, invece, il carattere fosse ohmico – capacitivo (più raro) occorrerebbe posizionare in parallelo al carico un induttore, sviluppando un ragionamento del tutto analogo a quello già riportato per il quale:

$$L = \frac{V^2}{\omega P} \frac{1}{\tan \varphi - \tan \varphi'}$$

Si vuole analizzare una notevole proprietà delle reti in regime sinusoidale che regola il trasferimento di potenza da un generatore ad un carico. In particolare, il generatore trasferirà la massima potenza attiva al carico quando questo si troverà in condizioni di adattamento, ovvero:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_0^*$$



**Il massimo trasferimento di potenza**, a differenza del caso stazionario, non può essere calcolato se non sulle **potenze reali**; quindi, sulla potenza complessa “massima” non sarà possibile dire nulla a priori.

Supponendo che l'impedenza interna  $\dot{Z}_0$  (solitamente di carattere ohmico – induttivo) e il carico  $\dot{Z}$  siano del tipo:

$$\dot{Z}_0 = Z_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) \wedge \dot{Z} = Z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Il risultato a cui si è pervenuti si ottiene **considerando in prima istanza la corrente**:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}} = \frac{\bar{E}}{Z \cos \varphi + Z_0 \cos \varphi_0 + i(Z \sin \varphi + Z_0 \sin \varphi_0)}$$

Il cui modulo è:

$$I = \frac{E}{\sqrt{Z^2 + Z_0^2 + 2Z_0 Z \cos(\varphi - \varphi_0)}}$$

Poi **calcolando la potenza attiva**:

$$P = ZI^2 \cos \varphi = \frac{E^2 Z \cos \varphi}{Z^2 + Z_0^2 + 2Z_0 Z \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Studiando gli estremi di questa funzione dell'impedenza, non è difficile giungere alla conclusione per cui **il massimo trasferimento di potenza attiva vi è quando**:

$$Z = Z_0 \wedge \varphi = -\varphi_0 \Leftrightarrow \dot{Z} = \dot{Z}_0^*$$

Infatti:

$$\begin{aligned} P(Z, \varphi) &= \frac{E^2 Z \cos \varphi}{Z^2 + Z_0^2 + 2Z_0 Z \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{E^2}{Z_0} \cdot \frac{\frac{Z}{Z_0} \cos \varphi}{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 + 1 + 2 \frac{Z}{Z_0} \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ &= P_0 \cdot \frac{R \cos \varphi}{R^2 + 1 + 2R \cos(\varphi - \varphi_0)} = P_0 \cdot \frac{\cos \varphi}{R + \frac{1}{R} + 2 \cos(\varphi - \varphi_0)} \end{aligned}$$

La funzione in due variabili in esame ha **massimo** sicuramente **quando il denominatore è minimo**, in particolare quando è minima la quantità:

$$R + \frac{1}{R}$$

Ovvero per  $R = 1$ ,  $Z = Z_0$ . Sostituendo:

$$P(Z_0, \varphi) = \frac{P_0}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Per il **massimo** di questa funzione, ora in una variabile, si deve avere  $\varphi = -\varphi_0$ , confermando quanto ipotizzato.

Chiamando  $R_0$  la quantità  $Z_0 \cos \varphi_0$ , **in condizioni di adattamento**:

$$P_{MAX} = \frac{E^2}{4R_0}$$

Calcolando **la potenza complessa erogata dal generatore  $\bar{E}$** :

$$\dot{P}_{E-MAX} = \bar{E} \bar{I}^* = \bar{E} \frac{\bar{E}^*}{2R_0} = \frac{E^2}{2R_0} = P_{E-MAX} \in \mathbb{R}$$

Si può concludere dicendo che **il rapporto tra la potenza attiva assorbita dal carico e quella erogata dal generatore definisce il rendimento  $\eta$**  che, come in corrente continua, vale al più:

$$\eta = \frac{P_{MAX}}{P_{E-MAX}} = 0.5$$

Ciò significa che **al più il 50% della potenza attiva erogata dal generatore viene assorbita dal carico**, il restante è assorbito dall'impedenza interna; al momento, **questo rendimento è massimo** ma in realtà nel trasformatore è applicato un meccanismo che permette di aggirare questo ostacolo.

La condizione di estremo relativo della potenza è calcolabile in semplici step quando **l'impedenza di carico è una resistenza reale** (quindi un carico ohmico):

$$P = \frac{E^2 R}{R^2 + Z_0^2 + 2Z_0 R \cos \varphi_0}$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{E^2 (Z_0^2 - R^2)}{(R^2 + Z_0^2 + 2Z_0 R \cos \varphi_0)^2} > 0 \Leftrightarrow R < Z_0$$

Ciò significa che **la potenza massima assorbita dal carico in questione si ha quando  $R = Z_0$**  e vale:

$$P_{MAX} = \frac{E^2}{2Z_0} \frac{1}{1 + \cos \varphi_0}$$

In questa condizione, **la massima potenza attiva erogata dal generatore di tensione** è:

$$P_{E-MAX} = \frac{E^2}{2Z_0}$$

Quindi il **rendimento** è:

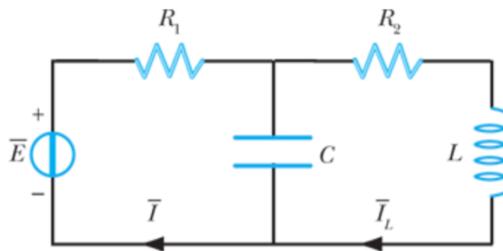
$$\eta = \frac{1}{1 + \cos \varphi_0}$$

Si può concludere che:

$$\forall \varphi_0 \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \eta \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$

**Un rendimento unitario non deve sorprendere**, visto che quando  $\varphi_0 = \pm\pi/2$ , cioè quando l'impedenza del generatore di tensione tende a diventare puramente reattiva, tutta la potenza attiva prodotta viene assorbita interamente dal resistore  $R$ , il solo che potrebbe farlo.

In ultima istanza, si vuole **analizzare il caso in cui tanto la grandezza di ingresso quanto quella di uscita possono essere una tensione ai capi di un componente o una corrente in un ramo**, indifferentemente. Sia considerato il seguente circuito, del quale si vuole **determinare il rapporto** (detto funzione di trasferimento perché trasferisce all'uscita l'ingresso assegnato) **tra la corrente  $\bar{I}_L$ , in output, e la f.e.m.  $\bar{E}$ , in input**. Detta  $\bar{I}$  la corrente del generatore:



$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{E}}{R_1 + (R_2 + iX_L) || (-iX_C)} = \bar{E} \frac{R_2 + iX_L - iX_C}{R_1(R_2 + iX_L - iX_C) + (R_2 + iX_L)(-iX_C)} \\ \bar{I}_L &= \bar{I} \frac{-iX_C}{R_2 + iX_L - iX_C} \end{aligned}$$

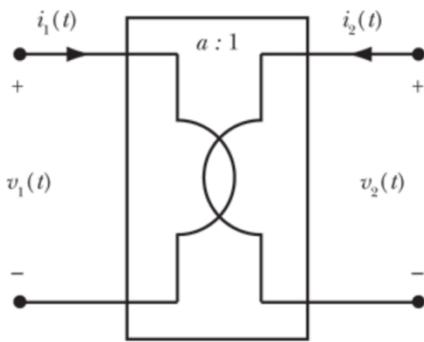
Combinando le due relazioni si ottiene la **funzione di trasferimento** desiderata:

$$\frac{\bar{I}_L}{\bar{E}} = \frac{1}{(i\omega)^2 R_1 L C + i\omega(L + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}$$

In questo modo è possibile ottenere la **grandezza di uscita con la sola grandezza di ingresso**, senza ricorrere alla soluzione della rete, o le proprietà filtranti del sistema valutando, al variare della frequenza, il **modulo e la fase del rapporto** in questione; la funzione in esame ha la dimensione di un'ammittenza, ma può facilmente essere un'impedenza o un rapporto adimensionale.

## TRASFORMATORE E GIRATORE IDEALI

Per **trasformatore ideale** si intende un particolare **doppio bipolo**, un **modello semplificato di una macchina elettrica reale** di cui (almeno per il momento) si ignorano le complicazioni. Il **simbolo circuitale** con cui è indicato un dispositivo del genere è il seguente:



Una prima differenza con il modello reale, è che il **trasformatore ideale funziona anche in corrente continua**, mentre **quello reale deve essere necessariamente alimentato da grandezze variabili nel tempo** perché la creazione di f.e.m. indotta è legata alla **Legge di Faraday – Neumann – Lens**.

Si noti come su entrambe le porte sia stata fatta la convenzione dell'utilizzatore; le relazioni che descrivono il comportamento di un trasformatore sono:

$$\begin{cases} v_1(t) = av_2(t) \\ i_2(t) = -ai_1(t) \end{cases}$$

Una **caratteristica** di questo tipo è stata definita **ibrida**, sebbene non appaia tale a primo impatto; si noti come **il funzionamento dell'intero dispositivo sia noto solo a partire da un parametro,  $a$** , che può assumere un **qualsiasi segno o valore reale** ed è chiaramente **adimensionale**. Il segno meno alla seconda equazione è dovuto semplicemente alla convenzione adottata sulle porte.

Si parta con l'**analisi del parametro  $a$ , caratterizzando il trasformatore** in base al suo modulo:

- $|a| < 1$ , si avrà un trasformatore elevatore;
- $|a| > 1$ , si avrà un trasformatore abbassatore.

In altre parole, **nel primo caso al passaggio dalla porta primaria a quella secondaria la tensione aumenta e la corrente diminuisce in valore assoluto**, mentre nel secondo caso accade il contrario al passaggio da porta primaria a secondaria. Tuttavia, **almeno nel modello ideale**, sia in caso di abbassamento che di innalzamento della tensione, **nel trasformatore non ha luogo alcun fenomeno di assorbimento di potenza**, ovvero **tutta la potenza fornita alla prima porta si ritrova alla seconda**; per dimostrare questa proprietà si proceda a osservare la potenza istantanea assorbita da un doppio bipolo:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$$

Che, in forza alla caratteristica del trasformatore ideale, diventa:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) - \frac{v_1(t)}{a}ai_1(t) = 0$$

Questo risultato è riassunto dicendo che **il trasformatore è trasparente per le potenze** e rappresenta **l'idealità del dispositivo**. Inoltre, questo procedimento analitico permette di notare meglio il fenomeno di innalzamento o abbassamento delle tensioni in funzione del parametro  $a$ .

Si cerchi di **determinare il modo in cui viene vista la resistenza  $R$** , che chiude la porta secondaria, **dalla porta primaria**. Secondo la **definizione del trasformatore**, supponendo che **sul resistore sia fatta la convenzione del generatore**:

$$v_1(t) = av_2(t) = -aRi_2(t) = a^2Ri_1(t)$$

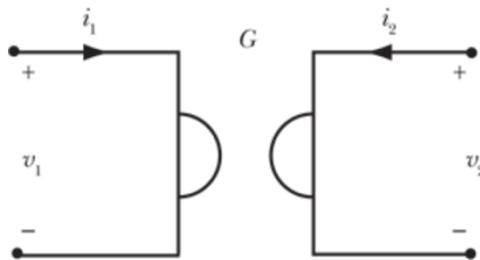
Ciò significa che **la resistenza collegata alla porta secondaria viene vista dalla porta primaria come la stessa resistenza amplificata o ridotta di  $a^2$** . Il risultato può essere ottenuto considerando, in regime sinusoidale, una **qualsiasi impedenza**, che verrà vista dalla primaria come:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = a^2 \dot{Z}$$

Dove  $\bar{V}_1$  e  $\bar{I}_1$  sono i fasori che rappresentano rispettivamente la tensione e la corrente alla prima porta. La formula appena enunciata è detta **formula del trasporto (o del riporto) di un'impedenza al primario**; una volta che è stato fatto questo trasporto, la rete diventa in tutto e per tutto simile ad **un normale circuito**, privo del trasformatore ideale. L'utilità è nel fatto che **il riporto permette il massimo trasferimento di potenza anche a carichi non adeguati** ( $\dot{Z} \neq \dot{Z}_0^*$ ) e rappresenta uno dei motivi per cui è stato preferito il regime sinusoidale.

**Il giratore** è un altro particolare **doppio bipolo**, capace di realizzare un induttore a partire da un condensatore e, dualmente, viceversa. È un **doppio bipolo statico lineare, non reciproco**, introdotto da Jacob Millman e descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} i_1(t) = Gv_2(t) \\ i_2(t) = -Gv_1(t) \end{cases}$$



Dove la costante  **$G$  è detta conduttanza di girazione**. Il giratore è, sostanzialmente, un doppio bipolo **globalmente passivo**, dal momento in cui **la potenza assorbita è nulla in qualsiasi condizione di funzionamento**; pertanto, non dissipava e non immagazzinava energia ma, nonostante ciò, **non gli valgono le proprietà di non amplificazione**.

**La proprietà più interessante** di un giratore può essere illustrata quando **la porta secondaria è collegata ad un condensatore lineare tempo – invariante, di capacità  $C$** :

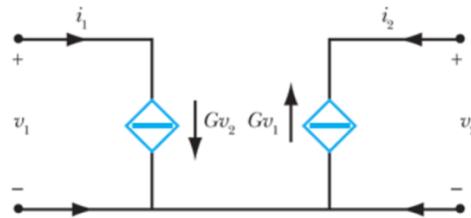
$$v_1(t) = -\frac{i_2}{G} = \frac{C}{G} \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{C}{G^2} \frac{di_1(t)}{dt}$$

Ciò significa che, quando **alla porta di uscita è collegato un condensatore di capacità  $C$** , la porta **di ingresso si comporta come un induttore lineare, tempo – invariante, di induttanza  $C/G^2$** ; come anticipato, vale anche la **proprietà duale** per la quale un induttore può essere trasformato in un condensatore lineare tempo – invariante di capacità  $LG^2$ .

Infine, il giratore gode delle seguenti proprietà:

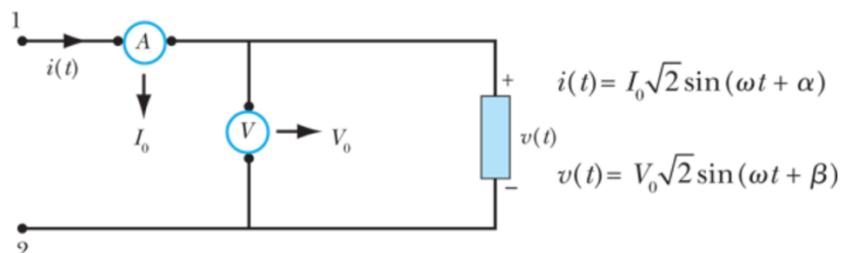
- Collegato ad un **resistore lineare di resistenza  $R$** , il bipolo equivalente si comporta come un **resistore lineare di resistenza  $1/RG^2$** ;
- Collegato ad un **resistore controllato in tensione** (dualmente in corrente), il bipolo equivalente si comporta come un **resistore controllato in corrente** (dualmente in tensione).

Commercialmente, sono disponibili sotto forma di circuiti integrati dei dispositivi che approssimano il funzionamento di un giratore; tuttavia, vale la pena notare che lo si può costruire a partire da due generatori di tensione controllati in tensione con trans – conduttanza  $G$ :

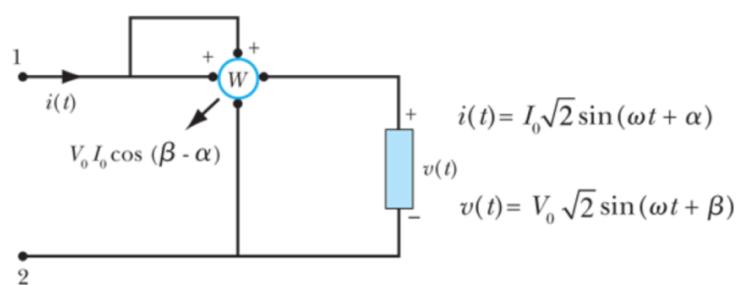


## MISURE IN REGIME SINUSOIDALE

Concettualmente, le **misure in regime sinusoidale sono simili a quelle esaminate in regime stazionario**; tuttavia, esistono delle differenze ed è bene evidenziarle. Partendo dalle misure delle grandezze fondamentali, **corrente e tensione**, per i quali si utilizzano amperometri e voltmetri, in corrente continua gli strumenti forniscono il valore della grandezza in sé e per sé ma in regime sinusoidale, dal momento in cui sono **sinusoidi variabili nel tempo**, possono **restituire solo il loro valore efficace**. Pertanto, nelle raffigurazioni schematizzate, amperometri e voltmetri perdono l'indicazione del verso di misura della grandezza, essendo il valore efficace una quantità sempre positiva.

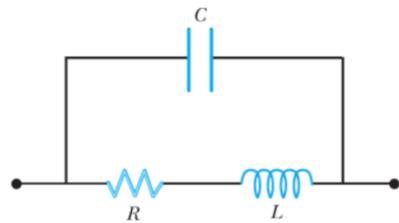


Per quanto riguarda la **misura della potenza**, essendo necessario individuare l'**angolo di fase** tra le grandezze in gioco, è **necessario mantenere una certa indicatività nello strumento**; pertanto, sui wattmetri, è **necessario conservare il verso della misura**, come in figura:



Prima di elencare le varie metodologie di misura, è bene precisare che, **fissata una frequenza o un intervallo di frequenze, i bipoli reali sono ben diversi da quelli idealizzati e presi in considerazione finora; un resistore, un induttore e un condensatore reali non sono tali perché assumono lo stesso comportamento del rispettivo bipolo ideale, ma sono tali perché il loro comportamento è prevalentemente resistivo, induttivo o capacitivo.** In realtà questi tre bipoli hanno **comportamenti ben più complessi**, che li portano ad avere dei punti di tangenza fra di loro.

Ad esempio, un **resistore** è realizzato con un **filo conduttore avvolto su sé stesso**, ma tale filo può **comportarsi come un solenoide** (e quindi come induttanza) oppure due porzioni di filo che si affacciano l'un l'altra come **due armature di un condensatore**.



**Restringendo o allargando l'intervallo di frequenze** a cui agisce il resistore reale, si può ottenere una **schematizzazione meno o più complessa del bipolo reale**; in genere, il bipolo reale in esame è più simile al bipolo ideale atteso quando si lavora alle frequenze stabilite dal costruttore.

Un **induttore reale**, solitamente, è dotato di una **componente resistiva** (come suggerisce la figura seguente), che viene **valutata non a partire dalla resistenza ma dall'angolo di perdita**:

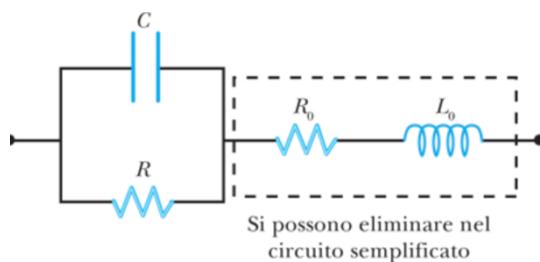
$$\tan \delta = \frac{R}{\omega L}$$



Quanto più è piccolo l'angolo di perdita, tanto più è ideale il dispositivo. Il fattore di qualità viene definito come l'inverso della tangente dell'angolo di perdita:

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{\omega L}{R}$$

Infine, in un **condensatore** il **dielettrico non perfettamente isolante** e **materiali conduttori non ideali** giustificano la **componente resistiva**, mentre il **campo magnetico** e il conseguente **flusso concatenato** giustificano quella **induttiva**.



Anche per questo bipolo **si possono definire angolo di perdita e fattore di qualità**:

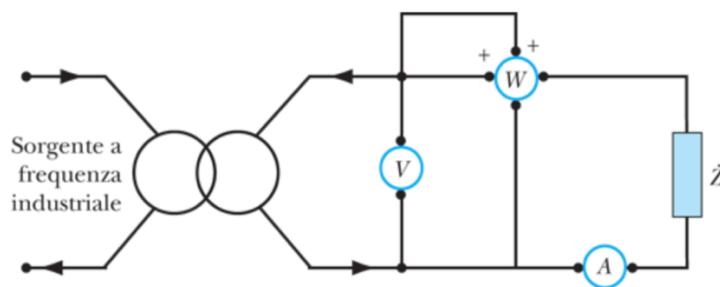
$$\tan \delta = \frac{1}{\omega RC}$$

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} = \omega RC$$

**Angolo di perdita e fattore di qualità** sono i parametri che **descrivono la bontà del bipolo reale** acquistato in relazione al bipolo ideale atteso.

### MISURE IN CORRENTE ALTERNATA E A FREQUENZE INDUSTRIALI

Le **principali misure** che vengono fatte in corrente alternata monofase, a frequenza industriale (50Hz), sono **potenze** (attive o reattive), **fattori di potenza e impedenze**; i carichi sono, solitamente, **ohmico – induttivi** e la **tensione** è quella **di rete**, con valore efficace di **230V**. Tutto ciò è fatto con dispositivi schematizzati come in figura:



Per motivi di sicurezza, è **opportuno implementare** in questo dispositivo anche un **trasformatore di isolamento**, di potenza appropriata alla massima potenza assorbita dai carichi e che separa elettricamente il circuito di misura e la rete elettrica.

In figura è stato scelto di posizionare il voltmetro a monte dell'amperometro ma è bene valutare se questa soluzione (rispetto all'altra che prevede il voltmetro e la voltmetrica dell'amperometro a valle) consente di commettere un errore di inserzione strumentale più contenuto.

Grazie alla **presenza del voltmetro e dell'amperometro** è anche possibile **valutare la potenza apparente**:

$$|\dot{P}| = VI$$

Mentre il **wattmetro** fornisce l'**indicazione della potenza attiva**:

$$P = VI \cos \varphi$$

Da cui si può desumere l'informazione sul **fattore di potenza**:

$$\cos \varphi = \frac{P}{VI} = \frac{P}{|\dot{P}|}$$

Per la **potenza reattiva**, considerando che:

$$Q = VI \sin \varphi$$

Passando all'**impedenza**, il suo modulo è:

$$Z = |\dot{Z}| = \frac{V}{I}$$

Le cui parti resistiva e reattiva possono essere trovate a partire dalle relazioni:

$$R = Z \cos \varphi \wedge X = Z |\sin \varphi|$$

Per conoscere la **natura del carico** è possibile collegargli in parallelo un condensatore di capacità:

$$C_0 = \frac{Q}{2\pi f V^2}$$

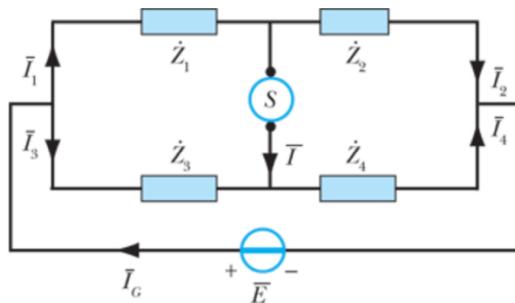
**Se la corrente misurata diminuisce, il carico è ohmico – induttivo**, altrimenti ohmico – capacitivo. Una volta fatto ciò, si possono **determinare i valori dell'induttanza/capacità** a partire dalla reattanza  $X$ :

$$L = \frac{X}{2\pi f} \vee C = \frac{1}{2\pi f X}$$

## CIRCUITI A PONTE

I **circuiti a ponte**, uno dei quali (quello di Wheatstone) è stato già analizzato parlando delle reti in regime stazionario, sono **ampiamente adoperati per la misura delle impedenze**. Una prima **differenza** con il ponte di Wheatstone analizzato è che **la condizione di azzeramento del ponte determina una relazione tra numeri complessi** e quindi equivale, a parte casi particolari, a due relazioni reali; ciò significa che, **nei ponti a corrente alternata**, è necessario inserire **almeno due elementi variabili**. La condizione di equilibrio della generica rete a ponte, mostrata in figura, è data da:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3$$



Quando **il ponte è in equilibrio**, il rivelatore di zero  $S$  indicherà **che la corrente (e quindi la tensione) che lo attraversa è nulla**, mentre **la corrente che circola nel ramo 1 è uguale a quella che circola nel ramo 2**, così come per i rami 3 e 4; pertanto, le correnti  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_3$  sono:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_G \frac{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4} \wedge \bar{I}_3 = \bar{I}_G \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4}$$

Applicando la LK alla maglia formata dall'impedenza  $\dot{Z}_1$ , dal rivelatore  $S$  e dall'impedenza  $\dot{Z}_3$ :

$$\dot{Z}_1 \frac{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4} = \dot{Z}_3 \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4}$$

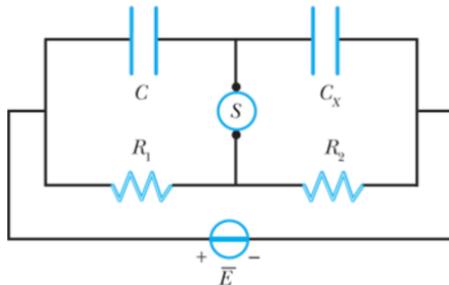
Semplificando il denominatore comune e sviluppando i calcoli si giunge facilmente alla condizione di equilibrio ipotizzata:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3$$

Quanto appena rilevato non è altro che una **generalizzazione** del risultato dimostrato in regime stazionario con il **ponte di Wheatstone**. Di seguito è proposta l'**analisi dei principali metodi per la misura delle impedenze**:

- **Ponte di Gott**

La misura della capacità incognita può essere fatta sfruttando il valore noto di un'altra capacità **campione**, entrambe supposte **senza perdite**, per mezzo del ponte in figura:



Imponendo la condizione di azzeramento:

$$-\frac{i}{\omega C_X} R_1 = -\frac{i}{\omega C} R_2$$

Da cui:

$$C_X = \frac{R_1}{R_2} C$$

Se la capacità incognita  $C_X$  è più piccola del campione noto, il rapporto tra le due resistenze deve fornire la necessaria amplificazione per realizzare la precedente uguaglianza; in caso contrario, si sceglie  $R_1/R_2 < 1$ .

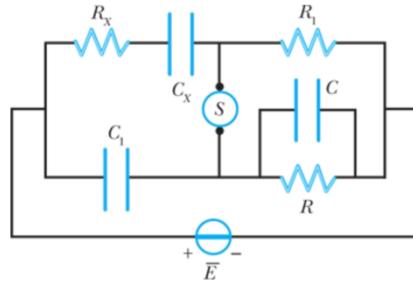
Per azzerare il ponte si può operare in due maniere diverse:

- I due **resistori** vengono scelti di ugual valore in modo che  $C_X = C$ , per capacità nell'ordine dei 100-1000 pF;
- Si tiene costante **C** e si fanno variare i **resistori** per capacità più elevate.

Per dispositivi non ideali l'azzeramento non può essere raggiunto e si avranno sempre dei minimi sul rilevatore di zero. Infine, si può notare come in questo caso particolare la condizione di equilibrio abbia dato origine ad una sola condizione scalare indipendente dalla frequenza.

- **Ponte di Schering**

Usato quando le perdite nel dielettrico non sono trascurabili, questo ponte può essere schematizzato con la serie di una pura capacità  $C_X$  e di una resistenza  $R_X$ , che tiene in conto le perdite:



**C e  $C_1$**  sono condensatori campione privi di perdite per i quali la condizione di equilibrio fornisce la relazione:

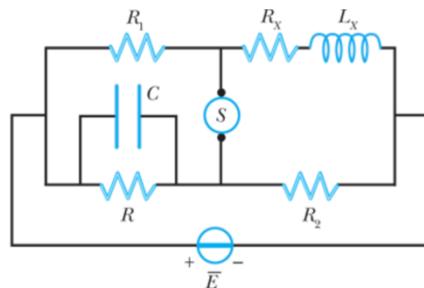
$$R_X = \frac{C}{C_1} R_1 \wedge C_X = \frac{R}{R_1} C_1$$

Ciò che veramente conta in questa misura è la conoscenza precisa dei rapporti  $C/C_1$  e  $R/R_1$ .

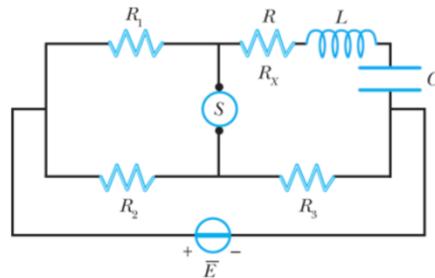
- **Ponte di Maxwell**

Con questo metodo si può **risalire al valore di un'induttanza a partire dalla conoscenza precisa del valore di una capacità**; infatti, per la misura dei parametri  $R_X$  e  $L_X$  si ricorre allo schema seguente, la cui condizione di equilibrio ne permette di ricavare l'espressione:

$$R_X = \frac{R_2}{R} R_1 \wedge L_X = CR_1 R_2$$



- **Ponte a risonanza**



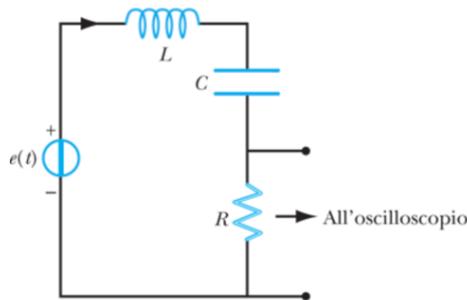
In questa variante intelligente dell'idea di equilibrio dei ponti, **la reattanza induttiva viene compensata variando la capacità C del condensatore; noti due dei quattro parametri, L, C, R e  $\omega$ , è possibile calcolare il valore degli altri**. Le relazioni che sussistono tra le quattro grandezze sono:

$$\omega^2 LC = 1 \wedge RR_2 = R_1 R_3$$

Sapendo che la prima rappresenta la **condizione di risonanza del circuito**.

Per le **misure di capacità ed induttanze in alta frequenza** si può sfruttare il **fenomeno di risonanza** precedentemente introdotto: in un **circuito RLC serie**, alla **risonanza**, la **corrente assume il massimo valore efficace rilevabile ai capi di  $R$** ; osservandone la **forma d'onda** si può ricavare la **frequenza, dalla quale ottenere  $C$  o  $L$**  (conoscendo l'altra) con la formula:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

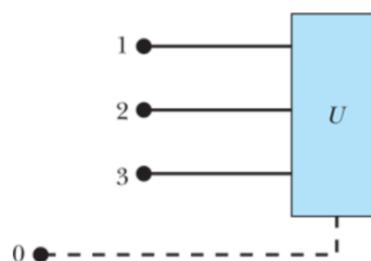


**Il valore di resistenza  $R$  deve essere piuttosto piccolo** per non abbassare troppo il fattore di qualità del circuito, che comprometterebbe la **precisione della misura**.

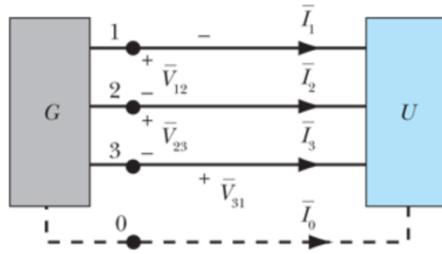
## SISTEMI TRIFASE

Le reti finora studiate sono sempre state delle **reti (stazionarie o sinusoidali) monofase**; con monofase si intende dire che **l'energia elettrica viene portata dal generatore al carico mediante due linee di trasmissione: una attraverso cui la corrente giunge al carico e una di ritorno**. Sebbene questo sia il **metodo di realizzazione preferito per il trasferimento e l'utilizzo di energia elettrica all'interno di un'abitazione** (nella presa classica di corrente mostrata in precedenza è descritto un sistema monofase attraverso i due "fori"), la sua **produzione** e il suo **trasporto** dagli impianti di generazione **non avviene allo stesso modo**, sia per **motivi tecnici** che per **motivi economici** la produzione, la trasmissione e la distribuzione di energia elettrica avviene sotto forma di **grandezze alternate trifasi**.

La grande maggioranza degli impianti elettrici industriali non è realizzata con un sistema monofase; il tipico utilizzatore è schematizzato, nel suo modello black box più semplice, come segue:



Il **tipico utilizzatore** trifase è composto da **tre o quattro morsetti**, indicati con 0 1 2 3 (o 0 R S T), che **funzionano correttamente solo se collegati ai rispettivi morsetti di alimentazione**; in particolare, i **morsetti 1, 2 e 3 sono detti morsetti di fase e il morsetto 0 è detto morsetto di (o del) neutro**.



Le tensioni applicate all'apparecchio  $U$  dal generatore trifase  $G$ , ovvero  $\bar{V}_{12}$ ,  $\bar{V}_{23}$  e  $\bar{V}_{31}$ , sono dette **tensioni concatenate** (o tensioni filo – filo per il CEI) e, solitamente, hanno lo **stesso valore efficace**:

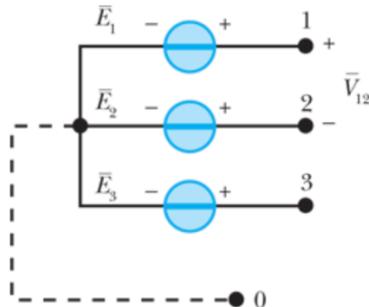
$$V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$$

Anche le **tensioni riferite al neutro**,  $\bar{V}_{10}$ ,  $\bar{V}_{20}$  e  $\bar{V}_{30}$  (dette **tensione di fase o stellate**), hanno solitamente lo **stesso valore efficace**:

$$V_{10} = V_{20} = V_{30} = E$$

Infine, si individuano le **correnti di linea**,  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  e  $\bar{I}_3$ , non necessariamente dotate dello stesso valor efficace, e la corrente  $\bar{I}_0$  che attraversa il **filo del neutro**.

Un **generatore di tensione trifase** è un sistema elettrico capace di sostenere tre tensioni sinusoidali; più precisamente, è un **sistema che**, se ben progettato, **eroga una terna di tensioni sinusoidali simmetrica**. Sia considerato il generatore ideale di trifase in figura, **composto da tre generatori sinusoidali indipendenti collegati a stella**:



Le tre **tensioni di fase** che esso eroga sono:

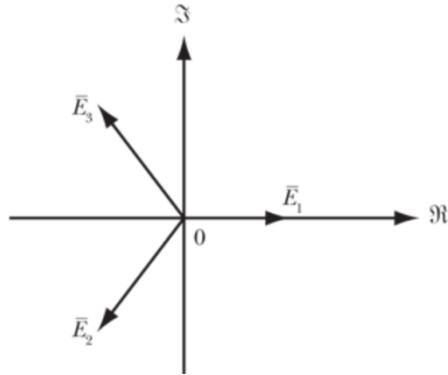
$$\begin{cases} e_1(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ e_2(t) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ e_3(t) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

Che possono essere raffigurate anche come **tre vettori nel piano complesso**:

$$e_1(t) \Leftrightarrow \bar{E}_1 = [E, 0] = E$$

$$e_2(t) \Leftrightarrow \bar{E}_2 = \left[ E, -\frac{2}{3}\pi \right] = -\frac{E}{2} - iE\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e_3(t) \Leftrightarrow \bar{E}_3 = \left[ E, -\frac{4}{3}\pi \right] = -\frac{E}{2} + iE \frac{\sqrt{3}}{2}$$

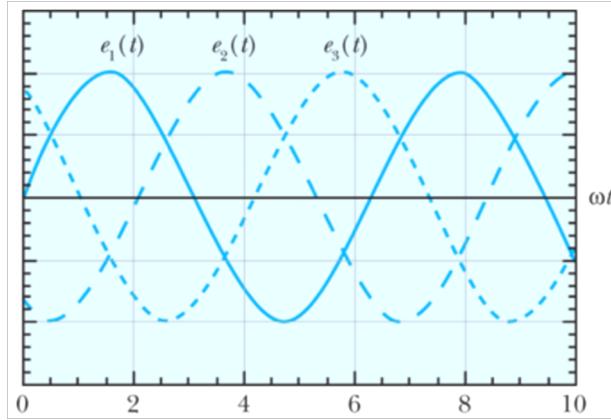


Quando **tre fasori disposti nel piano sono caratterizzati dallo stesso valore efficace e sono sfasati di un angolo di  $2\pi/3$** , si dice che essi compongono una **terna trifase**; in particolare, se la terna si riferisce ad un generatore, si dice che essa è **simmetrica** e, nel caso in cui mancasse una delle due proprietà, verrebbe detta **dissimmetrica**. Inoltre, se i fasori sono uno rispetto l'altro in **anticipo**, la terna è detta **diretta** (come nella figura appena mostrata, è il caso di default), mentre se sono in ritardo la terna è detta **inversa**.

Vale la pena osservare una proprietà interessante delle terne simmetriche (che rende comodo il dominio della frequenza), ovvero quella per cui **in ogni istante di tempo la somma di tutte le tensioni stellate è nulla**:

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$$

$$E - \frac{E}{2} - iE \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{E}{2} + iE \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

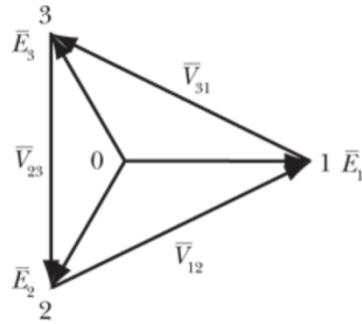


Tuttavia, dal momento in cui alle macchine reali queste tensioni non sono accessibili, sono di poco interesse; più utili sono le **tensioni concatenate**, che si ottengono comunque a partire dalle **tensioni stellate**:

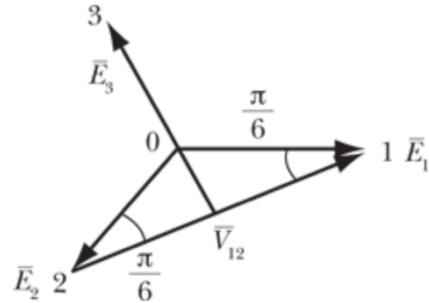
$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$$

$$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$$

$$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$



Volendo calcolare il primo dei tre fasori,  $\bar{V}_{12}$ , si ragioni tenendo conto della seguente figura:



Si determina il triangolo isoscele di base  $\bar{V}_{12}$  e lati  $\bar{E}_1$  e  $\bar{E}_2$ ; sapendo che gli angoli alla base sono di  $\pi/6$  perché quello al vertice superiore è di  $2\pi/3$ :

$$\frac{V_{12}}{2} = E \cos \frac{\pi}{6} = E \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{12} = E\sqrt{3}$$

Per quanto riguarda l'angolo, si può vedere chiaramente come il vettore anticipi  $\bar{E}_1$  di  $\pi/6$ ; pertanto:

$$\bar{V}_{12} = \left[ E\sqrt{3}, \frac{\pi}{6} \right]$$

Applicando lo stesso ragionamento alle altre due differenze:

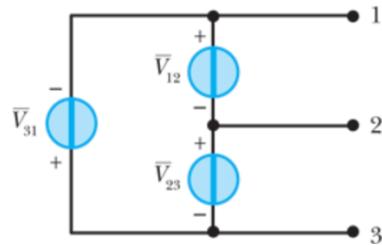
$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \left[ E\sqrt{3}, \frac{\pi}{6} \right] = E \left( \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \bar{V}_{23} = \left[ E\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2} \right] = -iE\sqrt{3} \\ \bar{V}_{31} = \left[ E\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi \right] = E \left( -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

È possibile, adesso, ricavare una proprietà utile per semplificare i calcoli: **per passare da una grandezza relativa ad un filo a quella relativa al filo adiacente** è sufficiente **sfasare il fasore di  $2\pi/3$** , evidenziando nuovamente il vantaggio dell'uso del dominio della frequenza.

Anche per le **tensioni concatenate** vale la **proprietà precedentemente rilevata per le tensioni stellate**:

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = \bar{0}$$

Un **generatore ideale di tensione trifase** può essere ottenuto anche **collegando i tre generatori di tensione sinusoidale ideali a triangolo**:



In realtà, **non tutti e tre i generatori sono necessari**, potrebbe venirne rimosso uno e alle tensioni non cambierebbe nulla; **quel che cambierebbe sarebbero le correnti**, e ciò può influire quando il generatore è collegato ad una rete di bipoli. Quanto appena detto è **giustificato dalla LKT** applicata alla maglia che contiene i tre generatori:

$$\bar{V}_{12} = -\bar{V}_{23} - \bar{V}_{31}$$

Sia che esista e sia che non esista il generatore ai morsetti 1 e 2. Analogamente, si possono invertire i pedici e mostrare la proprietà anche per gli altri generatori.

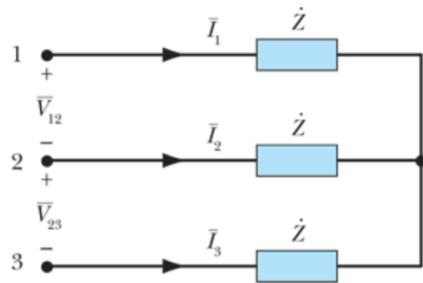
È stato già fatto notare come **il collegamento tra due o più generatori reali in parallelo imponga correnti di valori particolarmente elevati**; perciò, è importante che **le tre f.e.m. erogate dai generatori collegati a triangolo costituiscano una terna equilibrata**, anche al fine di evitare la circolazione di corrente nel sistema trifase quando esso non mantiene alcun carico.

Volendo **trasformare un collegamento a triangolo dei generatori in uno equivalente a stella**, si ha bisogno delle formule per ottenere le tensioni stellate a partire da quelle concatenate. Tenendo in considerazione che il caso precedentemente affrontato è una particolarizzazione con  $\alpha = \pi/6$ :

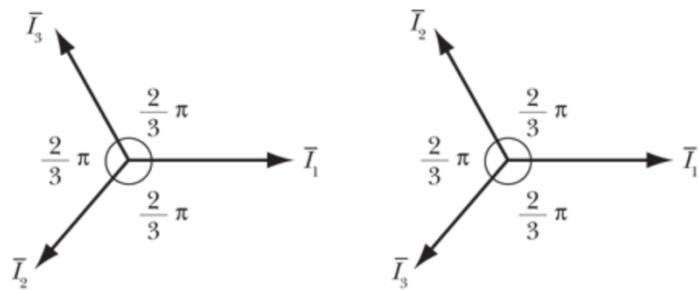
$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = [V, \alpha] \\ \bar{V}_{23} = \left[V, \alpha - \frac{2}{3}\pi\right] \\ \bar{V}_{31} = \left[V, \alpha - \frac{4}{3}\pi\right] \end{cases} \wedge \begin{cases} \bar{E}_1 = \left[\frac{V}{\sqrt{3}}, \alpha - \frac{\pi}{6}\right] \\ \bar{E}_2 = \left[\frac{V}{\sqrt{3}}, \alpha - \frac{5}{6}\pi\right] \\ \bar{E}_3 = \left[\frac{V}{\sqrt{3}}, \alpha - \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Infine, tornando alla possibilità di **rimuovere dal collegamento a triangolo un generatore** senza effetti alle tensioni, talvolta ci si può imbattere in sistemi trifase il cui generatore di tensione è **rappresentato con soli due lati del triangolo**; in questa situazione, **il collegamento viene detto a V** e il generatore sul lato mancante è stato portato in revisione o in riparazione.

Per quanto riguarda la **disposizione degli utilizzatori**, **non ci si discosta molto da quanto detto per i generatori**, soprattutto in seno alle trasformazioni triangolo – stella esaminate.



Sono qui sopra presentate **tre impedenze in un sistema trifase a stella**, percorse dalle **correnti di linea  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  e  $\bar{I}_3$**  che si originano nei generatori qui omessi per semplicità. Se le tre correnti in questione **costituiscono un insieme di fasori con lo stesso modulo e sfasati di  $2\pi/3$** , si dice che costituiscono un **sistema trifase equilibrato nel carico**; inoltre, **in base al verso** in cui sono orientati i vettori, la **terna** può essere detta **diretta o inversa**:



Terna diretta

$$\bar{I}_1 = [I, \alpha]$$

$$\bar{I}_2 = [I, \alpha - 2\pi/3]$$

$$\bar{I}_3 = [I, \alpha - 4\pi/3]$$

Terna inversa

$$\bar{I}_1 = [I, \alpha]$$

$$\bar{I}_2 = [I, \alpha + 2\pi/3]$$

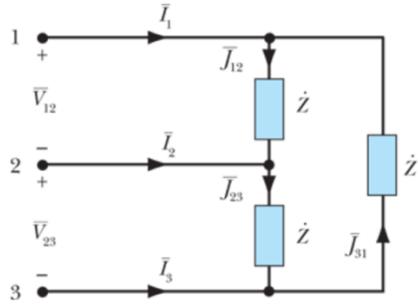
$$\bar{I}_3 = [I, \alpha + 4\pi/3]$$

Così come per le tensioni, salvo eventuali chiarimenti, **si farà riferimento soltanto a terne dirette**.

In questo sistema **le correnti di linea coincidono con le correnti di lato**; tuttavia, se si considera un **generico carico trifase a triangolo**, bisogna **distinguere e determinare correnti di linea ( $I$ ) e correnti di lato ( $J$ )**:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} \left[ \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6} \right] \wedge \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} \left[ \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6} \right] \wedge \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} \left[ \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6} \right]$$

**Il rapporto tra queste due quantità** si può verificare in maniera del tutto analoga a quanto fatto per il **rapporto tra tensioni stellate e tensioni concatenate**, però operando in **maniera analitica** invece che grafica. Una volta fatto ciò, si saranno individuati i metodi di passaggio dalla terna a stella a quella a triangolo, sia per le tensioni che per le correnti.



Supponendo note le correnti di lato e prendendo in considerazione la prima corrente di linea:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31}$$

Assumendo come riferimento per le tensioni la prima concatenata:

$$\bar{V}_{12} = [V, 0] = V$$

Le correnti di lato, essendo proporzionali alle tensioni concatenate secondo le impedenze, sono:

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\dot{Z}} = \frac{V}{\dot{Z}}$$

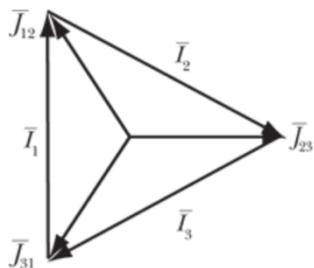
$$\bar{J}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\dot{Z}} = \frac{\left[V, -\frac{2}{3}\pi\right]}{\dot{Z}}$$

$$\bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\dot{Z}} = \frac{\left[V, -\frac{4}{3}\pi\right]}{\dot{Z}}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = \frac{1}{\dot{Z}}(\bar{V}_{12} - \bar{V}_{31}) = \frac{V}{\dot{Z}}\left(1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V}{\dot{Z}}\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \bar{J}_{12}\left[\sqrt{3}, -\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \\ &= \bar{J}_{12}\left[\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

Allo stesso modo possono essere dimostrate le relazioni che coinvolgono le altre due correnti di linea. Dalla schematizzazione seguente, non è difficile convincersi che le correnti di linea svolgono un ruolo analogo alle tensioni stellate, così come per le correnti di lato e le tensioni concatenate.



## I DIVERSI TIPI DI COLLEGAMENTO E DI CONFIGURAZIONE

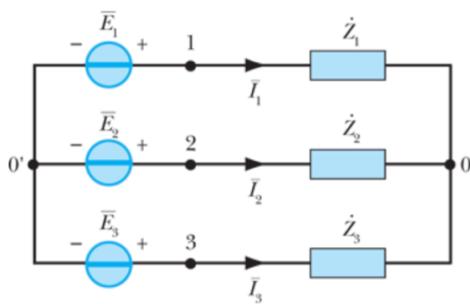
In base a quanto detto finora, si può affermare che **in un sistema trifase è possibile che i generatori o i carichi siano collegati a stella o a triangolo e che il filo del neutro possa essere presente o meno in quello a stella**, mentre per quanto riguarda i **collegamenti tra generatori e carichi** si fa riferimento alle cinque combinazioni possibili:

	Collegamento stella - stella
	Collegamento stella - stella con neutro
	Collegamento stella - triangolo
	Collegamento triangolo - stella
	Collegamento triangolo - triangolo

Ognuna di queste configurazioni ha le proprie peculiarità e le proprie utilità negli impianti reali. È chiaro come un collegamento a stella con neutro con triangolo (o stella senza neutro) non è possibile, dal momento in cui avanzerebbe inutilmente un filo.

Siano singolarmente analizzati i collegamenti:

### 1. Stella – Stella



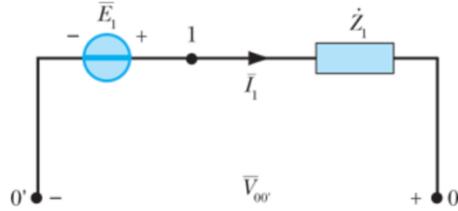
Sia i tre generatori che le tre impedenze sono **collegati a stella**, in cui le tre tensioni di alimentazione sono supposte simmetriche ma le **impedenze non necessariamente**; ne consegue che le correnti di linea non rappresentano una terna sfasata di  $2\pi/3$  con lo stesso valore efficace.

Note le tensioni di alimentazione e le impedenze, **si vogliono determinare le correnti di linea**; la chiave di volta è la **formula di Millmann**, applicata ai nodi 0 e 0':

$$\bar{V}_{00'} = \bar{V}_0 - \bar{V}_{0'} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\dot{Y}_1 \bar{E}_1 + \dot{Y}_2 \bar{E}_2 + \dot{Y}_3 \bar{E}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

In questo caso particolare, la formula è detta anche formula di spostamento del centro stella. Aiutandosi con la figura seguente e applicando la LKT:

$$\bar{V}_{00'} - \bar{E}_1 + \dot{Z}_1 \bar{I}_1 = 0$$



Si può concludere che:

$$\bar{I}_1 = \dot{Y}_1 (\bar{E}_1 - \bar{V}_{00'})$$

Complicando questa relazione con la formula di spostamento del centro stella:

$$\bar{I}_1 = \dot{Y}_1 \left( \bar{E}_1 - \frac{\dot{Y}_1 \bar{E}_1 + \dot{Y}_2 \bar{E}_2 + \dot{Y}_3 \bar{E}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} \right) = \frac{\dot{Y}_1 [\dot{Y}_2 (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) + \dot{Y}_3 (\bar{E}_1 - \bar{E}_3)]}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

Questo discorso può essere esteso anche alle altre correnti di linea, delineando il quadro:

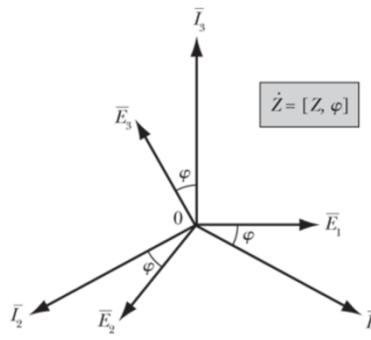
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dot{Y}_1 (\bar{E}_1 - \bar{V}_{00'}) = \frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} [\dot{Y}_2 (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) + \dot{Y}_3 (\bar{E}_1 - \bar{E}_3)] \\ \bar{I}_2 = \dot{Y}_2 (\bar{E}_2 - \bar{V}_{00'}) = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} [\dot{Y}_3 (\bar{E}_2 - \bar{E}_3) + \dot{Y}_1 (\bar{E}_2 - \bar{E}_1)] \\ \bar{I}_3 = \dot{Y}_3 (\bar{E}_3 - \bar{V}_{00'}) = \frac{\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} [\dot{Y}_1 (\bar{E}_3 - \bar{E}_1) + \dot{Y}_2 (\bar{E}_3 - \bar{E}_2)] \end{cases}$$

Ogni singola corrente non è determinata solo dal generatore dello stesso ramo, ma presenta contributi provenienti da tutti i generatori del generatore trifase. Supponendo, come caso particolare, che anche la terna di impedenze sia simmetrica:

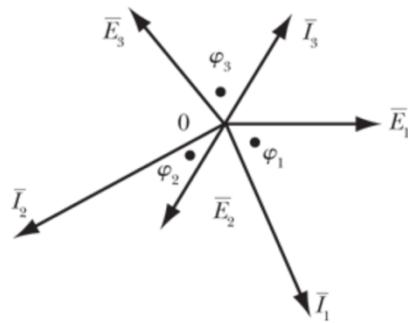
$$\bar{V}_{00'} = \frac{\dot{Y}_1 \bar{E}_1 + \dot{Y}_2 \bar{E}_2 + \dot{Y}_3 \bar{E}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} = \frac{\dot{Y}}{3\dot{Y}} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) = 0$$

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dot{Y} \bar{E}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_2 = \dot{Y} \bar{E}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_3 = \dot{Y} \bar{E}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} \end{cases}$$

Solo in queste condizioni (da ricercare), ogni corrente di linea è condizionata solo dalle relative tensioni di alimentazione e impedenze; pertanto, il sistema trifase si comporta come un insieme di tre circuiti monofase indipendenti. Graficamente si può interpretare il tutto come segue:



**Le correnti costituiscono anch'esse una terna simmetrica, sfasata dalla terna delle tensioni di un certo angolo  $\varphi$**  (in funzione dell'impedenza) per ogni singolo vettore; quando, invece, le impedenze sono tutte diverse, gli angoli di sfasamento di una corrente rispetto alla relativa tensione di alimentazione e i moduli dei fasori sono tutti diversi tra loro:



Il motivo per cui la formula per calcolare  $\bar{V}_{00'}$  è detta di **spostamento del centro stella** è proprio dovuta al fatto che, quando **le impedenze sono tutte diverse, il centro 0 dei carichi è diverso dal centro 0' dei generatori**, la cui differenza di potenziale rappresenta proprio lo spostamento.

Questo tipo di collegamento **non è consigliato con carichi non equilibrati**; infatti, più è squilibrato il sistema tanto più è grande  $\bar{V}_{00'}$  rispetto alle tensioni di fase, andando a rendere le tensioni sulle impedenze dissimmetriche (proprietà sgradita nel progetto di un buon impianto di distribuzione).

$$\bar{V}_{10} = \bar{E}_1 - \bar{V}_{00'}$$

$$\bar{V}_{20} = \bar{E}_2 - \bar{V}_{00'}$$

$$\bar{V}_{30} = \bar{E}_3 - \bar{V}_{00'}$$

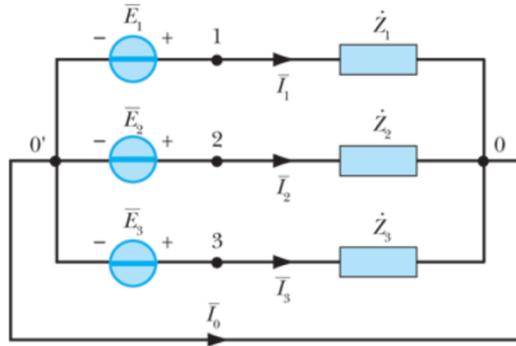
## 2. Stella – Stella con neutro

**La presenza del neutro**, in questo collegamento, **impone** che valga sempre:

$$\bar{V}_{00'} = \bar{0}$$

Ne consegue una **situazione simile a quella sperimentata nel caso del collegamento stella – stella con le impedenze simmetriche**:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} \end{cases}$$



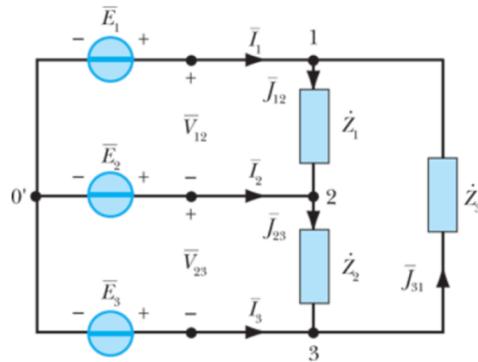
Infine, la corrente del neutro, in forza della LKT al nodo 0' (oppure 0), è:

$$\bar{I}_0 = -\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = -\dot{Y}_1 \bar{E}_1 - \dot{Y}_2 \bar{E}_2 - \dot{Y}_3 \bar{E}_3$$

Questo collegamento è **adatto a carichi con una certa probabilità di squilibrio**: in tal modo si garantisce che le tensioni sui carichi abbiano lo stesso valor efficace pur avendo impedenze diverse tra loro. Un esempio di collegamento stella – stella con neutro è negli appartamenti civili: in ogni ubicazione entrano due fili, il neutro e uno tra i tre fili delle fasi 1, 2 e 3 (sono tripartiti in tutto l'edificio); anche se il gruppo di appartamenti serviti da una delle tre fasi presenta un carico squilibrato rispetto agli altri due, la tensione tra i due fili in arrivo in ogni alloggio non varia il suo valor efficace. Tanto più è pronunciato lo squilibrio e tanto più sarà elevato il valor efficace della corrente di neutro  $\bar{I}_0$ ; il filo di neutro permette di equilibrare “forzatamente” i carichi quando non lo possono essere di natura.

### 3. Stella – Triangolo

Supponendo assegnate le tre tensioni di fase dei generatori e le impedenze:



Per determinare le correnti di linea è utile valutare le tre tensioni concatenate, dalle quali sono facilmente deducibili le correnti di lato:

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\dot{Z}_1}$$

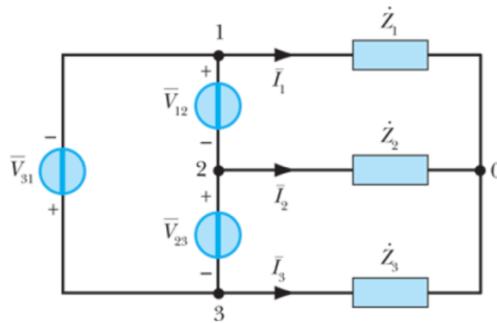
$$\bar{J}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\dot{Z}_2}$$

$$\bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\dot{Z}_3}$$

Applicando le LKC ai nodi 1, 2 e 3:

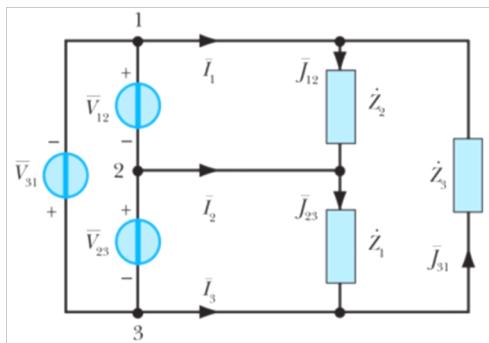
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases}$$

#### 4. Triangolo – Stella



In questo caso, **si può trasformare la stella delle impedenze nel triangolo equivalente o il triangolo di generatori nella stella equivalente**. Dato che i generatori sono a triangolo, si conoscono già le tre tensioni concatenate e si può procedere come mostrato precedentemente.

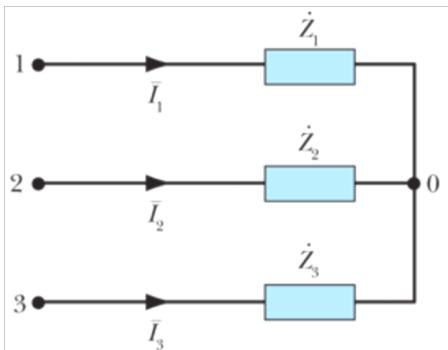
#### 5. Triangolo – Triangolo



In questo caso, **i generatori forniscono i valori delle tensioni concatenate**, per mezzo dei quali si ottengono le **correnti di lato del triangolo delle impedenze**, note le quali è poi possibile **risalire alle correnti di linea**.

## LE POTENZE NEI SISTEMI TRIFASE

Sia considerato un **carico composto da tre impedenze collegate a stella**; la **potenza complessa assorbita dal carico sarà la somma di quelle assorbite dalle singole impedenze**:



$$\dot{P} = P + iQ = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* = \dot{Z}_1 \bar{I}_1 \bar{I}_1^* + \dot{Z}_2 \bar{I}_2 \bar{I}_2^* + \dot{Z}_3 \bar{I}_3 \bar{I}_3^* = \dot{Z}_1 I_1^2 + \dot{Z}_2 I_2^2 + \dot{Z}_3 I_3^2$$

È chiaro come **la parte reale di questa potenza coincida con la potenza attiva assorbita dal carico**, definita come valor medio della potenza istantanea, e **la parte immaginaria con la potenza reattiva**. Ovviamente le considerazioni fatte si adattano perfettamente **anche al caso di impedenze collegate a triangolo**, visto che sono stati mostrati i meccanismi che permettono di passare da un collegamento all'altro.

**Supponendo che il carico sia equilibrato**, in base alla proprietà (che verrà successivamente dimostrata) per cui **la potenza istantanea è costante**:

$$\dot{P} = 3EI(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 3\dot{Z}I^2 = \frac{3E^2}{\dot{Z}^*}$$

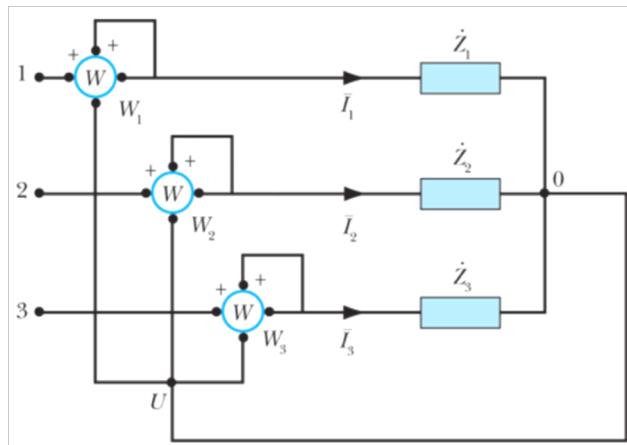
Per misurare le potenze di un sistema trifase si utilizzano metodi diversi in base al fatto che **il centro stella delle tre impedenze sia o meno accessibile**; nel primo caso si può **fisicamente accedere al punto in comune delle impedenze**, che va **ricostruito artificialmente nel secondo caso**. Dunque, si distinguono i due casi:

- **Centro stella accessibile**

In questa situazione si possono **inserire tre wattmetri in modo da misurare la potenza attiva assorbita dalle impedenze di linea** a cui sono rispettivamente collegati:

$$P_x = V_{x0} I_x \cos \varphi_{x0}$$

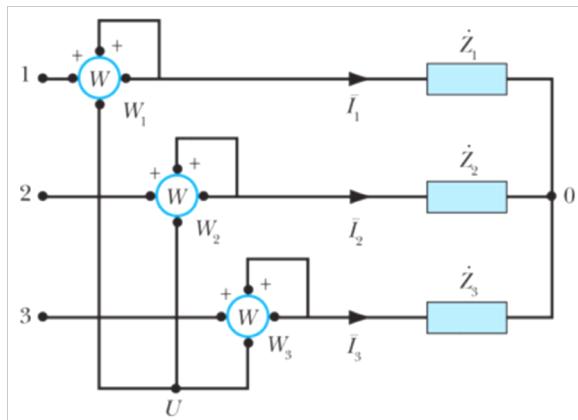
Dove  $\varphi_{x0}$  rappresenta la fase relativa tra  $V_{x0}$  e  $I_x$ . Si noti come **il punto in comune delle voltmetriche**, indicato con  $U$ , sia proprio **il centro stella 0 delle impedenze**:



Inoltre, supponendo l'esistenza di un varmetro, si potrebbe usare lo stesso schema (sostituendo i dispositivi) per misurare le potenze reattive e ricavare, quindi, la potenza complessa assorbita dall'intero sistema trifase.

- **Centro stella non accessibile** (teorema di indipendenza dal centro stella)

Nella maggior parte dei casi reali il **centro stella non è accessibile** e per misurare la potenza vanno fatte delle manipolazioni aggiuntive rispetto al caso duale. Nello schema in figura si propone un modo pratico di misurare la potenza attiva assorbita dal carico, che può essere ampliato anche alla potenza reattiva; ne consegue che le considerazioni seguenti saranno sviluppate tutte a partire dalla misura della potenza complessa.



La **somma delle misure** indicate dai dispositivi è:

$$\dot{P} = \bar{V}_{1U}\bar{I}_1^* + \bar{V}_{2U}\bar{I}_2^* + \bar{V}_{3U}\bar{I}_3^*$$

Dove:

$$\begin{cases} \bar{V}_{1U} = \bar{V}_1 - \bar{V}_U \\ \bar{V}_{3U} = \bar{V}_2 - \bar{V}_U \\ \bar{V}_{3U} = \bar{V}_3 - \bar{V}_U \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nella formula della potenza appena trovata:

$$\dot{P} = (\bar{V}_1 - \bar{V}_U)\bar{I}_1^* + (\bar{V}_2 - \bar{V}_U)\bar{I}_2^* + (\bar{V}_3 - \bar{V}_U)\bar{I}_3^* = \bar{V}_1\bar{I}_1^* + \bar{V}_2\bar{I}_2^* + \bar{V}_3\bar{I}_3^* - \bar{V}_U(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*)$$

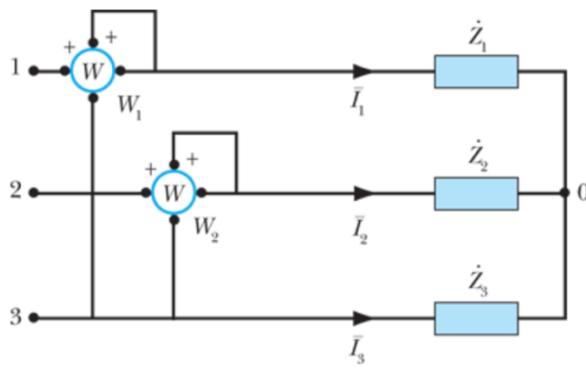
Ma dato che **il sistema trifase considerato è senza neutro, la somma di tutte le correnti di linea è nulla**:

$$\dot{P} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^*$$

È nulla anche la quantità  $\bar{V}_0(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*)$  che, però, permette di scrivere la potenza complessa in una forma più comoda:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* - \bar{V}_0(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*) = (\bar{V}_1 - \bar{V}_0)\bar{I}_1^* + (\bar{V}_2 - \bar{V}_0)\bar{I}_2^* + (\bar{V}_3 - \bar{V}_0)\bar{I}_3^* \\ &= \bar{V}_{10}\bar{I}_1^* + \bar{V}_{20}\bar{I}_2^* + \bar{V}_{30}\bar{I}_3^*\end{aligned}$$

Si può dedurre con chiarezza che **la misura fornisce direttamente la potenza assorbita dal carico trifase e che il centro  $U$  si comporta come centro stella artificiale**. Dal momento in cui questo punto è arbitrario, **lo si potrebbe mettere su una delle tre linee**, rendendo inutile l'uso del rispettivo wattmetro, che restituirebbe sempre misura nulla:



Questo tipo di configurazione viene detta **inserzione di Aron** e chiarisce il fatto che **sono necessari solo due wattmetri per misurare la potenza assorbita da un carico trifase**.

Se **il carico è equilibrato**, quanto detto finora può essere **semplificato**; innanzitutto, la **formula generale** diventa:

$$\dot{P} = P + iQ = \bar{V}_{10}\bar{I}_1^* + \bar{V}_{20}\bar{I}_2^* + \bar{V}_{30}\bar{I}_3^* = \dot{Z}\bar{I}_1\bar{I}_1^* + \dot{Z}\bar{I}_2\bar{I}_2^* + \dot{Z}\bar{I}_3\bar{I}_3^* = 3\dot{Z}I^2$$

Dove  **$I$  è il valore efficace comune alle tre correnti**. Se l'impedenza di carico è posta in forma trigonometrica  $\dot{Z} = [Z, \varphi]$ , la relazione precedente diventa:

$$\dot{P} = P + iQ = 3ZI^2 \cos \varphi + i3ZI^2 \sin \varphi = 3ZI^2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Da cui, ponendo  $E = ZI$ :

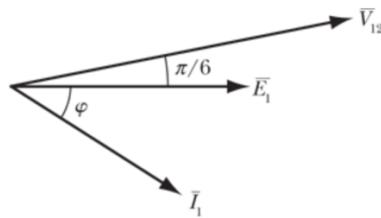
$$\begin{cases} P = 3EI \cos \varphi \\ Q = 3EI \sin \varphi \end{cases}$$

Nel caso di carichi equilibrati **si semplificano anche le considerazioni sulla misura della potenza in inserzione di Aron**; infatti, misurando la potenza con due wattmetri, si era determinato che **la potenza attiva era la somma delle potenze rilevate dai dispositivi ma non era possibile dimostrare una proprietà simile per la potenza reattiva**. Nelle condizioni attuali, invece, si può dire che la potenza reattiva è proporzionale alla differenza dei due valori misurati dai wattmetri, delineando così le due potenze come segue:

$$\begin{cases} P = W_1 + W_2 \\ Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) \end{cases}$$

Il **teorema di Aron**, che dimostra questo risultato, è importantissimo non solo perché **permette di calcolare la potenza reattiva** ma perché dà una speranza alla **giustificazione fisica di questa quantità**; infatti, qualsiasi cosa che si può misurare esiste ed esisterà una precisa spiegazione della potenza reattiva.

Per dimostrare questi due risultati vanno **indagare le relazioni di fase che intercorrono tra le tensioni concatenate e le correnti di linea**. Per semplicità sia preso in considerazione, con l'aiuto della figura seguente, il primo termine della terna, gli altri saranno determinati con uno sfasamento di  $2\pi/3$ .



Per una questione di semplicità si suppone il carico ohmico – induttivo, non perdendo di generalità. Ne consegue che la **tensione stellata  $\bar{E}_1$**  è in anticipo rispetto alla corrente  $\bar{I}_1$  proprio dell'angolo  $\varphi$  dell'impedenza  $\dot{Z}$ ; a sua volta,  $\bar{E}_1$  è in ritardo rispetto alla tensione concatenata  $\bar{V}_{12}$  di  $\pi/6$ . Si può concludere che la **tensione concatenata tra 1 e 2 è in anticipo rispetto alla corrente della prima linea di un angolo  $\varphi + \pi/6$** :

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \left[ V, \frac{\pi}{6} \right] \\ \bar{V}_{23} = \left[ V, -\frac{\pi}{2} \right] \\ \bar{V}_{31} = \left[ V, -\frac{7}{6}\pi \right] \end{cases} \wedge \begin{cases} \bar{I}_1 = [I, -\varphi] \\ I_2 = \left[ I, -\varphi - \frac{2}{3}\pi \right] \\ \bar{I}_3 = \left[ I, -\varphi - \frac{4}{3}\pi \right] \end{cases}$$

Con questi dati a disposizione è possibile **ricostruire il valore segnalato dal wattmetro**:

$$W_1 = VI \cos\left(-\frac{7}{6}\pi + \pi + \varphi\right) = VI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi\right)$$

$$W_2 = VI \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) = VI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi\right)$$

Non è difficile concludere che la **somma di queste due quantità restituisce la formula della potenza attiva** e che la loro differenza quella della potenza reattiva.

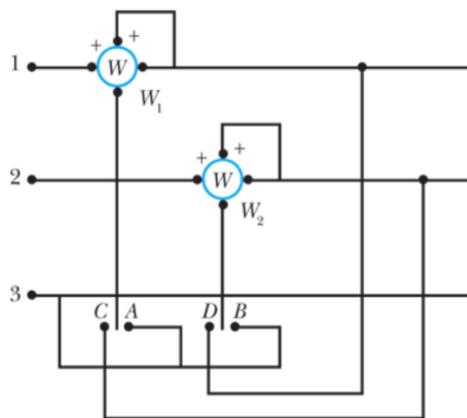
In conclusione, **in inserzione Aron due wattmetri possono restituire sia la misura della potenza attiva che di quella reattiva**. Vale la pena notare che è possibile sostituire i wattmetri convenzionali con i wattmetri integratori, detti comunemente contatori, per ottenere la misura dell'energia; data l'importanza economica di tale misura, è **necessario usare strumenti e metodi che non risentano troppo di dissimmetrie (spesso trascurabili) e squilibri (spesso consistenti) del sistema trifase**. Per ciò, conviene usare **l'inserzione Aron per le misure di energia attiva** (con indicazioni corrette per qualsiasi grado dissimmetria e squilibrio del sistema) e **l'inserzione Barbagelata (o Righi) per**

**le misure di potenza reattiva** (con un  $\cos \varphi$  medio accettabile per qualsiasi squilibrio, purché il grado di dissimmetria sia contenuto).

In figura viene mostrata **l'inserzione Barbagelata**, in onore all'omonimo ingegnere che l'ha introdotta, che permette di ricavare la potenza reattiva in un sistema simmetrico squilibrato per mezzo della relazione:

$$Q = \frac{W_{1A} - W_{2B} + 2(W_{1C} - W_{2D})}{\sqrt{3}}$$

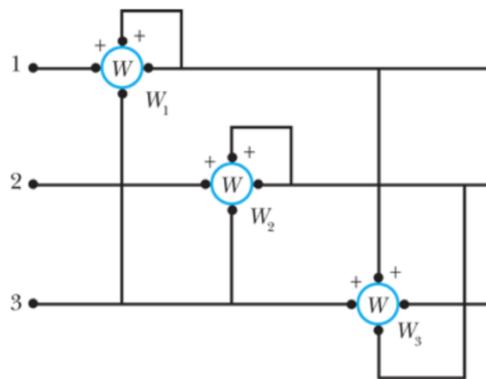
Dove  $W_{1A}, W_{2B}, W_{1C}, W_{2D}$  sono le letture dei wattmetri con i commutatori posti nelle posizioni A, B, C e D.



**L'inserzione Righi**, invece, permette di ricavare la potenza reattiva in un sistema simmetrico squilibrato come:

$$Q = \frac{W_1 - W_2 + 2W_3}{\sqrt{3}}$$

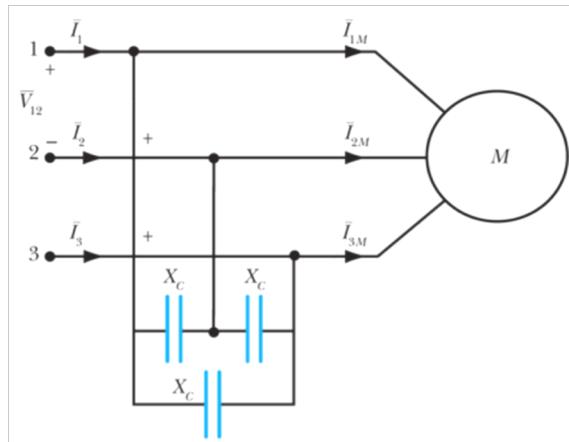
Dove  $W_1, W_2$  e  $W_3$  rappresentano le indicazioni dei tre wattmetri.



In conclusione, si può dire che **la potenza reattiva è sempre una combinazione lineare della misura di wattmetri**.

## RIFASAMENTO DEI SISTEMI TRIFASE

Per il **rifasamento di un sistema trifase** si ricorre solitamente a **tre condensatori collegati a triangolo**; per comodità si farà riferimento al **generico carico trifase con la lettera M di motore**.



**Il motivo per cui i condensatori sono a triangolo**, anziché a stella, non ha a che fare con i risultati ma è una pura **questione economica: a parità di potenza assorbita** (che è negativa per i condensatori) **il costo aumenta al diminuire della tensione e al crescere della capacità**, ciò che accadrebbe se si passasse al collegamento a stella.

Per il calcolo delle capacità necessarie a rifasare un carico ohmico – induttivo (come il motore), da un angolo  $\varphi$  ad uno  $\varphi' < \varphi$ , si può **ricorrere allo schema proposto di seguito**.

- **Prima dell'inserimento della batteria di condensatori**

$$\frac{Q}{P} = \tan \varphi \Rightarrow Q = P \tan \varphi$$

- **Dopo l'inserimento della batteria di condensatori**

$$\frac{Q + Q_C}{P} = \tan \varphi' \Rightarrow Q + Q_C = P \tan \varphi' = P \tan \varphi + Q_C$$

Dato che:

$$Q_C = -3 \frac{V^2}{X_C} = -3 \omega C_\Delta V^2$$

Segue che **il valore della capacità da utilizzare per ottenere il rifasamento desiderato è:**

$$C_\Delta = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega V^2}$$

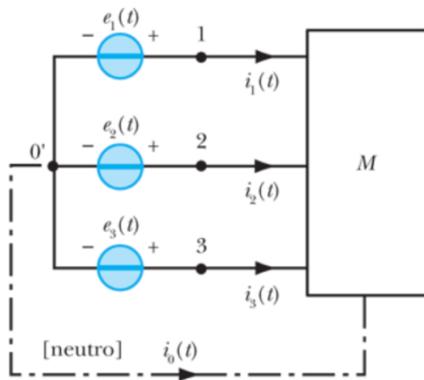
Con questo risultato **si dimostra anche che la scelta del collegamento**, tra stella e triangolo, **non dipende dal risultato che esso stesso introduce**; infatti:

$$C_{\Delta} = \frac{1}{3} C_Y = \frac{1}{3} \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2} \Rightarrow C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}$$

Quanto appena detto si applica al caso di carichi ohmici – induttivi ma le stesse considerazioni possono essere fatte per carichi ohmico – capacitivi, solo che al posto di una batteria di condensatori si usa una batteria di induttori.

## I VANTAGGI DEI SISTEMI TRIFASE

Arrivati a questo punto ci si potrebbe chiedere quali siano i vantaggi dei sistemi trifase rispetto a quelli monofase e per avere un quadro completo è necessario tenere in considerazione le potenze per tali sistemi. Sia presa in considerazione la rete seguente:



Si tratta di un circuito ideato dal fisico ed ingegnere britannico John Hopkinson (che ha formulato e dimostrato il teorema di cui si sta per parlare), composto dalla solita **terna di tensioni stellate che alimenta un carico qualsiasi**, supposto a priori **equilibrato**,  $M$ , dove la presenza del neutro non è indispensabile alla trattazione in esame. Quale che sia il carico in questione, la **potenza istantanea erogata dai generatori**, e quindi **assorbita dal carico stesso**, è:

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

Ricordando che la **terna di tensioni è simmetrica e quella di correnti equilibrata**:

$$\begin{cases} e_1(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ e_2(t) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ e_3(t) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases} \wedge \begin{cases} i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \\ i_3(t) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \end{cases}$$

Il valore efficace e la fase della corrente,  $I$  e  $\varphi$ , dipendono da come è realizzato il carico, o meglio dipendono dal tipo di carico. Ne segue che la potenza è:

$$\begin{aligned} p(t) &= EI \left[ 2 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) + 2 \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \right] \end{aligned}$$

Ricordando che  $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ :

$$p(t) = 3EI \cos \varphi - 3EI \left[ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \right]$$

Questa quantità è composta da due parti, un **termine costante** e non dipendente dal tempo:

$$3EI \cos \varphi$$

E un **termine variabile** che, ad una prima analisi, sembra dipendere dal tempo:

$$3EI \left[ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \right]$$

In realtà **questo termine è nullo**, infatti posto  $\alpha = 2\omega t - \varphi$  e visto che:

$$\frac{8}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$$

**La somma dei tre coseni** rappresenta la somma tre fasori sfasati di  $2\pi/3$  che, come si è già avuto modo di vedere, è **nulla**. Ne consegue che la **potenza istantanea** è:

$$p(t) = 3EI \cos \varphi = P$$

È proprio questo il **primo vantaggio dei sistemi trifase: la potenza istantanea è costante ed indipendente dal tempo**; nei **sistemi monofase** in regime sinusoidale erano stati individuate altrettante componenti per la potenza istantanea, una costante (la potenza media) e una oscillante con pulsazione doppia e a valor medio nullo in un periodo.

Un **carico trifase equilibrato assorbe una potenza istantanea costante nel tempo**, che coincide con il suo valor medio, mentre **il caso monofase rappresenta un inutile impegno della sorgente a fornire energia al carico**, visto che in determinati momenti il trasferimento avveniva da sorgente a carico e in altri da carico a sorgente.

Infine, va puntualizzato che **la fase  $\varphi$  non è altro che l'angolo tra la generica tensione di fase con la rispettiva corrente di linea**; in questa definizione **non interviene alcuna tensione concatenata** ma, nonostante ciò, è **possibile trovare alcune rappresentazioni della potenza istantanea che fanno riferimento al valor efficace della tensione concatenata  $V = E\sqrt{3}$** :

$$P = \sqrt{3}VI \cos \varphi$$

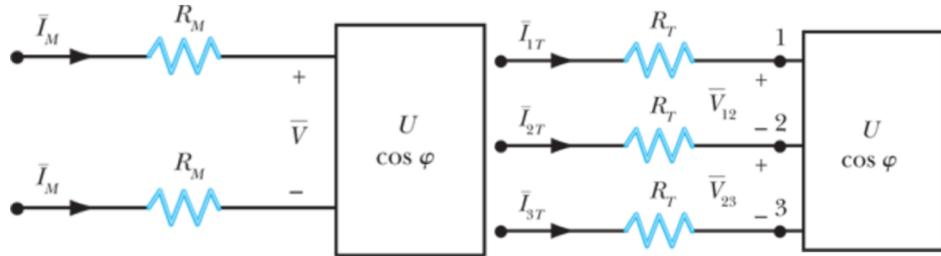
Si supponga di avere un **certo utilizzatore  $U$**  (una palazzina di tre piani ad esempio) **caratterizzato da un certo fattore di potenza** ( $\cos \varphi$ ) e di dover decidere se sia **più conveniente alimentarlo secondo uno schema monofase o trifase** (senza neutro e senza specificazione tra stella e triangolo). **A patto di adoperare lo stesso valore efficace di tensione sul carico**, due cose devono essere assunte uguali: la **potenza dissipata lungo le linee**, dovuta al trasporto, e la **potenza fornita dal carico**.

**Uguagliando le potenze assorbite dal carico** sottoposto alle due diverse alimentazioni e quelle dissipate durante il trasporto:

$$VI_M \cos \varphi = \sqrt{3}VI_T \cos \varphi \Rightarrow I_M = \sqrt{3}I_T$$

$$2R_M I_M^2 = 3R_T I_T^2 \Rightarrow 2R_M 3I_T^2 = R_T 3I_T^2 \Rightarrow R_M = \frac{R_T}{2}$$

Dove  $I_M, R_M$  e  $I_T, R_T$  sono, rispettivamente, i valori efficaci della corrente di alimentazione e le resistenze offerte dai conduttori, nel caso trifase e monofase.



**Ricordando il legame tra resistenza, resistività, lunghezza e sezione del conduttore**, e che le linee di collegamento tra le due alimentazioni hanno la stessa lunghezza  $L$ :

$$R_M = \frac{R_T}{2} \Rightarrow \frac{\rho L}{S_M} = \frac{1}{2} \frac{\rho L}{S_T} \Rightarrow S_M = 2S_T$$

Già questo risultato suggerisce un **vantaggio dei sistemi trifase**: la sezione dei conduttori necessaria per questo collegamento è la metà rispetto a quella necessaria per il collegamento **monofase**, conducendo ad un **volume di materiale minore** e ad un **risparmio sul costo**. In particolare:

$$Vol_M = 2S_M L = 4S_T L \wedge Vol_T = 3S_T L$$

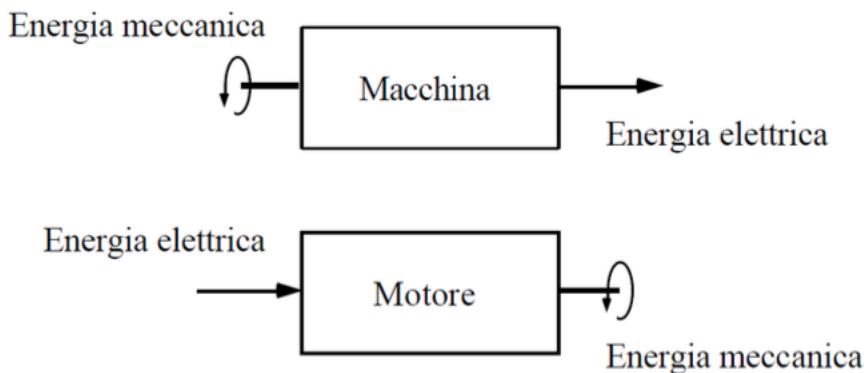
$$Vol_T = \frac{3}{4} Vol_M$$

Ovvero, un **risparmio del 25% sull'acquisto di materiale conduttore**; infine, vale la pena notare come l'**energia dei tre generatori venga trasmessa con tre fili anziché sei**, risultando in un **maggior rendimento di trasmissione** (la potenza elettrica assorbita è esattamente la metà).

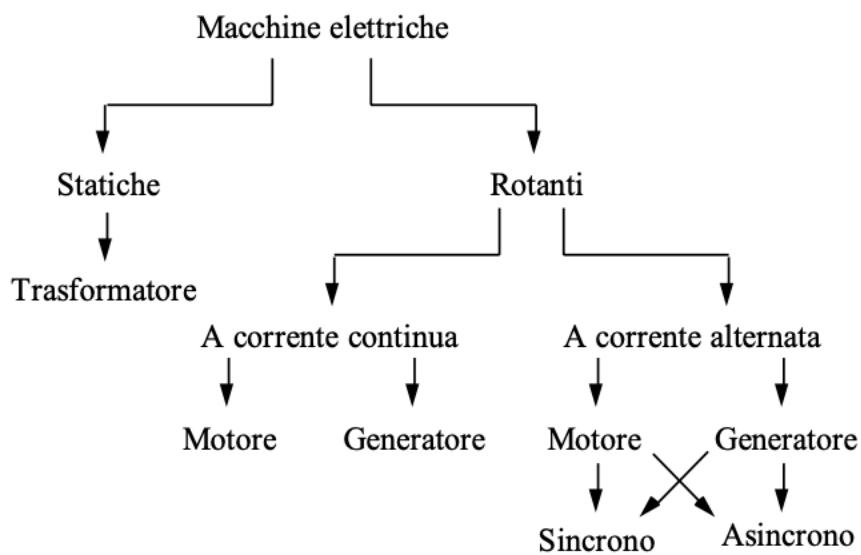
## ***MACCHINE ELETTRICHE E TRASFORMATORE***

### **GENERALITÀ SULLE MACCHINE ELETTRICHE**

Lo studio delle **macchine elettriche** e di ciò che si basa su di esse non può prescindere dall'utilizzo di un **gergo semantico preciso** che è bene chiarire prima di mettere le mani in pasta; si definisce **macchina** un qualunque dispositivo in grado di **convertire energia meccanica in energia elettrica**, mentre si parla di **motore** facendo riferimento ai **dispositivi duali**, in grado di **trasformare energia elettrica in energia meccanica**:



Invece, per **macchina elettrica** si intende l'**insieme di macchine e motori**. Queste possono essere suddivise in **macchine statiche**, prive di parti in movimento, e **macchine rotanti**, nelle quali è presente una ruota che gira attorno ad un asse; a loro volta, le macchine rotanti si dividono in **macchine elettriche a corrente continua o alternata**, dove queste ultime sono **di tipo sincrono o asincrono**.



### **RENDIMENTO E PERDITE**

Come in qualsiasi oggetto che funziona grazie al trasferimento di energie, anche le **macchine elettriche sono sede di perdite**; le perdite in questione sono di **vario tipo**: possono originarsi nei conduttori, nel ferro di cui sono composte, a causa di attriti o eventuali ventilazioni, e così via.

perdite che verranno approfondite in questa sede sono quelle **di natura elettrica e meccanica**, con un particolare accento sulle prime.

Quando si parla di **perdita** è importante **qualificare e quantificarne l'entità**; in particolar modo, è importante dare **attenzione al rendimento**, definito come il **rappporto tra la potenza in uscita e quella in entrata**:

$$\eta = \frac{P_{US}}{P_{IN}}$$

Per la **seconda legge della termodinamica**, la potenza in uscita non sarà mai maggiore o uguale alla potenza in ingresso; pertanto, si introduce la **potenza assorbita** come la differenza tra il contributo in ingresso e quello in uscita:

$$P_{ASS} = P_{IN} - P_{US}$$

Questa quantità è **fondamentale per le macchine elettriche**, non solo perché **quantifica le perdite** ma anche perché è **necessaria al funzionamento ontologico della macchina stessa**. Con la definizione di potenza assorbita è possibile ottenere una definizione più umana del rendimento:

$$\eta = \frac{P_{IN} - P_{ASS}}{P_{IN}} = 1 - \frac{P_{ASS}}{P_{IN}}$$

Ma, poiché il dispositivo è (per definizione) passivo,  $0 < P_{ASS} < P_{IN}$ ; quindi:

$$0 < \eta < 1$$

In genere, le **macchine elettriche** hanno un **rendimento percentuale del 85%**, con determinati dispositivi che possono raggiungere anche vette del 95%; questo valore giustifica il successo delle macchine elettriche in relazione alle macchine tradizionali: **un motore elettrico ha il triplo del rendimento di un motore termico, che si attesta sul 20-30%**.

Una volta quantificata la perdita di una macchina elettrica è bene osservare **da dove proviene questa potenza assorbita**, in modo tale da agire per **ridurla al minimo**. Esistono diverse fonti della perdita di una macchina elettrica, tra cui:

- **Perdite nel rame**

**Un conduttore** (tipicamente rame,  $\sigma \cong 58MS/m$ ) **percorso da corrente è sempre riconducibile ad un resistore**; quindi, sarà **soggetto a perdite per effetto Joule** (seppur non siano il contributo più significativo):

$$P_{Cu} = RI^2$$

Dove  $I$  è il valore di corrente in regime stazionario o il valore efficace della corrente sinusoidale.

- **Perdite nel ferro**

I **materiali ferromagnetici** (riferito come ferro) di cui sono ricchi le macchine elettriche, quando **immersi in un campo magnetico variabile finiscono per riscaldarsi**; le perdite che causano questo innalzamento della temperatura sono due:

- Perdite per correnti parassite (o correnti di Foucault)

Sia considerato il **cilindro di sezione  $\pi a^2$**  e **di resistività  $\rho$**  immerso in un campo di induzione **magnetica**, uniforme nello spazio e diretto parallelamente all'asse del cilindro. Il **modulo** di questo campo può essere descritto da una **funzione sinusoidale** che varia nel tempo con pulsazione  $\omega = 2\pi f$ :

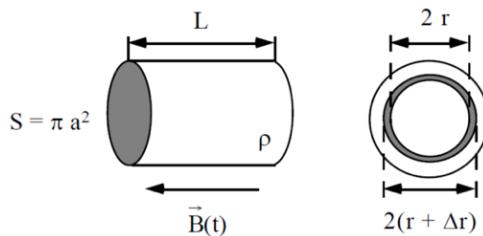
$$B(t) = B\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

Con la **convenzione ai valori efficaci**, questa forma d'onda verrà menzionata sotto forma di **fasore complesso**:

$$\bar{B} = B \neq \vec{B}(t)$$

Il cilindro può essere considerato come **composto da tanti tubi cilindrici coassiali di spessore piccolo,  $\Delta r$** , e di lunghezza  $L$ . Ognuno di essi può essere pensato come **una spira che si concatena con il flusso sinusoidale  $\phi(t)$**  a comporre un **grande solenoide**:

$$\phi(t) = \pi r^2 B(t) \Rightarrow \bar{\phi} = \pi r^2 \bar{B} = \pi r^2 B$$



Dalla **legge di Faraday – Neumann – Lens**, è noto che **nella spira si induce una forza elettromotrice**, ovviamente sinusoidale, a causa della **variazione di flusso**:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \Rightarrow \bar{E} = -i\omega\bar{\phi} = -i\omega\pi r^2 B$$

Questa forza elettromotrice tende a far circolare **una corrente nella spira che fluisce in circuiti circolari coassiali al tubo cilindrico**. La **conduttanza**, offerta dalla spira al passaggio di corrente, risulta pari a:

$$\Delta G = \frac{L}{2\pi\rho r} \Delta r$$

Mentre il **valore efficace della corrente** in questione (tralasciando l'induttanza) è:

$$\Delta I = E\Delta G = \frac{EL}{2\pi\rho r} \Delta r$$

Da cui si può ottenere la **potenza attiva  $\Delta P$**  assorbita dalla spira **per effetto Joule** e legata al passaggio di questa corrente:

$$\Delta P = E\Delta I = \frac{E^2 L}{2\pi\rho r} \Delta r = (\omega\pi r^2 B)^2 \frac{L}{2\pi\rho r} \Delta r = \frac{\pi L}{2\rho} \omega^2 B^2 r^3 \Delta r$$

**La potenza  $P$  assorbita dall'intero cilindro conduttore è:**

$$P = \frac{\pi L}{2\rho} \omega^2 B^2 \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi L}{8\rho} \omega^2 B^2 a^4$$

Volendo mettere in evidenza la **potenza assorbita nell'unità di volume** (detta **potenza specifica**), **dovuta alle correnti parassite**, si può scrivere:

$$P_{CP} = \frac{P}{\pi a^2 L} = \frac{\pi^2 a^2}{2\rho} f^2 B^2 = \frac{\pi^2 a^2}{4\rho} f^2 B_M^2$$

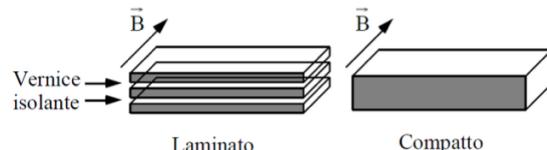
È chiaro che questa potenza **dipende dalla forma e dalla chimica del materiale**; infatti, è possibile raccogliere la formula in modo tale da osservare meglio da dove provengono i contributi che la rendono rilevante:

$$P_{CP} = k_{CP} f^2 B_M^2$$

Da cui si può dedurre che **le perdite per correnti parassite dipendono dal materiale, dalla frequenza a cui si sta lavorando e dal campo magnetico intrappolato nel ferro**. La costante  $k_{CP}$  è tipica per ogni forma e materiale del conduttore, per il caso appena analizzato è:

$$k_{CP} = \frac{\pi^2 a^2}{4\rho}$$

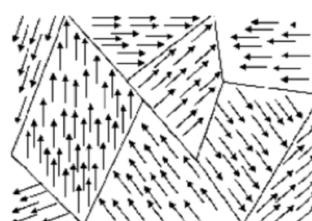
Mantenendo costanti gli altri parametri, è evidente che **questa costante** (quindi la perdita) **dipende proporzionalmente dalla superficie del conduttore**; pertanto, per limitare gli effetti delle correnti parassite, si ricorre alla **laminazione del conduttore**, ovvero all'impiego di più lamine (che mantengano costante il volume ma diminuiscano la superficie) separate da una vernice isolante:



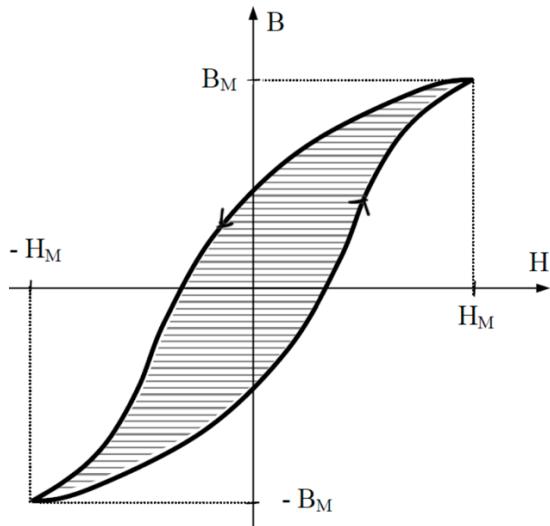
Le **correnti di Foucault indicano che quello che si sta usando è un buon conduttore**; infatti, per il campo di induzione magnetica ( $B$ ) il ferro rappresenta un **tubo di flusso** che intrappola tale campo. Questo vantaggio viene con un costo alto, ovvero le perdite di cui si sta parlando.

- **Perdite per isteresi**

Un **conduttore ferromagnetico** può essere visto come un **insieme di tanti piccoli bipoli magnetici** (in genere gli atomi) che, **in assenza di campo magnetico, non si comportano come i magneti normali**, ovvero **non si dispongono causalmente** e non risultano in un campo magnetico medio nullo; in alcune regioni del materiale, detti **domini di Weiss**, la **magnetizzazione dei bipoli magnetici è uniforme**:



Questa proprietà non solo **spiega le perdite per effetto Joule** (quando il materiale è soggetto a campo magnetico i domini sfregano tra di loro mentre si polarizzano) ma **produce anche isteresi magnetica**, ovvero un fenomeno per cui **il campo d'induzione magnetica non si annulla in sincronia con quello magnetico** ma in ritardo (**υστέρεσις** in greco significa **ritardo**):



**L'area racchiusa tra i due rami del grafico rappresenta l'energia in calore per unità di volume del materiale persa** a causa dell'isteresi magnetica; essa **dipende dalla temperatura e dal tipo di materiale ferromagnetico**, classificandosi in magneticamente duri (area più ampia) e magneticamente morbidi (area più sottile).

Studi sperimentali effettuati da Steinmetz hanno evidenziato che **la potenza specifica assorbita per isteresi magnetica** da un materiale sottoposto a magnetizzazione alternativa è:

$$P_I = k_I f B_M^\alpha$$

Dove  $k_I$  rappresenta un coefficiente dipendente dal materiale e  $\alpha$  un numero reale sperimentalmente ottenuto e definito come:

$$\alpha = \begin{cases} 1.6 & \Leftrightarrow B_M \leq 1.2T \\ 2 & \Leftrightarrow B_M > 1.2T \end{cases}$$

Le perdite per isteresi magnetica sono **molto più incisive** di quelle per correnti parassite **per frequenze basse**, mentre per frequenze alte vale il contrario; ciò che però conta quando si va ad acquistare un materiale è la cosiddetta **cifra di perdita**, ovvero una **misurazione della potenza specifica** che tiene **in considerazione sia delle correnti parassite che dell'isteresi magnetica**. Ad esempio, per il ferro:

$$P_{Fe} = P_{CP} + P_I = k_{CP} f^2 B_M^2 + k_I f B_M^\alpha$$

Poiché i singoli parametri sono difficili da determinare, i costruttori preferiscono fornire  $P_{Fe}$ . In genere, questi valori sono riferiti a **lamiere nuove**, bisogna aggiungere circa un 10% per l'usura del materiale e per lavorazioni meccaniche eventuali durante la fase di costruzione.

- **Perdite negli isolamenti**
- **Perdite meccaniche**
- **Perdite per attrito**

- Perdite per ventilazione
- Perdite addizionali

Questi ultimi tipi di perdite sono **trascurati** perché sono **trascubibili i loro contributi** in relazione a quelli precedentemente esposti.

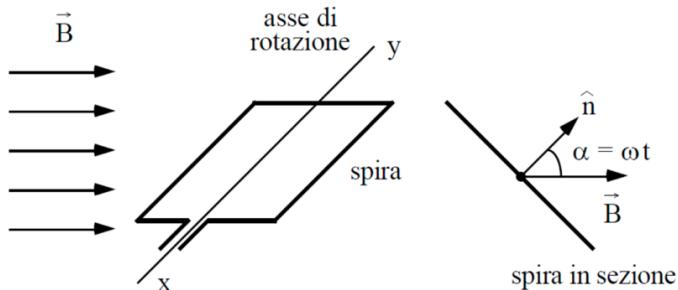
**L'innalzamento della temperatura è un comportamento dannoso** non solo per il ferro, che rischia di perdere le proprietà magnetiche, ma anche **per gli isolanti**, che possono deteriorarsi e risultare **in una generale diminuzione della vita della macchina elettrica**. Per **vita media** di una macchina elettrica si intende **il periodo di tempo in cui le condizioni di funzionamento sono sopra un determinato limite**, oltre il quale la macchina non assolve più al compito per cui è stata progettata in maniera adeguata; l'affermazione precedentemente fatta deriva da osservazioni sperimentali per cui:

$$\langle \text{vita} \rangle \propto A e^{\frac{B}{T}}$$

Con  $A$  e  $B$  parametri che dipendono dal materiale. Le temperature non solo diminuiscono la vita media dei conduttori e degli isolanti, ma riducono anche il rendimento delle macchine elettriche.

## IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DEI GENERATORI

Lo **schema semplificato di un generatore** consiste in **una spira che ruota a velocità angolare costante e immersa in un campo magnetico uniforme**:



Il **flusso indotto dalla spira** è:

$$\phi(t) = \int_A \bar{B} \cdot \hat{n} dS = BA \cos(\omega t)$$

Dove  $A$  rappresenta la superficie della spira. Se ruota la spira ruota anche il versore normale, visto che i due sono solidali; quindi, varia l'inclinazione tra il vettore campo magnetico e il versore normale seguendo una legge lineare nel tempo e nella velocità angolare,  $\alpha = \omega t$ . Dalla **legge di Faraday – Neumann – Lens**, la **variazione di flusso** (causa in questo caso dalla variazione del prodotto scalare) produce una **forza elettromotrice indotta**:

$$e(t) = -\frac{d[N\phi(t)]}{dt} = -NBA \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t)$$

Dove  $N$  rappresenta il numero di spire in un avvolgimento generico. Il **valore efficace di questa f.e.m. sinusoidale** è:

$$E = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}} = N \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} \phi_{MAX}$$

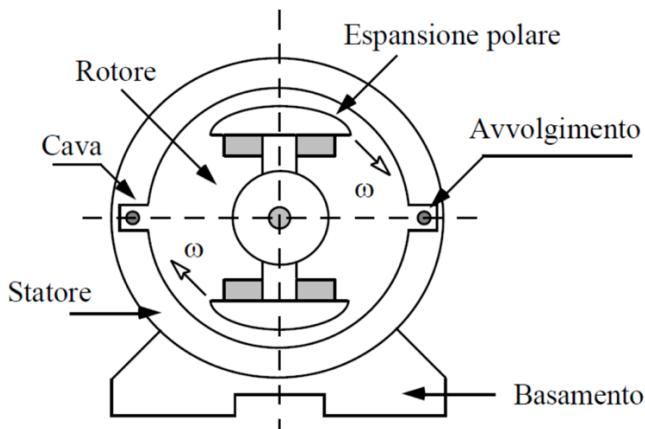
Con  $\phi_{MAX} = BA$  il massimo valore che può assumere il flusso ( $\omega t = 0 \Rightarrow \phi(t) = BA \cos 0$ ).

Nella pratica, per far funzionare correttamente questo generatore è necessario mettere in moto la spira con energia meccanica esterna, ad esempio dell'acqua che scorre; quale che sia questo motore primo, è necessario che la velocità angolare sia costante per garantire una tensione sinusoidale.

Quanto detto finora è il principio di funzionamento dei **generatori sinusoidali**, detti **alternatori**; vale la pena sottolineare che un dispositivo di questo tipo sfrutta una proprietà della legge di FNS riguardo la variazione di flusso:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

La derivata totale (e non quella parziale) rende equivalenti i moti relativi di spira e campo magnetico: o ruota la spira o ruota il campo magnetico, gli effetti sono gli stessi. Nelle applicazioni pratiche si preferisce far ruotare il campo magnetico e tenere la spira ferma; un alternatore di questo tipo è schematizzato come un cilindro composto in due parti: uno statore, fisso ed esterno, che ospita due cave in cui alloggiano le spire, e il rotore, la parte più interna e quella che ruota, presenta due estremità (le espansioni, o scarpe, polari) e produce il campo di induzione magnetica.



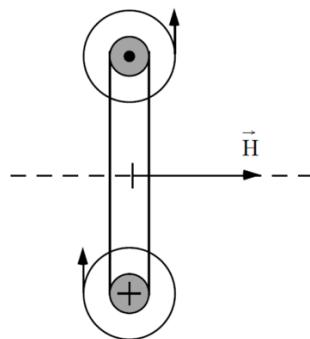
## IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DEL MOTORE ELETTRICO

Quello appena mostrato è il modo in cui convertire energia meccanica in energia elettrica; di seguito, invece, è presentata la trasformazione duale, da energia elettrica ad energia meccanica. Si parta con una piccola osservazione: si prenda in considerazione un magnete permanente e una bussola, al ruotare del magnete ruota anche l'ago magnetico della bussola; quello appena creato non è un motore elettrico, è un **trasduttore** che trasforma energia meccanica in altra energia meccanica ma permette di intuire un modo in cui il campo magnetico può essere ruotato, in modo da produrre un effetto simile a quello enunciato nel precedente capitolo. Il motore elettrico è ideato a partire da elementi che sono fermi, sono le correnti a variare in modulo e a produrre le opportune variazioni di campo magnetico da cui ricavare energia meccanica.

Prima di procedere, siano fatte alcune considerazioni sul campo generato da una spira. Sia considerata una **spira circolare**, percorsa da corrente entrante inferiormente ed uscente superiormente e **composta da  $N$  avvolgimenti**; supponendo che la spira sia immersa in un mezzo a permeabilità costante, ad essa sarà associato un **insieme di linee di forza sia per il campo magnetico  $\vec{H}$**  che per il campo d'induzione magnetica  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  il quale, al centro, avrà una determinata intensità condizionata dalla corrente e dal raggio medio della spira stessa:

$$H(t) = \frac{Ni(t)}{2R_M} = \lambda i(t)$$

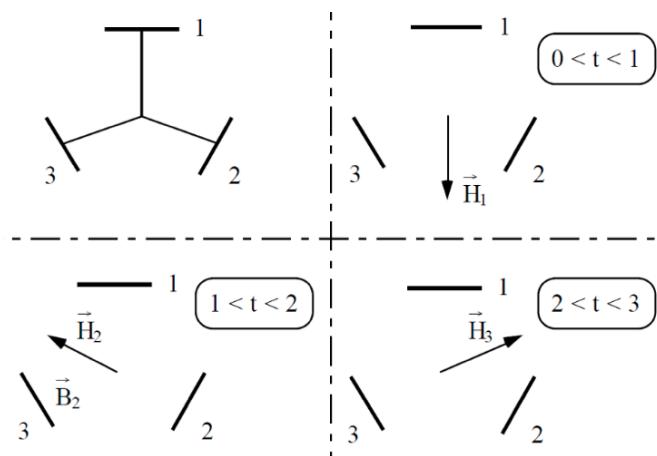
La direzione del campo sarà assiale alla spira, in corrispondenza del suo centro, mentre la direzione è determinata dalla regola della vite destrosgira per la corrente:



Se la corrente fosse costante, il campo magnetico sarebbe anch'esso costante; per le intenzioni attuali è importante far variare con una legge sinusoidale la corrente, in modo tale che:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t) \Rightarrow H(t) = \frac{NI_M}{2R_M} \sin(\omega t) = H_M \sin(\omega t)$$

Siano considerati tre avvolgimenti, percorsi dalla terna di correnti  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ , i cui assi di simmetria sono inclinati ad un angolo relativo di  $2\pi/3$ ; preso in considerazione un intervallo di tempo di tre secondi, si supponga di poter far circolare per  $0 < t < 1$  solo la corrente  $i_1(t)$ , dando vita solo al vettore  $\vec{H}_1$ , per  $1 < t < 2$  solo la corrente  $i_2(t)$ , dando vita solo al vettore  $\vec{H}_2$ , e per  $2 < t < 3$  solo la corrente  $i_3(t)$ , dando vita solo al vettore  $\vec{H}_3$ :



Ripetendo l'accensione di una sola corrente ogni secondo per diversi cicli si può osservare come il vettore campo magnetico ruoti nonostante le spire siano ferme.

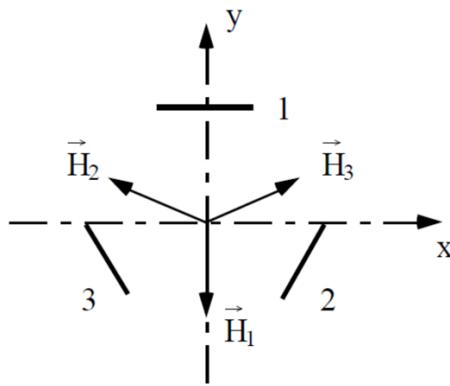
La rotazione presentata **non è continua**, il vettore campo magnetico varia a scatti ma per la continuità è necessario approfondire meglio il modo in cui le correnti fanno variare il campo magnetico. Si cominci con il supporre le tre correnti in regime sinusoidale, ricordando dell'inclinazione degli assi delle spire:

$$i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) \wedge i_2(t) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \wedge i_3(t) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

Si può notare come, **istante per istante, la somma delle tre correnti sia nulla e come esse condividano lo stesso valore efficace**:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad \forall t$$

Osservando nel piano i **tre vettori del campo magnetico prodotti dalle tre correnti**, è possibile individuare una loro **rappresentazione analitica**:



$$\vec{H}_1 = -\lambda i_1(t) \hat{y} \wedge \vec{H}_2 = \lambda i_2(t) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) \wedge \vec{H}_3 = \lambda i_3(t) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right)$$

**Il campo complessivamente prodotto è:**

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = \lambda \hat{x} \frac{\sqrt{3}}{2} [i_3(t) - i_2(t)] + \lambda \hat{y} \left[ -i_1(t) + \frac{i_2(t)}{2} + \frac{i_3(t)}{2} \right]$$

Sviluppando il primo termine:

$$\begin{aligned} i_3(t) - i_2(t) &= I\sqrt{2} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\ &= I\sqrt{2} \left[ -\frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) \right] = I\sqrt{6} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

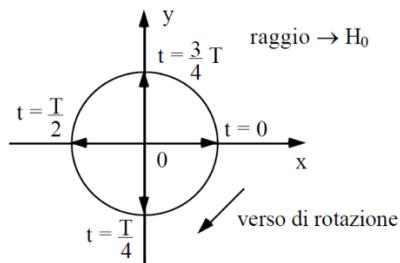
Per il secondo termine, sfruttando il fatto che la somma delle tre correnti è nulla:

$$-i_1(t) + \frac{1}{2}(i_2(t) + i_3(t)) = -i_1(t) - \frac{1}{2}i_1(t) = -\frac{3}{2}i_1(t)$$

Pertanto, il **campo magnetico totale**:

$$\vec{H} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \lambda I [\hat{x} \cos(\omega t) - \hat{y} \sin(\omega t)] = H_0 [\hat{x} \cos(\omega t) - \hat{y} \sin(\omega t)]$$

**Il vettore  $\vec{H}$  ruota influenzato da due moti armonici che descrivono nel piano una circonferenza di raggio  $H_0$  e periodo  $T = 2\pi/\omega$ :**



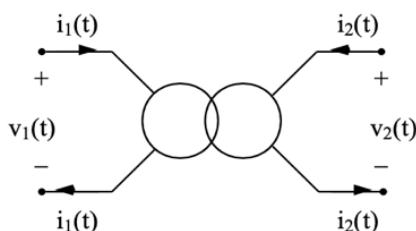
Si nota come **nel moto circolare uniforme** descritto dalla legge sopra rilevata, i **tre stati discreti** a cui era associata la rotazione discontinua inizialmente introdotta non sono altro che **delle fasi di passaggio attraverso cui il vettore campo magnetico passa**.

In conclusione, **tre solenoidi i cui assi di simmetria formano una stella simmetrica e percorsi da una terna equilibrata di correnti trifase producono un campo magnetico rotante attorno al baricentro del sistema**. Galileo Ferraris, autore dello studio e delle osservazioni appena fatte, ha formulato teoricamente il motore elettrico sulla base di correnti bifase; tuttavia, dal momento in cui il mondo contemporaneo è mosso da linee di distribuzione trifase, è comodo rappresentare anche il motore elettrico nella sua forma trifase.

## IL TRASFORMATORE – LE ORIGINI E L’ACCOPPIAMENTO MUTUO

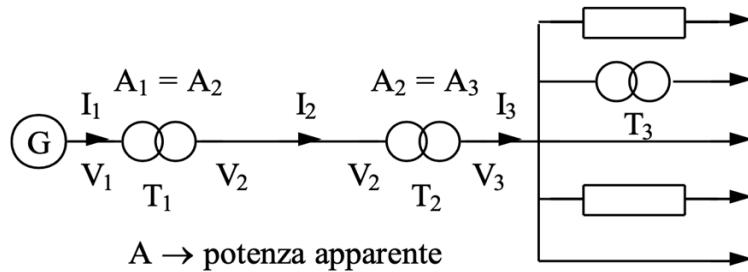
L’**energia elettrica viene prodotta in luoghi molto distanti da quelli di utilizzo** e per farla arrivare a destinazione servono linee di trasmissione adeguate; pur essendo fatte dei migliori conduttori esistenti, esse **dissipano parte dell’energia in questione in calore** e per valori elevati di corrente le **perdite potrebbero essere troppo elevate**, rendendo necessario un **abbassamento del valore efficace**. Questa operazione viene effettuata con l’impiego del **trasformatore reale**, dispositivo ben diverso da quello **ideale** precedentemente introdotto ma che **assolve allo stesso compito**: far trasparire una corrente diversa da quella in ingresso pur non cambiando il carico.

In sé e per sé, il **trasformatore è un dispositivo in grado di innalzare ed abbassare il valore della tensione in ingresso in maniera efficiente**, senza perdite eccessive; è un dispositivo **così potente e così efficiente che è stato necessario fornire una diversa definizione del rendimento** perché quella attualmente in possesso non è sufficiente ad apprezzare valori reali. Il motivo che risiede dietro la sua efficienza è **dovuto al fatto che il trasformatore è una macchina statica**, ovvero un dispositivo che non prevede movimento e attriti meccanici e, pertanto, **non è soggetto alle relative perdite**, con un rendimento che raggiunge anche il 99%.



Per comprendere il funzionamento di un trasformatore reale è bene conoscere la sua controparte ideale, già presentata nei capitoli precedenti, e sapere **il motivo per cui un doppio bipolo come**

**questo è così essenziale nella trasmissione dell'energia elettrica.** Approfondendo quest'ultimo prerequisito, si può osservare il seguente schema unifilare, che rappresenta la linea di trasmissione dell'energia elettrica tra una centrale (*G*) e gli utilizzatori ( $\rightarrow$ ):



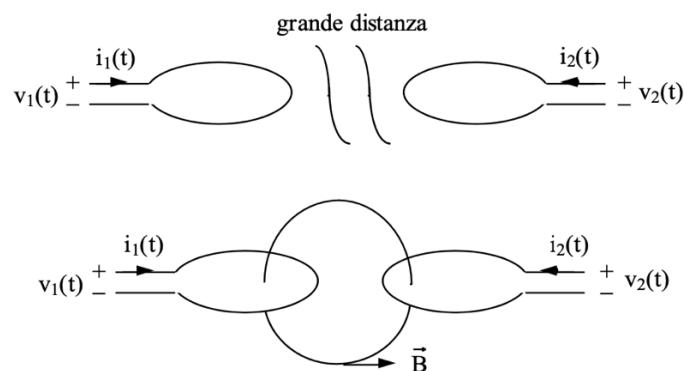
**Il primo trasformatore**, poiché la potenza apparente deve rimanere costante, **innalza il valore di tensione** da  $V_1$  a  $V_2 > V_1$ , abbassando come conseguenza  $I_1$  a  $I_2 < I_1$ , mentre **prima degli utilizzatori i valori sono riportati a quelli iniziali** da un trasformatore che esegue l'operazione inversa. Si potrebbe pensare che l'**innalzamento della tensione rappresenti lo stesso problema che il trasformatore stesso è stato invocato a risolvere ma si sarebbe in errore**; infatti, la potenza assorbita dalle linee di trasmissione, sebbene sia direttamente proporzionale alla tensione, è proporzionale in forma quadratica alla corrente e **il trasformatore abbassa comunque la perdita sebbene alzi uno dei suoi contribuenti**.

Nella realtà non è possibile costruire un trasformatore ideale, quindi è necessario trovare un metodo alternativo per realizzare lo stesso dispositivo nella realtà; in aiuto viene il **doppio bipolo accoppiamento mutuo**, che giustifica anche il perché il trasformatore reale (di contro rispetto a quello ideale) possa funzionare solo in regime di corrente alternata. Si immagini un sistema composto da due spire percorse da corrente, lontane abbastanza da non permettere ai due campi magnetici di interagire e ai cui capi si instaurano le seguenti differenze di potenziale:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \wedge v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Quando le due spire si avvicinano, i campi magnetici reagiscono e modificano queste differenze di potenziale, aggiungendo al contributo iniziale un addendo che dipende dal campo magnetico dell'altra spira:

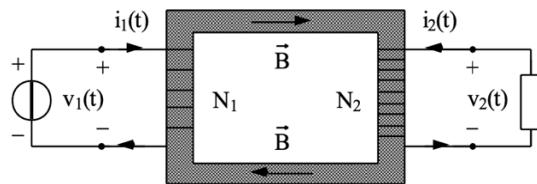
$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \text{qualcosa}_2 \wedge v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + \text{qualcosa}_1$$



Questi due nuovi termini aggiuntivi rappresentano l'**induzione magnetica mutua** che ognuna delle due spire genera sull'altra per mezzo del campo magnetico variabile: la spira 1, ad esempio,

indurrà con il proprio campo magnetico una f.e.m. sulla seconda spira, che risulterà in una corrente che, a sua volta, indurrà nuovamente una f.e.m. sul primo circuito, e così via anche per la spira 2. Allora le due spire saranno in accoppiamento mutuo per mezzo del campo di induzione magnetica  $B$  e le correnti che circoleranno nelle spire non saranno più sostenute solo dai rispettivi generatori ma anche dall'induzione dovuta all'altra corrente.

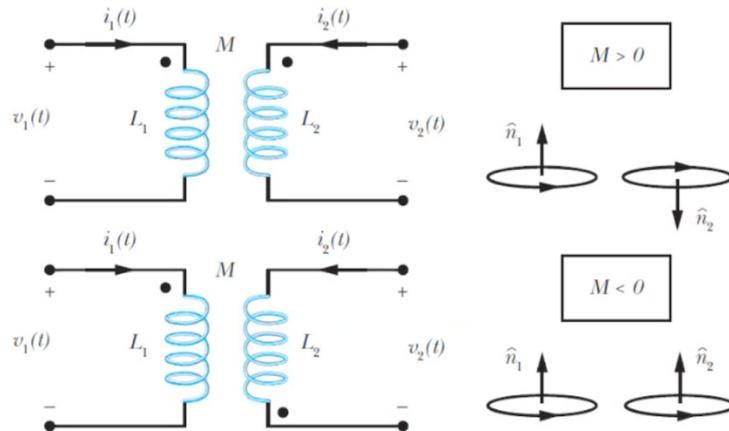
Può essere fatto un paragone tra l'accoppiamento mutuo e una fontana: il campo magnetico rappresenta gli zampilli d'acqua che vengono spruzzati dalla fontana e si può ben capire che non tutte le linee di campo di una spira andranno a fare induzione sull'altra; per ridurre la dispersione si impiegano dei buoni materiali ferromagnetici, come il ferro, i quali fungono da tubo di flusso che intrappa la maggior parte del campo d'induzione magnetica. Si inizia già a delineare uno schema realizzativo per l'accoppiamento mutuo, che prevede l'avvolgimento delle spire attorno un toroide di materiale ferromagnetico:



Il sistema che descrive un doppio bipolo di questo tipo è:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

I parametri  $M_{12}$  e  $M_{21}$  sono dette **mutue induttanze** e possono essere sia negativi che positivi in base alla convenzione fatta per i versi delle correnti:



In regime sinusoidale si può convertire un sistema di sinusoidi reali in un sistema di fasori complessi:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega M_{21} \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$

Si dimostra, di seguito, che le due induttanze mutue sono uguali; questa proprietà permette di ridurre a tre il numero di parametri da individuare per descrivere un accoppiamento mutuo. Osservando la potenza assorbita dal doppio bipolo:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left( L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \right) i_1(t) + \left( M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \right) i_2(t) \end{aligned}$$

Ricordando che **la potenza assorbita non è altro che la variazione di energia nel tempo**, si può scrivere la relazione precedente in termini differenziali:

$$dU_A = p_A(t)dt = (L_1 i_1(t) + M_{21} i_2(t))di_1(t) + (M_{12} i_1(t) + L_2 i_2(t))di_2(t)$$

Poiché **il sistema è conservativo** (non ci sono dispersioni nel vuoto che separa le due spire) e poiché **l'energia è una funzione di stato, la forma differenziale** rappresentata da questa relazione deve essere **esatta** e quindi:

$$\frac{\partial(L_1 i_1(t) + M_{21} i_2(t))}{\partial i_2(t)} = \frac{\partial(M_{12} i_1(t) + L_2 i_2(t))}{\partial i_1(t)}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

La caratteristica dell'accoppiamento mutuo può essere così **semplificata**:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

Una volta dimostrata questa proprietà, **si vuole determinare il legame tra i tre parametri** che caratterizzano il doppio bipolo; si parta sempre dalla considerazione dell'**energia elementare**:

$$dU_A = L_1 i_1(t)di_1(t) + L_2 i_2(t)di_2(t) + M(i_1(t)di_2(t) + i_2(t)di_1(t))$$

**Assumendo l'energia nulla quando le correnti sono nulle**, si può **integrare membro a membro** questa relazione e **quantificare l'energia assorbita dall'accoppiamento mutuo all'istante  $t$** :

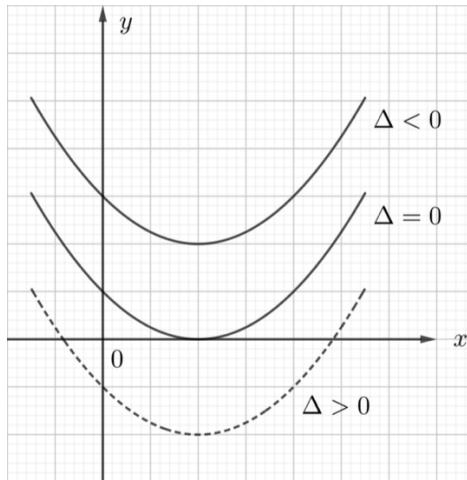
$$U_A(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 + M i_1(t) i_2(t)$$

**Essendo il doppio bipolo in esame passivo**, questa energia **non deve mai cambiare segno ed essere sempre positiva, al più nulla**. La forma funzionale evidenziata permette di **raccogliere un termine e notare una forma quadratica**:

$$U_A(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 \left[ 1 + \frac{2M}{L_1} \frac{i_2(t)}{i_1(t)} + \frac{L_2}{L_1} \left( \frac{i_2(t)}{i_1(t)} \right)^2 \right]$$

**Ciò che determina il segno** dell'energia è la quantità:

$$y \left( x = \frac{i_2(t)}{i_1(t)} \right) = \frac{2U_A(t)}{L_1 i_1(t)^2} = 1 + \frac{2M}{L_1} x + \frac{L_2}{L_1} x^2$$



Che rappresenta un insieme di parabole ad asse verticale; affinché sia sempre una quantità positiva, è necessario che l'equazione di secondo grado associata abbia solo soluzioni complesse coniugate, ovvero che:

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 - \frac{L_2}{L_1} \leq 0$$

$$\left(\frac{M}{L_1}\right)^2 \leq \frac{L_2}{L_1}$$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

Questa condizione codifica un solo tipo di accoppiamento mutuo ma, per una questione didattica e di chiarezza, si divide la relazione appena trovata in due situazioni:

- Accoppiamento perfetto  $M^2 = L_1 L_2$

La relazione può essere reinterpretata introducendo il parametro  $a$ :

$$\frac{M}{L_2} = \frac{L_1}{M} = a$$

Operando in regime sinusoidale, il rapporto tra la tensione alla prima porta e la tensione alla seconda è:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{i\omega L_1}{i\omega M} \cdot \frac{\bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2}{\bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2} = \frac{L_1}{M} = a$$

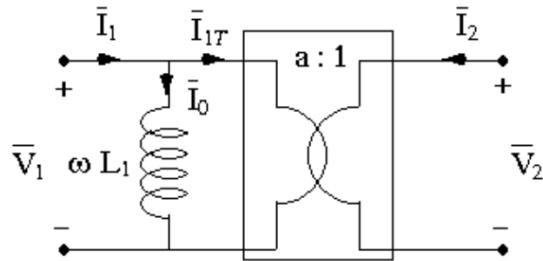
Riscrivendo la prima equazione, poi, si ottiene la corrente  $\bar{I}_1$ :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_1} - \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_1} - \frac{1}{a} \bar{I}_2$$

Comparando le due relazioni appena trovate con le corrispondenti del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = a\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_1} - \frac{1}{a}\bar{I}_2 \end{cases} \wedge \begin{cases} \bar{V}_1 = a\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{a}\bar{I}_2 \end{cases}$$

Le equazioni ricavate sono molto simili a quelle di un trasformatore ideale, ad eccezione del termine  $\bar{V}_1/i\omega L_1$ , una corrente relativa alla prima maglia che attraversa la reattanza  $\omega L_1$  in parallelo alla porta primaria. Un accoppiamento mutuo, quindi, può essere schematizzato come:



Se la relazione da cui ricavare la corrente  $\bar{I}_1$  fosse stata la seconda, l'induttore sarebbe stato in parallelo alla porta secondaria, anche se i due schemi sono perfettamente equivalenti. Per il riporto al primario, generalmente è preferita la schematizzazione riportata.

Ed è con queste considerazioni che si può finalmente rispondere alla domanda del perché non è possibile costruire un trasformatore ideale: solo per valori di  $L_1$  elevati il doppio bipolo più simile al trasformatore diventa approssimativamente un trasformatore ideale.

$$L_1 \rightarrow +\infty \Rightarrow \bar{I}_1 \cong -\frac{1}{a}\bar{I}_2$$

Inoltre, supponendo anche che si possa costruire un dispositivo simile, non potrebbe essere alimentato da una corrente continua, perché non ci sarebbe accoppiamento mutuo (non ci sarebbero campi d'induzione magnetica variabili).

- Accoppiamento imperfetto  $M^2 < L_1 L_2$

Le due induttanze possono essere considerate come la somma di due contributi:

$$L_1 = L_1^{(1)} + L_1^{(2)}$$

$$L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)}$$

Tali che:

$$M^2 = L_1^{(1)} L_2^{(1)}$$

Sebbene possa sembrare un mero artificio matematico, questo procedimento trova un chiaro riscontro nelle applicazioni pratiche. Si compone così un sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} L_1 = L_1^{(1)} + L_1^{(2)} \\ L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)} \\ M^2 = L_1^{(1)} L_2^{(1)} \end{cases}$$

**Un'incognita è di troppo**, quindi la si può eliminare considerando  $L_2^{(2)} = \mathbf{0}$ :

$$L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$$

Quindi:

$$\begin{cases} L_1 = L_1^{(1)} + L_1^{(2)} \\ L_2 = L_2^{(1)} \\ M^2 = L_1^{(1)} L_2 \end{cases}$$

**Il sistema ha una sola soluzione:**

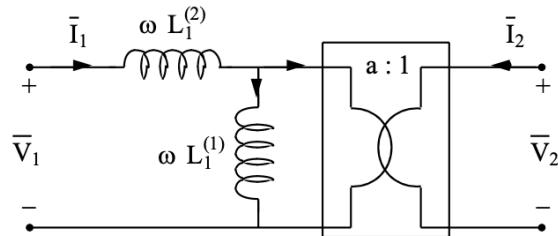
$$L_1^{(1)} = \frac{M^2}{L_2} \wedge L_1^{(2)} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} \wedge L_2^{(1)} = L_2$$

Sostituendo nella caratteristica del doppio bipolo:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega \bar{I}_1 [L_1^{(1)} + L_1^{(2)}] + i\omega M_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega M_{21} \bar{I}_1 + i\omega L_2^{(1)} \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega \bar{I}_1 L_1^{(1)} + i\omega M_{12} \bar{I}_2 + i\omega \bar{I}_1 L_1^{(2)} \\ \bar{V}_2 = i\omega M_{21} \bar{I}_1 + i\omega L_2^{(1)} \bar{I}_2 \end{cases}$$

**Se nella prima relazione mancasse il termine  $i\omega \bar{I}_1 L_1^{(2)}$  ci si troverebbe davanti allo stesso circuito equivalente mostrato in accoppiamento perfetto; pertanto, in seno allo stesso ragionamento fatto per il caso precedente, il termine aggiuntivo rappresenta un'induttanza  $L_1^{(2)}$  in serie alla porta primaria.**



Con quanto detto finora non risulta difficile immaginare che **si può passare dall'accoppiamento perfetto all'accoppiamento imperfetto aggiungendo l'induttanza in questione**. Resta solo da determinare la costante  $a$ ; dall'uguaglianza forzata precedentemente introdotta:

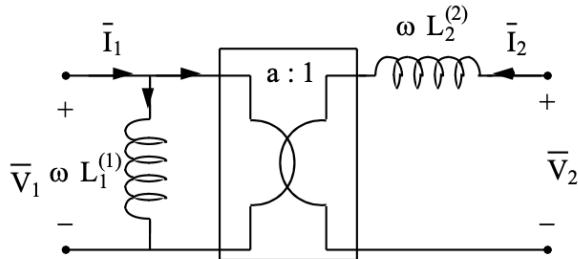
$$M^2 = L_1^{(1)} L_2$$

Segue che:

$$a = \frac{L_1^{(1)}}{M} = \frac{M}{L_2}$$

In un trasformatore ben progettato l'induttanza  $L_1^{(2)}$ , detta **longitudinale**, è piccola rispetto a  $L_1^{(1)}$  e a  $L_2$ , dette **induttanze trasversali**.

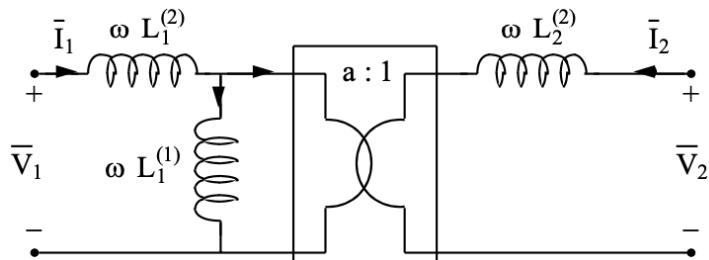
In modo analogo al caso precedente, se si pone  $L_1^{(2)} = 0$  l'induttanza longitudinale va in serie alla **porta secondaria** ed ha il valore di  $L_2^{(2)}$ :



Il parametro  $a$  vale:

$$a = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2^{(1)}}$$

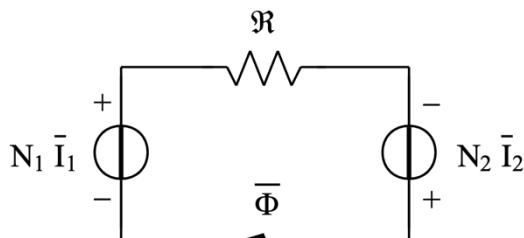
Il caso più generale prevede che nessuno dei due parametri presi in considerazione si annulli, risultando in un trasformatore del tipo:



$$a = \frac{L_1^{(1)}}{M} = \frac{M}{L_2^{(1)}}$$

## IL TRASFORMATORE REALE

Il **trasformatore reale**, in quanto manipolazione del bipolo accoppiamento perfetto, è ancora troppo perfetto per essere uno strumento realizzabile, non ha perdite; questa perfezione risiede nel fatto che il materiale è ancora un ferro ideale. Prima di procedere alla concretizzazione del dispositivo, si vuole osservare il **circuito magnetico equivalente** alla schematizzazione riportata in precedenza:



Osservando i **due solenoidi**, si può concludere che il **flusso totale** sarà:

$$\bar{\phi}_1 = N_1 \bar{\phi} \wedge \bar{\phi}_2 = N_2 \bar{\phi}$$

Dove  **$N_1$  e  $N_2$  sono il numero di spire dei due avvolgimenti**, applicando la LKT alle due porte del trasformatore:

$$\bar{V}_1 = i\omega \bar{\phi}_1 = i\omega N_1 \bar{\phi} \wedge \bar{V}_2 = i\omega \bar{\phi}_2 = i\omega N_2 \bar{\phi}$$

Scrivendo la **seconda legge di Hopkinson** alla maglia del circuito magnetico:

$$N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 = \Re \bar{\phi}$$

Riassumendo il **comportamento del trasformatore su ferro**:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega N_1 \bar{\phi} \\ \bar{V}_2 = i\omega N_2 \bar{\phi} \\ N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 = \Re \bar{\phi} \end{cases}$$

Sapendo che il parametro  **$a$  è determinato dal rapporto delle due tensioni alle due porte**:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

Per cui, si può dire che  **$a$  dipende solo dal rapporto del numero di spire dei due avvolgimenti**; da questo rapporto dipende anche il tipo di trasformatore: **per un numero di spire al secondario maggiore di quello al primario si ha un trasformatore elevatore** e viceversa. Il sistema precedente può essere sostituito con l'equivalente:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \bar{V}_2 = a \bar{V}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega N_2 \bar{\phi} \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \frac{\Re}{N_1} \bar{\phi} \end{cases}$$

Come preannunciato, il trasformatore descritto da queste equazioni è un trasformatore ancora abbastanza ideale perché si suppone un **ferro ideale**, cioè un ferro con **altissimi valori di permeabilità magnetica relativa**,  $\mu_r \rightarrow +\infty$ . I **materiali magnetici** si dividono in tre classi: **diamagnetici e paramagnetici**, caratterizzati da una permeabilità relativa prossima all'unità, e **ferromagnetici**, con **valori di permeabilità piuttosto elevati**. In queste condizioni, **la riluttanza tende ad aumentare**; infatti:

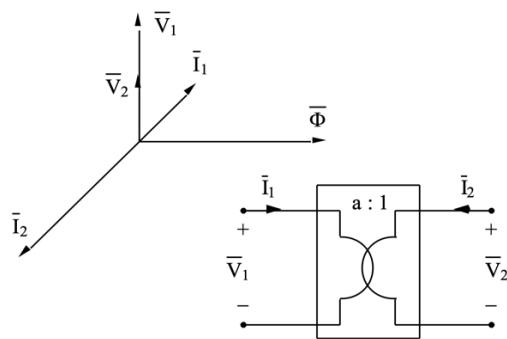
$$\Re = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{L}{S}$$

Si può ben capire che **nel ferro ideale questa quantità si annulla e le equazioni che descrivono il trasformatore sono quelle di un trasformatore ideale**:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \bar{V}_2 = a \bar{V}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega N_2 \bar{\phi} \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 \end{cases}$$

Fissando un orientamento per il fasore  $\bar{\phi}$ , non è facile intuire che le tensioni sono in anticipo di  $\pi/2$  e che l'angolo tra tali vettori e quelli delle correnti dipende dal carico  $\dot{Z}$ :

$$\bar{V}_2 = -\dot{Z} \bar{I}_2$$



Dove il segno meno è una conseguenza della convenzione del generatore fatta. Le due correnti devono essere in opposizione di fase per definizione del trasformatore e i loro moduli non devono essere uguali.

Per fare un passo avanti, **si supponga di lavorare con un ferro più reale, cioè con valori di riluttanza non nulli** (bassi); pertanto, si dovrà tenere conto di un **ulteriore addendo**:

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \frac{\Re}{N_1} \bar{\phi}$$

Che può essere interpretato come **una corrente che passa attraverso un'induttanza (detta di magnetizzazione) posta in parallelo alla porta primaria** e di valore:

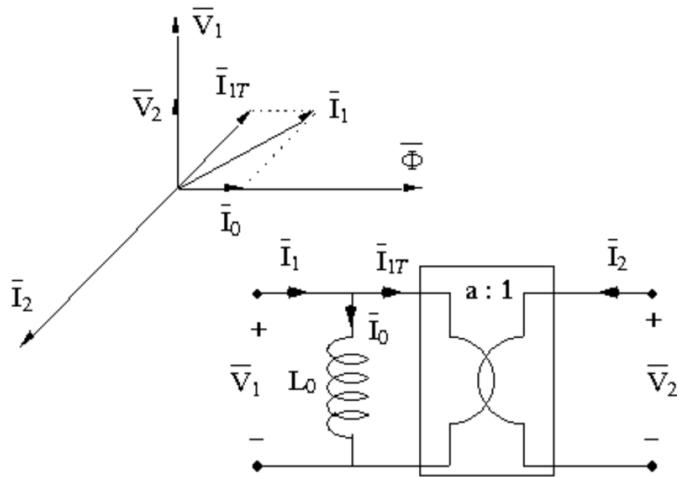
$$L_0 = \frac{N_1^2}{\Re}$$

L'equazione si modifica in:

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_0}$$

**Il diagramma fasoriale non si complica se non per il termine  $\bar{I}_1$** , che si arricchisce di un termine in fase con il flusso:

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_0} = \frac{\Re}{N_1} \bar{\phi}$$



**Lo schema di questo trasformatore è lo stesso introdotto per l'accoppiamento mutuo perfetto; volendo trovare i tre parametri  $L_1, L_2$  e  $M$ :**

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$

Poiché  $\bar{V}_x = i\omega \bar{\phi}_x$ :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 = L_1 \bar{I}_1 + M \bar{I}_2 \\ \bar{\phi}_2 = M \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$

E poiché  $\Re \bar{\phi} = N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2$ :

$$L_1 = \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{I}_1} = \frac{N_1 \bar{\phi}}{\bar{I}_1} = \frac{N_1^2 \bar{I}_1}{\Re \bar{I}_1} = \frac{N_1^2}{\Re} \Leftrightarrow \bar{I}_2 = 0$$

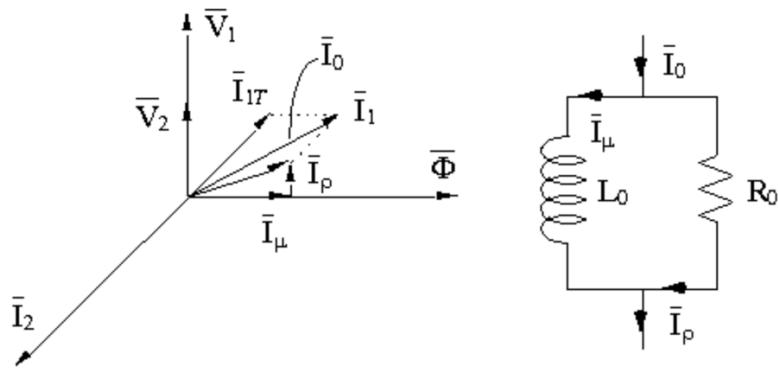
$$L_2 = \frac{\bar{\phi}_2}{\bar{I}_2} = \frac{N_2 \bar{\phi}}{\bar{I}_2} = \frac{N_2^2 \bar{I}_2}{\Re \bar{I}_2} = \frac{N_2^2}{\Re} \Leftrightarrow \bar{I}_1 = 0$$

$$M = \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_1 \bar{\phi}}{\bar{I}_2} = \frac{N_1 N_2 \bar{I}_2}{\Re \bar{I}_2} = \frac{N_1 N_2}{\Re} \Leftrightarrow \bar{I}_1 = 0$$

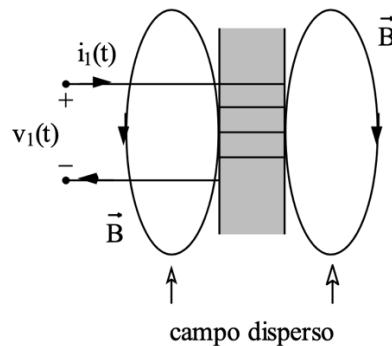
Infatti:

$$M^2 = \frac{N_1^2 N_2^2}{\Re^2} = L_1 L_2$$

**Avvicinandosi al trasformatore reale, si possono tenere in conto le perdite nel ferro, ovvero le perdite per isteresi e le perdite per correnti parassite introdotte nei capitoli precedenti. Questi fenomeni si inseriscono nella schematizzazione del dispositivo considerando, in parallelo all'induttanza  $L_0$ , un generico resistore  $R_0$ . Nel diagramma fasoriale la corrente  $\bar{I}_0$  è data dalla somma di  $\bar{I}_\mu$ , interessata dall'induttore e in fase con il flusso, e di  $\bar{I}_\rho$ , interessata dal resistore e in fase con la tensione:**



Andando a considerare un **ferro non ideale**, anche il tubo di flusso associato non sarà **ideale** e non tratterà a sé tutto il campo:



Questa **dispersione**, analiticamente, corrisponde a:

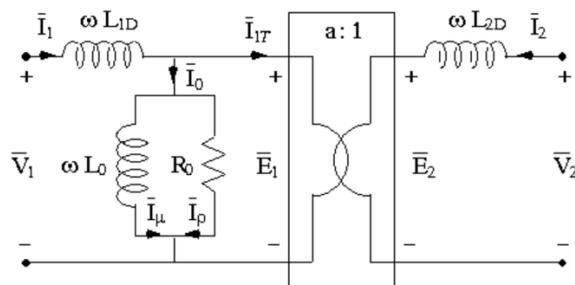
$$\bar{\phi}_1 = N_1 \bar{\phi} + \bar{\phi}_{1D} \wedge \bar{\phi}_2 = N_2 \bar{\phi} + \bar{\phi}_{2D}$$

Per cui:

$$\bar{V}_1 = i\omega(N_1 \bar{\phi} + \bar{\phi}_{1D}) \wedge \bar{V}_2 = i\omega(N_2 \bar{\phi} + \bar{\phi}_{2D})$$

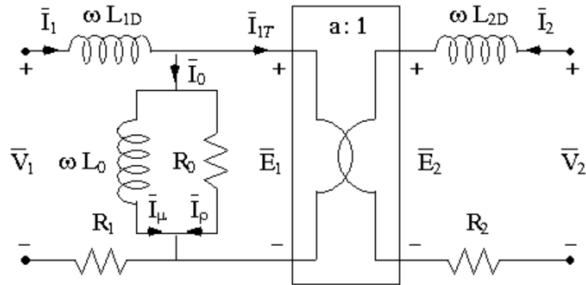
Queste due relazioni impongono l'inserimento di altre due induttanze nel circuito equivalente, dette **induttanze di dispersione**, in serie alla porta primaria e alla porta secondaria, di valore:

$$L_{1D} = \frac{\bar{\phi}_{1D}}{\bar{I}_1} \wedge L_{2D} = \frac{\bar{\phi}_{2D}}{\bar{I}_2}$$



Lo schema di questo trasformatore è **molto simile a quello introdotto per l'accoppiamento mutuo imperfetto**. Le tensioni alle porte del trasformatore ideale non sono più le stesse di quelle in ingresso al trasformatore reale a causa di tutte le cadute di tensione indotte dagli induttori e dalla resistenza inseriti. Infine, è **opportuno inserire altre due resistenze,  $R_1$  e  $R_2$ , in serie agli induttori di**

dispersione per tenere in conto le perdite nel rame e le perdite resistive nei due avvolgimenti; il circuito equivalente di un trasformatore reale è, quindi:



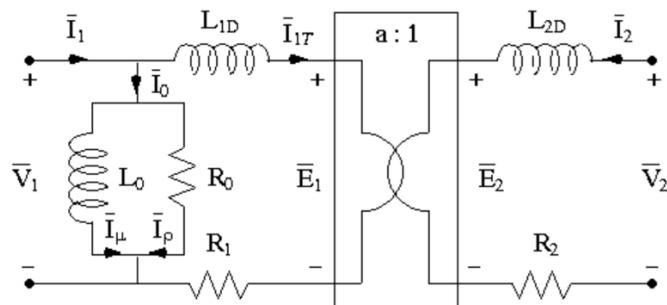
Si può chiaramente intuire come il **modello reale di trasformatore** è determinato a partire dal suo **corrispettivo ideale**; affinché i **due dispositivi coincidano** è necessario che i **parametri longitudinali siano tendenti allo zero** (quindi sostituibili con dei cortocircuiti) e **quegli trasversali tendenti all'infinito** (quindi sostituibili con dei circuiti aperti). Le aggiunte sono solo delle sovrastrutture dovute alle perdite nel rame e nel ferro.

Si può fare un'ultima considerazione, sulla corrente  $\bar{I}_0$ : essa è detta **corrente a vuoto** perché, se alla porta secondaria non venisse collegato alcun carico la corrente circolerebbe solo nella maglia primaria e  $\bar{I}_1 = \bar{I}_0$ .

**Il modello reale traduce in forma di rete elettrica il comportamento di un dispositivo usato comunemente;** tuttavia, tale modello è troppo complicato per alcune applicazioni, soprattutto per quelle di interesse attuale. È bene, quindi accettare di perdere la specificità del **modello reale** per **semplificare determinati calcoli**, ovviamente entrando in un grado di errore massimo; questa necessità è dovuta anche al fatto che **determinare tutti i parametri di un trasformatore reale è un'impresa ardua** e la semplificazione del modello non fa altro che alleggerire questo carico.

**Il modello semplificato più in uso è quello a flusso bloccato:** il cappio, ovvero il ramo trasversale che contiene il resistore  $R_0$  e l'induttore  $L_0$  in parallelo, è **posizionato prima di  $L_{1D}$  e di  $R_1$** ; il nome attribuito a questo modello è originato dal fatto che  $\bar{I}_\mu$  (proporzionale al flusso) è nota quando la tensione della prima porta è assegnata:

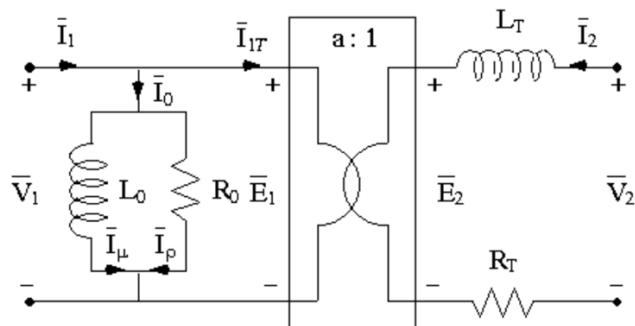
$$\bar{I}_\mu = \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_0} = \frac{N_1}{L_0} \bar{\phi}$$



Questa modifica è possibile perché, in condizioni di funzionamento normali, il valore efficace di  $\bar{I}_0$  è piccolo rispetto a  $\bar{I}_1$ , ed il fatto che non percorra più  $L_{1D}$  e  $R_1$  modifica di poco la caduta di tensione su questi due bipoli. Se poi si tiene in conto che questa caduta è piccola rispetto a  $\bar{V}_1$  ed  $\bar{E}_1$  in modulo, si capisce perché questo schema lascia praticamente inalterate le grandezze principali presenti nel circuito equivalente.

Dal modello a flusso bloccato non è difficile ottenere un ulteriore semplificazione, detta **modello a flusso bloccato con perdite tutte al secondario**, ottenuto riportando al secondario le resistenze e le reattanze di dispersione del circuito primario:

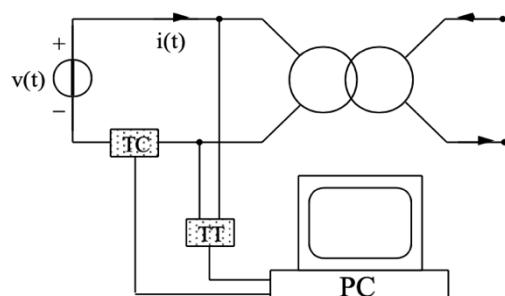
$$R_T = R_1 + \frac{R_2}{a^2} \wedge L_T = L_1 + \frac{L_2}{a^2}$$



Di questo modello (detto **modello di Kapp**), le cui perdite longitudinali sono state portate tutte al secondario, si farà largamente uso in seguito.

## EFFETTI NON LINEARI E CONDIZIONI NOMINALI

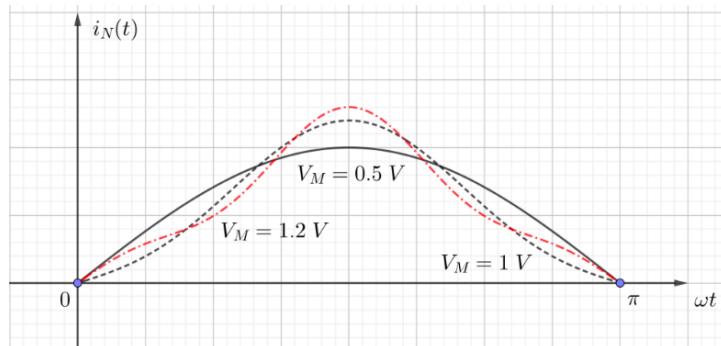
Un materiale o un dispositivo è lineare quando non genera frequenze (ad esempio una tensione sinusoidale con pulsazione  $\omega$  applicata in un materiale lineare restituisce ancora una grandezza sinusoidale di pulsazione  $\omega$ ); il ferro non solo è un materiale non lineare ma, perdipiù, è **polidromo**, l'isteresi non ha un unico ramo ma due e il carattere del materiale è determinato in funzione di quale dei due rami è coinvolto. Si prenda in esame l'esperimento schematizzato in figura, in cui il trasformatore presenta la porta secondaria a vuoto allo scopo di realizzare un induttore su ferro, che è non lineare; i trasduttori di tensione e corrente sono dispositivi elettronici che convertono i valori istantanei di corrente e tensione in segnali comprensibili al PC:



TC → Trasduttore di corrente

TT → Trasduttore di tensione

**Alla tensione sinusoidale in ingresso non corrisponde necessariamente una corrente sinusoidale con la stessa frequenza**, per valori massimi della tensione alti si può osservare che parte della sinusoide aspettata diventa più piccola, **il segnale si è distorto e l'energia del segnale si accumula sull'asse della sinusoide stessa**:



Ciò significa che, **mettendo in rete una sola armonica la corrente risponde con una combinazione lineare di sinusoidi a diversa frequenza**:

$$v(t) = V_M \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = I_1 \sin(\omega t) + I_2 \sin(2\omega t) + I_3 \sin(3\omega t) + \dots$$

**La causa di questo fenomeno è da attribuire proprio al ferro** nel trasformatore, che genera infinite frequenze sulla corrente e può essere risolto con il posizionamento di **opportuni filtri in rete**. Pertanto, **l'enorme vantaggio** del ferro per cui rappresenta un tubo di flusso è **controbilanciato** dalle perdite per correnti parassite, per isteresi e dagli effetti non lineari.

Per **condizioni nominali** si intendono le **condizioni di funzionamento per cui il trasformatore subisce delle sollecitazioni adeguate ad eseguire i compiti per cui è stato progettato costruito**; sono fornite dal costruttore al fine di **evitare quelle condizioni che possono danneggiare il dispositivo**, compromettendolo oppure non adempiendo ai giusti doveri.

Le condizioni nominali vengono espresse come:

- **Valore efficace della tensione primaria nominale**,  $V_{1N}$ ;
- **Valore efficace della corrente primaria nominale**,  $I_{1N}$ ;
- **Valore efficace della tensione secondaria nominale**,  $V_{2N}$ ;
- **Valore efficace della corrente secondaria nominale**,  $I_{2N}$ ;
- **Fattore di potenza nominale**,  $\cos \varphi_{2N}$ .

Con questi parametri e quelli del circuito equivalente si possono ricavare:

- **Impedenza secondaria nominale**  $\dot{Z}_{2N} = [Z_{2N}, \varphi_{2N}] = \frac{V_{2N}}{I_{2N}} e^{i\varphi_{2N}}$ ;
- **Potenza apparente nominale** (potenza apparente secondaria in condizioni nominali)  $A_N = A_{2N} = V_{2N} I_{2N}$ .

**Le sollecitazioni a cui un trasformatore può essere sottoposto** sono di natura varia e determinano diversi problemi a cui il dispositivo può incorrere se non tenute sotto controllo. Le principali e più rilevanti sono:

- **Sollecitazioni meccaniche**

Le forze di attrazione e repulsione dovuta all'interazione delle correnti tra le spire che compongono gli avvolgimenti possono produrre delle vibrazioni, alla base del tipico ronzio dei trasformatori (detto **coil whine**). Queste vibrazioni, sebbene innocue nel breve termine, a lungo andare possono deteriorare il dispositivo, deformando la struttura a spire degli avvolgimenti.

- **Sollecitazioni dielettriche**

Le tensioni tra i vari punti dell'avvolgimento e del nucleo devono essere contenute in certi limiti, altrimenti possono rompere la rigidità dielettrica degli isolanti.

- **Sollecitazioni magnetiche**

Lo sfruttamento ottimale del ferro prevede che il flusso di campo magnetico debba essere limitato a determinati valori, affinché non si verifichino eccessive distorsioni nelle forme d'onda delle correnti di magnetizzazione in seguito alla saturazione del materiale.

- **Sollecitazioni termiche**

Il calore prodotto dalle perdite nel rame e nel ferro eleva la temperatura dei componenti interni oltre i limiti stabiliti dal costruttore; per evitare danni al dispositivo è necessario introdurre un adeguato sistema di raffreddamento, per trasformatori piccoli è sufficiente l'aria ma per trasformatori grandi si necessita una progettazione ad hoc. Ad esempio, per grandi trasformatori si possono aletture i cassoni che li contengono e aumentare la superficie di contatto con l'aria, garantendo una migliore dissipazione del calore; se non è ancora abbastanza, si possono far circolare dei fluidi refrigeranti in circolazione forzata attraverso dei tubi che avviluppano la macchina.

Da queste considerazioni si può rilevare una **nomenclatura per il raffreddamento della macchina**:

- N, sta per naturale;
- F, sta per forzato;
- D, sta per forzato e guidato.

Per quanto riguarda i **liquidi di raffreddamento**, si specificano con le lettere:

- O, per olio minerale non infiammabile;
- L, per altro liquido non infiammabile;
- G, per gas;
- W, per acqua.

## **IL RENDIMENTO DI UN TRASFORMATORE**

In quanto macchina elettrica, **anche un trasformatore è caratterizzato da un valore di rendimento**. Questa quantità può essere **calcolata usando la classica formula**:

$$\eta = \frac{P_{US}}{P_{IN}}$$

Ma il rapporto in questione è **difficile da misurare**, visto che **i trasformatori hanno rendimenti anche del 0.99**; inoltre, se si tiene in considerazione che **i wattmetri in entrata hanno errori di misura in difetto e quelli in uscita in eccesso**, è facile concludere che **il rendimento misurato può**

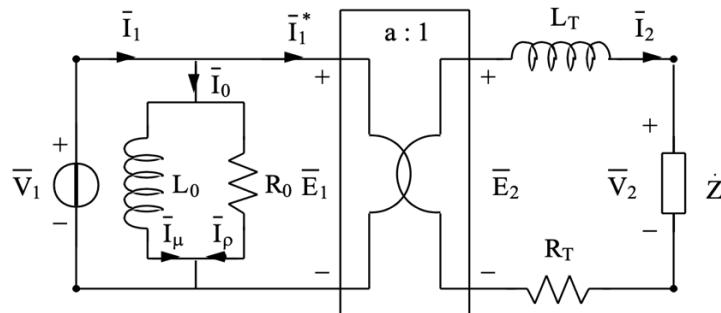
**superare l'unità**, che nella realtà è una condizione impossibile da trovare. Dunque, è stato necessario aggiornare questa definizione, introducendo quella che ancora oggi è la **formula indiretta per il calcolo del rendimento di un trasformatore**:

$$\eta = \frac{P_{US}}{P_{US} + P_{Fe} + P_{Cu}}$$

Al denominatore c'è ancora la potenza in entrata ma è quantificata come potenza in uscita (detta anche potenza trasferita al secondario) a cui si sommano le perdite nel rame e nel ferro; ancora non è la definizione di rendimento più precisa, visto che intervengono anche perdite per ventilazione, magnetostrizione ed elettrostrizione, ma sono contributi insulti e quello descritto è un rendimento convenzionale più che adeguato.

Si consideri un **trasformatore a flusso bloccato e con perdite tutte al secondario**, al quale è collegato un generatore di tensione alla porta primaria e alla secondaria un carico generico:

$$\dot{Z} = Z[\cos \varphi + i \sin \varphi]$$



Alla porta secondaria è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore per una pura semplificazione dei calcoli. **La potenza assorbita dal carico è:**

$$P_{US} = V_2 I_2 \cos \varphi$$

Le perdite legate al ferro non dipendono dalla corrente della porta secondaria,  $\bar{I}_2$ , e sono:

$$P_{Fe} = R_0 I_\mu^2 = \frac{V_1^2}{R_0}$$

Mentre quelle nel rame:

$$P_{Cu} = R_T I_2^2$$

Per cui il **rendimento** è:

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi}{V_2 I_2 \cos \varphi + R_T I_2^2 + P_{Fe}}$$

Le perdite nel ferro non sono state esplicitate perché dipendono esclusivamente dalla tensione alla porta primaria, che si ritiene fissa. Nella pratica tecnica non si fa quasi mai riferimento alla corrente della porta secondaria, bensì al **rappporto adimensionale** tra questa e la corrente nominale alla stessa porta:

$$\alpha = \frac{I_2}{I_{2N}} \geq 0$$

In genere  $\alpha \leq 1$ , solo per periodi di tempo limitati si può tollerare la condizione di sovraccarico  $\alpha > 1$ . Il **rendimento** si può, così, scrivere:

$$\eta = \frac{V_2 I_{2N} \cos \varphi}{V_2 I_{2N} \cos \varphi + \alpha R_T I_{2N}^2 + \frac{P_{Fe}}{\alpha}}$$

Supponendo che  **$V_2$  non cambi** (come accade nella maggior parte delle applicazioni industriali) e che **non dipenda da  $\alpha$** ; allora, **per quale valore di  $\alpha$  il rendimento è massimo?** Si consideri il **denominatore**, visto che è **l'unica parte del rapporto che dipende da  $\alpha$** :

$$D(\alpha) = V_2 I_{2N} \cos \varphi + \alpha R_T I_{2N}^2 + \frac{P_{Fe}}{\alpha}$$

Il rendimento è massimo quando la funzione  $D(\alpha)$  assume il valor minimo, ovvero per:

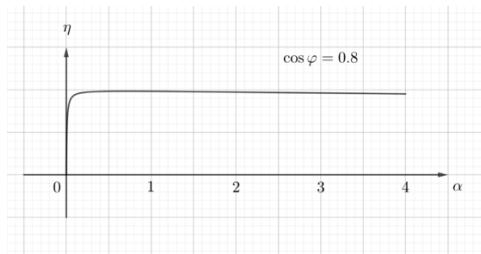
$$\alpha_{MIN} = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{R_T I_{2N}^2}}$$

Infatti, **derivando**:

$$D'(\alpha) = R_T I_{2N}^2 - \frac{P_{Fe}}{\alpha^2}$$

Ed è **una quantità crescente per  $\alpha > \alpha_{MIN}$  e decrescente per  $\alpha < \alpha_{MIN}$** . Si può concludere che  **$\alpha_{MIN}$  è un punto di minimo per  $D(\alpha)$  e di massimo per il rendimento.**

**L'andamento di  $\eta$  in funzione di  $\alpha$  non dipende dal fattore di potenza**, anche se il valore massimo di rendimento si ha quando  $\cos \varphi = 1$  (cioè per un carico puramente resistivo).



Si può notare come **la zona in cui si raggiunge il valore di massimo è molto estesa**, la funzione scende molto lentamente; ciò significa che **per un'ampia classe di valori del carico il trasformatore ha rendimento massimo** (l'abbassamento è lento e poco significativo).

**Ponendosi nella condizione di massimo si potrebbe anche trovare la corrente che deve circolare al secondario per avere rendimento massimo;** tuttavia, questa situazione **non è sempre possibile**, visto che **la corrente in questione dipende dal carico**, cioè dalle richieste degli utenti, che variano continuamente. Quindi, **nell'arco di una giornata il rendimento cambia tantissimo** ed è più utile osservare il **rendimento giornaliero**, inteso come il **rapporto delle energie assorbite nell'arco di 24h**:

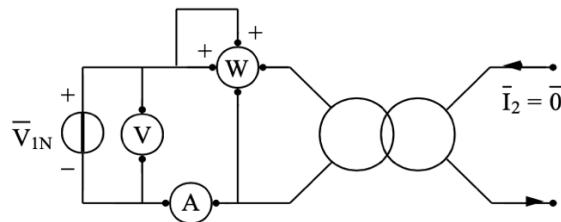
$$\eta = \frac{\sum_k V_{2k} I_{2k} \cos \varphi_k \Delta t_k}{\sum_k (V_{2k} I_{2k} \cos \varphi_k + R_T I_{2k}^2) \Delta k + 24 P_{Fe}}$$

$\Delta t_k$ , espresso in ore, è un intervallo di utilizzo in cui le caratteristiche della potenza prelevata sono costanti. Il rendimento giornaliero massimo è determinato in maniera analoga a quanto fatto finora, ricordando che comunque è un valore alto; è importante non far abbassare il rendimento e, quindi, utilizzare un trasformatore più o meno potente anche in base all'utenza. Ad esempio, un'utenza cittadina sfrutterà di giorno un trasformatore di grande potenza e di notte uno più piccolo, così la corrente secondaria rimane sempre prossima al suo valore nominale, cioè a rendimento elevato.

## LE PROVE SUI TRASFORMATORI E LA CADUTA DI TENSIONE

Una volta ottenuto il modello reale (e anche la sua versione semplificata) di un trasformatore, si vogliono determinare i parametri che lo caratterizzano,  $L_0, R_0, L_T$  e  $R_T$ ; non si determina *a* visto che è stato dimostrato essere il rapporto tra le spire degli avvolgimenti del trasformatore. In laboratorio un'operazione di questo tipo viene fatta con due prove, la prova a vuoto e la prova in cortocircuito: nella prima prova si imposta la porta secondaria come un circuito aperto e si impone la tensione nominale alla primaria per ricavare i parametri trasversali, mentre nella seconda prova la porta secondaria è impostata come un cortocircuito e si impone alla primaria la corrente nominale per trovare i parametri longitudinali. Analizzando le due prove più a fondo sul modello di Kapp:

- Prova a vuoto



Come anticipato, la porta secondaria viene aperta e, con un generatore di tensione, si impone al circuito primario la tensione nominale  $\bar{V}_{1N}$ ; il voltmetro in parallelo alla porta in questione serve proprio a verificare che il generatore eroghi la giusta tensione. Il wattmetro e l'amperometro inseriti nel circuito permettono di individuare  $P_0$  e  $I_0$ , i quali forniscono i parametri trasversali del trasformatore; in particolare, dalla misura del wattmetro e del voltmetro si ottiene il parametro resistivo:

$$P_0 = \frac{V_{1N}^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{V_{1N}^2}{P_0}$$

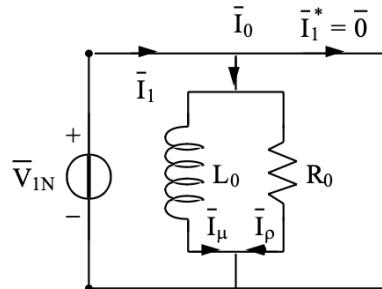
Mentre i tre strumenti insieme permettono di ottenere il fattore di potenza:

$$P_0 = V_{1N} I_0 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{P_0}{V_{1N} I_0}$$

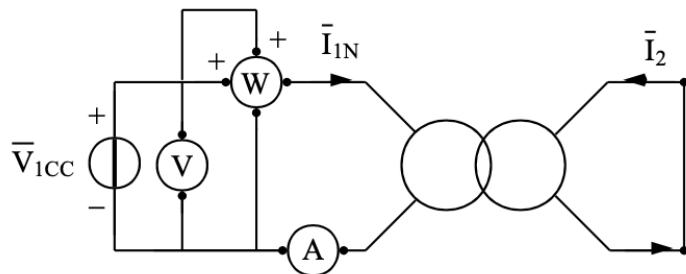
Da cui è noto l'angolo  $\varphi_0$ ; valutando, poi, la potenza reattiva con  $\varphi_0$  si ottiene anche l'induttanza  $L_0$ :

$$Q_0 = P_0 \tan \varphi_0 = \frac{V_{1N}^2}{X_0} \Rightarrow X_0 = \frac{V_{1N}^2}{P_0 \tan \varphi_0} \Rightarrow L_0 = \frac{V_{1N}^2}{\omega P_0 \tan \varphi_0}$$

Il circuito equivalente visto dalla porta primaria nella prova a vuoto è:

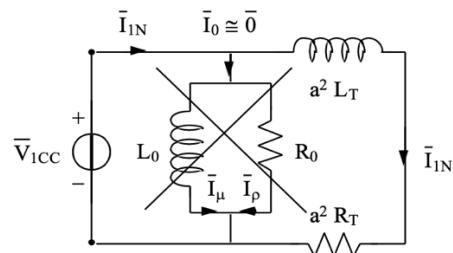


- Prova in cortocircuito



Come anticipato, la porta secondaria viene messa in corto circuito e, con un generatore di tensione, si impone al circuito primario una tensione di cortocircuito  $\bar{V}_{1CC}$  che faccia circolare nel circuito primario la corrente  $\bar{I}_{1N}$ ; questa tensione è molto più bassa della tensione nominale usata nella prima prova ed il motivo risiede nel fatto che tensioni elevate implicano correnti elevate che possono portare il cortocircuito a temperature tali da bruciare i conduttori.  $\bar{V}_{1CC}$  viene determinata facendo variare gradualmente, da valori molto bassi, la tensione in uscita dal generatore finché l'amperometro non misura la corrente  $\bar{I}_{1N}$ .

Il circuito equivalente visto dalla porta primaria nella prova in cortocircuito è:



Il ramo trasversale può essere rimosso perché, essendo caratterizzato da parametri elevati rispetto agli altri della rete, rappresenta un circuito aperto per il quale la corrente  $\bar{I}_0 \approx 0$ ; se non lo si volesse rimuovere si potrebbero fare considerazioni simili calcolando la corrente in questione con i parametri trasversali determinati nella prova a vuoto. In queste condizioni, la potenza misurata dal wattmetro è quella assorbita dagli avvolgimenti di rame:

$$P_{CC} = a^2 R_T I_{1N}^2 \Rightarrow R_T = \frac{P_{CC}}{a^2 I_{1N}^2}$$

I tre strumenti insieme permettono di ottenere il fattore di potenza:

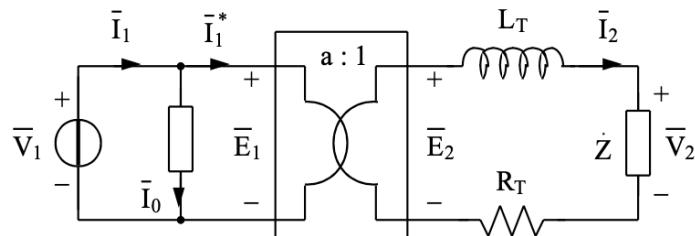
$$P_{CC} = V_{1CC} I_{1N} \cos \varphi_{CC} \Rightarrow \cos \varphi_{CC} = \frac{P_{CC}}{V_{1CC} I_{1N}}$$

Da cui è noto l'angolo  $\varphi_{CC}$ ; valutando, poi, la potenza reattiva con  $\varphi_{CC}$  si ottiene anche l'induttanza  $L_T$ :

$$Q_{CC} = P_{CC} \tan \varphi_{CC} = a^2 X_T I_{1N}^2 \Rightarrow X_T = \frac{P_{CC} \tan \varphi_{CC}}{a^2 I_{1N}^2} \Rightarrow L_T = \frac{P_{CC} \tan \varphi_{CC}}{\omega a^2 I_{1N}^2}$$

Una volta ottenuti sia i parametri longitudinali che quelli trasversali si può avere **maggior consapevolezza del funzionamento del trasformatore** e si può **calcolare con più precisione il rendimento convenzionale**, visto che da essi dipendono, rispettivamente, le **perdite nel rame e nel ferro**.

Si consideri il seguente circuito, in cui **ad un trasformatore** rappresentato con il modello di Kapp è **stato collegato un generico carico  $\dot{Z}$** , facendo su di esso la **convenzione dell'utilizzatore** e cambiandone il verso della corrente:



**Se la porta secondaria fosse a vuoto, la tensione misurata su di essa sarebbe  $\bar{E}_2$  ma si può ben notare come a carico collegato si presenta  $\bar{V}_2$ ; facendo la convenzione ai valori efficaci, si definisce caduta di tensione  $\Delta V$  la differenza in valore efficace tra il valore della tensione a vuoto e della tensione sotto carico:**

$$\Delta V = E_2 - V_2$$

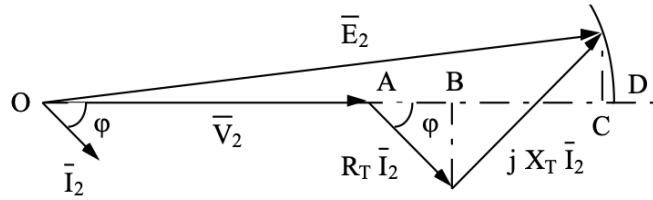
Più precisamente, le norme CEI definiscono la caduta di tensione industriale come il rapporto:

$$\frac{\Delta V}{E_2} = 1 - \frac{V_2}{E_2}$$

In modo da avere anche una **valutazione percentuale**. Applicando la LKT alla maglia di uscita, si possono ottenere **tutte le informazioni necessarie sui valori efficaci per calcolare la caduta di tensione**:

$$\bar{E}_2 = \bar{V}_2 + (R_T + i\omega L_T) \bar{I}_2$$

Il cui schema fasoriale è descritto qui di seguito:



**Supponendo un carico ohmico – induttivo** (il più comune, anche se quanto si dirà si può adattare anche ad un caso ohmico – capacitivo), si può considerare la corrente  $\bar{I}_2$  in ritardo di un certo angolo  $\varphi$  rispetto a  $\bar{V}_2$  (posta sull'asse reale arbitrariamente); a sua volta,  $\bar{I}_2$  è parallela a  $R_T \bar{I}_2$  e in anticipo di  $\pi/2$  rispetto a  $i\omega L_T \bar{I}_2$ .

Si consideri la circonferenza di raggio  $E_2$  che passa per il punto  $D$  del disegno; risulta evidente che la caduta di tensione è pari alla differenza dei due segmenti:

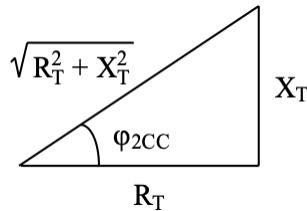
$$\Delta V = E_2 - V_2 = OD - AO = AD \cong AC$$

L'approssimazione fatta è giustificata nella maggior parte dei casi di interesse applicativo, visto che il segmento **CD** è abbastanza piccolo, e semplifica notevolmente i calcoli. Osservando lo schema e ricordando le relazioni trigonometriche, non è difficile comprendere che:

$$AC = R_T I_2 \cos \varphi + X_T I_2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = R_T I_2 \cos \varphi + X_T I_2 \sin(\varphi)$$

Se si immagina di sostituire l'impedenza di carico con un cortocircuito, indicando l'angolo di cortocircuito  $\varphi_{2CC}$  come la fase dell'impedenza  $R_T + iX_T$ , si può affermare che:

$$\cos \varphi_{2CC} = \frac{R_T}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}} \wedge \sin \varphi_{2CC} = \frac{X_T}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}}$$



Per cui la relazione precedente diventa:

$$\frac{AC}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}} = I_2 (\cos \varphi \cos \varphi_{2CC} + \sin \varphi \sin \varphi_{2CC}) = I_2 \cos(\varphi - \varphi_{2CC})$$

Pertanto:

$$\frac{\Delta V}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}} \cong \frac{AC}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}} = I_2 \cos(\varphi - \varphi_{2CC})$$

Questa formula è **utile per valutare la caduta di tensione** e, quindi, per **determinare quando  $\Delta V$  è nulla**:

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0 \vee \cos(\varphi - \varphi_{2CC}) = 0$$

Ovvero se:

$$\varphi = \varphi_{2CC} - \frac{\pi}{2}$$

**L'angolo di cortocircuito vale:**

$$\varphi_{2CC} = \arctan \frac{X_T}{R_T}$$

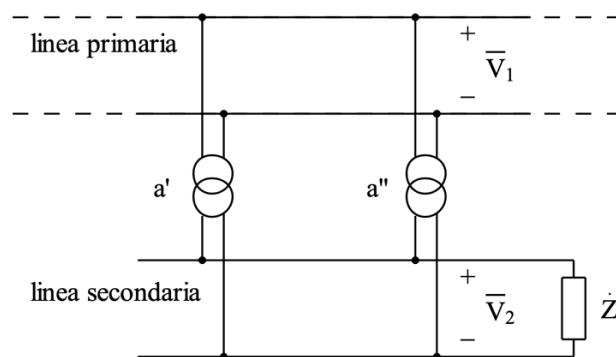
Dunque, la caduta di tensione è nulla in corrispondenza dell'angolo di fase:

$$\varphi = \arctan \frac{X_T}{R_T} - \frac{\pi}{2}$$

Riassumendo per un generico carico  $\dot{Z}$  di tipo ohmico – induttivo, la caduta di tensione è nulla quando tale carico alla porta secondaria è un circuito aperto o quando è in grado di sostenere un ritardo della corrente rispetto alla tensione pari a  $\varphi$ , legato al cortocircuito della suddetta porta; questo risultato, ricordando la condizione di adattamento di un carico ad un generatore reale in regime sinusoidale, non è poi così inaspettato.

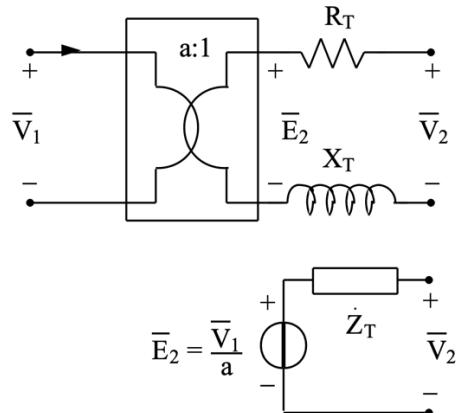
## TRASFORMATORI IN PARALLELO E L'AUTOTRASFORMATORE

Prima di affrontare gli aspetti tecnici del posizionamento di due trasformatori in parallelo, è importante soffermarsi sul perché è necessario affidare la linea di distribuzione a due trasformatori e le risposte sono due: in primo luogo nel caso in cui un trasformatore debba andare in manutenzione si ha sempre a disposizione un backup e in secondo luogo è stato precedentemente detto che il rendimento massimo di un trasformatore si ha per valori di corrente prossima a quella nominale; considerata una linea di distribuzione (monofase per semplicità) per mezzo della quale si alimenta un carico generico  $\dot{Z}$ :



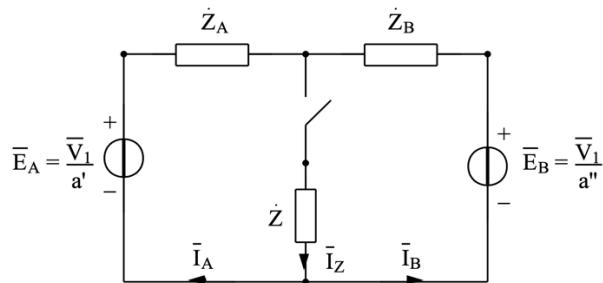
Non si è nuovi al fatto che **il carico**, che descrive una generica utenza, **varia notevolmente durante la giornata** e, sebbene il trasformatore abbia un ampio intervallo di condizioni di funzionamento che rendano al massimo, **tra le ore diurne e quelle notturne si potrebbe generare un tale squilibrio da portare il trasformatore "diurno" a lavorare fuori rendimento massimo**; pertanto, è necessario introdurre un secondo trasformatore, "notturno", che renda al massimo quando il carico è più contenuto.

Motivate le ragioni per cui è reso necessario questo collegamento, si proceda a descrivere ed analizzare i prerequisiti e i modi con cui è possibile renderlo attuabile.



Preliminariamente, si può **applicare il teorema del generatore equivalente al modello di Kapp e sostituire ognuno dei due trasformatori con il circuito equivalente in figura**, dove  $\bar{E}_2$  è la tensione a vuoto. Manca il carico in parallelo perché è cortocircuitato nel calcolo dell'impedenza equivalente per il teorema applicato.

La linea di distribuzione precedentemente introdotta può, così, essere semplificata:



Quando l'interruttore è chiuso i due trasformatori sono collegati al carico, altrimenti funzionano a vuoto; onde evitare sprechi inutili è necessario che, quando l'interruttore è aperto non circoli corrente che alimenti il nulla, quindi la corrente a vuoto deve essere nulla:

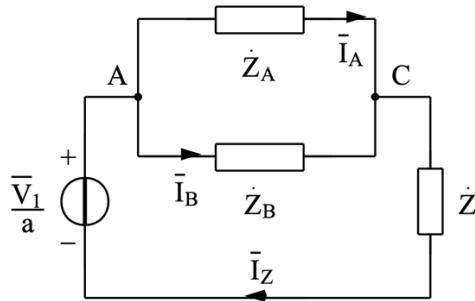
$$\bar{I}_Z = 0 \wedge \bar{I}_A = -\bar{I}_B = \frac{\bar{E}_A - \bar{E}_B}{Z_A + Z_B}$$

Pertanto, occorre che:

$$\bar{E}_A = \bar{E}_B \Leftrightarrow \frac{\bar{V}_1}{a'} = \frac{\bar{V}_1}{a''} \Leftrightarrow a' = a''$$

Da questo ragionamento si ottiene il **primo prerequisto per collegare in parallelo due trasformatori**: essi devono essere gemelli, cioè devono essere caratterizzati dallo stesso rapporto di spire; se questa condizione non si verificasse, si pagherebbe il costo di una corrente a vuoto non nulla e superflua. A patto che i due trasformatori collegati in parallelo siano gemelli, è anche necessario che essi lavorino sempre a pieno carico e che non funzionino a bassi rendimenti.

Poiché  $\bar{E}_A = \bar{E}_B$ , la linea di distribuzione può essere ulteriormente semplificata in accordo con il **teorema di Thévenin**, visto dal carico  $\dot{Z}$ :



Funzionare a pieno carico equivale a dire che **nei trasformatori deve circolare sempre la corrente per cui il trasformatore stesso è stato designato**, quella per cui il rendimento è massimo. Ora, tra le **impedenze  $\dot{Z}_A$  e  $\dot{Z}_B$**  (coincidenti con le impedenze di cortocircuito), considerando i parametri trasversali coincidenti con un circuito aperto è **necessario che sussista la seguente relazione**:

$$\bar{V}_{AC} = \dot{Z}_A \bar{I}_{AN} = \dot{Z}_B \bar{I}_{BN} \Rightarrow \frac{\dot{Z}_A}{\dot{Z}_B} = \frac{\bar{I}_{BN}}{\bar{I}_{AN}}$$

In altri termini, **le impedenze di cortocircuito devono essere inversamente proporzionali alle correnti nominali**, oppure che **i due trasformatori devono avere la stessa tensione di cortocircuito**. Questa condizione **non è facile da ottenere e nella pratica ci si accontenta che i moduli siano uguali**.

Dato che il rapporto tra le potenze apparenti assorbite dai due trasformatori vale:

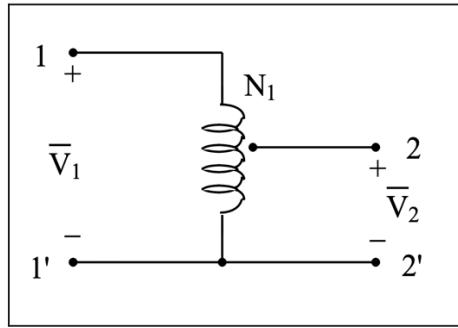
$$\frac{V_{AC} I_{AN}}{V_{AC} I_{BN}} = \frac{I_{AN}}{I_{BN}} = \frac{Z_B}{Z_A}$$

Bisogna fare in modo che la corrente del carico  $\bar{I}_Z$  si ripartisca tra i due trasformatori nello stesso rapporto che sussiste fra le rispettive potenze apparenti nominali.

Risulta chiaro, in ultima istanza, che **si possono collegare in parallelo anche due trasformatori di uguale potenza**, anche se questa operazione è stata pensata per far intercambiare i due dispositivi in funzione della richiesta di energia elettrica della rete o per sostituire un trasformatore quando guasto.

L'autotrasformatore (o variac) è un particolare dispositivo che, a differenza di come il nome potrebbe suggerire, **non è un trasformatore**; per come è composto e per le sue funzionalità, **il variac è una via di mezzo tra un induttore, un trasformatore e un partitore di tensione**. La comodità di un tale dispositivo sta nel fatto che **permesso di abbassare la tensione a piacimento**, come un trasformatore, **pur mantenendo dimensioni ridotte**, che lo rendono perfetto per applicazioni da campo o da laboratorio.

Il principio di funzionamento di un autotrasformatore si basa sull'impiego di **una sola bobina**, ai capi della quale viene applicata **una differenza di potenziale** (spesso molto alta) che si vuole abbassare. Sulla porta secondaria del dispositivo viene rilevata **una differenza di potenziale**, minore di quella sulla porta primaria, in funzione di quante spire della bobina sono state selezionate:



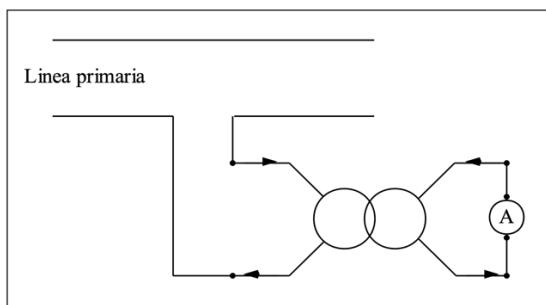
Prelevando tutte le spire della bobina sulla porta secondaria, viene restituita tutta la tensione iniziale come se l'autotrasformatore fosse un semplice induttore (si ricordi che comunque si parla di un doppio bipolo). Una delle **comodità del variac** risiede nella presenza di **tutte le grandi proprietà del trasformatore, come la trasparenza alle potenze o il risparmio in potenza e volume.**

## TRASFORMATORI PER USI SPECIALI E TRASFORMATORI TRIFASE

Per diversi motivi, occorre effettuare delle operazioni di misura di tensioni o correnti lungo una linea di trasmissione elettrica; tuttavia, il valore efficace di queste grandezze è spesso ampiamente superiore al fondo scala dei comuni strumenti di misura. È necessario, quindi, abbassare dapprima il valore efficace di queste tensioni e di queste correnti per poter permettere una facile misurazione; questa operazione è possibile con determinati tipi di trasformatore, che hanno particolari rapporti di trasformazione che portano le tensioni e le correnti in ingresso entro limiti ragionevoli. Questi trasformatori vengono chiamati **trasformatori di misura** (Trasformatori di corrente e Trasformatori di Tensione) e sono opportunamente costruiti per restituire una misura quanto più facile ma fedele al valore di tensione reale.

Volendo analizzare più nel dettaglio questi dispositivi:

- **Trasformatori di Corrente (TA)**



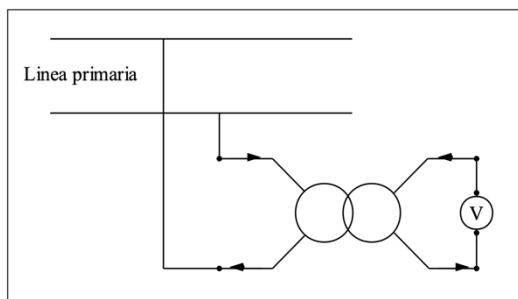
Si tratta di un **trasformatore monofase** con il primario collegato in serie con la linea sulla quale circola la corrente da misurare, mentre il secondario è chiuso su un amperometro. Il rapporto di trasformazione risulta in discesa per la corrente ed in salita per la tensione, anche se in realtà la misura non è tanto semplice, riferendosi ad un trasformatore reale per cui:

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \bar{I}_0$$

**La presenza di corrente a vuoto  $\bar{I}_0$  può falsare la proporzionalità tra corrente primaria e secondaria e può introdurre un errore nella misura del valore efficace; inoltre, grazie a questa corrente aggiuntiva, corrente primaria e corrente secondaria non sono in fase e ciò causa un errore di angolo che può essere fonte di non poche incertezze nel calcolo della potenza sulla rete. Per minimizzare gli errori sarebbe sufficiente rendere trascurabile la corrente a vuoto, ad esempio usando al secondario sempre lo stesso amperometro per tarare la scala dello strumento.**

- **Trasformatori di Tensione (TV)**

Il Trasformatore di Tensione funziona in maniera del tutto analoga al TA, solo che non viene posto in serie ma in parallelo alla tensione da misurare:



Entrambi gli strumenti, non essendo dispositivi ideali, sono caratterizzati da errori di misura dovuti alla caduta di tensione nella resistenza e sulla reattanza equivalenti del trasformatore; di conseguenza le tensioni e le correnti primarie e secondarie non saranno mai perfettamente né in fase né in opposizione di fase e il loro rapporto non coinciderà perfettamente con il rapporto di spire. Inoltre, indipendentemente dal rapporto teorico di trasformazione, il TV e il TA sono caratterizzati da un rapporto effettivo fra la grandezza in ingresso e quella in uscita dipendente dalle specifiche condizioni di impiego, mentre il rapporto nominale è fornito dal costruttore.

Utilizzando simultaneamente un TV e un TA, è possibile collegare sulla linea un wattmetro per ottenere le misure della potenza. Di seguito sono indicati in tabella i modi di inserzione, funzionamento e protezioni dei trasformatori di misura:

	TA	TV
<i>Inserzione sulla linea</i>	Primario in serie.	Primario in derivazione.
<i>Funzionamento</i>	Quasi in corto circuito: alimenta un'impedenza molto bassa.	Quasi a vuoto: alimenta un'impedenza molto elevata.
<i>Protezioni</i>	Valvole di tensione, mai fusibili.	Fusibili sul primario e sul secondario

Ovviamente, i trasformatori per usi speciali non sono solo quelli enunciati in questa sede ma il loro approfondimento non è destinato all'attuale trattazione. Di maggiore interesse sono i trasformatori trifase, dei quali verrà mostrato qualche accenno senza la pretesa di conoscerli a pieno.

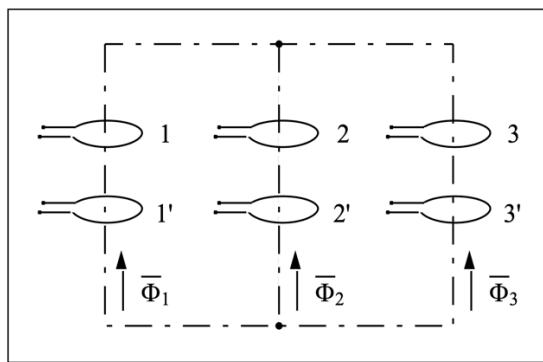
Per semplificare la trattazione, ci si è focalizzati sul trasformatore monofase nonostante si sappia che tutta la trasmissione elettrica avviene su linee elettriche trifasi. **L'utilizzo di un trasformatore monofase per la trasmissione trifase non è vietato**, a patto che sia affiancato da altri due

**dispositivi identici;** tuttavia, **risulta molto più pratico ed economico implementare un unico trasformatore trifase,** dal momento in cui questo conserva tutti i vantaggi dei comuni sistemi trifase.

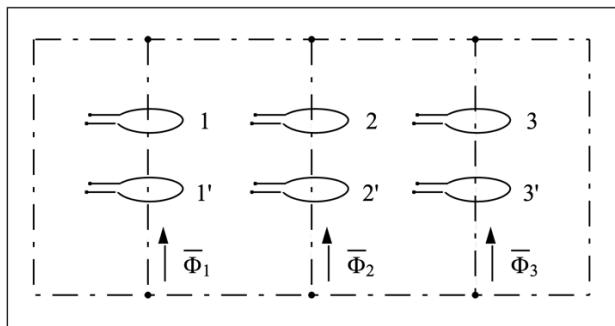
Se un **trasformatore trifase è connesso in un sistema equilibrato e simmetrico**, tutte le terne delle **grandezze omogenee in esso presenti sono tali da avere sempre somma zero**, ovvero sono rappresentabili in regime sinusoidale da terne simmetriche di vettori; ciò accade anche per i tre flussi principali, che quindi rispettano la seguente relazione:

$$\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_3 = 0$$

Nelle figure che seguono, i rami del circuito magnetico sono stati evidenziati con una linea tratteggiata, mentre gli avvolgimenti elettrici ad essi concatenati con una sola spira; il tutto per una questione di semplicità grafica. Nella figura seguente è stato raffigurato un **trasformatore trifase con nucleo, o circuito magnetico, a tre colonne**:



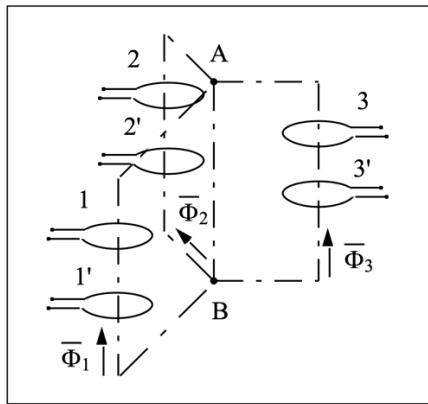
Di seguito, invece, è proposta una **configurazione alternativa**, detta **corazzata**, in cui le **colonne sono cinque**:



**Nel nucleo a tre colonne l'annullamento della somma dei tre flussi è imposto dalla struttura stessa del circuito magnetico, anche se il sistema non fosse equilibrato e simmetrico; nel nucleo a cinque colonne, invece, questa relazione di annullamento non è generalmente verificata se il sistema trifase non è equilibrato e simmetrico** (proprio per questa circostanza spesso è preferito il nucleo corazzato).

Se si approfondisse l'analogia tra circuito elettrico e circuito magnetico si potrebbe apprezzare meglio l'equivalenza di un circuito magnetico a tre colonne con un collegamento stella – stella senza neutro e di un circuito magnetico a cinque colonne con un collegamento stella – stella con neutro.

**La configurazione “con neutro” potrebbe essere semplificata dalla seguente:**



in cui la colonna centrale ***AB*** svolge la funzione di neutro (anche se può essere assente).

In un trasformatore trifase, gli avvolgimenti primari e quelli secondari possono essere collegati in vari modi; tipicamente:

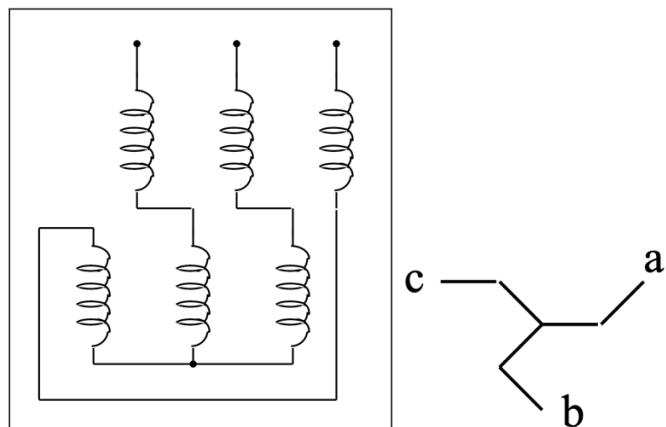
- Primari a stella e secondari a stella;
- Primari a triangolo e secondari a triangolo;
- Primari a triangolo e secondari a stella;
- Primari a stella e secondari a triangolo.

Per rappresentare questi collegamenti senza dover raffigurare i trasformatori, si possono usare delle sigle composte da due lettere (maiuscola per gli avvolgimenti primari e minuscola per gli avvolgimenti secondari, D per il collegamento a triangolo e Y per il collegamento a stella) e un numero, il gruppo (definito come rapporto tra la fase della tensione in uscita e la fase della tensione primaria, espresse in gradi, o lo sfasamento delle tensioni concatenate secondarie rispetto alle tensioni concatenate primarie, diviso  $30^\circ$ ). Le norme CEI raccomandano schemi di collegamento a gruppo 0 o a gruppo 11:

Dd0	
Yy0	
Dy11	
Yd11	

Ma non è sconsigliato il collegamento a gruppi 5 o 6. Nel caso in cui il collegamento fosse a stella, può esistere o meno il conduttore di neutro.

Talvolta **gli avvolgimenti primari e secondari possono essere collegati** secondo uno schema che prende il nome di collegamento a zig-zag (simbolo Z):

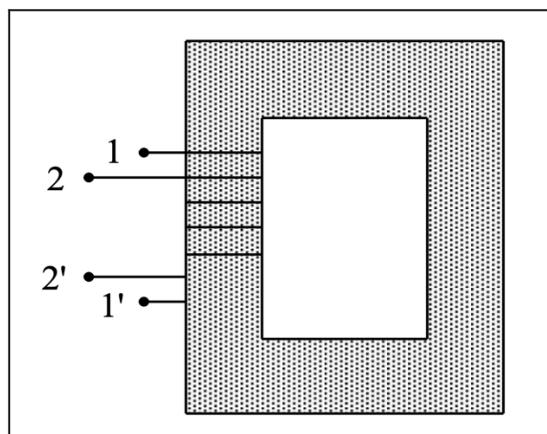


Uno dei vantaggi di questo collegamento è **l'aumento di un fattore  $\sqrt{3}$  del valore efficace di corrente**.

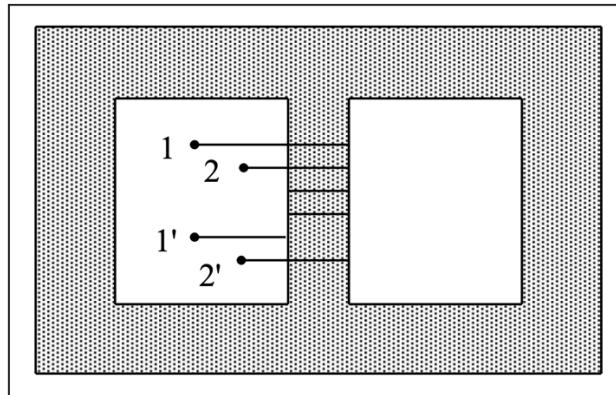
## NOTIZIE SULLA COSTRUZIONE E I DATI DI TARGA

Le rappresentazioni finora proposte di un trasformatore non rappresentano il progetto di un vero trasformatore, sia per ragioni pratiche che per ragioni legate al rendimento ed alle tensioni di cortocircuito. In primo luogo, **il nucleo non è realizzato in ferro massiccio ma è costituito da tanti piccoli lamierini in lega di ferro e silicio ad alta permeabilità magnetica e bassa cifra di perdita**, per uno spessore che va da qualche decimo di millimetro fino ad un millimetro; questa configurazione è il prodotto di un **compromesso tra un costo di produzione contenuto, una discreta resistenza meccanica e perdite nel ferro relativamente basse** (sono proporzionali alle dimensioni della sezione normale alle linee di flusso ed al quadrato dello spessore dei lamierini), **in modo tale che il rapporto perdite per isteresi : perdite per correnti parassite vari da 3:1 a 4:1**.

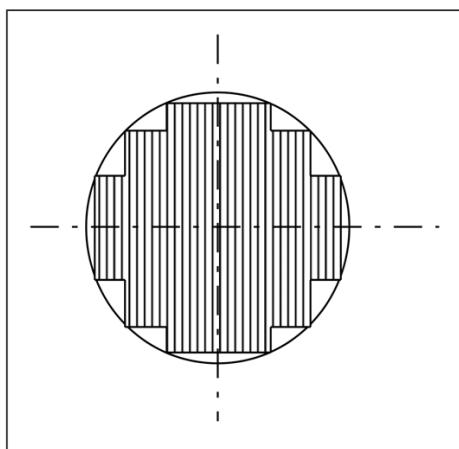
Le forme più diffuse per la realizzazione di un trasformatore sono quelle **a colonna**, come nella figura seguente:



Oppure a nucleo corazzato:



Per ottenerle, i lamierini sono opportunamente tranciati in più pezzi, verniciati con una sostanza isolante e successivamente accostati in modo che il piano di laminazione sia parallelo alle linee di flusso; la sezione trasversale delle porzioni verticali dei nuclei, le colonne, non è mai circolare ma quadrata, rettangolare oppure a gradini (seppur inscritta in un cerchio con il massimo di area utile), per una semplice questione di semplicità realizzativa:



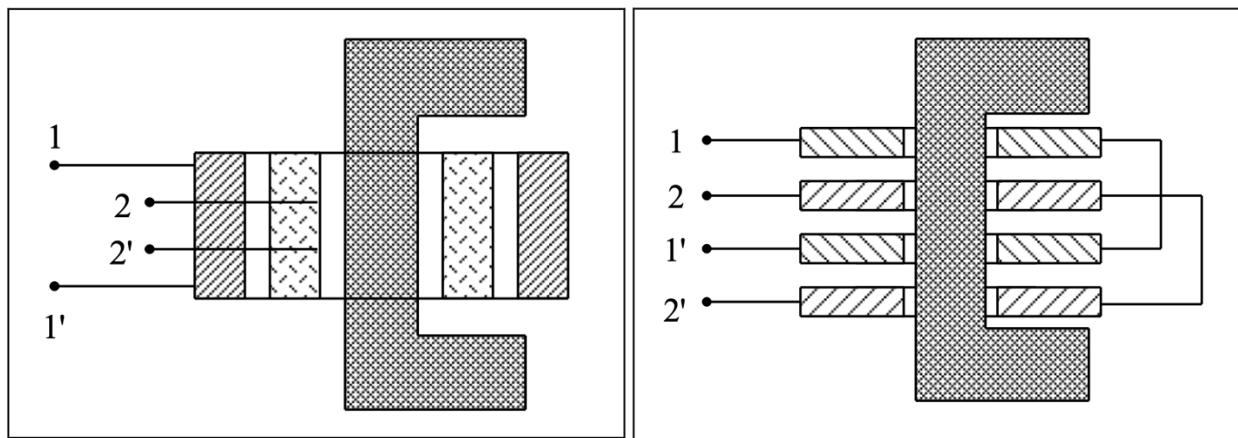
Di contro, la sezione trasversale delle porzioni orizzontali (dette gioghi) è generalmente rettangolare.

Per quanto riguarda gli avvolgimenti, essi sono generalmente disposti intorno alle colonne in modo da rendere il valore assoluto del coefficiente di accoppiamento quanto più possibile unitario (nel caso in cui  $|k| = 1$  si parlerebbe di accoppiamento perfetto):

$$-1 \leq k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

Le disposizioni tipiche sono le seguenti:

- **Disposizione concentrica**, gli avvolgimenti sono montati con lo stesso asse ma con diametro diverso;
- **Disposizione alternata**, gli avvolgimenti (suddivisi in bobine parziali di forme discoidale) hanno diametri uguali e sono montati sullo stesso asse, con bobine appartenenti al primario ed al secondario alternativamente disposte lungo le colonne.



In entrambi i casi, gli avvolgimenti sono opportunamente distanziati, sia per questioni di isolamento che per lasciare il posto al passaggio di fluidi refrigeranti (le perdite generano calore che va smaltito per evitare il danneggiamento termico dell'isolamento).

Come per qualsiasi altro bipolo elettrico, anche il trasformatore dispone di una targa con la quale è possibile identificare tutte le sue caratteristiche; essa è apposta sul dispositivo stesso, contiene il contrassegno CEI, il nome del costruttore, il numero di identificazione ed una serie di informazioni (non sempre tutte riportate):

- **Numero delle fasi e tipo di collegamento**

Se il trasformatore è monofase, basta questo aggettivo; se trifase, va specificato anche il tipo di collegamento degli avvolgimenti indicando la sigla in forma “Maiuscola – minuscola – gruppo”.

- **Tensione nominale primaria e secondaria**

Per i trasformatori monofase si parla di  $V_{1N}$  e  $V_{2N}$ , mentre per i trasformatori trifase si intendono quasi sempre le tensioni concatenate, qualunque sia il collegamento fra gli avvolgimenti; nel caso in cui fosse prevista una commutazione di collegamenti, si riportano i valori nominali relativi ad ogni tipo di collegamento (tenendo in considerazione che la tensione nominale relativa ad un singolo avvolgimento ha un unico valore fisso).

- **Corrente nominale primaria e secondaria**

Per i trasformatori monofase si parla di  $I_{1N}$  e  $I_{2N}$ , mentre per i trasformatori trifase si intendono quasi sempre le correnti di linea, qualunque sia il collegamento fra gli avvolgimenti; nel caso in cui fosse prevista una commutazione di collegamenti, si riportano i valori nominali relativi ad ogni tipo di collegamento (tenendo in considerazione che la corrente nominale relativa ad un singolo avvolgimento ha un unico valore fisso).

- **Potenza nominale**

Intesa come potenza apparente nominale resa, cioè uscente dal secondario in condizioni nominali; per un trasformatore monofase è definita come:

$$A_{2N} = V_{2N} I_{2N}$$

Mentre per un trasformatore trifase:

$$A_{2N} = \sqrt{3}V_{2N}I_{2N}$$

- **Fattore di potenza nominale**

Si intende la quantità  $\cos(\varphi_{2N})$ , da cui si può dedurre (in accoppiamento con i dati precedenti) la potenza attiva nominale resa.

- **Frequenza nominale**

Per gli impianti di terra ferma in Europa si intende  $f_N = 50\text{Hz}$ , negli stati uniti  $f_N = 60\text{Hz}$  e a bordo degli aeromobili  $f_N = 400\text{Hz}$  (essendo inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, frequenze nominali alte permettono dispositivi di dimensioni ridotte).

- **Rapporto di spire**

Coincide con il rapporto tra le tensioni del primario e del secondario a vuoto, oppure con il rapporto tra le correnti secondaria e primaria in cortocircuito.

- **Tensione di cortocircuito**

Definita in precedenza ed equivalente per sistemi trifase.

- **Rendimento in condizioni nominali**

Valore che varia da 0.90 (per trasformatori di piccola potenza) a 0.995 (per quelli di grande potenza).

- **Natura del servizio**

Può accadere che un trasformatore debba funzionare con tensioni e correnti nominali continuative, per un tempo indefinito e arbitrariamente lungo; la targa indica allora “servizio continuativo”. Quando, invece, il trasformatore deve funzionare in servizio con tensioni e correnti nominali per un periodo di tempo  $T_S$  relativamente breve (secondi o minuti), seguito da un periodo  $T_0$  di funzionamento a vuoto, il trasformatore si dice adatto per servizio intermittente e si definisce il rapporto di intermittenza come la quantità:

$$r = \frac{T_S}{T_S + T_0}$$

In questa situazione la targa riporta il valore nominale  $r_N$  di questo rapporto. Se, pur con tensioni e correnti nominali, un trasformatore per servizio intermittente funziona con  $r > r_N$  (se non con  $r = 1$ , in servizio continuativo), può raggiungere temperature pericolose per la buona conservazione dei suoi materiali componenti e rompersi.

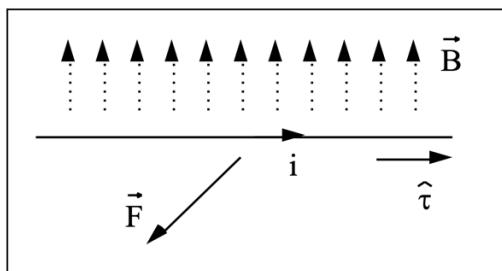
Infine, si ricorda che **non vanno superati mai i valori nominali delle tensioni, delle correnti ed eventualmente del rapporto di intermittenza**, per far in modo che **le perdite nel ferro e nel rame non superino i rispettivi valori limite**.

Per quanto riguarda la **diagnostica**, sebbene i trasformatori siano **caratterizzati da malfunzionamenti non molto frequenti**, bisogna osservare:

- **Aumenti della temperatura dell'olio**, dipesi da sovraccarichi o da una cattiva ventilazione;
- **Eventuali rumori**, causati dal lasco serraggio dei dadi sul nucleo o il valore dell'induzione alla quale il trasformatore sta lavorando (responsabile di coil whine);
- **Il relè Buchholz**, che comunica eventuali cortocircuiti tra spire o tra avvolgimenti;
  - Questo dispositivo è posto sopra il trasformatore ed interviene quando rileva **gas sviluppati durante i cortocircuiti interni**.

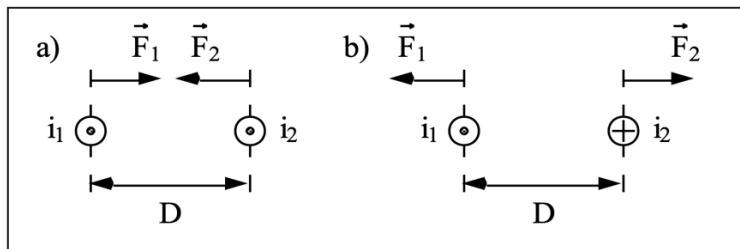
Esistono anche altri sintomi che comunicano il **malfunzionamento di un trasformatore**, il più evidente dei quali è la **deformazione delle spire** in seguito ad eccessivi sforzi elettrodinamici negli **avvolgimenti**; infatti, un conduttore rettilineo di lunghezza  $L$ , percorso da corrente  $i$  ed immerso in un campo esterno di induzione magnetica  $\vec{B}$  risente di una forza  $\vec{F}$  modellata dalla legge di Lorentz:

$$\vec{F} = iL\hat{\tau} \times \vec{B}$$

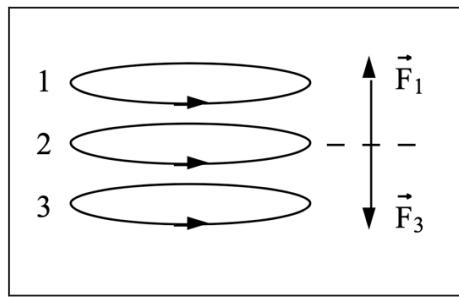


Con  $\hat{\tau}$  versore diretto come il filo e orientato secondo la direzione della corrente. **Gli avvolgimenti possono essere considerati come una serie di fili rettilinei paralleli percorsi da correnti** (concordi o meno) e posti ad una distanza  $D$ ; l'interazione tra questi fili può essere espressa in funzione della legge di Lorentz e della legge di Biot – Savart:

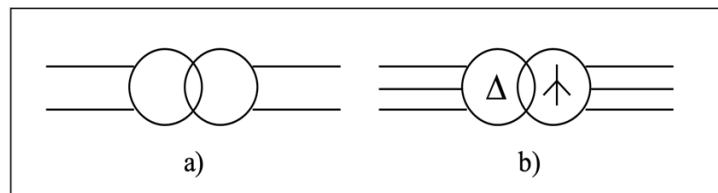
$$F_2 = i_2 B_1 L = \frac{\mu_0 L}{2\pi D} i_1 i_2 \quad F_1 = i_1 B_2 L = \frac{\mu_0 L}{2\pi D} i_1 i_2$$



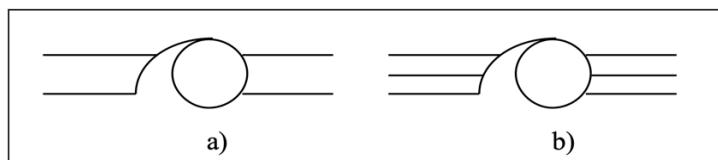
Quando il campo magnetico in cui i fili sono immersi e le correnti che vi scorrono all'interno sono uguali, **le due forze sono uguali in modulo ma opposte in verso**; infatti, **quando le sollecitazioni sono abbastanza elevate da deformare gli avvolgimenti di un trasformatore, non andranno mai a danneggiarsi le porzioni di avvolgimento centrali bensì quelle esterne**, perché al centro la sommatoria di tutte le forze è nulla:



Si vuole concludere la trattazione mostrando quali sono i **simboli grafici** usati per indicare sinteticamente la presenza di un trasformatore in un circuito. Per i trasformatori monofase e trifase:



Mentre per gli autotrasformatori monofase e trifase:



## **IMPIANTI ELETTRICI**

### **GENERALITÀ SUGLI IMPIANTI ELETTRICI**

La nascita dei **primi impianti elettrici** risale alla **prima metà del XIX** secolo con l'invenzione del telegrafo e delle lunghe linee telegrafiche alimentate in corrente continua, negli Stati Uniti prima e in Europa poi. **L'elettrificazione delle città fu un processo seguente e che può essere fatto risalire alla fine del secolo**; tuttavia, va menzionata l'importanza di un tale processo, dal momento in cui è stato **causato da un grande salto tecnologico ed è stato esso stesso causa di un enorme progresso tecnologico** che ha investito diversi settori ed ha migliorato la vita fino agli standard in cui adesso si vive.

Il progresso che ha seguito l'elettrificazione delle città è stato possibile grazie al fatto che **l'energia elettrica permette di essere convertita con semplicità e con alto rendimento in altre forme di energia** (meccanica, luminosa, termica, ecc...) e grazie al fatto che **per produrla sono state necessarie le fonti primarie che altrimenti non avrebbero avuto alcun impiego** (come l'acqua per le centrali idroelettriche o il sole per quelle fotovoltaiche).

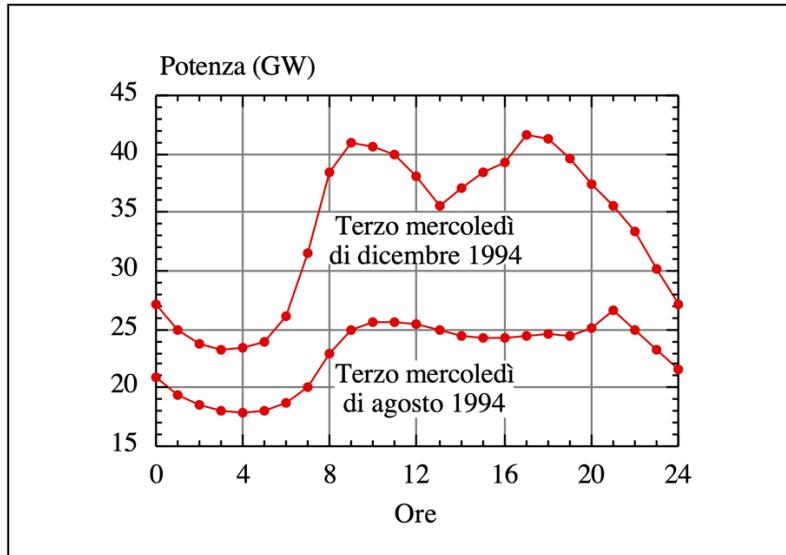
**La richiesta di energia elettrica nel tempo ha subito notevoli incrementi**, tanto da **raddoppiare ogni dieci anni fino al 1970 per i paesi industrializzati** (significa il **7% annuo**) e **ogni cinque anni per i paesi in via di sviluppo** (significa il **15% annuo**). Nel 1979 il mondo aveva bisogno di circa 8 TWh di energia, prodotta principalmente da centrali termoelettriche; applicando un tasso (riduttivo) di crescita della richiesta del 7% annuo, si può supporre che **al giorno d'oggi il mondo necessiti di 32 TWh**:

Tipo di produzione	Produzione in TWh nel 1979	%	Variazione rispetto all'anno precedente
Idroelettrica	1.600	20	+ 2.7%
Termoelettrica	5.751	72	+ 5.7%
Nucleare	0.630	7.9	+ 5.0%
Geotermica	0.009	0.1	---
<b>Totale</b>	<b>7.990</b>	<b>100</b>	<b>+ 5.0%</b>

**L'Italia impiega il 55% della sua energia elettrica per usi industriali, il 30% per usi civili, il 5% per usi vari e il rimanente 10% costituisce le perdite in rete**, costituite da **calore disperso per effetto Joule** (ed è il motivo per cui si cerca di far scorrere energia elettrica ad alta tensione, così la corrente diminuisce in valore efficace e l'effetto Joule è contenuto). **La principale fonte di energia elettrica in Italia è il termoelettrico**, sfruttato sempre di più a partire dagli anni Sessanta del secolo scorso nonostante, attualmente, ci siano diverse campagne di sensibilizzazione e diversi programmi di ricerca scientifica che incentivino il passaggio a fonti di energia più sostenibili per l'ambiente.

Uno dei **difetti dell'energia** elettrica risiede nell'**impossibilità di immagazzinarne grandi quantità**; infatti, l'accumulo sotto forma elettrostatica nei condensatori risulta di entità modesta rispetto alle normali richieste e non si intravedono tecnologie che possano consentirne l'immagazzinamento in quantità superiori; l'accumulo sotto forma di energia magnetica in induitanze superconduttrici potrebbe essere sufficiente ma non è economicamente sostenibile. Quindi, **bisogna produrre in ogni istante la quantità di energia richiesta più quella che andrà persa durante la trasmissione** e questo **costante equilibrio** rende molto **delicato l'esercizio dei sistemi elettrici** (che coinvolgono manutenzione, incertezze sulla disponibilità degli impianti di generazione e trasporto e molto altro).

La figura seguente fornisce i **diagrammi della potenza richiesta dall'intera rete italiana nell'arco di un giorno lavorativo di massimo prelievo ed in un giorno del mese di agosto**; la differenza tra i due è naturalmente evidente, anche se negli ultimi anni si sta appiattendo per mezzo del costante uso di climatizzatori in estate. Un grafico di questo tipo nel **gergo tecnico** (non scientifico) è detto **grafico a gobba di dromedario** o **grafico a M**:



Il complesso delle centrali di un moderno sistema elettrico notevolmente articolato come quello italiano comprende impianti che possono essere classificati come segue:

- Centrali **idroelettriche**;
- Centrali **termoelettriche**;
- Centrali **termonucleari**;
- Centrali **geotermoelettriche**;
- Centrali **con turbine a gas**;
- Centrali **di pompaggio**.

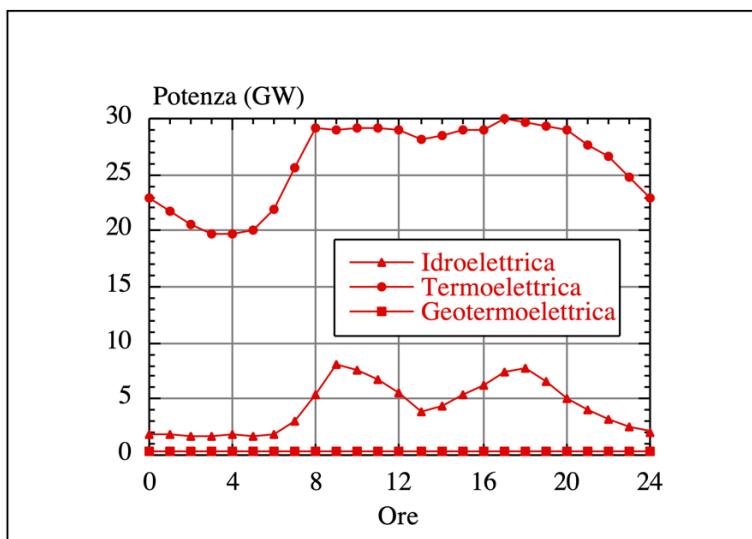
In relazione all'anno 1979, il **contributo alla produzione i energia dei diversi tipi di centrali del sistema italiano** è riassunto dalla seguente tabella:

Tipo di produzione	Produzione in TWh	Percentuale
<b>Idroelettrica</b>	48.21	26.6
<b>Termoelettrica</b>	127.92	70.5
<b>Geotermoelettrica</b>	2.50	1.4
<b>Nucleare</b>	2.63	1.5
<b>Totale</b>	181.26	100

Si noti l'**irrilevanza del contribuito geotermoelettrico e nucleare** (quest'ultimo è stato dismesso nel tempo e ad oggi non è più in uso). Questa suddivisione non è standardizzata, è **tipica del sistema elettrico italiano**; negli altri paesi europei non è vietata una distribuzione diversa, come in Norvegia dove il 95% della produzione è geotermoelettrica.

I **gruppi generatori termoelettrici**, essendo caratterizzati da **lunghi tempi di avviamento**, sono **adatti al servizio base** (funzionano a potenza costante, a carico e rendimento nominale o con modeste variazioni di  $\pm 5\%$ ). Le **centrali idroelettriche** ad acqua fluente **erogano una potenza che dipende**

**dalla portata d'acqua e dal salto disponibile;** pertanto, la potenza erogata da queste centrali si può ritenere costante nell'arco di una giornata, il che le rende **adatte per il servizio di punta** (quando ci sono imprevedibili scostamenti della domanda rispetto alla stima).



Dopo gli accenni alla produzione, si proceda ad accennare alla trasmissione e alla distribuzione dell'energia elettrica. Se **per produzione si intende il come l'energia elettrica è prodotta**, per **trasmissione si intende il modo in cui essa è trasportata attraverso lunghi percorsi** e per **distribuzione il modo in cui essa è fornita agli utilizzatori**.

I primissimi impianti di distribuzione elettrica erano incentrati sulle **tecnologie a corrente continua**, il che aveva sicuramente dei vantaggi in termini di semplicità ma **non erano particolarmente efficienti e facili da manutenere**; quando fu **inventato il trasformatore** (detto all'epoca generatore secondario per errore) da Gaulard e Gibbs, si notò che **solo in corrente alternata poteva essere modificato il valore di tensione prodotta ai morsetti di un generatore**, abbassandola o alzandola. Questa invenzione ha aperto le porte dei moderni sistemi di trasmissione dell'energia elettrica, incentrati sul concetto di alta tensione (le alte tensioni abbassano i valori efficaci di corrente e permettono una dispersione maggiore dell'energia); tuttavia, il trasformatore non era sufficiente a convincere il mondo a passare alla corrente alternata, fu solo l'invenzione del motore asincrono (o elettrico) da parte di Galileo Ferraris e Nikola Tesla e delle linee di distribuzione trifase da parte di Brown che la corrente alternata si impose sul mercato, tanto che ancora oggi la trasmissione avviene su linee trifase in alternata.

Una volta che la corrente alternata si impose sul mercato, era da **determinare a che frequenza distribuire l'energia elettrica**. La scelta della frequenza delle grandi reti elettriche risulta da un **compromesso tra contrastanti esigenze e risulta vincolante per i successivi ampliamenti della rete**; l'unificazione ai due valori oggi prevalenti in tutto il mondo, **50 Hz per l'Europa e 60 Hz per gli USA**, è relativamente recente, da datare alla seconda metà del secolo scorso. Questi valori non sono scelti a caso, sono un **compromesso tra esigenze tecniche e necessità umane** (l'essere umano percepisce uno sfarfallio nelle luci alimentate a corrente continua per frequenze inferiori ai 10 Hz).

Prima di esaminare gli schemi fondamentali degli impianti in regime sinusoidale è utile **definire e classificare i sistemi elettrici secondo le norme CEI**. Il CEI stabilisce le seguenti definizioni:

- Un **impianto elettrico** è il complesso di componenti elettrici destinato ad una determinata funzione;

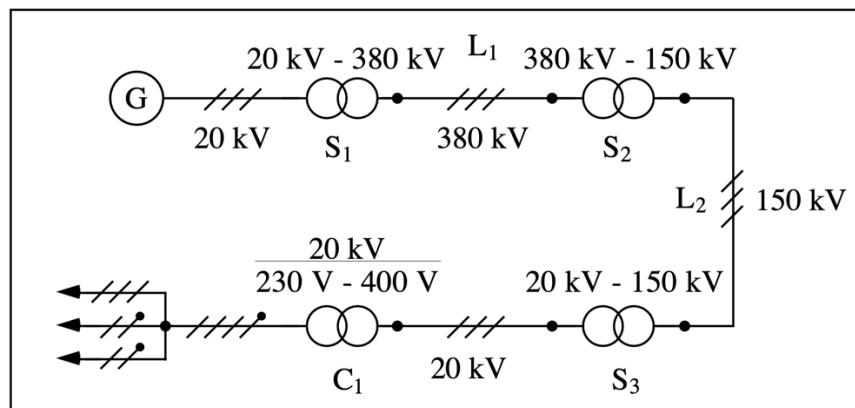
- Un **sistema elettrico** è la parte dell'impianto costituita dall'insieme di componenti elettrici aventi una determinata tensione nominale;
- Una **rete di distribuzione** è l'impianto destinato alla distribuzione dell'energia elettrica agli impianti utilizzatori;
- Un **impianto utilizzatore** è l'insieme dei circuiti di alimentazione degli apparecchi di utilizzatori e delle prese a spina (comprese le relative apparecchiature di manovra, sezionamento, interruzione, ecc...);
- L'**origine di un impianto utilizzatore** è il punto di consegna dell'energia elettrica all'impianto utilizzatore (in genere una rete di distribuzione pubblica);
- Un **circuito elettrico** è la parte dell'impianto utilizzatore avente un'unica alimentazione, protetta contro le sovraccorrenti dallo stesso dispositivo di protezione;
- Un **circuito terminale** è un circuito direttamente collegato agli apparecchi utilizzatori oppure alle prese a spina;
- Un **circuito di distribuzione** è la parte di circuito comune a più circuiti terminali.

**Gli impianti elettrici sono connessi alla rete di distribuzione pubblica e fanno parte del sistema elettrico generale.** Essi devono essere **compatibili con le caratteristiche intrinseche del sistema elettrico**; le più importanti sono:

- **Tensione nominale**, è la tensione che lo rappresenta, 230V per sistemi monofase in bassa tensione (è considerata l'ampiezza dell'unica tensione sinusoidale) e 400V per sistemi trifase (è considerata la tensione esistente tra due fasi qualsiasi);
- **Tensione nominale verso terra**, inteso come il valore di tensione esistente tra uno dei conduttori elettrici e la terra.

## IMPIANTI IN CORRENTE ALTERNATA E IN CORRENTE CONTINUA

L'insieme delle macchine, apparecchiature e linee destinate alla produzione, trasformazione, trasmissione, distribuzione ed utilizzazione dell'energia elettrica costituisce il **sistema elettrico**. Sotto forma di schema unifilare, di seguito è riportata la struttura complessiva di un impianto in corrente alternata (infatti si può notare la struttura trifase):



Si noti la **produzione dell'energia elettrica in media tensione** ( $1kV \leq V_N \leq 30kV$ ), la **trasmissione in alta tensione** ( $V_N > 30kV$ ) e la **distribuzione in bassa tensione** ( $V_N < 1kV$ ).

Il flusso lavorativo di un sistema elettrico di questo tipo è diviso nelle seguenti fasi:

- **Produzione dell'energia elettrica**

Avviene nelle **centrali di produzione** (G), che possono essere di vario tipo e chiamate a svolgere funzioni diverse, come già detto. I generatori nelle centrali sono caratterizzati da **valori di tensione non troppo elevati**, per evitare **problemi di isolamento** (se troppo alti si rompono i dielettrici come l'aria) e **di ingombro** (tensioni elevate implicano distanze tra i vari cavi elevate per ridurre effetti capacitivi o cortocircuiti indesiderati).

- **Trasformazione dell'energia elettrica**

Per trasformazione dell'energia elettrica si intende la **variazione dei livelli di tensione: in ogni punto del sistema si utilizza il livello più conveniente dal punto di vista tecnico ed economico**; tale funzione è svolta dalle **stazioni di trasformazione primarie** ( $S_1$  e  $S_2$ , detta di subtrasformazione e non necessaria), **da quelle secondarie** ( $S_3$ ) e **dalle cabine di trasformazione** ( $C_1$ ). Essenzialmente, le stazioni e le cabine di trasformazione sono composte da uno o più trasformatori, solo che le stazioni primarie sono elevatrici, quelle secondarie e le cabine abbassatrici.

- **Trasmissione dell'energia elettrica**

Per trasmissione dell'energia elettrica si intende il **trasporto di elevate quantità di energia a grandi distanze e con elevati livelli di tensione mediante linee aeree** (solo raramente mediante linee in cavo); nella figura precedente,  $L_1$  rappresenta una linea di trasmissione. Come si può immaginare, superando la riassunzione dello schema precedente, la trasmissione è effettuata tramite una articolata rete, come quella della città di Napoli in figura:



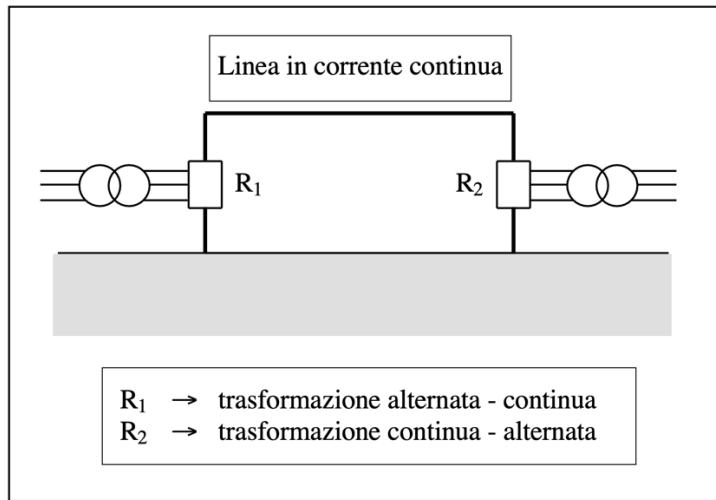
Così come l'omologa trasformazione, la linea di trasmissione  $L_2$  è detta linea di subtrasmissione e la si distingue dalle principali linee per livelli di tensione più bassi; le linee di subtrasmissione sono spesso usate per ragioni di sicurezza quanto si deve passare in prossimità dei centri abitati.

- **Distribuzione dell'energia elettrica**

Per distribuzione dell'energia elettrica si intende la **consegna dell'energia agli utilizzatori**; può essere fatta in **media o bassa tensione**, a seconda del fatto che l'utilizzatore necessiti più o meno energia (le industrie necessitano più energia di un'abitazione).

**L'impiego di sistemi elettrici in corrente continua** trovano spazio nelle **linee di trasmissione sottomarine** e nei **sistemi di trazione elettrica**. I cavi sottomarini vengono adoperati per trasferire l'energia elettrica dalla terraferma verso le isole attraverso il collegamento HVDC (High Voltage Direct Current); la sua applicazione per la corrente continua è ottimale, perché se la lunghezza del cavo supera la decina di chilometri il collegamento in corrente alternata comporterebbe elevate correnti disperse nel dielettrico in cui sono immersi i conduttori. Di norma, si usano cavi bipolari o unipolari, sfruttando il mare stesso come conduttore di ritorno.

Uno schema tipico per questi sistemi è il seguente:



Nella figura si possono riconoscere due stazioni di trasformazione: una che trasforma la corrente alternata in corrente continua (in gergo detta ca/cc) e l'altra che realizza la trasformazione inversa.

Come si può dedurre, **l'impiego della corrente continua non è del tutto azzerato** dopo l'inizio del monopolio della corrente alternata; se si volessero fare delle stime, si potrebbe dire che **il 95% dell'energia elettrica viaggia in corrente alternata** e che **il restante 5% è corrente continua**. I materiali utilizzati negli impianti elettrici non seguono questa distinzione tra corrente continua e alternata, sono bensì catalogati secondo le loro caratteristiche e proprietà elettriche:

- **Materiali conduttori** (duttili, non malleabili), sono quelli che consentono il flusso di una corrente elettrica e hanno valori molto bassi di resistività elettrica e di rigidità dielettrica;

Conduttore	Purezza (%)	Resistività ( $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ )
Rame	99.95	0.0171
Alluminio	99.995	0.02655
Argento	99.9	0.016
Oro	99.99	0.023
Platino	99.99	0.106
Ferro	99.9	0.13
Nichel cromo		1.06
Piombo	99.9	0.2
Tungsteno		0.055

- **Materiali isolanti**, sono quelli che impediscono lo scambio di energia elettrica tra conduttori e sono caratterizzati da elevati valori di resistività e di rigidità dielettrica:
  - **Isolanti gassosi** (in figura sono a  $25^\circ\text{C}$ ), comodi perché è molto difficile che avvenga una scarica elettrica in un interno gassoso (avendo una rigidità dielettrica molto alta);

Gas	Densità relativa dell'aria	Rigidità dielettrica (kV/m)
Anidride carbonica	1.53	2900
Aria	1.00	3200
Azoto	1.10	2900
Idrogeno	0.07	1900

- **Isolanti liquidi**, spesso oli minerali (usati come dielettrici nei condensatori, negli induttori e nei cavi in carta impregnata), apiroli, oli ai siliconi e vernici (usati solo come protettivi anticorrosione);
- **Isolanti solidi**, caratterizzati da un'elevata rigidità dielettrica e largamente utilizzati nei sistemi elettrici grazie alla loro alta sopportazione al calore.

Materiale isolante	Resistività ( $\Omega\text{m}$ )	Rigidità dielettrica (kV/mm)
Gomma naturale	$10^{14}$	21.0
Silicone	$10^{13}$	20
Carta	$10^{12}$	8
Fibra di vetro	$10^{16}$	50
Legno impregnato	$10^{15}$	30
Mica	$10^{17}$	150
Porcellane triassiali	$10^{12}$	15.76 (spessore 6.5 mm)

Chiunque si occupi di impianti elettrici, quale sia il suo specifico settore di interesse, è obbligato ad applicare quanto previsto dalla normalizzazione. Tutti i maggiori paesi industrializzati hanno Enti Normatori agenti a livello nazionale; in Italia, tale ruolo è svolto dal CEI (Comitato Elettrotecnico Italiano). La globalizzazione, tuttavia, ha intensificato l'esigenza di normative internazionali, ad oggi erogate dal IEC (International Electrotechnical Commission), che raggruppa 64 paesi membri (quasi la totalità dei paesi industrializzati), e in ambito europeo dal CENELEC (European Committee for Electrotechnical Standardization), anche se il suo principale ambito operativo è l'armonizzazione delle norme.



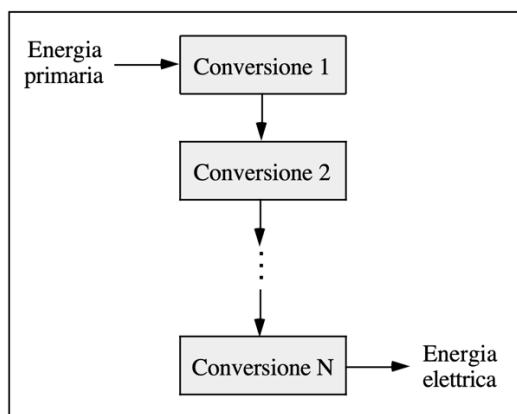
Su qualsiasi prodotto che richiede l'aderenza alle normative CEI, si può trovare il relativo marchio, a certificazione che quel prodotto è conforme alle norme; tuttavia, il CEI non è obbligato a verificare la rispondenza del prodotto, responsabilità dell'Istituto Italiano del Marchio di Qualità (IMQ).

## LA PRODUZIONE DI ENERGIA ELETTRICA

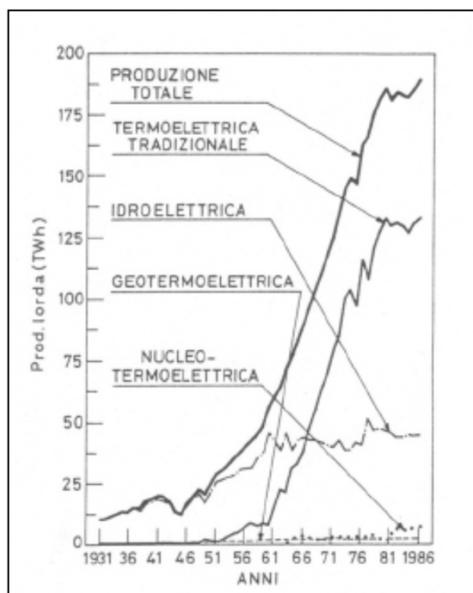
Produrre energia elettrica equivale a dire trasformare una fonte di energia già esistente, detta fonte primaria, in energia elettrica; le fonti primarie in questione si presentano sotto due forme:

- **Fonti periodicamente rinnovabili**, la cui disponibilità è continuamente rinnovata da fenomeni naturali (acqua, radiazione solare, ecc...);
- **Fonti non rinnovabili**, la cui disponibilità è limitata (combustibili fossili tradizionali).

Ad oggi, la maggior parte della produzione di energia elettrica proviene dalle **masse d'acqua presenti in bacini di accumulo o fluente nei corsi d'acqua** (utilizzate nelle **centrali idroelettriche**) e dai **combustibili fossili** (utilizzati nelle **centrali termoelettriche**). La trasformazione della fonte primaria di energia in energia elettrica può avvenire in diversi modi ma, **in base al numero di trasformazioni necessarie**, si possono classificare le **trasformazioni dirette** (quando non sono necessarie trasformazioni intermedie) e **trasformazioni indirette** (quando sono necessarie trasformazioni intermedie, come nella figura che segue):



È importante osservare, almeno per quanto riguarda l'Italia, il cambio della provenienza dell'energia elettrica nel tempo:



Si può notare come **in un primo periodo storico la prevalenza era idroelettrica, che poi si è saturata e ha lasciato il primato all'energia termoelettrica, ancora oggi in crescita**. Il motivo per cui a ridosso degli anni Sessanta si è verificata l'inversione di tendenza è da ricercare in due fattori: l'abbassamento del prezzo dei combustibili fossili e il disastro della centrale idroelettrica del Vajont del 9 ottobre 1963, che causò più di duemila vittime e convinse l'Italia a limitare la produzione di energia elettrica da questa fonte.

Sebbene verranno menzionate nel corso della trattazione, **in Italia è possibile considerare nullo il contributo energetico proveniente dalle fonti geotermiche e dalle fonti nucleari**, non particolarmente sfruttabili nel territorio italiano. Di seguito verranno analizzati nel dettaglio i processi produttivi dell'energia elettrica sulla base della fonte primaria utilizzata:

- **Centrali idroelettriche**

Le centrali idroelettriche svolgono un ruolo cruciale nella produzione di energia elettrica grazie alla loro **flessibilità ed economicità**; inoltre, la fonte primaria impiegata è l'**acqua, fonte rinnovabile e poco inquinante**. In Italia, l'**idroelettrico costituisce una porzione limitata della produzione totale perché i principali bacini sfruttabili per la produzione di energia elettrica sono già stati impiegati e quelli rimanenti andrebbero condivisi con altri settori come quello agricolo**; pertanto, si può dire che **la produzione di energia idroelettrica è satura**.

Il principio di funzionamento di una centrale idroelettrica consiste nella **trasformazione di energia potenziale di una massa d'acqua in energia cinetica delle pale di una turbina, dalla quale viene prodotta energia elettrica per mezzo della legge di Faraday – Neumann – Lens**. Si consideri una massa d'acqua  $M$ , di peso specifico  $\gamma = 9.81 \cdot 10^3 N/m^2$ , posta ad un'altezza  $z$  da un piano di riferimento, sottoposta ad una pressione  $p$  e dotata di una velocità  $v$ . L'energia potenziale posseduta da questa massa è:

$$W = MgH$$

Indicando, per semplicità, con  $H$  la quantità:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Detta **trinomio di Bernoulli** (oppure **prevalenza**) e rappresenta l'**energia totale relativa all'unità di peso del liquido**. Questa quantità dipende da:

- **Altezza geodetica  $z$** , pari all'energia potenziale unitaria di posizione;
- **Altezza piezometrica  $p/\gamma$** , pari all'energia potenziale unitaria di pressione;
- **Altezza cinetica  $v^2/2g$** , pari all'energia cinetica unitaria.

Si parla di salto disponibile  $H_D$  la **differenza del trinomio di Bernoulli tra il pelo libero del bacino di carico** (il punto più alto a cui è posta l'acqua) ed il **pelo libero dell'acqua immediatamente dopo l'uscita della turbina** (il punto in cui l'acqua viene scaricata):

$$H_D = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

**Gli ultimi due termini sono trascurabili**, individuando nel **salto disponibile** solo la **differenza delle altezze geodetiche** (detta salto geodetico):

$$H_D = H_G = z_1 - z_2$$

Detta  **$Q_V$  la portata volumetrica** (misurata in  $m^3/s$  e corrispondente al volume di liquid che fluisce nell'unità di tempo attraverso una assegnata sezione), la **Potenza teorica  $P$  sviluppabile** è data dalla relazione:

$$P = \gamma Q_V H_D$$

Tuttavia, poiché l'energia potenziale dell'acqua viene dapprima trasformata in energia meccanica e poi in energia elettrica, si può facilmente intuire che sull'asse della turbina non si potrà raccogliere che una parte della potenza teorica a causa delle diverse perdite presenti nella macchina. Indicando, quindi, con  $\eta$  il rendimento complessivo della trasformazione e con  $P_E$  la potenza elettrica erogata dal generatore di f.e.m., si pone per definizione:

$$\eta = \frac{P_E}{P} = \frac{P_E}{\gamma Q_V H_D}$$

Da cui:

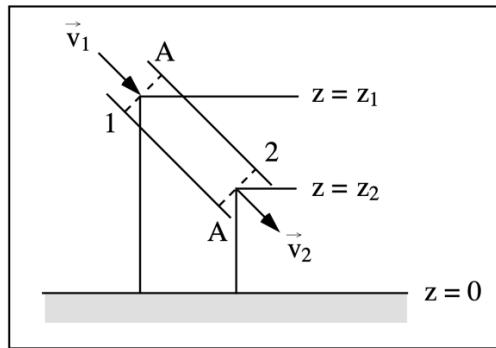
$$P_E = \eta \gamma Q_V H_D$$

Per impianti tipici si ha  $\eta = 0.82 \div 0.88$  e si può intuire che l'energia prodotta dipenda proporzionalmente dalla portata volumetrica e dal salto.

La trasformazione dell'energia posseduta dall'acqua in energia elettrica viene completata da tre elementi fondamentali, che agiscono in sequenza:

- **La condotta forzata**, che provvede a convogliare l'acqua verso la turbina;
- **La turbina idraulica**, che provvede a trasformare l'energia idraulica in energia meccanica;
- **Il generatore elettrico**, che provvede a trasformare l'energia meccanica in energia elettrica.

Il funzionamento di una **Condotta forzata a sezione costante** viene preso in esame nella seguente figura:



In regime permanente, la portata volumetrica è costante e, detta  $A$  l'area della sezione (supposta uguale all'imbocco e all'uscita), si ha che:

$$Q_{V1} = Q_{V2} \Rightarrow A v_1 = A v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

E cioè, che velocità di ingresso e velocità di uscita sono uguali. Si proceda ad un bilancio energetico all'imbocco e all'uscita, indicando con  $W_1$  l'energia posseduta dalla massa d'acqua all'imbocco della condotta e con  $W_2$  quella all'uscita:

$$W_1 = W_2 + \text{perdite}$$

Con il termine "perdite" si è indicata la quantità di energia persa a causa degli attriti lungo la condotta. Usando il teorema di Bernoulli ed indicando con  $Y_C$  le perdite di carico lungo la condotta (ovvero le precedenti perdite riferite al peso dell'acqua), si può dire che:

$$MgH_1 = MgH_2 + MgY_C$$

Semplificando:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Y_C$$

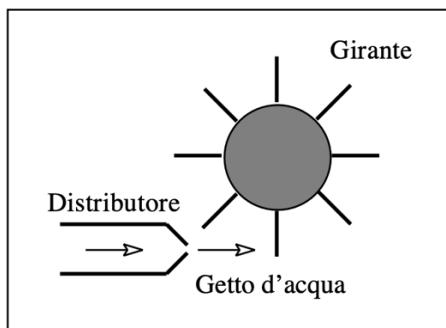
Che, grazie all'uguaglianza delle velocità precedentemente dimostrata, può essere ridotta a:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + Y_C$$

$$p_2 - p_1 = \gamma[(z_1 - z_2) - Y_C]$$

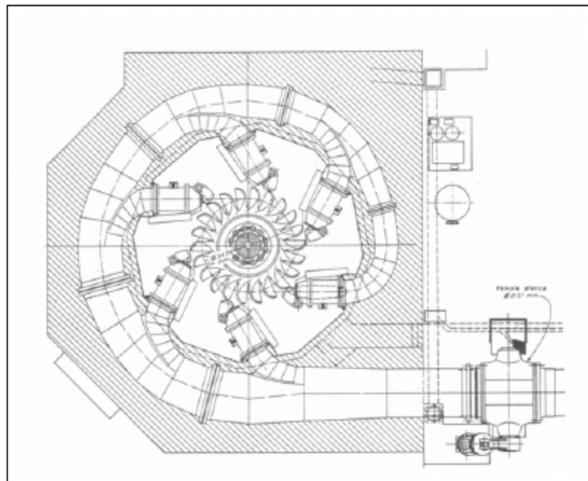
Da cui si può dedurre che **l'incremento di pressione è proporzionale alla differenza di quota a meno delle perdite di carico**. Alla luce di quanto appena detto, la condotta forzata può essere considerata come un sistema che trasforma energia potenziale di posizione in energia potenziale di pressione; nella realtà, le sezioni delle condotte forzate non sono costanti ma vanno restringendosi verso valle, in modo tale che la differenza di quota produca un aumento sia in pressione che in velocità del liquido.

In un impianto idroelettrico il componente più importante è la **turbina**, composta sostanzialmente da due blocchi, il **distributore** e la **girante**, come in figura:

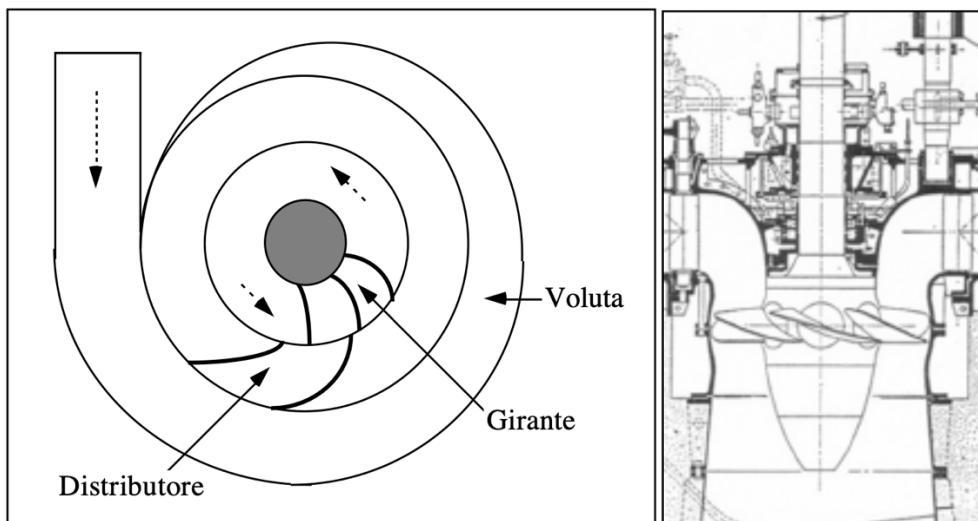


Il **distributore** è un condotto troncoconico in cui avviene la trasformazione della pressione dell'acqua in velocità all'uscita, mentre la **girante** è un azionamento meccanico le cui pale vengono messe in rotazione dall'impatto del liquido; in pratica, il distributore indirizza e regola il flusso d'acqua e la girante comunica all'albero su cui è montata l'energia sottratta all'acqua. Industrialmente si possono individuare due tipologie di turbine: le **turbine ad azione**, in cui tutta l'energia relativa al salto si trasforma in energia cinetica nel distributore, poi in energia cinetica e, infine, in energia meccanica, e le **turbine a reazione**, in cui solo una parte dell'energia relativa al salto si trasforma in energia cinetica nel distributore; quindi, l'acqua entra nella girante con una certa pressione (dovuta alla rimanente parte del salto non trasformata) e con una certa velocità, dalle quali si avrà la trasformazione dell'energia posseduta dall'acqua (di velocità e di pressione) in energia meccanica.

Per portate d'acqua relativamente ridotte e salti molto grandi (nell'ordine dei 400m) sono utili le **turbine ad azione Pelton**, costituite da un disco di acciaio che porta lungo la propria circonferenza delle pale a forma di cucchiaio e un distributore a tubazione spirale:



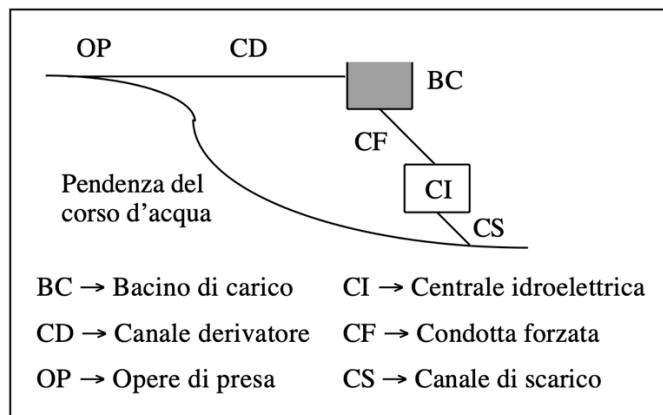
Quando non sono soddisfatte le condizioni per l'utilizzo della turbina Pelton, è utile utilizzare le **turbine a reazione Francis e Kaplan**. In entrambe, **distributore e girante sono collocati all'interno dello stesso involucro** e all'uscita del distributore l'**energia idraulica è solo in parte trasformata in energia cinetica** con un aumento della velocità dell'acqua, la restante aliquota è ancora presente sotto forma di **energia di pressione** e la sua trasformazione è realizzata nella stessa girante grazie ad una particolare geometria.



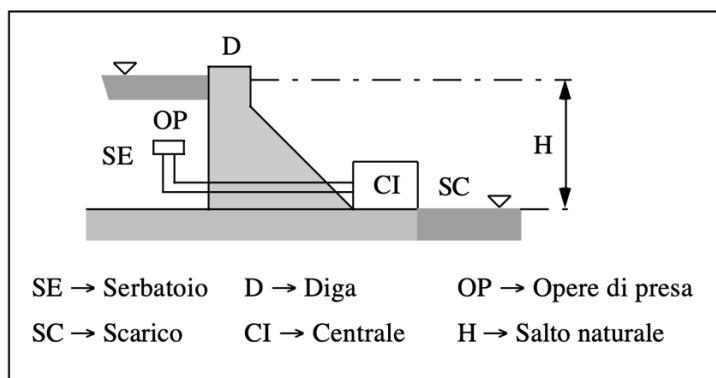
Per salti compresi tra 80m e 400m si usano le **turbine Francis** (prime in figura) e per salti minori di 80m si usano le **Kaplan** (seconde in figura) visto che le portate diventano fondamentali. In genere, con la tecnologia degli ultimi anni, si possono produrre 400MW con un dislivello di 600m.

Gli impianti idroelettrici possono essere classificati in base al salto sfruttato, alla portata ed al sistema di utilizzazione dell'acqua; in genere, quelle che sfruttano grandi portate sono del tipo ad acqua fluente ed utilizzano piccoli salti, mentre le centrali a serbatoio non dispongono di grandi portate e sfruttano salti medio/grandi.

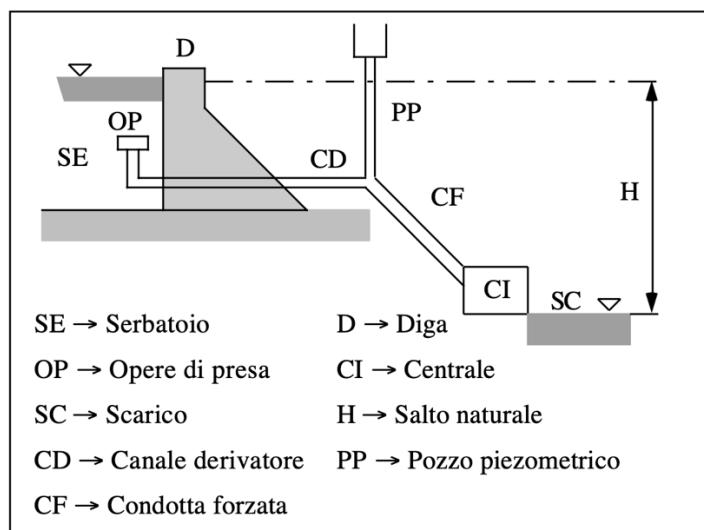
Nella centrale ad acqua fluente schematizzata dalla figura seguente, l'acqua viene derivata da un punto in alto; quindi, portata ad un bacino di carico mediante un canale derivatore, convogliata nella condotta forzata e, infine, scaricata in un punto più a valle.



Nella **centrale a serbatoio**, invece, un grosso serbatoio (invaso) è realizzato mediante una diga: dall'invaso viene derivata l'acqua verso la centrale secondo due schemi (sulla base della morfologia del territorio); nel primo schema, si riducono al minimo le opere di adduzione dell'acqua in centrale e le relative perdite di carico ma non sono consentiti grandi dislivelli e, pertanto, risulta utile solo quando si dispone di grosse portate.



Nel **secondo schema**, molto frequente nelle grandi centrali costituite da un serbatoio in quota e da impianti a valle, si fa uso di un **pozzo piezometrico**, un corpo di forma cilindrica più alto del massimo livello del bacino, al fine sia di evitare la fuoriuscita dell'acqua sia di proteggere l'impianto dal corpo di ariete, che si origina quando, a causa di una brusca diminuzione di portata, l'energia cinetica si trasforma in energia cinetica di pressione che produce un moto ondoso di ritorno nella massa d'acqua.



Un'ultima variante delle centrali idroelettriche è la **centrale di accumulazione o pompaggio**, una soluzione tecnologica tesa a ridurre i costi di produzione. Questo tipo di centrale consente di immagazzinare energia, altrimenti perduta, in modo da averne a disposizione quando serve; è composta da due bacini idrici, uno a monte e uno a valle, collegati per mezzo di grosse tubature. Di notte, quando la richiesta di energia è minore, l'acqua del bacino a valle viene spostata mediante apposite pompe nel bacino a monte, utilizzando un'energia a basso costo dalla rete elettrica; nelle ore di punta, quando la richiesta di energia è massima, la stessa acqua portata a monte viene fatta fluire a valle immettendo in rete energia elettrica.

- **Centrali termoelettriche**

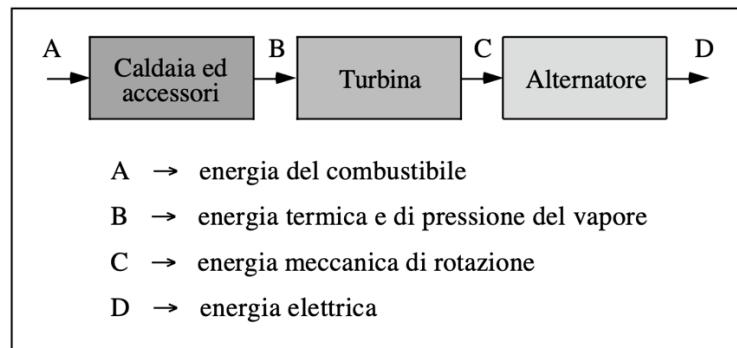
In questo tipo di centrali l'**energia primaria è rappresentata dall'energia chimica posseduta dal combustibile**, che si trasforma in calore durante il processo di combustione. Una caratteristica fondamentale dei combustibili è il **potere calorifico** (p.c.), indice che rappresenta la quantità di calore prodotta nella combustione completa di un chilogrammo di combustibile.

<b>Solidi</b>		<b>Liquidi</b>		<b>Aeriformi</b>	
Tipo	p.c. (MJ/kg)	Tipo	p.c. (MJ/kg)	Tipo	p.c. (MJ/m <sup>3</sup> )
Legna secca	15	Nafta	41	Metano	36
Carbone	30	Olio comb.	41	Etano	64
Lignite	23	Gasolio	43	Propano	93
Coke	30	-	-	-	-

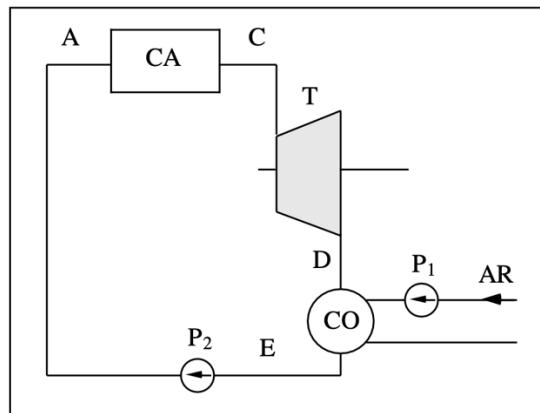
La scelta del combustibile è legata a considerazioni di carattere tecnico ed economico, come prezzo, facilità di approvvigionamento, trasporto e tasso di inquinamento. Il problema principale posto dall'impiego di combustibile è quello del **danno ambientale**, a cui contribuiscono non solo i prodotti di scarto della lavorazione, ma anche l'estrazione, il trasporto e l'immagazzinamento dei combustibili, inquinando aria ed acqua. Le conseguenze sono l'**aumento delle piogge acide** (provocate dagli ossidi di azoto e di zolfo) e il **cosiddetto effetto serra** (riduzione della trasparenza alle radiazioni infrarosse), con il conseguente **aumento della temperatura media del pianeta**. Nel tempo ci sono stati diversi tentativi di regolamentare l'uso di combustibili inquinanti, come il protocollo di Kyoto (1997), ma la differente condizione in termini di sviluppo tra i paesi industrializzati e quelli in via di sviluppo rende difficile trovare un compromesso.

Si consideri il caso, abbastanza comune, di un **impianto che utilizzi il vapore acqueo come fluido motore**, le trasformazioni energetiche che hanno luogo in un impianto termoelettrico vengono di seguito brevemente elencate:

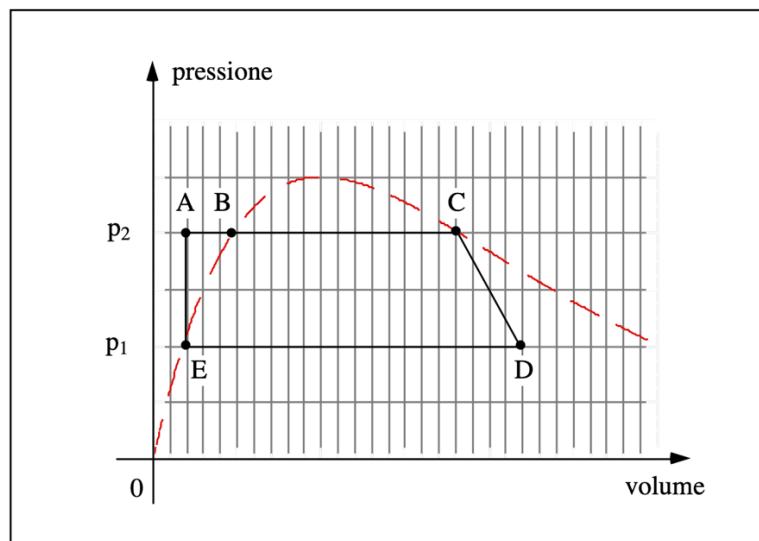
- **Conversione dell'energia chimica del combustibile in energia termica del vapore**, che avviene nel generatore di vapore (caldaia ed accessori);
- **Trasformazione dell'energia presente nel vapore in energia meccanica di rotazione** mediante la turbina, nella quale il movimento è provocato dall'espansione e dal raffreddamento del vapore;
- **Trasformazione dell'energia meccanica in energia elettrica** mediante l'alternatore mosso dalla turbina.



Di seguito è raffigurato un semplice impianto a vapore costituito dalla **caldaia CA**, dalla **turbina T**, dal **condensatore CO** e dalle **pompe  $P_1$**  e  **$P_2$** :



Il relativo **ciclo termodinamico** è descritto in un **diagramma pressione – volume**, in cui la curva tratteggiata rappresenta la curva che delimita la regione in cui l'acqua è liquida da quella in cui diventa vapore:



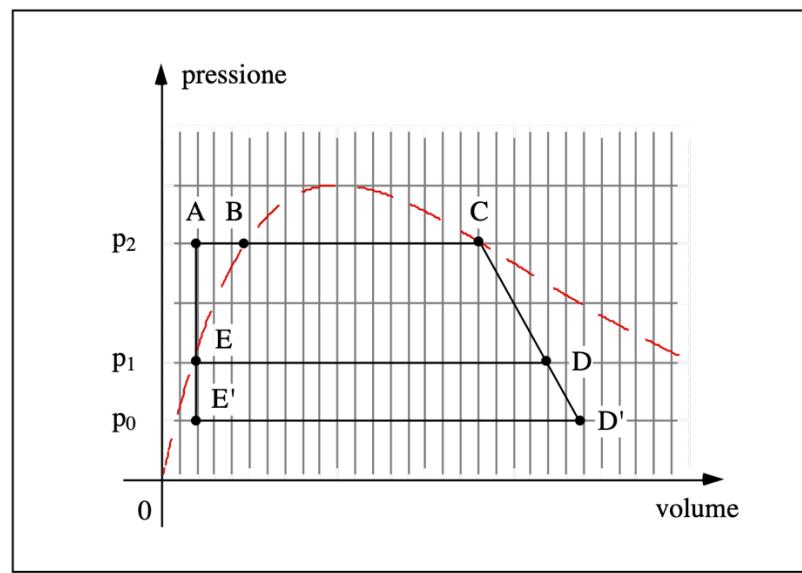
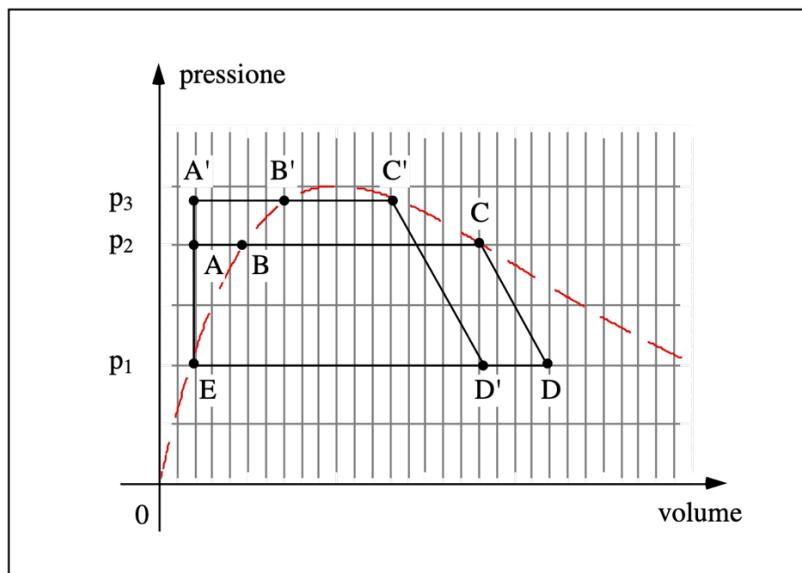
L'acqua entra liquida nella caldaia al punto A, viene riscaldata lungo la trasformazione isobara AB, vaporizza in B e, nel tratto BC, una quantità sempre maggiore di vapore prende il posto del liquido. Nel punto C, tutta l'acqua liquida è diventata vapore (la caldaia ha assolto al suo dovere) e lungo la trasformazione CD avviene (senza apprezzabile scambio di calore con l'esterno, in maniera adiabatica) l'espansione del vapore nella turbina; durante questa fase, la pressione e la temperatura del vapore decrescono, ricondensando in liquido. La funzione del **condensatore**, che

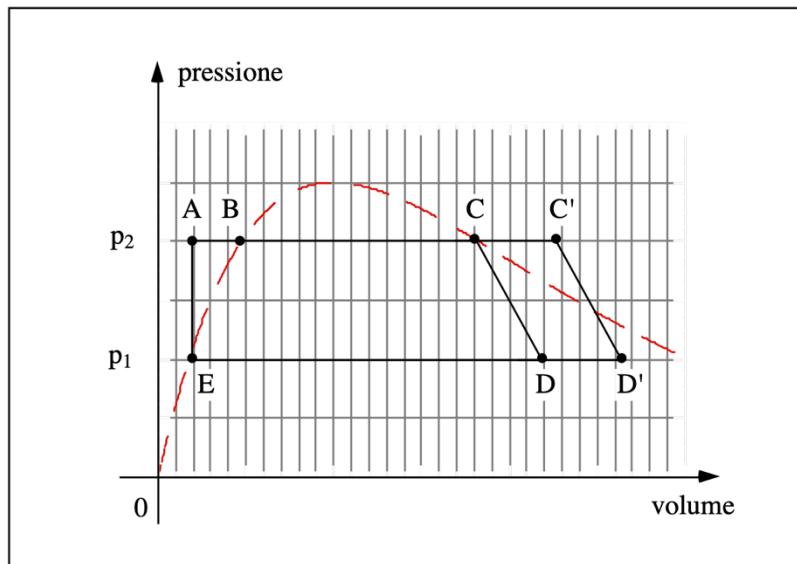
agisce nel tratto **DE**, è proprio quella di **trasformare tutto il vapore in liquido** per immetterlo nuovamente nella caldaia.

**Il rendimento del ciclo termodinamico è proporzionale all'area del trapezio ABCDE e, per aumentarlo, si possono adottare tre provvedimenti:**

1. **Si aumenta la pressione (e quindi la temperatura) del vapore prodotto dalla caldaia;**
2. **Si abbassa la pressione (e quindi la temperatura) di scarico;**
3. **Si surriscalda il vapore.**

Schematicamente, il ciclo termodinamico diventa:

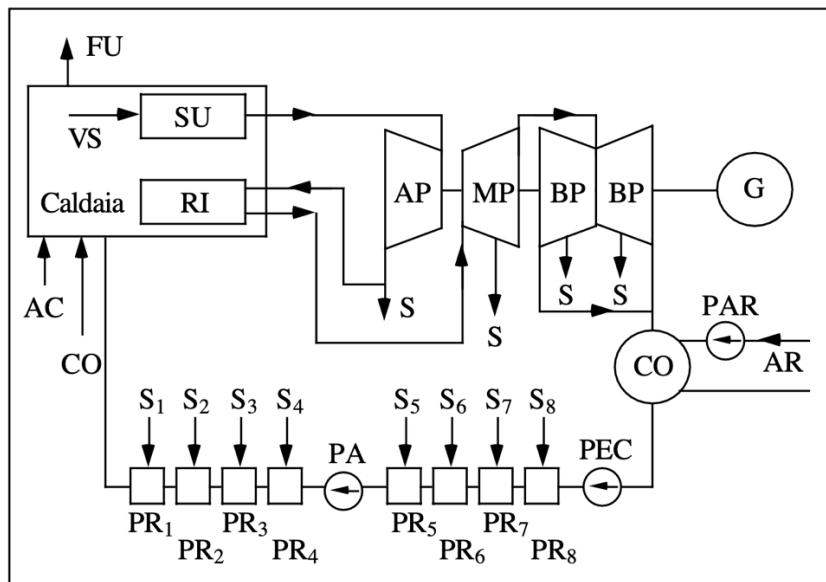




È importante segnalare che **nei cicli che non prevedono il surriscaldamento, il vapore scaricato dalla turbina presenta una certa quantità di acqua che esercita un'azione erosiva sulle pale della turbina**; affinché tale azione sia tollerabile, il titolo del vapore di scarico (rapporto tra massa del vapore e massa complessiva di liquido e vapore) non deve risultare inferiore a 0.8.

Un ulteriore modo per aumentare il rendimento del ciclo è quello di **prelevare vapore dalla turbina** (spillamento) per **preriscaldare l'acqua di alimentazione della caldaia**; nelle centrali termoelettriche di grossa potenza si attuano **7/8 spillamenti di vapore, con conseguenti 7/8 stadi di preriscaldamento dell'acqua**. Inoltre, il **vapore surriscaldato**, dopo una prima espansione parziale nello stadio ad alta pressione della turbina, viene **riportato nella caldaia dove subisce un altro surriscaldamento** (impianti a ri – surriscaldamento o doppio surriscaldamento) ad una **temperatura generalmente uguale a quella del primo surriscaldamento**, per poi **esser fatto espandere negli stadi a media e a bassa pressione della turbina**.

Di seguito è rappresentata una centrale termoelettrica con due surriscaldamenti di vapore (SU è il surriscaldatore, RI il ri – surriscaldatore e VS il vapore sottile) e 8 spillamenti di vapore ( $PR_1, PR_2, \dots, PR_8$ ):



**Il surriscaldatore SU ha il compito di elevare la temperatura del vapore; dopo una prima espansione nel corpo di alta pressione AP della turbina, il vapore rientra in caldaia, dove viene nuovamente surriscaldato.** A questo punto, **il vapore completa la sua espansione nei corpi MP e BP della turbina.**

Come già anticipato, **il principale problema di queste centrali è l'impatto ambientale;** le centrali di nuova concezione adottano particolari caldaie, dette a letto fluido, che favoriscono delle reazioni chimiche durante la combustione attraverso le quali è ridotta la formazione di anidride solforosa e, quindi, la sua emissione nell'aria. Abbassando la temperatura di combustione della caldaia è possibile ridurre anche l'emissione di ossidi di azoto ed il calore residuo prodotto dall'acqua uscente può essere reimpiegato nell'orticoltura (per l'allevamento di pesci e crostacei) e nell'agricoltura (per il riscaldamento delle serre).

- **Altri tipi di centrale**

**Le fonti energetiche alternative, spesso rinnovabili, costituiscono una fetta limitata della produzione energetica italiana, nonostante il loro crescente impiego;** il **limite** di queste fonti è l'intermittenza casuale nella **produzione energetica e l'alto costo.** Si distinguono:

- **Centrali eoliche**, poste in zone abbastanza ventilate e basate sul movimento di grosse pale e l'impatto con il vento. Non sono particolarmente inquinanti ma il loro impatto ambientale coinvolge numerose specie volatili (come le api) e costituiscono una grande fonte di inquinamento acustico;
- **Centrali geotermiche**, poste in corrispondenza di aree vulcaniche non più attive, dove il magma caldo riscalda le acque di falda e produce un effetto simile a quello delle centrali termoelettriche, con la differenza che non sono bruciati combustibili fossili per ottenere calore ma si sfrutta il calore endogeno della terra. Non sono particolarmente inquinanti ma richiedono delle particolari condizioni (quasi assenti in Italia) per essere installate e necessitano di alti costi di produzione (abbattuti da combustibile gratuito);
- **Centrali mareomotrici**, poste in corrispondenza di correnti marine (quasi assenti nel mediterraneo) e basate sul movimento oscillatorio periodico di blocchi d'acqua marina, che spingono le pale di una turbina e generano elettricità in maniera analoga alle centrali idroelettriche. Non sono particolarmente inquinanti ma intaccano notevolmente la fauna marina;
- **Centrali fotovoltaiche**, poste in corrispondenza di luoghi molto soleggiati e basati sull'effetto fotoelettrico, per il quale la radiazione solare viene convertita in potenza elettrica generata. Non sono particolarmente inquinanti ma hanno un basso rendimento e, se si volessero implementare più pannelli per una maggior produzione, ne risentirebbe la vegetazione, alla quale si sottrae sole per la fotosintesi;
- **Centrali nucleari**, basate sulla fissione nucleare (negli ultimi anni si stanno sviluppando quelle a fusione nucleare). Non sono particolarmente inquinanti (non producono fumi e sono sicure) ma si riscontrano problemi di gestione delle scorie radioattive e di emissione del calore in eccesso nell'ambiente esterno.

## IMPIANTI IN ALTA TENSIONE

Gli elementi fondamentali di un **impianto in alta tensione (AT)** sono le **linee di trasmissione** dell'energia elettrica: perlopiù **trifase, possono estendersi per molte migliaia di chilometri** (nei

cosiddetti **elettrodotti**). Sono presenti anche altri elementi, come i banchi di compensazione di energia reattiva e trasformatori di misura ma non ci si soffermerà su di essi.

Le linee di trasmissione possono essere **aeree oppure in cavo** (questi ultimi sono tipicamente interrati ma hanno un costo maggiore) e sono costituite sempre da tre conduttori, tenuti separati da un isolante e racchiusi in una guaina protettiva. Osservando una tipica linea di trasmissione ad alta tensione, si può notare la presenza di un **quarto conduttore**, posto tendenzialmente più in alto e di sezione più piccola, la **fune di guardia**, che verrà approfondito in seguito.

Sono qui sotto riportati i normali valori della tensione dei sistemi di trasmissione, indicando tra parentesi i valori internazionalmente non preferenziali e in corsivo quelli non normalizzati dal CEI in Italia:

Nominale (kV)	Massima (kV)
3	3.6
6	7.2
10	12
(15)	(17.5)
20	24
30	36
(45)	(52)
66	72.5
(110)	(123)
132	145
(150)	(170)
220	245
275	300
330	362
380	420
500	525
700 ÷ 750	765

Gli elementi costitutivi delle linee elettriche aeree sono i **conduttori**, preposti al vero e proprio trasporto di energia, i **sostegni**, che tengono le linee lontano dal suolo evitando interazioni con esso e con le persone, e gli **isolatori**, che hanno la funzione di evitare che i sostegni e i conduttori vengano in contatto tra loro.

Nelle linee AT vengono impiegati **conduttori nudi**, privi di isolamento solido ma opportunamente distanziati tra di loro; sono generalmente a sezione circolare (fino a 50mm<sup>2</sup>) a filo unico; ciascun conduttore (detto **bimetallico**) è costituito da un'anima in corda di acciaio ad alta resistenza meccanica ma bassa conducibilità elettrica ed un mantello esterno costituito da più strati di filo di rame o di alluminio crudo avvolti ad elica, con alta conducibilità elettrica. Il motivo per cui sono impiegati due materiali, di cui uno poco conduttivo, è da ricercarsi nel cosiddetto **effetto pelle**, fenomeno per cui un campo elettromagnetico caratterizzato da una certa frequenza, che interagisce con una lamina metallica, penetra in essa solo fino ad un certo spessore (detto spessore di penetrazione, circa 10mm a frequenza 50Hz per il rame). Si può, quindi, dedurre che **impiegare un unico cavo di materiale conduttivo spesso 50mm<sup>2</sup> è uno spreco per quella sezione che non viene penetrata dal campo elettromagnetico**; si può risparmiare la porzione in questione,

che viene **percorsa solo dal 3% della corrente**, per realizzare un sistema che garantisca resistenza meccanica al cavo ed una maggiore lunghezza delle campate tra i tralicci.

Nel caso in cui la sezione del cavo superi i 50mm<sup>2</sup>, i conduttori per le linee aeree sono costituiti da corde, composte da più fili elementari avvolti ad elica di grande passo attorno all'anima centrale, in modo da garantire al cavo più flessibilità.

Condizioni particolari di umidità e pressione dell'aria possono favorire l'instaurarsi di un fenomeno strano quanto fastidioso, il cosiddetto **effetto corona**; spesso, questo fenomeno **si presenta all'occhio umano con un caratteristico crepitio accompagnato da un alone blu luminescente a forma di manicotto**. Il fenomeno è legato alla ionizzazione degli strati di aria più prossimi al conduttore e va combattuto con decisione, dato che è fonte di perdite di energia e di disturbi di vario tipo (scariche il cui spettro è tanto ampio da arrecare interferenze apprezzabili anche nella regione delle radiofrequenze); il modo con cui l'effetto corona è contrastato consiste nell'**abbassamento del campo elettrico lungo le linee**, ovvero **impiegando linee a conduttori multipli a fasci**, che hanno proprio la funzione di **aumentare il diametro "efficace" dei conduttori** (dato che il valore di tensione critica alla quale l'effetto corona comincia a manifestarsi è tanto più basso quanto è minore il diametro dei fili e la loro distanza). Allora, **dal singolo cavo si passa alle linee "binate" e "trinate" fino alle configurazioni più complesse di fasci a conduttori previste per le altissime tensioni**. Inoltre, sempre per contrastare l'effetto corona, si impiegano **conduttori tubolari in rame** costituiti da tanti settori incastrati tra loro ed avvolti ad elica di grande passo.

**I sostegni impiegati nella realizzazione delle linee in AT sono in gran parte i cosiddetti pali a traliccio**, composti da elementi meccanici (**profilati**) che si sviluppano verticalmente sotto forma di montanti e da **profilati di giunzione**, detti appunto **tralicci**. Tutti i profilati impiegati sono in acciaio e sono protetti dalla corrosione mediante **zincatura a caldo o vernici**. La dimensione e la forma dei sostegni sono determinati dalla disposizione dei conduttori, dalle distanze reciproche che devono essere rispettate tra i conduttori stessi e tra i conduttori e il sostegno, tenendo conto della tensione nominale, delle sovrattensioni previste e dal movimento dei conduttori; tutti questi parametri sono normalizzati, ovviamente, dal CEI.

In genere, **si impiegano forme a fusto piramidale** (per terreni pianeggianti) o **a fusto ad Y** (per terreni meno regolari):



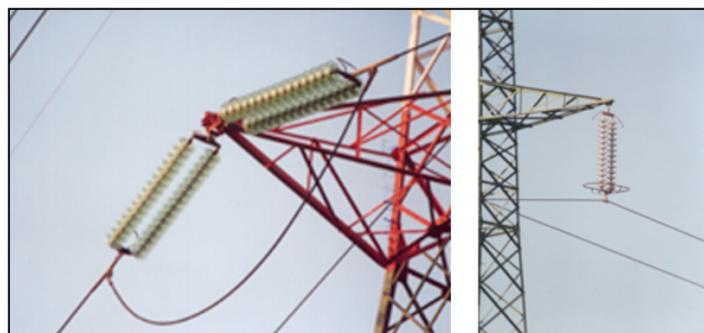
Gli **isolatori** sono componenti utilizzati per **collegare meccanicamente i conduttori ad altri elementi dell'impianto**, tipicamente i **sostegni**, realizzando il necessario isolamento elettrico. Essi

devono, pertanto, sopportare le eventuali sollecitazioni meccaniche, impedire la scarica tra i conduttori e gli altri elementi ad essi collegati e contenere il più possibile eventuali correnti di dispersione. Un esempio di isolatore è la cosiddetta **cappa a perno**, riportata in figura, e costituita da una campana in porcellana (o vetro) che si allarga alla base, dove presenta un certo numero di ondulazioni. Una cappa di ghisa o di acciaio è calettata sulla parte superiore della campana ed un perno nella parte inferiore; cappa e perno si adattano l'una all'altro mediante un'articolazione.



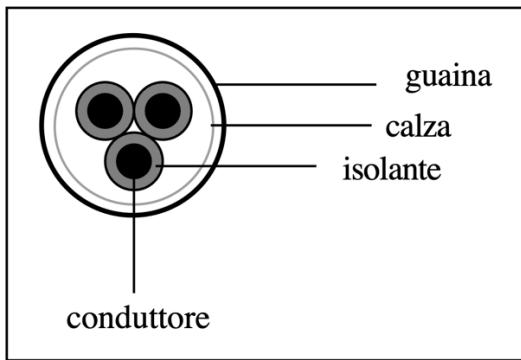
Dal punto di vista elettrico, gli isolatori devono essere caratterizzati da:

- **Elevata resistività di massa e superficiale**, necessaria per limitare le correnti di dispersione;
- **Elevata rigidità dielettrica di massa e superficiale**, capace di inibire una scarica all'interno del materiale o provocarne una che segua il profilo della superficie dell'isolatore;
- **Elevata resistività meccanica a vari tipi di sollecitazione**, essendo sottoposti principalmente a trazioni (gli isolatori impiegati per sostenere e ancorare le linee), a compressioni (gli isolatori portanti, quelli su cui poggiano le linee), a flessioni e a torsioni.



Per le linee in AT si preferiscono degli isolatori a sospensione, costituiti da catene di elementi il cui numero dipende dalla tensione di servizio (tensione di servizio =  $15kV \cdot (n - 1)$  catene) e mobili intorno al loro punto di attacco al sostegno.

Per linee in AT relativamente corte (massimo qualche decina di chilometri) trovano impiego le linee in cavo (monofase o trifase). Il materiale più comunemente impiegato è il rame ricotto (l'alluminio solo per cavi speciali), mentre la calza di materiale conduttore ha la funzione di schermo elettrostatico e partecipa anche alla protezione meccanica del cavo; infine, la guaina è in materiale isolante.



Possono essere impiegati **anche cavi ad olio fluido**, unipolari o tripolari, **che contengono al loro interno olio** (a pressione variabile tra 1atm e 3atm) **che mantiene il cavo sempre impregnato in modo perfetto e costante**, evitando la formazione di spazi vuoti pericolosi per l'isolamento. Di impiego più limitato sono i cavi a gas compresso, nei quali si evita la formazione di vuoti immettendo nel cavo gas inerte, generalmente azoto, alla pressione di 15atm.

## L'EQUAZIONE DEI TELEGRAFISTI E IL PROBLEMA DELLE LK

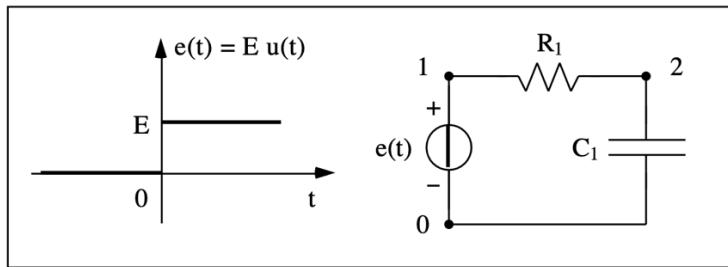
**Finora sono state supposte valide le leggi di Kirchhoff in qualsiasi circuito fossero state usate;** in realtà esistono delle ipotesi per cui queste leggi perdono di validità, per le quali si esce dal loro campo di applicazione. In prima istanza, si vuole ribadire che **queste leggi valgono unicamente in regime stazionario**, quindi per un campo elettrico irrotazionale e un vettore densità di corrente solenoidale, **ma si vuole anche menzionare l'ipotesi di circuito a parametri concentrati**. Per circuito a parametri concentrati si intende **un tipo di circuito le cui dimensioni sono inferiori alla lunghezza d'onda associata alla massima frequenza a cui il circuito può funzionare**; in altri termini, **un circuito a parametri concentrati è tale quando il tempo che la perturbazione elettromagnetica impiega ad attraversare il circuito è nettamente inferiore al periodo associato alla massima frequenza di funzionamento**:

$$\tau = \frac{D}{c} \ll T = \frac{1}{f_{max}} = \frac{\lambda_{max}}{c}$$

$$D \ll \lambda_{max}$$

Un circuito a parametri distribuiti è un circuito in cui queste ipotesi non sono verificate, in cui il tempo che la perturbazione magnetica impiega ad attraversare il circuito non è più trascurabile e in cui le leggi di Kirchhoff non valgono più. **Per risolvere questo tipo di circuito si dovrebbero utilizzare le leggi di Maxwell nella loro più cruda forma**; tuttavia, una soluzione di questo tipo **risulta controproducente per quello che è lo scopo della trattazione**, dal momento in cui queste leggi sono **particolarmente difficili da utilizzare**. Si individua, quindi, la necessità di trovare delle leggi più adatte delle leggi di Kirchhoff ma meno complesse delle leggi di Maxwell e la soluzione risiede nelle equazioni dei telegrafisti.

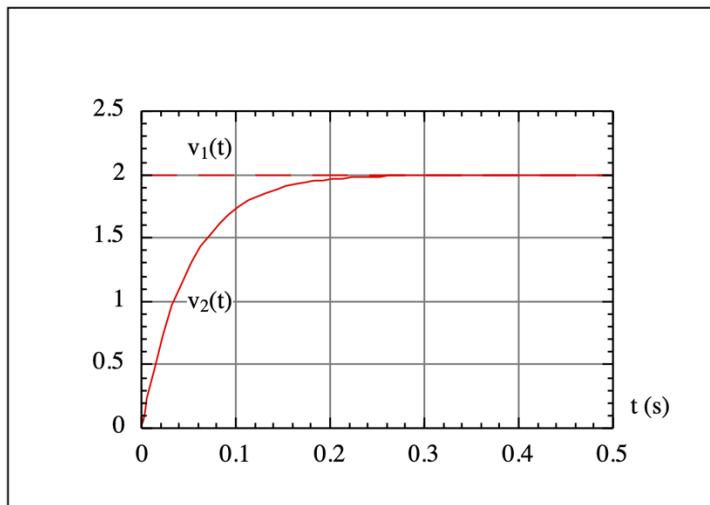
Prima di procedere ad elencare queste leggi, si voglia analizzare un piccolo esempio; **si consideri il seguente circuito, forzato da un generatore di tensione continua a gradino**:



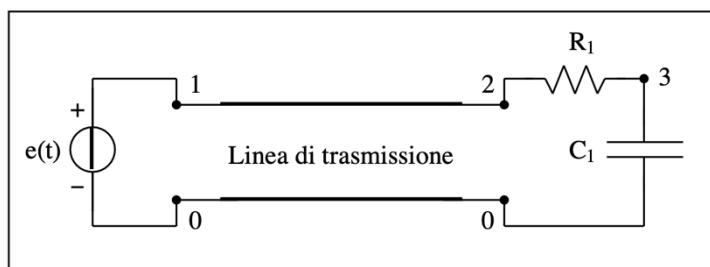
**La cui soluzione è facilmente ottenibile utilizzando solo le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei due bipoli:**

$$v_2(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right)$$

Il valore di regime  $E$  sarà raggiunto dopo un tempo idealmente pari a  $5\tau$ ; supponendo  $R_1 = 50\Omega$  e  $C_1 = 1mF$ ,  $5\tau = 250ms$ . Nel plotting della tensione rilevata, ci si soffermi sul tempo che il circuito impiega per percepire la perturbazione dovuta al gradino  $e(t) = Eu(t)$ :

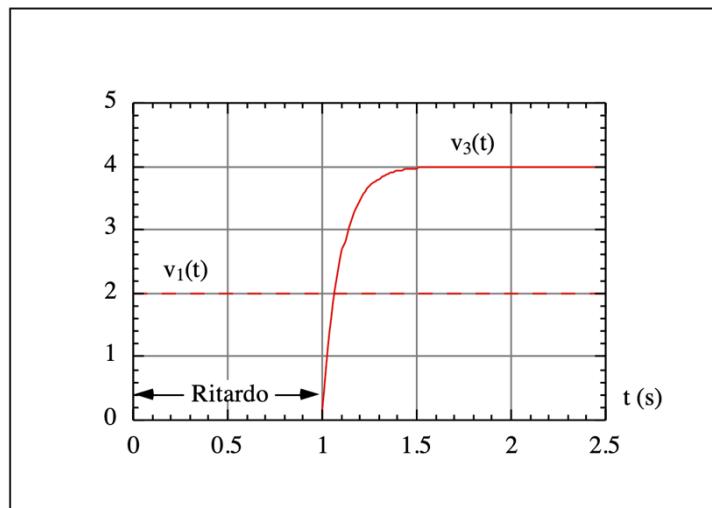


Si osserva che il tempo in questione è praticamente nullo, che il circuito reagisce istantaneamente (in realtà c'è sempre un tempo  $\tau = D/c$  ma le dimensioni del circuito sono così piccole che si parla di nanosecondi, se non oltre, che sono praticamente trascurabili). **Se tra il generatore ed il carico (resistore e condensatore) ci fosse una linea di trasmissione abbastanza lunga:**



**Ci vuole un certo tempo**, detto **tempo di ritardo**, perché il condensatore cominci a rispondere alla sollecitazione di ingresso; in realtà succede anche che il valore di regime raddoppi, ma questo è legato ad un altro fenomeno che verrà discusso in seguito. Ci si soffermi unicamente sul tempo di ritardo; **la lunghezza del circuito non è più trascurabile e il tempo  $\tau = D/c$  appartiene ad ordini**

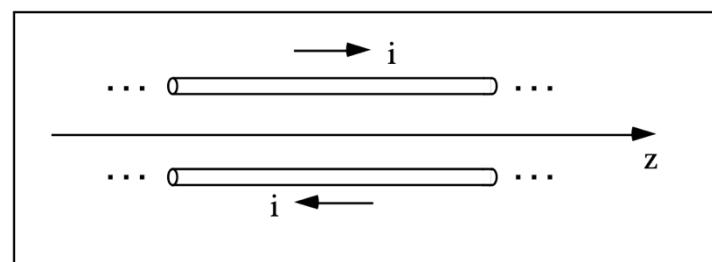
di grandezza non più tanto piccoli da essere irrilevanti e la tensione sul condensatore si palesa con una certa traslazione temporale:



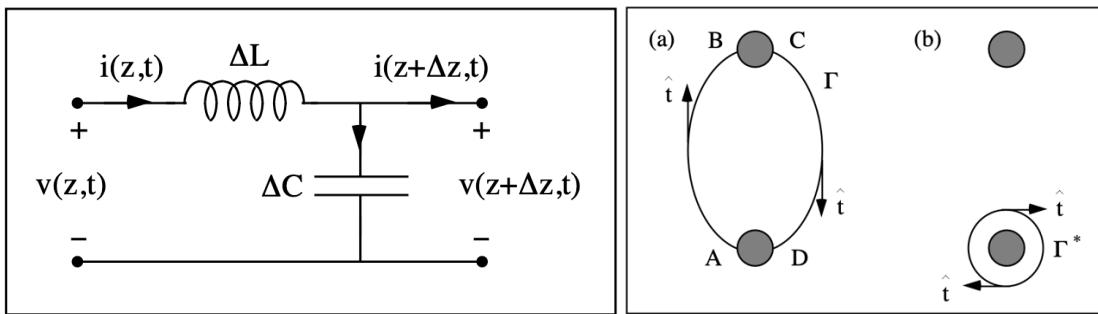
La commutazione del generatore non viene avvertita immediatamente da tutte le parti del circuito, la linea di trasmissione introduce un ritardo, assente nei circuiti a parametri concentrati.

Per risolvere un circuito a parametri distribuiti, come quello appena mostrato, possono essere impiegate le leggi di Maxwell ma si sbatterebbe contro un'elevata barriera di difficoltà. Ci si chiede se ci sia un modo per cui un tratto elementare di una linea di trasmissione a parametri distribuiti possa essere considerato un circuito a parametri concentrati, in modo da poter trarre conclusioni locali su di esso e trasmetterle integralmente al circuito.

Una linea di trasmissione può essere schematizzata da due conduttori di sezione circolare, paralleli, immersi in un mezzo dielettrico e terminati con componenti elettrici di vario tipo; il primo conduttore è quello di andata e gli scorrerà all'interno una corrente, mentre il secondo è di ritorno e gli scorrerà una corrente di verso opposto alla prima, entrambe dirette lungo l'asse  $z$ , che rappresenta la direzione di sviluppo della linea di trasmissione. Il tutto è schematizzato come segue:



La struttura guidante di questo sistema è costituita dal campo elettromagnetico, inteso come la coppia di vettori  $\bar{E}$  e  $\bar{H}$ , con il quale è possibile descrivere l'interazione tra i due conduttori con un effetto capacitivo e uno induttivo:



Sapendo che **la corrente localizzata è determinata dalla legge di Ampere – Maxwell e la tensione localizzata dalla circuitazione del campo elettrico**. I parametri degli effetti induttivo e capacitivo,  $L_D$  e  $C_D$ , vengono detti, rispettivamente, **induttanza e capacità per unità di lunghezza** (o chilometriche) e rappresentano semplicemente la “**densità di energia magnetica/elettrica per unità di lunghezza**”, i parametri dei bipoli equivalenti sono determinati per unità di lunghezza:

$$\Delta L = L_D \cdot \Delta z = \left[ \frac{H}{m} \cdot m \right]$$

$$\Delta C = C_D \cdot \Delta z = \left[ \frac{F}{m} \cdot m \right]$$

Con queste supposizioni, **il tratto elementare di linea di trasmissione di lunghezza  $\Delta z$**  (abbastanza piccola per renderlo a parametri concentrati) **può essere schematizzato dal doppio bipolo in figura**. **Applicando le leggi di Kirchhoff alla maglia e al nodo**:

$$\begin{cases} -v(z, t) + L_D \Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + v(z + \Delta z, t) = 0 \\ i(z, t) - C_D \Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0 \end{cases}$$

Le **derivate** che compaiono nelle caratteristiche dei bipoli a memoria sono **parziali perché la tensione non dipende più solo dal tempo** (come in un comune circuito a parametri concentrati) **ma è anche dal punto del circuito** (lungo l'asse  $z$ ) **in cui la si va a valutare**. Riordinando le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} = -L_D \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ \frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} = C_D \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} \end{cases}$$

A limite per porzioni di circuito sempre più piccole (cioè per  $\Delta z \rightarrow 0$ ), le **due equazioni diventano equazioni differenziali alle derivate parziali, rispetto allo spazio ed al tempo, del primo ordine** nelle incognite tensione e corrente lungo la linea:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -L_D \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -C_D \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Queste equazioni sono dette **equazioni dei telegrafisti**; se da un lato contengono il ritardo scoperto per mezzo di esperimenti numerici, dall'altro rappresentano un problema matematico di difficile soluzione.

I parametri per unità di lunghezza utilizzati,  $L_D$  e  $C_D$ , possono essere determinati a partire da alcune configurazioni ideali e per alcune geometrie notevoli; ad esempio, in una linea bifilare (composta da due fili rettilinei e paralleli, posti in aria, ciascuno di raggio  $a$  e posti a distanza  $d$ ) si può dire che:

$$L_D = \frac{\Delta L}{\Delta z} = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{arccosh} \frac{d}{2a}$$

$$C_D = \frac{\Delta C}{\Delta z} = \frac{\pi \epsilon_0}{\operatorname{arccos} \frac{d}{2a}}$$

Poiché  $\operatorname{arccos} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \approx \ln x \Leftrightarrow x \gg 1$ , allora:

$$\frac{d}{a} \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \\ C_D = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \end{cases}$$

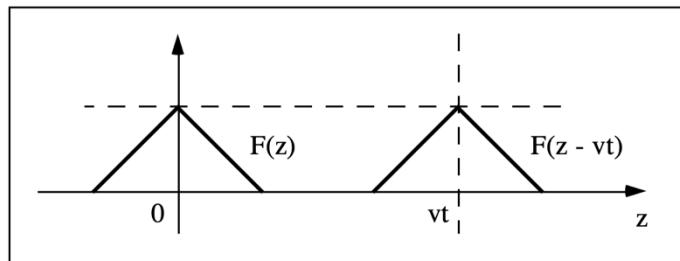
In un cavo coassiale, costituito da un conduttore cilindrico di raggio  $a$  (detto anima) e circondato da un secondo conduttore, cilindrico di raggio  $b > a$  (detto calza), si può dire che:

$$L_D = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$C_D = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

Con  $\mu$  e  $\epsilon$  sono la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del materiale isolante di cui è riempito lo spazio tra anima e calza.

Si consideri una funzione a durata limitata in una variabile  $z$ ,  $y = F(z)$ , ed una sua traslazione dipendente da una seconda variabile  $t$ ,  $y_1 = F_1(z, t) = F(z - vt)$ . La funzione  $y_1$  rappresenta una riproduzione di  $y$  attorno al valore  $vt$  di  $z$ , ovvero lo spostamento di  $y$  a velocità  $v$  nella direzione positiva dell'asse  $z$ . Graficamente, le due funzioni sono riassumibili dalla seguente figura:



All'istante  $t = 0$  i due grafici coincidono ed il massimo è assunto in  $z = 0$ ; quando  $t$  aumenta, a velocità  $v$ , il grafico si sposta ed assume il massimo in  $z = vt$ . In gergo, si dice che una funzione come  $y_1$  rappresenta un'onda, o perturbazione, che viaggia nella direzione positiva dell'asse  $z$ , ovvero un'onda progressiva; una funzione di questo tipo rimane sempre uguale a sé stessa, non si attenua e non cambia la sua durata, semplicemente trasla rigidamente. Se lo spostamento è verso sinistra lungo l'asse  $z$ , ovvero  $F_1(z, t) = F(z + vt)$ , la funzione è detta onda regressiva.

**La più generale soluzione dell'equazione dei telegrafisti** può scriversi come **somma di due onde viaggianti**, la prima nella direzione positiva e la seconda nella direzione negativa dell'asse  $z$ . Analiticamente, **tensione e corrente possono essere espresse per mezzo di una combinazione di due generiche funzioni**:

$$v(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt) \quad i(z, t) = \frac{1}{R_0} [F(z - vt) - G(z + vt)]$$

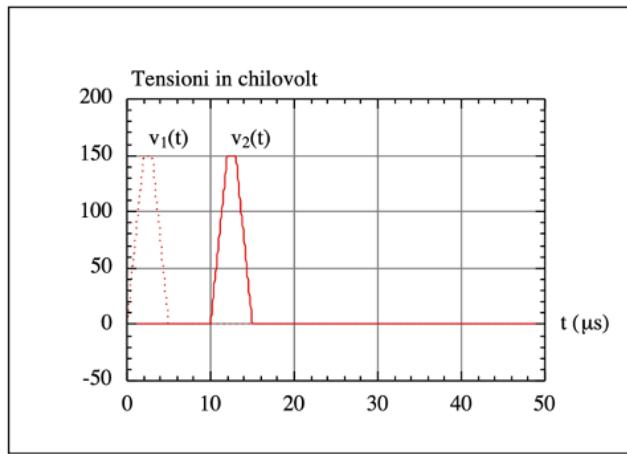
Con  $F$  e  $G$  funzioni dipendenti dalle terminazioni su cui è chiusa la linea di trasmissione e  $R_0$  “**impedenza caratteristica della linea**”, pari a:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_D}{C_D}}$$

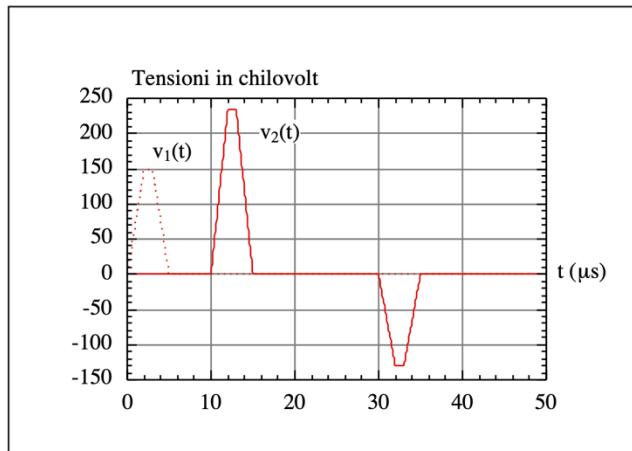
In definitiva, **lungo una linea di trasmissione si trovano onde che si propagano**. Un'onda progressiva, prodotta da un generatore, percorre un tratto di linea e, non appena raggiunge l'altra estremità della linea, scarica sul carico parte dell'energia da essa trasportata, mentre l'altra parte viene riflessa in senso opposto, cioè come onda regressiva. Quindi, **le onde progressive e regressive non sono null'altro che onde che si riflettono sulle terminazioni della linea e che la percorrono**, in un senso o nell'altro, **finché non si attenuano completamente; l'attenuazione è dovuta solo ai carichi presenti alle terminazioni**, visto che le linee prese in esame sono costituite da due conduttori elettrici perfetti, quindi privi di perdite.

Si consideri il caso in cui la porta secondaria della linea di trasmissione sia chiusa su un carico adattato, ovvero un carico tale da assorbire completamente l'onda di tensione in arrivo e non generare alcuna onda riflessa; un carico di questo tipo è caratterizzato da un'impedenza  $R$ :

$$R = R_0$$

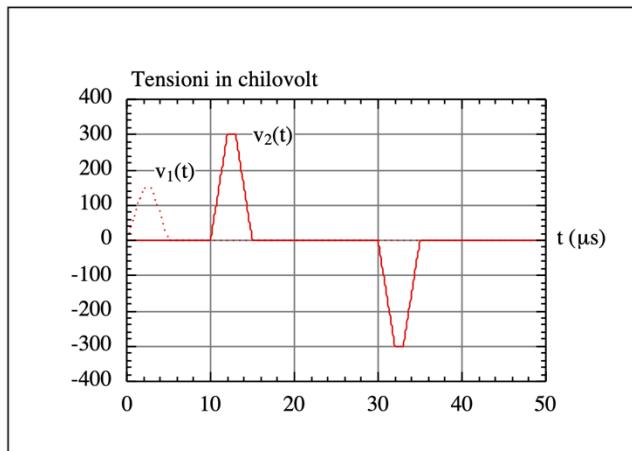


Dato che **la linea è senza perdite e la sua resistenza caratteristica coincide proprio con la resistenza di carico su cui è terminata**, la linea è adattata e **la forma di tensione prodotta** (linea tratteggiata) **si presenta in ritardo sul carico** (linea piena) **ma non si riflette**. Si studi, invece, il caso di un **carico disadattato**:

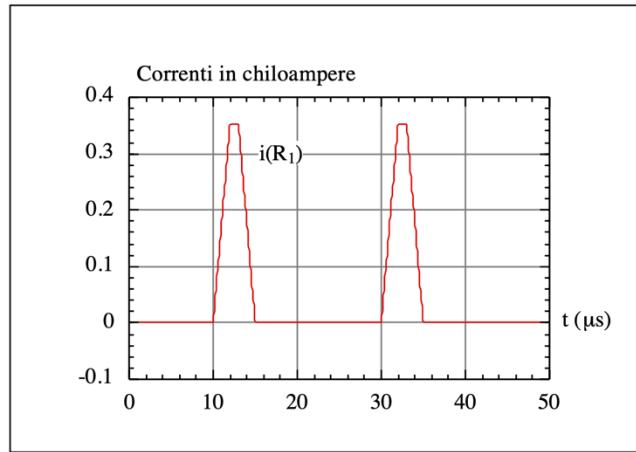


In questo caso non ci si trova in condizione di adattamento e la riflessione è inevitabile. La prima onda sul carico è più grande di quella prodotta dal generatore per un motivo che sarà chiaro solo a breve; ci si deve soffermare sul fatto che l'onda di ritorno è attenuata rispetto alla prima a causa della potenza irreversibilmente assorbita ad ogni passaggio sul carico  $R$ . La tensione, in condizioni di disadattamento, va avanti e indietro lungo linea, venendo riflessa anche dal generatore di tensione (diventato un cortocircuito dopo l'erogazione della tensione nei primi istanti e che riflette tutta l'energia di cui è investito ma cambiandone il segno).

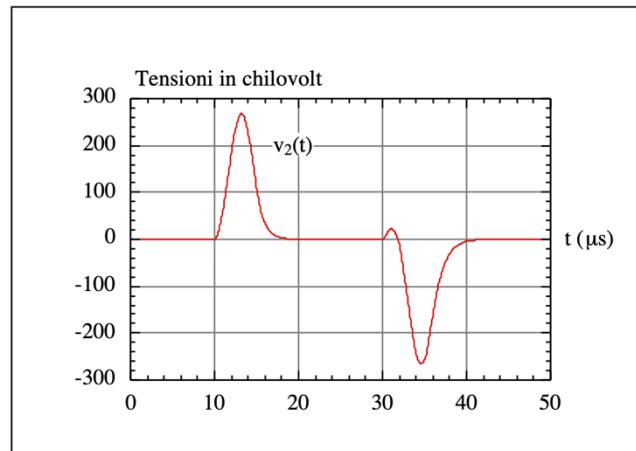
Nel caso in cui la linea termini in un circuito aperto (resistore di valore infinito) il cambio di segno dell'onda di tensione riflessa dal generatore ideale diventato cortocircuito è ancora presente. Ciò che va notato è il raddoppio del valore massimo della tensione alla seconda porta; questo fenomeno è causato dal fatto che il circuito aperto (la resistenza elevatissima) dissipà ad ogni passaggio solo una frazione non apprezzabile dell'onda stessa, che non viene riflessa come nel cortocircuito e si somma. Quindi, ogni onda di ampiezza doppia è il risultato della composizione dell'onda proveniente dal generatore e di quella riflessa dal “quasi” circuito aperto:



In caso di linea terminata su cortocircuito, invece, si plottano le correnti (le tensioni sono per definizione nulle). Si noti che l'onda di corrente sul cortocircuito ha ampiezza doppia perché si sommano in fase i due contributi dell'onda incidente e dell'onda riflessa:



Si vuole concludere affrontando il caso in cui la linea termini con un bipolo a memoria, consapevoli che la risposta non è univoca. Supponendo di chiudere la linea su un condensatore, si noti la complessità della dinamica della tensione:



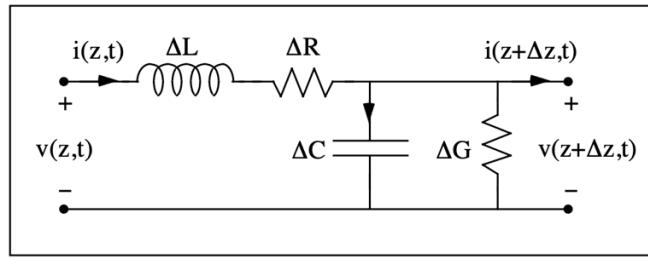
Durante il primo passaggio, si riconoscono i fenomeni di carica e di scarica della capacità, poi le riflessioni multiple complicano il tutto. Ciò che si può dedurre è che la tensione ai capi del condensatore resta continua durante il transitorio.

Si può concludere dicendo che le dinamiche del carico si mischiano, in un circuito a parametri distribuiti, alle dinamiche del segnale.

Il sistema che descrive l'andamento della corrente e della tensione senza perdite non si è considerata alcuna perdita per effetto Joule; se si volesse una rappresentazione leggermente più realistica della linea bisognerebbe, invece, tenerne conto. Introdotte la resistenza  $R_D$  e la conduttanza  $G_D$  per unità di lunghezza, il modello diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L_D \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - R_D i(z,t) \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C_D \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - G_D v(z,t) \end{cases}$$

Che, in termini circuituali è:

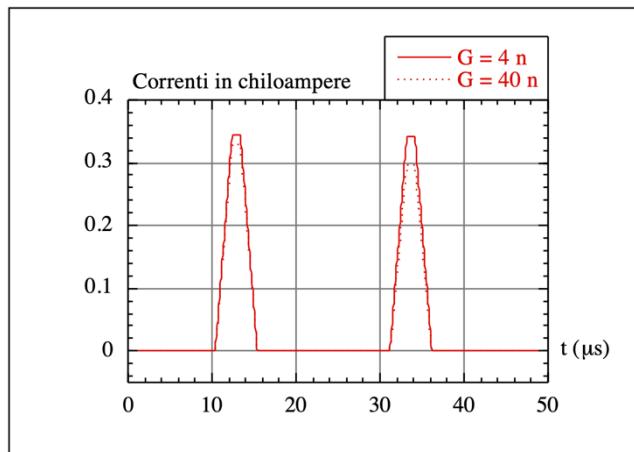


Indicando con:

$$R_D = \frac{\Delta R}{\Delta z} = k \frac{\rho}{S} \wedge G_D = \frac{p}{E^2}$$

In cui  $k$  è un coefficiente di maggiorazione (da 1.01 a 1.04) che tiene conto dell'effetto di cordatura e della disuniforme distribuzione della corrente nella sezione, mentre  $p[W/m]$  rappresenta le perdite per unità di lunghezza sotto effetto corona e di dispersione e  $E$  il calore della tensione di fase.

**Il modello con perdite è simile a quello ideale**, se non per il fatto che **tensioni e correnti, oltre ad essere ritardate per effetto della propagazione lungo la linea, devono essere attenuate a cause delle perdite stesse**:



Un'altra caratteristica delle linee con perdite è **la durata del segnale non più uguale a quella imposta dal generatore**. Essa comincia ad aumentare e non si può più dire dove l'onda è presente e dove è assente (come nel caso di linee senza perdite), essendo la sua durata variabile durante la propagazione. **L'allungamento della durata dell'impulso si può evitare solo usando linee per cui vale la condizione di Heavside**, dette **linee senza distorsione**:

$$\frac{R_D}{L_D} = \frac{G_D}{C_D}$$

In generale, quando si studiano i sistemi trifase, **il generatore è collegato direttamente** (al più tramite un'impedenza ohmico – induttiva) **al carico**; quando il collegamento è sufficientemente lungo, una tale **schematizzazione non può essere studiata e modellata da un circuito a parametri concentrati**. Tuttavia, è bene sottolineare che **un esame completo delle linee trifasi non è semplice**, dal momento in cui **vi è un accoppiamento elettrico e magnetico tra i diversi conduttori** (che non accade nelle linee bifilari finora considerate) **che rende difficile la simulazione**.

## PROTEZIONE E MANOVRA DI IMPIANTI IN ALTA TENSIONE

Un primo **dispositivo di sicurezza** impiegato nelle linee di trasmissione ad alta tensione è la **fune di guardia**, che svolge essenzialmente il ruolo di un **parafulmine**: nel caso in cui un fulmine colpisca (o tenti di colpire) direttamente la linea, la fune di guardia sarà il conduttore colpito, preservando i conduttori di energia. La fune di guardia si sacrifica per salvare la vera e propria linea elettrica e per tale motivo necessita di essere posizionata più in alto, anche perché così crea un **angolo solido di circa 60° che copre gli altri conduttori**; è proprio questo posizionamento a rudimentale **gabbia di Faraday** che garantisce la protezione dei cavi sottostanti.



La fune di guardia viene **metallicamente connessa ai tralicci**, apportando il benefico effetto di **abbassare la resistenza di terra complessiva dei singoli tralicci**, collegati in tal modo in parallelo verso terra. Essa viene tendenzialmente realizzata in **zinc o copperweld** (rame – acciaio) e viene **tesa parallelamente ai conduttori di linea, sulla sommità dei sostegni e in buon contatto elettrico con la terra** (attraverso i sostegni stessi se metallici, altrimenti mediante appositi conduttori). In alcuni casi, le **funi di guardia sono identificate da segnalatori visivi** (in alcuni paesi sono obbligatoriamente attivi) a **forma di grosse palle colorate** che indicano la presenza di elettrodotti ai velivoli in volo.

In un sistema elettrico possono manifestarsi tensioni superiori a quelle normali di esercizio, dette sovratensioni, che vengono tradizionalmente distinte in:

- **Sovratensioni di origine interna**, dovute a manovre di chiusura e apertura dei circuiti, a variazioni di carico, a fenomeni di risonanza o a guasti generici, sono caratterizzate da un carattere prevalentemente ohmico – induttivo;
- **Sovratensioni di origine esterna**, dovute a fenomeni di induzione o a fulminazioni dirette, possono presentare intensità maggiori delle tensioni nominali e fronti molto ripidi.

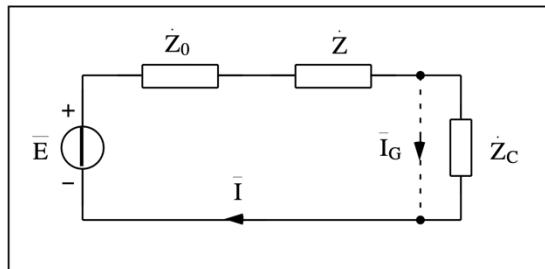
Il danno maggiore che possono produrre le sovratensioni è il **cedimento degli isolamenti di uno o più componenti**, cedimento che risulta particolarmente grave e irreversibile se si tratta di isolamenti solidi. La perdita di isolamento può produrre cortocircuiti nei quali viene dissipata una grande quantità di energia elettrica, che può portare anche a vere e proprie esplosioni; perciò, in fase di progettazione, gli isolamenti vengono dimensionati per tensioni parecchie volte più grandi di quelle nominali.

In maniera del tutto analoga, in un sistema elettrico possono manifestarsi correnti superiori a quelle normali di esercizio, dette **sovracorrenti**, e distinte tradizionalmente in:

- **Sovraccorrenti dovute a sovraccarico transitorio**, causate da manovre di avvicinamento di motori asincroni oppure dall'inserzione di trasformatori a vuoto, non è opportuno adottare protezioni per l'impianto che portino all'apertura del circuito in cui circola la sovraccorrente, dal momento in cui il fenomeno è transitorio e non necessita un inutile fuori servizio;
- **Sovraccorrenti dovute a sovraccarico permanente**, presenti ogni qual volta il carico inserito assorbe una potenza superiore a quella per cui l'impianto è stato dimensionato e comportano un lento riscaldamento dei conduttori, per il quale è necessario interrompere il circuito in caso di eccessivo sovraccarico termico;
- **Sovraccorrenti di guasto**, manifeste quando tra due elementi (normalmente a diverso potenziale) si stabilisce un accidentale collegamento elettrico che crea una maglia a bassa impedenza, detta anello di guasto, dove si instaura (per tempi molto brevi) la corrente di cortocircuito, di valore efficace molto più grande di quello nominale.

In relazione a questo ultimo tipo di sovraccorrente, si può dire che **un cortocircuito si instaura principalmente da sovratensioni che determinano l'innesto di archi fra punti a potenziale differente**.

Si consideri il circuito seguente:



Si indichi con  $\bar{E}$  il generatore equivalente di f.e.m., di impedenza interna  $\dot{Z}_0$ , collegato al carico  $\dot{Z}_C$  per mezzo di un'impedenza di linea  $\dot{Z}$ . Prima del guasto, la corrente che circola nella maglia è:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_C + \dot{Z}}$$

Mentre dopo il guasto, cortocircuitando  $\dot{Z}_C$ :

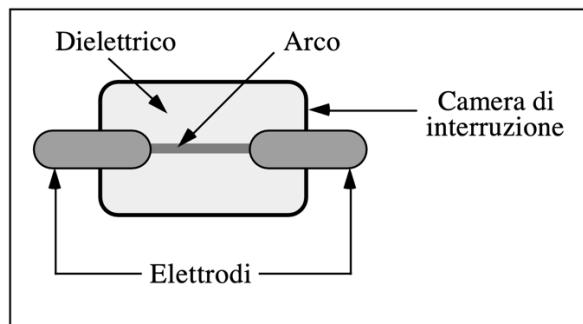
$$\bar{I}_G = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}}$$

La corrente di guasto è, in valore efficace, molto più grande di quella circolante prima del guasto dato che normalmente:

$$|\dot{Z}_0 + \dot{Z}| \ll |\dot{Z}_C|$$

**Durante il guasto, i conduttori subiscono un rapido innalzamento della temperatura, che può portare alla fusione del componente e ad intense sollecitazioni elettrostatiche che, a loro volta, possono portare anche al cedimento meccanico.** In questa situazione, **solo una tempestiva apertura del circuito può salvare i diversi componenti**; pertanto, si rendono necessari degli **interruttori capaci di aprire i circuiti elettrici in maniera selettiva**, discriminando le entità e le durate del sovraccarico.

L'apertura e la chiusura di una linea possono avvenire o quando non circola corrente (a vuoto) o quando circola una corrente circa uguale alla corrente nominale (sotto carico); tuttavia, la condizione peggiore di interruzione si ha quando nella linea circola una sovraccorrente, maggiore di quella nominale. L'apertura avviene per mezzo di sezionatori e di interruttori, dispositivi che realizzano la separazione di due elettrodi (o poli) inizialmente a contatto; si tratta di dispositivi di apertura reversibili, che realizzano la separazione dei due elettrodi che, fortemente premuti l'uno sull'altro, devono essere separati e allontanati. Tra i due elettrodi separati si interpone un mezzo dielettrico (fluido, spesso esafluoruro di zolfo SF<sub>6</sub>), capace di sopportare la tensione residua a circuito aperto; per dispositivi destinati a funzionare nelle più severe condizioni, come quelli in AT, gli elettrodi e il mezzo dielettrico sono contenuti all'interno di una camera di interruzione:



Si può facilmente dedurre che questi dispositivi realizzano anche la chiusura degli elettrodi, che può avvenire in assenza o meno di tensione. La tensione tra gli elettrodi in avvicinamento, se sufficientemente elevata, può causare l'innesto di un arco, nel quale si instaura una corrente elettrica; l'arco si estingue automaticamente al contatto, cosicché per evitare conseguenze distruttive, è sufficiente che esso sia di breve durata e, quindi, si preferisce una chiusura rapida degli elettrodi.

Quando avviene l'apertura in presenza di corrente, questa non si interrompe immediatamente al cessare del contatto elettrico ma permane per un certo tempo attraverso un arco elettrico. Man mano che i due elettrodi si distaccano, la superficie di contatto diminuisce e si assiste alla creazione di zone piccole, interessate da una intensa corrente e che, pertanto, si riscaldano. Appena il distacco è completato, queste zone più calde rilasciano elettroni per emissione termoionica che vengono accelerati dall'intenso campo elettrico ancora presente tra i due poli: sono proprio questi elettroni accelerati che, urtando contro le molecole del fluido dielettrico, finiscono per ionizzarle, dando così origine ad un arco elettrico che consente il perdurare della corrente.

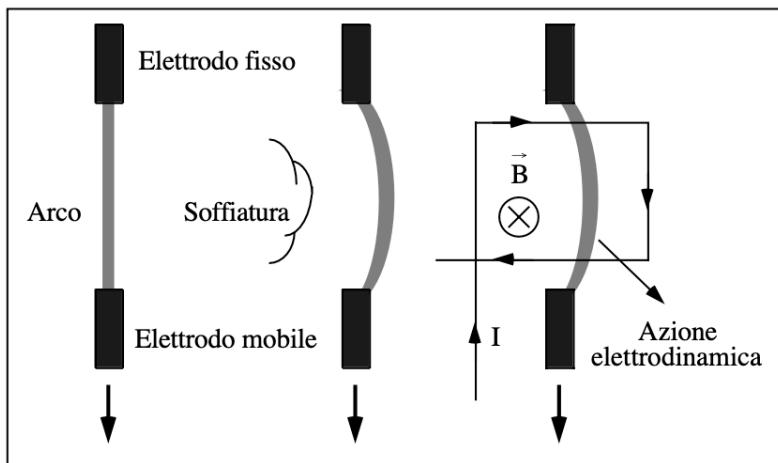
Dal punto di vista elettrico, l'arco in questione si comporta come un resistore non lineare. Se l'arco permane troppo a lungo, si può verificare la rapida usura degli elettrodi e persino l'esplosione del dispositivo. Se si verifica che il fluido dielettrico sia ben deionizzato, che la distanza tra gli elettrodi sia grande e che la temperatura si mantenga bassa, è più difficile che l'arco si innesti, ovvero ne è facilitata l'estinzione.

Una volta neutralizzato l'arco, esso si innesta di nuovo se la tensione applicata dal circuito supera quella di ionizzazione del dielettrico, detta tensione di ripresa (anch'essa cresce al crescere della distanza tra gli elettrodi e se si raffredda il fluido). La neutralizzazione dell'arco è più semplice in regime sinusoidale: ogni volta che si passa per lo zero (ovvero due volte in un periodo) l'arco si spegne ma ad ogni spegnimento diventa sempre meno probabile un ulteriore reinnesto, visto che il fluido si raffredda gradualmente e la tensione di ripresa aumenta sempre di più; invece, in regime stazionario, la corrente non si annulla spontaneamente e per interromperla si deve

**fare affidamento solo sull'incremento della tensione d'arco**, ottenuta mediante il suo allungamento e raffreddamento.

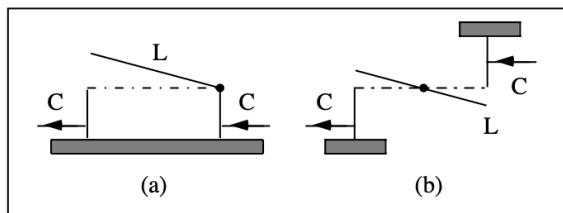
Sulla base di quanto detto finora, **si evince che un interruttore di potenza è un componente reversibile di manovra e protezione**, capace di **aprire e chiudere un circuito allontanando oppure avvicinando gli elettrodi**. La manovra può essere sia manuale, se comandata da un operatore, sia automatica, se comandata da un dispositivo, detto relè, che interviene ogni volta che vengono rilevate condizioni anomale di funzionamento.

Per realizzare un **rapido spegnimento dell'arco** si possono impiegare due tecniche: in primis **si allunga l'arco allontanando rapidamente l'elettrodo mobile da quello fisso**, in aggiunta ad una **soffiatura magnetica** per la quale si sfrutta il campo magnetico creato da una corrente che circola in una spira; in secondo luogo, **può essere raffreddato il fluido, rimescolandolo e favorendo lo scambio termico con le pareti della camera di interruzione**.

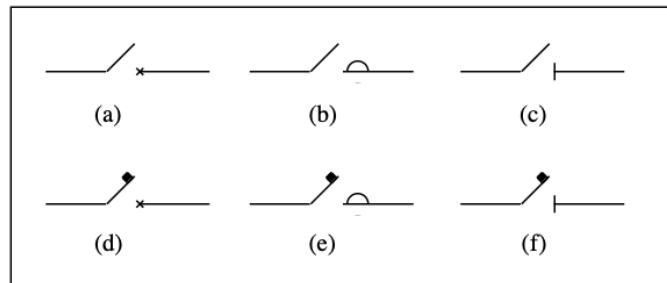


Precisamente, la soffiatura permette di aumentare la probabilità che le molecole ionizzate si ricombinino con gli elettroni liberi mediante l'allungamento del percorso di questi ultimi.

I **sezionatori** sono dispositivi destinati ad interrompere la continuità elettrica per le sole linee a vuoto; i loro contatti sono generalmente visibili e forniscono in tal modo una sorta di assicurazione visiva sullo stato di apertura della linea. Possono essere realizzati con uno dei due schemi proposti qui di seguito; in entrambi i casi, la manovra può essere effettuata a mano o con l'ausilio di azionamenti elettrici e meccanici ma è importante, in ogni caso, che rimanga rigorosamente subordinata a quella degli interruttori, in modo che i **sezionatori operino sempre a vuoto** (anche perché se aperti e non operanti a vuoto, si chiudono automaticamente e con molta violenza per effetto di induzione elettromagnetica). Quindi, **nella fase di interruzione del circuito, si aprono prima gli interruttori e poi il sezionario** (al contrario nella fase di ripristino della continuità).

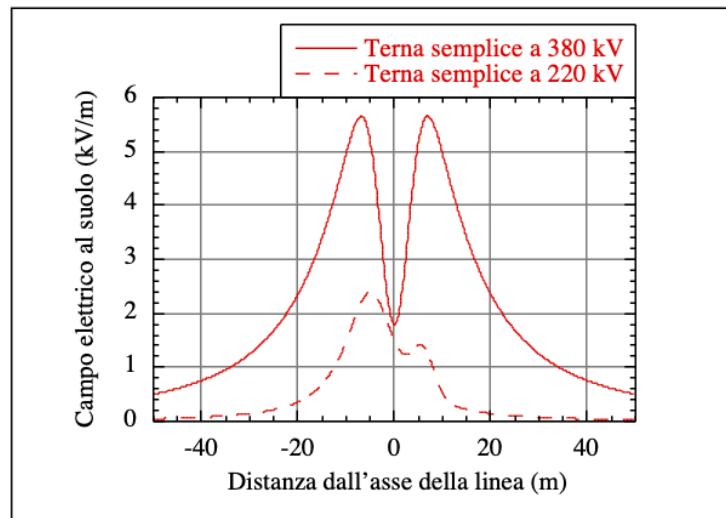


I simboli circuituali usati per indicare la presenza di interruttori, contattori e sezionatori sono i seguenti (distinguendo in manuali e automatizzati la prima e la seconda fila):



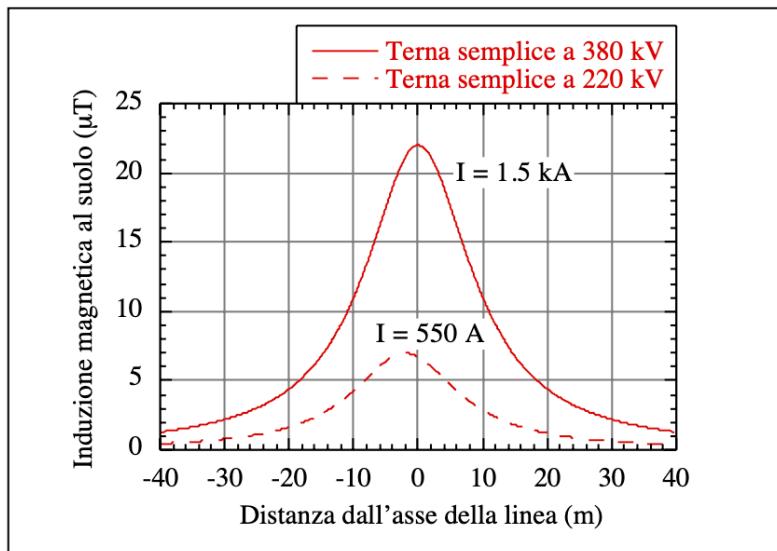
Alla frequenza di 50Hz, le componenti del campo magnetico ed elettrico possono essere considerate separatamente:

- Il **campo elettrico** è legato in maniera proporzionale alla tensione della linea e si attenua, allontanandosi da essa, come l'inverso della distanza dai conduttori. Contrariamente alle correnti, i valori efficaci delle tensioni sulle linee non variano in maniera apprezzabile nel tempo e l'intensità del campo elettrico può essere considerata praticamente costante. La configurazione della linea, se a singola o doppia terna, influenza il campo così come, nelle linee a doppia terna, la disposizione delle fasi di ciascuna terna. La presenza di alberi, oggetti oppure edifici in prossimità delle linee riduce l'intensità del campo; in particolare, all'interno degli edifici, si possono misurare intensità di campo elettrico fino a 10 (a volte 100) volte inferiori a quelle rilevabili all'esterno. Il campo elettrico è la somma di tre contributi sfasati di 120° e, tenendo conto che i conduttori sono collegati tra due tralicci a formare una catenaria, l'intensità maggiore si misurerà al centro della campata, ossia nel punto in cui i cavi si trovano a maggior distanza dal suolo. In figura è rappresentato l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del traliccio, in corrispondenza del centro della campata, nella sezione trasversale della linea; si può dedurre dalla figura come la disposizione dei conduttori influenzi l'andamento ed il valore massimo del campo elettrico.



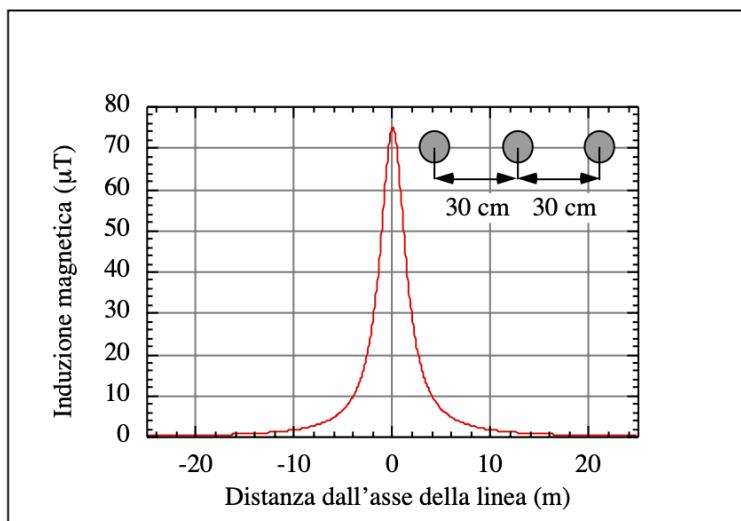
- Anche il **campo magnetico**, così come il campo elettrico, è dato dalla risultante di tre contributi, le tre correnti del sistema trifase. Dall'intensità di tali correnti e dall'ordine delle fasi dipenderà l'ampiezza del campo magnetico che si va a misurare; tuttavia, si è notato che durante il giorno la richiesta di energia elettrica aumenti, facendo aumentare anche le correnti sulla linea e, di conseguenza, anche il campo magnetico (non costante durante la giornata come il campo elettrico). Rispetto a quanto visto per il campo elettrico, il campo magnetico assume il valore massimo in corrispondenza della minima distanza dei

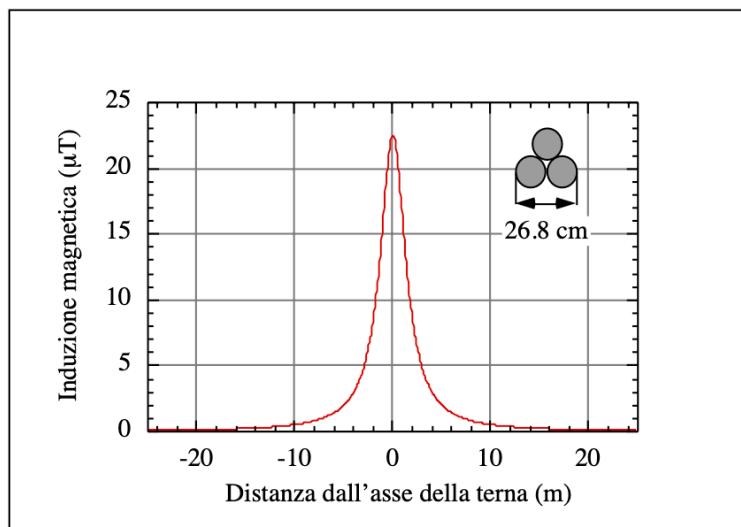
**conduttori dal suolo**, ossia al centro della campata, e decade molto rapidamente allontanandosi dalle linee; tuttavia, non si verifica lo stesso effetto schermante degli edifici e dagli alberi che è stato osservato per il campo elettrico, implicando che il campo misurabile all'interno di un'abitazione ha la stessa intensità di quello misurato all'esterno.



La dipendenza del campo magnetico e del campo elettrico dall'altezza della linea dal suolo può far pensare che **l'intensità dei campi possa essere ridotta se si allontanassero gli elettrodotti dal suolo**; tuttavia, come facilmente intuibile, l'elevazione dei tralicci di sostegno delle linee non è una soluzione attuabile su larga scala ma solo per determinati casi particolari. Le soluzioni attualmente utilizzate prevedono l'impiego di **linee aeree compatte** e di **cavi interrati** (in misura minore).

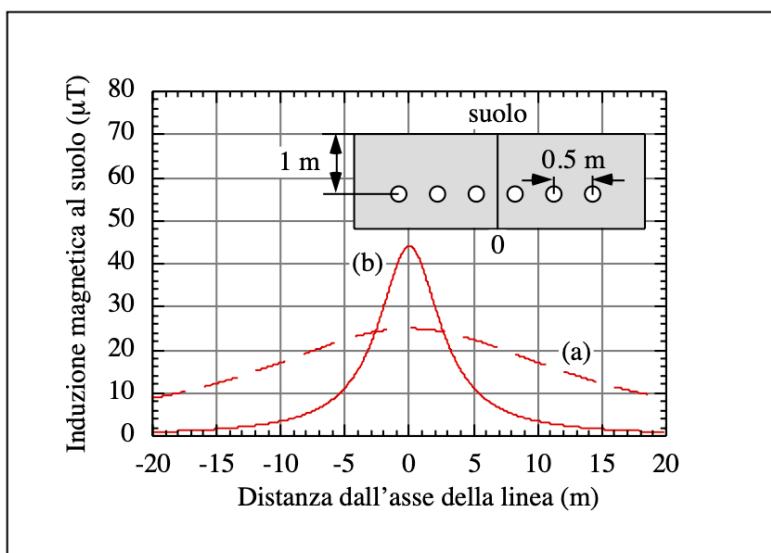
Una linea aerea compatta è caratterizzata da una **ridotta occupazione di spazio**, in quanto necessita di **campate corte e sostegni più bassi**; il sostegno è a cavalletto, come in figura, caratterizzato da un ingombro ridotto. La possibilità di poter avvicinare i conduttori consente di ridurre l'intensità del campo elettrico e magnetico rispetto alle linee tradizionali, mentre la riduzione delle distanze tra le fasi dei singoli conduttori comporta problemi di natura meccanica e di natura elettrica che non consentono un uso esteso di tali linee, in completa sostituzione della tecnologia tradizionale. A ciò si aggiunga il fatto che le attuali procedure di manutenzione sotto tensione delle linee elettriche non sono applicabili alle linee compatte e che il lungo tracciato della linea non consente di fare gli stessi angoli che si possono fare con le linee tradizionali, a causa della ridotta distanza tra i conduttori.





In alternativa si possono usare **liee interrate**, formate da **terne trifase in cavo disposte linearmente sullo stesso piano**, secondo una disposizione a terna piana, o a triangolo, secondo una **disposizione a trifoglio**. Nelle figure sono stati riportati gli andamenti teorici del campo di induzione magnetica al suolo, relativi alle terne possibili.

**La riduzione del campo elettrico**, operata grazie all'effetto combinato dell'azione schermante del terreno e dalla maggior prossimità reciproca tra i conduttori della linea, è **in parte annullata dalla possibilità per gli individui di avvicinarsi maggiormente ai conduttori stessi**, che sono di solito interrati a soli 1.5m di profondità. Di contro, **il campo magnetico non risente di questi effetti schermanti ed in particolare sull'asse di una terna interrata assume un valore massimo più elevato** di quello prodotto su una linea aerea che trasporta la stessa potenza, a causa della ridotta distanza tra le fasi nonostante presenti un'attenuazione trasversale più pronunciata.



Al momento non si è in grado di determinare un preciso effetto dell'esposizione prolungata del **corpo umano ai campi elettromagnetici**, sebbene siano state fatte diverse ipotesi (mai verificate). Una di queste ipotesi, detta **ipotesi "melatonina"**, coinvolge la **produzione di tale ormone dalla ghiandola pineale quando il corpo non è esposto alla luce del sole**; si voleva dimostrare che l'esposizione alle onde elettromagnetiche (di cui è composta la luce) venga interpretata dal **corpo umano come continua esposizione alla luce solare, impedendo la produzione di melatonina** (che

è un agente **antitumorale**). Tuttavia, i dati sperimentali non evidenziano con certezza una risposta al problema.

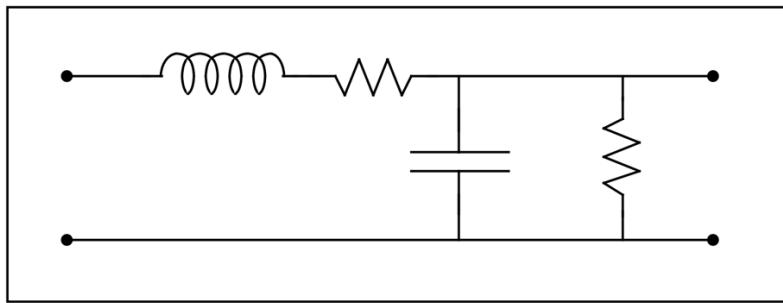
Lo IARC utilizza **quattro classi per definire un agente cancerogeno** e si è arrivati alla conclusione per cui i campi a basse frequenze sono classificabili come possibili agenti cancerogeni per l'uomo (gruppo 2B, lo stesso del caffè):

International Agency for Research on Cancer (IARC) Classificazione degli agenti cancerogeni per l'uomo	
Gruppo	Requisiti richiesti per la classificazione
Gruppo 1: l'agente è cancerogeno per gli uomini	Sufficienti evidenze epidemiologiche
Gruppo 2A: l'agente è probabilmente cancerogeno per gli uomini	Evidenze epidemiologiche limitate o inadeguate e sufficienti evidenze da esperimenti su animali
Gruppo 2B: l'agente è un possibile cancerogeno per gli uomini	Evidenze epidemiologiche limitate o inadeguate e evidenze da esperimenti su animali limitate o inadeguate
Gruppo 3: l'agente non è classificabile come cancerogeno per gli uomini	Evidenze epidemiologiche inadeguate e evidenze da esperimenti su animali limitate o inadeguate <i>oppure</i> non classificabile negli altri gruppi
Gruppo 4: l'agente è probabilmente non cancerogeno per gli uomini	Assenza di cancerogenicità sia negli uomini che negli animali <i>oppure</i> evidenze epidemiologiche inadeguate e assenza di cancerogenicità negli animali

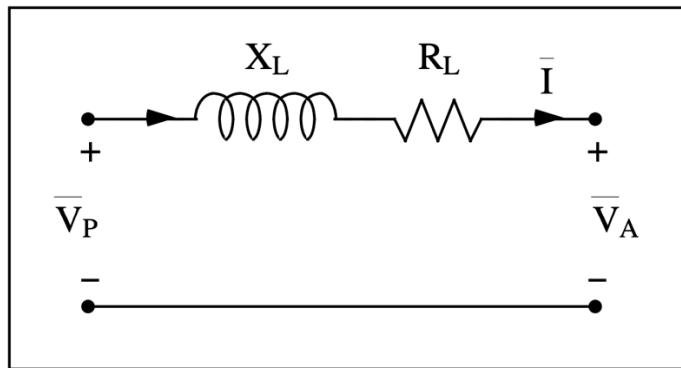
## IMPIANTI IN MEDIA TENSIONE

Operando **tra 1kV e 30kV**, gli impianti in media tensione sono quelli che si interpongono tra gli **utilizzatori e l'alta tensione** e vengono utilizzati per la **distribuzione primaria dell'energia**. I valori di tensione a cui tali impianti lavorano sono ancora troppo elevati per un utilizzatore **domestico o commerciale** (distribuzione secondaria) ma sono perfetti per grandi centri industriali, verso i quali sarà fatto un collegamento diretto.

In alta tensione ci si era abituati a rappresentare tratti relativamente brevi di linea per mezzo del doppio bipolo in figura:



**Le linee in MT hanno sempre lunghezze contenute**, al fine di **mantenere basse le cadute di tensioni lungo la linea**; di conseguenza, si possono considerare **trascurabili i fenomeni di propagazione e considerare valida una rappresentazione di questo tipo**. In aggiunta, i valori di tensione relativamente bassi permettono anche di **trascurare gli elementi trasversali** (gli effetti capacitivi e conduttrivi) e semplificare la schematizzazione come di seguito:



Anche in questo caso  $X_L$  e  $R_L$  rappresentano, rispettivamente, la resistenza e la reattanza **induttiva del tratto di linea considerato** ed i valori di tali parametri si calcolano con le formule o le tabelle introdotte nei capitoli precedenti.

La resistenza longitudinale di un tratto di linea formata da due conduttori di sezione  $S$  e lunghezza  $L$ , posti in aria, è:

$$R_L = 2\rho \frac{L}{S}$$

Mentre per la reattanza longitudinale, sempre nelle stesse ipotesi, risulta sufficiente la seguente espressione:

$$X_L = \omega \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right) = \omega \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left( \ln \frac{d\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}} + \frac{1}{4} \right)$$

Dove  $d$  rappresenta la distanza a cui i conduttori, di raggio  $a$ , sono posti reciprocamente. Questa formula può essere adattata anche a sistemi trifase, considerando al posto di  $d$  la media geometrica della distanza tra gli assi dei conduttori:

$$d = \sqrt[3]{d_1 d_2 d_3}$$

Spesso,  $X_L$  e  $R_L$  vengono forniti nella loro versione chilometrica, ovvero con il valore attribuito ad un chilometro di linea dell'unico conduttore di fase.

Lavorando a livelli di tensione più bassi, i sostegni impiegati nelle linee elettriche in MT possono essere più bassi e sono tendenzialmente realizzati in cemento armato, ferro, vetroresina (poco usata, troppo costosa) oppure legno trattato contro la putrefazione; nonostante siano materiali piuttosto resistenti, la loro durata è decisamente limitata e non trovano quasi mai impiego in applicazioni dalla durata di più di dieci anni. I sostegni in ferro possono essere realizzati sia tubularmente, quindi con un unico palo, o a traliccio (una versione ridimensionata di ciò che è stato mostrato in AT); per quanto riguarda quest'ultimo tipo di sostegno, si realizzano quattro montanti ad L, saldati tra loro con ferri piatti.

I sostegni più utilizzati, tuttavia, sono quelli in cemento armato, realizzati disponendo longitudinalmente una serie di tondini di acciaio collegati tra loro mediante fili ad elica; l'armatura così costituita viene collocata in una forma apposita per essere, poi, cementificata in rotazione, al fine di disporre il materiale lungo le pareti della forma, inglobando l'armatura e dando origine ad un palo provvisto di una cavità centrale. I pali cementificati in questione possono raggiungere altezze fino a 18 metri.



Gli isolatori in MT svolgono, naturalmente, la stessa funzione attribuitagli in AT; per tensioni non superiori ai 20kV si impiegano isolatori rigidi, mentre per tensioni superiori quelli a catena sono preferiti. Ogni elemento della catena garantisce un isolamento di 15kV ma, in via precauzionale, se ne inserisce sempre uno in più (aderendo alla regola del  $n + 1$  descritta nei precedenti capitoli); sono realizzati, come i parenti in AT, in vetro oppure in porcellana.

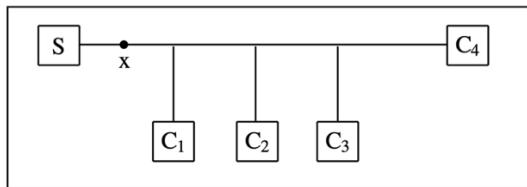
Le linee in MT possono essere anch'esse aeree o interrate ma in entrambi i casi i conduttori sono realizzati in rame crudo impiegato in corde; a differenza delle linee in AT, trova largo uso l'aldrey, una lega di alluminio con silicio e magnesio, leggera come l'alluminio ma meccanicamente più resistente. Anche in MT si verifica l'effetto pelle, quindi proprio come in AT si preferisce usare un conduttore animato doppiamente.

Gli interruttori in MT che sfruttano l'aria quale mezzo di estinzione sono di due tipi, a soffio magnetico e pneumatici. Negli interruttori a soffio magnetico (adoperati per tensioni fino a 24kV) l'arco che nasce fra i contatti viene allontanato mediante un campo magnetico prodotto dalla stessa corrente da interrompere e trasferito in una camera appropriata, dove una serie di piastre ceramiche provvede ad allungarlo, a raffreddarlo ed a frzionarlo in brevi segmenti fino a provocarne lo

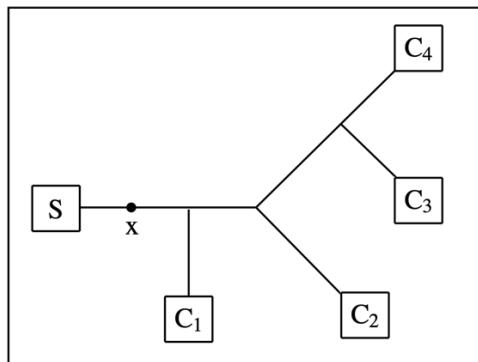
spegnimento. Negli **interruttori pneumatici**, invece, l'arco viene interrotto da un getto d'aria a velocità supersonica che lo allunga, lo raffredda e provvede contemporaneamente alla sostituzione dell'aria ionizzata con altra aria fresca. L'energica azione ionizzante che ne consegue provoca l'estinzione dell'arco al primo passaggio della corrente per lo zero: l'arco viene allungato in una colonna così sottile che trasmette rapidamente il calore alla massa d'aria circostante fredda e, quindi, si estingue. Si usano anche **interruttori ad esafluoruro di zolfo**, approfonditi nei capitoli dedicati all'alta tensione, che mostrano grande attitudine alla cattura "rapida" di un elettrone libero, formando un pesante ione  $SF_6^-$ ; questo effetto, unito alle notevoli energie richieste per ionizzare le molecole dell'esafluoruro di zolfo e per dissociarle nei suoi componenti atomici, permette di ottenere ottimi risultati nell'estinzione degli archi.

Limitandosi alle **configurazioni più significative**, di seguito sono elencate le principali strutture dei sistemi di distribuzione in MT:

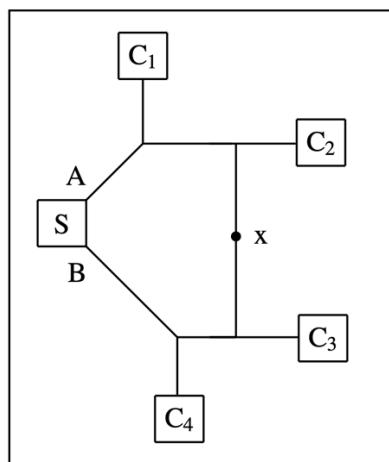
- **Distribuzione radiale a sezione costante;**



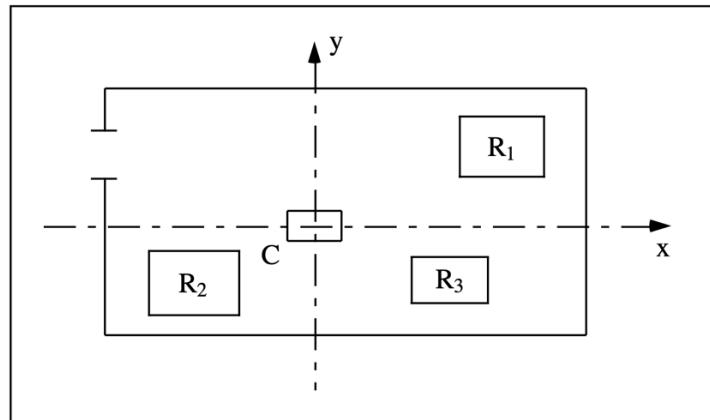
- **Distribuzione radiale ramificata;**



- **Distribuzione ad anello a sezione costante**, costosa ma conveniente perché all'occorrenza di un guasto sulla linea, la distribuzione non è interrotta per tutti i carichi (come invece accade per le configurazioni radiali);



- **Distribuzione con cabina di trasformazione posta nel baricentro elettrico dei carichi,** spesso impiegata nelle grandi industrie che lavorano in MT.



Detti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  le coordinate rispetto al sistema di assi scelto e  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  le potenze apparenti di ciascun reparto, il **baricentro elettrico** è determinato come segue:

$$x_B = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \wedge y_B = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Il motivo per cui nelle grandi industrie è preferibile una soluzione in funzione del baricentro elettrico risiede nella **capacità di massima riduzione della lunghezza dei cavi di alimentazione dei carichi e, di riflesso, la massima riduzione dei costi**.

Dati i cenni realizzativi di una linea in media tensione, è importante anche **determinarne il calcolo elettrico**, ovvero determinare **le sezioni dei conduttori a partire dall'imposizione di precise condizioni** (calcolo preliminare) o **verificare tali condizioni una volta assegnate le sezioni dei conduttori** (calcolo di verifica), ovviamente **il tutto supponendo il circuito a parametri concentrati**. Si tenga in considerazione, però, che **per particolari casi di reti in cavo a tensione superiore ai 10kV, il calcolo va eseguito come se si trattasse di linee in AT con parametri uniformemente distribuiti**.

**Le correnti da considerare nel calcolo elettrico sono quelle relative alle condizioni di carico massimo**, tenendo conto dei fattori di contemporaneità nel caso di più carichi. Il calcolo elettrico si effettua osservando **i seguenti criteri**:

- **Criterio della massima caduta di tensione** (o criterio elettrico, che determina la sezione elettrica);
- **Criterio termico** (che determina la sezione termica);
- **Criterio del massimo tornaconto economico** (che determina la sezione economica).

Nelle reti di distribuzione è necessario che le sezioni dei conduttori siano tali che le variazioni di tensione fra le **condizioni di massimo e minimo carico** siano contenute entro limiti prefissati; il motivo di questa limitazione nasce dal fatto che **ogni dispositivo**, dalle lampade ai motori, **sono sensibili a tali variazioni**. Anche la corrente che attraversa i conduttori non deve superare determinati limiti, altrimenti si verificano pericolose situazioni di **surrisaldamento**. Infine, va ricercato un **compromesso tra grandezza della sezione e dissipazione di energia**: ovviamente, più energia viene dissipata più si spreca, ma per sprecarne di meno occorre impiegare conduttori a **sezioni maggiori, che costano**. Se il calcolo elettrico fosse fatto solo sulla base dei primi due

criteri, andrebbe sempre scelta la sezione maggiore tra quella elettrica e termica; però, nella maggior parte dei casi, il tornaconto economico è la regola direttrice di tutti i lavori.

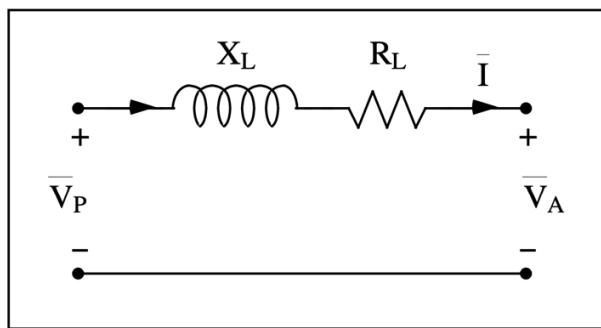
Per determinare il calcolo elettrico si effettua il calcolo preliminare su uno dei tre criteri e poi si fa il calcolo di verifica secondo uno dei due rimanenti. In genere, però, si può effettuare unicamente il calcolo preliminare sulla base del criterio economico, visto che le condizioni di massima corrente ammissibile sono largamente soddisfatte nei conduttori aerei proporzionali in modo da avere una caduta di tensione inferiore al 5% (pertanto, la verifica del riscaldamento può essere evitata) e visto che per le linee in MT si hanno buone possibilità per la regolazione della tensione, ad esempio variando il rapporto di trasformazione dei trasformatori interposti (pertanto, la verifica della caduta di tensione può essere evitata). Solamente in alcuni casi, come per linee aeree molto corte, questo modus operandi non è del tutto efficace e il calcolo elettrico va approfondito con più cura.

Di seguito verranno stabilite le relazioni che nelle linee e nelle reti forniscono la caduta di tensione (c.d.t. per semplicità) in funzione della sezione dei conduttori; tali relazioni consentono:

- Fissati i carichi, la loro ubicazione, la tensione del sistema e le massime c.d.t. ammissibili, di calcolare la sezione o le sezioni dei conduttori costituenti il sistema (**calcolo preliminare**);
- Nota la sezione o le sezioni dei conduttori, i carichi, la loro ubicazione e la tensione del sistema, di verificare che nei punti prefissati non vengano superate determinate c.d.t. (**calcolo di verifica**).

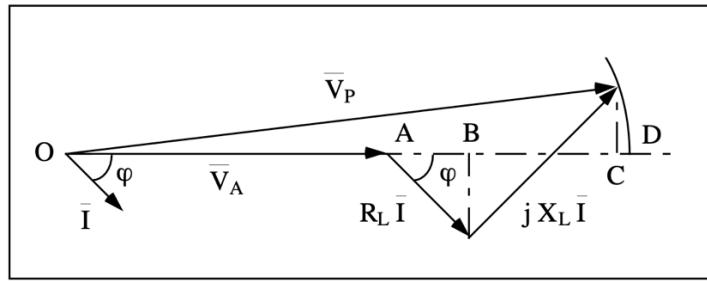
Le approssimazioni che verranno di seguito messe in gioco sono ampiamente giustificate dal fatto che nel calcolo preliminare ben di rado si potrà adottare la sezione effettivamente calcolata, andando a scegliere per convenienza quella commerciale di valore immediatamente superiore a quella calcolata, mentre nel calcolo di verifica si può valutare entro certi limiti il valore della c.d.t. con elevati margini di approssimazione.

**La c.d.t. è definita come la differenza tra i moduli delle tensioni in partenza e in arrivo alla linea:**



$$\bar{V}_P = \bar{V}_A + (R_L + iX_L)\bar{I}$$

Dove  $\bar{I}$  è il fasore rappresentativo della corrente di linea. Si consideri la costruzione mostrata nella figura seguente, in cui  $\varphi$  rappresenta la fase dell'impedenza (supposta ohmico – induttiva) che termina il tratto di linea. Confondendo il punto D con C (ipotesi legata al fatto che la linea è costituita da buoni conduttori e, quindi, da piccoli valori di  $R_L$  e di  $X_L$ ), si ricava la seguente espressione approssimata della c.d.t.:



$$V_P - V_A = \overline{OD} - \overline{OA} \approx \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Ma con:

$$\overline{AB} = R_L I \cos \varphi \wedge \overline{BC} = X_L I \sin \varphi$$

La c.d.t. diventa:

$$V_P - V_A \approx R_L I \cos \varphi + X_L I \sin \varphi$$

**Per una linea trifase, progettata per funzionare alla tensione nominale  $V_N$ , la c.d.t. percentuale si definisce rapportando tutto a questo valore:**

$$\Delta V\% = 100 \cdot \frac{V_P - V_A}{V_N}$$

Questa c.d.t. non è la forma notevole consigliata anche dalle norme; sciogliendo la differenza al numeratore e moltiplicando e dividendo per  $V_A$  si può ottenere:

$$\Delta V\% = 100 \cdot \frac{V_A(R_L \cos \varphi + X_L \sin \varphi)}{V_A V_N} = \frac{P R_L + Q X_L}{V_N^2}$$

Confondendo  $V_A$  con  $V_N$  (possibile perché, per linee ben progettate, sono quantità prossime) e sapendo che  $P = V_A I \cos \varphi$  e  $Q = V_A I \sin \varphi$ .

Quindi, per le linee in cui è trascurabile l'ammettenza trasversale, la c.d.t. percentuale è inversamente proporzionale al quadrato della tensione di esercizio e si compone di due addendi, uno attribuito al transito di potenza attiva e uno alla potenza reattiva assorbita all'estremità di arrivo.

Per quanto riguarda il criterio termico, invece, si consideri che la potenza dissipata nei conduttori ne fa aumentare la temperatura, la quale può causare notevoli problemi nel caso aumentasse; infatti, si può riscontrare una dipendenza lineare tra la resistività del conduttore (che si riflette anche su perdite ohmiche e sulla vita dell'isolante) e la temperatura. Se si suppone (come è lecito) di trascurare il calore emesso per irraggiamento, si può ammettere l'uguaglianza tra potenza dissipata e calore perso per convezione (acquisito dall'ambiente):

$$R I^2 = k S \cdot \Delta T$$

Con  $k$  coefficiente di trasmissione del calore, ovvero il numero di watt smaltiti dall'unità di superficie per ogni grado di sovratemperatura del conduttore in quelle condizioni. Fissato un valore di sovratemperatura ammissibile, resta definita la massima corrente che il conduttore può trasportare con continuità (detta portata); invece, fissato un valore massimo di corrente che si

**presume transiti in modo duraturo**, per mezzo di determinate tabelle che forniscono la portata dei cavi ( $k$  dipende da diversi fattori ed ha una incerta determinazione teorica), si vede quale deve essere **la sezione di cavo da adottare** (calcolo preliminare) o **come si comporta la sezione adottata** (calcolo di verifica). Il calcolo termico appena individuato è obbligatorio nel dimensionamento dei cavi.

Infine, per quanto riguarda il criterio economico, si consideri che **la variazione del costo della linea** (supponendola aerea con carico di estremità) **con la sezione del conduttore non dipende solo da quest'ultima ma anche dalle modificazioni risultanti nei sostegni, nei vari accessori da impiegare ed eventualmente nel tipo di isolatore**. Per una assegnata tensione nominale, si può ammettere che la legge di costo sia linearmente collegata alla sezione:

$$C = d + bS$$

Con  $d$  e  $b$  costanti generiche; **questo costo va, poi, sommato al costo dell'energia perduta**.

## IL FENOMENO DELLA FULMINAZIONE

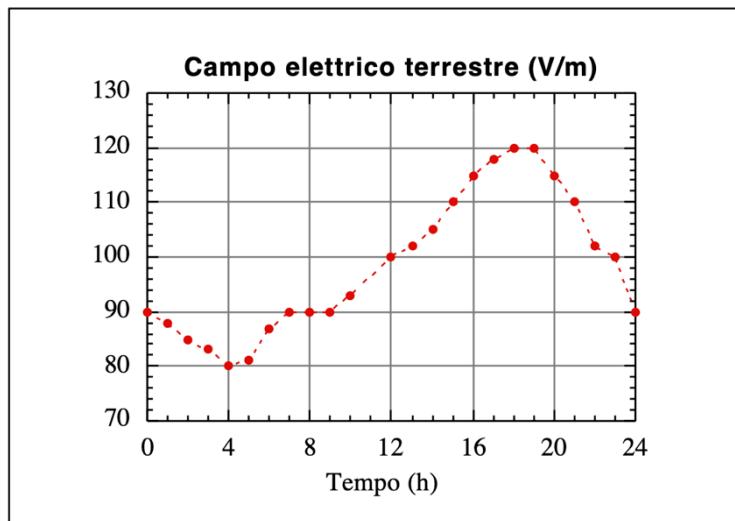
Per le linee in Alta tensione il fenomeno della fulminazione non è stato preso in considerazione con il dovuto riguardo perché le tensioni che esso induce (30kV circa) sono troppo piccole per costituire un vero e proprio rumore al segnale trasmesso, ci si è limitati a proteggere le linee con una fune di guardia che evita ripercussioni (più fisico – meccaniche che trasmissive) per un angolo di circa 60°. Essendo le medie tensioni paragonabili alle tensioni indotte dal fenomeno di fulminazione, sarà necessaria una trattazione più approfondita, sia riguardo al fenomeno stesso che alle opere di prevenzione, che sarà oggetto del seguente capitolo.

Il fenomeno della fulminazione fu studiato con spirito scientifico solo alla metà del XVIII secolo da Benjamin Franklin, il quale portò all'attenzione la similitudine tra le scariche temporalesche e le scintille elettriche. I fenomeni di fulminazione sono tanto pericolosi quanto imprevedibili; infatti, riescono a sviluppare una corrente talmente elevata (mediamente 2kA) da tramutarsi in distruzione per persone e cose colpite ma allo stesso tempo non si è ancora trovata una soluzione per convogliare questa enorme energia in elettricità fruibile.

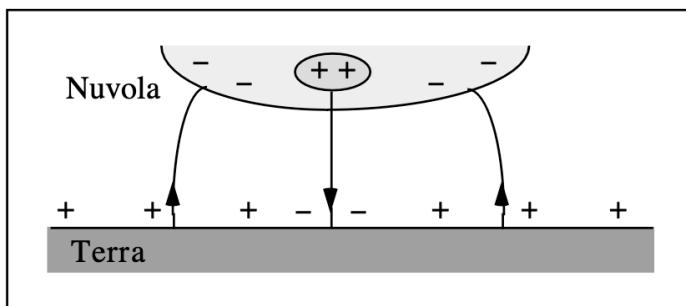
L'atmosfera terrestre è composta al 78% da Azoto, al 21% da Ossigeno e al 1% da CO<sub>2</sub> e da altri gas nobili. Una piccola frazione delle molecole di gas dell'atmosfera risulta sempre ionizzata, a causa dei raggi X e dei raggi UV provenienti dal sole. Ciò significa che l'aria dell'atmosfera presenta una piccola conducibilità che cresce con l'altezza dal suolo individuando diverse zone di conducibilità:

- **Elettrosfera**, a circa 50km dal suolo;
- **Ionosfera**, a partire da 60km dal suolo e caratterizzata da un altissimo grado di ionizzazione (tanto da essere indispensabile per le telecomunicazioni);
- **Magnetosfera**, oltre i 500km, dove il grado di ionizzazione è trascurabile rispetto al campo magnetico (di intensità media 25 – 50 µT)

Tra elettrosfera e suolo terrestre esiste, quindi, un campo elettrico verticale orientato verso il basso e la cui intensità decresce con l'altezza ma il cui valor medio si attesta intorno ai 100V/m:



Esperimenti di vario tipo hanno evidenziato che **la carica in una cella temporalesca si distribuisce in un ben preciso modo: la vetta della nuvola (6 ÷ 7km dal suolo) ha una carica positiva dell'ordine di 10 ÷ 100C, mentre la base (3 ÷ 4km dal suolo) ne ha una negativa di valore pressoché uguale.**



Di conseguenza, **la differenza di potenziale tra la nube e il suolo, carico positivamente, può raggiungere anche 20 – 100MV; a questi valori, si rompe la rigidità dielettrica dell'aria, creando gigantesche scariche ad arco: le cariche negative alla base della nuvola vengono portate a terra dal fulmine (che trasporta 20 – 30C) e dopo circa cinque secondi il temporale ha ricostruito le proprie condizioni iniziali, pronto a produrre un altro colpo.**

Ci si occupa solo di scariche tra nubi e terra perché sono quelle che producono danni maggiori agli oggetti di interesse in questa sede ma si deve tenere in considerazione che **sono possibili scariche anche tra nubi e nubi o tra nubi e aria**. A seconda che il valore critico di campo elettrico si raggiunga prima in prossimità della nube o del suolo, si può avere una **scarica discendente o ascendente**, ma in entrambi i casi **il dielettrico è sempre rotto gradualmente, a strati, finché non si unisce a formare un canale conduttivo** (step or dart leader) che fornisce un **contatto elettrico tra cielo e terra** che permette la scarica del fulmine.

Pur limitandosi a considerare regioni a clima temperato, è importante mettere in evidenza l'influenza che hanno sui fulmini la configurazione olografica della zona ed il periodo dell'anno in cui si verifica il temporale. **In aree montagnose l'intensità delle scariche e la carica in gioco sono minori**, vista la minor distanza tra nubi e terra, **ma il numero è molto più elevato che in pianura, dove le intensità sono maggiori**; infatti, **il campo elettrico in pianura è raramente abbastanza elevato da rompere il dielettrico dell'aria ma quando accade le nubi sono ben cariche e i canali sono molto lunghi**. Per quanto riguarda l'influenza stagionale, si tenga in considerazione che **in estate molte scariche**

**avvengono entro intra – nuvole perché queste sono a notevole altezza dal suolo, mentre nelle altre stagioni le nuvole sono più basse.**

Vista la grossa variabilità del numero e del tipo di manifestazioni temporalesche che interessano una certa regione, per ottenere una stima di quanto quella regione sia esposta a fenomeni di fulminazione è opportuno fare riferimento al livello ceraunico ( $T_D$ ), indice della frequenza temporalesca inteso come il numero di giorni temporaleschi per  $\text{km}^2$  all'anno in quella zona.

Ancona	1.5	Genova	4.0	Reggio Calabria	2.5
Aosta	1.5	L'Aquila	2.5	Roma	4.0
Bari	2.5	Milano	4.0	Torino	2.5
Bologna	2.5	Napoli	1.5	Trento	2.5
Bolzano	2.5	Palermo	2.5	Trieste	4.0
Cagliari	2.5	Perugia	4.0	Udine	4.0
Firenze	1.5	Potenza	2.5	Venezia	4.0

**Il livello ceraunico è affidato alla valutazione di almeno un tuono in una giornata** (che determina la giornata temporalesca) e, pertanto, è un indice poco obiettivo e affidabile. In Italia, i fulmini sono tenuti sotto controllo dal SIRF (Sistema Italiano di Rilevamento dei Fulmini), ente gestito dal CESI, una società Enel; la rete del SIRF è composta da sedici rilevatori installati lungo la penisola, collegati tutti al centro di controllo di Milano e che producono dati sui campi elettrici e magnetici in relazione all'esatta localizzazione e all'istante di un evento sul territorio.

Secondo alcuni ricercatori, **un fulmine può entrare nel corpo umano attraverso le aperture del cranio** (occhi, orecchie, naso e bocca) e scaricarsi a terra dopo aver percorso il sangue ed il sistema nervoso; di conseguenza, una volta colpiti da un fulmine si verifica l'arresto del cuore e dei polmoni ma, mentre il cuore può autonomamente riprendere a battere, per i polmoni è necessaria una respirazione artificiale prima che il soggetto colpito muoia di anossia. Con un adeguato soccorso, sembra che il 70% delle persone colpite da un fulmine possa sopravvivere senza danni.

Ad oggi per la protezione dai fulmini si utilizzano due meccanismi, uno ideato da Franklin composto da un **parafulmine** (un'asta metallica verticale capace di intercettare i fulmini e drenare la relativa corrente a terra mediante un conduttore di discesa) e uno progettato da Faraday ma promosso da Maxwell che prevede l'uso di una semplice **gabbia di Faraday** (le automobili sono costruite in questo modo). **Un moderno LPS (Lightning Protection System) è un sistema di protezione generalmente costituito di un impianto interno ed uno esterno:**

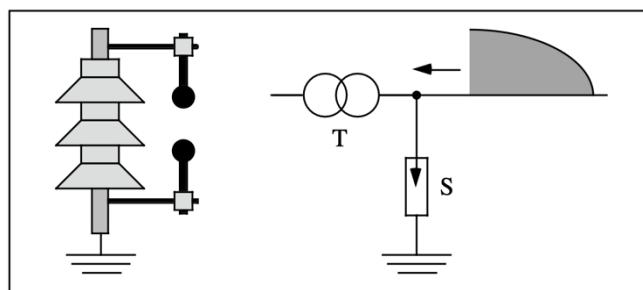
- **L'impianto esterno** è deputato ad **intercettare le scariche atmosferiche**, mediante opportuni captatori ad asta o a maglia, e di drenare a terra la relativa corrente, mediante adeguati conduttori. Il captatore crea un volume protetto, inteso come una zona che non può essere colpita da fulmini, ed è spesso posto sulla sommità degli edifici (ed è implementato ad asta, se le dimensioni planari sono ridotte) o intorno all'edificio (ed è implementato a maglia, se le dimensioni planari sono rilevanti); in entrambi i casi, i percorsi di questi dispositivi devono essere quanto più possibile rettilinei, con eventuali cambi di direzione senza spigoli o curvatore a piccolo raggio. La protezione dell'impianto esterno è tanto maggiore quanto più strette sono le maglie e più distanziate dal fabbricato;
- **L'impianto interno** si compone di un sistema equipotenziale ed una opportuna schermatura, in modo da **mitigare anche i disturbi dei campi elettromagnetici irradiati da fulmini vicini**. Quando l'impianto esterno viene colpito da un fulmine, per un brevissimo intervallo di tempo, l'impianto parafulmine si porta ad un potenziale molto elevato ed è percorso da

elevate correnti; ciò crea una considerevole differenza di potenziale tra impianto e struttura protetta che può condurre all'induzione di elevate sovratensioni e scariche elettriche all'interno del fabbricato, anche se non è direttamente colpito dal fulmine. L'impianto interno serve sostanzialmente a limitare queste sovratensioni indotte e, allo stesso tempo, evitare che scariche elettriche interessino parti interne del volume protetto.

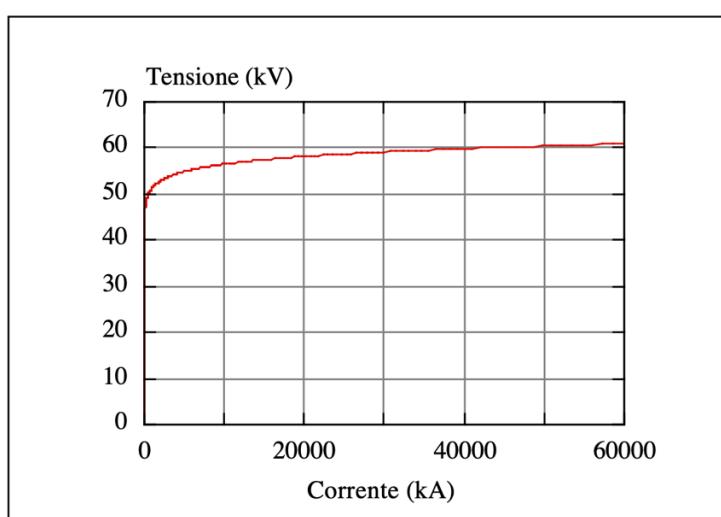
## PROTEZIONI DAI FULMINI PER LA MEDIA TENSIONE

Si parla di **fulminazione diretta** quando il canale conduttivo di un fulmine interseca direttamente **un oggetto**, in questo caso le linee di trasmissione, colpendolo. L'oggetto in questione può essere **danneggiato gravemente** ed è per questo che va a tutti i costi evitata quando si progetta un **impianto**. Si può parlare, però, anche di **fulminazione indiretta**, che occorre quando il fulmine non colpisce l'oggetto ma la perturbazione elettromagnetica derivata lo investe.

Per le linee in alta tensione ci si era limitati ad evitare fulminazioni dirette, visto che quelle indirette vanno a creare sovratensioni trascurabili rispetto a quella di esercizio della rete; tuttavia, la situazione diventa più delicata per le linee in media tensione, dove la perturbazione elettromagnetica può produrre sovratensioni pari anche ad oltre il 100% di quella di esercizio. Per evitare questi fenomeni, in corrispondenza dei trasformatori, vengono installati dei dispositivi, gli **scaricatori**, che hanno il solo scopo di proteggere la linea (o meglio il trasformatore, che è l'elemento più a rischio):



Un'onda di sovratensione, indotta da una fulminazione (ad esempio), viaggia lungo la linea fino ad intersecare un arco nello scaricatore **S** che protegge, in tal modo, la stazione di trasformazione **T**. In sostanza, si tratta di **resistori non lineari**, la cui caratteristica tipica è riportata di seguito e la cui espressione analitica è:

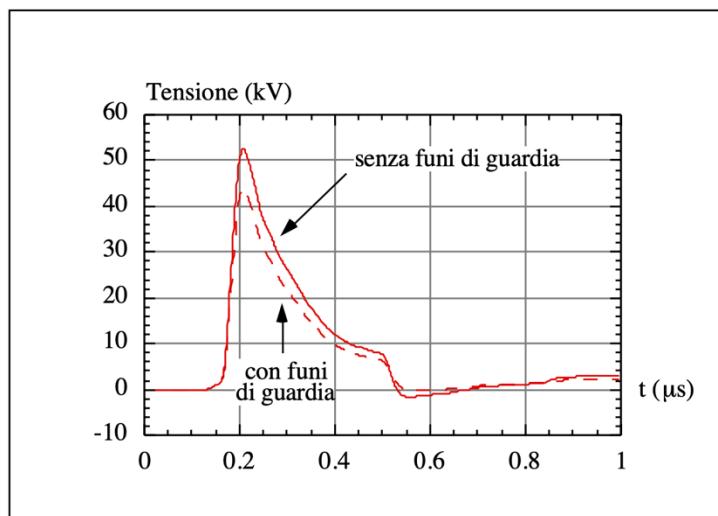


$$I = I_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^N$$

Dall'esame della caratteristica statica si evince che **quando un'onda di sovratensione sta per raggiungere la terminazione della linea, essa viene "sentita" dallo scaricatore, che varia immediatamente la sua resistenza, drenando a terra una grande quantità di carica e contenendo entro limiti accettabili la tensione alla terminazione; invece, per tensioni normali, lo scaricatore non risulta essere conduttivo e non condiziona la normale trasmissione.**

Per un corretto impiego degli scaricatori e per preservare le parti vitali e costose degli impianti dalle sovratensioni è di vitale importanza predisporre di un razionale coordinamento degli isolamenti, cioè stabilire livelli di isolamento delle varie apparecchiature in modo da localizzare in determinati punti le scariche che si possono verificare in regime perturbato. A tal proposito, è bene notare che **gli isolanti sopportano meglio tensioni elevate ma impulsive che tensioni sinusoidali di lunga durata con ampiezza contenuta**; in pratica, si stabiliscono tre livelli di isolamento, il più basso associato agli scaricatori, quello intermedio all'isolamento esterno degli apparecchi di manovra e dei trasformatori, mentre **quello massimo all'isolamento interno**. In tal modo, **quando una linea viene colpita da un fulmine, scaricano per primi gli isolatori, poi eventualmente gli isolatori esterni e solo per ultimi, ma possibilmente mai, gli isolanti interni delle macchine.**

**In Italia la fune di guardia**, sebbene sia una protezione ragionevolmente utile, **non si adotta nelle linee in media tensione**; in altri paesi, però, come gli USA la fune di guardia assume un ruolo centrale anche negli impianti MT, catturando i fulmini e proteggendo i conduttori posti più in basso rispetto ad essa. **Gli effetti benefici delle funi di guardia non si limitano solo in caso di fulminazione diretta ma presentano un considerevole vantaggio anche in caso di fulminazione indiretta**, andando a schermare le sovratensioni che si manifestano in seguito alla fulminazione:



Un'ultima tecnica di prevenzione delle linee in media tensione dai fenomeni di fulminazione è il **rerouting**, con il quale si decide di dirottare la trasmissione dell'energia su linee in cui la **probabilità di temporali è minore quando, invece, su quella attuale la probabilità è elevata**. Ovviamente, essendo un calcolo probabilistico, è un metodo poco affidabile e poco preciso ma che è stato più e più volte collaudato e impiegato, riscontrando diversi successi (tanto da esser usato anche in F1).

## SICUREZZA IN BT: FUSIBILI E RELÈ

Prima di introdurre i principali impianti in bassa tensione, è importante fare una breve digressione sui **dispositivi di sicurezza** utilizzati per questo tipo di trasmissione, i **fusibili** e i **relè** (adattamento del termine francese relais). Questi dispositivi sono atti ad **impedire che nelle condutture e negli apparecchi elettronici abbiano luogo correnti di intensità tale da far loro assumere temperature pericolose o eccessive**.

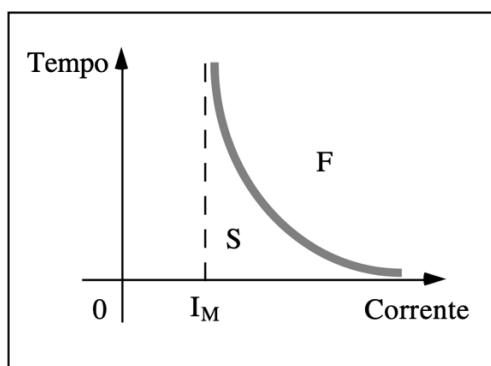
### FUSIBILI

Un fusibile è uno tra i più semplici e rapidi dispositivi di protezione contro le sovraccorrenti. Si tratta di un **corto conduttore di lega, a basso punto di fusione, tipicamente alloggiato in un apposito contenitore ceramico**. Non appena il calore dissipato per effetto Joule supera quello di fusione, il conduttore fonde ed il passaggio della corrente si interrompe. Si intuisce, allora, che proprio per le loro caratteristiche, i fusibili non possono discriminare tra un sovraccarico ed un cortocircuito: il tempo di intervento dipende dal raggiungimento del regime termico che ne condiziona la funzione e risulta tanto più piccolo quanto più elevato risulta il valore della corrente che attraversa il fusibile.

Sulla base delle apposite norme CEI, **un fusibile è definito da:**

- **Fusibile**, dispositivo che, mediante la fusione di uno o più elementi fusibili a tal fine progettati e proporzionati, apre il circuito nel quale è inserito, interrompendo la corrente quando essa supera un valore specificato per una durata sufficiente;
- **Cartuccia**, parte del fusibile comprendente l'elemento o gli elementi fusibili e prevista per essere sostituita dopo che il fusibile ha operato;
- **Elemento fusibile**, parte della cartuccia prevista per fondere quando il fusibile opera.

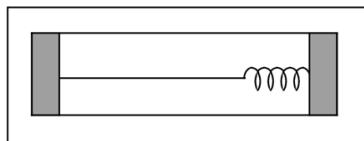
La **caratteristica di intervento** di un fusibile è una forma d'onda del tipo:



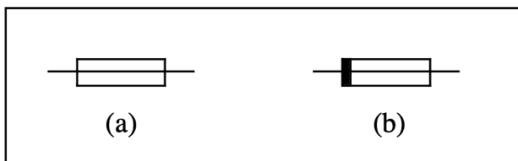
Si può facilmente intuire quanto tempo occorre al dispositivo per agire in corrispondenza di un valore efficace di corrente. La corrente  $I_M$  rappresenta la minima corrente di fusione del dispositivo, anche se in realtà questo e altre condizioni di intervento sono determinabili solo in una certa banda di incertezza, legata a molti fattori, tra cui piccole differenze costruttive. Il piano della caratteristica può essere diviso in due: la zona S, per cui l'intervento di protezione non è necessario, la zona F, sicura per la fusione. Si noti che non appena nel fusibile la corrente supera il valore  $I_M$ , viene innescato il suo funzionamento; questo comportamento non è desiderato nel momento in cui sono previste e tollerabili delle piccole sovratensioni innocue.

Quando sono richieste **protezioni molto rapide**, come nel caso di apparecchiature sensibili o costose, sono necessari fusibili con tempi di reazione più rapidi; questi particolari dispositivi sono

etichettati con le sigle “F” o “FF” e sono costituiti da un corto conduttore caricato con una molla già tesa che, forzando la rottura prima che si raggiunga la temperatura di fusione, realizza il richiesto aumento di rapidità:



Per quanto riguarda i simboli circuituali, in figura sono esposti quelli dei fusibili comuni e per i fusibili con molle pre – tese:



I dati di targa di un fusibile ai quali va prestata attenzione sono i seguenti:

- **Corrente nominale**, detta anche portata, che rappresenta la massima corrente che può percorrere nel fusibile senza innescarne la fusione;
- **La forma d'onda della corrente**, avendo presente che il regime stazionario rappresenta la condizione certamente più gravosa;
- **Il potere nominale di interruzione**;
- **La tensione nominale**, riferita alle prestazioni del fusibile e che deve essere non inferiore a quella di esercizio normale della linea da proteggere.

Le cause che determinano l'intervento di un fusibile non sono sempre e solo le correnti, possono essere generalmente tre:

- **Sovraccarico del circuito**, ottenuto quando, collegando più apparecchiature, la portata totale del carico supera quella del circuito stesso, cosa che si verifica di frequente quando si ricorre ad una spina multipla;
  - Per risolvere il problema associato a questa causa bisogna ridurre il carico del circuito e sostituire il fusibile;
- **Invecchiamento**, dovuto al fatto che il filo metallico che costituisce il vero elemento di sicurezza finisce per corrodersi con il tempo e rompersi senza una causa apparente;
  - Per risolvere il problema associato a questa causa bisogna sostituire il fusibile;
- **Cavo danneggiato o guasto di un'apparecchiatura**, in corrispondenza dei quali il fusibile spesso brucia producendo una sorta di scoppio;
  - Per risolvere il problema associato a questa causa bisogna localizzare e riparare il guasto del cavo o dell'apparecchio e poi sostituire il fusibile.

Una volta che il fusibile è entrato in funzione, il corpo in vetro permette di osservare visivamente lo stato del conduttore interno; tuttavia, quando la portata aumenta da una decina ampere in su, sono usati corpi in ceramica, che non permettono l'accesso visivo se non attraverso un segnalatore esterno. Prima di sostituire un fusibile è buona norma aprire sempre l'interruttore generale.

## RELÈ

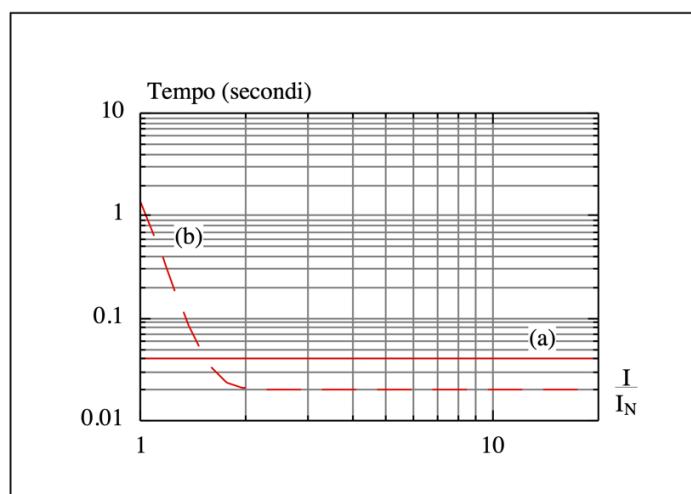
**Il relè, a differenza del fusibile, è un dispositivo capace di agire come interruttore** (è conosciuto anche come sganciatore); infatti, più generalmente, **per relè si intende un qualsiasi dispositivo capace di instaurare determinate connessioni in un circuito elettrico quando si verifica una prestabilita condizione in un altro**. Si tratta, dunque, di una **vasta classe di dispositivi**, concepiti per pilotarne altri di comando o di segnalazione in funzione di una o più grandezze caratteristiche dei circuiti (si parla di relè amperometrici, voltmetrici, wattmetrici, termici e così via...).

**Un primo criterio di classificazione dei relè è in funzione della grandezza agente:**

- **Relè di massima**, che interviene quando il valore della grandezza agente supera un prefissato valore di taratura;
- **Relè di minima**, che interviene quando il valore della grandezza agente è inferiore ad un prefissato valore di taratura;
- **Relè differenziale**, che interviene sulla base della differenza tra due grandezze omogenee e, generalmente, è di massima, agisce cioè quando tale differenza supera un prefissato valore di taratura;
- **Relè direzionale**, sensibile al segno della grandezza agente.

Esiste, però, anche una **classificazione basata sul tipo di azione svolta**:

- **Relè ad azione diretta**, caratterizzato dal fatto che un organo mobile agisce direttamente sul dispositivo comandato;
- **Relè ad azione indiretta**, che interviene sul dispositivo comandato non direttamente ma mediante un altro meccanismo;
- **Relè con blocco**, detto anche a riarmo manuale e utile ad evitare il ripristino quando il guasto è ancora in atto, dato che dopo l'intervento occorre un'azione esterna per ripristinare la posizione;
- **Relè senza blocco**, caratterizzato da uno sganciatore che riassume automaticamente la posizione di riposo;
- **Relè di blocco**, che determina l'esclusione dell'impianto protetto;
- **Relè di segnalazione**, che serve a segnalare un'anomalia di funzionamento, la quale prevede una successiva fase di esclusione quando pericolosa.



Anche per i relè viene definita la **caratteristica di intervento** come la relazione che lega il tempo di intervento alla grandezza agente (tipicamente una corrente) e il tempo di intervento come

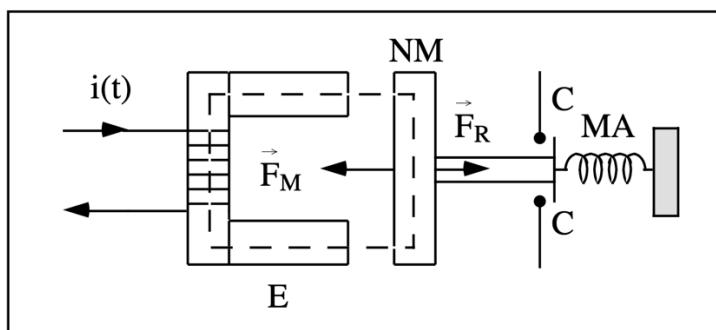
**l'intervallo temporale che intercorre tra l'istante in cui si verifica l'anomalia scatenante l'intervento del relè e l'istante in cui l'intervento avviene effettivamente.** Normalmente, per i relè la caratteristica di intervento è fornita in scala logaritmica e può essere di due tipologie: indipendente o dipendente dal tempo.

Per relè a scatto istantaneo si intende un relè caratterizzato da un tempo di intervento che dipende dalla sola inerzia delle varie parti che compongono il meccanismo, mentre per relè a scatto ritardato si intende un relè caratterizzato da un tempo di intervento che può essere variato, entro certi limiti, da un opportuno dispositivo.

Classificando la seguente lista in funzione del principio di funzionamento, si passino in rassegna i principali tipi di relè trovabili in commercio:

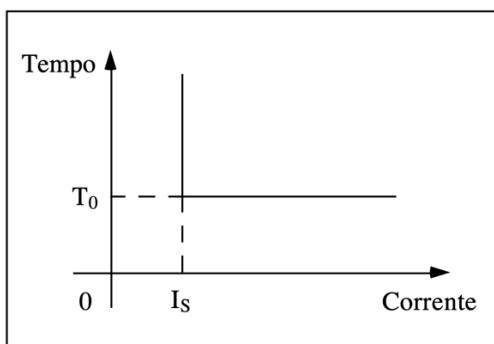
- **Relè elettromagnetico**

È un dispositivo costituito da un **elettromagnete fisso (E)** e da un **nucleo magnetico mobile (NM)**, detto anche **ancoretta magnetica**:



Per effetto della corrente di comando  $i(t)$ , il campo magnetico creato dall'elettromagnete può vincere la resistenza della molla antagonista (MA) e realizzare il collegamento elettrico per mezzo dei contatti (C). In particolare, se la forza magnetica di attrazione risulta superiore rispetto a quella di tipo resistente elastica dovuta alla molla, il nucleo mobile viene attirato dall'elettromagnete (supponendo l'assenza di attriti).

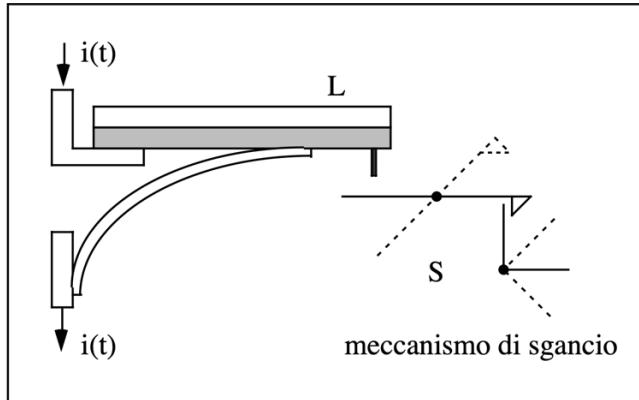
La caratteristica (assolutamente ideale) di questo dispositivo è quella riportata in figura; se la corrente non supera la corrente di soglia  $I_S$ , il relè non interviene, mentre per correnti superiori a quella di soglia il tempo di intervento è praticamente costante, dipendente solo dall'inerzia delle parti meccaniche in movimento.



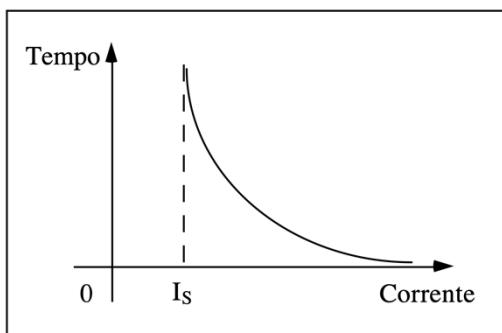
Dato che la forza magnetica dipende dal quadrato della corrente, questo tipo di relè può operare sia in corrente continua che in regime sinusoidale.

- **Relè termico**

Costituito da una **lmina (L)**, a sua volta **composta da due metalli a diverso coefficiente di dilatazione termica**. Per questo relè il passaggio della corrente di comando  $i(t)$  riscalda i due metalli, provocando un **incurvamento della lmina che aziona il meccanismo di sgancio (S)**.



Si tratta, dunque, di un **dispositivo di sgancio sensibile alla temperatura e, per il ripristino manuale del meccanismo di sgancio, occorre che la lmina bimetallica sia sufficientemente raffreddata**. **Tempi e soglie di intervento dipendono dal regime termico esistente**: una stessa variazione di corrente può provocare o meno lo sgancio del relè a seconda che la lmina sia già calda o meno; una tipica caratteristica di intervento, che segue queste linee guida, è la seguente:

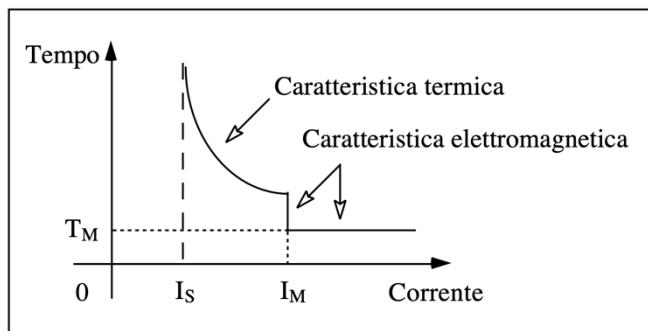


Si nota la **somiglianza con la caratteristica di intervento di un fusibile**; infatti, i due non sono tanto distanti ma questo relè è usato perlopiù nei casi in cui sia prevedibile una sovraccorrente piuttosto intensa e di breve durata, come ad esempio all'avviamento di un motore asincrono, dove sono prevenute aperture intempestive del circuito di alimentazione pur assicurando la desiderata protezione nel caso di sovraccorrente protratta nel tempo.

- **Relè magnetotermico**

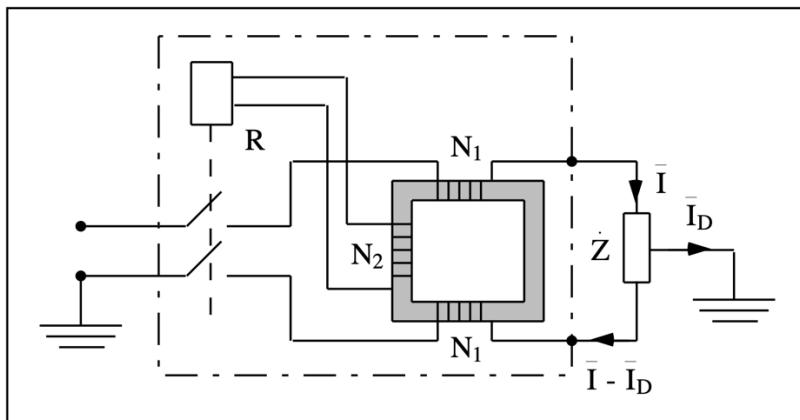
Come si può intuire dal nome, **questo relè nasce dalla combinazione di un relè elettromagnetico e di uno termico**, per combinarne le caratteristiche ed offrire una protezione più efficace. Dall'esame della caratteristica di intervento, si desume che **per correnti non troppo elevate è previsto l'intervento del dispositivo termico**, che garantisce tempi di intervento inversamente proporzionali al quadrato del valore efficace della sovraccorrente, mentre **per correnti superiori ad un certo valore di soglia  $I_M$  interviene quello elettromagnetico**, che agisce in tempi rapidissimi per le correnti di cortocircuito.

L'ampia variabilità dei parametri di proporzionamento rende questo tipo di protezione **estremamente adattabile**; la possibilità di regolare la soglia  $I_M$  dello sganciatore magnetico aumenta, poi, la flessibilità d'uso.



- **Relè differenziale**

Nella sua versione monofase, questa grandiosa opera ingegneristica è schematizzata dalla seguente figura:



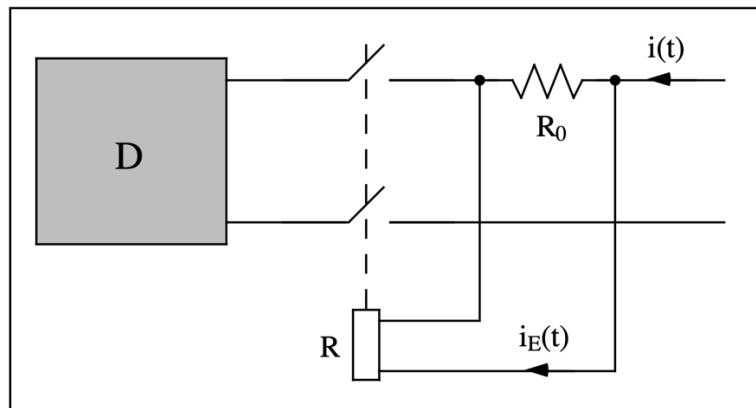
Attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico vengono avvolti in senso contrario due avvolgimenti aventi lo stesso numero di spire  $N_1$ . Nel caso in cui non sia presente alcuna corrente di dispersione nell'impedenza di carico  $\dot{Z}$ , questi due avvolgimenti sono percorsi dalla stessa corrente e non inducono alcun flusso magnetico nel nucleo ferromagnetico (o meglio, i due flussi creati sono opposti e si elidono, essendo gli avvolgimenti contrari). Non appena si manifesta una qualche corrente di dispersione nell'impedenza di carico, si genera nel materiale ferromagnetico un flusso non nullo che, se sufficientemente elevato, può indurre nell'avvolgimento di  $N_2$  spire una tensione sufficiente ad azionare il relè ( $R$ ), capace di provocare l'apertura degli interruttori ed il distacco dell'alimentazione.

Dalle modalità di funzionamento descritte, si può immediatamente concludere che **questo tipo di protezione è funzionante solo in regime sinusoidale**. La caratteristica ideale di intervento, inoltre, è molto simile a quella di un relè elettromagnetico, con la differenza che la corrente di intervento può assumere, in questo caso, valori molto piccoli; ciò **giustifica l'elevata sensibilità di questo dispositivo**.

- **Relè amperometrico**

Il relè elettromagnetico, per come è concepito, svolge la funzione di un relè amperometrico, dal momento in cui la forza di attrazione (e quindi lo sganciatore) dipende dalla corrente di eccitazione;

nel relè in figura è svolto il ruolo di relè a massima corrente: non appena la corrente di comando  $i(t)$  supera un certo valore di soglia, il relè R apre il circuito di alimentazione, scollegando il dispositivo (D). Il resistore  $R_0$  limita solo la corrente di eccitazione del relè.

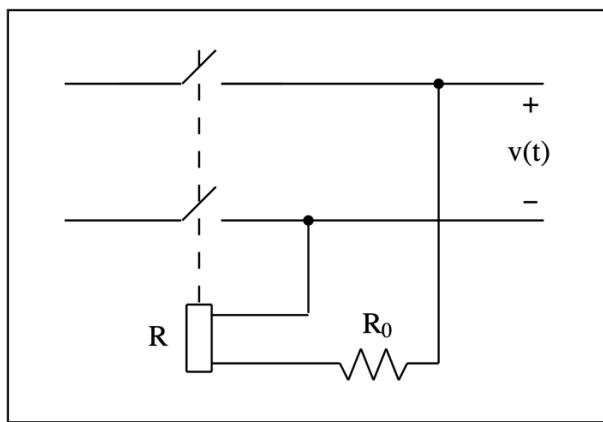


La differenza di potenziale che si instaura ai capi del relè rappresenta un problema molto simile all'autoconsumo degli amperometri.

In maniera del tutto duale, un relè a minima corrente opera non appena la corrente di eccitazione scende al di sotto di una prefissata soglia.

- **Relè voltmetrico**

Un relè elettromagnetico può essere anche usato con successo come dispositivo di protezione a massima tensione; infatti, quando la tensione  $v(t)$  tra i due conduttori supera un certo valore di soglia, la corrente che circola attraverso il relè, opportunamente limitata dal resistore  $R_0$ , provoca l'apertura dei contatti con conseguente disinserimento dell'alimentazione.



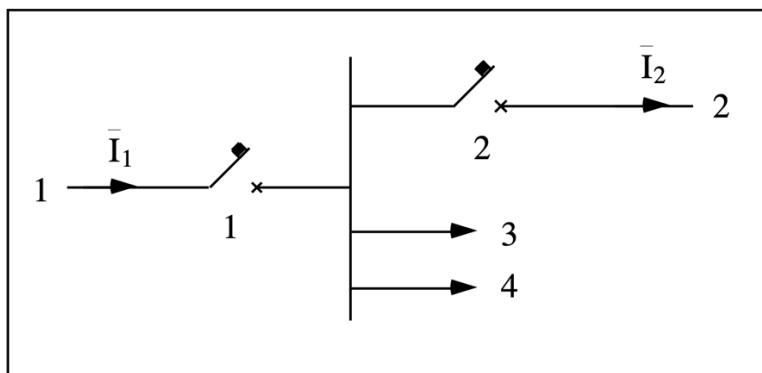
In maniera del tutto duale, un relè a minima tensione scatta non appena la tensione di lavoro scende al di sotto di una prefissata soglia.

- **Relè statico**

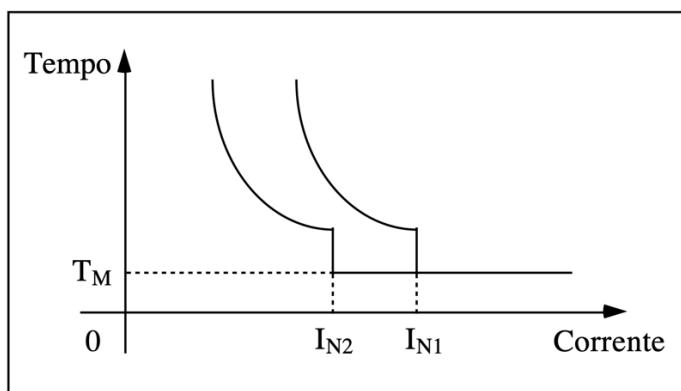
Si tratta di dispositivi elettronici, economici ed affidabili, con caratteristiche simili ai relè già analizzati. I segnali rilevati da opportuni sensori vengono elaborati per via elettronica e l'interruttore meccanico viene, in taluni casi, sostituito con un interruttore a semiconduttore, la cui apertura e chiusura può essere comandata proprio da questi segnali elettronici elaborati.

Questo tipo di protezione sugli interruttori di bassa tensione ha avuto diffusione piuttosto lenta a causa dell'elevato costo rispetto a quello tradizionale; solo negli ultimi decenni l'elettronica digitale in continuo sviluppo ha permesso la riduzione notevole dei costi.

**L'intervento di un interruttore o di un fusibile comporta l'esclusione di tutte le utenze a valle;** pertanto, per mettere fuori servizio il minor numero possibile di linee, i diversi dispositivi di intervento devono essere opportunamente coordinati fra loro. Il CEI definisce la “**selettività in caso di sovraccorrente**” come il **coordinamento delle caratteristiche di due o più dispositivi di protezione tale che, in caso di sovraccorrenti entro limiti stabiliti, il dispositivo inteso per operare entro questi limiti sia l'unico ad intervenire**. Ad esempio:



La protezione viene detta **selettiva** quando un guasto sulla linea 2 determina solo l'intervento dell'interruttore 2 e, con evidente vantaggio per la **continuità di servizio**, la parte rimanente dell'impianto continua ad essere alimentata. Ciò si può realizzare se le caratteristiche di intervento dei due interruttori, supposti di tipo magnetotermico, sono come quelle modellate in precedenza. Sotto queste ipotesi, per una corrente di guasto inferiore a  $I_{N1}$  ma superiori a  $I_{N2}$ , il solo interruttore 2 interviene, mentre nel caso in cui la corrente di guasto è più grande di  $I_{N1}$ , entrambi gli interruttori intervengono e tutta la trasmissione è bloccata.



Particolare cura deve essere posta dal progettista dell'impianto nella scelta delle correnti di soglia: se anche nelle linee derivate circolasse una corrente leggermente inferiore a quella di soglia, per cui i diversi interruttori non intervengono, l'interruttore della linea primaria, attraversata da una corrente pari alla somma delle correnti circolanti nelle diverse linee, non deve intervenire.

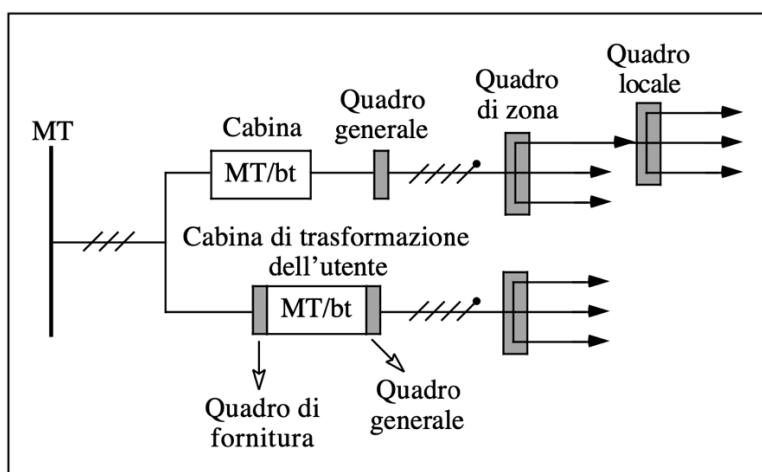
**La protezione contro le sovraccorrenti**, in special modo quelle dovute ai cortocircuiti, è **affidata agli interruttori automatici ed ai fusibili precedentemente discussi**. Per le linee in media tensione è stato detto che, per un'efficace protezione attiva contro le sovratensioni, bisognava usare gli scaricatori. Questi dispositivi, tuttavia, non possono garantire da soli l'integrità delle apparecchiature sia a causa dei “fisiologici” ritardi di intervento e sia per i possibili mancati

**interventi. Quando i dispositivi di protezione attiva perdono la loro efficacia, ci si deve affidare alla protezione passiva**, che consiste nel sovradimensionamento dei componenti al fine di permettere una maggior sopportazione, per intervalli di tempo di durata limitata, di correnti e di tensioni superiori a quelle nominali; ciò significa che le apparecchiature elettriche devono funzionare senza danneggiarsi, non solo in condizioni nominali di regime permanente, ma anche in condizioni transitorie eccezionali. Per verificare l'aderenza a questi principi, in fase di sviluppo di un dispositivo si effettuano diverse prove, di tensione e corrente, atte a verificare la tolleranza di eventuali regimi eccezionali.

## IMPIANTI IN BASSA TENSIONE

L'energia elettrica viene prodotta, poi ne viene alzato il valore efficace per essere trasmessa in alta tensione; in corrispondenza delle città viene abbassata in media tensione per poi giungere agli ambienti domestici o agli utilizzatori generici dopo un ulteriore abbassamento in bassa tensione.

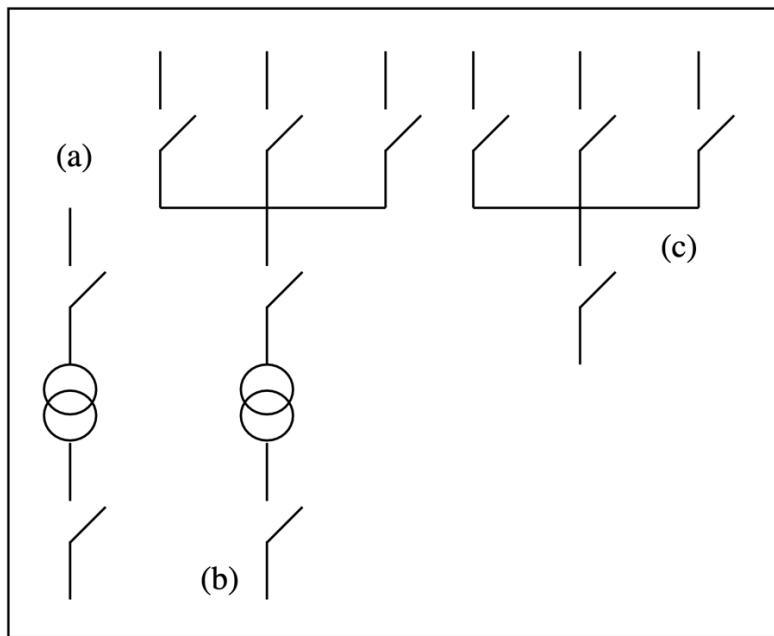
**Il passaggio da MT a BT avviene tramite le cabine di trasformazione** (nello slang cabine elettriche). Nei punti di fornitura, sia in MT che in BT, è situato un quadro elettrico, in cui è presente un interruttore generale ed i contatti di misura dell'energia fornita. Facendo riferimento al seguente schema, si vede che dal punto di fornitura si diramano più linee di zona da cui si dipartono più linee locali che conducono direttamente agli impianti utilizzatori, raggiungendo i singoli apparecchi o le prese a spina. Ancora una volta, nei punti di ramificazione, sono collocati dei quadri elettrici, detti quadri generali, di zona e locali.



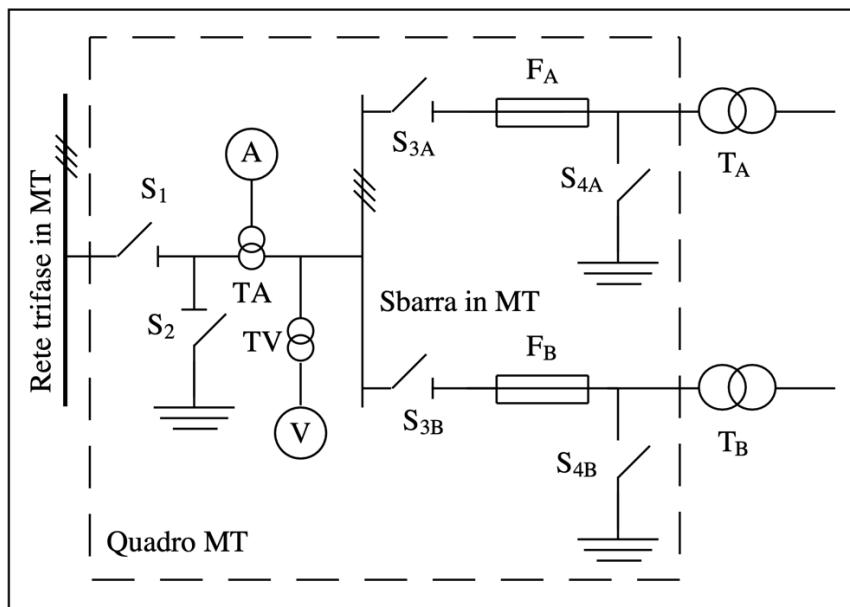
Negli impianti in bassa tensione, oltre agli interruttori, sono presenti i contattori (detti comunemente teleruttori); si tratta di dispositivi di manovra idonei all'apertura ed alla chiusura dei circuiti sotto carico, in presenza di correnti e tensioni con valori prossimi a quelli nominali. Essi non sono, quindi, adatti ad alcuna manovra di cortocircuito ma sono caratterizzati da una grande affidabilità, consentendo un numero elevato di manovre nell'arco della loro vita; infatti, trovano impiego nei circuiti di alimentazione dei motori, delle macchine operatrici e vengono spesso azionati automaticamente mediante circuiti ausiliari che favoriscono una certa rapidità di manovra. A parità di valori nominali, sono più compatti ed economici i contattori rispetto agli interruttori.

**La cabina di distribuzione è quel luogo fisico che connette due linee**, o una in media tensione e l'altra in bassa tensione o entrambe in media tensione, e con la quale è possibile realizzare diverse funzioni, come la trasformazione, la conversione, la regolazione e lo smistamento dell'energia

**elettrica.** Pur soffermandosi solo su cabine di trasformazione (a), tutte le possibili configurazioni di cabina sono descritte nella figura seguente:



Il primo blocco di una cabina di trasformazione è il quadro MT, mostrato qui di seguito:



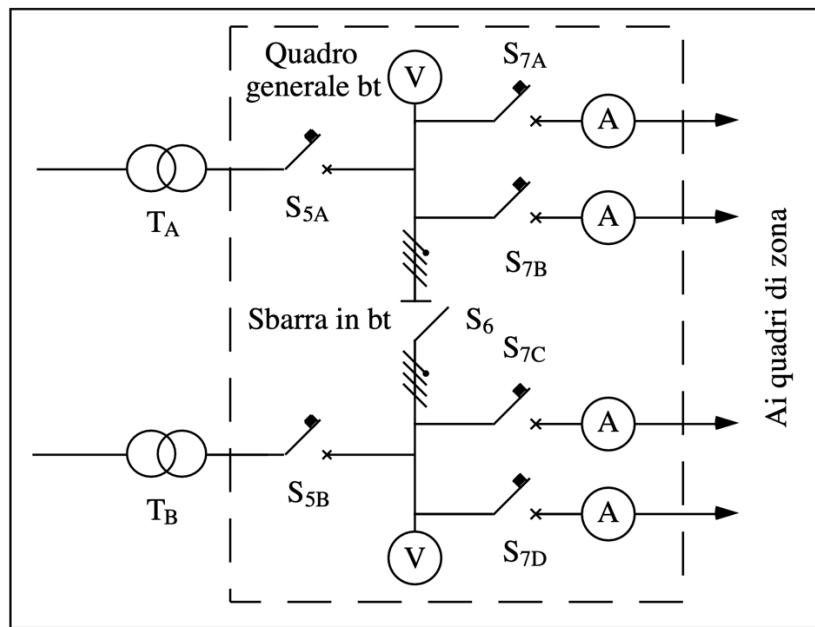
Partendo dalla linea trifase in media tensione, si incontra dapprima il sezionatore tripolare di linea e di terra ( $S_1$  e  $S_2$ ); il primo dei due consente l'apertura evidente del circuito a vuoto, in assenza di corrente, isolando l'intera cabina, mentre il secondo mette a terra in modo evidente la cabina quando è isolata. Si noti che  $S_2$  può chiudere solo se  $S_1$  è aperto e che  $S_1$  può chiudere solo se  $S_2$  è aperto, ovvero sono autoesclusivi.

A valle del secondo sezionatore sono inseriti due trasformatori di misura, un TA e un TV, con i quali è possibile misurare la corrente e la tensione che giunge alla cabina. Sulle tre sbarre in MT vengono collegati i primari dei trasformatori attraverso sezionatori tripolari sotto carico ( $S_{3A}$  e  $S_{3B}$ ), fusibili e sezionatori di terra; i sezionatori  $S_{3A}$  e  $S_{3B}$  svolgono la funzione di collegamento ed esclusione dei due trasformatori e devono essere capaci di interrompere o stabilire la relativa

corrente a vuoto, che può essere parecchie volte più grande di quella nominale, mentre i fusibili  $F_A$  e  $F_B$  servono da protezione contro i cortocircuiti e, infine, i sezionatori di terra  $S_{4A}$  e  $S_{4B}$  permettono la messa a terra per lavori delle linee a valle.

Nel cuore della cabina si trovano i due trasformatori  $T_A$  e  $T_B$ : i secondari di questi dispositivi erogano una bassa tensione e sono collegati a stella, con centro accessibile, in modo tale da poter alimentare sia carichi trifase alla tensione concatenata che carichi monofase alla tensione stellata. I due trasformatori sono collegati in parallelo, quindi sono scelti gemelli, e nel caso di un'installazione in un centro abitato sono tali da rispettare alcuni accorgimenti, al fine di attenuare la propagazione del ronzio che si accompagna al funzionamento della macchina. Tali rumori sono prevalentemente causati dalla cosiddetta "magnetostrizione", ovvero in un cambiamento di forma e dimensione di un materiale ferromagnetico nella direzione del campo di induzione magnetica, qualora quest'ultimo vari nel tempo. La rumorosità di un trasformatore è di tale importanza da esserne normalizzato (norma NEMA) il limite superiore in relazione alla potenza del trasformatore e le modalità da seguire nelle misure di rumorosità.

Il secondo blocco che costituisce una cabina di trasformazione è il quadro BT, mostrato qui di seguito:



Gli interruttori quadripolari automatici ( $S_{5A}$  e  $S_{5B}$ ) sono deputati alla protezione contro i sovraccarichi ed i cortocircuiti, mentre lungo la sbarra di bassa tensione è posto il sezionatore quadripolare di linea ( $S_6$ ), tenuto chiuso quando funziona un solo trasformatore; quando i due trasformatori funzionano simultaneamente,  $S_6$  viene tenuto sempre aperto per limitare la corrente di guasto in caso di cortocircuito a valle dei trasformatori. Le linee quadripolari trifasi o bipolari monofasi alimentano i quadri elettrici di zona e sono protette da un interruttore automatico quadripolare o bipolare con relè magnetotermico o differenziale ( $S_7$ ).

L'eliminazione del calore prodotto dalle perdite dei trasformatori con raffreddamento naturale, collocati in locali chiusi adibiti a cabine di trasformazione, richiede un ricambio di aria tale che la temperatura ambiente (e quindi quella delle varie componenti dei trasformatori) sia compatibile con le relative norme CEI. Pertanto, la ventilazione delle cabine è di grande importanza per la vita dei trasformatori, che molto spesso sono soggetti a guasti per l'eccessiva temperatura raggiunta a causa di un'insufficiente circolazione di aria.

Inoltre, **una cabina di trasformazione dispone di un proprio impianto di terra che svolge diverse funzioni:** il dispersore è spesso costituito da una rete metallica interrata sotto la cabina o da un anello interrato che la circonda, mentre tra l'impianto stesso e ciascuna fase di media tensione vengono spesso inseriti scaricatori per proteggere l'intero impianto da eventuali sovratensioni di manovra o di fulminazioni. A ciò bisogna aggiungere anche il fatto che **una cabina deve essere dotata di un insieme di accessori ed accorgimenti tesi a garantire l'incolumità del personale addetto;** in particolare:

- Illuminazione ordinaria e di emergenza;
- Sistemi di estinzione del fuoco;
- Lo schema elettrico della cabina;
- Segnaletica ammonitrice;
- Segnaletica infortunistica;
- Pedane isolanti;
- Guanti isolanti;
- Fioretto isolante.

Infine, le cabine sono da intendersi come “ambienti a maggior rischio in caso di incendio”; pertanto, è necessario adottare dei provvedimenti per evitare che possa determinarsi l’incendio e propagarsi una volta formato, scegliendo dispositivi senza pericolo di innesco o di propagazione per i materiali adiacenti.

Si vuole concludere la trattazione delle cabine con un piccolo cenno alle cabine da palo, attrezzate con un trasformatore di potenza non superiore ai 100kVA ed utilizzate per l’alimentazione di reti rurali di bassa tensione, di cantieri edili stradali/agricoli o di elettropompe.

Come si è potuto intuire, i quadri elettrici sono veri e propri contenitori in cui arrivano e da cui partono le linee elettriche e in cui trovano posto vari dispositivi di protezione, di manovra e di misura. Ogni tratto di linea elettrica in partenza, in particolare, è protetto da un interruttore automatico multipolare per tutti i conduttori di fase ed eventualmente per il neutro. In MT, i quadri, che tipicamente contengono interruttori automatici, fusibili, sezionatori, trasformatori di misura e strumentazione varia, differiscono da quelli in BT per il maggior peso e le maggiori dimensioni, dato che al crescere della tensione crescono anche le distanze tra i vari elementi in tensione e tra questi e la massa. In BT, i quadri contengono interruttori automatici, fusibili, sezionatori, strumenti di misura ed apparecchiature di manovra di vario tipo (come i contattori); in particolare, si distinguono quadri generali, dimensionati per correnti nominali fino a 3kA, quadri di zona, dimensionati per correnti nominali fino a 700A e i quadretti locali/per abitazione, dimensionati per correnti nominali fino a 60A.

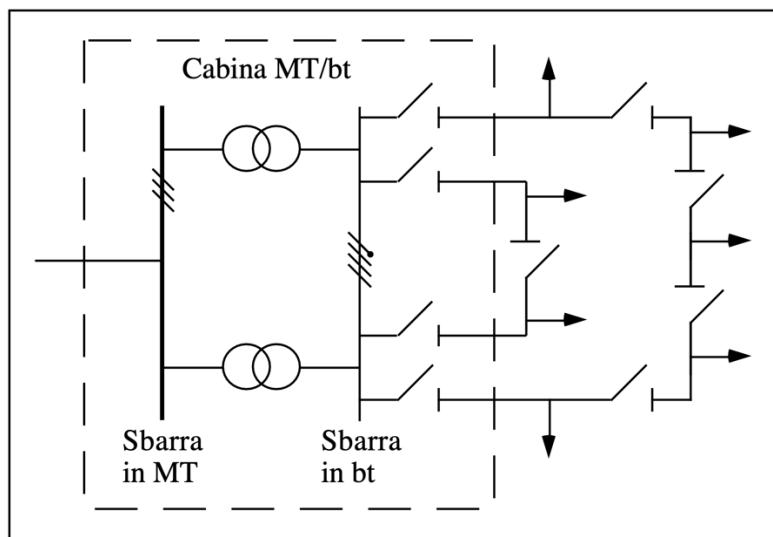
## TIPOLOGIE DEGLI IMPIANTI UTILIZZATORI

Facendo riferimento alle norme CEI, per impianto utilizzatore (o rete di distribuzione interna) si intende l’insieme dei circuiti di alimentazione, degli apparecchi utilizzatori e delle prese a spina (comprese le relative apparecchiature di manovra, sezionamento, interruzione e protezione) che stanno a valle di un punto di fornitura. Tra i vari tipi di impianti utilizzatori si distinguono:

- Grandi utenze industriali

I grandi impianti industriali **richiedono una fornitura di potenza elettrica superiore a 200kW**, la quale avviene direttamente in media tensione; la cabina, in questi casi, viene posta (per quanto possibile) nel **baricentro elettrico dei carichi** (inteso come la media ponderata dalla potenza dei carichi in relazione alla loro posizione). Nel caso in cui fossero richieste potenze più elevate, si possono utilizzare più cabine posizionate in base alle dimensioni dell'edificio ed alla dislocazione dei carichi.

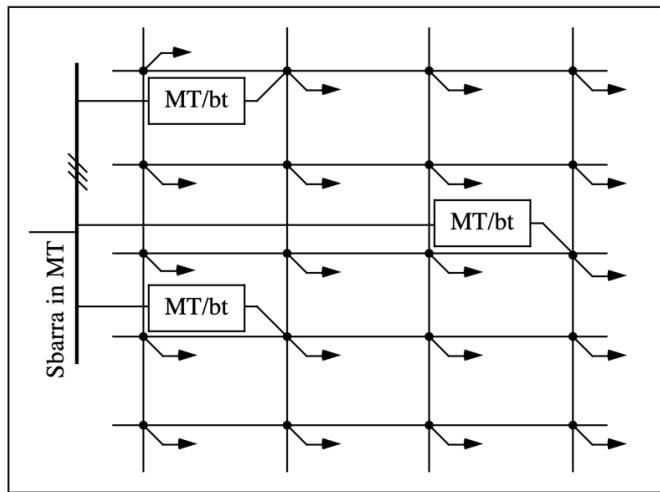
Nel progetto di un grande impianto industriale sono da tenere sempre in considerazione al continuità del servizio e la flessibilità; la prima garantisce che gli apparecchi utilizzatori possano funzionare in maniera interrotta, mentre la seconda consente di riconfigurare facilmente l'impianto ogni volta si presenta la necessità di cambiare qualche utilizzatore. Una struttura che garantisce un'elevata continuità del servizio è quella **ad anello**:



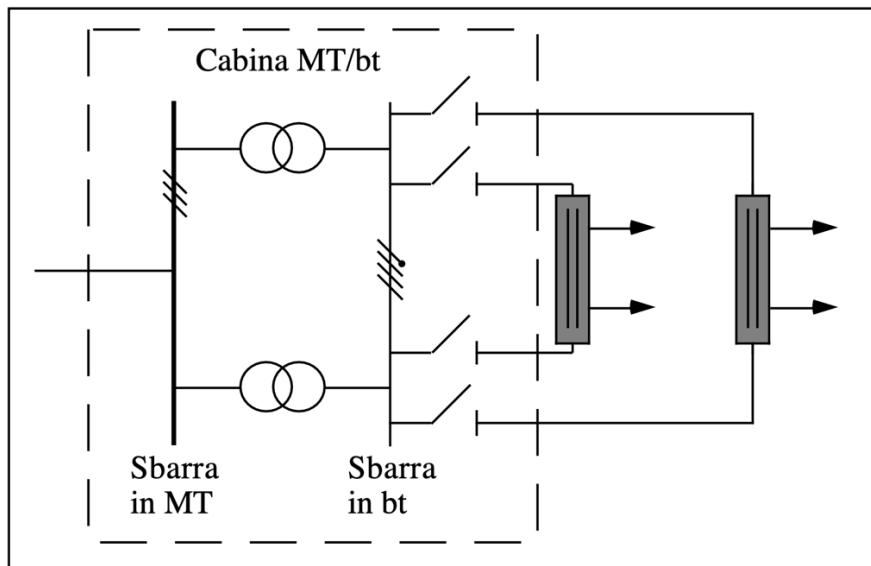
Per semplicità, sono stati omessi tutti gli apparecchi di protezione e manovra, tranne i sezionatori tra i carichi che svolgono la funzione di isolare la parte di linea soggetta ad un guasto senza togliere l'alimentazione agli altri carichi; ovviamente, anche l'intervento dei dispositivi di protezione deve essere selettivo, in maniera tale da sezionare la sola parte di circuito interessato dal guasto.

Una variante della struttura ad anello può prevedere una separazione tra la parte industriale e telecomunicativa dell'industria: sulla prima viene mandato un segnale elettrico non necessariamente pulito e armonico ma ad elevata potenza, dal momento in cui l'unico obiettivo di questa fornitura è far funzionare apparecchiatura industriale, mentre sulla seconda può arrivare minor potenza ma il segnale deve essere pulito per evitare che le apparecchiature informatiche possano essere danneggiate e per permettere una comunicazione delle informazioni più pulita possibile; quest'ultima parte dell'impianto può essere adibita, ad esempio, alla gestione della segreteria o a tutti i reparti più vicini al terzo settore che al secondo.

Un'altra soluzione, che offre una maggior affidabilità, è costituita da una **rete magliata**, che rispetta anche i requisiti di flessibilità, ed è illustrata di seguito. In ciascun nodo della maglia sono inseriti i **dispositivi di protezione e sezionamento** (non specificati nella figura per una questione di semplicità), mentre nel ramo proveniente dalle cabine la protezione è sempre assicurata da un **interruttore automatico**.



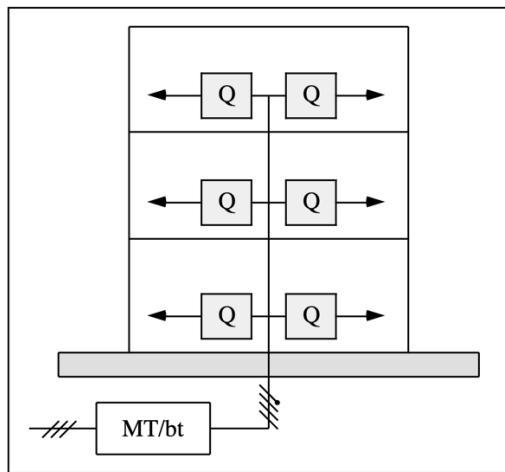
Un’ulteriore soluzione consiste nell’**utilizzo delle blindosbarre**, perlopiù quando in un reparto è previsto l’impiego di apparecchi di potenza non troppo elevate. Un sistema con blindosbarre è schematizzato come segue:



- **Grandi utenze civili**

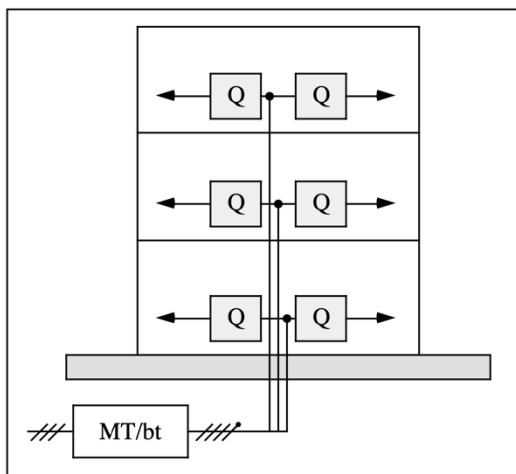
Ci sono situazioni, come quelle scolastiche, universitarie o ospedaliere, in cui il sistema richiede molta potenza (sempre inferiore ai 200kW); dato il grande sviluppo orizzontale e/o verticale di questi ambienti, **conviene posizionare un quadro Q per ogni piano/sezione della struttura**, ognuno dei quali deve essere alimentato direttamente dalle linee che partono dalla cabina elettrica. Per distribuire l’energia elettrica su ogni piano possono essere impiegate diverse soluzioni:

- **Unica linea montante**



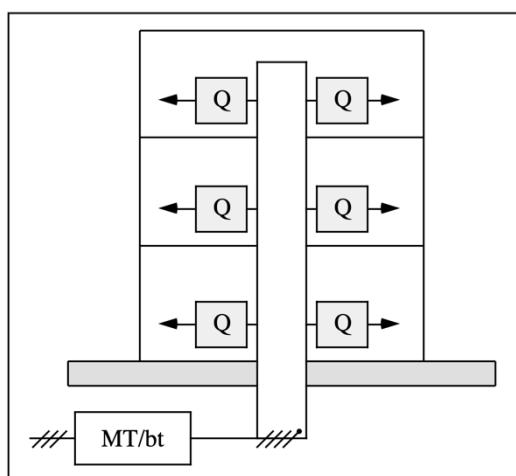
È una soluzione molto semplice, impiegata generalmente quando bisogna alimentare un’utenza piuttosto piccola.

- **Più linee montanti**



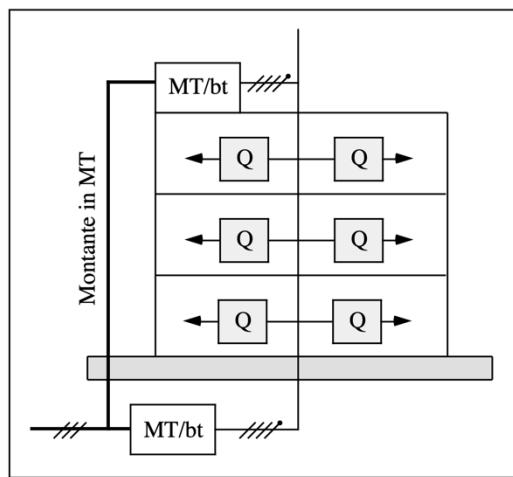
Soluzione molto simile alla precedente, con la possibilità di alimentare carichi di potenza più elevati e con una maggiore garanzia di continuità del servizio e di selettività delle protezioni.

- **Anello sezionabile**



L'anello di questa configurazione può essere sezionabile sia in cabina che in un punto superiore (non riportato nella figura); il vantaggio fondamentale risiede nell'alimentazione con metà dell'anello in caso di guasto.

- **Doppia cabina**



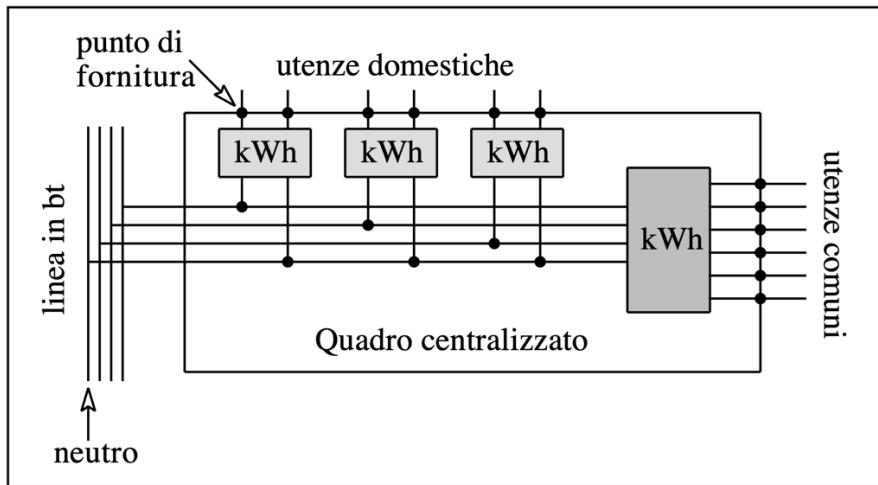
Quando l'estensione verticale dell'edificio è importante ed è necessario alimentare ad elevata potenza anche i carichi ai piani superiori, è comodo e conveniente l'impiego di una seconda cabina (e quindi un montante in media tensione).

- **Piccole utenze**

Per utenze che richiedono una modesta potenza, **l'energia elettrica viene fornita direttamente in bassa tensione**; in particolare, per utenze commerciali (leggermente più grandi rispetto ad un ambiente domestico) l'alimentazione viene realizzata con un unico cavo quadripolare con tensione concatenata di 400V, mentre per utenze domestiche o piccoli negozi si adotta la fornitura monofase a 230V con cavo bipolare (derivato tra una fase ed il neutro) in modo tale che il carico complessivo risulti quanto più possibile bilanciato. **Si vuole adesso approfondire il caso più generale in cui l'alimentazione è fornita ad un agglomerato domestico:**

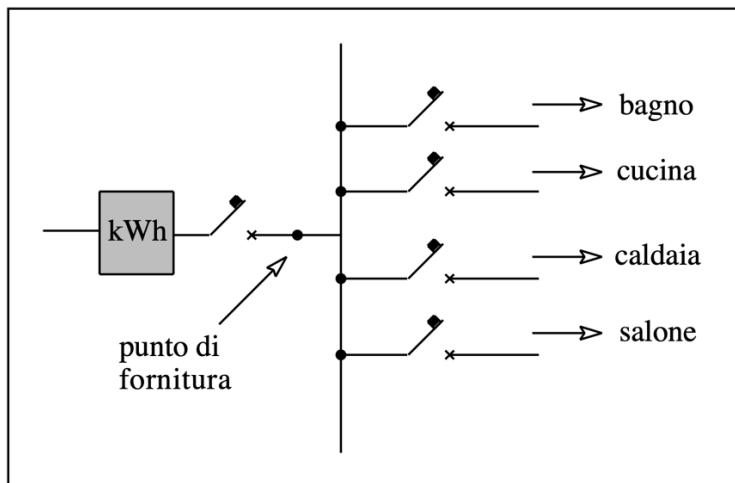
- **Distribuzione al complesso di piccole utenze**

In un condominio o in un centro commerciale **si possono trovare sia le utenze individuali** (alimentate per mezzo di un cavo bipolare contenente un conduttore di fase ed un neutro) **sia utenze in comune**; se queste ultime richiedessero un'elevata potenza, **la fornitura avverrebbe in MT e oltre alla cabina dell'ente erogatore si troverebbe quella che alimenterebbe le piccole utenze**. In situazioni di questo tipo è solito anche installare **un quadro centralizzato nel quale l'ente erogatore provvede ad installare i diversi contatori**, protetti da un interruttore automatico magnetotermico (non riportato in figura), a valle del quale è posto il punto di fornitura.



**Il singolo utente è poi collegato a questo quadro per mezzo di una linea in cavo, al termine della quale è installato il tipico quadretto per abitazioni; all'estremità di questa linea, l'utente deve installare (per questioni di sicurezza) un relè differenziale.**

- **Distribuzione interna alle piccole utenze**



**Dal quadro locale si dipartono le linee che distribuiscono l'energia nei diversi ambienti del locale, protetti da interruttori del tipo specificato dalle norme CEI in funzione del luogo di destinazione. I cavi vanno posati in tubazioni di PVC corrugato realizzate sotto traccia (affogate nell'intonaco) o in pannelli prefabbricati; in ogni caso, i percorsi saranno sempre orizzontali o verticali, mai obliqui, e non verranno mai messi nelle stesse tubazioni linee di potenza in BT e linee di segnale (radiotelevisivo o telefoniche).**

## PROTEZIONI E SORGENTI DI CAMPO IN AMBIENTE DOMESTICO

**Un primo accorgimento contro sovraccorrenti e sovratensioni è il dimensionamento dei cavi;** infatti, a causa della corrente che vi circola, **un cavo elettrico di resistenza  $R$  aumenta la propria temperatura dissipando, per effetto Joule nell'ambiente circostante, una potenza pari a:**

$$P_{ASS} = RI^2$$

Poiché i cavi non devono comportarsi come fusibili, l'aumento di temperatura corrispondente deve essere compatibile con la sezione del conduttore e con il tipo di isolante utilizzato. In particolare, sarà la sezione che andrà ad essere dimensionata: essendo la resistenza dipendente dalla temperatura, ma anche dalla resistività, dalla lunghezza e dalla sezione, si può ben intuire come un cavo a sezione maggiore sia l'unico dimensionamento possibile alla riduzione del calore dissipato; infatti, non si può intervenire sulla lunghezza né sulla resistività e per diminuire la resistenza di un cavo si può solo allargare la sua sezione.

Anche gli isolanti utilizzati per il rivestimento dei cavi dovranno essere tali da sopportare le temperature massime previste, senza però alcuna compromissione delle relative proprietà isolanti e meccaniche; in particolare, è importante andare a considerare la “durata dell’isolante”, ovvero il tempo che l’isolante impiega per deteriorarsi se sottoposto ad un determinate stress termico, e la “massima temperatura di servizio”, ovvero la temperatura che non deve mai essere superata per poter assicurare una ragionevole durata di vita dell’isolante.

Un conduttore ed un isolante, a regime, hanno la stessa temperatura di funzionamento; appare chiaro che, a seconda dell’isolante utilizzato, bisogna calcolare le dimensioni della sezione ( $\pi r^2$ ) del conduttore di lunghezza  $L$  in modo tale da garantire la massima durata dell’isolante per una data corrente. Si può anche partire da una massima durata di vita e ricavarne la portata del cavo per una data sezione; in entrambi i casi, l’equazione che restituisce il dimensionamento è la seguente:

$$\frac{\rho L}{\pi r^2} I_P^2 = 2\pi r \cdot \delta(T_S - T_A)$$

Con  $\rho$  resistività del conduttore,  $\delta$  conducibilità termica fra il conduttore e l’ambiente, supposti a temperatura, rispettivamente,  $T_S$  e  $T_A$ . La tabella che segue riporta la portata in regime permanente, per numero di conduttori, di cavi unipolari o multipolari, in tubi o sotto modanature, isolati in PVC:

<b>Sezione nominale dei conduttori (mm<sup>2</sup>)</b>	<b>Portata (A) (4 conduttori)</b>	<b>Portata (A) (3 conduttori)</b>	<b>Portata (A) (2 conduttori)</b>
1	10.5	12	13.5
1.5	14	15.5	17.5
2.5	19	21	24
4	25	28	32
6	32	36	41
10	44	50	57
16	59	68	76
25	75	89	101
35	97	111	125
50	-	134	151

Quella che segue invece, è la tabella omonima relativa agli isolamenti in gomma o polietilene reticolato:

Sezione nominale dei conduttori (mm <sup>2</sup> )	Portata (A) (4 conduttori)	Portata (A) (3 conduttori)	Portata (A) (2 conduttori)
1	15	17	19
1.5	19.5	22	24
2.5	26	30	33
4	35	40	45
6	46	52	58
10	63	71	80
16	85	96	107
25	112	127	142
35	138	157	175
50	168	190	212

Determinato il dimensionamento del cavo e dell'isolante in condizioni di regime, si analizzi ora il loro comportamento quando sottoposti a sovraccorrenti. **Una sovraccorrente**, come si è già avuto modo di vedere, è una corrente di valore superiore alla portata nominale del cavo in esame. In condizioni normali, il cavo è percorso da una corrente che lo porta alla massima temperatura di servizio; tuttavia, nel caso di una sovraccorrente, questa temperatura aumenterebbe e, se l'anomalia perdurasse a lungo, si stabilizzerebbe su un nuovo valore, più elevato. La nuova sollecitazione termica indurrà nell'isolante e nel cavo una perdita di vita, accettabile secondo le norme fino al 10%.

I dispositivi di sicurezza che proteggono l'impianto dalle sovraccorrenti devono anche assicurare le massime prestazioni e la continuità di servizio al limite delle capacità nominali; occorre, dunque, dimensionare in maniera adeguata anche le protezioni, sulla base delle correnti nominali di intervento, le quali devono essere maggiori (al più uguali) a quelle di impiego del circuito.

Portata del cavo (A)	Fusibili (norma CEI 32 - 1): corrente nominale massima	Interruttori automatici (norma CEI 23 - 3): corrente nominale massima
10.5	8	10
14	10	14
19	12	15
25	20	25

La tabella riporta alcuni valori di portata di cavi unipolari in rame, isolati in PVC, posati in tubi o sotto modanature, e delle relative protezioni contro sovraccarico, realizzate utilizzando fusibili o interruttori automatici.

Praticamente, un cortocircuito è una situazione anomale che occorre quando due punti di un circuito a diverso potenziale entrano in contatto con un'impedenza trascurabile. La corrente di cortocircuito corrispondente è essenzialmente composta da due termini: un termine simmetrico, risultante nelle nuove condizioni di funzionamento, ed un termine asimmetrico decrescente in modo esponenziale, dovuto alla presenza di induttanze nel circuito. Viene definita corrente presunta di cortocircuito in un punto dell'impianto la corrente causata da un cortocircuito, considerando il dispositivo di protezione di impedenza trascurabile.

Per prevenire eventuali effetti devastanti, i dispositivi di sicurezza impiegati devono essere in grado di aprire il circuito ed interrompere il passaggio di corrente; per qualsiasi dispositivo (fusibile o interruttore), è necessario garantire sia l'apertura del circuito per valori di corrente maggiori di quella nominale di intervento, sia la protezione degli apparecchi e dei conduttori a valle del dispositivo di protezione. Così come per le sovraccorrenti, anche in occasione del cortocircuito deve essere garantita la continuità del servizio (quindi corrente nominale maggiore o uguale a quella massima di esercizio); inoltre, i dispositivi usati devono avere il cosiddetto “potere di interruzione”, non inferiore alla corrente presunta di cortocircuito nel punto in cui sono installati.

Quando un dispositivo di protezione a massima corrente, come un fusibile, entra in funzione durante un cortocircuito, si crea un arco tra i contatti; per questa evenienza sono state messe a punto delle tecniche con le quali si è in grado di frazionare e raffreddare l'arco, in modo da aumentare la tensione ai suoi capi e diminuire la corrente di cortocircuito.

**Negli ambienti domestici, numerosi oggetti di uso quotidiano alimentati da energia elettrica, quando in uso, generano un campo elettrico e un campo magnetico.** Mentre l'esposizione al campo elettrico, anche in prossimità del dispositivo, non raggiunge mai elevate intensità, non si può dire altrettanto del campo magnetico, soprattutto per gli apparecchi ad elevata potenza e caratterizzati da un alto assorbimento di corrente. Senza entrare troppo nei dettagli, basti sapere che **le apparecchiature che generano campi magnetici di elevata intensità sono quelli in cui vi sono elementi di riscaldamento a resistenza** (come asciugacapelli, rasoio elettrici o tostapane) e **quegli in cui sono presenti motori ad elevata potenza** (e quindi con un elevato assorbimento di corrente); con la grande quantità di dispositivi di questo tipo, **si è paradossalmente soggetti ad un maggiore campo elettrico dentro le abitazioni che fuori**, dove possono esserci anche elettrodotti ad alta tensione.

È stato già evidenziato come **l'intensità del campo magnetico si riduce all'aumentare della distanza dalla sorgente**; di seguito sono elencati i valori dell'induzione magnetica (campo B, misurato in milionesimi di Tesla), a distanze di 3cm, 30cm e 1m e per una frequenza di 50Hz, per diversi elettrodomestici (tenendo in considerazione che questi valori possono cambiare in relazione alle tecniche costruttive del dispositivo):

<b>Asciugacapelli</b>	$(8 \div 2500) \mu\text{T}$	$(0.01 \div 1) \mu\text{T}$	$(0.005 \div 0.01) \mu\text{T}$
<b>Aspirapolvere</b>	$(200 \div 800) \mu\text{T}$	$(2 \div 20) \mu\text{T}$	$(0.13 \div 2) \mu\text{T}$
<b>Forno a microonde</b>	$(75 \div 200) \mu\text{T}$	$(4 \div 8) \mu\text{T}$	$(0.25 \div 0.6) \mu\text{T}$
<b>Forno elettrico</b>	$(1 \div 50) \mu\text{T}$	$(0.15 \div 0.5) \mu\text{T}$	$(0.04 \div 0.01) \mu\text{T}$
<b>Frullatore</b>	$(60 \div 700) \mu\text{T}$	$10 \mu\text{T}$	$(0.01 \div 0.15) \mu\text{T}$
<b>Lavatrice</b>	$(0.8 \div 50) \mu\text{T}$	$(0.15 \div 0.3) \mu\text{T}$	$(0.1 \div 0.15) \mu\text{T}$
<b>Rasoio elettrico</b>	$(15 \div 1500) \mu\text{T}$	$(7 \div 9) \mu\text{T}$	$(0.1 \div 0.3) \mu\text{T}$
<b>Tostapane</b>	$(7 \div 18) \mu\text{T}$	$(0.06 \div 0.7) \mu\text{T}$	$< 0.01 \mu\text{T}$

Si vuole concludere il capitolo e la trattazione delle linee in bassa tensione con un piccolo cenno alla **tariffazione dell'energia elettrica**. L'assorbimento di potenza con un basso fattore di potenza rappresenta un onere per le società distributrici dell'energia elettrica che, per legge, sono obbligate a tariffare diversamente per il “chilowattora” assorbito con basso o con alto fattore di potenza. In Italia, il costo (C) dell'energia elettrica assorbita dall'impianto (definito normalmente

come consumo mensile o bimestrale) può essere conteggiato secondo la **tariffa binomia** o a consumo libero. La tariffa binomia corrisponde alla relazione:

$$C = AP + BU$$

Dove **P** è la **potenza contrattuale**, misurata in chilowatt, **U** è l'**energia assorbita**, misurata in chilowatt/ora, **A** (Euro/kW) e **B** (Euro/kWh) sono i cosiddetti **parametri unitari**; il **costo unitario dell'energia** è rappresentato da **B** e varia in relazione alla **potenza contrattuale**, diminuendo quando questa cresce. I due addendi della tariffa binomia tengono conto, il primo (**AP**) dell'**entità della potenza impiegata** dall'utente indipendentemente dal consumo, il secondo (**BU**) dell'**entità dell'energia elettrica realmente fornita all'utente**. A questi due, si aggiunge anche un'**eventuale penalità ( $\Delta C$ )**, adottata per il basso fattore di potenza e che viene calcolata in base allo scarto tra il fattore di potenza minimo consentito (0.8 ad esempio) e il fattore di potenza effettivamente utilizzato:

$$\Delta C = (0.8 - \cos \varphi)BU$$

Infine, la tariffa a consumo libero conteggia unicamente l'**energia assorbita**, non tenendo conto della **potenza impegnata**; questo tipo di tariffazione è consentita solo per piccole potenze installate (dove il termine **AP** è trascurabile) e per consumi mensili non elevati.

## PRINCIPI INTRODUTTIVI DI SICUREZZA ELETTRICA

Per **sicurezza** si intende, dal punto di vista etimologico, la **condizione di ciò che è sicuro ed esente da pericoli**; nella trattazione seguente, lo scopo non sarà la ricerca della **sicurezza assoluta**, quanto più l'**ottenimento di un accettabile livello di sicurezza in relazione all'attività svolta, alle persone coinvolte e all'entità del danno probabile**. In qualsiasi impianto elettrico, al momento della progettazione delle misure di sicurezza relative ad un punto della rete è **necessario determinare se l'individuo a contatto con quella parte dell'impianto sia personale addestrato o personale non addestrato**; la differenza tra le due classificazioni è abissale: il **personale addestrato**, come suggerisce il nome, è in possesso delle conoscenze, delle competenze e delle abilità necessarie a districarsi in sicurezza in un impianto e le relative misure di sicurezza possono essere rilassate in favore di una maggior prestazione, mentre quando a contatto con l'impianto deve venire del **personale non addestrato** è necessario stringere queste misure e preferire la **prevenzione degli incidenti**.

Si consideri un insieme di **N apparecchi**, funzionanti nelle medesime condizioni di tensione, temperatura, ecc... e si indichi con  **$g(t)$**  l'**insieme di questi apparecchi che presentino un certo guasto dopo un tempo  $t$** . Quando si parla di pericolo si intende **una circostanza oppure una situazione da cui si teme derivi grave danno**; nell'ambito di questa trattazione, si definirà il **pericolo  $P(t)$**  come la **probabilità che si verifichi un evento di questo tipo dopo un tempo  $t$** :

$$P(t) = \frac{g(t)}{N}$$

Essendo una probabilità (PDF), questa funzione assumerà funzioni compresi tra 0 e 1 e il suo complementare rispetto all'unità, la grandezza  **$S(t)$** , rappresenterà la **sicurezza rispetto al guasto dopo un tempo  $t$** :

$$S(t) = 1 - P(t) = \frac{N - g(t)}{N} = \frac{n(t)}{N}$$

**$n(t)$**  rappresenta il numero di dispositivi non guastati dopo il tempo  $t$ . Non va confusa la sicurezza con l'affidabilità; quest'ultima è la probabilità che un apparecchio non presenti difetti o guasti durante un certo tempo prestabilito di funzionamento. L'affidabilità include, dunque, tutti i guasti che possono pregiudicare la prestazione dell'apparecchiatura, mentre la sicurezza si riferisce solo a quelli in grado di pregiudicarla.

In questa ottica, si può definire una grandezza che specifica la bontà di un'apparecchiatura in termini di affidabilità, il **tasso di guasto**. Per tasso di guasto  $\lambda$  si intende il rapporto tra gli oggetti guastati nell'unità di tempo ed il numero di quelli sopravvissuti. Supponendo il tasso di guasto costante, si può verificare agevolmente che:

$$S(t) = \frac{n(t)}{N} = e^{-\lambda t}$$

Si può quindi intuire che la sicurezza di un sistema o di un'apparecchiatura diminuisce esponenzialmente all'aumentare del tempo di esposizione al pericolo e che tende a zero per tempi elevati, nonostante  $\lambda$  possa assumere valori molto piccoli. Si dice anche che si ha “sicurezza zero” quando non si deve attendere un guasto per il verificarsi di una situazione sfavorevole per le persone (in tal caso  $\lambda \rightarrow +\infty$ ).

Non sempre un evento sfavorevole corrisponde ad un danno; ciò vuol dire che anche il danno ha una certa probabilità di verificarsi. Pertanto, si definiscono:

- **Rischio**, inteso come la probabilità che sia raggiunto il livello potenziale di danno nelle condizioni di impiego, ovvero di esposizione, di un determinato fattore;
- **Fattore di rischio**, è un qualsiasi agente fisico, chimico, biologico o umano presente nell'ambiente di lavoro in grado di causare un danno al lavoratore.

La definizione è ambigua e poco utile; in realtà, al verificarsi di un evento di rischio non necessariamente segue un danno e se questo si verifica, la sua entità non è relazionata all'evento di rischio se non come causa scatenante. La definizione riportata non dice in che misura rischio e possibile danno conseguente siano correlati; pertanto, per fare chiarezza almeno in termini matematici, detta  $d$  l'entità del danno e  $k$  la probabilità che si verifichi, si intende con rischio il prodotto:

$$r(t) = P(t)kd = (1 - S(t))kd$$

Laddove  **$kd$**  viene detto danno probabile. Nel determinare la sicurezza globale di un sistema vanno distinte le **configurazioni in serie e in parallelo**: per le prime il tasso di guasto complessivo è pari alla somma dei singoli tassi di guasto, per cui la sicurezza risultante è minore della sicurezza del componente meno sicuro; nel secondo caso, invece, la sicurezza aumenta con il numero di componenti ed è maggiore della sicurezza del componente più sicuro.

Le origini di un danno sono molteplici, cause di forza maggiore, incidenti di natura sconosciuta o non prevedibili, il caso fortuito e così via. È necessario, quindi, definire un “livello di sicurezza accettabile”, senza cadere nell'assurdo di volerlo ridurre a zero; la ricerca di questo livello è un compromesso tra economia e sicurezza, che si può ottenere considerando tutti i parametri che concorrono al buon funzionamento di un impianto o di un'apparecchiatura.

**Tutte le misure che contribuiscono al miglioramento della sicurezza di un sistema comportano un costo da parte di chi deve provvedere a tali misure e, teoricamente, è richiesto un costo infinito per raggiungere il valore  $S(t) = 1$ .** È ovvio, allora, che **si deve stabilire un criterio di massimo costo o di minima sicurezza accettabile** per poter adottare le necessarie misure di protezione; la via normalmente adottata è quella di **mettere a confronto l'andamento di sicurezza per unità di costo**: considerata la curva che collega queste due grandezze, quando l'**incremento di sicurezza risulta irrisorio all'investimento di capitale si è raggiunto il punto voluto**.

**In Italia si verificano circa 400 infortuni elettrici mortali all'anno**, la maggior parte dei quali di natura domestica (spesso nel bagno), e sono il 5% degli incidenti elettrici (contro lo 0.2% degli incidenti non elettrici). In realtà, **l'ente che raccoglie i dati, l'INAIL, non è in grado di determinare il numero totale di incidenti elettrici perché spesso sfuggono alle attente analisi effettuate sul campo**; basti pensare alla caduta da una scala provocata dallo spavento di una piccola scossa quando si cambiano le lampadine, o ad autopsie che non sono riuscite a rilevare il passaggio della corrente. In generale, però, **la causa di questa disattenzione è la mancanza di una vera cultura della sicurezza elettrica in Italia**, in cui si sottovalutano spesso molti fattori di rischio che richiederebbero una piccola attenzione aggiuntiva.

Sin dal XVIII secolo, **l'essere umano ha studiato con attenzione gli effetti dell'elettricità sul corpo umano**, basti pensare agli esperimenti di Luigi Galvani sulle rane; nel tempo ci si è sempre più interessati a questa tipologia di studi, tanto da consentire la nascita di una apposita disciplina scientifica: **l'Elettrofisiopatologia**. Senza scendere nei dettagli, si sappia che **le cellule del corpo umano sono circondate da una soluzione salina conduttrice**, composta prevalentemente da ioni di **potassio, sodio e cloro**, in diverse concentrazioni rispetto a quella del citoplasma; questa differenza di concentrazione fa sì che tra citoplasma e ambiente esterno si instauri una differenza di potenziale approssimativamente pari a -70mV. La membrana cellulare si comporta come un **condensatore**, che mantiene separate delle cariche elettriche differenti; tuttavia, **non essendo un perfetto isolante, viene attraversata da un certo numero di ioni e, quindi, presenta una certa resistenza elettrica**. Di conseguenza, **il modello elettrico di una cellula umana prevede un condensatore, un resistore variabile e un generatore di tensione**.

È noto che **il passaggio di una corrente elettrica attraverso gli organi del corpo umano può alterare le funzioni vitali fino a provocare danni irreparabili**; il livello di pericolosità dipende da numerosi fattori, quali il percorso della corrente, le sua intensità, frequenza e forma d'onda e, più importante di tutti, la durata del contatto. **I principali effetti prodotti dal passaggio di una corrente elettrica, sia continua che alternata, nel corpo umano sono:**

- **Tetanizzazione**

Consiste nella contrazione involontaria dei muscoli interessati dal passaggio di corrente, non più comandati dagli impulsi elettrici fisiologici. I tessuti muscolari interessati vengono sottoposti a continui stimoli irregolari, restando quindi bloccati in uno stato di contrazione permanente; di conseguenza, il malcapitato che tocchi accidentalmente un oggetto in tensione, si troverà nell'impossibilità di lasciarlo. Il più grande valore di corrente (o tensione) per il quale una persona può ancora lasciare la presa usando direttamente i propri muscoli è detta corrente (o tensione) di rilascio.

- **Arresto della respirazione**

Occorre quando le correnti superano il loro valore di rilascio e il contatto è perdurato nel tempo, e può causare la morte per soffocazione o subire le conseguenze di traumi dovuti all'asfissia. La causa di questo fenomeno va ricercata nei muscoli addetti alla respirazione e nella paralisi dei centri nervosi

da cui dipende tale funzione. Il tempo di intervento, che per la tetanizzazione era sufficientemente limitato, in questo caso si riduce a 2 o 3 minuti, oltre i quali si rischia sempre di più di incontrare i problemi appena elencati.

- **Fibrillazione ventricolare**

Occorre per tensioni sinusoidali sufficientemente elevate, maggiori di 50mA a frequenza industriale, che interessino la regione toracica e possono provocare la perdita del coordinamento dei muscoli cardiaci, i quali iniziano a pulsare in maniera scoordinata. I muscoli del cuore, infatti, si contraggono (sistole) e si espandono (diastole) ad un ritmo di circa 60/100 volte al minuto mediante stimolazione elettrica da parte del sistema nervoso autonomo; quando la corrente che stimola i muscoli cardiaci è troppo elevata, la sincronizzazione e il coordinamento vengono a mancare (il cuore si muove non più ritmicamente ma come un sacchetto di vermi) e, a meno che non vengano ripristinati i ritmi normali entro qualche minuto, si rischia di incontrare la morte per ipossia.

Sono diversi i fattori che rendono probabile l'innesto della fibrillazione ventricolare; innanzitutto, è rilevante l'intensità della corrente che attraverso il corpo (di cui una frazione raggiunge il cuore) e il percorso effettuato dalla corrente. In genere, la quantità di corrente necessaria è diversa da individuo ad individuo, mentre per la più o meno sicura è stato formalizzato il "fattore di percorso", che indica la pericolosità dei possibili percorsi che la corrente può seguire:

Percorso	Fattore di percorso
Mani - Piedi	1
Mano sinistra - Piede sinistro	1
Mano sinistra - Piede destro	1
Mano sinistra - Piedi	1
Mano sinistra - Mano destra	0.4
Mano sinistra - Dorso	0.7
Mano sinistra - Torace	1.5
Mano destra - Piede sinistro	0.8
Mano destra - Piede destro	0.8
Mano destra - Piedi	0.8
Mano destra - Dorso	0.3
Mano destra - Torace	1.3
Glutei - Mani	0.7

Infine, se lo shock elettrico coincide con l'istante di massima instabilità del ciclo cardiaco, cioè all'inizio dell'onda T dell'elettrocardiogramma, la fibrillazione ha la massima probabilità di innesco.

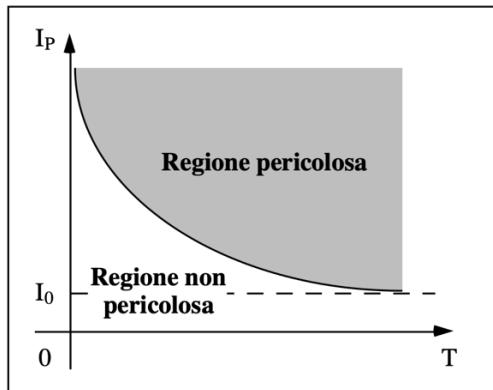
- **Ustioni**

Come si potrà apprezzare in seguito, il corpo umano presenta un'elevata resistenza, il che lo rende una perfetta stufa quando è percorso da corrente. L'aumento di temperatura che segue uno shock elettrico produce ustioni in prossimità del luogo di contatto; inoltre, paradossalmente queste ustioni rappresentano un'ultima protezione naturale a causa del loro effetto isolante e possono evitare danni ben più gravi all'organismo.

In conclusione, i danni possono essere causati sia in corrente alternata che in continua, sebbene la tetanizzazione, il blocco respiratorio e la fibrillazione ventricolare si presentano in maniera più aggressiva in regime sinusoidale, in cui la corrente induce nel corpo umano molti più stimoli (e con maggior frequenza) rispetto ad una corrente continua equivalente.

La curva media di pericolosità, per un'assegnata frequenza, esprime un legame tra la corrente pericolosa  $I_P$  e il tempo di permanenza  $T$ , riassumendo quantitativamente il fatto che quanto più elevate sono le correnti tanto più breve deve essere la durata del contatto:

$$I = I_0 + \frac{Q}{T}$$



I due parametri  $I_0$  e  $Q$  che caratterizzano la curva dipendono fortemente dalla frequenza di lavoro. Al di sotto di  $I_0$  la corrente è da ritenersi non pericolosa, mentre al di sopra tutto dipende dalla durata del contatto.

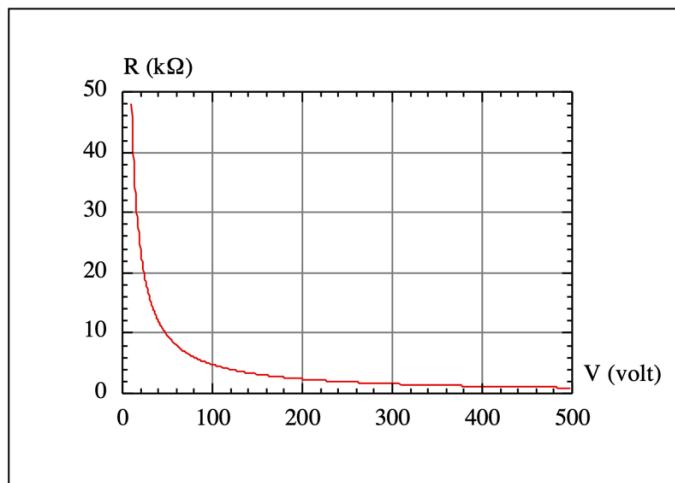
**Non è facile assegnare un valore di resistenza al corpo umano**, a causa delle molte variabili che influenzano la valutazione (la più rilevante delle quali è la pelle, che non ha le stesse caratteristiche in ogni individuo); tuttavia, per quanto concerne questa sede, è bene avere qualche valore di riferimento approssimativo che rientri almeno nell'ordine di grandezza corretto. **In genere, si considera convenzionalmente che ogni arto del corpo umano abbia una resistenza di  $500\Omega$  e che l'intero corpo possa essere modellato come una resistenza di un  $1k\Omega$ .**

Supponendo che il corpo umano sia percorso da una corrente di 50mA, risultano rischiose tensioni a partire da:

$$50mA \cdot 1k\Omega = 50V$$

Sulla base di queste considerazioni, le norme pongono un limite di tensione sopportabile senza che alcuna forma di protezione intervenga. Quando, però, il contatto elettrico avviene mediante l'interposizione di strati isolanti (come guanti), alla resistenza umana va aggiunta quella estremamente maggiore dell'isolante, elevando la soglia di tollerabilità. In pratica, la resistenza diminuisce all'aumentare della superficie di contatto, e quindi della pressione; di conseguenza, la pratica migliore dopo esser venuti a contatto con una sorgente di tensione è allentare la presa e allontanarsi dall'oggetto.

È possibile anche instaurare un legame tra la tensione di contatto e la resistenza del corpo umano, con la quale è possibile notare la sfortunata inversa proporzionalità tra le due grandezze:



**Un altro fattore di diminuzione della resistenza del corpo umano è il tempo di contatto**, come si è già potuto immaginare in precedenza; si sottolinei che **solo un’eventuale carbonizzazione da ustione può produrre un benefico aumento della resistenza** ma si parla comunque di **correnti o di durate di contatto elevate**, per cui **non è conveniente fare affidamento sulle ustioni**.

In definitiva, la resistenza del corpo umano può essere molto variabile, sebbene venga normalizzata a  $3\text{k}\Omega$ ; infine, vale la pena menzionare che il corpo umano, più che una semplice resistenza, offre una vera e propria impedenza di carattere capacitivo, che però risulta evidente solo a frequenze superiori a  $1\text{kHz}$ .

Si consideri il caso più comune di **incidente elettrico in cui la corrente fluisce a terra attraverso i piedi**; per valutare correttamente la corrente che fluisce nel corpo, bisogna aggiungere alla resistenza propria del corpo umano anche quella dovuta al contatto tra corpo e terra (che tiene conto del fatto che i piedi non si trovano allo stesso potenziale della terra per l’interposizione di calzini, scarpe e pavimento). La tabella che segue riporta i valori di resistenza (in  $\text{k}\Omega$ ) di alcuni tipi di pavimento, misurata premendo con una forza di  $500\text{N}$  (corrispondente ad una persona di circa  $51\text{kg}$ ), un elettrodo superficiale di  $400\text{mm}^2$  (equivalente all’area di due piedi):

Tipo di pavimento	Secco			Umido		
	Minimo	Medio	Massimo	Minimo	Medio	Massimo
Ceramica	3	400	1500	2	60	600
Cemento	2	200	400	0.5	2	4
Marmo	46	600	1500	1	300	1250
Parquet in legno	670	1400	1900	160	1000	1600
Grès	3	200	700	1	3	8
Moquette	77	370	1800	76	360	1700

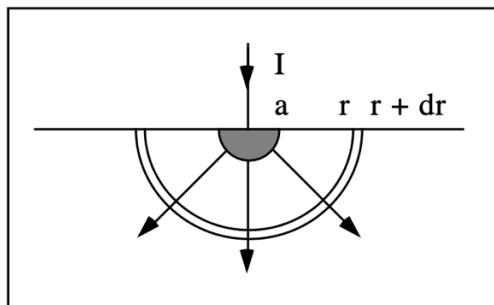
Per un uomo di resistenza  $1\text{k}\Omega$ , con i piedi su un pavimento di grès, nel caso più favorevole (ai limiti della sicurezza elettrica) di pavimento secco, la resistenza complessiva può salire fino ai  $701\text{k}\Omega$ , mentre in quello più sfavorevole di pavimento umido, può scendere fino ai  $2\text{k}\Omega$ . Si evince, quindi, l’importanza anche del tipo di pavimento per una corretta valutazione delle misure di sicurezza.

## LA DISPERSIONE DELLA CORRENTE A TERRA

Alcune parti dell'impianto elettrico vengono collegate con la terra per mezzo di determinati elementi metallici, detti **dispersori**, sia per motivi funzionali (come il collegamento a terra del neutro per sistemi trifase) che per motivi di sicurezza. Dal punto di vista elettrico, il terreno si comporta come un grosso conduttore, più o meno omogeneo, caratterizzato da una certa resistività; assegnare questo parametro non è facile, dato che le eventuali misure risentirebbero del clima al momento dell'osservazione, ma basti osservare i valori riportati nella seguente tabella, in condizioni normali di umidità e temperatura, per avere una stima utilizzabile:

Mezzo disperdente	$\rho_T$ ( $\Omega\text{m}$ )
Acqua dolce	50 ÷ 150
Acqua marina	1
Argilla	30 ÷ 150
Terreni pietrosi con erba	200 ÷ 300
Sabbia secca	200 ÷ 300
Rocce calcaree secche	2000 ÷ 5000
Torbiere umide	200 ÷ 300
Calcestruzzo	1000 ÷ 5000
Sabbia marina	0.3 ÷ 3

Il dispersore teoricamente ideale è detto dispersore emisferico; si tratta di un **conduttore** (supposto a resistività nulla) di forma semisferica di raggio  $a$  posto nel sottosuolo come in figura. I dispersori reali **non vengono mai costruiti secondo questi schemi perché sono difficilmente realizzabili**; in questa sede si preferisce premiare la semplicità di questo dispositivo per determinare delle relazioni, quantomeno qualitative, che forniscono informazioni valide anche per dispersori più complessi e reali.

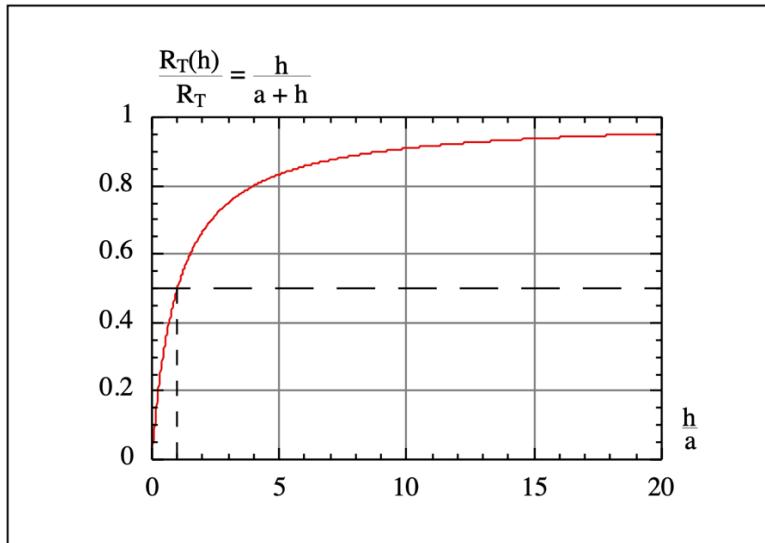


Si considerino due mezze sfere, di raggi  $r$  e  $r + dr$ ; la resistenza offerta da questo piccolo strato di conduttore alla corrente (le cui linee sono radiali) può scriversi:

$$dR_T = \frac{\rho_T dr}{2\pi r^2}$$

Indicando con  $\rho_T$  la resistività del terreno. Volendo conoscere la resistenza offerta da una corona sferica finita di spessore  $h$ :

$$R_T(h) = \frac{\rho_T}{2\pi} \int_a^{a+h} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho_T}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} \right]_a^{a+h} = -\frac{\rho_T}{2\pi a} \cdot \frac{h}{a+h}$$



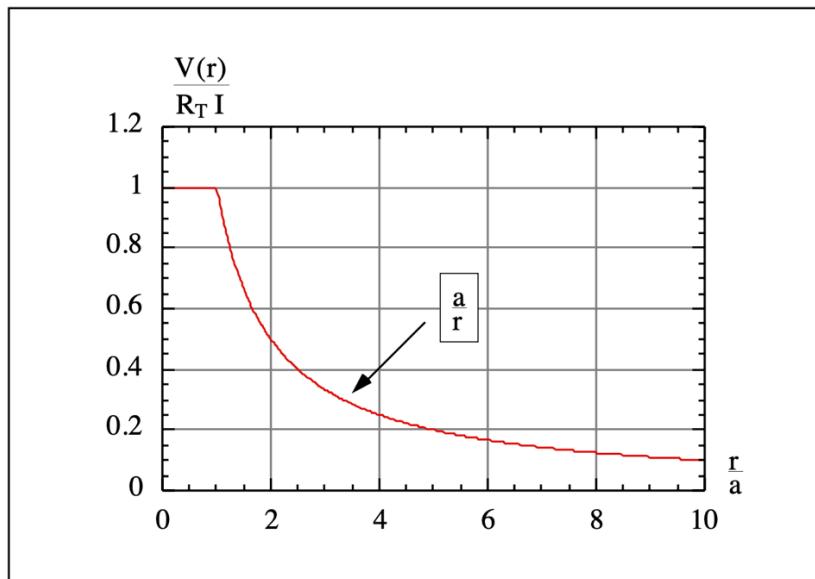
**Quando lo strato sferico preso in esame è particolarmente grande, cioè se  $h \gg a$ , allora:**

$$R_T(\infty) = R_T \approx -\frac{\rho_T}{2\pi a}$$

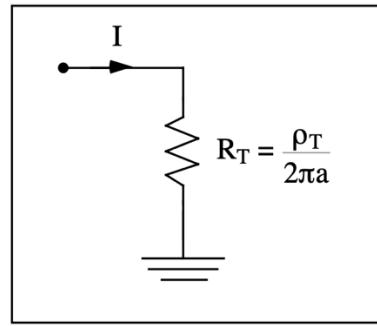
Quindi, la resistenza di un eventuale dispersore è direttamente proporzionale alla resistività del terreno ed inversamente proporzionale al raggio di dispersione; quindi, per ottenere piccoli valori di resistenza occorre un grande raggio di dispersione (a parità di resistività).

Di seguito è mostrato l'andamento del potenziale al variare della coordinata radiale  $r$ ; esso si mantiene costante in corrispondenza dell'emisfero conduttore, per poi decadere in maniera inversamente proporzionale alla distanza  $r$ . Il potenziale costante in corrispondenza dell'emisfero vale:

$$V(r) = R_T I \quad \forall 0 \leq r \leq a$$



Schematicamente, per simulare il comportamento elettrico di un dispersore si può adoperare il circuito equivalente in figura:



Come già annunciato, questo tipo di dispersore ha alcune pesanti limitazioni. Il terreno è schematizzato come un conduttore omogeneo e, pertanto, la  $\rho_T$  è stata ritenuta costante; inoltre, sono stati trascurati i contributi alla resistenza introdotti da altre parti dell'impianto e, infine, la definizione di resistenza di terra contiene una difficoltà concettuale di misura dato che, per misurare  $R_T$ , bisognerebbe portare un elettrodo di misura all'infinito (impossibile da realizzare concretamente). Nella trattazione che segue si cercherà di scavalcare questi limiti con la presentazione di dispersori un po' più reali.

Un primo tipo di dispersore reale è il **dispersore cilindrico**, detti anche **picchetti cilindrici**, di raggio  $a$  e lunghezza  $L$ . Poiché la determinazione analitica della resistenza di un dispersore di questo tipo presenta non poche difficoltà, si afferma senza dimostrarlo che:

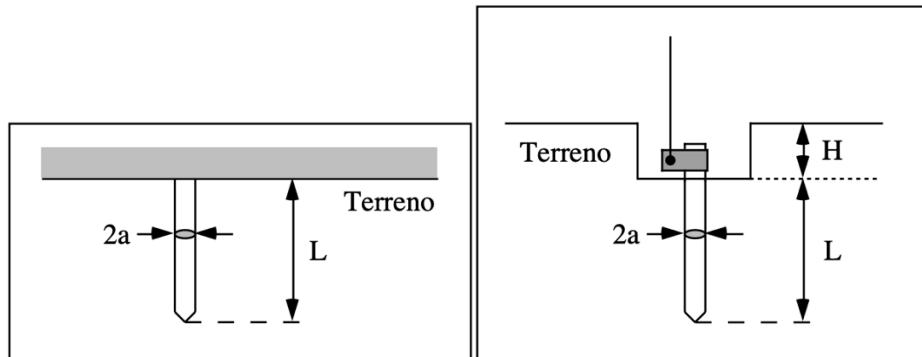
$$R_T = \frac{\rho_T}{2\pi L} \ln \left( \frac{L}{a} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{a^2}} \right)$$

E che per  $L \gg a$ :

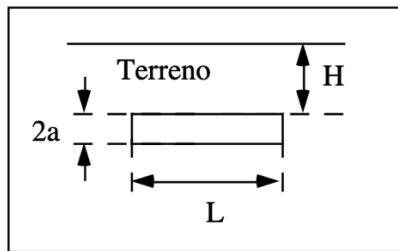
$$R_T \approx \frac{\rho_T}{2\pi L} \ln \frac{2L}{a}$$

Come spesso può accadere, i picchetti cilindrici non sono mai a filo con il terreno, bensì posti nelle fondamenta ad una profondità  $H$ ; in questo caso, l'espressione analitica precedente va modificata secondo il fattore correttivo:

$$K_H = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{L}{L+H} \right)$$



Un'ulteriore variante di dispersore è quella **lineare**, per cui una **barra cilindrica** di lunghezza  $L$  e spessore  $2a$  viene **interrata orizzontalmente** ad una profondità  $H$  come in figura:

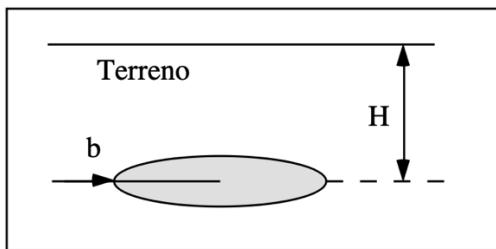


La resistenza di questo dispersore è:

$$R_T = \frac{\rho_T}{2\pi L} \left( \frac{2H}{L} - 2 + \ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{L}{H} \right)$$

In realtà, per **dispersore cilindrico** si intende anche quello costituito da un sottile conduttore circolare di raggio  $a$  avvolto come un anello di raggio  $b$  e interrato ad una profondità  $H$ , la cui resistenza è:

$$R_T = \frac{\rho_T}{2\pi b} \left( \ln \frac{8b}{a} + \ln \frac{4b}{H} \right)$$

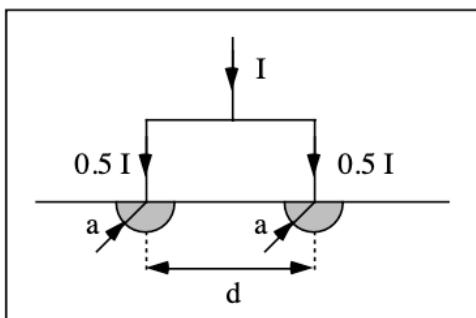


Infine, un'altra struttura adoperata consiste in una **rete magliata di conduttori**, la cui resistenza può essere così valutata:

$$R_T = \rho_T \left( \frac{1}{4b} + \frac{1}{L} \right)$$

Dove  $b$  è il raggio del cerchio di area equivalente alla rete e  $L$  la lunghezza totale dei conduttori che costituiscono la rete.

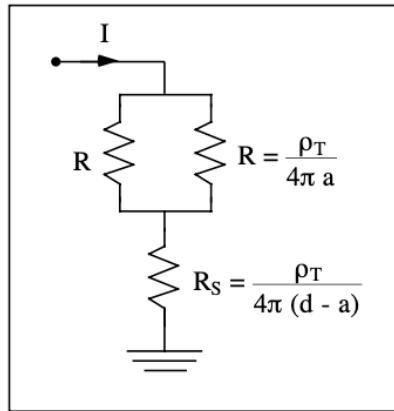
Come sarà più chiaro in seguito, **conviene avere una resistenza di dispersione più bassa possibile**; se tale parametro per un dato dispersore è troppo elevato, **si possono sempre usare due o più dispersori in parallelo**. Disporre due dispersori in parallelo equivale a dire **biforcate la corrente e far passare in ogni dispersore una corrente più piccola di quella arrivata a terra**:



La resistenza totale dei due dispersori in parallelo è data dalla relazione:

$$R_T = \frac{\rho_T}{4\pi a} + \frac{\rho_T}{4\pi(d-a)}$$

**Il secondo termine è dato dalla mutua influenza tra i due dispersori e fa aumentare la resistenza totale.** Il circuito equivalente è:

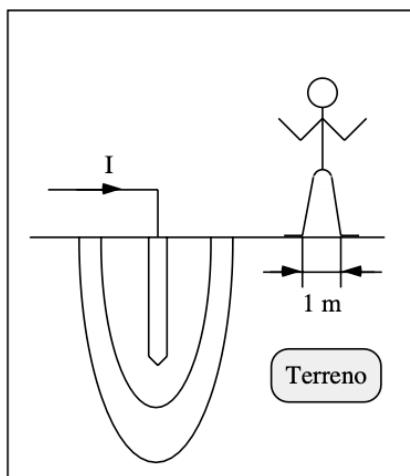


Come si può quindi intuire, **i due dispersori non saranno mai veramente in parallelo**; in pratica, **basta scegliere  $d \gg a$  per rendere irrilevante la resistenza mutua**. I concetti esposti restano validi quale che sia la geometria del dispersore; **considerando  $N$  dispersori di resistenza  $R$ , collegati in parallelo, si ottiene la resistenza totale**:

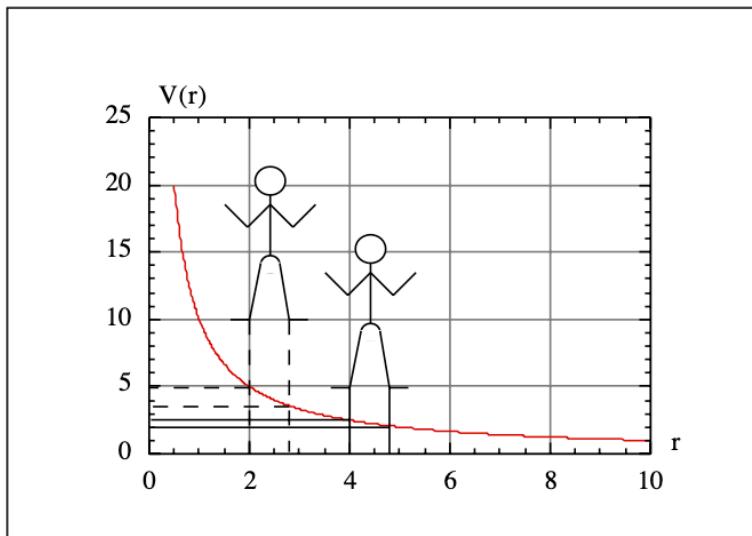
$$R_N = \frac{R}{N}$$

Ovviamente, solo se è trascurabile la reciproca influenza tra i vari dispersori. Per ogni dispersore, pertanto, si è soliti individuare una zona di dispersione in cui non ve ne dovranno essere altri per avere influenze mutue ridotte al minimo. Nel caso tecnicamente più interessante dei picchetti, si può concludere che la distanza relativa ottimale è circa **6 ÷ 8 volte la lunghezza** e, scendendo al limite di 2 volte la lunghezza, si spreca solo materiale senza ridurre sensibilmente la resistenza.

È stata già menzionata la **difficoltà di uno studio sul campo elettrico attorno ad un dispersore che non sia emisferico**; d'altra parte, uno studio analitico può essere evitato per mezzo di opportune misure che possono fornire, almeno qualitativamente, gli andamenti delle linee di campo elettrico, oppure la forma delle superfici equipotenziali. In figura, sono state rappresentate (qualitativamente) le **linee equipotenziali attorno ad un dispersore a picchetto**:



Dal punto di vista del rischio elettrico, **non è necessario costruire il campo elettrico ma basta considerare la tensione di passo**, definita come **la tensione che si manifesta tra i piedi di una persona, posti alla distanza convenzionale di un metro**. L'andamento del potenziale con la distanza dal dispersore, approssimativamente iperbolico, consente di comprendere per quale motivo **la tensione di passo sia più elevata in prossimità del dispersore**, come suggerisce la figura:



Si noti che **la tensione di passo decresce all'aumentare della distanza del soggetto dal dispersore**, fino a scendere al di sotto della soglia di pericolosità; **ciò consente di definire una zona di pericolo attorno al dispersore da proteggere in modo che ne sia limitato l'accesso**. La normativa tecnica stabilisce le modalità di misura della tensione di passo, che va misurata tra due elettrodi ausiliari posti ad un metro di distanza l'uno dall'altro.

Si supponga che **la massa di un apparecchio sia collegata a terra tramite un dispersore di resistenza  $R_T$** ; se si presenta un guasto per cui la carcassa viene ad essere in contatto con una parte attiva dell'impianto elettrico, si genera una corrente di guasto  $I_G$  corrispondente alla tensione di guasto  $V_G$ . Se una persona entra in contatto con la carcassa dell'apparecchio, sarà sottoposta ad una tensione equivalente alla partizione della tensione  $V_G$  fra la resistenza dell'uomo e quella del pavimento. La tensione alla quale è sottoposto l'uomo, definita **tensione di contatto**, sarà minore se la resistenza del pavimento è maggiore e viceversa.

## GLI IMPIANTI DI TERRA

Un **impianto di terra** costituisce una **misura di protezione contro diversi tipi di guasti nelle apparecchiature elettriche connesse all'impianto stesso** che, senza questa protezione, sarebbero causa di pericolo per gli utenti. Nella maggior parte degli incidenti elettrici, **la corrente che fluisce nel corpo umano si chiude attraverso il terreno**, che si comporta come un **conduttore elettrico quando tra due suoi punti c'è una differenza di potenziale**. Il **collegamento di terra** garantito da questi impianti è **obbligatorio e normalizzato dal CEI**. Procedendo con ordine, si definiscono:

- **Terra**, la massa del terreno assunta convenzionalmente a potenziale nullo ovunque;
- **Impianto di terra**, l'insieme di dispersori, conduttori di terra, conduttori di protezione e conduttori equipotenziali destinati a realizzare la messa a terra di protezione e/o funzionamento;

- **Dispersore**, dispositivo composto da uno o più corpi metallici posti in contatto elettrico con il terreno ed avente la funzione di effettuare la vera e propria connessione a terra.

**Il dispersore di terra deve essere caratterizzato da un basso valore di resistenza**, in modo tale che la corrente preferisca la strada dell'impianto di terra a quello del corpo umano, in caso di incidente. A tal fine, per massimizzare la condutività del terreno si usano dei composti particolari (detti “terra artificiale” e realizzati con sali minerali o gel artificiali) che si versano sul terreno circostante il dispersore. Nella maggior parte dei casi, sono impiegati dispersori propri, ovvero dispersori sotterrati con l'unico fine di connettere meglio l'intero impianto al terreno; esistono anche dispersori naturali, ovvero dispersori composti da materiali metallici sotterrati per altri scopi ma che realizzano anche la connessione con la terra (ad esempio, l'armatura metallica delle fondazioni), mentre per quanto riguarda le geometrie, sono preferite le strutture dispersive ad anello o a maglia.

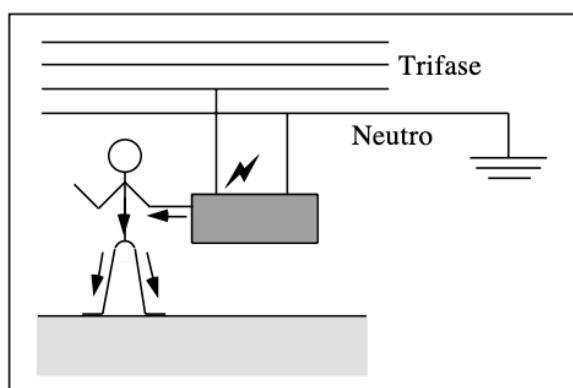
**Il collegamento tra un impianto elettrico e quello di terra avviene tramite un unico nodo** (denominato **nodo principale di terra** o **nodo collettore**), mentre il **conduttore di terra**, non in contatto col terreno, collega i dispersori al nodo principale di terra (o collettore); infine, la resistenza di terra è definita come il rapporto tra la tensione verso terra dell'impianto (valutata rispetto ad un punto posto a distanza infinita dal dispersore) e la corrente dispersa a terra.

Collegare, o mettere a terra un impianto, vuol dire collegare parte di esso ad un impianto di terra ed è un'opzione da considerare per tre motivi:

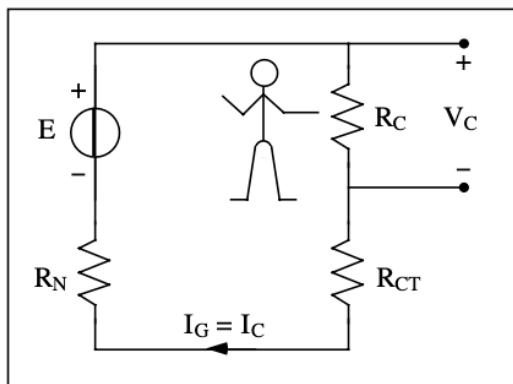
- La **messa a terra di funzionamento**, è quella legata alle esigenze di esercizio degli impianti elettrici (ad esempio, la messa a terra del centro stella dei generatori o dei carichi nei sistemi trifase);
- La **messa a terra di protezione**, è quella generalmente coordinata con interruttori differenziali, o a massima corrente, che aprono il circuito di alimentazione in caso di pericolo;
- La **messa a terra per lavori**, è di carattere provvisorio e viene adottata come misura precauzionale per lavori di manutenzione di impianti normalmente in tensione (ad esempio, le linee aeree di una ferrovia).

Fatte queste premesse, **si vuole determinare** (anche se in maniera approssimata ma ragionevole) la **tensione di contatto e la corrente che attraversa una persona venuta in contatto con carcasse in tensione**, sia nel caso in cui la carcassa non sia collegata a terra sia nel caso in cui lo sia, al fine di comprendere quale azione benefica possa avere la messa a terra per la sicurezza delle persone.

Si consideri la situazione schematizzata in figura, dove **una persona viene in contatto con la carcassa di un dispositivo in tensione e non collegato a terra**, facendosi così attraversare da una **corrente di guasto (contatto indiretto)**:



**Supponendo di trascurare tutti i parametri reattivi**, come se si trattasse di un circuito in corrente continua, il contatto viene schematizzato per mezzo del circuito equivalente mostrato qui di seguito:



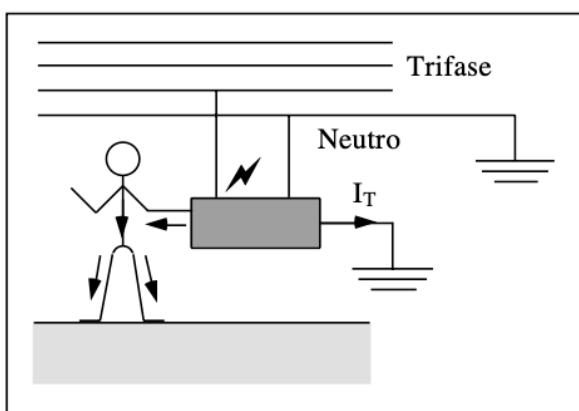
**$R_C$**  rappresenta la resistenza della persona,  **$R_{CT}$**  la resistenza della persona verso terra,  **$R_N$**  la resistenza del neutro verso terra (dipende dal sistema di alimentazione) ed  **$E$**  la tensione di fase (che in Italia è 230V). La **corrente di guasto** vale:

$$I_G = I_C = \frac{E}{R_N + R_C + R_{CT}}$$

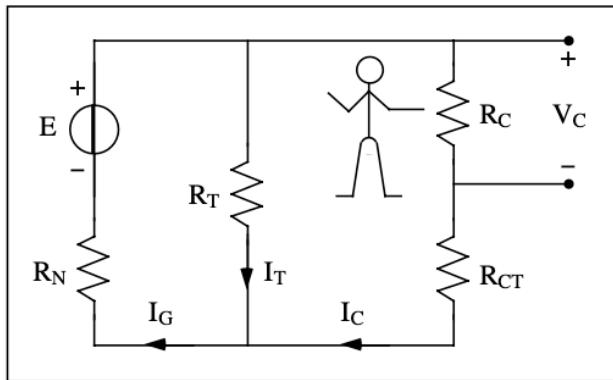
E, di conseguenza, la **tensione di contatto**:

$$V_C = E \cdot \frac{R_C}{R_N + R_C + R_{CT}}$$

**La sicurezza, in questo caso, è garantita da un elevato valore della resistenza del corpo verso terra.** Si immagini ora che lo stesso incidente avvenga con una carcassa messa a terra, come in figura:



Il circuito equivalente è:



**La corrente di elettroconduzione  $I_C$**  è, con buona approssimazione:

$$I_C = E \cdot \frac{R_T}{R_N(R_T + R_C + R_{CT}) + R_T(R_C + R_{CT})}$$

Una superficiale analisi di questa relazione permette di concludere che, **per rendere piccola a piacere questa corrente, è necessario diminuire la resistenza  $R_T$** , che dipende dall'impianto di terra. Se la resistenza  $R_T$  fosse nulla, la corrente di elettroconduzione sarebbe altrettanto nulla, ma, se allo stesso tempo la resistenza del neutro verso terra fosse piccola, la corrente in esame non potrebbe più essere nulla e la resistenza di terra non avrebbe più alcun effetto. Allora, si intuisce che, al fine di rendere efficace la messa a terra di una carcassa, è necessario rendere **piccola la resistenza di terra rispetto a quella del neutro verso terra**; infatti, in tal caso la corrente di elettroconduzione può essere piccola quanto basta e la corrente di guasto può, allo stesso tempo, assumere valori tali da far entrare in azione meccanismi automatici di protezione.

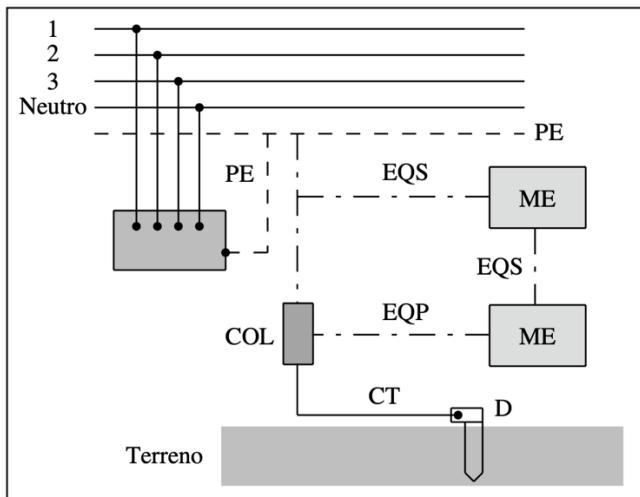
**Questa precauzione può essere del tutto insoddisfacente qualora il neutro non presenti alcuna resistenza verso terra**, ovvero quando non sia possibile ottenere una resistenza di terra molto bassa. In tal caso, **la stessa corrente di guasto potrebbe essere insufficiente a provocare l'entrata in azione di un interruttore automatico**.

Sempre nell'ottica di una resistenza di terra minore possibile, è necessario costruire i dispersori in materiali non sensibili all'umidità del terreno; infatti, **la corrosione è uno dei fattori che può far aumentare la resistenza di un conduttore metallico**. L'interramento si effettua solitamente a 0.5m ÷ 1m da terra e lo si riempie di grafite, torba, argilla o altri materiali a bassa resistività in modo da circondare il dispersore di un materiale in grado di diminuire la resistenza di terra.

Una volta posizionati i dispersori, è necessario **dimensionare il posizionamento del conduttore di terra**. Per **conduttore di terra** si intende **un conduttore, non in contatto con il terreno, che collega i dispersori tra loro ed al collettore principale**; deve essere **costituito di un materiale metallico a buona conducibilità e resistenza meccanica**, di sezione non inferiore a 16mm<sup>2</sup> (per conduttori di rame e ferro protetti contro la corrosione in modo non meccanico) o 25mm<sup>2</sup> (per il rame non protetto contro la corrosione) o 50mm<sup>2</sup> (per il ferro non protetto da corrosione). Inoltre, **la sezione del conduttore di terra deve essere uguale a quella dei conduttori di protezione**, se non sono protetti meccanicamente contro la corrosione.

Allo scopo di evitare incidenti quasi sempre fatali, **il conduttore di terra deve essere chiaramente identificato** e, pertanto, **il suo rivestimento isolante deve essere colorato esclusivamente a strisce longitudinali gialle e verdi** (blu chiaro per il conduttore di neutro), secondo quanto imposto dalle norme CEI. Le norme prescrivono anche che i conduttori di terra **devono avere percorso breve, non devono essere soggetti a sforzi meccanici, devono essere giuntati mediante una saldatura forte**

**o autogena** (o mediante appositi morsetti/manicotti) e le giunzioni devono essere protette contro la corrosione. Devono, infine, essere provvisti di un dispositivo di apertura manovrabile solo con attrezzo (il sezionatore di terra) per consentirne la verifica, il tutto in posizione accessibile.



La figura precedente mostra schematicamente i componenti principali di un impianto di terra; si noti che **tutti i conduttori di terra, di protezione e di equipotenzialità, vengono collegati al collettore** (o nodo principale di terra COL), realizzato mediante una sbarra o un morsetto. **I conduttori di protezione (PE) collegano le masse al collettore principale e le loro sezioni minime vanno scelte secondo i seguenti criteri:**

$$S \leq 16 \Rightarrow S_P = S$$

$$16 \leq S \leq 35 \Rightarrow S_P = 16$$

$$S \geq 35 \Rightarrow S_P = 0.5S$$

Dove  $S$  e  $S_P$  sono, rispettivamente, le sezioni in millimetri quadri del generico conduttore di fase e del conduttore di protezione. Per **massa** si intende quella parte conduttrice, facente parte dell'impianto elettrico, che può essere toccata e che non è in tensione durante le normali condizioni di funzionamento, ma che può andare in tensione a causa di un guasto dell'isolamento principale; un esempio di massa sono le carcasse e gli involucri metallici di molti apparecchi elettrici, ma non le parti conduttrici elettricamente in contatto con le carcasse. Merita approfondimento la definizione di **massa estranea**, definita come la parte conduttrice non facente parte dell'impianto elettrico, suscettibile di introdurre il potenziale di terra o comunque altri potenziali; questa definizione permette di considerare masse estranee tutti quegli elementi metallici che presentano una bassa resistenza verso terra e che potrebbero avere un ruolo importante in caso di guasto. I **conduttori equipotenziali** sono destinati ad assicurare l'equipotenzialità fra le masse e le masse estranee, mentre i **collegamenti equipotenziali principali (EPQ)** collegano le masse estranee al collettore di terra. I **collegamenti equipotenziali supplementari (EQS)**, invece, collegano le masse estranee al PE e le masse estranee tra loro.

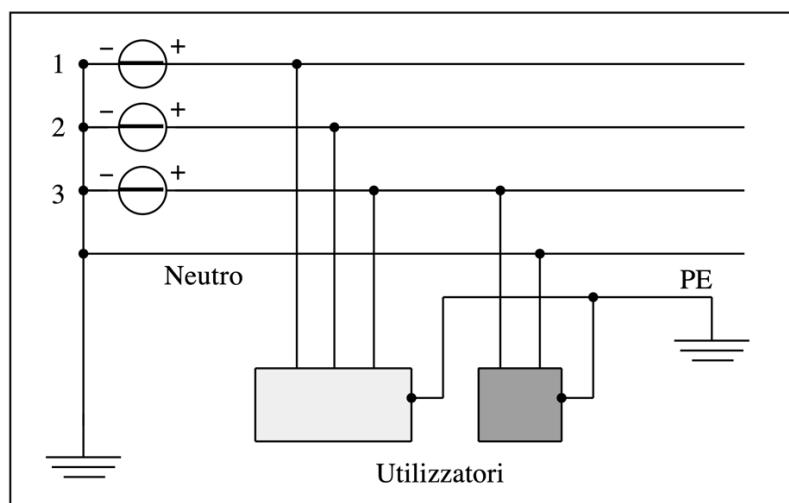
Il secondario dei trasformatori presenti nelle cabine di trasformazione in BT è, in generale, collegato a stella e rende disponibile tre fasi ed il neutro. Il centro stella può essere collegato a terra o isolato da essa; allo stesso modo, gli impianti utilizzatori possono avere o meno le masse collegate a terra. Dal punto di vista strutturale, ed in relazione allo stato del neutro ed alla situazione delle masse, **i sistemi elettrici di categoria zero e di prima categoria sono identificati da due lettere, la prima delle quali indica lo stato del neutro e la seconda quella delle masse**, secondo lo schema:

- **Prima lettera:**
  - **T**, collegamento diretto del neutro a terra;
  - **I**, isolamento da terra o collegamento mediante impedenza;
- **Seconda lettera:**
  - **T**, collegamento diretto a terra delle masse;
  - **N**, collegamento delle masse al punto di sistema messo a terra.

Sulla base di questa nomenclatura, **si distinguono le seguenti configurazioni:**

- **Sistemi TT**

In questi sistemi, **il neutro e le masse degli apparecchi utilizzatori sono collegati a terra**, sebbene con impianti elettricamente indipendenti tra di loro. Sono sistemi **particolarmente impiegati in Italia per l'alimentazione degli impianti utilizzatori in BT della rete di distribuzione pubblica**. Vale la pena notare che **il conduttore di neutro deve essere considerato attivo come gli altri tre e, pertanto, deve essere sezionabile per evitare situazioni pericolose in caso di circuito aperto con neutro non interrotto**. Lo schema con cui si rappresentano questi sistemi è il seguente:



Tipicamente:

$$V_o = (230 \vee 400)V \wedge R_N < 1\Omega$$

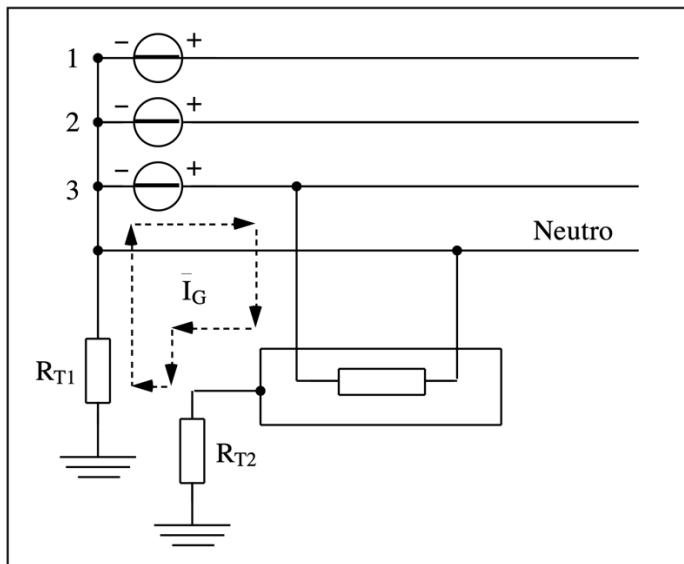
Il problema principale degli impianti TT è legato al fatto che **per mantenere sulle masse una tensione inferiore alla tensione di sicurezza di 50V**, soltanto in caso di guasto ovviamente, **si dovrebbe avere una resistenza di terra minore di  $0.5\Omega$** , valida quando si ha a disposizione una potenza di  $3kW$  (abitazione civile); in questo caso, la corrente nominale è pari a  $15A$  e la corrente di cortocircuito ( $7 \div 8$  volte quella nominale) è circa  $100A$ . Allora, si ha:

$$R_T = \frac{50V}{100A} = 0.5\Omega$$

Per cui **si intuisce che non è conveniente limitare la tensione di contatto sulle parti metalliche** (sarebbero necessarie resistenze di terra difficilmente ottenibili in BT); bisogna ricordare che, **se si utilizzasse l'impianto di terra come metodo principale di sicurezza, si renderebbe il livello di tale sicurezza dipendente dalle variazioni di resistenza del neutro**. Si devono, quindi, adottare metodi di apertura automatica del circuito in modo da limitare il permanere di tensioni pericolose

sulle masse; inoltre, nel caso di guasto non franco con resistenza di guasto non nulla, la corrente di guasto può essere molto bassa e ritardare, perciò, il tempo di intervento delle protezioni.

Quindi, **per fare in modo che per qualunque valore della corrente di guasto i dispositivi di interruzione automatica del circuito intervengano in modo da soddisfare la curva di sicurezza**, è necessario utilizzare sistemi come fusibili o interruttori automatici; questi dispositivi, a massima corrente difficilmente riescono a soddisfare la curva di sicurezza, essendo invece molto adatti a proteggere gli impianti dalle sovraccorrenti. Per proteggere le persone contro contatti indiretti è preferibile l'impiego di interruttori differenziali, come può chiarire la figura seguente:



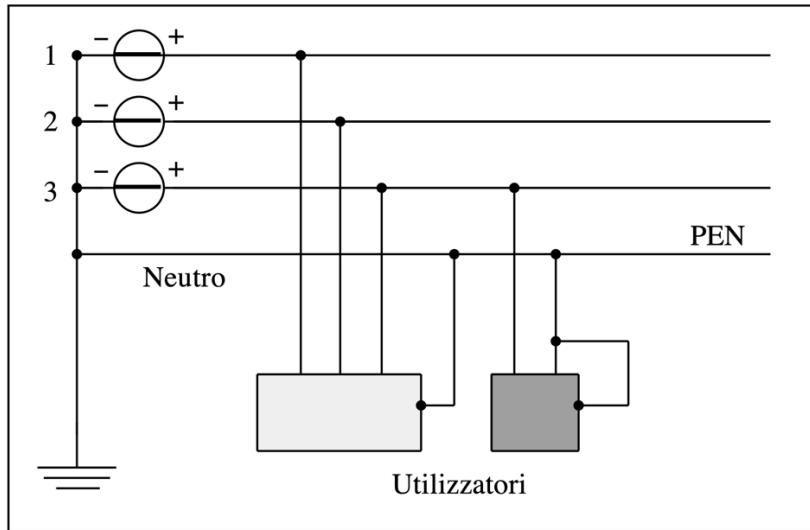
È illustrata la formazione di un circuito di guasto, riportato con una linea tratteggiata, in cui la corrente di guasto è limitata dalle sole resistenze dei due impianti di terra, essendo generalmente trascurabili le impedenze delle linee di collegamento e supponendo nulla quella del guasto interno (guasto franco). Di norma,  $R_{T2} > R_{T1}$  e questo valore di resistenza limita la corrente a valori talmente piccoli che gli interruttori di protezione non intervengono, a meno che non siano ad elevata sensibilità come i differenziali.

Addizionalmente, si può implementare come misura di sicurezza l'equipotenzialità; in uno stabile, è normale che esistano diverse parti conduttrici, come tubazioni e tondini, che hanno una resistenza verso terra diversa a seconda dell'estensione. Queste parti metalliche si comportano come masse estranee e possono assumere potenziali diversi da quelli normali di terra, con pericolo elevato in caso di contatto diretto; pertanto, è buona norma collegare a terra tutte queste masse, in modo da diminuire la resistenza di terra complessiva dell'impianto e attenuare le tensioni di contatto.

- **Sistemi TN**

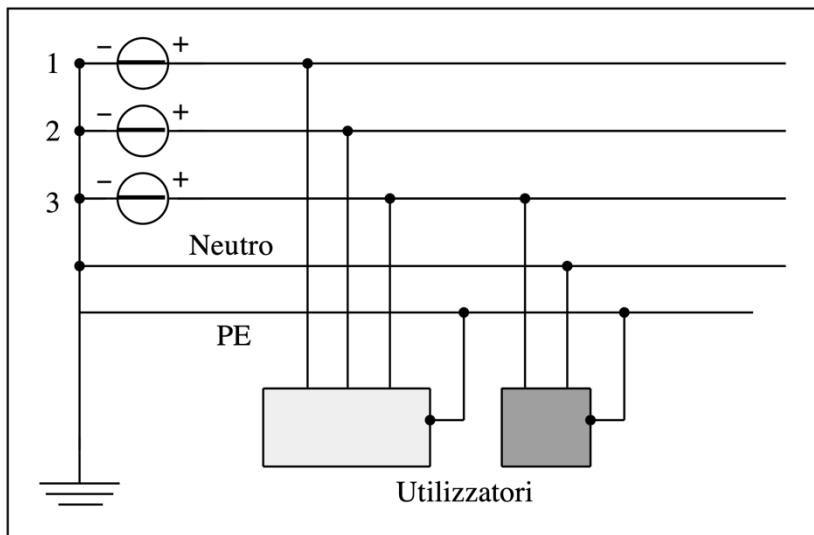
Si tratta di sistemi che hanno il neutro collegato direttamente a terra e le masse al conduttore di neutro, secondo tre possibili schemi:

- **TN - C**



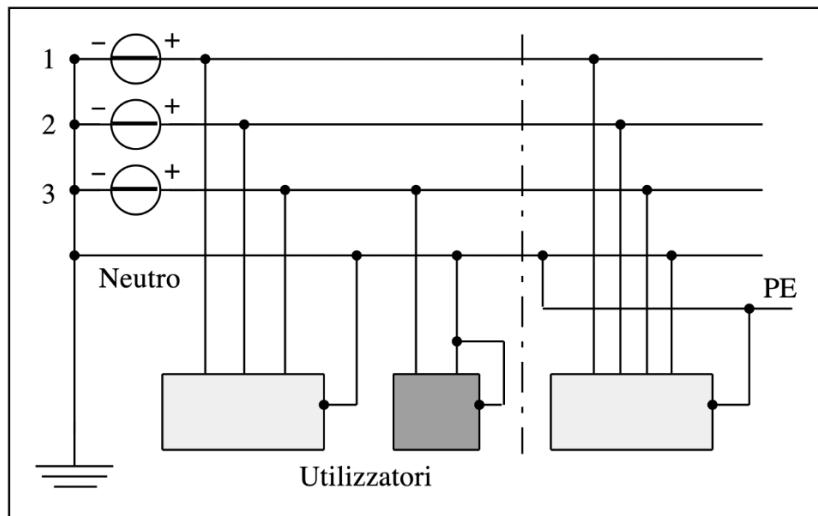
Le funzioni di neutro e di protezione sono combinate in un solo conduttore, indicato per convenzione con PEN. Il neutro, a cui sono collegate direttamente le masse, essendo anche un conduttore di protezione non deve essere sezionabile e deve avere una sezione che risponda ai requisiti della normativa relativa.

- **TN – S**



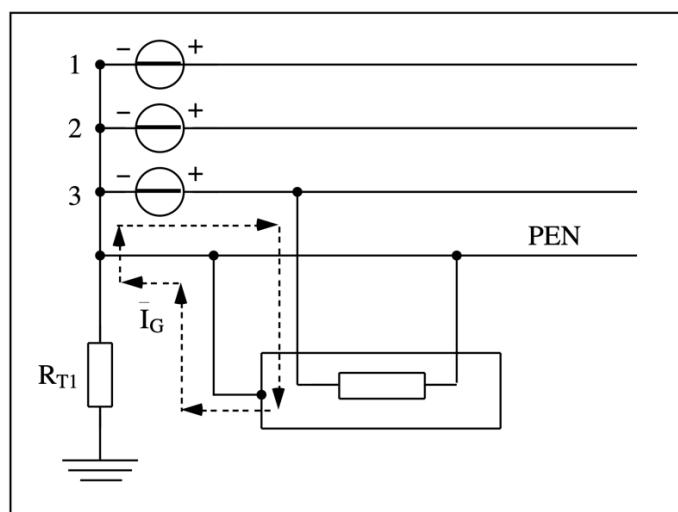
Il conduttore di neutro e quello di protezione sono separati. Le masse sono collegate alla terra della cabina per mezzo del conduttore di protezione PE; infine, il neutro, non dovendo svolgere funzione di protezione, può essere sezionabile, senza aggravio per i costi a causa dell'adozione degli interruttori onnipolari.

- **TN – C – S**



Proveniente dall'unione dei due sistemi precedenti, è costituito per una parte da un sistema TN – C e per un'altra da un sistema TN – S.

In ogni caso, **quale che sia il sistema TN adottato, un circuito di guasto determina una elevata corrente di guasto che, alimentata dal secondario del trasformatore, si chiude su un circuito a bassissima impedenza:**



**Il circuito di guasto non interessa il terreno e l'elevato valore di corrente di guasto determina l'intervento di interruttori a massima corrente per proteggere il circuito.** Questi sistemi erano più sicuri dei TT quando non era ancora in uso l'interruttore differenziale; tuttavia, **la sicurezza del TN è legata all'efficienza del neutro e dell'impianto di terra della società elettrica che gestisce il servizio.** Sebbene in altri paesi (come gli USA o la Russia) i sistemi TN siano in uso nella distribuzione pubblica, **in Italia sono consentiti solo per impianti utilizzatori alimentati da una propria cabina o da una stazione di trasformazione.**

**La tensione a cui è sottoposta una persona che tocca l'apparecchiatura durante un guasto di questo tipo dipende esclusivamente dalle impedenze del conduttore di fase e di protezione:** come si è già accennato, il guasto franco a massa può essere considerato un cortocircuito e la corrente è limitata solo dalle impedenze sopra citate. **Per contenere le tensioni sulle masse al di sotto dei valori limite dettati dalla curva di sicurezza, si deve necessariamente ricorrere a dei metodi di interruzione automatica del circuito.** Nei sistemi TN, le correnti di guasto sono di solito

sufficientemente elevate da permettere l'utilizzo di sistemi a massima corrente (si è in presenza di un cortocircuito, anche se il contatto studiato è di tipo indiretto); tuttavia, **non sempre questi sistemi garantiscono i limiti voluti di sicurezza**: nel caso di guasti nella parte terminale della linea, l'impedenza totale di guasto è molto grande e la corrente di guasto molto piccola, sebbene la tensione sulle masse non diminuisca (può diminuire solo implementando un meccanismo di equipotenzialità). Le norme CEI impongono che:

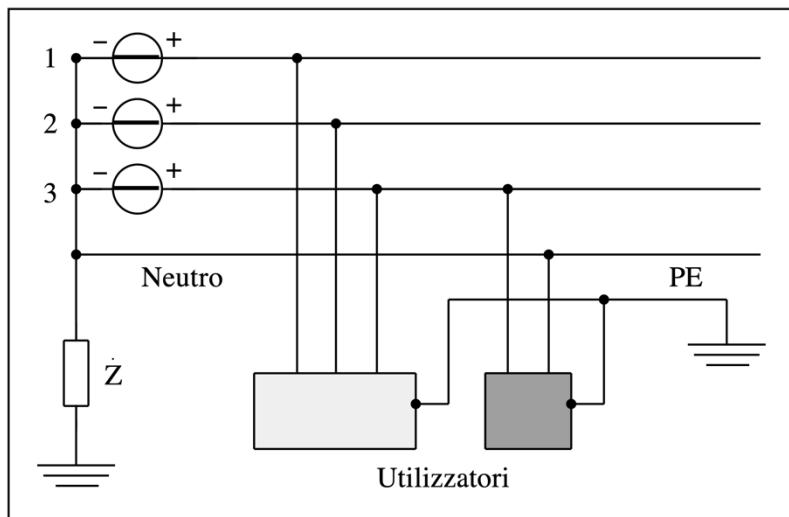
$$\frac{V_0}{Z_G} > I_5$$

Con  $V_0$  tensione di fase,  $Z_G$  impedenza (in modulo) di guasto e  $I_5$  la corrente necessaria affinché le protezioni a massima corrente intervengano in meno di 5 secondi. **Le limitazioni normalizzate sono solo queste perché è difficile determinare il rapporto tra le impedenze di fase e di neutro**, mentre invece è facile disporre dell'impedenza totale di guasto. Una condizione estremamente critica si ha per valori di potenziale del neutro eccessivamente pericolosi; in tale situazione le masse delle apparecchiature possono assumere potenziali non nulli senza che vi siano guasti di isolamento.

Si vuole concludere menzionando l'importanza degli interruttori differenziali, dal momento in cui può accadere che non si conosca a priori l'impedenza di guasto; infatti, questi dispositivi permettono l'apertura del circuito in tempi brevissimi, dal momento in cui le correnti di guasto per sistemi TN sono estremamente elevate. L'interruttore differenziale non protegge, tuttavia, nel caso di anomalie del neutro.

- **Sistemi IT**

Sistemi di questo tipo **hanno le parti attive isolate da terra, o collegate per mezzo di un'impedenza, e le masse collegate a terra tramite il conduttore PE**, come in figura:



In altri termini, **il sistema di alimentazione è completamente isolato da terra**. Segue che il neutro è un conduttore attivo senza compiti di protezione e deve essere sempre sezionabile.

Schemi di questo tipo **non sono molto comuni**, a causa dei vari inconvenienti a cui può dar luogo; infatti, **il CEI esclude alcuna possibilità di distribuire pubblicamente l'energia elettrica a bassa tensione seguendo schemi IT**, che vengono invece **impiegati negli impianti** (o nelle parti degli impianti) **in cui è prevalente l'esigenza della continuità del servizio** (ci sono comunque numerose prescrizioni normative). **Il vantaggio della continuità di servizio non è sostenuto dai contatti diretti**, in cui la corrente di guasto è minore che in altri sistemi ma pur sempre pericolosa.

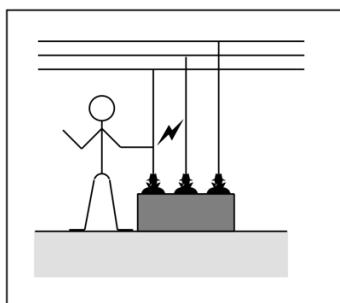
Se un'apparecchiatura presenta un guasto franco verso terra, la corrente che scorre nella resistenza di terra è una corrente prevalentemente capacitiva; la capacità verso terra del sistema di alimentazione è dovuta essenzialmente alla capacità dei cavi ma raramente il valore di questa corrente raggiunge soglie pericolose, normalmente si aggira intorno a qualche ampere e supera la decina solo negli impianti più estesi (quando anche la capacità verso terra è maggiore).

## I TIPI DI CONTATTO, DI ISOLAMENTO E DI PROTEZIONE

**Una persona è percorsa da una corrente elettrica quando le parti diverse del suo corpo vengono in contatto**, accidentalmente o meno, **con oggetti a diverso potenziale**. Gli incidenti elettrici vengono classificati in due grosse categorie, sulla base del contatto da cui deriva la folgorazione:

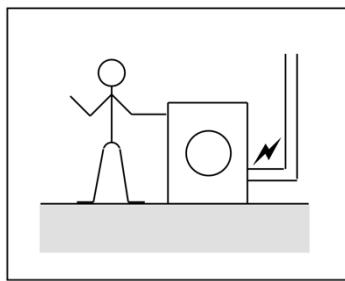
- **Contatto diretto**

Occorre **quando la persona viene in contatto con parti di un impianto elettrico o dell'apparecchiatura normalmente in tensione**. Nella classe dei contatti diretti rientrano il taglio di cavi in tensione con forbici non isolate, l'accessibilità improvvisa di una parte dell'impianto ma anche le masse estranee quando entrano in contatto con parti in tensione dell'impianto. Queste parti, non essendo considerate delle vere e proprie masse, causano un contatto diretto quando sono casualmente in tensione.



- **Contatto indiretto**

Occorre **quando la persona viene in contatto con parti metalliche che normalmente non dovrebbero essere in tensione ma che lo sono a causa di un difetto di isolamento**. Questo tipo di contatto è normalmente più pericoloso del primo, in quanto l'utilizzo delle apparecchiature mette molto spesso l'operatore nelle condizioni di dover toccare delle parti di massa; la sicurezza globale dipende, quindi, solo ed esclusivamente dal sistema di protezione adottato.



Per comprendere meglio questa distinzione, **si elenchino i vari tipi di isolamento**:

- **Isolamento funzionale**, rende possibile il funzionamento dell'apparecchiatura elettrica mantenendo isolate tra loro le parti a diversa tensione;
- **Isolamento principale**, è quello che normalmente avvolge i conduttori in tensione evitando che vengano a contatto con l'uomo:
  - Si tratta di involucri (tipicamente in PVC) che ricoprono i conduttori nudi;
  - Non sempre coincide con l'isolamento funzionale;
- **Isolamento supplementare**, viene tipicamente aggiunto a quello principale per assicurare la protezione dalle tensioni di contatto in caso di cedimento di quest'ultimo;
  - La combinazione di questi due tipi di isolamento è detto doppio isolamento;
- **Isolamento rinforzato**, si tratta di un unico isolamento in grado di assicurare lo stesso grado di protezione del doppio isolamento rispetto alle sollecitazioni elettriche e meccaniche.

Oltre che i sistemi elettrici, **anche gli apparecchi sono classificati sulla base del loro grado di protezione contro possibili incidenti elettrici**; in particolare, **in relazione al rischio di contatto diretto**, i componenti elettrici vengono classificati in **quattro diverse classi**, riassunte brevemente di seguito:

Classe	Descrizione
0	Componente di classe zero è quello destinato ad essere usato in locali completamente isolati, per cui, la protezione risiede nell'ambiente e non occorre prendere provvedimenti contro i contatti nell'apparecchio. Un caso particolare di questa classe è costituita dagli apparecchi che hanno una alimentazione elettrica autonoma e di bassa potenza, ad esempio, apparecchi a batteria ed accumulatori.
I	Componente di classe uno è quello destinato ad essere protetto mediante l'interruzione automatica del circuito, per cui è dotato di isolamento principale e la massa è munita di un morsetto per il collegamento del conduttore di protezione. Questo tipo di protezione è anche denominata protezione attiva.
II	Apparecchio di classe due è quello con isolamento doppio o rinforzato, ma privi di collegamento delle masse al conduttore di protezione.
III	Componente di classe tre è quello alimentato con bassissima tensione (BTS) non superiore al limite di sicurezza. Questi apparecchi non dispongono di sistemi di protezione, perché la protezione risiede nel dispositivo di alimentazione.

**Le norme CEI prescrivono la protezione delle persone dai pericoli che possono derivare dal contatto diretto con le parti attive di un impianto** (di categoria 0 o I) **facendo in modo che non circoli corrente attraverso il corpo**, o limitandola comunque a valori non pericolosi. Le misure di protezione contro il contatto diretto si distinguono in protezione totale e protezione parziale.

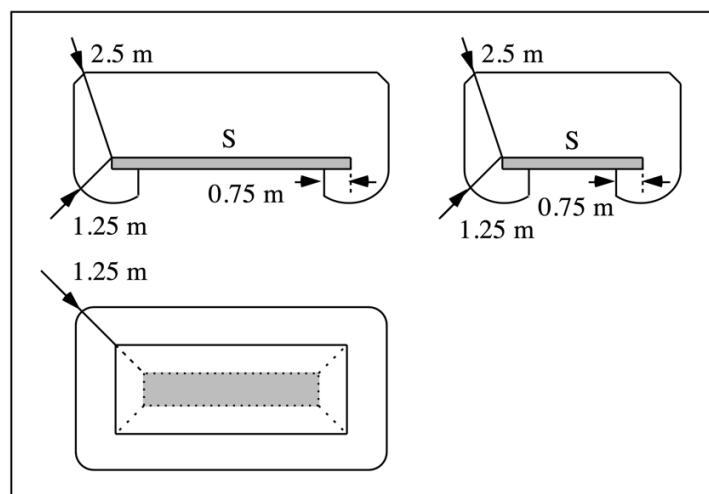
**Le misure di protezione totale impediscono sia il contatto accidentale sia quello volontario**, a patto di non usare attrezzi o di danneggiare il sistema di protezione stesso, e vengono adottate normalmente **nel caso di impianti accessibili anche a persone non addestrate**; a tal fine, è necessario conoscere le definizioni dettate dal CEI di:

- **Involucro**, elemento che assicura un grado di protezione appropriato contro determinati agenti esterni ed un determinato grado di protezione contro i contatti diretti in ogni direzione;
- **Barriera**, elemento che assicura un determinato grado di protezione contro i contatti diretti nelle direzioni abituali di accesso;
- **Ostacolo**, elemento inteso a prevenire il contatto involontario con le parti attive ma che non impedisce il contatto intenzionale.

Le parti attive, normalmente in tensione, vanno ricoperte completamente con uno strato isolante non rimovibile, a meno che non venga distrutto, in grado di resistere a sforzi meccanici, elettrici e termici che si manifestano durante il funzionamento. Appare chiaro che i morsetti non possono essere completamente isolati sulla base di quanto appena detto, occorre proteggerli mediante involucri e barriere che, saldamente fissati, devono avere sufficiente stabilità e durata nel tempo; gli involucri garantiscono protezione anche contro la penetrazione di corpi solidi o liquidi, mentre le barriere assicurano soltanto un certo grado di protezione contro i contatti diretti lungo le direzioni normali di accesso. L'accesso ai morsetti, quindi l'apertura di involucri e barriere, è soggetto a determinate limitazioni, come l'uso di una chiave o di un attrezzo.

Le norme IEC utilizzano la sigla IP seguita da due numeri: il primo indica la protezione contro i corpi estranei (o comunque contro i contatti diretti), mentre il secondo indica la protezione contro i liquidi.

Le misure di protezione parziale hanno il compito di proteggere solo dai contatti accidentali e vengono usate in luoghi accessibili solo ad un personale addestrato, essendo realizzate mediante ostacoli o distanziamento. Gli ostacoli impediscono l'avvicinamento accidentale del corpo a parti attive, mentre il distanziamento si realizza quando parti conduttrici simultaneamente accessibili, che distano non più di 2.5m in verticale e 2m in orizzontale, sono poste fuori della portata di mano; indicando con S il piano di calpestio dei luoghi ordinatamente occupati o percorsi dal personale e limitato dalla superficie che la mano non può raggiungere senza far uso di mezzi ausiliari:



Le norme prevedono l'impiego di un interruttore differenziale, con corrente nominale non superiore a 30mA, quale misura addizionale di protezione contro i contatti diretti, da associare a quelli esaminati in precedenza. Questo dispositivo aumenta significativamente la sicurezza dell'utente ma non può essere riconosciuto come misura di protezione completa contro i contatti diretti, dal momento in cui non evita gli infortuni provocati dal contatto bipolare con due fasi del circuito. Nelle installazioni civili o industriali, anche se non espressamente richiesto, è utile l'uso di interruttori differenziali; infatti, qualora tutte le altre misure di protezione risultassero

inefficaci, il relè differenziale è l'unico dispositivo in grado di interrompere il circuito. Il rischio, però, sta nel considerare l'interruttore differenziale ad alta sensibilità come la panacea di ogni male.

Il metodo più semplice e comune per la **protezione dal contatto indiretto** consiste nel **collegare a terra la massa dell'apparecchio utilizzando un apposito cavo**, detto **cavo di protezione**. Inoltre, quasi tutti i sistemi di protezione contro i contatti indiretti prevedono **l'interruzione automatica del circuito mediante dispositivi di sezionamento**. Le norme CEI prescrivono, a tal proposito, diversi sistemi che si possono annoverare in due grandi categorie: **i sistemi che per la protezione prevedono l'interruzione automatica del circuito e quelli che non la prevedono**.

Per **proteggere le persone contro i contatti indiretti** è piuttosto comune il **metodo dell'interruzione automatica**, realizzato tramite un **coordinamento tra l'impianto di terra ed un interruttore, a massima corrente o differenziale**; solo combinando questi due sistemi si può ottenere un **elevato grado di sicurezza**. In genere, **si preferisce impiegare gli interruttori differenziali** perché **quelli a massima corrente**, durante un contatto, **si attivano per correnti piuttosto elevate, ritardando l'intervento**; invece, **la combinazione di interruttori differenziali ed impianto di terra garantisce l'intervento immediato**. Se la carcassa metallica non fosse collegata a terra l'interruttore entrerebbe in funzione solo a causa della corrente che fluisce attraverso la persona (questo, se non pericoloso, potrebbe essere quanto meno un effetto spiacevole per il malcapitato).

Per comprendere fino in fondo le relazioni sulle quali si fonda il coordinamento tra l'impianto di terra ed i dispositivi di apertura del circuito, è bene sottolineare che **la protezione contro i contatti indiretti è efficace quando la tensione di contatto non supera un valore limite convenzionale  $V_L$** , posto a 50 V per gli ambienti ordinari ed a 25 V per ambienti ed applicazioni particolari. Si noti che **per tensione di contatto le norme fanno riferimento alla tensione di contatto a vuoto**, cioè a quella tensione assunta dalla massa in occasione di un guasto di isolamento senza che, però, vi sia contatto con la persona. **Questa tensione è superiore, al più uguale, a quella di contatto effettiva e questo va a tutto vantaggio della sicurezza**.

- **Coordinamento con relè a massima corrente**

Se la resistenza di terra  $R_T$  è sufficientemente piccola, detta  $I_A$  la corrente che provoca l'intervento automatico del dispositivo di protezione entro 5 secondi, ha senso ottenere la limitazione della tensione di contatto nel seguente modo:

$$R_T I_A \leq V_L$$

Questo tipo di interruttore, per essere efficace, ha bisogno di essere attraversato da una corrente non piccola, proprio come accade nei sistemi TN.

- **Coordinamento con relè differenziale**

Una resistenza di terra relativamente elevata può vanificare la funzione protettiva dell'interruttore a massima corrente. In tal caso, bisogna affidarsi ad un relè differenziale, la cui sensibilità possa essere 'tarata' sul valore della resistenza di terra effettivamente disponibile. La limitazione della tensione di contatto può riscriversi come una diseguaglianza per la resistenza di terra:

$$R_T \leq \frac{V_L}{I_{\Delta N}}$$

In cui con  $I_{\Delta N}$  si è indicato il valore della corrente differenziale che determina l'intervento dell'interruttore automatico.

Si vuole applicare quanto detto a due casi frequenti nella pratica tecnica.

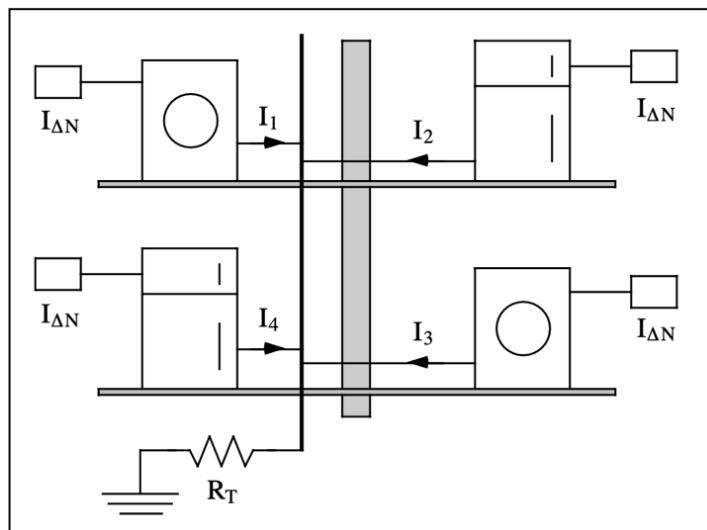
### PRIMO CASO

Si supponga che **ciascuna utenza, per difetto di isolamento, disperda verso terra una corrente  $I_k$ , tanto piccola da rimanere al di sotto della soglia di sensibilità  $I_{\Delta N}$  della protezione differenziale**. Trascurando, per semplicità, le componenti reattive dei carichi, si può affermare che la corrente di dispersione totale verso terra è semplicemente la somma delle singole correnti disperse:

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Mentre la tensione di contatto a vuoto vale:

$$V_C = R_T(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$



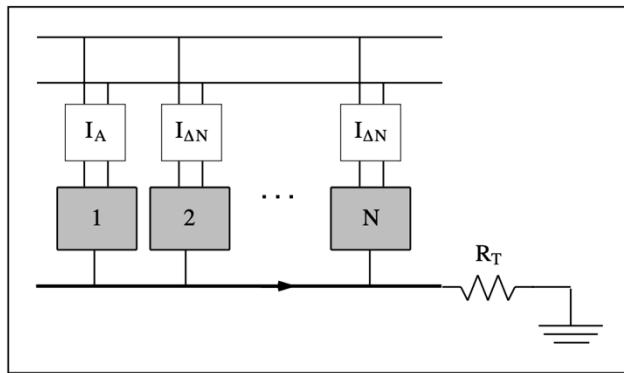
Se questa tensione di contatto supera il valore limite previsto dalle norme, si può creare una **situazione pericolosa**. La resistenza di terra andrà, dunque, coordinata tenendo conto anche di questa corrente dispersa, e non solo di quella differenziale. In altri termini bisogna imporre che:

$$R_T \leq \frac{V_L}{I_{\Delta N} + I_1 + I_2 + I_3 + \dots}$$

Mostrando la necessità di una diminuzione, anche significativa, della resistenza di terra.

### SECONDO CASO

Si consideri ancora un condominio in cui tutti i residenti hanno installato interruttori di tipo differenziale, tranne uno che è a massima corrente:



Le norme di sicurezza impongono che la resistenza di terra sia contenuta a valori molto piccoli dato che la corrente  **$I_A$**  può non essere piccola:

$$R_T \leq \frac{V_L}{I_A}$$

Qualora questo vincolo non venisse rispettato potrebbero instaurarsi pericolose tensioni di contatto e la presenza dei salvavita negli appartamenti finirebbe con l'indurre un mal riposto senso di sicurezza.

**La protezione senza interruzione automatica del circuito rappresenta un'azione preventiva**, atta ad impedire che possano verificarsi condizioni di pericolo e la mancata interruzione del circuito va tutta a vantaggio della continuità del servizio. Ed avviene tramite:

- **Componenti di II classe**

Questo tipo di protezione consiste nell'utilizzare **materiale elettrico**, come conduttori ed apparecchi, **con doppio isolamento o con isolamento equivalente**, non provvisti di alcun dispositivo per il collegamento al conduttore di protezione (PE).

- **Separazione elettrica e trasformatori di isolamento**

Un **trasformatore di isolamento** è un trasformatore caratterizzato da una separazione elettrica tra l'avvolgimento primario e quello secondario. Questa separazione è ottenuta mediante un **doppio isolamento**, oppure per mezzo di un **isolamento rinforzato**. La tensione nominale del circuito secondario non deve superare 500 V, mentre la potenza del trasformatore non deve superare 25kVA se monofase, 40kVA se trifase. In questo modo, si ottiene una protezione per il contatto indiretto mediante isolamento da terra del circuito elettrico.

Il circuito separato non deve, pertanto, avere parti attive in contatto con altri circuiti o connesse a terra, deve presentare un **livello di isolamento equivalente a quello della classe II** rispetto alle masse e agli altri sistemi elettrici eventualmente presenti. Se il circuito alimenta un solo utilizzatore la sua massa deve rimanere isolata, mentre se alimenta più utilizzatori le masse vanno **collegate tra loro** ma non al conduttore di protezione del circuito principale; inoltre, le prese devono avere il **contatto di terra collegato al conduttore equipotenziale**, mentre gli utilizzatori (quelli di classe II esclusi) **devono essere muniti di conduttore da utilizzare come conduttore equipotenziale**. Nel caso in cui si verifichino due guasti a massa su due fasi distinte, è obbligatoria la protezione contro le sovracorrenti.

- **Locali equipotenziali**

In questo tipo di locale **tutte le parti con le quali una persona può venire in contatto sono allo stesso potenziale che agisce sulla persona**. L'unico reale pericolo è rappresentato dall'**interruzione del collegamento equipotenziale** che comporterebbe pericolose tensioni tra masse non più collegate. L'impianto deve essere **sotto il controllo di personale addestrato** ed il locale equipotenziale non va in alcun modo collegato a terra, nemmeno attraverso masse estranee. Questa tecnica, comunque, **non è idonea per gli edifici residenziali**.

- **Locali isolanti**

Ottenuti **interponendo tra il luogo da proteggere e l'ambiente esterno un isolamento supplementare**, in modo da avere, pure adoperando apparecchi di classe zero, **una protezione equivalente a quella che si ottiene con gli apparecchi di seconda classe**.

Quando vengono utilizzati **sistemi elettrici a bassissima tensione caratterizzati da particolari requisiti di sicurezza**, può essere realizzata una **protezione combinata contro i contatti diretti ed indiretti**. La normativa definisce tre differenti sistemi, tutti caratterizzati da una tensione nominale in regime sinusoidale di valore efficace non superiore a 50 V (o 120 V in regime stazionario):

- **Safety Extra - Low Voltage (SELV)**, a bassissima tensione di sicurezza

Questa tecnica di protezione è basata sulla **separazione galvanica sia nei riguardi dei circuiti elettrici sia rispetto alle masse di altri sistemi elettrici**. Le masse e le parti attive delle utenze e dei circuiti in questione **non vanno collegate né a terra, né ai conduttori di protezione, né alle masse di altri circuiti elettrici**. Per realizzare adeguatamente questa separazione, **l'alimentazione deve essere fornita da una delle sorgenti seguenti**:

- Un trasformatore di sicurezza;
- Un motore/generatore con avvolgimenti isolati;
- Un gruppo elettrogeno;
- Una batteria;
- Un dispositivo elettronico caratterizzato dall'isolamento galvanico tra ingresso e uscita tale che, anche in caso di guasto, la tensione ai morsetti di uscita non superi 50V in corrente alternata e 120V in continua.

Queste caratteristiche rendono questi circuiti **sicuri rispetto ai contatti indiretti**; per assicurare una protezione **anche rispetto ai contatti diretti, le parti attive dei circuiti SELV, utilizzatori compresi, vanno protette o mediante involucri o con un isolamento in grado di sopportare per un minuto una tensione di 500 V in corrente alternata**. Per i circuiti con tensione nominale non superiore a 25 V in corrente alternata oppure a 60 V in corrente continua, non è richiesta alcuna protezione, a meno che questi non si trovino in ambienti critici, come, per esempio, quelli bagnati. Le prese a spina dei sistemi SELV non devono avere alcun contatto per il collegamento del conduttore di protezione e non devono essere compatibili con quelle di altri sistemi.

- **Protection Extra - Low Voltage (PELV)**, a bassissima tensione di protezione

Per questo tipo di circuiti **valgono le prescrizioni indicate per i circuiti SELV riguardo la fonte di energia e la separazione dagli altri circuiti**; in questo caso, tuttavia, le masse dei circuiti ed un punto del circuito attivo vanno collegate a terra. In pratica, **il sistema PELV presenta le stesse**

**caratteristiche del sistema SELV, con la sola differenza di avere un punto a terra.** Essi garantiscono la protezione contro i contatti indiretti, mentre quella contro i contatti diretti si ottiene proteggendo le parti attive per mezzo di involucri o barriere, oppure con un isolamento capace di sopportare per un minuto un tensione di 500 V in corrente alternata.

- **Functional Extra - Low Voltage a (FELV),** a bassissima tensione funzionale

L'alimentazione di questi circuiti può avvenire mediante un trasformatore (non di sicurezza), un variatore di tensione oppure un alimentatore elettronico. La protezione contro i contatti indiretti può essere assicurata collegando le masse dei componenti del circuito al conduttore di protezione del circuito primario, ovviamente provvisto di opportuni sistemi di protezione, o collegando una parte attiva del circuito al conduttore di protezione del circuito primario sul quale deve essere prevista la protezione mediante interruzione automatica. Soltanto un isolamento, proporzionato in base alla tensione del circuito primario, è previsto per garantire la separazione per questi circuiti. La protezione contro i contatti diretti è realizzata mediante involucri o barriere, oppure con un isolamento corrispondente alla minima tensione di prova richiesta dal circuito primario e, comunque, non inferiore ad 1.5kV applicati per un minuto. Le prese a spina vanno munite di un contatto per il collegamento del conduttore di protezione e devono risultare incompatibili con quelle di altri sistemi elettrici.

## **ALTRI TIPI DI PERICOLI ELETTRICI E IL SOCCORSO DI EMERGENZA**

L'elettricità può rappresentare un pericolo non solo quando qualcuno entra in contatto con essa ma anche in maniera indiretta, innescando una serie di fenomeni che possono arrecare danno a persone o cose. Tra questi, si distinguono:

- **Incendi**

Fenomeno causato da guasti nell'impianto elettrico, può essere evitato seguendo delle normative che mantengono i livelli di pericolo sotto soglie accettabili. I guasti dell'impianto elettrico possono causare l'innesto di esplosioni se l'impianto è all'interno di atmosfere sature di sostanze esplosive; in questi casi occorre prevenire innanzitutto l'emissione di queste sostanze, tramite adeguati metodi di contenimento e ventilazione, e, poi, ridurre la probabilità di formazione di inneschi elettrici agendo sull'impianto stesso.

Durante la progettazione di un impianto elettrico, si devono delimitare delle zone dove la probabilità di incendio o di esplosione non è trascurabile e in cui la sicurezza degli impianti deve essere rinforzata per mezzo di particolari misure; queste zone sono conosciute come **zone AD**.

Il primo passo consiste nell'identificazione dei cosiddetti centri di pericolo, i punti dell'impianto che possono emettere sostanze pericolose; questi centri sono stati classificati in tre gruppi:

- **Centri di pericolo di primo grado ad emissione continua,** che emettono molto frequentemente sostanze pericolose;
- **Centri di pericolo di primo grado,** che possono emettere sostanze pericolose in condizioni di funzionamento particolari;

- **Centri di pericolo di secondo grado**, che emettono sostanze pericolose soltanto in caso di guasto.

L'estensione delle zone AD dipende da diversi parametri:

- Più elevata è la portata dell'emissione di sostanze pericolose e maggiore sarà l'estensione della zona;
- Più elevata è la velocità di emissione e minore sarà l'estensione della zona (un'elevata velocità di emissione di vapori favorisce la dissoluzione in aria delle sostanze pericolose);
- Più elevate sono la temperatura di emissione e/o la temperatura di infiammabilità e maggiore sarà l'estensione della zona;
- Più alto è il peso specifico della sostanza in relazione all'aria e maggiore sarà l'estensione della zona;
- Più elevata è la velocità dell'aria e minore sarà l'estensione.

Gli impianti elettrici che hanno misure di sicurezza contro incendi ed esplosioni sono chiamati **impianti a sicurezza AD** (o **impianti AD**). Per realizzare un impianto AD non è sufficiente utilizzare componenti speciali ma occorre rispettare le norme generali e particolari degli impianti elettrici, soprattutto per quanto riguarda il dimensionamento, in modo che i componenti siano in grado di sopportare le sollecitazioni meccaniche, chimiche, termiche ed elettriche.

- **Elettricità statica**

Sono moltissimi i meccanismi che facilitano la formazione di **cariche elettrostatiche**: i processi chimici e fisici, le espulsioni di gas, gli effetti termoionici, e così via. Se **due corpi di natura elettrica diversa sono messi in contatto, immediatamente si produce un passaggio di cariche da un corpo all'altro**; quando **i due corpi si separano, le cariche tendono ad annullarsi attraverso gli ultimi punti di contatto**. Ciò, tuttavia, **non avviene completamente se i soggetti sono isolanti** (a causa della difficoltà di movimento delle cariche su di essi), **caricandosi elettricamente con polarità opposte**. Questi fenomeni sono molto frequenti negli stabilimenti di qualsiasi tipo e la quantità di carica accumulata dipende da numerosi parametri che, nella pratica, non sono facilmente e neppure totalmente identificabili.

**L'elettricità statica accumulata in un corpo può scaricarsi attraverso una persona**, generando una corrente impulsiva che, pur non essendo pericolosa, può risultare spiacevole e talvolta dolorosa.

**Il maggiore pericolo** dell'elettricità statica è **il possibile innesco di incendi o esplosioni**, qualora la scarica avvenga in un'atmosfera esplosiva; affinché ciò avvenga, **è necessario che l'energia della scarica sia maggiore della minima energia di accensione dell'atmosfera**, che dipende, tra l'altro, da fattori come la distanza, la forma e la natura dei corpi che producono la scarica. Ad ogni modo, **come misura di sicurezza in un impianto, si deve garantire che l'energia posseduta dalle cariche accumulate non superi una frazione dell'energia minima di accensione dell'atmosfera presente**; pertanto, si possono individuare **tre possibili metodi** per la protezione contro i pericoli dell'elettricità statica:

- **La riduzione della formazione delle cariche**, limitando le condizioni di generazione (ovvero, riducendo la velocità relativa dei corpi a contatto, modificando le superfici di contatto, riducendo la velocità dei liquidi e dei gas attraverso le loro tubazioni o modificando la natura dei liquidi tramite opportuni additivi);

- **La neutralizzazione delle cariche**, tramite l'emissione di ioni (che tendono ad annullare le cariche formatesi sulla superficie dei corpi) nello spazio in prossimità dei corpi che si intende proteggere;
- **La dispersione a terra delle cariche** man mano che queste si formano, richiedendo necessariamente il collegamento a terra (sebbene sia il metodo più efficace).
- Fulminazioni

La pericolosità dei **fulmini** nasce dal fatto che essi possono **produrre scariche elettriche di considerevole grandezza in qualsiasi luogo**. Il problema della schermatura contro i fulmini consiste nella **ricerca dei metodi e dei mezzi atti a proteggere una qualsiasi installazione dalle scariche atmosferiche dirette**; a seconda della natura e delle caratteristiche dell'impianto e a seconda che si debba proteggere l'intero complesso o soltanto determinate parti di esso, il problema può assumere facce differenti, anche se tutte strettamente correlate alla natura del meccanismo della scarica.

**L'efficacia dell'aiuto** che può essere prestato **ad una persona colpita da elettrocuzione** dipende essenzialmente dalla **rapidità con la quale i soccorritori operano**. La **prima operazione** è, ovviamente, quella di **togliere tensione all'impianto ed allontanare il colpito dalle parti in tensione**; qualora non fosse possibile togliere subito la tensione, **si devono tranciare**, mediante pinze dotate di impugnatura isolante, **i conduttori e sperare che questa operazione non dia luogo ad inconvenienti peggiori**.

Se non si dispone nemmeno delle pinze, allora **bisogna cercare di staccare il corpo della persona folgorata dalle parti in tensione**; questa operazione è **moltò pericolosa** e richiede **oculatezza e tempestività**: il soccorritore dovrà **isolarsi dal pavimento** (con delle pedane isolanti, pezzi di legno secco, scarpe di gomma) e **non toccherà mai a mani nude il corpo del mal capitato**, bensì interporrà guanti isolanti o indumenti, purché asciutti, di grosso spessore. **Il distacco dell'infortunato deve essere effettuato con movimento rapido e deciso**, avendo cura di **non afferrarlo per delle parti umide**, come, per esempio, le ascelle. Se **l'infortunato è attaccato al conduttore con due mani**, è più facile **staccare prima una mano e dopo l'altra**, mentre se **è percorso da una corrente di scarica verso terra**, lo si isoli **prima da terra e poi dal conduttore**.

Non potendo ottemperare a queste precauzioni e dovendo operare direttamente sui conduttori in tensione, **si ricordi di non agire mai a mani nude**, ma di adoperare bastoni, scale oppure altri isolanti. Si rammenti che **tutte le raccomandazioni precedenti vanno commisurate ai valori delle tensioni in gioco**: quanto più sono elevate, tanto maggiore devono essere le precauzioni da adottare per mantenere il soccorritore isolato da terra. Non si dimentichi, infine, di **chiamare con urgenza un medico**.

**Ogni ambiente di lavoro deve disporre del materiale per una medicazione di pronto intervento**; è buona norma **affidare la cassetta per il pronto soccorso ad un responsabile che ne sappia adoperare il contenuto e che ne curi la manutenzione**. Si inserisca nella cassetta un lista con i recapiti degli ospedali più vicini, del medico di fabbrica, di un altro medico abitante nelle vicinanze, della Croce Rossa Italiana o di altre organizzazioni simili, dei Vigili del Fuoco, dei Carabinieri e degli Agenti di Pubblica Sicurezza.

Se **l'infortunato**, una volta lasciata la presa con le parti in tensione, **non mostra segni di vita**, è necessario **iniziare senza indugi la respirazione artificiale**, che deve essere **praticata ininterrottamente**, anche per parecchie ore, **fino a quando l'infortunato non dà segni di vita**. Prestate attenzione che l'infortunato non abbia sostanze o corpi estranei in bocca e che la lingua non si riversi all'indietro, occludendo la gola. **È assolutamente proibito somministrare bevande all'infortunato durante la respirazione artificiale; solo a respirazione ristabilita**, si possono

somministrare bevande non alcoliche, **in piccole dosi, a cucchiai**. In ogni caso è bene **tenere ben caldo l'infortunato**. Dato che **i tempi di intervento sono spesso prolungati**, è opportuno ricorrere all'avvicendamento dei soccorritori per evitare che la stanchezza di uno di essi possa compromettere l'efficacia del soccorso.

Dopo aver steso l'infortunato sul dorso, seguendo il **metodo bocca a bocca, si piega la testa fortemente indietro** ponendogli sotto le spalle una coperta o degli indumenti affinché **il cavo orale sia quasi verticale rispetto al suolo**. Ponendosi in ginocchio, **il soccorritore apre la bocca dell'infortunato e, tenendo chiuse con due dita le narici, gli soffia aria con forza nella bocca finché il torace del soggetto non si solleva** (se ciò non accade ogni sforzo di rianimazione è vano). Dopo questa prima fase **il soccorritore allontana la bocca** da quella dell'infortunato **in modo che l'aria insufflata possa uscire**. Si ripete poi l'operazione precedente (ogni 3 o 4 secondi), sempre osservando che **il torace si sollevi**. Questo metodo è considerato il più efficace ed il più semplice da applicare.

Si è già avuto modo di sottolineare che **spesso il contatto con parti in tensione può provocare delle ustioni**, cioè delle lesioni dei tessuti provocate dal calore prodotto dall'arco elettrico che può innescarsi tra le diverse parti in tensione e la parte del corpo umano in contatto con esse. Le ustioni possono essere **di tre tipi: ustioni di primo grado**, se la pelle è arrossata, gonfia, lucida, dolente (in tal caso è opportuno ungere la parte ustionata con olio di vaselina o pomate idonee, affinché il dolore diminuisca rapidamente) **ustioni di secondo grado**, quando sulla pelle si formano vesciche contenenti siero (che bisogna evitare di rompere, coprendo con garza sterile e fasciando con benda) e **ustioni di terzo grado**, per le quali vi è distruzione, più o meno profonda, dei tessuti (che vanno ricoperti con garza sterile e fasciati nell'attesa del medico). **Le ustioni estese**, anche se di primo grado, **possono provocare pericolosi collassi**; per lenire il dolore, **si somministri all'infortunato degli antidolorifici** e, se sente freddo, **lo si copra, magari dandogli bevande calde** (niente alcolici). Non si indugi e, **in mancanza del medico, si trasporti il ferito in ospedale**. Si possono avere anche **ustioni da acidi**: in questo caso è bene, innanzitutto, detergere a lungo le parti infortunate; se la pelle è arrossata, spalmate del grasso; se la ferita è profonda, chiamate il medico. Occorre, in ogni caso, **lavarsi le mani prima di compiere qualsiasi operazione e la respirazione artificiale**, se necessaria, non deve essere sospesa durante il trattamento delle ustioni.

**L'azione di un fulmine** che scarica la propria elettricità **addosso ad una persona provoca**, talvolta, soltanto uno stato di **shock e delle lievi ustioni**, mentre **risulta mortale se il fulmine colpisce la testa ed attraversa tutto il corpo**, prima di scaricarsi a terra. A volte **possono essere causate anche ustioni molto gravi, fratture dovute agli spasmi muscolari involontari e lacerazioni della pelle**. **Un altro rischio è che gli indumenti di chi viene colpito prendano fuoco**. Il primo soccorso da portare a chi è stato colpito da un fulmine consiste nel far **distendere subito a terra la vittima e proteggere il volto da eventuali fiamme**; il **fuoco** può essere **causa di morte anche per la mancanza di ossigeno** che induce. Se gli abiti della vittima prendono fuoco, **si tenti di spegnere le fiamme versando dell'acqua oppure avvolgendo le parti interessate in una coperta, un asciugamano o un cappotto**. In attesa dei soccorsi, **si tenga al caldo l'infortunato**, coprendolo, se necessario, con i vostri indumenti.

**Le probabilità di essere colpiti direttamente da un fulmine sono scarse** e, secondo recenti studi condotti dalla American Meteorological Society, **la maggior parte delle vittime si verifica nei primi momenti di un temporale**, con molta probabilità per la **sottovalutazione del rischio**. Pertanto, vale la pena osservare alcune norme di sicurezza:

- Evitare di rifugiarsi sotto gli alberi di alto fusto, specialmente se isolati, perché i fulmini tendono a colpire le punte più elevate;

- Allontanarsi dai recinti, dalle altezze o dalle strutture metalliche, abbandonando temporaneamente persino l'ombrellino;
- Se si viene sorpresi dai fulmini in una zona priva di ripari, ci si stenda a terra assumendo una posizione accucciata;
- Non bisogna rimanere in tenda se si è in un campeggio ma va bene restare completamente chiusi nella roulotte;
- Se si è in macchina/moto/bicicletta si resti dentro evitando di toccare le parti metalliche, dato che gli pneumatici sono ottimi isolanti;
- Al mare bisogna rapidamente uscire dall'acqua ed allontanarsi dalla spiaggia, riparandosi in un luogo chiuso e restando seduti o accucciati;
- Se si viene sorpresi da fulmini in barca è necessario rientrare in porto al più presto, restando lontani dall'albero o da strutture metalliche e calando l'ancora in modo che la catena passi attorno all'albero, così che un eventuale fulmine venga scaricato a mare;
- In prossimità di alte strutture, ci si segga su qualcosa di asciutto, raccogliendo i piedi, sollevandoli da terra e tenendo la testa riparata tra le spalle;
- Si cerchi rifugio negli edifici più grandi, evitando le piccole costruzioni isolate, e, una volta in casa, si stacchi subito la spina della televisione e dell'antenna.

