

TEORIA DEI SEGNALI

Prof. Caleffi Marcello, Mattera Davide – A.A. 2023/24

Luca Maria Incarnato

INDICE DEGLI ARGOMENTI

SEGNALI E SISTEMI

1. CLASSIFICAZIONE ED ELABORAZIONE DEI SEGNALI (p. 3)
2. SEGNALI NOTEVOLI (p. 4)
3. OPERAZIONI ELEMENTARI SUI SEGNALI (p. 7)
4. SEGNALI SINUSOIDALI (p. 13)
5. CARATTERIZZAZIONE DEI SEGNALI: ENERGIA E POTENZA (p. 16)
6. FUNZIONI DI CORRELAZIONE (p. 20)
7. SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (p. 24)
8. CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER (p. 28)
9. SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE E PROPRIETÀ DELLA SERIE DI FOURIER (p. 31)
10. RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE (p. 35)
11. LA SERIE DI FOURIER IN TEMPO DISCRETO (p. 37)
12. DALLA SERIE ALLA TRASFORMATA DI FOURIER (p. 39)
13. CONVERGENZA E PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER (p. 42)
14. L'IMPULSO DI DIRAC E LA \mathcal{F} – TRASFORMATA GENERALIZZATA (p. 48)
15. LE FORMULE DI POISSON (p. 55)
16. LA TRASFORMATA DI FOURIER IN TEMPO DISCRETO (p. 57)
17. ANALISI DEI SISTEMI NEL DOMINIO DEL TEMPO (p. 66)
18. ANALISI DEI SISTEMI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA (p. 73)
19. IL FILTRAGGIO DEI SEGNALI (p. 77)
20. CARATTERIZZAZIONE ENERGETICA DEI SEGNALI (p. 80)
21. CONVERSIONE ANALOGICO – DIGITALE (p. 84)
22. CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE REALI (p. 92)

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

23. I VARI APPROCCI ALLA TEORIA DELLA PROBABILITÀ (p. 97)
24. TECNICHE DI CALCOLO COMBINATORIO (p. 100)
25. IL CONCETTO DI VARIABILE ALEATORIA (p. 102)
26. VARIABILI ALEATORIE DISCRETE E REALI (p. 105)
27. LE TRE RAPPRESENTAZIONI DI UN NUMERO ALEATORIO (p. 108)
28. LA MEDIA STATISTICA DI UN NUMERO ALEATORIO (p. 111)
29. IL TEOREMA DI TRASFORMAZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA (p. 116)
30. DESCRIZIONI SINTETICHE ED ESEMPI DI VARIABILI ALEATORIE (p. 121)
31. IL CONCETTO DI VETTORE ALEATORIO (p. 127)
32. LE TRE RAPPRESENTAZIONI DI UN VETTORE ALEATORIO (p. 131)
33. LA MEDIA STATISTICA DI UN VETTORE ALEATORIO (p. 132)
34. IL TEOREMA DI TRASFORMAZIONE DI UN VETTORE ALEATORIO (p. 134)
35. COMPONENTI ALEATORIE DI VETTORI ALEATORI (p. 137)
36. IL CONDIZIONAMENTO TRA DUE VARIABILI ALEATORIE (p. 140)
37. LA DESCRIZIONE SINTETICA DI UN VETTORE ALEATORIO (p. 147)
38. IL VETTORE GAUSSIANO E LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI (p. 149)

SEGNALI E SISTEMI

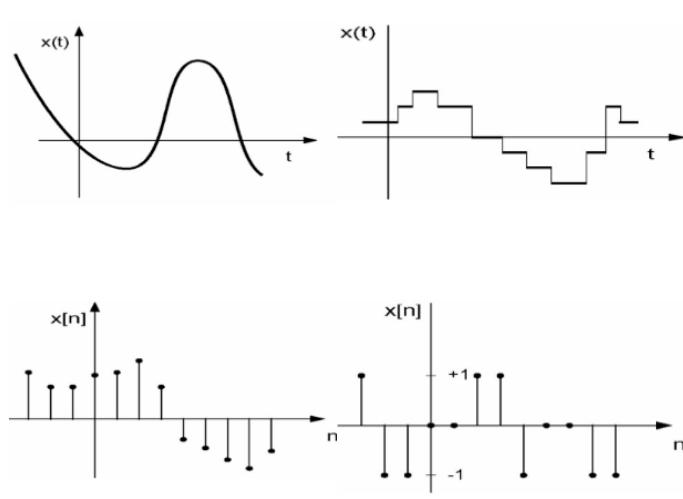
CLASSIFICAZIONE ED ELABORAZIONE DEI SEGNALI

Un **segnale** è un **modello matematico** che descrive le **variazioni di una o più arbitrarie grandezze fisiche in funzione di altre grandezze fisiche** e viene usato come **vettore di un'informazione**, come ad esempio un segnale audio o un'immagine; essi possono essere classificati in base a tre criteri:

1. In funzione del **dominio** (variabile indipendente), parlando di segnali monodimensionali (una sola variabile) o multidimensionali (più variabili), e del **codominio** (variabile dipendente), parlando di segnali scalari (il valore assunto dal segnale è uno scalare) o vettoriali (il valore assunto dal segnale è un vettore);
2. In funzione del **tempo** e dell'**ampiezza**, secondo il seguente schema;

Dominio/Codomino	Aampiezza continua	Aampiezza discreta
Tempo Continuo	Segnale analogico	Segnale quantizzato
Tempo Discreto	Sequenza	Segnale digitale (o numerico)

Graficamente questi quattro tipi di segnali figurano come segue:



3. In funzione dell'**aleatorietà**, parlando di segnali deterministici (o determinati, quando lo si può descrivere con una funzione espressa analiticamente, in forma tabellare e grafica) e segnali aleatori (quando non si conosce l'evoluzione del segnale se non dopo averlo osservato a posteriori).

Per **analizzare** un segnale è importante **caratterizzarlo mediante parametri sintetici** (media temporale, energia e potenza), **valutarne la velocità di variazione** (funzione di autocorrelazione, spettro e banda) e **valutarne il livello di somiglianza** con un altro segnale (funzione di correlazione).

Ovviamente possono presentarsi segnali poco pratici da studiare, in tale ottica è necessario **elaborare il segnale stesso per trasformarlo in una forma più utile** in relazione alla specifica applicazione; ad esempio, si elabora un segnale acquisito da un sensore biometrico per estrarre l'informazione relativa al battito cardiaco, oppure per trasferire un segnale utilizzando un dato canale di trasmissione. Questo tipo di elaborazioni sono definite **elaborazioni desiderate**, in quanto il loro effetto è utile a

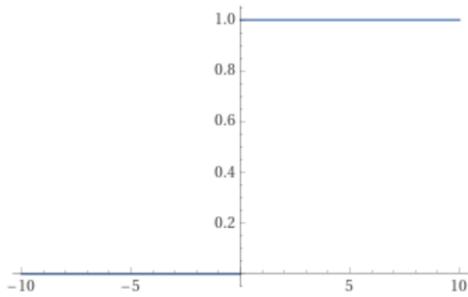
chi studia il segnale in esame, ma ci possono essere anche **elaborazioni il cui effetto è controproducente**, in tal caso si parla di **elaborazioni indesiderate**; esse avvengono **senza volontà** e si presentano come **distorsioni o disturbi introdotti dal canale di trasmissione**, l'unica contromisura possibile è analizzare gli effetti di questi disturbi sul segnale per “ricostruire” la sua forma originale.

SEGNALI NOTEVOLI

I **segnali** studiati in questa sede sono perlopiù segnali **deterministici**; pertanto, alcuni di essi seguono delle **leggi note** e spesso ricorrenti; tali segnali sono definiti segnali notevoli:

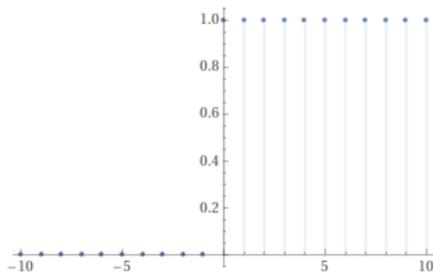
- **Gradino unitario**
 - Tempo Continuo:

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \geq 0 \\ 0 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$



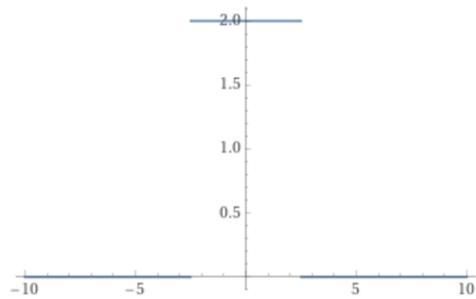
- Tempo Discreto:

$$u[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n \geq 0 \\ 0 & \Leftrightarrow n < 0 \end{cases}$$



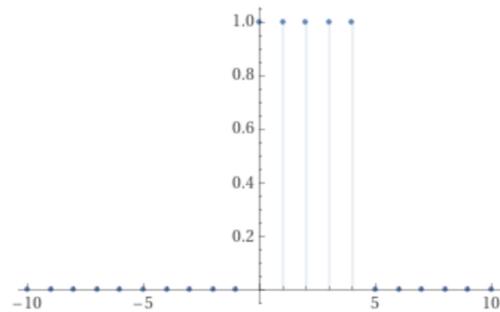
- **Finestra rettangolare**
 - Tempo Continuo:

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A & \Leftrightarrow \left|\frac{t}{T}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \Leftrightarrow \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



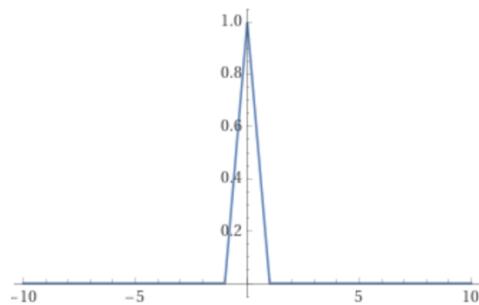
- Tempo Discreto:

$$x[n] = R_N[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \Leftrightarrow n < 0 \vee n > N-1 \end{cases} = u[n] - u[n-N]$$



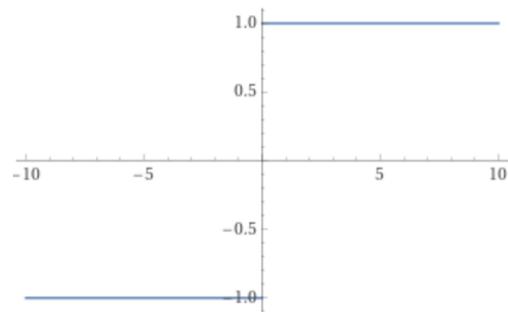
- Finestra triangolare (Tempo Continuo)

$$\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 - |t| & \Leftrightarrow |t| \leq 1 \\ 0 & \Leftrightarrow |t| > 1 \end{cases}$$



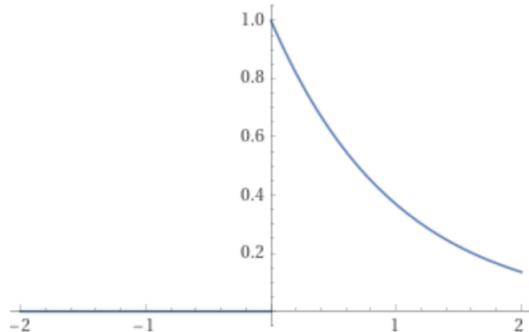
- Funzione segno (Tempo Continuo)

$$\text{sign}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \geq 0 \\ -1 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$



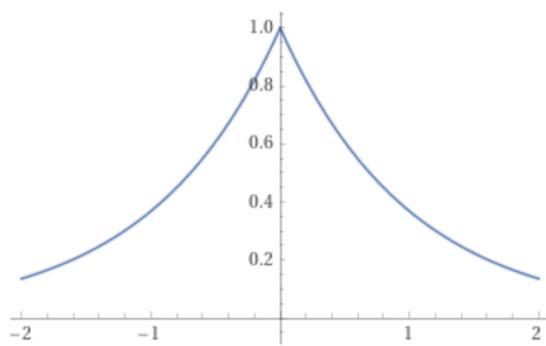
- **Impulso esponenziale monolatero (Tempo Continuo)**

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-t} & \Leftrightarrow t \geq 0 \\ 0 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases} = u(t)e^{-t}$$



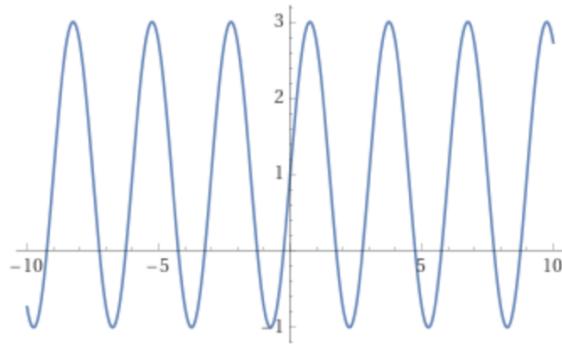
- **Impulso esponenziale bilatero (Tempo Continuo)**

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & \Leftrightarrow t \geq 0 \\ e^t & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases} = u(t)e^{-t} + u(-t)e^t$$



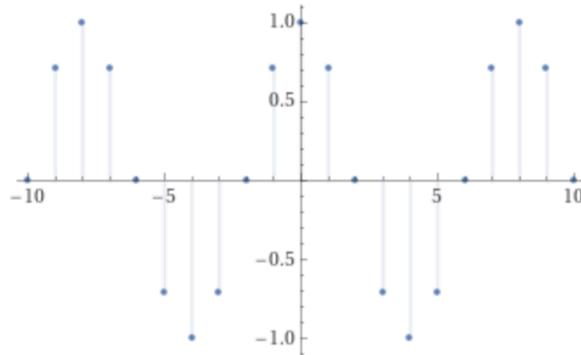
- **Segnale sinusoidale (Coseno e Seno sono sfasati di $\pi/2$)**
 - Tempo Continuo

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$



- Tempo Discreto

$$x[n] = A \cos(2\pi F_0 n + \phi)$$



Tutti i segnali sono caratterizzati da una grandezza, detta **durata del segnale**, che descrive come si comporta la funzione al di fuori di un dato intervallo del dominio. In funzione della durata, un segnale può essere:

- A **durata rigorosamente limitata**, se al di fuori di un dato intervallo assume valori nulli (ad esempio la finestra rettangolare);
- A **durata illimitata**, se assume valori non trascurabili sull'intero dominio (ad esempio la funzione segno o un segnale sinusoidale);
- A **durata praticamente limitata**, se al di fuori di un dato intervallo decade asintoticamente a zero (ad esempio gli impulsi esponenziali).

Tra i segnali notevoli figurano quelli sinusoidali (a tempo continuo, nel discreto l'affermazione non è sempre valida) per una loro peculiarità, sono segnali periodici; un segnale si dice periodico se:

- Tempo Continuo, $x(t) = x(t + T_0) \forall t$ e con $T_0 > 0$ costante positiva;
- Tempo Discreto, $x[n] = x[n + N_0] \forall n$ e con $N_0 > 0$ intero positivo.

OPERAZIONI ELEMENTARI SUI SEGNALI

Le **operazioni elementari** che si possono effettuare su uno o più segnali sono **classificate in base alla variabile su cui agiscono**: si parla di **trasformazioni di ampiezza** quando viene modificata la **variabile dipendente** e **trasformazioni temporali** quando viene modificata la **variabile indipendente**; le prime sono chiaramente più facili da interpretare rispetto alle seconde.

Le possibili **trasformazioni di ampiezza** sono la **somma** di segnali, il **prodotto** di segnali e il **prodotto** di un segnale per una costante:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t)y_2(t)$$

$$y(t) = Ay_1(t)$$

Per quest'ultimo tipo di operazione va valutato il parametro A perché in base a come esso si presenta il segnale si comporta in modi diversi:

- $A > 1$ si parla di **amplificazione del segnale**;
- $0 < A < 1$ si parla di **attenuazione del segnale**;

- $A < 0$ si parla di **ribaltamento** (unito ad un'attenuazione o ad un'amplificazione in base al valore del modulo di A).

Per queste trasformazioni **non è necessario distinguere tra Tempo Continuo e Tempo Discreto**, mentre lo è per le trasformazioni temporali.

Per **cambiamento di scala** si intende l'operazione temporale **analogia al prodotto per uno scalare** che si è visto nelle trasformazioni di ampiezza; tuttavia, in questo caso lo scalare è moltiplicato per la variabile indipendente. Si distinguono i due casi:

- Tempo Continuo

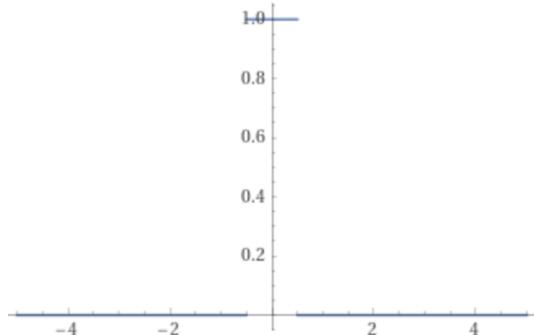
$$y(t) = x(at)$$

Quest'operazione è definita in funzione del valore del parametro a :

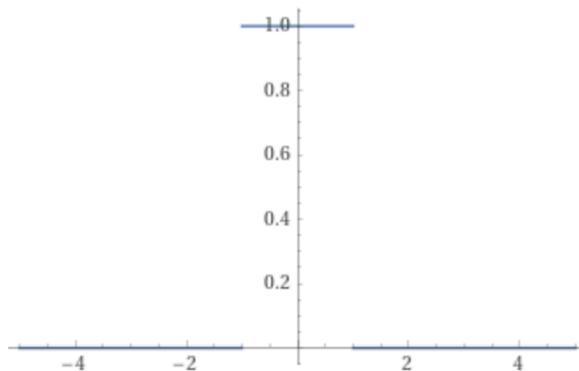
- $a > 1$ si parla di **compressione dei tempi**, risultando in un accorciamento del segnale;
- $0 < a < 1$ si parla di **dilatazione dei tempi**, risultando in un allungamento del segnale;
- $a < 0$, si parla di **riflessione del segnale** (unito ad una compressione o ad una dilatazione in base al valore del modulo di a).

Nell'esempio che segue, il segnale viene dilatato di $a = \frac{1}{2}$:

$$x(t) = \Pi(t)$$



$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$



Il **cambiamento di scala** viene spesso indicato come prodotto di uno scalare per la variabile indipendente, ma può anche essere rappresentato **come un rapporto**:

$$y(t) = x\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Tempo Discreto

Con il **Tempo Discreto** il cambiamento di scala è un'operazione delicata, in quanto **c'è il rischio che non tutti i valori (naturali) del dominio abbiano immagine**. Preso uno scalare intero $M \in \mathbb{N}$ si distinguono:

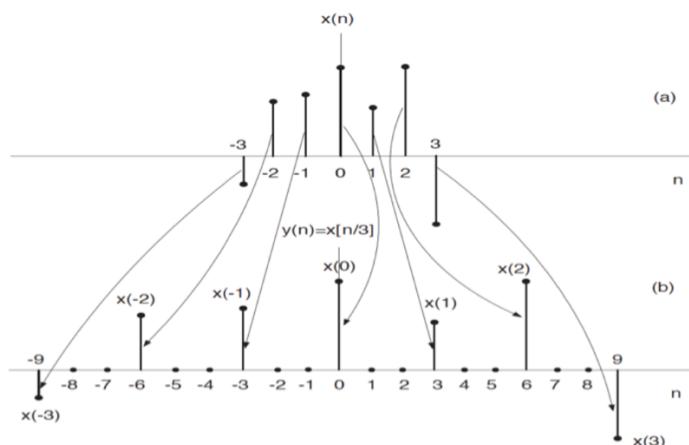
- **Sovracampionamento (oppure Zero Padding)**

$$x_{ZP}[m] = x\left[\frac{n}{M}\right]$$

Come si può notare dall'espressione analitica, **non tutti gli $n \in \mathbb{N}$ corrispondono in un $\frac{n}{M} \in \mathbb{N}$ che ha immagine, per riempire i vuoti lasciati da questi $n \in \mathbb{N} : \frac{n}{M} \notin \mathbb{N}$ si aggiunge uno zero in quella posizione** (da qui la nomenclatura Zero Padding); si può astrarre una **legge generale** per cui:

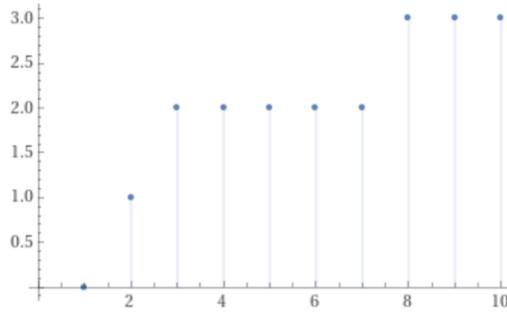
$$x_{ZP}\left[\frac{n}{M}\right] = \begin{cases} x[m] & \Leftrightarrow n = mM \\ 0 & \Leftrightarrow n \neq mM \end{cases}$$

Ovvero, **la sequenza $x_{ZP}[m]$ viene ottenuta dalla sequenza $x[n]$ inserendo $M - 1$ zeri tra due campioni consecutivi**:

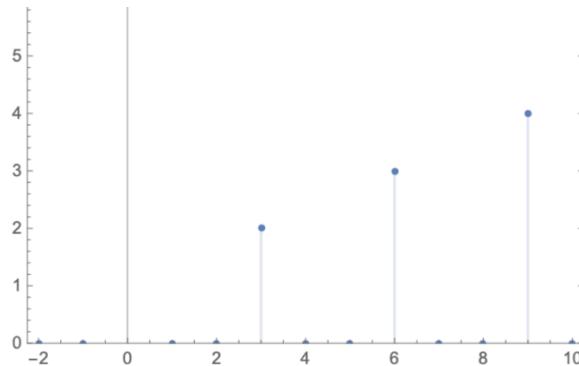


L'operazione prende anche il nome di **espansione in Tempo Discreto**. Per fare un esempio concreto di sovraccampionamento si osservino i seguenti segnali:

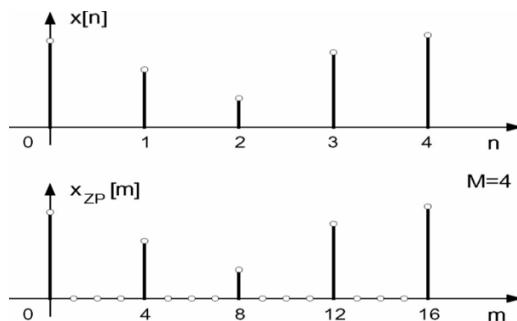
$$x[n] = \lceil \log_2[n] \rceil$$



$$x_{ZP}[n] = \left\lceil \log_2 \left[\frac{n}{3} \right] \right\rceil$$



Il **sovracampionamento** è un'operazione **reversibile**, infatti si possono ripristinare i valori originali semplicemente **moltiplicando per M** (operazione di decimazione):



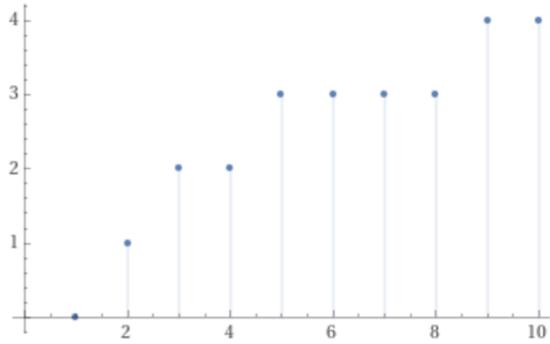
- **Decimazione**

$$y[n] = x[Mn]$$

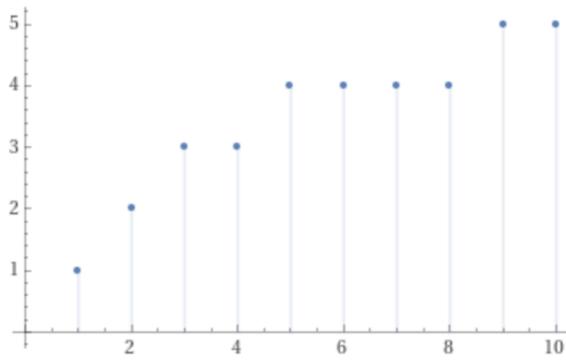
È l'operazione **duale al sovracampionamento** (infatti, quando in tandem rimuove tutti gli zeri che introduce lo Zero Padding), in cui al posto di dividere **si moltiplica per M** :

Ad esempio:

$$x[n] = \lceil \log_2[n] \rceil$$



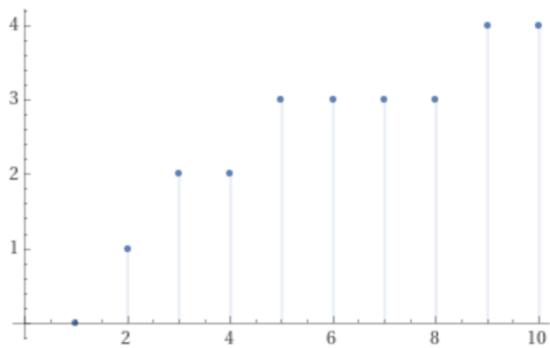
$$y[n] = x[2n] = \lceil \log_2[2n] \rceil$$



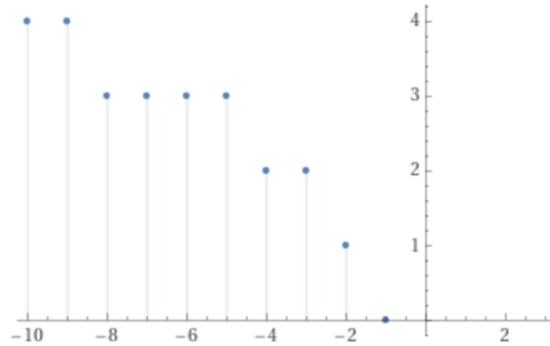
- **Riflessione**

Così come in Tempo Continuo, anche in Tempo Discreto c'è la possibilità di moltiplicare la variabile indipendente per un valore negativo, questo tipo di operazione è detta **riflessione** e permette al segnale di essere riflesso **simmetricamente rispetto all'asse y**, a differenza del **ribaltamento** che riflette **simmetricamente rispetto all'asse temporale**. Un esempio di riflessione è:

$$x[n] = \lceil \log_2[n] \rceil$$



$$y[n] = x[-n] = \lceil \log_2[-n] \rceil$$



L'esempio è fatto in Tempo Discreto, ma la riflessione può essere fatta anche in Tempo Continuo:

$$y(t) = x(-t)$$

$$y[n] = x[-n]$$

Riflessione e ribaltamento non sono completamente scollegati, infatti combinando le due operazioni si può determinare se un segnale è **pari o dispari**:

$$x[n] \text{ è pari} \Leftrightarrow x(t) = x(-t)$$

$$x[n] \text{ è dispari} \Leftrightarrow x(t) = -x(-t)$$

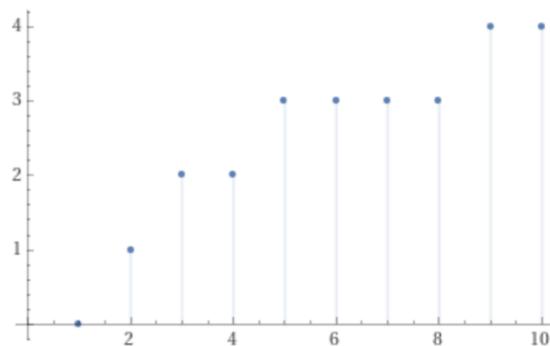
Un'ultima operazione temporale possibile su un segnale è quella di **traslazione**, che permette di spostare il segnale lungo l'asse temporale a destra e a sinistra semplicemente sottraendo o aggiungendo una costante alla variabile indipendente. L'operazione è **equivalente sia in Tempo Continuo che in Tempo Discreto**:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

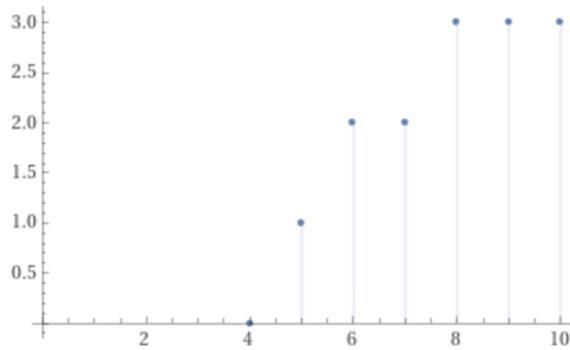
$$y[n] = x[n - n_0]$$

Ad esempio:

$$x[n] = \lceil \log_2[n] \rceil$$



$$y[n] = x[n - 3] = \lceil \log_2[n - 3] \rceil$$



Come si può notare, il segnale è stato shiftato di tre campioni a destra.

In generale **le operazioni tra due segnali non sono commutative, soprattutto quelle temporali**; ad esempio, si consideri un segnale e lo si trasli dopo averlo riflesso:

$$x[n] \rightarrow y[n] = x[-n] \rightarrow z[n] = y[n - n_0] = x[-n + n_0]$$

Mentre, preso lo stesso segnale, lo si rifletti dopo averlo traslato:

$$x[n] \rightarrow y[n] = x[n - n_0] \rightarrow z[n] = y[-n] = x[-n - n_0]$$

Si può notare che invertendo l'ordine delle operazioni il segnale cambia.

Infine, tra le operazioni eseguibili su un segnale si individuano anche il **campionamento** e la **quantizzazione**, che prendono in esame il segnale e ne modificano la temporificazione. Per il campionamento:

$$x(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \rightarrow y[n] \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Per la quantizzazione:

$$y[n] \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow q[n] \in \{q_1 \dots q_M\}, n \in \mathbb{Z}, M \in \mathbb{N}$$

Si può facilmente intuire che **nel primo caso non si perdono informazioni e nel secondo si**, perché il codominio del segnale durante il campionamento non cambia ma si riduce durante una quantizzazione.

SEGNALI SINUSOIDALI

Un **segnale periodico** è un segnale del tipo:

$$x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \vartheta)$$

Dove **a** è l'ampiezza dell'oscillazione, **f_0** la sua frequenza e **ϑ** la fase iniziale. Come suggerisce il nome, è un segnale periodico descritto da un coseno (o da un seno) e può presentarsi sia in forma di **Tempo Continuo** che in forma di **Tempo Discreto**; tuttavia, tra i due tipi di segnale sinusoidale ci sono alcune differenze sostanziali:

- **Periodicità**

Il segnale $x(t)$ in **Tempo Continuo** è **periodico per ogni frequenza** reale $f_0 \in \mathbb{R}$ possibile, mentre in **Tempo Discreto** $x[n]$ la **periodicità non è garantita**. Per periodicità si intende:

$$\cos(2\pi F_0(n + N_0)) = \cos(2\pi F_0 n + 2\pi F_0 N_0) = \cos(2\pi F_0 n)$$

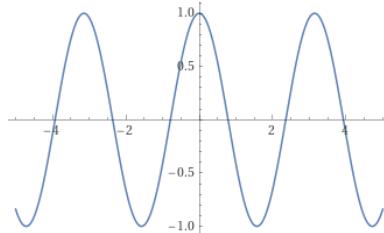
Infatti, si può considerare $2\pi F_0 N_0 = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Quando questa definizione è valida, si può chiamare il parametro $N_0 \in \mathbb{N}$ **periodo del segnale** e viene annoverato come **il più piccolo numero intero che soddisfa la relazione di periodicità**. Ricavando la **frequenza** dalla relazione impostata:

$$F_0 = \frac{k}{N_0} \in \mathbb{Q}$$

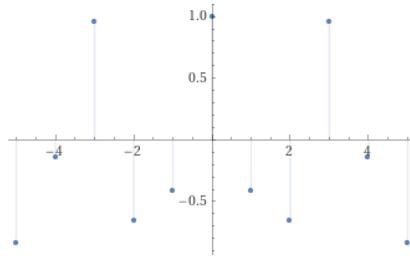
Ciò significa che **un segnale sinusoidale in Tempo Discreto è periodico solo se la sua frequenza è un numero razionale**.

Ad esempio, siano presi i seguenti segnali, uno in Tempo Continuo e uno in Tempo Discreto:

$$x(t) = \cos(2t)$$



$$x[n] = \cos(2n)$$



Il primo segnale è in **Tempo Continuo** e periodico, di periodo $T_0 = \pi$; il secondo, invece, è un **segnale in Tempo Discreto che non può essere periodico** perché **non è possibile trovare un periodo $N_0 \in \mathbb{N}$ che renda la frequenza un numero razionale**:

$$F_0 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{Z}, N_0 \in \mathbb{N} : F_0 = \frac{k}{N_0}$$

E quindi **il segnale è aperiodico**.

Con un **segnale periodico in Tempo Continuo** si può assiomaticamente dire che **il periodo è l'inverso della frequenza** ma questa definizione **non è valida in Tempo Discreto**; ad esempio, il segnale:

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{3}{8}n\right)$$

È un segnale periodico di periodo 8 e la sua frequenza non è $\frac{1}{8}$ ma $\frac{3}{8}$. Per ottenere il **periodo** di un qualsiasi segnale in Tempo Discreto si può prelevare il **denominatore della frazione che descrive la frequenza** del segnale:

$$F_0 = \frac{k}{N_0}$$

Il **numeratore**, invece, rappresenta il **verso di percorrenza** ($\operatorname{sgn} k = 1$ e orario $\operatorname{sgn} k = -1$) e il **numero di giri** ($|k|$) che il fasore compie prima di riportarsi in posizione iniziale; nell'esempio precedente il numero di giri è 3 in verso antiorario.

Diversamente dai **segnali periodici in Tempo Continuo**, dove un **aumento della frequenza implica una riduzione del periodo**, in **Tempo Continuo il periodo può al più aumentare o rimanere lo stesso**:

$$F_0 = \frac{1}{8} \rightarrow F'_0 = \frac{3}{8} \Rightarrow N_0 = 8 = N'_0$$

$$F_0 = \frac{1}{3} \rightarrow F'_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow N_0 = 3 \rightarrow N'_0 = 4$$

- **Sinusoidi a frequenze distinte**

A **Tempo Continuo**, una **sinusoide** è caratterizzata dalla **propria frequenza**, quindi **sinusoidi a frequenze diverse non coincidono**; questa affermazione **non può essere traslata in Tempo Discreto**, dal momento in cui esistono delle condizioni per cui le sinusoidi a frequenze diverse siano equivalenti. Si supponga di aumentare la frequenza di un segnale sinusoidale in Tempo Discreto di un'unità:

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 n) \rightarrow \cos(2\pi(F_0 + 1)n) = \cos(2\pi F_0 n + 2\pi n) = \cos(2\pi F_0 n) = x(t)$$

Da questo esempio si può estrarre una regola generale per determinare se due sinusoidi sono uguali. Sia considerata la **differenza delle frequenze delle due sinusoidi**:

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 n), y(t) = \cos(2\pi F_1 n)$$

$$k = F_0 - F_1$$

Se $k \in \mathbb{Z}$:

$$x(t) = y(t)$$

Ovvero, **due sinusoidi sono equivalenti se la differenza delle loro frequenze è un numero intero**. Sebbene sia una proprietà comoda perché permette di semplificare alcuni calcoli, l'**equivalenza di sinusoidi introduce la polidromia del segnale**, per la quale **uno stesso segnale può essere rappresentato in diversi modi**. Il problema viene risolto introducendo il concetto di **frequenza fondamentale**, ovvero quella frequenza tale che:

$$0 \leq F_0 \leq 1$$

Pertanto, **ogni segnale sinusoidale avrà infinite rappresentazioni analitiche ma una sola avrà il periodo fondamentale** e tutte le altre potranno essere sostituite con essa.

- **Aumento velocità di oscillazione**

In **Tempo Continuo** la **velocità di oscillazione è direttamente proporzionale alla frequenza del segnale**. In **Tempo Discreto** la **polidromia** del segnale sinusoidale **non permette l'esistenza di una proprietà simile**, dal momento in cui all'aumentare della frequenza si incontrerà necessariamente una frequenza equivalente che riporta la velocità di oscillazione al valore precedente l'incremento; da ciò si desume che **in Tempo Discreto la velocità di oscillazione in funzione della frequenza è una funzione periodica di periodo $T = 1$** (le frequenze equivalenti distano almeno di un'unità).

Questa peculiarità conduce ad un ulteriore risultato caratteristico delle sinusoidi in **Tempo Discreto**, ovvero che **la massima velocità di oscillazione si ha per $\Delta F_0 = \frac{1}{2}$** : poiché è una funzione periodica non costante, la velocità di oscillazione dovrà dapprima aumentare e poi diminuire, raggiungendo un massimo proprio a metà del periodo (1/2).

CARATTERIZZAZIONE DEI SEGNALI: ENERGIA E POTENZA

I segnali sono classificabili anche in base alla loro realizzabilità nel concreto:

- Segnali realizzabili;
- Segnali non realistici (servono solo come modelli);
- Segnali privi di senso (che non verranno analizzati in questa sede).

Energia e potenza sono delle quantità numeriche che permettono di **caratterizzare un segnale**. Per **energia di un segnale $x(t)$ in Tempo Continuo** si intende:

$$E_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mentre per **segnali $x[n]$ in Tempo Discreto**:

$$E_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

L'energia è un valore che può variare tra 0 e $+\infty$, inclusi, ma un segnale viene detto **segnale di energia (o segnale quadrato sommabile)** quando:

$$0 < E_x < +\infty$$

Ovvero **quando la sua energia è una quantità finita e non nulla**; questo tipo di segnale è **praticamente realizzabile**. Per **potenza di un segnale $x(t)$ in Tempo Continuo** si intende:

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \right)$$

Mentre per segnali $x[n]$ in Tempo Discreto:

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \right)$$

Anche la potenza, come l'energia, è un valore che varia tra 0 e $+\infty$, inclusi, ma un segnale viene detto **segnale di potenza** quando:

$$0 < P_x < +\infty$$

Ovvero **quando la sua potenza è una quantità finita e non nulla**; questo tipo di segnali **non sono praticamente realizzabili**. Tra potenza ed energia di uno stesso segnale intercorre una particolare **relazione** che forza l'**esclusività delle due classificazioni** in segnale di energia e potenza; $\forall x(t)$:

- $E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$
- $P_x > 0 \Rightarrow E_x = +\infty$
- $E_x = 0$ il segnale è nullo

Da ciò si desume che **un segnale di energia non può essere un segnale di potenza** (e viceversa) e che **un segnale di durata illimitata non può essere un segnale di energia** (ma non viceversa). I segnali che non sono né di energia né di potenza non verranno affrontati in questa sede in quanto non di interesse alla trattazione.

In generale in un intervallo di tempo $t_1 - t_2$, un qualsiasi segnale oscilla attorno al suo **valor medio**, il quale è definito grazie al **teorema della media integrale**; per un segnale a **Tempo Continuo**:

$$\langle x(t) \rangle_{t_1, t_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Questa quantità viene definita **valor medio assunto da $x(t)$ nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$** . Mentre per un **segnale a Tempo Discreto** si parla di **media aritmetica dei campioni di $x[n]$ nell'intervallo $\Delta N = N_2 - N_1$** :

$$\langle x[n] \rangle_{N_1, N_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]$$

Il calcolo di questa media viene fatto per un **intervallo di tempo noto e preciso**, volendo estenderlo a **tutto il dominio temporale**:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt \right)$$

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x[n] \right)$$

In questo caso si parla di **media temporale**. Dalla definizione, si può notare una netta **somiglianza tra la media temporale e la potenza di un segnale**, infatti in Tempo Continuo:

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) dt \right) = \langle y(t) \rangle$$

Con $y(t) = |x(t)|^2$. Analogamente per il Tempo Discreto:

$$P_x = \langle |x[n]|^2 \rangle$$

Di seguito sono enunciate (e in alcuni casi dimostrate) le proprietà della media temporale:

- **Proprietà di invarianza rispetto alla traslazione temporale**

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t - t_0) \rangle, \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle x(t - t_0) \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t - t_0) dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{+\frac{T}{2}-t_0} x(u) du \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{-\frac{T}{2}} x(u) du \right) + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(u) du \right) - \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{+\frac{T}{2}-t_0}^{+\frac{T}{2}} x(u) du \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{M_1 t_0}{T} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(u) du \right) - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{M_2 t_0}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(u) du \right) \\ &= \langle x(t) \rangle \end{aligned}$$

- **Proprietà di linearità**

$$\langle ax(t) + by(t) \rangle = a \langle x(t) \rangle + b \langle y(t) \rangle, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- **Media temporale di un segnale periodico**

$$\forall x(t) : \text{periodico di } T = T_0, \langle x(t) \rangle = \langle x(t) \rangle_{0, T_0}$$

Ciò significa che la media temporale di un segnale periodico è pari alla media temporale calcolata in un solo periodo. Come conseguenza di questa proprietà, risulta:

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle_{T_0}$$

Di seguito sono enunciate (e in alcuni casi dimostrate) le proprietà dell'energia e della potenza:

- **Proprietà di invarianza rispetto alla traslazione temporale**

$$\forall x(t) : y(t) = x(t - t_0), E_x = E_y \wedge P_x = P_y$$

- **Proprietà di non linearità della potenza**

$$\forall x(t), y(t) : z(t) = x(t) + y(t), P_z \neq P_x + P_y$$

Infatti:

$$\begin{aligned} P_z &= \langle |x(t) + y(t)|^2 \rangle = \langle (x(t) + y(t))(x(t) + y(t))^* \rangle \\ &= \langle |x(t)|^2 \rangle + \langle |y(t)|^2 \rangle + \langle x(t)y(t)^* \rangle + \langle y(t)x(t)^* \rangle = P_x + P_y + P_{xy} + P_{yx} \end{aligned}$$

Dove l'asterisco indica l'operazione complessa di coniugo e P_{xy} la potenza mutua dei due segnali:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \langle x(t)y(t)^* \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t)^* dt \right) = (P_{yx})^*$$

Si può anche dimostrare che:

$$P_{xy} + P_{yx} = 2\operatorname{Re}[P_{xy}]$$

Definendo $x(t) = x_r(t) + ix_i(t)$ e $y(t) = y_r(t) + iy_i(t)$:

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \langle x(t)y(t)^* \rangle = \langle (x_r(t) + ix_i(t))(y_r(t) - iy_i(t)) \rangle \\ &= \langle x_r(t)y_r(t) \rangle + \langle x_i(t)y_i(t) \rangle - \langle ix_r(t)y_i(t) \rangle + \langle ix_i(t)y_r(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{yx} &= \langle y(t)x(t)^* \rangle = \langle (y_r(t) + iy_i(t))(x_r(t) - ix_i(t)) \rangle \\ &= \langle x_r(t)y_r(t) \rangle + \langle x_i(t)y_i(t) \rangle + \langle ix_r(t)y_i(t) \rangle - \langle ix_i(t)y_r(t) \rangle \end{aligned}$$

Pertanto:

$$P_{xy} + P_{yx} = 2[\langle x_r(t)y_r(t) \rangle + \langle x_i(t)y_i(t) \rangle] = 2\operatorname{Re}[P_{xy}]$$

- **Proprietà di non linearità dell'energia**

$$\forall x(t), y(t) : z(t) = x(t) + y(t), E_z \neq E_x + E_y$$

$$E_z = E_x + E_y + E_{xy} + E_{yx} = E_x + E_y + 2\operatorname{Re}[E_{xy}]$$

Dove E_{xy} indica l'energia mutua dei due segnali:

$$E_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = (E_{yx})^*$$

La proprietà di **non linearità è sempre verificata** ma solo se i due segnali non sono ortogonali; infatti, quando **le potenze mutue sono nulle** (per segnali di potenza, le energie per i segnali di energia):

$$P_z = P_x + P_y$$

Con $P_{xy} = P_{yx} = 0$; in queste condizioni, i due segnali **$x(t)$ e $y(t)$ si dicono ortogonali**. Quanto detto finora su segnali in Tempo Continuo vale ugualmente per segnali in Tempo Discreto, con potenze ed energie mutue:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y[n]^* \right)$$

$$E_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n]^*$$

FUNZIONI DI CORRELAZIONE

Le **funzioni di correlazione** sono una **classe di funzioni** che possono essere **definite su segnali di energia o di potenza** per studiare varie **similitudini e ripetitività**. Sono composte da **funzioni di autocorrelazione e funzioni di mutua correlazione**.

Si parla di **funzione di autocorrelazione del segnale $x(t)$ rispetto al ritardo τ/m** facendo riferimento a quella funzione che **descrive la similitudine di un segnale con una sua versione ritardata**, con lo scopo di **individuare dei pattern ripetitivi**. Mentre si parla di **funzione di mutua correlazione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$ rispetto al ritardo τ/m** facendo riferimento a quella funzione che **descrive la similitudine tra i due segnali, uno dei quali ritardati**, al fine di trovarne delle **similitudini**. Siano osservate le funzioni per:

SEGNALI DI ENERGIA

La **funzione di autocorrelazione** assume la forma di una **convoluzione tra un segnale e il suo segnale complesso coniugato**; in Tempo Continuo:

$$R_x(\tau) = (x * x^*)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

In Tempo Discreto:

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n - m]$$

Si può osservare come la funzione di autocorrelazione **dipenda dal ritardo applicato al segnale**: l'integrale è fatto sulla variabile temporale t e restituirà una differenza variabile in base al ritardo τ .

La funzione di autocorrelazione gode delle seguenti **proprietà**:

- **Coincidenza con l'energia**

$$R_x(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- **Limitatezza**

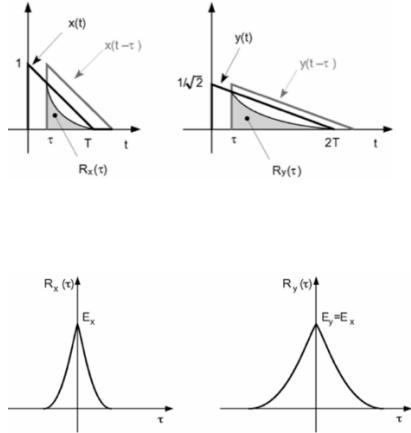
$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

- **Continuità (solo se continua nell'origine)**
- **Simmetria coniugata**

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u + \tau)x^*(u)du = R_x^*(-\tau)$$

In realtà la convoluzione è un'operazione pienamente simmetrica ma, dal momento in cui si sta facendo il prodotto di convoluzione di una funzione per il proprio coniugato, l'uguaglianza coinvolge il coniugio.

Questa funzione **descrive il grado di rapidità di variazione di un segnale:**



Dati due segnali in Tempo Continuo, $x(t)$ e $y(t)$, per **funzione di mutua correlazione** si intende:

$$R_{xy}(\tau) = (x * y^*)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Mentre per segnali in Tempo Discreto:

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n - m]$$

La funzione di mutua correlazione gode delle seguenti **proprietà**:

- **Coincidenza con l'energia mutua**

$$R_{xy}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = E_{xy}$$

- **Limitatezza**

$$R_{xy}(\tau) = |R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{E_x E_y}$$

- **Simmetria coniugata**

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u + \tau)y^*(u)du = R_{yx}^*(-\tau)$$

- **Non linearità**

$$\begin{aligned} \forall z(t) = x(t) + y(t), R_z(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) + y(t))(x(t - \tau) + y(t - \tau))^* dt \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

Inoltre, se $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0, \forall \tau$, i segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono detti **incoerenti**. L'incoerenza di due segnali implica la loro ortogonalità ma il viceversa non è garantito:

$$R_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow R_{xy}(0) = E_{xy} = 0$$

SEGNALI DI POTENZA

In continuità ed equivalenza ai segnali di energia, la funzione di autocorrelazione di un segnale di potenza in Tempo Continuo:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt \right)$$

E rappresenta la **funzione del ritardo di traslazione τ** . In Tempo Discreto:

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x^*[n-m] \right)$$

Mentre la **funzione di mutua correlazione** in Tempo Continuo:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt \right)$$

Mentre in Tempo Discreto:

$$R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y^*[n-m] \right)$$

Per **segnali periodici** le funzioni di correlazione coincidono con la media calcolata su un periodo T_0/N_0 :

- In Tempo Continuo

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

- In Tempo Discreto

$$R_x(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]x^*[n-m]$$

$$R_{xy}(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]y^*[n-m]$$

Riepilogando le **funzioni di correlazione**, classificandole per la **tempificazione**:

- Tempo Continuo

Condizioni particolari	Segnali di Energia	Segnali di Potenza
	$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$	$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau)dt \right)$
$\tau = 0$	$E_{xy} = R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$	$P_{xy} = R_{xy}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t)dt \right) = \langle x(t)y^*(t) \rangle$
$x(t) = y(t)$	$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$	$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt \right)$
$\tau = 0$	$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$P_x = R_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) ^2 dt \right) = \langle x(t) ^2 \rangle$

- Tempo Discreto

Condizioni particolari	Segnali di Energia	Segnali di Potenza
	$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n-m]$	$R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y^*[n-m] \right)$
$\tau = 0$	$E_{xy} = R_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n]$	$P_{xy} = R_{xy}(0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y^*[n] \right) = \langle x[n]y^*[n] \rangle$
$x(t) = y(t)$	$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n-m]$	$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x^*[n-m] \right)$

$\tau = 0$	$E_x = R_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) ^2$	$P_x = R_x(0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] ^2 \right) = \langle x[n] ^2 \rangle$
------------	--	---

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

Come visto anche nei precedenti capitoli, un **segnale periodico** è un segnale del tipo:

$$x(t) : x(t) = x(t + T_0), \forall t$$

Dove T_0 è identificato come **periodo per cui sussiste la relazione con la frequenza f_0** :

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Un segnale di questo tipo può **sempre essere espresso come la somma (infinita) di sinusoidi $A \cos(2\pi f_0 t + \vartheta)$** , ciascune **con la propria ampiezza, frequenza e fase**. L'operazione che permette di associare al segnale la sommatoria di tutte queste sinusoidi è detta **sviluppo in serie di Fourier**; è possibile avere **diverse forme di tale sviluppo**, in questa sede ci si concentrerà sulla forma polare, complessa e rettangolare.

FORMA POLARE

Per **forma polare di uno sviluppo in serie di Fourier** si intende la sua più elementare espressione, dove i termini **k-esimi della serie sono espressi da pure sinusoidi**. Il segnale assume la forma di una **somma di una costante A_0 e una serie**, il cui **k-esimo termine** (detto k-esima oscillazione armonica) **ha un'ampiezza A_k , una frequenza kf_0 e una fase ϑ_k** :

$$x(t) = A_0 + 2A_1 \cos(2 \cdot \pi f_0 + \vartheta_1) + 2A_2 \cos(2\pi \cdot 2f_0 + \vartheta_2) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$$

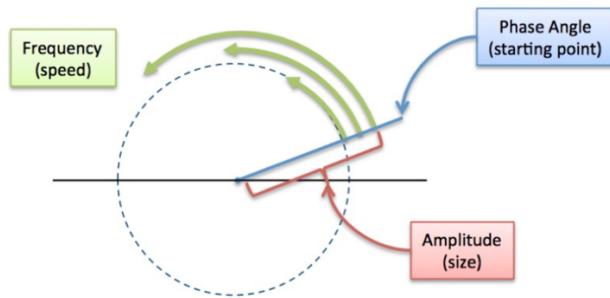
Il segnale in questione prende il nome di **forma polare**, il primo termine è detto **componente fondamentale** e il nome **“armonico”**, associato ad ogni termine della serie, ha origine nel fatto che la frequenza di ognuno è un multiplo intero della frequenza base f_0 .

FORMA COMPLESSA

La **forma complessa** discende naturalmente dalla forma polare; infatti, se in quest'ultima il **termine generico è rappresentato dal coseno**, nella forma complessa esso **assume il ruolo di parte reale di un fasore**:

$$A \cdot \cos(2\pi f_0 t) = A \cdot \operatorname{Re}[e^{i2\pi f_0 t}]$$

In genere un numero complesso può essere rappresentato come un vettore nel piano, dotato di modulo e angolo; al variare dell'angolo in questione si ottiene un fasore:



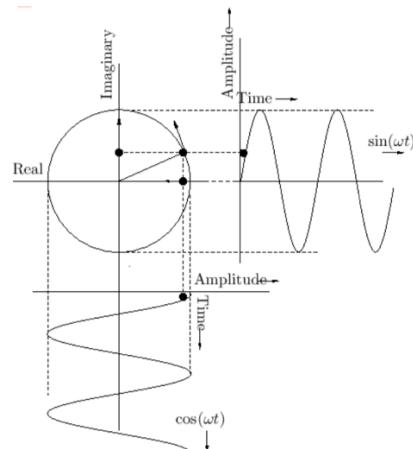
Grazie alla **Legge di Eulero** si può chiarire il collegamento tra forma polare e complessa:

$$e^{i2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t)$$

Pertanto:

$$\cos(2\pi f_0 t) = \operatorname{Re}[e^{i2\pi f_0 t}]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \operatorname{Im}[e^{i2\pi f_0 t}]$$



Dove le formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

In particolare, visto che nella forma polare compaiono solo coseni, è utile la prima delle due formule:

$$A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \vartheta) = A \left(\frac{e^{i(2\pi f_0 t + \vartheta)} + e^{-i(2\pi f_0 t + \vartheta)}}{2} \right) = \frac{A}{2} e^{i\vartheta} e^{i2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\vartheta} e^{-i2\pi f_0 t}$$

Di conseguenza, lo sviluppo in serie di Fourier per un segnale reale di periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$ diventa:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \frac{e^{i(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} + e^{-i(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)}}{2} \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{i\vartheta_k} e^{i2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-i\vartheta_k} e^{-i2\pi k f_0 t} \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{i\vartheta_k} e^{i2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} e^{-i\vartheta_{-k}} e^{i2\pi k f_0 t}
 \end{aligned}$$

Si può notare come **il termine A_0 non risulti da altro che il termine con $k = 0$** . Questo dettaglio permette di scrivere la serie di Fourier come una serie bilatera ed unificare tutto lo sviluppo del segnale in **un'unica sommatoria**:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{i2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Dove:

$$\begin{cases} X_0 = A_0 \text{ con } k = 0 \\ X_k = A_k e^{i\vartheta_k} \text{ con } k > 0 \\ X_k = A_{-k} e^{-i\vartheta_{-k}} \text{ con } k < 0 \end{cases}$$

Gli X_k rappresentano i coefficienti della Serie di Fourier e si può notare come essi godano della proprietà di simmetria coniugata:

$$X_k = X_{-k}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[X_k] = \operatorname{Re}[X_{-k}] \\ \operatorname{Im}[X_{-k}] = -\operatorname{Im}[X_k] \end{cases}$$

A questo punto si può procedere in due modi: **un segnale può essere analizzato o sintetizzato**, nel primo caso **si determina il coefficiente X_k per un certo $k = n$** a partire dall'espressione analitica del segnale e nel secondo caso lo **si ricompona a partire dalla propria serie di Fourier**.

Per analizzare un segnale bisogna andare a **individuare i coefficienti della sua serie di Fourier**, visto che essa è **univocamente determinata dagli X_k** ; per fare ciò bisogna **moltiplicare il segnale per il fasore e integrare lungo il suo periodo**:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Supponendo che la serie bilatera converga uniformemente, si può applicare il **teorema di passaggio a limite** e invertire sommatoria e integrale:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{i2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

I termini di questa serie possono essere così interpretati:

- $k \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt &= X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = X_k \left[\frac{e^{j2\pi(k-n)f_0 t}}{j2\pi(k-n)f_0} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} = X_k \frac{\sin \pi(k-n)f_0}{\pi(k-n)f_0} \\ &= \begin{cases} 0 \Leftrightarrow k \neq n \\ \text{non definita} \Leftrightarrow k = n \end{cases} = 0 \end{aligned}$$

- $k = n$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = X_n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi 0 f_0 t} dt = X_n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} dt = X_n T_0$$

Pertanto, l'espressione in serie precedentemente ricavata si riduce ad una somma di zeri derivanti dai termini $k \neq n$ e un termine non nullo derivante da $k = n$:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0$$

Da cui si rileva la **formula di analisi**:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

Riassumendo:

Formula di Sintesi	Formula di Analisi
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$	$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

FORMA RETTANGOLARE

Sia considerato un **segnale periodico di periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$** che, in forma polare, può essere scritto:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$$

Sfruttando le **formule di addizione e sottrazione** delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k [\cos(2\pi k f_0 t) \cos(\vartheta_k) - \sin(2\pi k f_0 t) \sin(\vartheta_k)] \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)] \end{aligned}$$

Dove:

$$A_0 = a_0$$

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \cos(\vartheta_k) = \operatorname{Re}(X_k) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ b_k &= A_k \sin(\vartheta_k) = \operatorname{Im}(X_k) = -\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$X_k = A_k e^{i\vartheta_k} = A_k (\cos(\vartheta_k) + i \sin(\vartheta_k))$$

Questa appena mostrata viene detta **forma rettangolare della serie di Fourier di un segnale**.

CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

Nello studio della formula di analisi della serie di Fourier in forma complessa è stata ipotizzata la convergenza uniforme della serie bilatera; studiare la convergenza della serie di Fourier significa rilevare le ipotesi per cui:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N(t)$$

Dove:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Quando il segnale $x_N(t)$ converge al segnale $x(t)$ per $N \rightarrow +\infty$ allora si dice che $x(t)$ è sviluppabile in serie di Fourier, ovvero:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Esistono **diversi tipi di convergenza** per questo tipo di serie, quelli di interesse in questa sede sono:

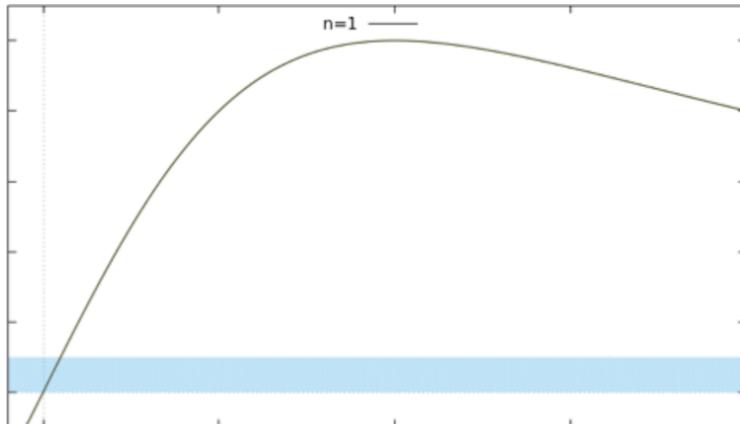
- **Convergenza in media quadratica**

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x_N(t) - x(t)|^2 dt \right] = 0$$

Una condizione sufficiente alla convergenza in media quadratica è che il segnale sia un segnale di energia.

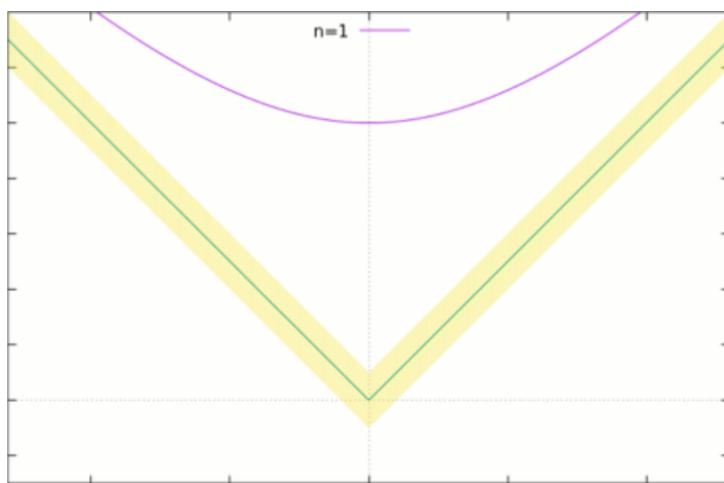
- **Convergenza puntuale**

$$\forall t, \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall N > N_0, |x_N(t) - x(t)| < \varepsilon$$



- **Convergenza uniforme**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall N > N_0, |x_N(t) - x(t)| < \varepsilon, \forall t$$



Il **teorema di Dirichlet – Jordan** (detto anche criterio) permette di **identificare delle condizioni sufficienti alla convergenza di un segnale**, e quindi alla sua sviluppabilità in serie di Fourier. Del teorema esistono diverse formulazioni, sviluppate per segnali reali ma ampliabili al caso complesso:

- **I FORMULAZIONE**

Un segnale del tipo:

$$x: t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

Converge puntualmente $\forall t \in [0, T_0]$ se:

1. Il segnale è **assolutamente integrabile sul periodo T_0** (garantisce che i coefficienti della serie siano finiti)

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} |x(t)| dt < +\infty \Rightarrow |X_n| &= \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)| |e^{-i2\pi n f_0 t}| dt \\ &\leq \int_0^{T_0} |x(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

2. Il segnale è **a variazione $V(t, T_0)$ limitata sul periodo T_0** (bounded variation)

$$V(t, T_0) = \sup \left\{ S_p = \sum_{i=0}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})| \quad \forall P = \{0 < t_0 < \dots < t_n = T_0\} \right\} < +\infty$$

- **II FORMULAZIONE**

Un segnale del tipo:

$$x: t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

Converge uniformemente $\forall t \in J \subset [0, T_0]$ se:

1. Il segnale è **assolutamente integrabile sul periodo T_0** (garantisce che i coefficienti della serie siano finiti)
2. Il segnale è **a variazione $V(t, T_0)$ limitata sul periodo T_0** (bounded variation)
3. Il segnale $x(t)$ è **continuo in $[0, T_0]$**

La continuità garantisce la convergenza uniforme in tutti gli intervalli non contenenti discontinuità.

- **III FORMULAZIONE (definizione anglosassone)**

Un segnale del tipo:

$$x: t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

Converge uniformemente $\forall t \in J \subset [0, T_0]$ se:

1. Il segnale è **assolutamente integrabile sul periodo T_0** (garantisce che i coefficienti della serie siano finiti)
2. Il segnale **ha un numero finito di massimi e di minimi**
3. Il segnale **ha un numero finito di discontinuità di prima specie**

L'equivalenza con le altre formulazioni sta nel fatto che la condizione 2 implica che il segnale sia a variazione limitata (ma non il viceversa).

- **IV FORMULAZIONE (definizione italiana)**

Un segnale del tipo:

$$x: t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

Converge uniformemente $\forall t \in J \subset [0, T_0]$ se:

1. Il segnale è **assolutamente integrabile sul periodo T_0** (garantisce che i coefficienti della serie siano finiti)
2. Il segnale è **continuo nel periodo T_0** (eccetto al più un numero finito di discontinuità di prima specie)
3. Il segnale è **derivabile nel periodo T_0** (eccetto al più un numero finito di punti in cui esistono finite le derivate destra e sinistra)

Nel caso in cui il teorema si presenti in una di queste forme, **il segnale converge a:**

$$x(t) = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

Tra i vari enunciati che il criterio di Dirichlet – Jordan può assumere, si menzionano **diverse tipologie di convergenza che possono essere messe in relazione** attraverso le seguenti proposizioni:

convergenza uniforme \Rightarrow convergenza puntuale

convergenza uniforme \Rightarrow convergenza in media quadratica

Infatti, il motivo per cui la maggior parte degli enunciati del teorema rappresenti una condizione sufficiente alla convergenza uniforme (e non, ad esempio, alla convergenza in media quadratica) risiede nel fatto che la sua è una definizione molto forte che include anche gli altri tipi di convergenza menzionati.

SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE E PROPRIETÀ DELLA SERIE DI FOURIER

In ipotesi di convergenza è possibile instaurare una **corrispondenza biunivoca tra un segnale periodico $x(t)$ e la successione dei coefficienti $\{X_k\}$ della relativa serie di Fourier:**

$$x(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} \{X_k\}$$

Tali coefficienti, in quanto numeri complessi $X_k = a + ib$, **potranno essere rappresentati da due grafici**, detti **spettro di ampiezza** e **spettro di fase**, che prendono in considerazione il **modulo del numero complesso** e la sua **fase**:

$$|X_k| = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge \arg(X_k) = \arctan \frac{b}{a}$$

Sia fatto l'esempio sul **segnale sinusoidale**:

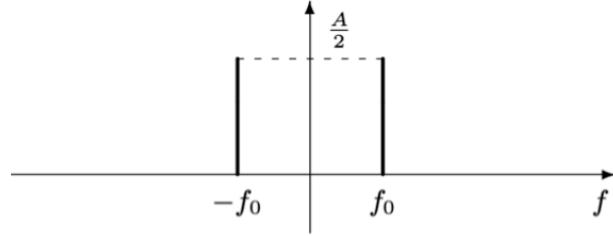
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i2\pi f_0 t}$$

Quindi:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{A}{2} e^{i\varphi} = \frac{A}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-i\varphi} = \frac{A}{2} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ X_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1 \end{cases}$$

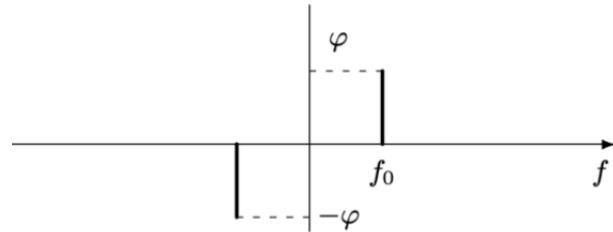
La sinusoide in esame sarà composta da **due fasori a frequenze $\pm f_0$** , con spettro di ampiezza:

$$|X_1| = |X_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



E spettro di fase:

$$\arg X_1 = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) = \varphi \wedge \arg X_{-1} = \arctan\left(\frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) = -\varphi$$



Analogamente, per la sinusoide:

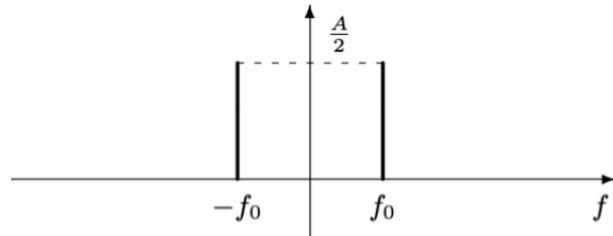
$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2i} e^{i\varphi} e^{i2\pi f_0 t} - \frac{A}{2i} e^{-i\varphi} e^{-i2\pi f_0 t} = -\frac{iA}{2} e^{i\varphi} e^{i2\pi f_0 t} + \frac{iA}{2} e^{-i\varphi} e^{-i2\pi f_0 t}$$

Quindi:

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{iA}{2} e^{i\varphi} = \frac{A}{2} (\sin \varphi - i \cos \varphi) \\ X_{-1} = \frac{iA}{2} e^{-i\varphi} = \frac{A}{2} (\sin \varphi + i \cos \varphi) \\ X_k = 0 \forall k \neq \pm 1 \end{cases}$$

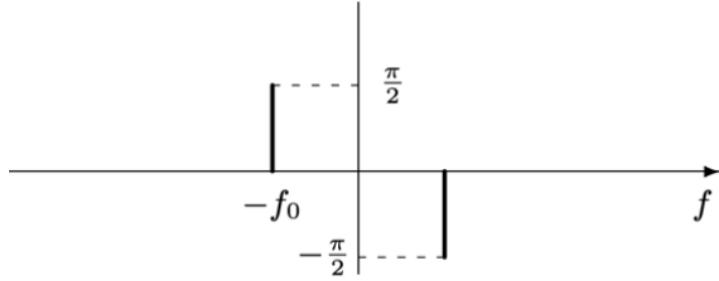
La sinusoide in esame sarà composta da due fasori a frequenze $\pm f_0$, con spettro di ampiezza:

$$|X_1| = |X_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



E spettro di fase:

$$\arg X_1 = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{-\cos \varphi}\right) = -\varphi \wedge \arg X_{-1} = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) = \varphi$$



Considerati due segnali reali, $x(t)$ e $y(t)$, con lo stesso periodo T_0 , una loro combinazione lineare è ancora un segnale di periodo T_0 :

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

E inoltre, i coefficienti della serie di Fourier di questo segnale, $\{Z_k\}$, si ottengono come combinazione lineare dei coefficienti della serie di Fourier dei due segnali da cui origina, $\{X_k\}$ e $\{Y_k\}$:

$$Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

Pertanto:

$$x(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} \{X_k\} \wedge y(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} \{Y_k\} : \text{periodo } T_0 \Rightarrow z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} \{Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k\} \forall \alpha, \beta$$

In generale i coefficienti $\{X_k\}$ sono numeri complessi; ne segue che, per segnali $x(t)$ reali, si avranno spettri di ampiezza pari ($|X_k| = |X_{-k}|$) e spettri di fase dispari ($\arg(X_k) = -\arg(X_{-k})$), rendendo sufficiente caratterizzare lo spettro per $k > 0$. La conseguenza di queste due proprietà è la cosiddetta **simmetria hermitiana**, ovvero:

$$X_k^* = X_{-k}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI SIMMETRIA HERMITIANA

Ipotesi:

$$\forall x(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} \{X_k\} \text{ segnale reale di periodo } T_0$$

Tesi:

$$|X_k| = |X_{-k}| \wedge \arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \Leftrightarrow X_k^* = X_{-k}$$

Dimostrazione:

Considerato il coefficiente X_k^* :

$$X_k^* = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t)e^{-i2\pi kf_0 t})^* dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)e^{-i2\pi(-k)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-i2\pi(-k)f_0 t} dt = X_{-k}$$

CVD

Se invece il segnale in esame, $x(t)$, è reale e pari, allora i coefficienti $\{X_k\}$ sono reali e:

$$X_k = X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi kf_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi kf_0 t) dt$$

In queste condizioni si semplifica anche la formula di sintesi, che sarà composta da soli coseni:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cos(2\pi kf_0 t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi kf_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} \cos(2\pi(-k)f_0 t) \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi kf_0 t) \end{aligned}$$

Se il segnale in esame, $x(t)$, è reale e dispari, allora i coefficienti $\{X_k\}$ sono immaginari e:

$$X_k = -X_{-k} = -\frac{i}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi kf_0 t) dt = -\frac{2i}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi kf_0 t) dt$$

In queste condizioni si semplifica anche la formula di sintesi, che sarà composta da soli seni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} iX_k \sin(2\pi kf_0 t) = 2i \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi kf_0 t)$$

È bene ricordare che il prodotto di due segnali pari (o dispari) è pari, che il prodotto di un segnale dispari per uno pari è un segnale dispari e che l'integrale di un segnale pari (o dispari) su un intervallo è due volte l'integrale sul semi-intervallo (o zero).

Infine, la serie di Fourier di un segnale $x(t)$ gode delle seguenti proprietà:

- **Traslazione temporale**

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t - t_0) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-t_0}^{T_0 - t_0} x(u) e^{-i2\pi kf_0 (u+t_0)} du = e^{-i2\pi kf_0 t_0} X_k$$

- **Riflessione**

$$y(t) = x(-t)$$

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-i2\pi k f_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{-l} e^{i2\pi l f_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{i2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{i2\pi k f_0 t} \Rightarrow Y_k = X_{-k}$$

- **Derivazione**

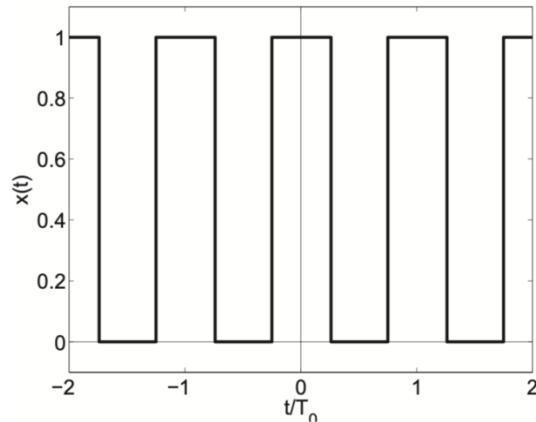
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \frac{d(e^{i2\pi k f_0 t})}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (i2\pi k f_0) X_k e^{i2\pi k f_0 t} \Rightarrow Y_k = i2\pi k f_0 X_k$$

RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE

Si prenda in considerazione un **treno di impulsi rettangolari**, cioè una rect periodizzata ad un periodo T_0 :

$$x_g(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = \text{rep}_{T_0}[x_g(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_g(t - kT_0)$$



Definendo **duty cycle** la quantità:

$$\delta_c = \frac{T}{T_0}$$

Si può dimostrare come **i coefficienti della serie di Fourier di questo segnale siano**:

$$X_k = \begin{cases} A\delta_c & \Leftrightarrow k = 0 \\ A\delta_c \text{sinc}(k\delta_c) & \Leftrightarrow k \neq 0 \end{cases}$$

Dove:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Supponendo il **caso particolare di $A = 1$ e $\delta_c = 1/2$** :

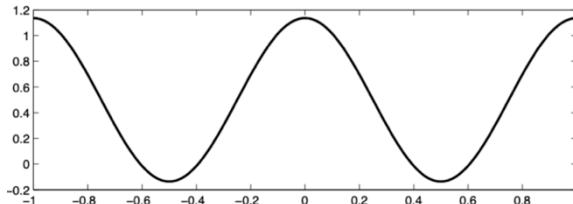
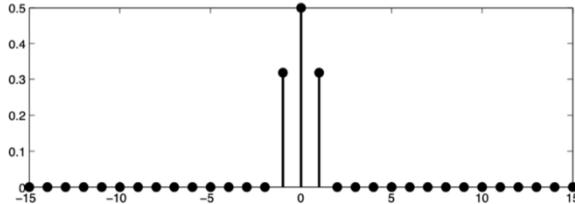
$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 0 \\ 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k = 2n \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\pi k} \Leftrightarrow k = 2n + 1 \end{cases}$$

Nella realtà pratica ci si ritrova spesso ad avere i coefficienti della serie di Fourier e da essi dover ricavare il segnale di partenza. In questo esempio, scrivendo la formula di sintesi con i coefficienti forniti:

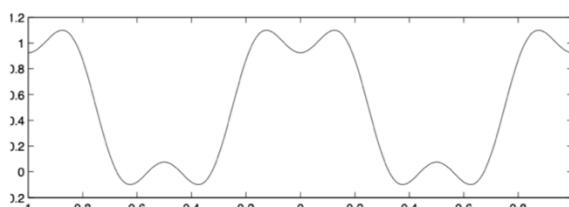
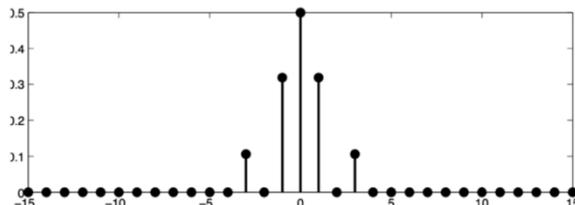
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$

Chiaramente non si può ricostruire il segnale con un numero infinito di armoniche, sia per una questione di tempo che di risorse; tuttavia, più è alto il numero di armoniche usate per la ricostruzione del segnale e più ci si avvicina alla forma originale:

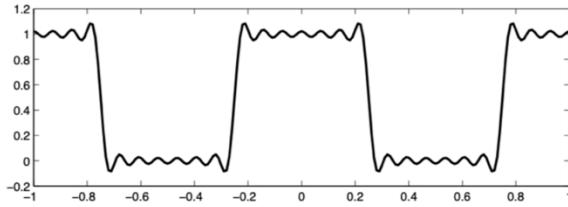
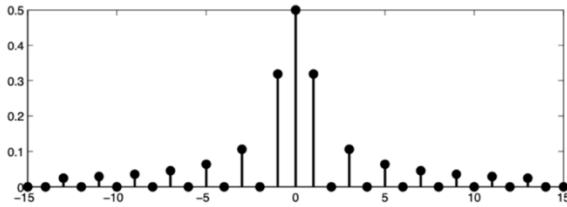
$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$



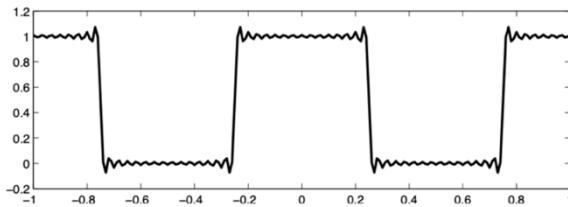
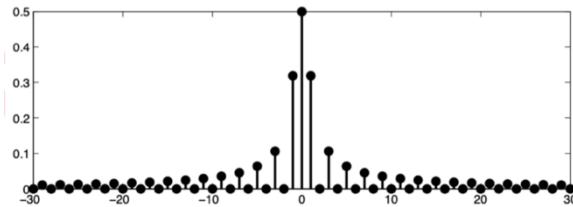
$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$



$$x_{15}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{15} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$



$$x_{30}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{30} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$



Il segnale rispetta i criteri di Dirichlet – Jordan, la serie $x_k(t)$ converge a $x(t)$ nei punti di continuità e al valor medio dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità:

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

Poiché **il segnale ricostruito non è precisamente il treno di rect originale**, esso presenterà dei ripple (un'ondulazione residua) che, **al crescere di k** , verranno schiacciati verso la discontinuità pur lasciando invariata la propria ampiezza. Questo fenomeno, che prende il nome di **fenomeno di Gibbs**, garantisce la convergenza di $x_k(t)$ a $x(t)$ per ogni valore di t prossimo alla discontinuità.

LA SERIE DI FOURIER IN TEMPO DISCRETO

Considerato un **segnale periodico a Tempo Discreto**:

$$x[n], \exists N_0 \in \mathbb{Z} : x[n] = x[n + N_0]$$

Dove N_0 è il periodo e $\nu_0 = 1/N_0$ la frequenza fondamentale. Anche questo tipo di segnali possono essere rappresentati con una somma infinita di fasori ciascuno di frequenza multipla a ν_0 :

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{i2\pi k \nu_0 n}$$

Possono essere dualmente individuate le formule di sintesi ed analisi anche per segnali a Tempo Discreto:

Formula di Sintesi	Formula di Analisi
$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{i2\pi k \nu_0 n}$	$X_n = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi k \nu_0 n}$

La formula di analisi è stata ottenuta con un procedimento analogo a quello svolto per i segnali a Tempo Continuo:

$$\begin{aligned} x[n] e^{-i2\pi \frac{h}{N_0} n} &= \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{i2\pi \frac{h-k}{N_0} n} \\ \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi \frac{h}{N_0} n} &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{i2\pi \frac{h-k}{N_0} n} = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{i2\pi \frac{h-k}{N_0} n} = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k \delta(h - k) \\ &= X_h \end{aligned}$$

Anche in Tempo Discreto esiste una relazione biunivoca tra il segnale e i coefficienti della relativa serie di Fourier:

$$x[n] \stackrel{\text{DFS}}{\iff} X(k) = N_0 X_k$$

Per una questione di familiarità si è usata, finora, la stessa nomenclatura del Tempo Continuo, nonostante ci siano alcune variazioni:

- Serie di Fourier Discreta (DFS)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{N_0} n} \quad \forall k \in [0, N_0)$$

- Serie di Fourier Discreta Inversa (IDFS)

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X(k) e^{i2\pi \frac{k}{N_0} n}$$

La Serie di Fourier Discreta gode delle seguenti proprietà:

- **Simmetria coniugata**

$$X_{-k} = X_k^*$$

- **Linearità**

$$z[n] = ax[n] + by[n] \xrightarrow{DFS} Z_k = aX_k + bY_k$$

- **Traslazione temporale**

$$y[n] = x[n - n_0] \xrightarrow{DFS} Y_k = X_k e^{-i2\pi \frac{k}{N_0} n_0}$$

- **Riflessione**

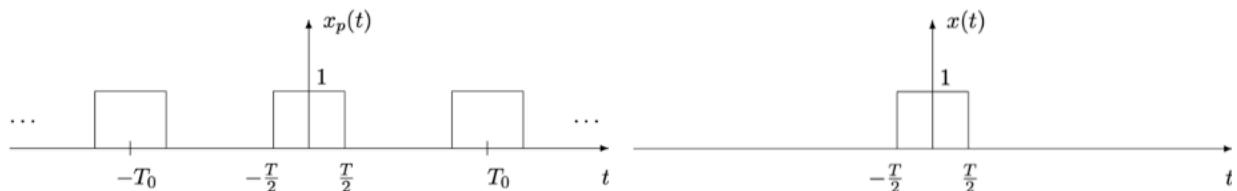
$$y[n] = x[-n] \xrightarrow{DFS} Y_k = X_{-k}$$

- **Differenza prima**

$$y[n] = x[n] - x[n - 1] \xrightarrow{DFS} Y_k = X_k \left(1 - e^{-i2\pi \frac{k}{N_0}} \right)$$

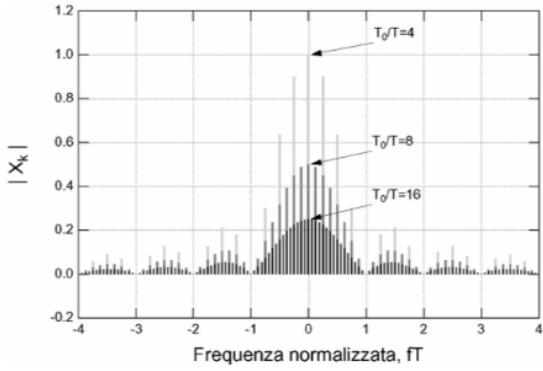
DALLA SERIE ALLA TRASFORMATO DI FOURIER

Sin dal principio della trattazione, è stato detto che **un segnale è sviluppabile in serie di Fourier solo se è periodico e per segnali non periodici non è stato fatto altro che ripetere lo stesso segnale dopo un certo tempo T_0 ($\text{rep}_{T_0} x(t)$)**; tuttavia, quest'operazione **non è molto pratica nella realtà perché i segnali con cui si lavora non sempre sono periodici e non è sempre utile ripeterli per trattarli nel dominio della frequenza.**



In quest'ottica, per manipolare un segnale aperiodico nel dominio della frequenza lo si considera come il limite di un segnale periodico sviluppabile in serie di Fourier:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} x_{p,T_0}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} \right]$$



Con questo artificio è possibile caratterizzare $x(t)$ nel dominio della frequenza, ovvero si può studiare la relazione tra il segnale e i coefficienti della serie di Fourier. La relazione di inversa proporzionalità tra periodo e frequenza permette di dire che:

$$T_0 \rightarrow +\infty \Leftrightarrow f_0 \rightarrow 0$$

Quindi le righe spettrali si infittiscono (visto che ogni X_k è collocato a f_0 da X_{k-1} , con frequenza kf_0) mentre le ampiezze diminuiscono, perché:

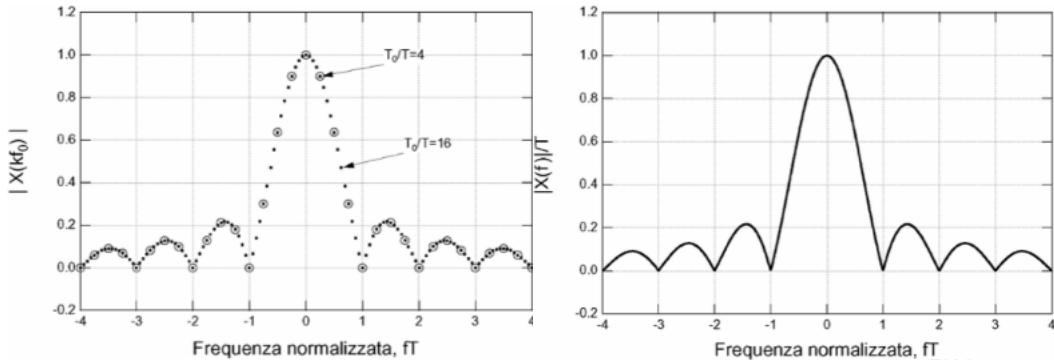
$$X_k \propto \frac{1}{T_0} \rightarrow 0$$

Per risolvere questi problemi si può introdurre un coefficiente di Fourier “modificato”:

$$X(kf_0) \stackrel{\text{def}}{=} T_0 X_k = T_0 \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt$$

Pertanto, passando al limite e utilizzando questo nuovo coefficiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} x_{p,T_0}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi kf_0 t} \right] = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{i2\pi kf_0 t} f_0 \right] \\ &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta f) e^{i2\pi k\Delta f t} \Delta f \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \end{aligned}$$



Ricordando che:

$$\Delta f = kf_0 - (k-1)f_0 = f_0$$

$$X(kf_0)f_0 = T_0 X_k f_0 = X_k$$

Riprendendo la definizione del coefficiente in esame e portandola al limite:

$$X(f) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} X(kf_0) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Indicando la **trasformata di Fourier** e l'**antitrasformata di Fourier** come:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Le **formule di sintesi ed analisi del segnale aperiodico** sono:

Formula di Sintesi	Formula di Analisi
$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$	$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$

Indicando con $\omega = 2\pi f$ le formule si semplificano leggermente:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

A questo punto **si può introdurre la stessa corrispondenza biunivoca tra segnale e coefficienti** che era stata precedentemente definita per i segnali periodici:

$$x(t) \stackrel{FT}{\Leftrightarrow} X(f)$$

Questa equivalenza rappresenta una relazione biunivoca tra il dominio del tempo e quello della frequenza, rendendo l'analisi di un segnale nell'uno o nell'altro puramente discrezionale e al servizio della praticità. Definendo **$A(f)$ lo spettro di ampiezza** e **$v(f)$ lo spettro di fase**, la **formula di analisi** può anche essere espressa come:

$$X(f) = A(f) e^{iv(f)}$$

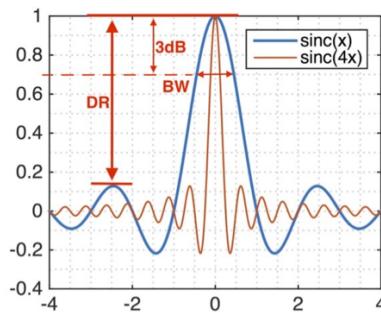
Non si può far a meno che chiedersi **quale sia la differenza tra la serie e la trasformata di Fourier**; la risposta viene automaticamente osservando la loro definizione: **la serie di Fourier è una rappresentazione discreta del segnale**, in cui **la frequenza di ogni fasore è multiplo della frequenza fondamentale $f_0 = 1/T_0$ del segnale**, mentre **la trasformata è una rappresentazione continua**, in cui **la frequenza dei fasori può assumere qualsiasi valore reale**.

Insieme alla rappresentazione di un segnale nel dominio della frequenza, è utile introdurre il concetto di banda; per larghezza di banda si intende la misura dell'ampiezza di una porzione dello spettro di segnali ed è caratterizzata da una frequenza di cut – off, cioè una frequenza oltre la quale prendere o meno in considerazione quelle frequenze. Un modo di misurare la larghezza di banda è utilizzando la seguente **frequenza di taglio**:

$$f_c : A(f_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \cong 0,707 \cdot A(0)$$

Per la quale:

$$BW = 2f_c$$



Ed è detta **banda a 3db**; è uno solo dei vari modi con cui si può misurare la banda di un segnale ma in tutti i casi essa prescinde dallo spettro di fase, dipende solo da quello di ampiezza.

CONVERGENZA E PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

In analogia alla convergenza della serie di Fourier, si vuole determinare sotto quali condizioni si ha:

$$x(t) = \lim_{B \rightarrow +\infty} x_B(t)$$

Con:

$$x_B(t) = \int_{-B}^B X(f) e^{i2\pi k f t} df$$

Ovvero, studiare le condizioni per cui è possibile rappresentare il segnale con attraverso la sua trasformata di Fourier. In particolare, la convergenza può essere:

- **In media quadratica**

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\int_{-B}^B |x_B(t) - x(t)|^2 dt \right] = 0$$

- **Puntuale**

$$\forall t, \forall \varepsilon > 0 \exists B_0 \in \mathbb{N} : \forall B > B_0, |x_B(t) - x(t)| < \varepsilon$$

- **Uniforme**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_0 \in \mathbb{N} : \forall B > B_0, |x_B(t) - x(t)| < \varepsilon \forall t$$

Un primo criterio afferma che **un segnale di energia**, cioè un segnale $x(t) : 0 < E_x < +\infty$ detto anche **quadrato sommabile, converge in media quadratica**. Un secondo criterio, detto **criterio di Dirichlet – Jordan** (meno restrittivo del primo), rappresenta una **condizione sufficiente** con la quale è possibile **garantire che il segnale converge puntualmente a:**

$$\frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}$$

Se:

1. È assolutamente integrabile;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

2. Assume un numero finito di massimi e minimi in ogni intervallo finito (alias, è derivabile nell'intervallo al più di un numero finito di punti in cui esistono derivata destra e sinistra);
3. Ha un numero finito di discontinuità finite (cioè di prima specie) in ogni intervallo finito.

Inoltre, se $x(t)$ è continuo in $I \subseteq [0, T_0]$, è garantita anche la convergenza uniforme a $x(t) \forall t \in J \subset I$, ovvero in ogni intervallo che non contiene discontinuità.

Di seguito sono elencate alcune delle **proprietà della trasformata di Fourier**:

- **Linearità**

$$\forall x(t), y(t) \subseteq \mathbb{R} : x(t) \xrightarrow{FT} X(f) \wedge y(t) \xrightarrow{FT} Y(f) \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FT} \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

- **Simmetria**

In genere, sia $x(t)$ che $X(f)$ sono funzioni complesse; tuttavia $x(t)$ è reale se $X(f)$ gode di simmetria Hermitiana e viceversa. Per $x(t)$:

$$x(t) \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow X^*(f) = X(-f)$$

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)e^{-i2\pi ft})^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi(-f)t} dt = X(-f)$$

Che equivale a dire **spettro di ampiezza pari e di fase dispari**:

$$|A(f)| = |A(-f)| \wedge v(f) = -v(f)$$

Per $X(f)$

$$X(f) \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow x^*(t) = x(-t)$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X(f)e^{i2\pi ft})^* df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi f(-t)} df = x(-t)$$

- **Parità e disparità**

- $x(t)$ pari $\Leftrightarrow X(f)$ pari

$$\begin{aligned} X(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi(-f)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{i2\pi f(-t)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = X(f) \end{aligned}$$

- $x(t)$ reale pari $\Leftrightarrow X(f)$ reale pari

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt \end{aligned}$$

- $x(t)$ dispari $\Leftrightarrow X(f)$ dispari

$$\begin{aligned} X(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi(-f)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{i2\pi f(-t)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t)e^{-i2\pi ft}dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = -X(f) \end{aligned}$$

- $x(t)$ reale dispari $\Leftrightarrow X(f)$ immaginaria dispari

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \end{aligned}$$

In definitiva, indicando con x/X_p la parte pari, con x/X_d la parte dispari, con x/X_r la parte reale e con x/X_i la parte immaginaria:

$$x(t) = [x_{rp}(t) + x_{rd}(t)] + i[x_{ip}(t) + x_{id}(t)]$$

\Leftrightarrow

$$X(f) = [X_{rp}(f) + X_{rd}(f)] + i[X_{ip}(f) + X_{id}(f)]$$

- **Dualità**

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(f) \Leftrightarrow X(t) \xrightarrow{FT} x(-f)$$

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df \xrightarrow{\lambda=f} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)e^{i2\pi \lambda t}d\lambda \xrightarrow{f=-t} x(-f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)e^{-i2\pi \lambda f}d\lambda \xrightarrow{t=\lambda} x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i2\pi ft}dt = \mathcal{F}[X(t)] \end{aligned}$$

- **Time shifting**

$$y(t) = x(t - t_0) \xrightarrow{FT} Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-i2\pi f(u+t_0)} du$$

$$= e^{-i2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-i2\pi f u} du = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

Si noti che **lo spettro di ampiezza è invariante rispetto alle traslazioni temporali**:

$$|Y(f)| = |X(f)e^{-i2\pi f t_0}| = |X(f)||e^{-i2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

Mentre, invece, **lo spettro di fase**:

$$\arg Y(f) = \arg X(f) - 2\pi f t_0$$

- **Frequency shifting**

$$y(t) = x(t)e^{i2\pi f_c t} \xrightarrow{FT} Y(f) = X(f - f_c)$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i2\pi f_c t} e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi(f-f_c)t} dt = X(f - f_c)$$

- **Cambiamento di scala temporale**

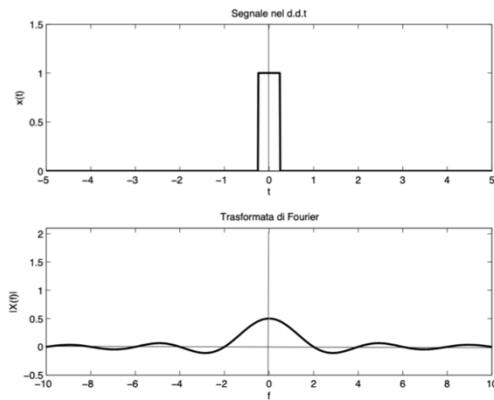
$$y(t) = x(at) \xrightarrow{FT} Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-i2\pi f t} dt = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-\frac{i2\pi f \tau}{a}} d\tau \Leftrightarrow a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{\frac{i2\pi f \tau}{a}} d\tau \Leftrightarrow a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

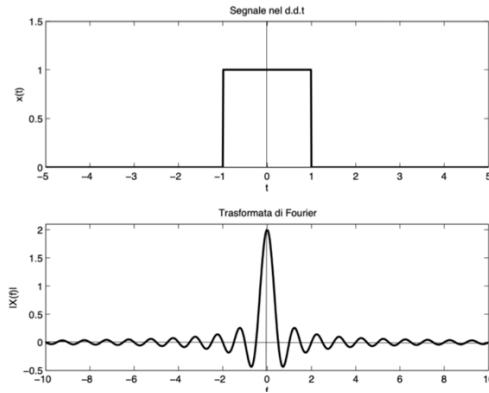
Comprimendo il segnale si ottiene un segnale che varia più velocemente, ottenendo un'**espansione in frequenza**, e viceversa. Ad esempio, il segnale:

$$x(t) = \Pi(at)$$

Per $a = 2$:



Per $a = 1/2$:



Segue che **un cambiamento della scala dei tempi porta un cambiamento della scala delle frequenze dello stesso segnale secondo la relazione:**

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) = \left\{ \frac{1}{|a|} A\left(\frac{f}{a}\right), v\left(\frac{f}{a}\right) \right\}$$

Si noti che **i fattori di scala nei due domini siano reciproci**; questo comporta che **una compressione in un dominio corrisponde ad una dilatazione nell'altro**.

- **Teorema di modulazione**

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0) \\ Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0) \end{aligned}$$

y(t) è detto **segnale x(t) modulato e f₀ frequenza della portante**. Questa operazione è **usata per adattare il segnale informativo alle caratteristiche del segnale di trasmissione**:

Banda	Frequenza f	Lunghezza d'onda λ	Principali impieghi
ELF (Extremely low frequency)	3–30 Hz	100 000 km–10 000 km	comunicazioni sottomarine
SLF (Super low frequency)	30–300 Hz	10 000 km–1 000 km	comunicazioni sottomarine
ULF (Ultra low frequency)	300–3000 Hz	1 000 km–100 km	comunicazioni sottomarine
VLF (Very low frequency)	3–30 kHz	100 km–10 km	comunicazioni marine
LF (Low frequency)	30–300 kHz	10 km–1 km	radio AM
MF (Medium frequency)	300–3000 kHz	1 km–100 m	radio AM
HF (High frequency)	3–30 MHz	100 m–10 m	radioamatori (onde corte)
VHF (Very high frequency)	30–300 MHz	10 m–1 m	radio FM, TV
UHF (Ultra high frequency)	300–3000 MHz	1 m–100 mm	ponti radio, TV, cellulare, WLAN
SHF (Super high frequency)	3–30 GHz	100 mm–10 mm	radar, satelliti, WLAN
EHF (Extremely high frequency)	30–300 GHz	10 mm – 1 mm	sistemi wireless fissi, satelliti

Segnale	Banda monolatera B_x
voce	4 kHz
musica	20 kHz
video	5 MHz
dati a velocità R_s simboli/s	$R_s/2 \leq B_x \leq R_s$

- **Derivazione**

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FT} Y(f) = i2\pi f X(f)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} [X(f) e^{i2\pi f t}] df = \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi f X(f) e^{i2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{i2\pi f t} df \end{aligned}$$

Ovviamente **questa proprietà vale sotto le ipotesi di derivazione termine a termine**. La derivazione esalta le componenti del segnale alle alte frequenze; infatti:

$$|Y(f)| = 2\pi|f||X(f)|$$

$$\arg Y(f) = \arg X(f) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} f$$

- **Integrazione (teorema incompleto)**

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{FT} Y(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

Questa proprietà **discende direttamente dalla precedente ed è valida solo se:**

$$f \neq 0 \vee \left(f = 0 \wedge X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = y(+\infty) = 0 \right)$$

Ma $y(+\infty) = 0$ rappresenta un segnale di energia, ovvero la formula è valida solo per segnali di energia.

Per **prodotto di convoluzione tra due segnali** si intende l'operatore che associa a due segnali il seguente segnale:

$$z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Ed è un **operatore fondamentale per l'elaborazione dei segnali**; esso gode delle seguenti proprietà:

- **Commutativa**

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

- **Distributiva rispetto alla somma**

$$[z * (x + y)](t) = (z * x)(t) + (z * y)(t)$$

- **Associativa**

$$[z * (x * y)](t) = [y * (z * x)](t) = [x * (y * z)](t)$$

Per la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione gli spettri di ampiezza si moltiplicano e quelli di fase si sommano:

$$(x * y)(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f) = A_x(f)A_y(f)e^{i(\nu_x(f)+\nu_y(f))}$$

In genere, **quando si lavora con la convoluzione è utile lavorare nel dominio della frequenza**. Nel **dominio della frequenza** è anche possibile **trasferire il prodotto algebrico di due segnali**:

$$z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} Z(f) = X(f) * Y(f)$$

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu \right] y(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi(f-\nu)t} dt \right] d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y(f-\nu) d\nu = X(f) * Y(f) \end{aligned}$$

L'IMPULSO DI DIRAC E LA \mathcal{F} – TRASFORMATA GENERALIZZATA

Sia considerato il **gradino unitario**:

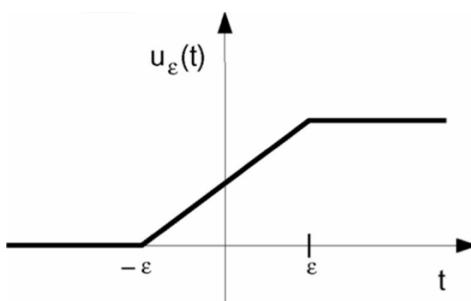
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

Per qualsiasi valore **$u(0)$** gli si assegna (per consistenza con il criterio di Dirichlet andrebbe assegnato alla semisomma dei limiti destro e sinistro, quindi a $\frac{1}{2}$), il **segnale non è derivabile in $t = 0$** , infatti:

$$u(t) \neq \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} u(t) dt = 0$$

Per determinare la derivata di questo segnale possono essere usati diversi approcci, in questa sede sia considerata la **successione di segnali**:

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t > \varepsilon \\ \frac{1 + \frac{t}{\varepsilon}}{2} & \Leftrightarrow -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \Leftrightarrow t < -\varepsilon \end{cases}$$

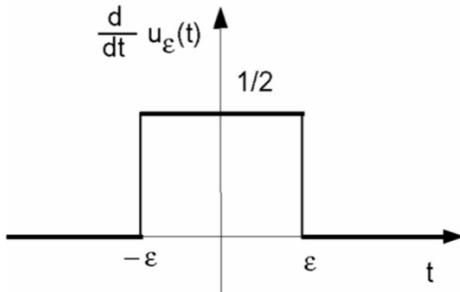


Si può vedere il gradino unitario come segnale a cui converge questa successione:

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$$

Questa successione è **derivabile termine a termine** e restituisce il segnale rettangolare:

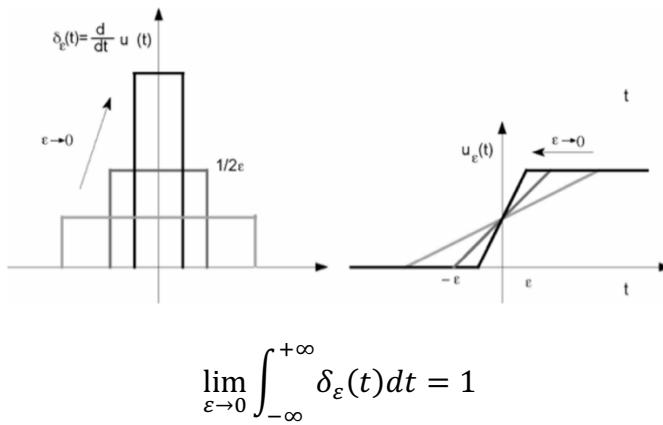
$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t > \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \Leftrightarrow -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) \\ 0 & \Leftrightarrow t < -\varepsilon \end{cases}$$



Con:

$$u_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\varepsilon(t) dt$$

Il limite della successione è possibile ed equivale al gradino, ma il limite della derivata? Si può notare come al tendere di ε a zero, l'area che sottende al grafico di $\delta_\varepsilon(t)$ rimane costante, restringendosi e allungandosi:



Tuttavia, nell'origine questa proprietà non è mantenuta, dal momento in cui per $\varepsilon = 0$ l'ampiezza del segnale è nulla e la sua altezza infinita.

Si può concludere che **non esiste una funzione nel senso ordinario associabile alla derivata del gradino unitario**; per oltrepassare questo limite si può **introdurre il concetto di distribuzione**, ovvero quello di una **generalizzazione del concetto di funzione** che permetta di definire oggetti di **questo tipo pur conservando la validità della teoria delle funzioni classiche**. Un esempio di distribuzione è proprio quello che serve in questa situazione, la **distribuzione delta di Dirac**:

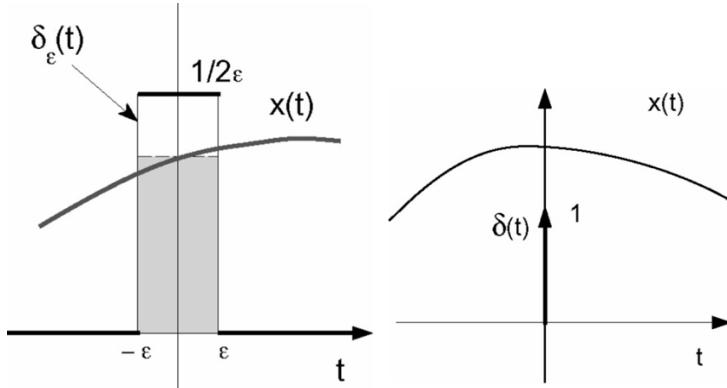
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$$

Dunque, **δ non è una funzione ordinaria e non va intesa come funzione limite nel senso classico ma come limite generalizzato**, al di fuori del segno di integrale:

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t \delta_\varepsilon(t) dt$$

Sia considerato un **segnale $x(t)$ continuo in $t = 0$ e si calcoli il valore numerico**:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon \cdot x(\tilde{t})}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\tilde{t}) \\ &= x(0) \end{aligned}$$



Dove $\tilde{t} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ per il **teorema della media**. È un problema ben posto, dal momento in cui **δ compare sotto l'integrale**, ed è la **dimostrazione di un caso particolare di quello che viene definito teorema del campionamento**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

Inoltre, per la delta di Dirac vale la seguente uguaglianza in senso integrale:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

Grazie a queste due proprietà appena enunciate, è possibile vedere l'**impulso di Dirac come l'elemento neutro della convoluzione**; infatti:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt, \forall t_0 \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= (x * \delta)(t) \end{aligned}$$

La **distribuzione delta di Dirac** interviene attivamente quando si vuole fare la **trasformata di Fourier di un segnale che non è di energia** o che **non soddisfa il criterio di Dirichlet**. Si faccia la **trasformata di Fourier della funzione $x(t) = \delta(t)$** :

$$X(f) = \mathcal{F}[\delta(t)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

O meglio:

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{FT} e^{-i2\pi f t_0}$$

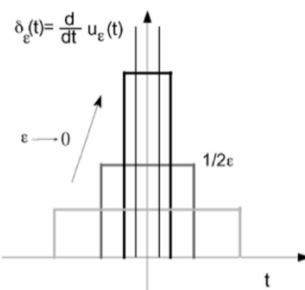
Applicando la **formula di sintesi**:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f t} df$$

Ovviamente, **questo integrale** (come tutti gli integrali che finora hanno interessato e interesseranno la delta di Dirac) va inteso nel senso delle distribuzioni.

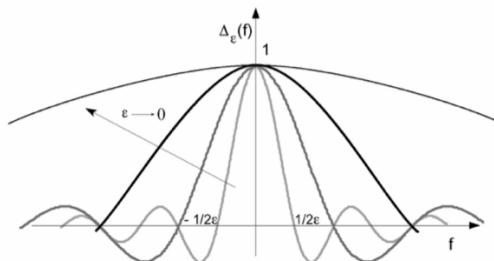
Avendo **definito la delta di Dirac usando la definizione di convergenza generalizzata**:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$$



È possibile fare allo stesso modo con la relativa trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi f t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) e^{-i2\pi f t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sinc}(2\varepsilon f) = 1$$



Volendo fare un **esempio di applicazione della delta di Dirac per calcolare la trasformata di un segnale**, sia considerato:

$$x(t) = \frac{|t|}{T} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} -\frac{t}{T} & \Leftrightarrow -T \leq t < 0 \\ \frac{t}{T} & \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T \\ 0 & \Leftrightarrow |t| > T \end{cases}$$

Trasformare direttamente questo segnale non è pratico, quindi si sfrutterà la proprietà di derivazione:

$$s(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+T) - \delta(t-T) - \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Calcolando la **trasformata di questo segnale**:

$$S(f) = 2i \sin(2\pi f T) - 2i \sin(\pi f T) \operatorname{sinc}(f T)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{S(f)}{i2\pi f} = \frac{2i \sin(2\pi f T)}{i2\pi f} - \frac{2i \sin(\pi f T)}{i2\pi f} \operatorname{sinc}(f T) = 2T \frac{\sin(2\pi f T)}{i2\pi f T} - T \frac{\sin(\pi f T)}{i\pi f T} \operatorname{sinc}(f T) \\ &= 2T \operatorname{sinc}(2f T) - T \operatorname{sinc}^2(f T) \end{aligned}$$

Per **segnali di potenza** non è possibile **applicare la trasformata di Fourier** se non nella sua forma **generalizzata** e se non **considerando la convergenza nel senso più generale del termine**. Per poter fare un esempio è **necessario introdurre una trasformata notevole**, ovvero quella della funzione:

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi f t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi f t)}{t} dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{t} dt = -i2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f t} dt \\ &= -i2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(2f t) dt \end{aligned}$$

Questo risultato discende dal fatto che $\cos t / t$ è una quantità non definita nell'origine e il suo integrale andrebbe inteso nel senso del valor principale di Cauchy:

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi f t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{\cos(2\pi f t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\cos(2\pi f t)}{t} dt \right] = 0$$

Ricordando che:

$$y(t) = \operatorname{sinc}(2Bt) \xleftrightarrow{FT} Y(\tilde{f}) = \frac{1}{2|B|} \Pi\left(\frac{\tilde{f}}{2B}\right) \Rightarrow Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(2Bt) dt$$

Si può desumere:

$$X(f) = -i2\pi f \cdot Y(0)|_{B=f} = -i2\pi f \left[\frac{1}{2|B|} \Pi\left(\frac{\tilde{f}}{2B}\right) \right]_{\tilde{f}=0, B=f} = -\frac{i2\pi f}{2|f|} = -i\pi \operatorname{sign}(f)$$

Quindi, riassumendo:

$$x(t) = \frac{1}{t} \xleftrightarrow{FT} X(f) = -i\pi \operatorname{sign}(f)$$

$$A_x(f) = \pi \wedge \nu_x(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f > 0 \\ \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f < 0 \end{cases}$$

Questo risultato permette di **determinare la trasformata di Fourier del segnale gradino unitario**, per il quale si può facilmente verificare che **la trasformata ordinaria non esiste**; infatti, **il gradino unitario non è un segnale quadrato sommabile**.

Sia:

$$x(t) = u(t) = \frac{1}{2} \text{sign}(t) + \frac{1}{2}$$

Applicando la trasformata ad entrambi i membri:

$$U(f) = \frac{1}{2i\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

Questa trasformata porta con sé anche un altro risultato importante, che prende il nome di **teorema di integrazione completo**; l'osservazione alla base di questo teorema è la seguente:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = (x * u)(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(f) U(f) = X(f) \left[\frac{1}{2i\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \right]$$

Da cui:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \frac{X(f)}{2i\pi f} + \frac{X(0)}{2}$$

Il teorema appena dimostrato **amplia la proprietà di integrazione precedentemente introdotta**, per il quale $X(0) = 0$:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \frac{X(f)}{2i\pi f}$$

Per concludere, si studi la **trasformata di Fourier del segnale**:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2}$$

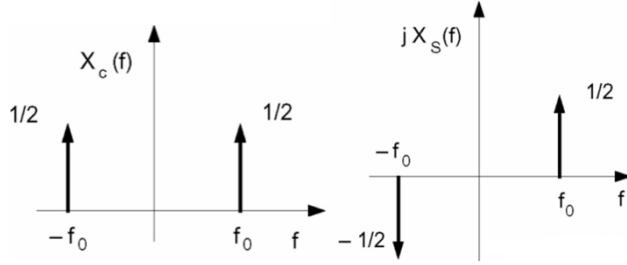
Ricordando la trasformata della funzione delta di Dirac e le proprietà di time e frequency shifting:

$$Y(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

Per quanto riguarda il seno, è possibile fare un ragionamento analogo:

$$y(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2i} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$



Questo risultato permette di interpretare alternativamente il teorema della modulazione:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{FT} Y(f) = X(f) * \left[\frac{\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \delta(f + f_0 - \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \delta(f - f_0 - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} X(f + f_0) + \frac{1}{2} X(f - f_0) \end{aligned}$$

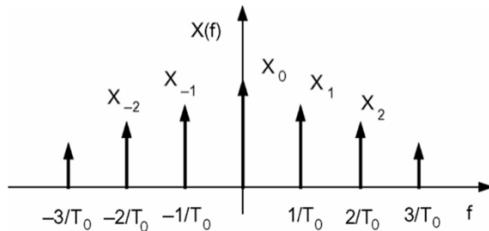
Con la nozione di trasformata generalizzata e di trasformata delle funzioni seno e coseno in forma reale o complessa, è possibile conoscere la trasformata continua di un segnale periodico qualunque. Sia considerato un segnale periodico di periodo T_0 sviluppabile in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Dove X_k è un coefficiente discreto. Si trasformi questo segnale:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \mathcal{F}[e^{i2\pi k f_0 t}](f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

Il k -esimo termine della trasformata è una delta di Dirac posizionata in k/T_0 e di integrale (area) pari a X_k :



Un esempio notevole di segnale di potenza periodico è il cosiddetto pettine di Dirac di periodo T_0 :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \xrightarrow{FS} X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

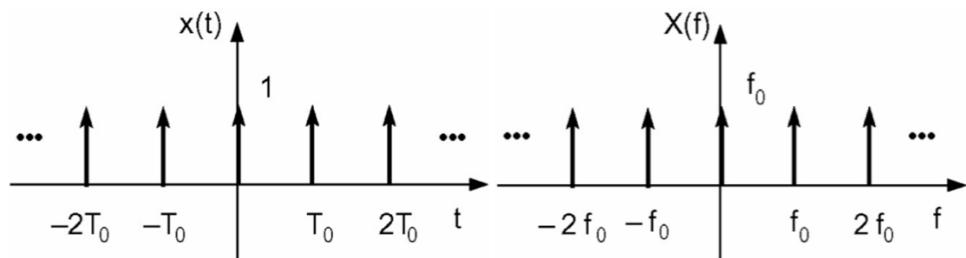
Segue che:

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi kf_0 t}$$

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{i2\pi kf_0 t}](f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$

Quindi, un terno di delta di periodo T_0 nel tempo corrisponde ad un treno di delta di periodo (e ampiezza) $f_0 = 1/T_0$ in frequenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \xrightarrow{FT} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$



LE FORMULE DI POISSON

Le **formule di Poisson** sono strumenti in grado di mettere in relazione il campionamento e la replicazione nel dominio del tempo e della frequenza.

PRIMA FORMULA DI POISSON

Replicazione nel tempo \Leftrightarrow Campionamento in frequenza

Per **replicazione nel tempo** si intende l'operazione di estensione di un segnale $x(t)$ definito su $[0, T_0]$ ad un segnale periodico di periodo T_0 :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \text{rep}_{T_0} x_p(t) = \sum_n x(t - nT_0) = \sum_n (x * \delta)(t - nT_0) = \sum_n x(t) * \delta(t - nT_0) \\ &= x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) \end{aligned}$$

Trasformando secondo Fourier:

$$X_p(f) = X(f) \frac{1}{T_0} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Cioè:

$$\sum_n x(t - nT_0) \xrightarrow{FT} \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Antitrasformando:

$$x_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[X_p(f)](t) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) \mathcal{F}^{-1}\left[\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)\right](t) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{i2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

Si ottiene la **prima formula di Poisson**:

$$\sum_n x(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{i2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

L'utilità di questa formula sta nel fatto che **permette di calcolare con più facilità i coefficienti della serie di Fourier**, sfruttando la trasformata di Fourier del segnale replicato, campionata in n/T_0 ; infatti:

$$x_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{i2\pi\frac{n}{T_0}t} \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi kf_0 t} \end{cases}$$

Da cui:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} X(kf_0)$$

SECONDA FORMULA DI POISSON

Campionamento nel tempo \Leftrightarrow Replicazione in frequenza

Campionare un segnale può significare applicare ad esso un treno di impulsi, in modo che il nuovo segnale sia non nullo solo in corrispondenza di quegli impulsi e che abbia area pari al segnale calcolato in quel punto:

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(nT_0) \delta(t - nT_0)$$

Trasformando secondo Fourier sia come prodotto di trasformate che come trasformata del segnale:

$$X_\delta(f) = (X * \mathcal{F}[x_\delta(t)])(f) = X(f) * \frac{1}{T_0} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}[x_\delta(t)](f) = \sum_n x(nT_0) \mathcal{F}[\delta(t - nT_0)](f) = \sum_n x(nT_0) e^{-i2\pi nfT_0}$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene la **seconda formula di Poisson**:

$$\sum_n x(nT_0) e^{-i2\pi nfT_0} = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Il secondo termine rappresenta la trasformata di Fourier di un segnale a Tempo Discreto (visto che è la trasformata di un segnale in Tempo Continuo campionato).

Riassumendo:

Prima formula di Poisson	Seconda formula di Poisson
$\sum_n x(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{i2\pi\frac{n}{T_0}t}$	$\sum_n x(nT_0) e^{-i2\pi n f T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

LA TRASFORMATA DI FOURIER IN TEMPO DISCRETO

Riepilogando le proprietà dei segnali a Tempo Discreto canonici:

$$x[n] = e^{i2\pi F_0 n} \wedge y[n] = \cos(2\pi F_0 n) = \operatorname{Re}(x[n])$$

Si sa che essi sono segnali periodici in F_0 con periodo unitario o segnali periodici in n se F_0 è razionale:

$$F_0 = \frac{k}{N_0}$$

La sinusoide in esame può essere vista come sinusoide a Tempo Continuo campionata:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_0} = \cos(2\pi f_0 T_0 n) = \cos(2\pi F_0 n)$$

Normalizzando la frequenza numerica alla frequenza di campionamento:

$$F_0 = f_0 T_0$$

Sono elencate le proprietà di queste due sinusoidi:

- In Tempo Continuo le sinusoidi sono sempre periodiche $\forall f_0$, mentre in Tempo Discreto solo se F_0 è un numero razionale;
- In Tempo Continuo sinusoidi a frequenze diverse sono distinte, mentre in Tempo Discreto coincidono se le frequenze differiscono per un numero intero;
- In Tempo Continuo all'aumentare di f_0 aumenta la velocità di oscillazione del segnale, mentre in Tempo Discreto la massima velocità di oscillazione si ha per $F_0 = 1/2$.

Con queste proprietà alla mente, è possibile enunciare la formula di analisi e di sintesi per la trasformata di Fourier in Tempo Discreto:

Formula di Sintesi	Formula di Analisi
$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v) e^{i2\pi v n} dv$	$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi v n}$

Per la formula di sintesi si può puntualizzare che, grazie alla seconda proprietà delle sinusoidi a Tempo Discreto:

$$v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

O in qualsiasi intervallo di misura unitaria, mentre per la **formula di analisi** si può affermare che la trasformata di Fourier $X(\nu)$ (così come gli spettri di ampiezza e fase) è **periodica di periodo unitario** grazie alla **terza proprietà delle sinusoidi a Tempo Discreto**; infatti:

$$\begin{aligned} X(\nu + 1) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi(\nu+1)n} = e^{-i2\pi\nu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi\nu n} \\ &= (\cos(2\pi\nu) - i \sin(2\pi\nu)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi\nu n} = X(\nu) \end{aligned}$$

Come si è potuto notare, la **trasformata di Fourier in Tempo Discreto è simile a quella in Tempo Continuo**, ad eccezione di alcune differenze:

- Per **segnali sommabili**:
 - La serie che definisce l'equazione di analisi converge uniformemente in \mathbb{R} ;
 - $X(\nu)$ è una funzione continua;
- Per **segnali quadrato sommabili**:
 - La serie che definisce l'equazione di analisi converge in media quadratica;
- Per **segnali non sommabili**:
 - Si fa riferimento alla **trasformata di Fourier generalizzata** (come in Tempo Continuo)
- **Manca la proprietà di dualità**, che permette di calcolare la trasformata di Fourier in Tempo Continuo per alcuni segnali illimitati senza dover ricorrere al calcolo diretto.

Ad esempio, si trasformi secondo Fourier il segnale impulsivo a **Tempo Discreto**:

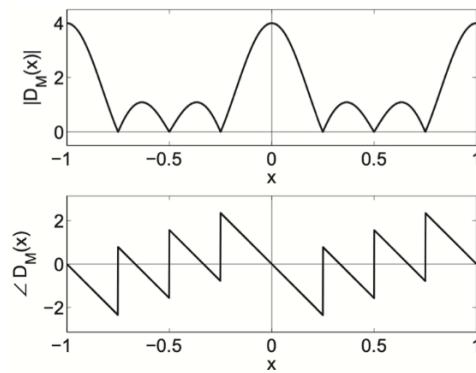
$$x[n] = \delta[n] = R_1[n]$$

Usando la **formula di analisi**:

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi\nu n} = e^{-i2\pi\nu n} \Big|_{n=0} = 1 = \frac{\sin(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} = D_1(\nu) \\ \delta[n] &= R_1[n] \xrightarrow{FT} D_1(\nu) \end{aligned}$$

Dove $D_N(\nu)$ è la **funzione di Dirichlet (o sinc(\cdot) periodica)**:

$$D_N(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$



E si può dimostrare essere la trasformata di Fourier della finestra rettangolare a Tempo Discreto:

$$R_N[n] \xrightarrow{FT} D_N(\nu)$$

Di seguito sono elencate le **principali proprietà della trasformata di Fourier in Tempo Discreto**:

- **Simmetria hermitiana**

$$x[n] \text{ reale} \Leftrightarrow X^*(\nu) = X(-\nu)$$

- **Linearità**

$$ax[n] + by[n] \xrightarrow{FT} aX(\nu) + bY(\nu)$$

- **Traslazione temporale e frequenziale**

$$x[n - n_0] \xrightarrow{FT} e^{-i2\pi\nu n_0} X(\nu)$$

$$e^{i2\pi\nu_0 n} x[n] \xrightarrow{FT} X(\nu - \nu_0)$$

- **Modulazione**

$$x[n] \cos(2\pi\nu_0 n) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2} X(\nu + \nu_0) + \frac{1}{2} X(\nu - \nu_0)$$

- **Valore nell'origine**

$$x[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu) d\nu$$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$

Le **uguaglianze del valore nell'origine** valgono se e solo se esistono finiti sia il primo che il secondo membro.

- **Uguaglianza di Parseval**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Fornisce una relazione tra energia del segnale nel tempo e in frequenza.

- **Prodotto e convoluzione**

Per la **convoluzione**:

$$(x * y)[n] \xrightarrow{FT} X(\nu)Y(\nu)$$

Sia $z[n] = (x * y)[n]$, allora:

$$z[n] = \sum_k x[k]y[n-k]$$

$$\begin{aligned} Z(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_k x[k]y[n-k] e^{-i2\pi\nu n} = \sum_k x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k]e^{-i2\pi\nu n} \\ &= \sum_k x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[l]e^{-i2\pi\nu(l+k)} = \sum_k x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[l]e^{-i2\pi\nu l}e^{-i2\pi\nu k} \\ &= \sum_k Y(\nu)x[k]e^{-i2\pi\nu k} = Y(\nu) \sum_k x[k]e^{-i2\pi\nu k} = X(\nu)Y(\nu) \end{aligned}$$

Per il **prodotto**:

$$x[n]y[n] \xrightarrow{FT} (X * Y)(\nu) = \int_1 X(u)Y(\nu - u)du$$

Sia $z[n] = x[n]y[n]$, allora:

$$\begin{aligned} Z(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(u)e^{i2\pi un} du \right) y[n]e^{-i2\pi\nu n} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(u) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-i2\pi(\nu-u)n} \right) du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(u)Y(\nu - u)du = (X * Y)(\nu) \end{aligned}$$

- Differenza prima**

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \xrightarrow{FT} Y(\nu) = X(\nu)(1 - e^{-i2\pi\nu})$$

È la relazione analoga alla derivazione in Tempo Continuo.

- Somma corrente**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{FT} \frac{X(\nu)}{1 - e^{-i2\pi\nu}}$$

È la relazione analoga all'integrazione in Tempo Continuo e vale per $X(0) = 0$.

- Riflessione**

$$y[n] = x[-n] \xrightarrow{FT} Y(\nu) = X(-\nu)$$

- Decimazione**

$$y[n] = x[Mn] \xrightarrow{FT} Y(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu - k}{M}\right)$$

È un'operazione non reversibile: nel tempo elimina alcuni campioni del segnale originale e in frequenza produce un espansione; a causa della periodicità della trasformata, bisognerà considerare anche il contributo delle repliche in frequenza, che possono alterare lo spettro del segnale.

Sia considerato $y[n]$ come sequenza di due operazioni, la moltiplicazione per un treno di impulsi ideali e la decimazione per M :

$$\tilde{x}[n] = x[n]\delta_M[n] = x[n] \sum_k \delta[n - kM] = \sum_k x[kM]\delta[n - kM]$$

Dove δ_M è il pettine di Dirac di periodo M :

$$\delta_M[n] \xrightarrow{DTFS} X_k = \frac{1}{M}$$

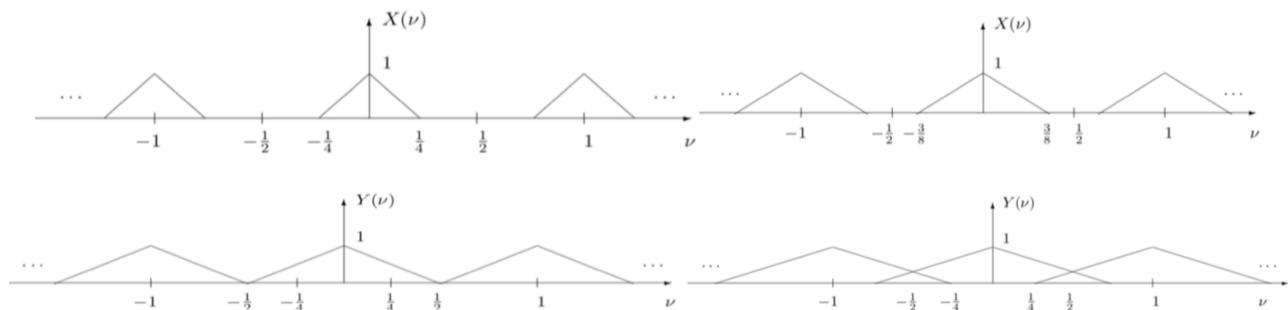
$$y[n] = \tilde{x}[Mn]$$

Allora:

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[Mn]e^{-i2\pi\nu n} \xrightarrow{k=Mn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[k]e^{-i2\pi\nu \frac{k}{M}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[n]e^{-i2\pi\nu \frac{n}{M}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta_M[n]e^{-i2\pi\nu \frac{n}{M}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} e^{i2\pi \frac{k}{M} n} e^{-i2\pi \frac{\nu}{M} n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{M-1} x[n]e^{-i2\pi \frac{\nu-k}{M} n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu - k}{M}\right) \end{aligned}$$

Ad esempio, con $y[n] = x[2n]$:

$$Y(\nu) = \frac{1}{2}X\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}X\left(\frac{\nu - 1}{2}\right)$$

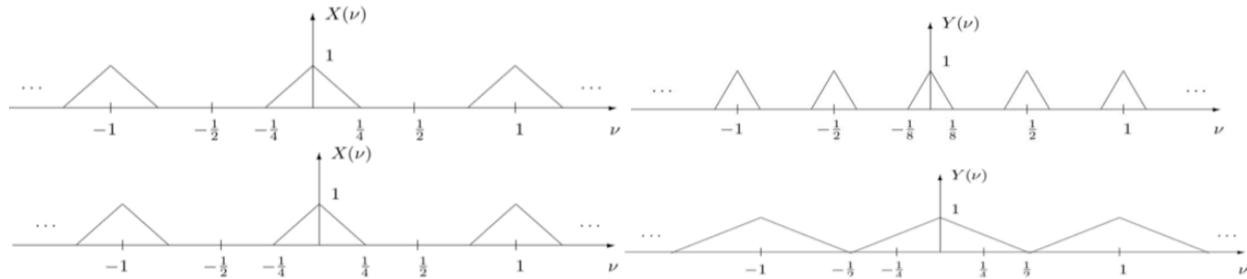


- **Espansione**

$$y[n] = x\left[\frac{n}{M}\right] \xrightarrow{FT} Y(\nu) = X(M\nu)$$

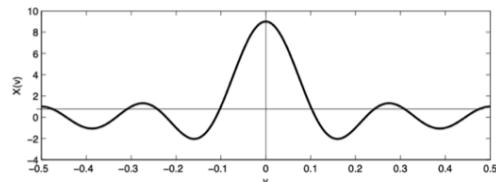
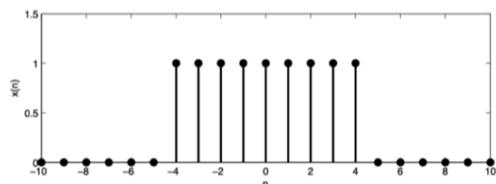
$$Y(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{n}{M}\right] e^{-i2\pi\nu n} \stackrel{k=\frac{n}{M}}{\Leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-i2\pi\nu M k} = X(M\nu)$$

Segue che, in **Tempo Discreto**, un'espansione nel tempo corrisponde ad una compressione in frequenza, a differenza del **Tempo Continuo** in cui le ampiezze della trasformata rimangono alterate. In genere, $X(\nu)$ ha periodo unitario, perciò $Y(\nu)$ ha periodo $1/M$; tuttavia, questa proprietà non pone problemi, perché risulta periodica di periodo 1 considerando $k \cdot 1/M$ con $k = M$.

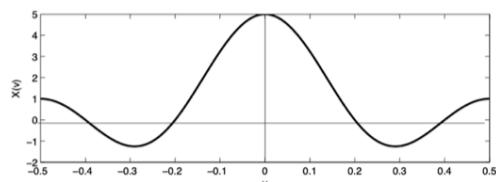
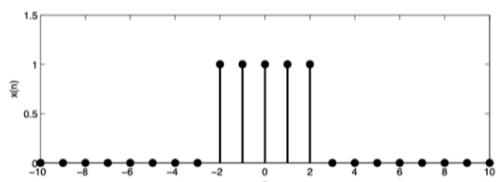


Per generalizzare quanto detto finora:

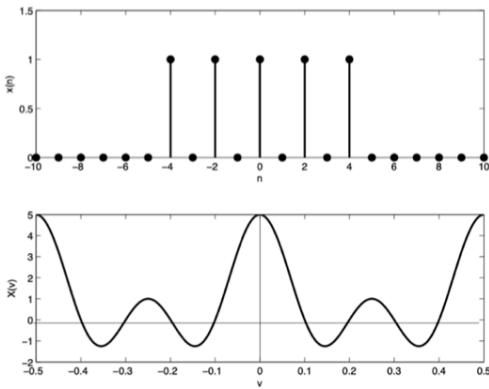
$$x[n] = R_9(n + 4)$$



$$y[n] = x[2n]$$



$$y[n] = x\left[\frac{n}{2}\right]$$



- **Dualità DTFT – CTFS**

L'assenza di una formula di dualità tra sintesi ed analisi viene bilanciata dalla cosiddetta dualità DTFT – CTFS, ovvero una **relazione tra la trasformata di Fourier in Tempo Discreto e la serie di Fourier in Tempo Continuo**.

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v) e^{i2\pi v n} dv \xrightarrow{DTFT} X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi v n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{i2\pi v n}$$

discreto nel tempo \xleftrightarrow{DTFT} **periodico in frequenza**

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} \xrightarrow{CTFS} X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

periodico nel tempo \xleftrightarrow{CTFS} **discreto in frequenza**

Si può concludere che $X(v)$ e $x_p(t)$ sono simili, come lo sono $x[n]$ e X_k se $T_0 = 1$; infatti, con un segnale $x_p(t)$ periodico di periodo unitario e con coefficienti $X_k = x[-k]$:

$$\begin{aligned} x_p(t) &\xleftrightarrow{CTFS} x[-k] \Leftrightarrow x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k] e^{i2\pi k f_0 t} \stackrel{v=t}{\Leftrightarrow} x_p(v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k] e^{i2\pi k f_0 v} \Big|_{f_0=1, n=-k} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n v} = X(v) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(v) = x_p(v)$$

Quando il segnale a tempo discreto in esame non è né un segnale sommabile né quadrato sommabile (ad esempio, i segnali di potenza) non è possibile utilizzare la classica trasformata di Fourier, nonostante sia ancora possibile di derivarne la trasformata generalizzata (a patto di introdurre il pettine di Dirac, detto anche treno di impulsi unitari). Ad esempio, sia considerato il segnale costante:

$$y[n] = 1$$

Ci si chiede:

$$y[n] \xrightarrow{DTFT} Y(\nu) = ?$$

Sfruttando la dualità DTFT – CTFS, esiste un segnale periodico $x_p(t)$ di periodo unitario tale che:

$$X_k = y(-k) = 1$$

Ovvero:

$$x_p(t) = \text{rep}_1[\delta[n]] = \sum_k \delta[n - k] \xrightarrow{CTFS} X_k = 1$$

Allora risulta:

$$y[n] = 1 \xrightarrow{DTFT} Y(\nu) = \delta_1(\nu)$$

Come nel caso a Tempo Continuo, **lo spettro di un segnale costante è concentrato a frequenza $k = 0$** ma, diversamente, **lo spettro di un segnale a Tempo Discreto è periodico**, quindi centrato in ciascuna frequenza $\nu = k$.

Invece, per il segnale:

$$x[n] = \text{sign}(n) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n \geq 0 \\ -1 & \Leftrightarrow n < 0 \end{cases}$$

Sfruttando la differenza prima:

$$\text{sign}(n) - \text{sign}(n - 1) = 2\delta[n] = y[n] \xrightarrow{FT} Y(\nu) = 2 = \mathcal{F}[\text{sign}(n)](\nu) \cdot (1 - e^{-i2\pi\nu})$$

Pertanto:

$$x[n] = \text{sign}(n) \xrightarrow{FT} X(\nu) = \mathcal{F}[\text{sign}(n)](\nu) = \frac{2}{1 - e^{-i2\pi\nu}}$$

Prima di procedere ad elencare le formule di Poisson in Tempo Discreto, si vuole **generalizzare la formula di somma corrente** (per $X(0) \neq 0$):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{FT} \frac{X(\nu)}{1 - e^{-i2\pi\nu}} + \frac{1}{2} X(0)\delta_N(\nu)$$

Le **formule di Poisson**, anche in **Tempo Discreto**, sono strumenti in grado di mettere in relazione il campionamento e la replicazione nel dominio del tempo e della frequenza.

PRIMA FORMULA DI POISSON IN TEMPO DISCRETO

Replicazione nel tempo \Leftrightarrow Campionamento in frequenza

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \text{rep}_{N_0} x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x * \delta)[n - kN_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta[n - kN_0] \\ &= x[n] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN_0] \end{aligned}$$

Trasformando secondo Fourier:

$$X_p(\nu) = X(\nu) \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \delta\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) \delta\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right)$$

Antitrasformando:

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN_0] = \mathcal{F}^{-1}[X_p(\nu)][n] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) \mathcal{F}^{-1}\left[\delta\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right)\right][n] \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{i2\pi \frac{k}{T_0} n} \end{aligned}$$

Da cui si ottiene la **prima formula di Poisson in Tempo Discreto**:

$$x_p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN_0] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{i2\pi \frac{k}{T_0} n}$$

L'utilità di questa formula sta nel fatto che **permette di calcolare con più facilità i coefficienti della serie di Fourier**, sfruttando la trasformata di Fourier del segnale replicato, campionata in k/N_0 ; infatti:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{N_0}\right)$$

SECONDA FORMULA DI POISSON IN TEMPO DISCRETO

Campionamento nel tempo \Leftrightarrow Replicazione in frequenza

$$x_\delta[n] = x[n] \delta_{N_0}[n] = x[n] \sum_k \delta[n - kN_0] = \sum_k x[kN_0] \delta[n - kN_0]$$

Trasformando secondo Fourier sia come prodotto di trasformate che come trasformata del segnale:

$$X_\delta(\nu) = \left(X * \mathcal{F}\left[\sum_k \delta[n - kN_0] \right] \right)(\nu) = X(\nu) * \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \delta\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right)$$

$$X_\delta(\nu) = \mathcal{F}[x_\delta[n]](\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN_0] \mathcal{F}[\delta[n - kN_0]](\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN_0] e^{-i2\pi \nu k N_0}$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene la **seconda formula di Poisson in Tempo Discreto**:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN_0] e^{-i2\pi\nu k N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right)$$

Il secondo termine rappresenta la **trasformata di Fourier di un segnale a Tempo Discreto**.

Riassumendo:

Prima formula di Poisson	Seconda formula di Poisson
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN_0] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{i2\pi\frac{k}{T_0}n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN_0] e^{-i2\pi\nu k N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right)$

ANALISI DEI SISTEMI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Per **sistema** si intende un **dispositivo arbitrario** (hardware o software) che, in corrispondenza di un **segnale di ingresso** (detto anche eccitazione o causa), continuo o discreto, **produce un segnale di uscita**, continuo o discreto:

$$x(t) \rightarrow y(t) = \mathcal{T}[x(\cdot), t] = \left[(x(u))_{u \in \mathbb{R}}, t \right]$$

$$x[n] \rightarrow y[n] = \mathcal{T}[x(\cdot), n] = \mathcal{T}\left[(x(k))_{k \in \mathbb{Z}}, n \right]$$

Il focus sui sistemi, in questa sede, verrà messo sui **sistemi monodimensionali SISO** (Single Input Single Output). **Assegnare un sistema** equivale a dire **assegnare una regola** (o qualsiasi mezzo, più in generale) che consente di **individuare il segnale di uscita $y(\cdot)$ per ogni segnale di ingresso $x(\cdot)$** ; ad esempio:

$$y(t) = Ax(t)$$

Sono elencate di seguito le **proprietà dei sistemi** (sia per Tempo Continuo che per Tempo Discreto):

- **Linearità**

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \wedge x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

- **Principio di sovrapposizione degli effetti**
 - **Omogeneità**

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow ax(t) \rightarrow ay(t)$$

- **Additività**

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases} \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

- **Stazionarietà (tempo invarianza)**

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad \forall t_0$$

Cioè, **definendo il funzionale**:

$$x(t) \rightarrow \mathcal{T}[x(t)] = y(t)$$

Deve risultare:

$$\mathcal{T}[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

Concettualmente, **il comportamento e le caratteristiche del sistema non variano nel tempo.**

- **Causalità**

$$y(t) = \mathcal{T}[(x(u))_{u \leq t}, t]$$

Ovvero, l'uscita non dipende dai futuri valori dell'ingresso, ma solo da quelli passati e attuali

- **Non dispersività (o memorylessness)**

$$y(t) = \mathcal{T}[(x(u))_{u=t}, t]$$

In genere:

$$\text{Non dispersione} \Rightarrow \text{Causalità}$$

- **Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)**

$$|x(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq N$$

- **Invertibilità**

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(t) \Rightarrow \exists \mathcal{T}^{-1} : x(t) = \mathcal{T}^{-1}[(y(u))_{u=t}, t]$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(t) \xrightarrow{\mathcal{T}^{-1}} x(t)$$

$$x(t) \leftrightarrow y(t)$$

Considerando un **qualsiasi segnale in ingresso $x(t)$** , per le **proprietà della delta di Dirac**:

$$x(t) = (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \delta(t - \alpha) d\alpha$$

Detta **rappresentazione integrale di $x(t)$** ; osservandone l'uscita:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \delta(t - \alpha) d\alpha, t \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}[x(\alpha) \delta(t - \alpha), t] d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \mathcal{T}[\delta(t - \alpha), t] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) w(t, \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Dove:

$$w(t, \alpha) = \mathcal{T}[\delta(t - \alpha), t]$$

È detta **risposta impulsiva tempo – tempo**. Ponendo $\tau = t - \alpha$ risulta:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) w(t, \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) w(t, t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(t, \tau) d\tau$$

Dove:

$$h(t, \tau) = w(t, t - \tau)$$

È detta **risposta impulsiva tempo – ritardo**. Si può definire l'ultimo integrale trovato come **integrale di superposizione in tempo – ritardo**:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(t, \tau) d\tau$$

Se **il sistema è stazionario** (tempo – invariante, LTI):

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0 - \tau) h(t - t_0, \tau) d\tau$$

Definendo $\tilde{y}(t)$ l'uscita dell'ingresso traslato:

$$x(t - t_0) \rightarrow \tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0 - \tau) h(t, \tau) d\tau$$

Deve risultare:

$$\tilde{y}(t) = y(t - t_0) \quad \forall t_0$$

Quindi:

$$h(t, \tau) = h(t - t_0, \tau) \quad \forall t_0 \Rightarrow h(\tau) = h(t, \tau)$$

Dove $h(\tau)$ è detta **risposta impulsiva del sistema LTI**. Si può riassumere la **forma integrale dell'output** del sistema in funzione della propria **risposta impulsiva**:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau = (x * h)(t)$$

Ovvero, l'uscita di un sistema LTI è data dalla convoluzione dell'ingresso con la rispettiva **risposta impulsiva $h(t)$ del sistema**, ottenuta imponendo in ingresso un impulso ideale $\delta(t)$:

$$y(t) = (x * h)(t)|_{x(t)=\delta(t)} = h(t)$$

In **tempo discreto** può essere mostrata una **proprietà simile**:

$$x[n] = (x * \delta)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k]$$

$$y[n] = \mathcal{T}[x[n], n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \mathcal{T}[\delta[n-k], n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] w(n, k)$$

Dove $w(n, k)$ è detta **risposta impulsiva tempo – tempo**. Si definisce **somma di superposizione in tempo – ritardo**:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m] h(n, m)$$

Dove $m = n - k$, con n istante di osservazione e k istante di applicazione dell'impulso; se il sistema è LTI, si definisce **somma di convoluzione in tempo – ritardo**:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m] h[m] = (x * h)[n]$$

Dove:

$$h(n) = h(n, m) \quad \forall m$$

L'uscita di un sistema LTI si ricava a partire dalla risposta impulsiva $h(t)$ del sistema all'impulso $\delta(t)$; ciò significa che $h(t)$ caratterizza univocamente il sistema, le cui proprietà sono desumibili da essa:

- **Tempo invarianza**

$$h(t, \tau) = h(\tau) \quad \forall t$$

$$h(n, m) = H[m] \quad \forall n$$

- **Causalità**

$$h(\tau) = h(\tau) u(\tau)$$

$$h[m] = h[m] u[m]$$

- **Non dispersività (o memorylessness)**

$$h(\tau) = \alpha \delta(\tau)$$

$$h[m] = \alpha \delta[m]$$

- **Stabilità MIMO (Multiple Input Multiple Output)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < +\infty$$

Ovviamente, è possibile connettere diversi sistemi tra di loro secondo diverse configurazioni; le tre prevalenti sono le seguenti:

- **Sistemi in cascata**, caratterizzati dal fatto che l'uscita di un sistema è l'ingresso di un altro e la cui risposta complessiva è determinata da:

$$h(t) = (h_1 * h_2)(t)$$

Infatti:

$$z(t) = (x * h_1)(t) \wedge y(t) = (z * h_2)(t) = (x * (h_1 * h_2))(t)$$

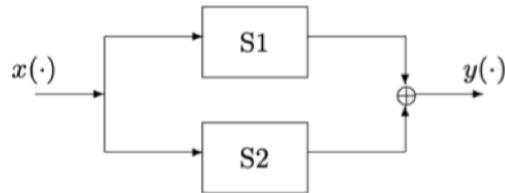


- **Sistemi in parallelo**, caratterizzati dal fatto che l'ingresso ai due sistemi è lo stesso e l'uscita è la somma delle loro uscite:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Infatti:

$$y(t) = (x * h_1)(t) + (x * h_2)(t) = (x * (h_1 + h_2))(t)$$



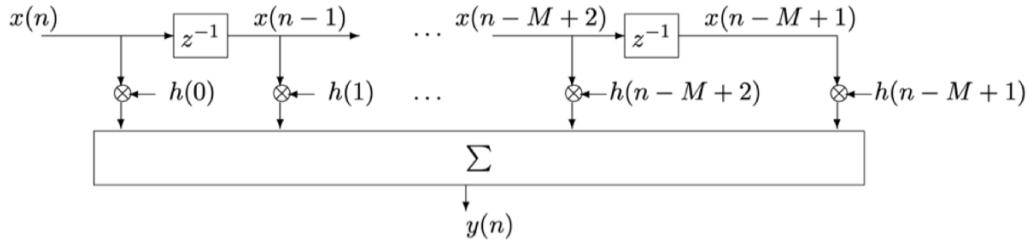
- **Sistemi in controreazione**, caratterizzati dal fatto che l'uscita del sistema può influenzare l'input allo stesso al fine di modularne il comportamento:

$$y(t) = (x * h_1)(t) - (y * h_2)(t)$$



Nel dominio del tempo è importante **classificare il sistema in base alla finitezza della risposta all'impulso**, in quanto permettono di individuare la realizzabilità del sistema. Un primo tipo di classificazione divide i sistemi in **FIR** e **IIR**:

- **Sistemi FIR** (Finite Impulsive Response), sono **fisicamente realizzabili** mediante l'implementazione di un **numero finito di addizionatori, moltiplicatori e locazioni di memoria**;



Un esempio di sistema FIR è il **filtro MA** (Moving – Average), caratterizzato come segue:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n - k]$$

L'uscita di questo sistema è la somma pesata, dai coefficienti a_k , degli N ingressi da $x[n]$ a $x[n - N]$; nel caso in cui $a_k = 1/N$, l'uscita è la media aritmetica di tali ingressi. Il sistema è chiaramente lineare e la sua risposta impulsiva può essere individuata dal seguente procedimento:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n - m]h(n, m) \Rightarrow h(n, m) = y[n]|_{x[n]=\delta[n]} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[n - k]$$

Poiché $h(n, m)$ non dipende da m , il sistema è tempo invariante (LTI):

$$h(m, n) = h(n) \quad \forall n$$

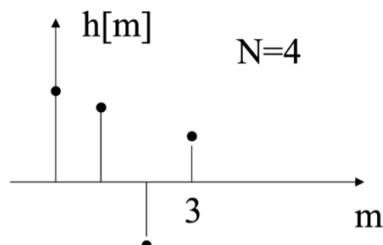
Pertanto, la **risposta impulsiva** è:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[n - k]$$

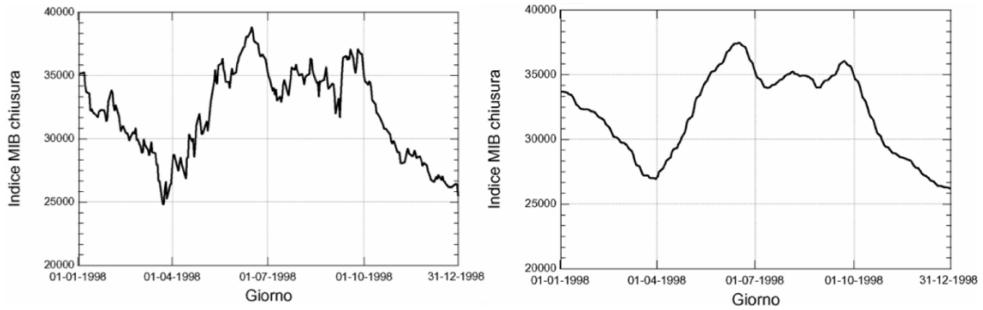
Infatti:

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n - m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n - m] \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[m - k] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n - m] \delta[m - k] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n - m]|_{m=k} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n - k] \end{aligned}$$

Si noti che **$h[n]$ ha durata finita**; quindi, il sistema è a **risposta impulsiva finita (FIR)**:



Il **filtro MA** (come sarà più chiaro in seguito) è un **filtro passa basso**, uno **smoothing filter**; infatti:

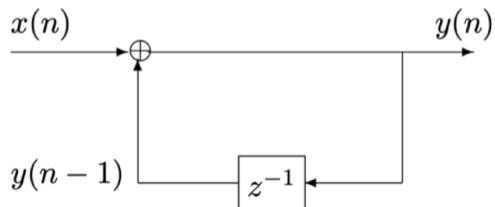


- **Sistemi IIR** (Infinite Impulsive Response), in genere **non realizzabili**; un esempio di sistema IIR è la **somma corrente**:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Si noti che questo tipo di sistema preveda un'implementazione ricorsiva, che rende la risposta all'impulso infinita e il sistema fisicamente irrealizzabile:

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$



Questa forma non definisce completamente il sistema, che invece può essere rappresentato in seno alla conclusione del ragionamento che verrà proposto di seguito:

$$y[0] = x[0] + y[-1]$$

$$y[1] = x[1] + y[0] = x[1] + x[0] + y[-1]$$

$$y[2] = x[2] + y[1] = x[2] + x[1] + x[0] + y[-1]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] + y[-1]$$

Con $y[-1]$ condizione iniziale.

Esiste una sottoclasse di sistemi IIR fisicamente realizzabili, quella costituita da sistemi descritti da un'equazione alle differenze a coefficienti costanti:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m], a_0 \neq 0$$

Assumendo che **il sistema evolva da N condizioni iniziali** e che $a_0 = 1$, si è individuato un **sistema LTI denominato ARMA** (Auto – Regressive Moving – Average, o sistema autoregressivo a media mobile):

$$y[n] = - \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

Il primo addendo costituisce la parte ricorsiva (Auto – Regressive), mentre **il secondo è un filtro MA**. L'uscita del sistema dipende da M valori di ingresso e N valori precedenti dell'uscita, dette **condizioni iniziali** e che devono essere **necessariamente specificate**; se la **condizione iniziale** è di **riposo, il sistema è LTI**.

Due casi particolari di questo sistema sono già stati analizzati:

- $\mathbf{M} = \mathbf{0} \Rightarrow$ **filtro AR**

$$y[n] = - \sum_{k=0}^N a_k y[n-k]$$

- $\mathbf{N} = \mathbf{0} \Rightarrow$ **filtro MA**

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

ANALISI DEI SISTEMI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Considerato un **qualsiasi sistema LTI**, le cui variabili di ingresso e uscita sono sommabili e descritto come:

$$y(t) = (x * h)(t)$$

La cui **uscita** potrà essere descritta nel dominio della frequenza dalla sua **trasformata di Fourier**:

$$y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f)$$

Ma quest'ultima potrà essere espressa in funzione delle trasformate di Fourier dei segnali di input, convoluti alla risposta impulsiva:

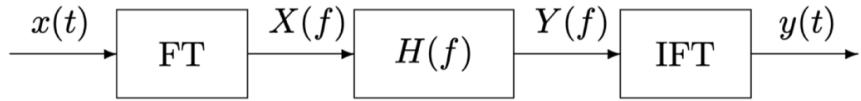
$$y(t) = (x * h)(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f) = \mathcal{F}[(x * h)(t)](f) = X(f)H(f)$$

Dove:

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

È detta **risposta impulsiva in frequenza**, o **risposta armonica, del sistema LTI**. Con le relazioni introdotte, è possibile vedere il **segnaletico di uscita come convoluzione nel tempo o prodotto in**

frequenza; ciò significa che la realizzazione del sistema può essere ottenuta mediante trasformate e antitrasformate in base alla convenienza:



Sia posto in ingresso ad un sistema LTI un fasore complesso di frequenza f :

$$x(t) = e^{i2\pi ft}$$

L'uscita del sistema sarà:

$$\begin{aligned} y(t) &= (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{i2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f\tau} h(\tau) d\tau = e^{i2\pi ft} \mathcal{F}[h(t)](f) \\ &= e^{i2\pi ft} H(f) \end{aligned}$$

Pertanto, se $\exists H(f) : \mathcal{F}[h(t)](f) = H(f)$ allora il sistema LTI può essere definito dal seguente legame funzionale:

$$x(t) = e^{i2\pi ft} \rightarrow y(t) = e^{i2\pi ft} H(f)$$

Dove:

$$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{i2\pi ft}}$$

Per questo particolare sistema si hanno i seguenti **spettri di ampiezza e fase**:

$$A_H(f) = |y(t)| \wedge \nu_H(f) = \text{Arg}[y(t)]$$

Quindi:

$$y(t)|_{x(t)=e^{i2\pi ft}} = H(f)e^{i2\pi ft} = A_H(f)e^{\nu_H(f)}e^{i2\pi ft} = A_H(f)e^{i2\pi ft+\nu_H(f)}$$

Il fasore che rappresenta l'uscita è attenuato e shiftato in fase ma non in frequenza. Ad esempio, si ipotizzi una sinusoida in ingresso al sistema:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} \delta(f_0) + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} \delta(-f_0)$$

Allora l'uscita:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} H(f_0) + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} H(-f_0)$$

$$y(t) = A|A_H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \nu_H(f_0))$$

Che è una **sinusoide attenuata e shiftata in fase ma invariata in frequenza**. Se $h(t)$ è reale $H(f)$ è **hermitiana**, cioè ha spettro di ampiezza pari e spettro di fase dispari:

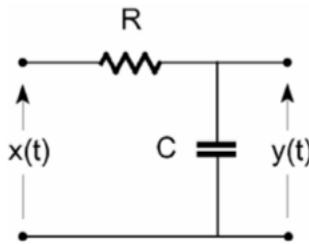
$$A_H(f) = A_H(-f) \wedge \nu_H(f) = -\nu_H(-f)$$

Ciò significa che **si possono rappresentare gli spettri della risposta armonica per le sole frequenze non negative ($f \geq 0$)**; valgono, cioè, tutte le proprietà della trasformata di Fourier.

Lo spettro di fase $A_H(f) = |H(f)|$ può variare significativamente di diversi ordini di grandezza; è necessaria, quindi, **una forma più agevole** e viene in aiuto la **rappresentazione in decibel**:

$$|H(f)|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = 20 \log_{10} \frac{|H(f)|}{|H(f_0)|}$$

Dove f_0 è **una frequenza di riferimento**, di solito quella che massimizza il modulo $|H(f)|$. Si propone, di seguito, un esempio di **filtro RC** con il quale è facilmente individuabile ciò che è stato detto finora:



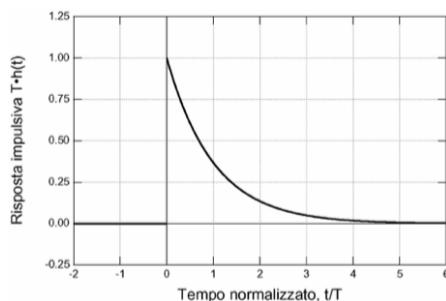
$$\begin{cases} RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ponendo $T = RC$:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dy}[H(f)e^{i2\pi ft}] = i2\pi f \cdot H(f)e^{i2\pi ft}$$

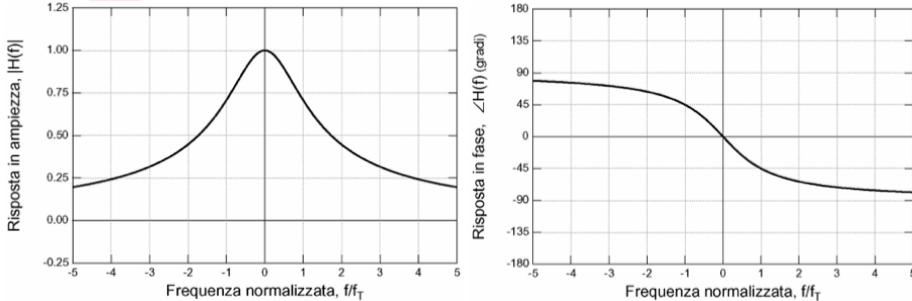
$$i2\pi fT \cdot H(f)e^{i2\pi ft} + H(f)e^{i2\pi ft} = e^{i2\pi ft}$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + i2\pi fT} \xrightarrow{FT} h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$



Con:

$$A_H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}} \wedge v_H(f) = -\arctan(2\pi f T)$$



La frequenza che massimizza $A_H(f)$ è $f_0 = 0$, quindi:

$$|H(f)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}} \right)$$

Ad esempio:

$$\left| H\left(\frac{1}{2\pi T}\right) \right|_{dB} = -3dB$$

In Tempo Discreto la relazione tra ingresso e uscita nel dominio della frequenza è:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \xrightarrow{FT} Y(v) = \mathcal{F}[(x * h)[n]](v) = X(v)H(v)$$

Con:

$$H(v) = \sum_k h[k]e^{-i2\pi v k}$$

Periodico di periodo unitario:

$$H(v) = H(v+1)$$

Valgono le stesse considerazioni fatte per i sistemi in Tempo Continuo, come la proprietà per cui l'uscita modifica ampiezza e fase del fasore di ingresso ma non la frequenza:

$$\begin{aligned} x[n] = e^{i2\pi v n} \Rightarrow y[n] &= (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi v(n-k)} h(k) = e^{i2\pi v n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi v k} h(k) \\ &= e^{i2\pi v n} H(v) \end{aligned}$$

Quindi se $\exists H(v) : \mathcal{F}[h[n]](v) = H(v)$ allora il sistema LTI può essere definito dal seguente legame funzionale:

$$x[n] = e^{i2\pi v n} \rightarrow y[n] = H(v)e^{i2\pi v n}$$

Dove:

$$H(v) = \frac{y[n]}{x[n]} \Big|_{x[n]=e^{i2\pi v n}}$$

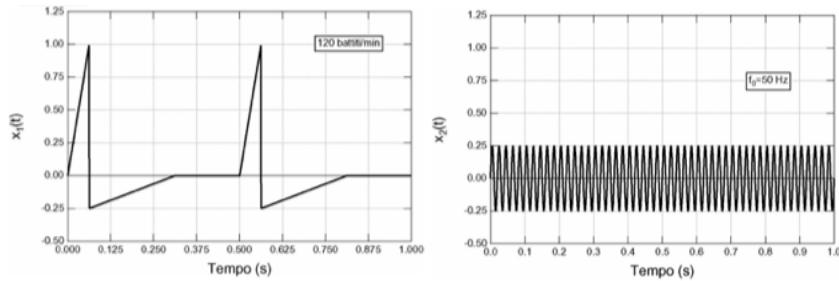
IL FILTRAGGIO DEI SEGNALI

Sia considerato un segnale utile $s(t)$, ad esempio un elettrocardiogramma, che in frequenza può essere rappresentato da uno spettro concentrato alle basse frequenze:

$$s(t) \xrightarrow{FT} S(f) = \Delta \left(\frac{f}{B} \right)$$

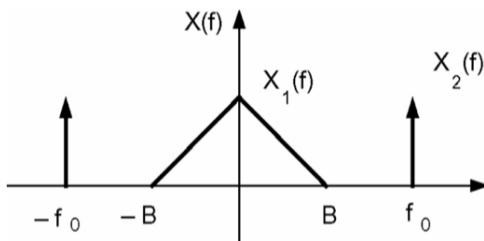
Che, però, è disturbato da un segnale sinusoidale, ad esempio un tono a $f_0 = 50\text{Hz}$ dovuto all'alimentazione:

$$i(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$



Il segnale che viene registrato da uno strumento si presenta come una sovrapposizione dei due segnali:

$$x(t) = s(t) + i(t) \xrightarrow{FT} X(f) = S(f) + I(f)$$



Per ottenere una misura precisa e accurata è necessario filtrare il segnale $x(t)$ per eliminare il disturbo $i(t)$; nel dominio del tempo un'operazione come questa può risultare piuttosto ardua, mentre nel dominio della frequenza le differenti proprietà spettrali del segnale di interesse e del disturbo (come l'ortogonalità in frequenza tra i due spettri) rendono più accessibile l'obiettivo.

Possono essere usati diverse tipologie di filtri:

- Filtro passa basso ideale (LP)

$$H_{LP}(f) = \Pi \left(\frac{f}{2B} \right)$$

$$h_{LP}(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

- **Filtro passa basso reale: RC**

$$H(f) = \frac{1}{1 + i2\pi f T}$$

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

Per questi utilizzi viene filtrato il segnale noisy, in modo da eliminare la componente disturbante:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$y(t) = (x * h)(t)$$

- **Filtro passa alto ideale (HP)**

$$H_{HP}(f) = 1 - \prod \left(\frac{f}{2B} \right)$$

$$h_{LP}(t) = \delta(t) - 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

- **Filtro passa banda ideale (BP)**

$$H_{BP}(f) = \prod \left(\frac{f + f_0}{B} \right) + \prod \left(\frac{f - f_0}{B} \right)$$

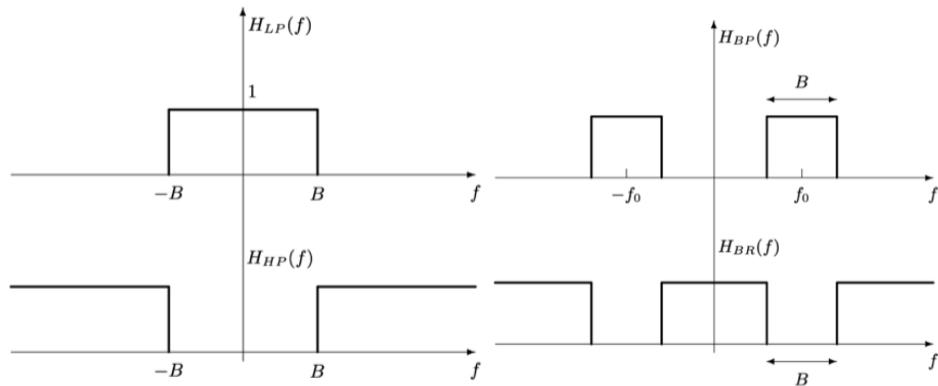
$$h_{BP}(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

- **Filtro elimina banda ideale (BR)**

$$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f)$$

$$h_{BR}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t)$$

Riassumendo **graficamente** questi quattro tipi di filtri:



Una volta **filtrato un segnale**, bisogna porre attenzione sul problema della **distorsione** del segnale utile; la distorsione è un fenomeno da evitare nel processo di **filtraggio** perché potrebbe alterare il **contenuto informativo del segnale**. Prima di affrontare il tema, è bene **definire le condizioni per**

cui il segnale in uscita da un sistema rappresenta una replica fedele del segnale in ingresso $x(t)$; in genere la definizione di replica fedele è dipendente dall'applicazione ma in molti casi si può dire che **il sistema non induce distorsioni quando:**

$$y(t) = kx(t - t_0)$$

Ovvero se differisce per una costante moltiplicata e/o un ritardo. In tal caso:

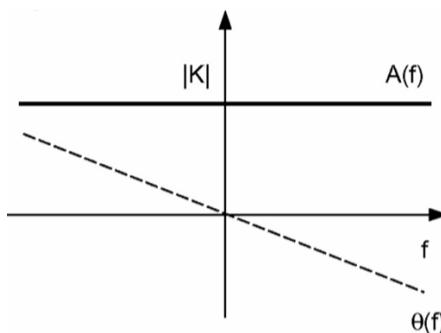
$$Y(f) = kX(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

Quindi:

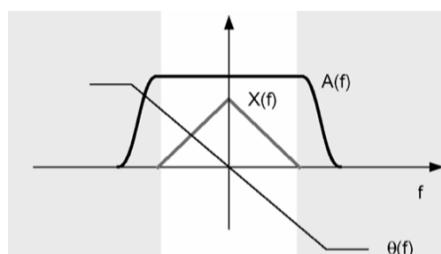
$$H(f) = ke^{-i2\pi f t_0}$$

$$A_H(f) = |k| \wedge \nu_H(f) = -2\pi f t_0 \pm m\pi \forall m$$

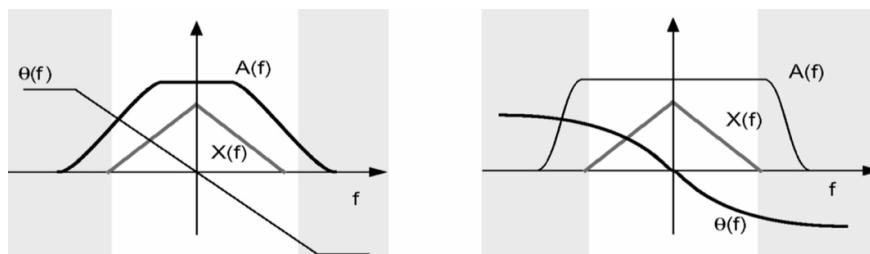
In poche parole, **affinché un sistema non introduca distorsioni**, esso deve possedere **una risposta in ampiezza costante e una risposta in fase proporzionale alla frequenza**:



In realtà, il segnale utile che non deve essere distorto sarà in generale caratterizzato da una banda limitata; quindi, le condizioni per la non distorsione possono essere verificate anche solo per tutte le frequenze all'interno della banda del segnale:



Nel caso in cui non si possano garantire le condizioni di non – distorsione neanche nella banda del segnale, questo subisce distorsioni lineari; in particolare, se la risposta in ampiezza non è costante si avranno distorsioni in ampiezza, viceversa in fase se la relativa risposta non è lineare:



Infine, si mostra una proprietà dei sistemi LTI che mette in **relazione dispersività nel tempo e selettività in frequenza**. Sia considerato un sistema per cui $\exists H(f) : \mathcal{F}[h(t)](f) = H(f)$

$$y(t) = (x * h)(t) \xrightarrow{FT} Y(f) = X(f)H(f)$$

Allora:

$$h(t) \neq \delta(t) \Rightarrow H(f) \neq a \forall f$$

dispersività nel tempo \Rightarrow selettività in frequenza

CARATTERIZZAZIONE ENERGETICA DEI SEGNALI

Riprendendo la **definizione di segnale di energia**, è possibile sfruttare l'**uguaglianza di Parseval** per ottenere una **forma diversa per la suddetta legge**:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df \right)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-i2\pi ft} df dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

La quantità $|X(\cdot)|^2$ è detta **misura di distribuzione dell'energia in frequenza o densità spettrale di energia**:

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

$S_x(f_0)$ rappresenta il **rapporto tra il contributo energetico delle componenti frequenziali appartenenti ad un intorno di f_0 e l'ampiezza di tale intorno**. La densità spettrale di energia gode delle seguenti **proprietà**:

- **Positività**

$$S_x(f) \geq 0$$

- **Parità per segnali pari**

$$S_x(-f) = S_x(f) \Leftrightarrow x(t) \subseteq \mathbb{R}$$

- **Integrazione come energia del segnale**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = E_x$$

- **Densità spettrale di energia di un sistema LTI**

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2|H(f)|^2 = S_x(f)|H(f)|^2$$

- **Teorema di Wiener – Kintchine**

$$x(t) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(t)](f)$$

Infatti:

$$S_x(f) = X(f)X^*(f) \xrightarrow{FT} (x * x^*)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(t - \tau)d\tau = R_x(t)$$

La tesi può anche essere enunciata come segue:

$$S_x(f) \xrightarrow{FT} R_x(t)$$

Si applichi il teorema di Wiener – Kintchine ad un segnale periodico $x(t)$:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(\tau - t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi kf_0(\tau-t)} \right)^* dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{i2\pi kf_0 t} e^{-i2\pi kf_0 \tau} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{-i2\pi kf_0 \tau} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{-i2\pi kf_0 \tau} \end{aligned}$$

L'autocorrelazione $R_x(\tau)$ di un segnale periodico è anch'essa **periodica**, quindi **sviluppabile in serie di Fourier**:

$$R_x(\tau) \xrightarrow{FS} \{X_k\}$$

Ma per il teorema di Wiener – Kintchine:

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)](f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \mathcal{F}[e^{-i2\pi kf_0 \tau}](f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

Filtrando $x(t)$ con un filtro passa banda in un intorno di kf_0 si ottengono i coefficienti X_k . Con il ragionamento appena mostrato si è reso evidente che **si può determinare la densità spettrale di energia dallo sviluppo in serie di Fourier e senza calcolarne la trasformata di Fourier.**

Se la **densità spettrale di energia** descrive la **distribuzione dell'energia nel dominio delle frequenze**, risulta **necessario introdurre anche una definizione di banda** che si basi su **considerazioni energetiche**; una definizione che rispetta queste premesse è la **banda $\alpha\%$ di energia**, ovvero **l'intervallo di frequenze in cui è concentrata una certa percentuale α di energia**:

$$B_{\alpha\%} = \frac{\alpha}{100} E_x$$

Ad esempio, **per un filtro passa basso**:

$$B_{99\%}: \int_{-B_\alpha}^{B_\alpha} S_x(f) df = \frac{99}{100} E_x$$

Introducendo il **segnale troncato**:

$$x_T(t) = x(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Si può fare un **discorso analogo per i segnali di potenza**:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 df \end{aligned}$$

Per cui si definisce **densità spettrale di potenza**:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

E corrisponde al **limite dello spettro di energia troncato** in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$; esso rappresenta il rapporto tra il contributo di potenza delle componenti frequenziali appartenenti ad un intorno di f_0 e l'ampiezza di tale intorno. La densità spettrale di potenza gode delle seguenti **proprietà**:

- **Positività**

$$S_x(f) \geq 0$$

- **Parità per segnali pari**

$$S_x(-f) = S_x(f) \Leftrightarrow x(t) \subseteq \mathbb{R}$$

- **Integrazione come potenza del segnale**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = P_x$$

- **Densità spettrale di potenza di un sistema LTI**

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_x(f) |H(f)|^2$$

- **Teorema di Wiener – Kintchine**

$$x(t) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(t)](f)$$

La tesi può anche essere enunciata come segue:

$$S_x(f) \xleftrightarrow{FT} R_x(t)$$

Applicando ad un segnale periodico il teorema di Wiener Kintchine:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{-i2\pi k f_0 \tau}$$

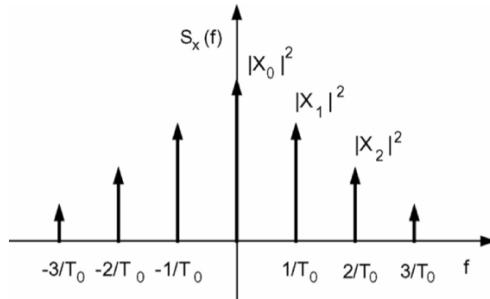
La potenza è:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[R_x(\tau)](f) df = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{-i2\pi k f_0 t}](f) df \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + 2 \sum_k A_k^2
 \end{aligned}$$

Dove A_k è il k -esimo coefficiente della serie di Fourier in forma polare. Il risultato appena ottenuto prende anche il nome di **Teorema di Parseval**:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + 2 \sum_k A_k^2$$

Ricordando che ogni componenete armonica ha ampiezza $2A_k$ e potenza $(2A_k)^2/2$, la potenza può essere espressa come somma delle potenze delle singole armoniche, compresa la componente costante A_0 :



Sia considerato un **segnale composto dalla somma di due segnali**:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

L'energia di questo segnale è:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) + y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) + y(t))(x(t) + y(t))^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df + \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df + \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f) dt \\
 &= E_x + E_y + E_{xy} + E_{yx}
 \end{aligned}$$

Con:

$$\begin{aligned}
 E_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{i2\pi f t} df \right)^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) e^{-i2\pi f t} df dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) dt
 \end{aligned}$$

In tal modo, è possibile **definire la densità spettrale mutua di energia come:**

$$S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

Quando i due segnali somma sono ortogonali:

$$E_z = E_x + E_y + E_{xy} + E_{yx} = E_x + E_y \wedge E_{xy} = E_{yx} = 0$$

Dall'ortogonalità segue necessariamente la **condizione di incoerenza**:

$$S_{xy}(f) = S_{yx}(f) = 0 \quad \forall f$$

Per la quale si può dire che:

$$\text{incoerenza} \Rightarrow \text{ortogonalità}$$

Allora, se la funzione integranda è nulla l'energia mutua $E_{xy} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f)df$ è nulla, ma l'integrale può essere nullo anche se $S_{xy}(f) \neq 0 \quad \forall f$.

Si può ragionare in maniera analoga per un segnale di potenza $z(t) = x(t) + y(t)$, per il quale la **densità spettrale mutua di potenza** è:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{X(f)Y^*(f)}{T}$$

E per il quale valgono le stesse considerazioni fatte per la **densità spettrale mutua di energia**.

CONVERSIONE ANALOGICO – DIGITALE

I fenomeni fisici evolvono in maniera continua nel tempo e nell'ampiezza e andrebbero meglio descritti con segnali analogici, quindi a tempo ed ampiezza continua; tuttavia, l'elaborazione digitale non permette, a causa di limiti di tempo e spazio, l'impiego di segnali analogici. Nasce quindi la necessità di convertire segnali analogici in segnali digitali, a tempo ed ampiezza discreta, e viceversa, in un processo che prende il nome di **DSP (Digital Signal Processing)**. Nella pratica, il DSP viene eseguito con l'impiego di due dispositivi distinti: un **convertitore analogico – digitale** (detto A/D) e uno **digitale – analogico** (D/A); il sistema che rappresenta questo processo può essere rappresentato come:

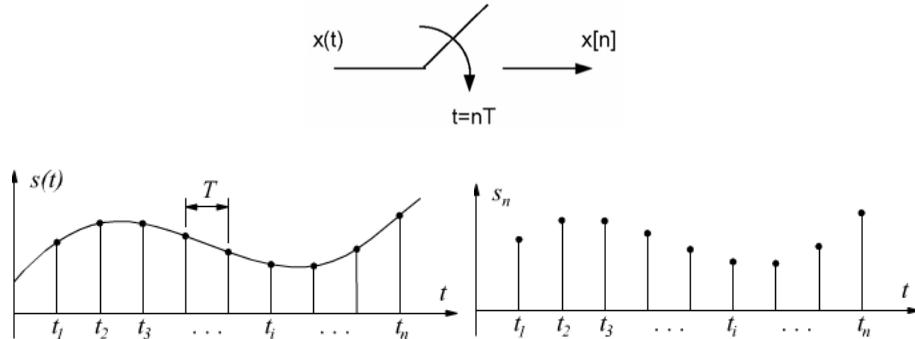


Soffermandosi sul **convertitore A/D**, si può affermare che esso compie due operazioni distinte: un **campionamento**, che porta il segnale da **Tempo Continuo a Tempo Discreto**, e una **quantizzazione**, che porta il segnale da **Ampieze Continue ad Ampieze Discrete**; quindi, una **discretizzazione dei tempi e una discretizzazione delle ampiezze**:



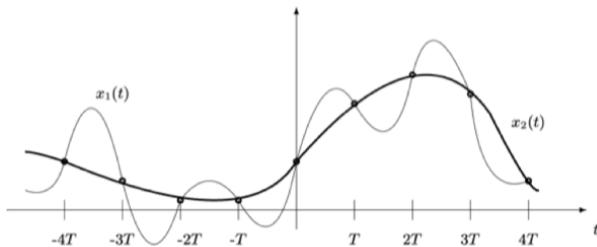
Campionare un segnale a Tempo Continuo significa estrarre i valori che esso assume in istanti di tempo equispaziati di T (passo o periodo di campionamento, misurato in secondi); la relazione matematica che descrive l'operazione è:

$$x[n] = x(nT)$$



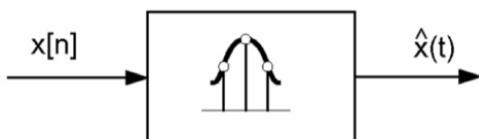
Una volta introdotto il tema, è opportuno porsi un problema fondamentale: come si può **impostare il periodo di campionamento** affinché **il segnale campionato mantenga le stesse caratteristiche del segnale analogico in ingresso** e affinché **la sua ricostruzione sia fedele all'originale**? La risposta dipende dal segnale, perché **un segnale che varia rapidamente** (cioè a banda larga) **ha bisogno di una maggior frequenza di campionamento** rispetto ad un segnale che varia più lentamente (cioè a banda stretta).

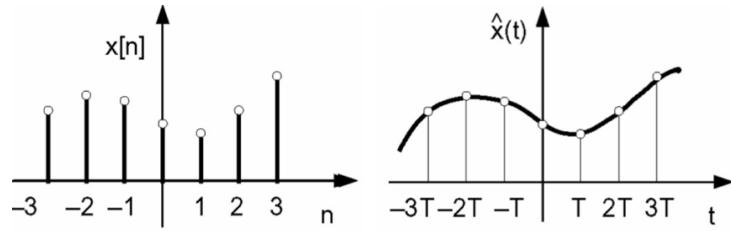
Nella figura seguente il **campionamento non è stato sufficientemente frequente** ed il **segnale discretizzato ha perso le proprietà del segnale analogico di cui è il campionamento**; infatti, la **ricostruzione del segnale può generare due segnali ben diversi**, dei quali non si sa qual è l'originale:



Si può concludere, quindi, che **il periodo di campionamento deve essere (nel dominio del tempo) commisurato alla rapidità di variazione del segnale o (nel dominio della frequenza) alla sua banda**.

La ricostruzione di un segnale è l'operazione inversa del campionamento: trasforma un segnale a **Tempo Discreto** in un segnale a **Tempo Continuo** attraverso **l'interpolazione della sequenza discreta di valori di cui il segnale in ingresso è composto**.



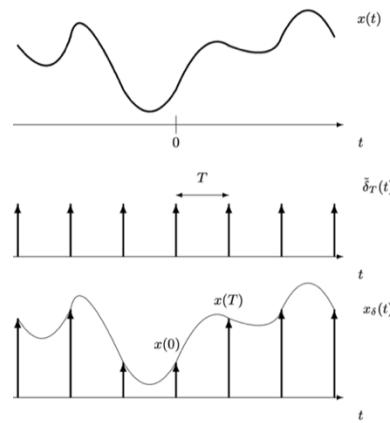


Il campionamento di un segnale analogico può avvenire in diversi modi, concettualmente il più semplice sfrutta la **proprietà dell'impulso** per la quale:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Segue che **il segnale campionato può essere ottenuto come prodotto del segnale analogico per un pettine di Dirac di periodo T** :

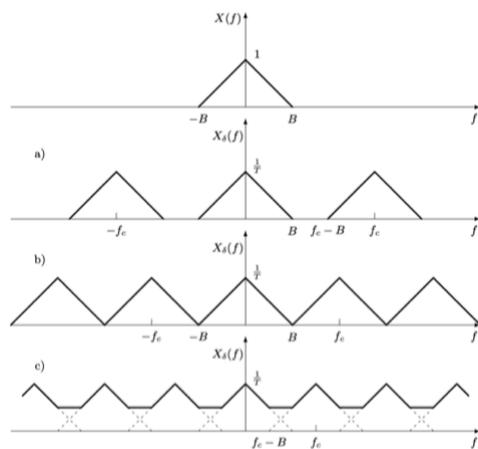
$$x_\delta(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT)$$



Analizzando **l'operazione nel dominio della frequenza** (con $f_c = 1/T$ frequenza di campionamento):

$$X_\delta(f) = (X * \delta_T)(f) = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right) = f_c \sum_k X(f - kf_c)$$

Lo spettro del segnale campionato risulta essere una **sovraposizione di repliche di $X(f)$ centrate in kf_c e scalate della stessa quantità**:



Supponendo che il segnale da campionare $x(t)$ sia a banda limitata B , si distinguono due diverse configurazioni, qui sopra riportate:

- $f_c \geq 2B$, le repliche non si sovrappongono e lo spettro di $x(t)$ può essere recuperato tramite un filtro passa basso;
- $f_c < 2B$, le repliche si sovrappongono e lo spettro del segnale $x(t)$ non può più essere recuperato.

In quest'ultimo caso si verifica anche il **fenomeno di aliasing**, per il quale le repliche adiacenti a quella centrale creano una distorsione del segnale che non può essere compensata in alcun modo. Con queste informazioni a disposizione si può individuare un criterio per impostare una frequenza di campionamento adeguata, detto **vincolo di Nyquist**:

$$f_c \geq 2B$$

Che rispetta la relazione di proporzionalità tra frequenza di campionamento e banda del segnale che è stata precedentemente individuata.

Si vuole, adesso, illustrare un risultato che mette in evidenza la possibilità di **recuperare un segnale a partire dal suo campionamento**, che prende il nome di **Teorema di Shannon**.

ENUNCIATO TEOREMA DI SHANNON (O DEL CAMPIONAMENTO)

Ipotesi:

$$\forall x(t) \text{ a banda limitata } B \text{ (monolatera)} : X(f) = 0 \quad \forall |f| \geq C$$

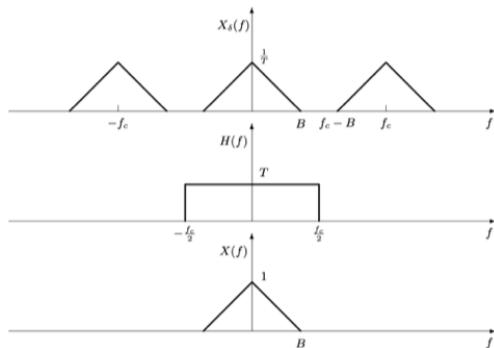
$$\forall f_c \geq 2B \text{ (soddisfa la condizione di Nyquist)}$$

Tesi:

Il segnale originale $x(t)$ può essere perfettamente recuperato a partire dal segnale campionato $X_\delta(f)$ tramite un filtro passa basso con guadagno pari a T

$$H_{LP}(f) = T \prod \left(\frac{f}{2B'} \right) \text{ con } B \leq B' \leq f_c - B$$

Tipicamente $B' = \frac{f_c}{2} = \frac{1}{2T}$:

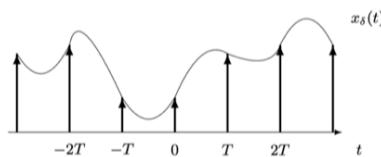


Dal teorema di Shannon si può dedurre che **la perfetta ricostruzione del segnale campionato è garantita se la frequenza di campionamento cresce proporzionalmente al doppio della banda del segnale**; tuttavia, **al crescere di tale frequenza aumenta il costo del campionatore ed il numero di campioni generati**, rendendo necessaria una valutazione costi – benefici.

Tipo di segnale	Banda (monol.)	Frequenza di campionamento
Segnale vocale	4 kHz	$\geq 8 \text{ kHz}$
Segnale audio HI-FI	20 kHz	$\geq 40 \text{ kHz}$
Segnale video	5 MHz	$\geq 10 \text{ MHz}$

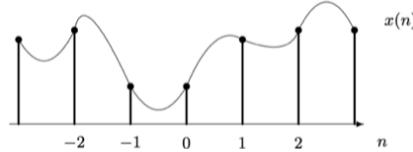
Finora si è parlato di **campionamento**, quando in introduzione si è parlato di conversione A/D; per **campionamento si intende il funzionale che associa ad un segnale analogico il suo prodotto con il pettine di Dirac**:

$$x(t) \rightarrow x_\delta(t)$$



Mentre per **conversione A/D si intende il funzionale che associa ad un segnale analogico il suo equivalente in Tempo Discreto**:

$$x(t) \rightarrow x[n]$$



Concettualmente i due funzionali coincidono ma non formalmente, confrontando lo spettro $X_\delta(f)$ del segnale campionato con lo spettro $X(\nu)$ della sequenza dei campioni:

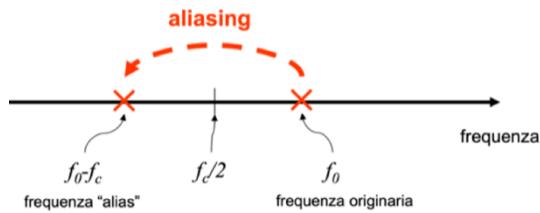
$$X_\delta(f) = \sum_n x(nT) e^{-i2\pi f nT}$$

$$X(\nu) = \sum_n x[n] e^{-i2\pi \nu n}$$

I due spettri coincidono a meno di un cambiamento di scala sull'asse delle frequenze, detto **normalizzazione della frequenza analogica alla frequenza di campionamento**:

$$X(\nu) = X_\delta(f) \Big|_{f=\frac{\nu}{T} \Leftrightarrow \nu=\frac{f}{f_c}}$$

Una conseguenza del fenomeno di aliasing prevede che qualsiasi componente frequenziale di un segnale a frequenza $f_0 > f_c/2$ è presente nel segnale ricostruito a frequenza $f_c - f_0$, detta **frequenza alias**.

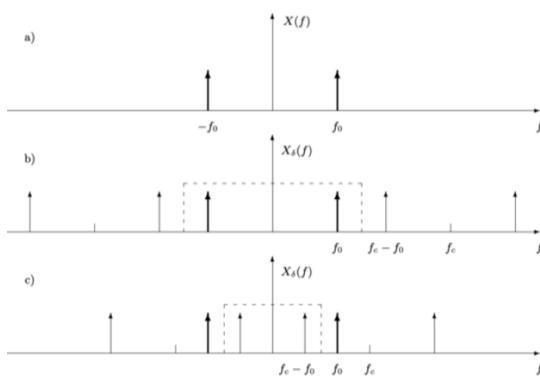


Si propone l'esempio della sinusode $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$; al verificarsi della condizione di Nyquist ci si ritroverebbe nel caso b della figura seguente:

$$f_c \geq 2f_0$$

Contrariamente, nel caso c:

$$f_c < 2f_0$$

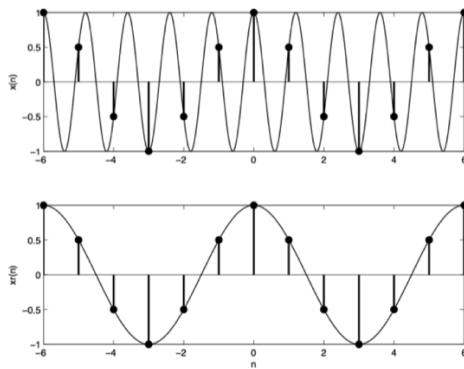


In quest'ultima situazione, il segnale ricostruito sarebbe una sinusode a frequenza $f_c - f_0$, non la sinusode originale:

$$\hat{x}(t) = \cos(2\pi(f_c - f_0)t)$$

Perché i due segnali coincidono negli istanti di campionamento:

$$\begin{aligned} \hat{x}(nT) &= \cos(2\pi f_c nT - 2\pi f_0 nT) = \cos(2\pi n - 2\pi f_0 nT) = \cos(-2\pi f_0 nT) = \cos(2\pi f_0 nT) \\ &= x(nT) \end{aligned}$$



Mentre se $f_c = 2f_0$, potrebbe accadere che $\hat{x}(t)$ non coincide con $x(t)$:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow x(nT) = \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_c}\right) = \sin(\pi n) = 0$$

In entrambi i casi, **la ricostruzione del segnale non restituisce il segnale originale. Il processo di ricostruzione ideale di un segnale** (o ricostruzione di Shannon) avviene mediante l'impiego di filtri interpolatori **passa basso a frequenza di campionamento**:

$$f_c = \frac{1}{T} = 2B$$

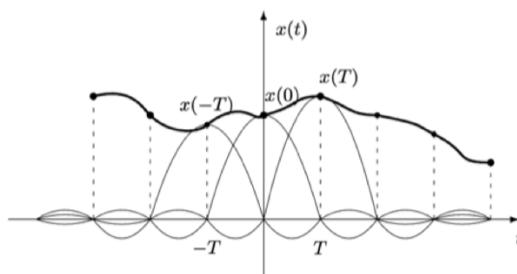
Per cui:

$$H(f) = T \prod_{n=-\infty}^{\infty} (fT) \xrightarrow{FT} h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Pertanto, **il segnale ricostruito** è:

$$\hat{x}(t) = (x_\delta * h)(t) = \sum_n x(nT)h(t - nT) = \sum_n x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

Detta serie di Shannon. La ricostruzione del segnale, quindi, **avviene mediante un infinita somma di sinc(\cdot)**, ciascuna applicata negli istanti **nT** di campionamento del segnale originario e pesata con il valore del relativo campione.

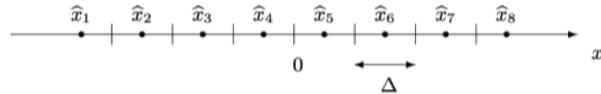


Questo processo di interpolazione è **ideale**, dal momento in cui è **inutilizzabile nella sua forma esatta per le applicazioni pratiche**, essendo **richiesti infiniti termini di una sommatoria** che dipendono dai valori del segnale in istanti successivi a quello di interpolazione.

Quando il tema della conversione è stato introdotto non è stata menzionata solo la discretizzazione dei tempi ma anche quella delle ampiezze, che avviene mediante un processo di **quantizzazione**. Per quantizzazione di un segnale si intende l'operazione con cui si rende discreto l'insieme di valori che il segnale può assumere; ad esempio, una sinusoida campionata $A \cos(2\pi\nu_0 n + \varphi_0)$ può assumere con continuità qualsiasi valore nell'intervallo $[-A, A]$, con un numero infinito di cifre significative, mentre la sua quantizzazione finitizza questo intervallo. Il dispositivo che permette di quantizzare un segnale campionato è detto **quantizzatore** ed è un **sistema non lineare, senza memoria e tempo invariante**, che agisce **campione per campione**.

La **quantizzazione** è un **conceitto intuitivo**, che rimanda al processo di approssimazione di un numero $x \in \mathbb{R}$ ad un numero $Q(x) \in \mathbb{Z}$ e che può avvenire in diversi modi: **per eccesso** (approssimando al numero intero successivo), **per difetto** (approssimando al numero intero precedente) o **per arrotondamento** (approssimando al numero intero più vicino); **i primi due metodi inducono un errore massimo di 1, mentre il terzo un errore massimo di ½**.

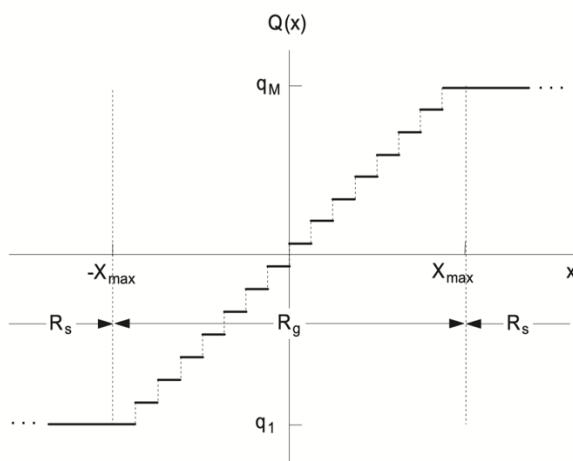
Per generalizzare quest'idea si può pensare di suddividere la dinamica del segnale (l'intervallo di ampiezze) in **M intervalli** (detti intervalli di quantizzazione) di ampiezza $\Delta \in \mathbb{R}_+$ (detto passo di quantizzazione) e mappare ogni valore $x \in (0, \Delta)$ al valore $Q(x) = \hat{x} = \Delta/2$ (detto livello di quantizzazione, o di restituzione).



La scelta del punto medio dell'intervallo di quantizzazione come livello di restituzione, e non uno degli estremi, è dovuta al fatto che con esso si minimizza il modulo dell'errore di quantizzazione a $\Delta/2$. Questo tipo di quantizzazione è detta **quantizzazione uniforme e necessita di due parametri per essere applicata:** il **numero di intervalli** di quantizzazione, M , e il **passo di quantizzazione**, Δ .

Per rappresentare un'informazione quantizzata come **informazione binaria**, sono necessari $b = \log_2 M$ bit, altrimenti verrebbero sprecati $2^b - M$ stringhe di bit; si può quindi dedurre che è meglio implementare una suddivisione della dinamica in potenza di due, in modo che b possa essere un numero intero.

La relazione che intercorre tra un valore del segnale e la sua quantizzazione è descritta da un andamento a scalinata:



Questo andamento è chiaramente simmetrico, dal momento in cui è simmetrica la disposizione degli intervalli di quantizzazione attorno allo zero (in cui non c'è restituzione), e vi si possono individuare due regioni: la **regione granulare** e la **regione di saturazione**; la **prima** corrisponde all'insieme di valori x del segnale che sono approssimati a $Q(x)$ con un errore massimo di $\Delta/2$, mentre la **seconda** corrisponde all'insieme di valori che superano il massimo livello di quantizzazione, $x_{MAX} = \Delta \cdot M/2$.

La **discretizzazione delle ampiezze**, a differenza di quella dei tempi, è una degradazione irreversibile, la cui entità dipende dai parametri M, Δ, b e x_{MAX} , detti **parametri caratteristici del quantizzatore**; per valutare l'effetto di tali parametri sulle prestazioni del quantizzatore si introduce l'**errore di quantizzazione**:

$$e[n] = Q(x[n]) - x[n]$$

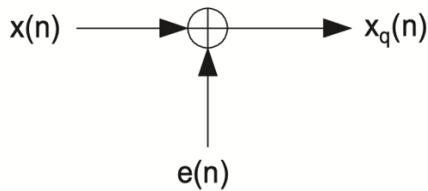
Che presenta proprietà completamente differenti a seconda della regione del grafico in cui ci si trova; nella **regione granulare**:

$$|e[n]| \leq \left| \frac{\Delta}{2} \right|$$

Mentre nella **regione di saturazione**, la cui estensione dipende solo da x_{MAX} :

$$e[n] \approx |x[n]|$$

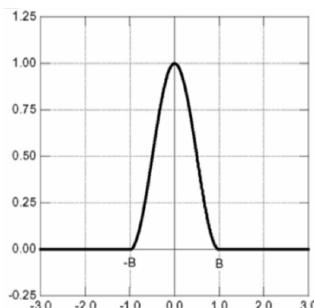
Ed è una **quantità non limitata i cui effetti vanno contenuti**. Con queste informazioni, si può riassumere lo schema equivalente di un quantizzatore uniforme:



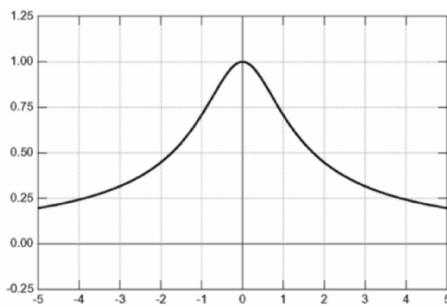
Nel sistema viene automaticamente modellato sia l'effetto della **saturazione** (mediante x_{MAX}) sia l'errore di approssimazione nella regione granulare (mediante Δ e $e[n]$). La **precisione di un quantizzatore** di questo tipo **aumenta al crescere del numero M dei livelli di quantizzazione** ma, insieme ad esso, **aumenta sia il costo del dispositivo che il numero di bit necessari a rappresentare un valore**.

CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE REALI

Il **teorema del campionamento e l'interpolazione di Shannon** poggiano su **ipotesi poco realistiche**, ovvero la limitatezza rigorosa della banda del segnale e l'utilizzo di un filtro passa basso ideale. Nella **realità fisica** i segnali non hanno **mai una banda rigorosamente limitata**:

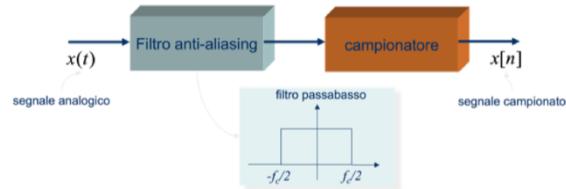


Ma, spesso, una **banda praticamente limitata**:



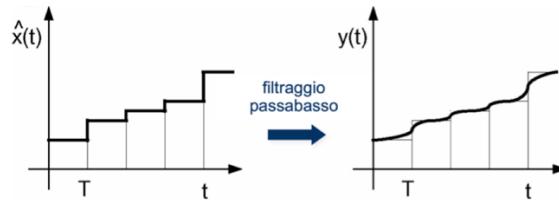
Ciò significa che **non si potranno mai presentare le ipotesi del teorema del campionamento e, quindi, non sarà mai possibile ricostruire il segnale analogico a partire dai suoi campioni**, rendendo la **ricostruzione realizzabile una versione distorta del segnale di partenza (aliasing, ricostruzione dovuta ad un campionamento non ideale)**. La distorsione dovuta all'aliasing è particolarmente **deleteria e dannosa**, è necessario **eliminarla dal segnale analogico prima del campionamento** rimuovendo tutte le componenti spettrali a frequenze superiori a $f_c/2$;

quest'operazione è eseguita mediante l'impiego di un **filtro passa basso (reale, e quindi anch'esso fonte di distorsioni)** con tale frequenza di taglio:



Il processo appena descritto prende il nome di **filtraggio anti – aliasing**.

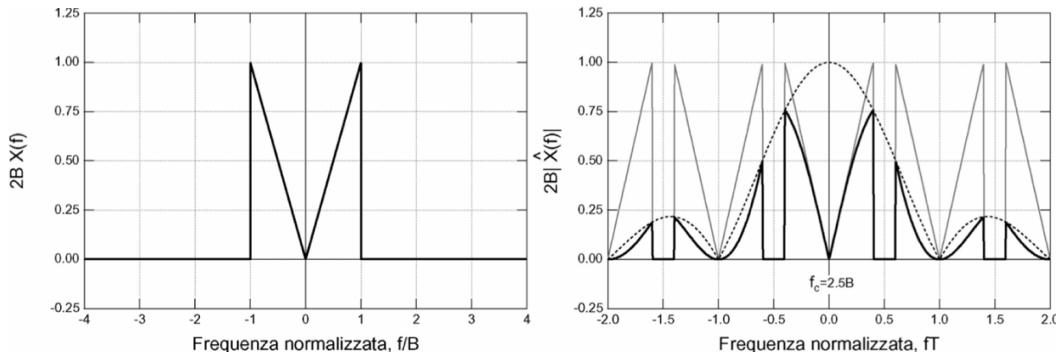
Come già accennato in precedenza, **l'interpolazione è il processo di ricostruzione di un segnale analogico tra due campioni distanziati di T** (periodo o passo di campionamento) ed è un'operazione eseguibile mediante tecniche differenti. Una di queste tecniche, detta **interpolazione con mantenimento**, prevede il **mantenimento costante del valore del segnale fino al campione successivo**; tuttavia, **il risultato non è dei migliori** e risulta in una **cattiva approssimazione** del segnale analogico a causa dell'**effetto scalettatura** che induce:



Una possibile soluzione per migliorare l'approssimazione prevede l'utilizzo di un **filtro passabasso** che **elimina le variazioni brusche e addolcisce l'andamento** del segnale ricostruito. Il segnale interpolato è:

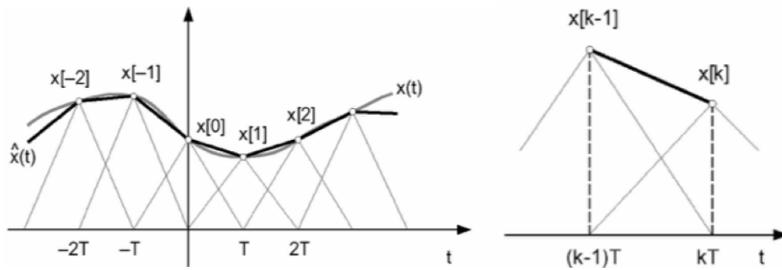
$$\hat{x}(t) = \sum_n x_\delta(nT) \prod \left(\frac{t - nT - \frac{T}{2}}{T} \right)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= \sum_n x_\delta(nT) T \operatorname{sinc}(fT) e^{-i2\pi nfT} e^{-i\pi fT} = e^{-i\pi fT} T \operatorname{sinc}(fT) \sum_n x_\delta(nT) e^{-i2\pi nfT} \\ &= e^{-i\pi fT} T \operatorname{sinc}(fT) X_\delta(f) = e^{-i\pi fT} T \operatorname{sinc}(fT) f_c \sum_k X(f - kf_c) \\ &= e^{-i\pi fT} \operatorname{sinc}(fT) \sum_k X(f - kf_c) \end{aligned}$$



Si nota, quindi, che l'interpolazione con mantenimento produce un segnale limitato in banda; il segnale originale soddisfa la condizione di Nyquist nella banda utile ma lo spettro del segnale ricostruito differisce da quello originale per effetto di un interpolazione reale, che produce una distorsione di ampiezza detta effetto apertura.

Un'altra tecnica di interpolazione, l'interpolazione lineare (lerp), prevede un andamento di ricostruzione lineare tra due campioni consecutivi; sebbene sia un metodo di ricostruzione migliore dell'interpolazione con mantenimento, l'interpolazione lineare necessita la conoscenza di due campioni consecutivi del segnale, introducendo ritardo nell'elaborazione del segnale.



La conversione D/A, che prende in esame un segnale quantizzato a Tempo Discreto e restituisce un segnale a Tempo Continuo analogico, avviene unicamente attraverso un processo di interpolazione dei tempi:



Per effetto dell'errore di quantizzazione, le ampiezze del segnale analogico originale non possono essere ricostruite, neanche se il campionamento è ideale (d'altronde campionamento e quantizzazione sono indipendenti); pertanto, collegando in cascata un convertitore A/D e uno D/A, risulterà (generalmente) una discrepanza tra i segnali in ingresso e in uscita:

$$x(t) \neq \hat{x}(t)$$

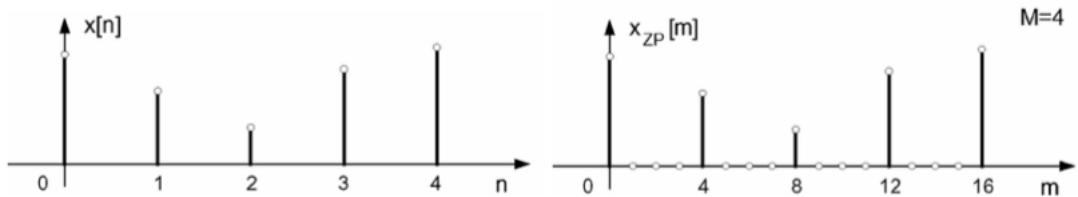
Ovvero, le due operazioni non sono pienamente duali. Riassumendo i processi di conversione:

- **A/D**
 - **Campionamento** (discretizza i tempi di un segnale)
 - **Quantizzazione** (discretizza le ampiezze)
- **D/A**
 - **Interpolazione** (ricostruisce il segnale quantizzato)

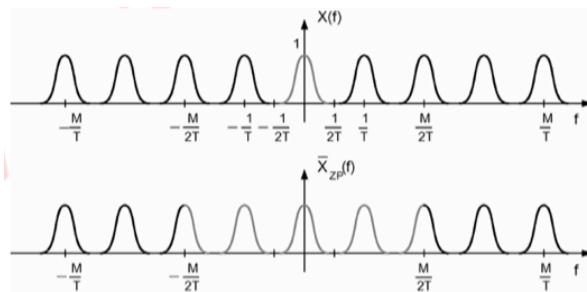
Si disponga di un segnale $x(t)$ con banda a 15 kHz ($f_c \geq 30$), di un convertitore A/D a 48 kHz e di un convertitore D/A a 32 kHz. È necessaria una procedura per alzare/ridurre la frequenza di campionamento per far coincidere le frequenze dei due convertitori; questo processo prende il nome di sovraccampionamento/sottocampionamento.

Il sovraccampionamento si ottiene dalla sequenza $x[n]$ inserendo $M - 1$ zeri (zero padding), consentendo di alzare la frequenza da f_c a $f'_c = Mf_c$; nella pratica:

$$x_{ZP}[m] = \sum_n x\left[\frac{n}{M}\right] \delta[n - mM] = \begin{cases} x[m] & \Leftrightarrow n = mM \\ 0 & \Leftrightarrow n \neq mM \end{cases}$$



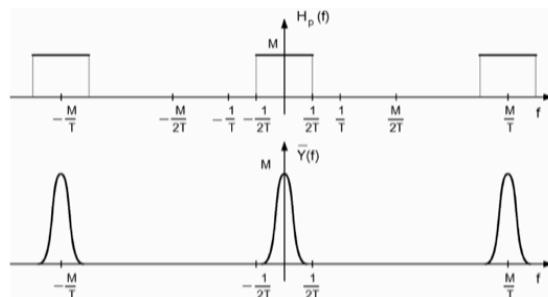
$$X_{ZP}(v) = \sum_m x_{ZP}[m] e^{-i2\pi v m} = \sum_{m=kM \forall k \in \mathbb{Z}} x\left[\frac{m}{M}\right] e^{-i2\pi v m} = \sum_n x[n] e^{-i2\pi v M n} = X(Mv)$$



Il periodo di base di $X(v)$ è $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$, mentre quello di $X_{ZP}(v)$ è $\left[-\frac{M}{2T}, \frac{M}{2T}\right]$.

Filtrando con un filtro passabasso il segnale $x_{ZP}[m]$ con banda $B = 1/2T$ e guadagno in continua $H(0) = M$, si ottiene:

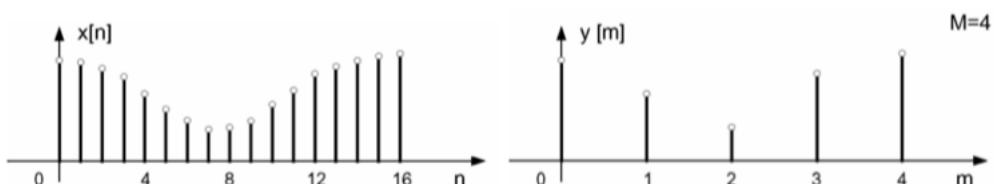
$$f'_c = Mf_c$$



Aumentando la frequenza di campionamento di M volte. È un **operazione reversibile**, basta decimare il segnale ottenuto per M .

Il **sottocampionamento** è l'operazione **duale al sovraccampionamento**, quindi viene ottenuta con una **decimazione del segnale**:

$$y[m] = x[nM]$$



Abbassando la frequenza di campionamento a:

$$f'_c = \frac{f_c}{M}$$

A differenza del sovraccampionamento, **il sottocampionamento è reversibile se e solo se:**

$$f'_c \geq 2B \Leftrightarrow M \leq \frac{f_c}{2B}$$

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

I VARI APPROCCI ALLA TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Esistono sostanzialmente **quattro versioni della teoria della probabilità**:

- **Teoria classica della probabilità**

Si assume che si possa individuare un insieme **C** di possibili risultati di un evento imprevedibile e che **non vi sia alcun ragionevole motivo per pensare che uno di tali casi sia più plausibile degli altri** (equiprobabilità). Per ogni $A \subseteq C$, si definisce **probabilità di A**:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_C}$$

Dove **n_A indica la cardinalità dell'insieme A e n_C la cardinalità dell'insieme C**. Secondo la teoria classica, **possono anche essere usati degli strumenti di calcolo combinatorio** che consentono di calcolare agevolmente i valori di n_A e n_C nel contesto specifico e la cui difficoltà è composta solo dalla determinazione del metodo da applicare alla situazione in cui ci si trova.

Questa teoria è stata per diverso tempo considerata come la teoria della probabilità ufficiale e ha trovato in Bernoulli e in Laplace i suoi primi e più grandi sostenitori; il **punto debole** di questa teoria è **nell'incapacità di operare quando manca il suo presupposto di base**, ovvero **quando ci sono ragionevoli motivi per cui pensare che un evento sia più probabile di un altro**.

- **Teoria frequentistica della probabilità**

Già prima della formulazione della teoria classica della probabilità, furono effettuati diversi studi che mostrarono una **relazione tra l'osservazione della frequenza relativa con cui si presentano fenomeni imprevedibili e la loro probabilità**; per **frequenza relativa** di un evento si intende **la frazione di volte in cui l'evento si verifica in N ripetizioni del fenomeno imprevedibile**.

La **teoria frequentistica** della probabilità **definisce la probabilità di un evento come il limite della sua frequenza relativa al divergere di N**. Nel momento in cui il **fenomeno non è condizionato da meccanismi prioritari** (ad esempio, un dado truccato), **la probabilità frequentistica e la probabilità classica coincidono**; tuttavia, a differenza della teoria classica, **la teoria frequentistica permette di determinare la probabilità di un evento anche quando cadono i presupposti di equiprobabilità degli eventi**, rappresentando **un'estensione della teoria classica**.

La teoria frequentistica ha trovato in Von Mises uno dei suoi primi e più grandi sostenitori, anche se nel tempo gli sono state mosse diverse tipologie di critiche, tra cui:

- **L'assunzione di esistenza del limite** della frequenza relativa senza cura della possibilità che esso non esista;
- **La possibilità che il fenomeno possa non essere ripetibile** e, quindi, la possibilità che la relativa probabilità non sia calcolabile.

La prima critica riguarda **i limiti di applicazione della teoria frequentistica**, non togliendo nulla all'estensione della teoria classica, mentre **la seconda viene ancora oggi respinta da coloro che sostengono la ripetibilità almeno in linea di principio o in astratto**.

Le teorie seguenti ricorrono ad **altre definizioni di probabilità** ma finiscono per dimostrare la convergenza della frequenza relativa alla probabilità, e quindi risultano **coerenti con la teoria frequentistica**.

- **Teoria assiomatica della probabilità**

Questa teoria si fonda su una **costruzione matematica astratta** il cui rapporto con il relativo significato è stato delicato fin dai suoi inizi nel 1933, con un fondamentale lavoro di sintesi delle ricerche matematiche condotte nei primi decenni del Novecento (a cui contribuirono indirettamente l'italiano Cantelli e il francese Fréchet). Si parte dalla **definizione di tutti gli eventi elementari come possibile risultato di un esperimento**, raccolti in un **insieme campione S** , e si definisce **un evento A come un sottoinsieme dello spazio campione**; la **probabilità di un evento** è definita come **una funzione che associa ad ogni evento un numero reale che soddisfa le seguenti proprietà**, noti come **assiomi di Kolmogorov**:

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(S) = 1$;
3. $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$.

Se lo spazio campione S ha la **potenza del continuo** (ovvero esiste un'applicazione biunivoca tra l'insieme e il campo dei numeri reali) allora il **dominio di questa funzione non si può estendere all'insieme delle parti di S** , dal momento in cui **non esiste alcuna funzione definita su $\mathcal{P}(S)$ che verifichi gli assiomi di Kolmogorov**. Per questo motivo, quando S ha la potenza del continuo, l'insieme di definizione della funzione probabilità deve essere ristretto.

Un ulteriore assioma introdotto dalla teoria è quello di **probabilità condizionata dell'evento A dall'evento B** (avente **probabilità non nulla**):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

I maggiori svantaggi di questa teoria risiedono nella necessità di introdurre l'infrastruttura matematica di spazio campione e spazio probabilistico; inoltre, la trattazione non discute dell'impossibilità di definire la probabilità in modo alternativo, dando per scontato che essa debba soddisfare gli assiomi, e non la avvicina al concetto di informazione.

- **Teoria bayesiana della probabilità**

L'approccio bayesiano punta a **rimuovere i limiti dell'approccio assiomatico**; la derivazione parte da **assunzioni ovvie in modo da dimostrare che non esiste altro modo ragionevole di introdurre la probabilità** e che tale modo è coerente con gli assiomi di Kolmogorov. Inoltre, **estende la teoria assiomatica parlando in generale di plausibilità $P(A|C)$** , chiamato poi **probabilità, di una proposizione A qualora sia noto che la proposizione C sia vera**. In tal modo **risulta possibile evitare di introdurre lo spazio campione e si possono utilizzare le regole dell'algebra booleana** per costruire nuove proposizioni di cui si intende valutare la probabilità.

I punti di partenza della derivazione sono i seguenti:

- Il grado di plausibilità deve essere espresso tramite **numeri reali**;
- L'aggiunta di nuove informazioni deve essere in grado di **alterare conseguentemente il grado di plausibilità della proposizione**;

- Il motivo per cui una proposizione è solo plausibile in un certo grado ma non certamente vera o falsa risiede nella mancanza di informazioni complete che consentono di rimuovere ogni incertezza;
- La necessità di ottenere lo stesso grado di plausibilità quando esso può essere ottenuto attraverso procedure logicamente equivalenti;
- Il grado di plausibilità deve dipendere da tutte le informazioni disponibili per l'elaborazione, ovvero nessuna informazione può essere eliminata dagli input di elaborazione, la quale determina in modo ottimale la plausibilità di una proposizione in base a criteri ideologici;
- Assegnare lo stesso grado di plausibilità in corrispondenza di stati di conoscenza analoghi riguardo due diverse affermazioni.

Sulla base di questi presupposti, è possibile dimostrare che l'intervallo **(0, 1)** per la probabilità è una scelta convenzionale ma necessaria per non ridefinire le regole della probabilità che verranno a breve illustrate. Inoltre, si può dimostrare la **regola del prodotto** (o **regola di Bayes**):

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|AC) = P(B|C)P(A|BC)$$

Dove **$P(AB|C)$** valuta quanto sia plausibile che **A** e **B** siano entrambe vere assumendo che la proposizione **C** sia vera e **$P(A|BC)$** valuta quanto sia plausibile che **A** sia vera assumendo vere **B** e **C** . Sulla base degli stessi requisiti enunciati, è possibile dimostrare la **regola della somma**:

$$P(A|C) + P(\bar{A}|C) = 1$$

Dove **$P(\bar{A}|C)$** valuta quanto sia plausibile che **A** sia falsa assumendo che la proposizione **C** sia vera.

A partire dalle regole della somma e del prodotto, è possibile dimostrare anche molte altre regole, come la **regola della somma generalizzata**:

$$P(A + B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} P(A + B|C) &= 1 - P(\overline{A + B}|C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}|C) = 1 - P(\bar{A}|C)P(\bar{B}|\bar{A}C) \\ &= 1 - P(\bar{A}|C)[1 - P(B|\bar{A}C)] = 1 - P(\bar{A}|C) + P(\bar{A}|C)P(B|\bar{A}C) \\ &= P(A|C) + P(\bar{A}|C)P(B|\bar{A}C) = P(A|C) + P(B|C)P(\bar{A}|BC) \\ &= P(A|C) + P(B|C)[1 - P(A|BC)] = P(A|C) + P(B|C) - P(B|C)P(A|BC) \\ &= P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C) \end{aligned}$$

Ma può essere estesa anche alla OR di diverse proposizioni:

$$\begin{aligned} P(A + B + D|C) &= P(A|C) + P(B|C) + P(D|C) - P(AB|C) - P(AD|C) - P(BD|C) + P(ABD|C) \end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
 P(A + B + D|C) &= P((A + B) + D|C) = P(A + B|C) + P(D|C) - P((A + B)D|C) \\
 &= P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C) + P(D|C) - P((A + B)D|C) \\
 &= P(A|C) + P(B|C) + P(D|C) - P(AB|C) - P(AD + BD|C) \\
 &= P(A|C) + P(B|C) + P(D|C) - P(AB|C) \\
 &\quad - (P(AD|C) + P(BD|C) - P(ADBD|C)) \\
 &= P(A|C) + P(B|C) + P(D|C) - P(AB|C) - P(AD|C) - P(BD|C) + P(ABD|C)
 \end{aligned}$$

Se le proposizioni **A** e **B** sono autoesclusive condizionatamente a **C**, ovvero una non può essere vera se lo è l'altra quando **C** è vera, allora $P(AB|C) = 0$ e la somma generalizzata diventa:

$$P(A + B|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

Si noti che questa relazione coincide con il terzo assioma di Kolmogorov al finito. Generalizzando, per ogni **n** finito vale la relazione di additività per **n** proposizioni di cui (condizionatamente a **C**) si è logicamente certi che al più può esserne vera una sola:

$$P(A_1 + \dots + A_n|C) = \sum_{i=1}^n P(A_i|C) \Leftrightarrow A_i A_j = 0 \forall i \neq j$$

Siano considerate **n** proposizioni disgiunte, assumendo che $B_1 + \dots + B_n = 1$ (cioè che due proposizioni non possono essere vere contemporaneamente ma che almeno una è vera):

$$A = A1 = A(B_1 + \dots + B_n) = AB_1 + \dots + AB_n$$

Questa relazione vale anche se la disgiunzione è condizionata al fatto che **A** sia vera, risultando in un'ipotesi meno forte; in tal caso, potrebbero anche essere false le proposizioni **B_i** a patto che **A** sia falsa. Da queste considerazioni, si può enunciare il teorema di probabilità totale:

$$\begin{aligned}
 P(A|C) &= P(A(B_1 + \dots + B_n)|C) = P(AB_1|C) + \dots + P(AB_n|C) \\
 P(A|C) &= \sum_{i=1}^n P(AB_i|C) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i C) P(B_i|C)
 \end{aligned}$$

Questo teorema viene usato in maniera naturale quando è difficile il calcolo diretto del primo membro mentre è possibile calcolare facilmente sia la probabilità di **A** condizionata da ciascun membro **B_i** sia la probabilità della proposizione condizionante **B_i**.

TECNICHE DI CALCOLO COMBINATORIO

Le formule fondamentali del calcolo combinatorio riguardano la valutazione di tre situazioni possibili, tutte con o senza ripetizioni: disposizioni ordinate (disposizioni e permutazioni) e disposizioni non ordinate (combinazioni).

DISPOSIZIONI ORDINATE SENZA RIPETIZIONE

Si dispone di **n** oggetti distinti, denotati con $a_1 \dots a_n$, e ci si chiede quanti sono i modi di disporre ordinatamente tali oggetti su **k** posti; il fatto che la disposizione sia senza ripetizione implica che,

una volta inserito un oggetto in un posto, non si considera possibile l'inserimento dello stesso oggetto anche in un altro posto.

Per astrarre una legge che descrive le disposizioni in esame, si può considerare il fatto che **quando non si è messo nessun oggetto, ci sono n possibili oggetti, poi $n - 1$, poi $n - 2$ e così via fino alla k -esima iterazione**; segue che:

$$D_{sr}(n, k) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Si parla di **permutazione quando gli n oggetti vanno disposti su $k = n$ posti**:

$$P(n) = D_{sr}(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Si considerino **l gruppi di oggetti**, ciascuno dei quali composti da **k_1 oggetti del primo tipo, k_2 oggetti del secondo tipo ... e k_l oggetti di l -esimo tipo**, in modo tale da **non alterare il numero complessivo di oggetti**:

$$k_1 + \dots + k_l = n$$

Si valuti il **numero di possibili permutazioni che si possono creare con tali oggetti**. Se ogni gruppo fosse costituito da un solo oggetto ($k_1 = \dots = k_l = 1$) allora si avrebbero $n!$ permutazioni ma se $k_1 > 1$ e $k_2 = \dots = k_l = 1$ allora ci sarebbero $k_1!$ modi diversi di allocare i k_1 oggetti del primo gruppo su un qualsiasi insieme di k_1 posti, e il numero di permutazioni complessive sarebbe $n!/k_1!$.

Generalizzando:

$$P_g(n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$$

DISPOSIZIONI ORDINATE CON RIPETIZIONE

Si dispone di **n oggetti distinti**, denotati con $a_1 \dots a_n$, e ci si chiede **quanti sono i modi di disporre ordinatamente tali oggetti su k posti**; il fatto che la disposizione sia **con ripetizioni** significa che, **una volta inserito un oggetto in un posto, si considera possibile l'inserimento dello stesso oggetto anche in un altro posto**.

Per astrarre una legge che descrive le disposizioni in esame, si può considerare il fatto che **nel primo posto si hanno n possibili oggetti da inserire, ma anche nel secondo, nel terzo e nel k -esimo**; pertanto:

$$D_{cr}(n, k) = n \cdot n \cdot n \dots n = n^k$$

COMBINAZIONI SENZA RIPETIZIONE

Si dispone di **n oggetti distinti**, denotati con $a_1 \dots a_n$, e ci si chiede **quanti sono i modi di disporre tali oggetti su k posti senza badare al loro ordine** (valutando, cioè, le **combinazioni**); il fatto che la combinazione sia **senza ripetizione** implica che, **una volta inserito un oggetto in un posto, non si considera possibile l'inserimento dello stesso oggetto anche in un altro posto**.

Per astrarre una legge che descrive le disposizioni in esame, si può considerare il fatto che, **una volta fissata una particolare disposizione di k oggetti tra gli n possibili**, esistono $k!$ loro permutazioni che generano **distinte disposizioni ordinate** che corrispondono alla **stessa combinazione**; pertanto:

$$D_{sr}(n, k) = C_{sr}(n, k)P(k)$$

$$C_{sr}(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Si dispone di **n oggetti distinti**, denotati con $a_1 \dots a_n$, e ci si chiede **quanti sono i modi di disporre tali oggetti su k posti senza badare al loro ordine** (valutando, cioè, le **combinazioni**); il fatto che la combinazione sia **con ripetizioni** significa che, **una volta inserito un oggetto in un posto, si considera possibile l'inserimento dello stesso oggetto anche in un altro posto**.

Dato un qualsiasi **insieme finito di n elementi**, questo può essere messo in **relazione biunivoca con l'insieme $N = \{1 \dots n\}$** . Per calcolare il numero di combinazioni con ripetizione su k posti si considerano le **sequenze non decrescenti, di lunghezza k , di interi appartenenti a N** ; considerata una di queste sequenze:

$$m_1, \dots, m_k : m_1 \leq \dots \leq m_k$$

Vi si associa la sequenza:

$$m_1, m_2 + 1, \dots, m_k + k - 1$$

La nuova sequenza è **strettamente crescente**, non presenta ripetizioni; perciò, individua **una combinazione semplice di lunghezza k degli interi in $K = \{1 \dots n+k-1\}$** . Questa associazione pone in corrispondenza biunivoca le combinazioni con ripetizioni di lunghezza k degli elementi di N con le combinazioni semplici di lunghezza k degli elementi di M ; pertanto, **il numero delle combinazioni con ripetizione di lunghezza k dei primi n interi positivi è pari al numero di combinazioni semplici di lunghezza k dei primi $n+k-1$ interi positivi**:

$$C_{cr}(n, k) = C_{sr}(n+k-1, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

IL CONCETTO DI VARIABILE ALEATORIA

Il concetto di segnale è strettamente legato a quello di numero: per segnale si intende **un'applicazione che va da un sottoinsieme dei numeri reali ad un altro**; il modello più tradizionale di segnale, detto **segnale analogico**, si riferisce ad un contesto nel quale l'insieme dei numeri reali viene usato sia come dominio che come codominio, mentre il modello più usato ad oggi, detto **segnale digitale**, è quello in cui il **dominio ed il codominio sono definiti da due sottoinsiemi dei numeri reali** (più precisamente dei numeri razionali), ciascuno dei quali può essere messo in **corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le stringhe di bit di lunghezza fissata**. Il **passaggio storico** dalla diffusione del modello analogico a quello digitale (meno accurato) è **da ricondurre al costo ridotto dei dispositivi hardware in grado di compiere le operazioni**

elementari in tali insiemi; con operazioni elementari ci si riferisce spesso alla **moltiplicazione** (visto che l'addizione di due segnali analogici non differisce molto dall'addizione di due segnali digitali a meno che il numero di addizioni non sia elevato), per la quale si osservano **significativi vantaggi nell'uso di segnali digitali.** Dall'addizione e dalla moltiplicazione sono poi possibili tutta una serie di operazioni matematiche che permettono il corretto funzionamento di un dispositivo digitale.

Segue che **una prima dinamica nell'evoluzione del concetto del segnale** (e specificamente la transizione dal modello analogico a quello digitale) **si ricollega direttamente all'evoluzione del concetto di numero.** Tale dinamica evolutiva ha avuto origine nel corso degli anni Cinquanta del Novecento in relazione alle esigenze di trasmissione di un insieme di segnali analogici su un canale a banda limitata, guidata dalla intuizione di Nyquist riguardo la corrispondenza logica tra un segnale analogico e uno digitale, ed ha determinato nel corso degli anni Sessanta il prevalere dell'opzione digitale anche per la realizzazione dei calcolatori.

La motivazione dell'estensione considerata nel presente capitolo risiede **nell'incapacità del tradizionale concetto di numero** (razionale, reale o complesso che esso sia) **di permettere una descrizione quantitativa dei fenomeni in cui sia presente un'incertezza sul valore assunto dalle grandezze fisiche in gioco.** Sul lungo periodo dell'evoluzione del pensiero scientifico, l'affermazione dei **modelli deterministici** ha dovuto affrontare **critiche secolari riguardo le incertezze esistenti**, superandole in prima battuta con il concetto di **approssimazione**: in molte circostanze i **modelli deterministici descrivono con buona approssimazione il valore esatto di un segnale su cui pende incertezza**; in altri termini, **ignorando l'incertezza si è compiuto un passo fondamentale per avviare una descrizione quantitativa dei fenomeni.** Il richiamo all'incertezza non intende mettere in discussione questo tipo di approccio ma ha lo scopo di spingere oltre il metodo scientifico, cercando **la possibilità di fare affermazioni quantitative non deterministiche laddove quelle deterministiche non sono nemmeno approssimativamente corrette.**

In ottica ingegneristica, **l'estensione del concetto di numero permette all'approccio progettuale di rientrare in una dimensione quantitativa;** l'alternativa è **la fuoriuscita da una descrizione quantitativa dei fenomeni**, ovvero un **riplegamento in una dimensione artigianale ed intuitiva** nel dimensionamento ingegneristico dei parametri del sistema (assenza di attrito...). Per definire la classe di segnali che risulta dall'utilizzo del nuovo concetto di numero si possono usare gli aggettivi **“non deterministico”**, con cui rimandare alla novità rispetto al contesto finora considerato, **“stocastico”** e, più frequentemente usato, **“aleatorio”**; pertanto, gli aggettivi relativi ai diversi concetti di numero diventano: **intero, relativo, razionale, reale e aleatorio.** Paradossalmente, in genere **non si parla di “numero aleatorio”**, visto che storicamente il “numero” è una quantità deterministica, ma di **“variabile aleatoria”**, che **rafforza l'idea di incertezza** che essa porta con sé pur essendo **convenzioni consolidate dalle abitudini.** Per ogni estensione del concetto di numero, **i numeri appartenenti alle classi precedenti continuano ad appartenere alla nuova classe**, sebbene esistano **numeri esclusivi di quest'ultima**; inoltre, **anche le operazioni vanno estese coerentemente nelle classi successive.**

Sia presa una **variabile aleatoria X** , sebbene **non si possa conoscere precisamente il valore da essa assunto** è possibile **ipotizzare che sia presente qualche elemento di regolarità** definibile in termini **quantitativi**; si può immaginare di osservare molte realizzazioni della quantità ignota: si denoti con **N** il **numero di tali realizzazioni** e con **x_1, \dots, x_N** il **valore reale assunto da X per ogni realizzazione**, dove **con realizzazione si intende il valore assunto dalla variabile aleatoria quando il fenomeno è avvenuto.** Quando si dice che si trattano diverse realizzazioni della stessa variabile aleatoria si intende dire che **non esiste variazione nel contesto complessivo che determina la variabilità della grandezza considerata**; ad esempio, sia X la variabile aleatoria che descrive la grandezza “temperatura di un luogo”: il contesto che determina la variabilità è determinato

dal momento in cui la grandezza è misurata, quindi andare a considerare la variabile in momento qualsiasi e andarla a considerare in un momento specifico va a variare le condizioni in questione, risultando in variabili aleatorie diverse (X e Y) che descrivono la grandezza.

Occorre, pertanto, concepire una **distinzione logica tra la grandezza fisica ed il numero che la modella**. Nella parte del corso dedicata ai segnali ed ai sistemi è stato usato il concetto di numero reale ed è stato definito segnale una legge che descrive la variazione nel tempo di una grandezza fisica (segnale deterministico); quando si parla di un **segnale nel senso deterministico** si fa riferimento a **grandezze fisiche che**, sebbene possano essere ignote, conosciute o approssimate, **sono descritte da numeri reali**. Quando, invece, **si parla in termini non deterministici**, si pensa alla **possibilità di avere raccolto un certo numero di realizzazioni che descrivono la grandezza fisica in esame**, la cui collezione costituisce una **descrizione della legge di variabilità che il numero aleatorio è chiamato a descrivere** ed è tanto più accurata quante più realizzazioni sono raccolte. La descrizione matematica della tipologia di variabilità dipende ovviamente dalla collezione considerata e la collezione dipende dal metodo usato per definire la raccolta delle varie realizzazioni (ad esempio, sia X la variabile aleatoria che descrive la grandezza “temperatura di un luogo”, si finiscono per avere due tipologie di raccolte diverse se la raccolta viene effettuata una volta al giorno ad agosto alle 14:00 o ogni giorno a gennaio alle 6:00, pur essendo la temperatura valutata nello stesso luogo): **se i contesti a cui le realizzazioni si riferiscono sono diversi, sono diverse le collezioni ottenute ed è diverso il numero aleatorio che descrive in termini quantitativi la grandezza**.

La collezione di realizzazioni $x_1 \dots x_N$ della stessa variabile aleatoria (cioè raccolta con riferimento al medesimo contesto di variabilità) può anche essere **concepita solo in astratto** nel momento in cui la collezione pratica non sia possibile; in altri termini, **non è necessario disporre effettivamente dei valori delle realizzazioni per poter concepire il numero aleatorio**. Inoltre, **fissato un numero N di collezioni**, può accadere che **diverse collezioni fanno riferimento allo stesso numero aleatorio quando questo è descritto dallo stesso modello**. In precedenza, è stato detto che, **essendo il numero aleatorio un'estensione dei numeri reali**, un numero aleatorio può essere un numero reale; in tal caso, **detto a tale numero reale, in ogni realizzazione si osserverà il medesimo valore**:

$$x_i = a \quad \forall i \in [1, N]$$

Da questo ragionamento risalta anche il motivo per cui il concetto di realizzazione si introduce in riferimento al numero aleatorio: **è inutile individuare diverse realizzazioni quando queste assumono sempre lo stesso valore**.

Una volta definita la collezione, si può procedere a fare **un'affermazione quantitativa riguardante la legge di variabilità** definendo **la frazione delle volte in cui la specifica realizzazione è caduta in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$** :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_I(x_i)$$

Dove $\chi_I(x_i)$ è la funzione caratteristica dell'insieme I applicata alla realizzazione x_i :

$$\chi_I(x_i) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow x_i \in I \\ 0 & \Leftrightarrow x_i \notin I \end{cases}$$

La frazione appena introdotta **dipende direttamente dall'insieme I** ed è chiamata **frequenza empirica** e contiene un'informazione preziosa che **contribuisce a rimuovere l'incertezza esistente**

sul valore assunto dalla grandezza fisica. La definizione è ben posta, dal momento in cui x_i (la realizzazione i – esima del numero aleatorio X) è una quantità reale, che può appartenere o meno all'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$. È interessante osservare il caso in cui il numero aleatorio coincida con un numero reale a : la frequenza empirica restituisce con la classica espressione $a \in I \vee a \notin I$, visto che $\chi_I(a)$ assume lo stesso valore $\forall i \in [1, N]$ a seconda del fatto che il valore reale sia o meno nel sottoinsieme I ; quindi:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_I(x_i) = \frac{1}{N} \cdot 0 = 0 \vee \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_I(x_i) = \frac{1}{N} \cdot N = 1$$

A questo punto, si può individuare una **distinzione tra numeri deterministici e numeri puramente aleatori** in funzione del fatto che la relativa frequenza empirica su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ appartenga alla frontiera dell'intervallo $[0, 1]$ o al suo interno.

In seno a quanto appena detto, si immagini di osservare una **grandezza fisica costante nel tempo che assume valori diversi ad ogni tentativo di misurazione**; in questo caso, l'**incertezza è generata dalla procedura di misura e la frazione di volte in cui il valore misurato cade in uno specifico intervallo descrive quantitativamente l'incertezza prodotta dalla procedura di misura**. Allo stesso modo è semplice immaginare che la **variabilità temporale di una grandezza** (segnale) possa essere **rappresentata allo stesso modo**: assunto per vero che lo stesso numero aleatorio descriva il valore assunto dal segnale nei vari istanti di campionamento, si possono **raccogliere questi valori e formare una collezione di valori assunti dall'unico numero aleatorio** che, a sua volta, **genera la frequenza empirica per ogni intervallo I** consentendo una **descrizione quantitativa del numero aleatorio**.

Le caratteristiche di variabilità espresse da una collezione (di valori delle varie realizzazioni di un numero aleatorio) **non sono definite dalla collezione stessa ma dalla frequenza empirica al variare dei possibili insiemi I .** In altre parole, **due diverse collezioni esprimono leggi di variabilità simili nel momento in cui le frequenze empiriche assumono valori simili qualunque sia l'insieme I considerato.**

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE E CONTINUE

Dal momento in cui **con un numero finito di cifre binarie si possono rappresentare un numero finito di informazioni**, va tenuto in conto che **il valore assunto da un segnale digitale** in un preciso istante di tempo **possa appartenere ad un sottoinsieme dei numeri reali costituito da un numero finito di elementi**. Sia M il numero di elementi di \mathbb{R} assunti dalla variabile aleatoria X e z_1, \dots, z_M il loro valore (non è una collezione), risulta che **la probabilità $P[X \in I]$ vale zero se nessuno di tali elementi appartiene all'insieme I** ; se, invece, **alcuni punti appartengono all'insieme** va verificata **la frequenza con cui essi vengono assunti**. Per **frequenza empirica con cui il valore z_l viene assunto** in una qualsiasi collezione si intende **la frequenza empirica dell'insieme costituito solo da z_l** :

$$\hat{p}_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{z_l\}}(x_i) = \frac{1}{N} \cdot N_l$$

La probabilità che X sia uguale a z_l , invece, viene definita come **il limite della frequenza empirica al tendere all'infinito del numero di elementi di una collezione** (liberando la definizione dalla particolare collezione):

$$p_l = P[X = z_l] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{p}_l = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \cdot N_l$$

Un **numero aleatorio discreto**, pertanto, è descritto sia dai valori che possono essere assunti che dalla loro probabilità di essere assunti:

$$\{z_1, \dots, z_l, \dots, z_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_l, \dots, p_M\}$$

Questo insieme prende il nome di **distribuzione di probabilità di un numero aleatorio discreto** (o PMF, Probability Mass Function). Si noti che quando il numero aleatorio X coincide con il numero reale a , ogni collezione di N valori contiene N volte il numero a mentre la PMF è caratterizzata dai seguenti parametri:

$$M = 1 \wedge z_1 = a \wedge p_1 = 1$$

Nel caso continuo ogni valore dell'asse reale può essere assunto dalla variabile aleatoria X e non si può più parlare di probabilità che essa assuma uno specifico valore ma si deve parlare di probabilità che il valore assunto appartenga ad un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$. A partire da una collezione $\{x_1, \dots, x_N\}$, si è in grado di ricostruire la frequenza empirica al variare dell'insieme I a partire dalla frequenza empirica di una classe di insiemi specifici, cioè quelli costituiti da tutti i numeri reali minori o uguali di uno specifico numero $x \in \mathbb{R}$:

$$\hat{F}_X^{(N)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{t \in \mathbb{R} : t \leq x\}}(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(x - x_i)$$

La funzione $\hat{F}_X^{(N)}(x)$ viene detta **funzione di distribuzione cumulativa** (CDF, Cumulative Distribution Function) empirica. È possibile osservare una corrispondenza biunivoca tra la frequenza empirica per ogni I e la CDF empirica, in primis perché si può studiare quest'ultima a partire dalla prima ma, con una maggiore importanza, perché conoscere la frazione di realizzazioni che cadono tra $-\infty$ e x permette di conoscere la frazione di realizzazioni che cadono in ogni intervallo incluso tra questi due estremi; sia $I = (a, b)$, allora:

$$I = (a, +\infty) \setminus (b, +\infty) \wedge \chi_{(a,b)}(x) = u(b - x) - u(a - x)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{(a,b)}(x_i) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u(b - x_i) - u(a - x_i)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(b - x_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(a - x_i) \\ &= \hat{F}_X^{(N)}(b) - \hat{F}_X^{(N)}(a) \end{aligned}$$

Se I è l'unione di più intervalli, la frazione di realizzazioni che cadono in esso è la somma delle frazioni di realizzazioni che cadono in ciascun intervallo. La frequenza empirica appena ottenuta dipende da N e può assumere diversi valori nel momento in cui la collezione cambia; per rendere la definizione indipendente dalla collezione si può far tendere N all'infinito, ottenendo la probabilità dell'evento $X \in I$, una caratteristica del numero aleatorio:

$$P[X \in I] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_I(x_i)$$

Conoscere il numero aleatorio X significa conoscere la probabilità dell'evento $X \in I$ al variare del dominio I . In seno alla relazione tra frequenza empirica e CDF empirica precedentemente enunciata, si può dire che **la conoscenza della probabilità di un evento è equivalente alla conoscenza del limite della CDF empirica**; quest'ultimo limite definisce la funzione $F_X(x)$, chiamata CDF della variabile aleatoria (o **CDF teorica**):

$$F_X(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{F}_X^{(N)}(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(x - x_i) = P[X \leq x]$$

È possibile definire alternativamente la quantità $P[X \in I]$ al variare dell'insieme I utilizzando una funzione che, integrata sull'insieme I , fornisce proprio $P[X \in I]$; tale funzione è detta **funzione densità di probabilità** (PDF, Probability Density Function) e soddisfa la relazione:

$$P[X \in I] = \int_I f_X(x) dx$$

Senza scendere in dettagli superflui sul tipo di integrabilità, si richiede che la PDF goda della **proprietà di continuità sull'insieme** al fine di **dare senso all'integrale sul dominio considerato**; la varietà dei possibili sottoinsiemi $I \subseteq \mathbb{R}$ sono quelli per cui l'integrale risulta correttamente definito.

Si supponga che l'insieme I sia un intervallo del tipo (a, b) :

$$P[X \in (a, b)] = \int_a^b f_X(x) dx$$

Mentre se $I = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i)$, cioè l'unione di più intervalli, allora:

$$P\left[X \in \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i)\right] = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} f_X(x) dx$$

Segue quindi che:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha) d\alpha \wedge \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Dimostrando che la CDF teorica è una particolare primitiva della PDF.

Sintetizzando quanto detto finora, **una collezione è descritta in maniera completa ma sintetica dalla CDF empirica**, che converge alla CDF teorica al divergere del numero di elementi, la quale è **primitiva della PDF della variabile aleatoria** descritta dalla collezione in esame.

LE TRE RAPPRESENTAZIONI DI UN NUMERO ALEATORIO

Si analizzino le **corrispondenze tra le varie rappresentazioni possibili di un numero aleatorio**; in primis si nota che **da PDF a CDF si procede per integrazione indefinita**, con un'opportuna scelta della costante arbitraria, mentre **da CDF a PDF tramite derivazione**, grazie alla definizione di primitiva. Segue che **la descrizione del numero aleatorio mediante PDF o CDF è abbastanza equivalente**, potendo passare con derivazione e integrazione tra le due, ma con un'unica importante eccezione: **quando l'integrale indefinito della PDF non è elementarmente esprimibile, il passaggio dalla descrizione tramite PDF a quella tramite CDF non può essere compiuto in maniera analitica**.

Dalla PDF è possibile **generare un'ampia varietà di collezioni di N realizzazioni della variabile aleatoria** (che vanno intese come **un'estrazione da un'unica collezione di infiniti elementi**). Questo passaggio richiede un **elevato numero di operazioni** ed è stato uno dei primi problemi che si sono affrontati con l'utilizzo dei moderni calcolatori; infatti, le prime proposte efficaci furono portate avanti da Von Neumann, anche se ad oggi questi algoritmi sono stati raffinati e si possono facilmente trovare funzioni definite che generano collezioni di realizzazioni per alcune importanti densità di probabilità, conoscendo le quali è possibile anche risolvere il problema per un'ampia varietà di PDF derivate da queste ultime. Viceversa, **data una collezione di infiniti elementi, si può ottenere la CDF teorica del numero aleatorio corrispondente**, anche se nelle elaborazioni ai calcolatori si può solo avere un'approssimazione a $\hat{F}_X^{(N)}(x)$, usando un numero N elevato di campioni e la definizione di CDF empirica.

Dualmente a quanto fatto per la CDF, **si vuole trovare una buona approssimazione della PDF a partire da una collezione finita di N elementi** (tanto più accurata quanto più questo numero è grande); **non si può procedere derivando la CDF empirica perché questa, non essendo continua** (solo il limite per $N \rightarrow +\infty$ porta alla continuità), **non restituisce una buona approssimazione; la derivata della CDF empirica** si può scrivere:

$$\frac{d}{dx} \hat{F}_X^{(N)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$$

La cui trasformata di Fourier mostra una componente costante fino all'infinito che va smussata ricorrendo ad una funzione continua di banda opportuna che va a moltiplicare tale trasformata, ovvero che va a convolare la funzione derivata appena descritta:

$$\hat{f}_X^{(N)}(x) = K(x) * \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K(x - x_i)$$

Dove **$K(x)$ è una funzione con trasformata unitaria nei pressi dell'origine e nulla all'infinito**; il primo requisito è soddisfatto se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) e^0 dx = 1$$

Inoltre, **affinché la funzione $\hat{f}_X^{(N)}(x)$ non diventi negativa, $K(x)$ deve essere sempre positiva**.

Segue che **$K(x)$ è una PDF**; inoltre, **deve essere possibile restringere il suo supporto a man mano che N aumenta**. È stata, quindi, mostrata **la modalità con cui passare da un all'altra delle due**

possibili descrizioni di un numero aleatorio (PDF o CDF teoriche) e la **descrizione pratica fornita da una collezione di N realizzazioni**; tradizionalmente, la CDF teorica è stata trascurata nonostante avvantaggiasse l'elaborazione al calcolatore.

Affrontando il tema delle variabili aleatorie discrete non è stata menzionata alcuna definizione per la PDF (neanche per la CDF), che verrà adesso introdotta. Si discuta, in prima istanza, il caso in cui la variabile aleatoria discreta sia un numero reale a ; allora, la probabilità $P[X \in I]$ si riduce a essere 1 quando $a \in I$ e 0 quando $a \notin I$:

$$\int_I f_X(x) dx = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow a \in I \\ 0 & \Leftrightarrow a \notin I \end{cases}$$

Chiaramente, nessuna funzione continua può soddisfare questa relazione, l'unica "funzione" che lo fa nel senso più generale è la **delta di Dirac centrata in a** ; segue che la **PDF di un numero reale a è**:

$$f_a(x) = \delta(x - a)$$

Pertanto, pur di includere la delta di Dirac per la descrizione della PDF, è possibile definire una PDF anche per le variabili aleatorie discrete. Sia, allora, considerata una generica variabile aleatoria discreta X e si determini la probabilità che essa appartenga ad un generico insieme $I \subseteq \mathbb{R}$, sapendo che X può assumere solo i valori nell'insieme $\{z_1, \dots, z_M\}$ con le relative probabilità $\{p_1, \dots, p_M\}$:

$$(X \in I) \equiv (X = z_1)\chi_I(z_1) \vee \dots \vee (X = z_M)\chi_I(z_M)$$

È un'identità logica che afferma l'equivalenza dell'appartenenza di X a I e dell'appartenenza di uno dei suoi valori possibili z_i a I ; siccome le varie OR sono disgiunte, la probabilità $P[X \in I]$ può essere determinata sfruttando il terzo assioma di Kolmogorov al finito:

$$P[X \in I] = \sum_{i=1}^M p_i \chi_I(z_i)$$

Segue che la **PDF di una generica variabile aleatoria discreta deve rispettare la seguente relazione**:

$$\int_I f_X(x) dx = \sum_{i=1}^M p_i \chi_I(z_i)$$

Ovvero:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^M p_i \delta(x - z_i)$$

La **CDF corrispondente** si scrive come:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^M p_i u(x - z_i)$$

Ed è una **funzione costante a tratti**, con dei **salti di altezza p_i** in corrispondenza di ogni punto z_i .

Nel caso continuo la definizione di CDF come $P[X < x]$ o $P[X \leq x]$ è equivalente, visto che un generico valore reale è assunto con probabilità nulla e l'inclusione o meno di un punto non altera la funzione, le due definizioni coincidono. Per variabili aleatorie discrete non si può dire altrettanto e per convenzione si assume che $F_X(x) = P[X \leq x]$, il che significa che nel punto di salto il valore è più alto ($F_X(z_k) = \sum_{i=1}^k p_i$); cioè, il valore della CDF è pari al suo limite da destra mentre quello da sinistra non include l'ammontare del salto $P[X = z_k] = F_X(z_k^+) - F_X(z_k^-)$. Questo discorso porta anche a dire, riguardo la probabilità che X appartenga ad un intervallo del tipo (a, b) , che:

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P[a < X < b] = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-)$$

$$P[a < X < b] = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$

È possibile che una variabile aleatoria sia di tipo misto, cioè che presenti delle caratteristiche di continuità come l'avere una probabilità di appartenere ad un insieme I dipendente dall'insieme stesso, oltre che dal fatto che all'insieme appartiene uno dei suoi M valori $\{z_1, \dots, z_M\}$ assunti con probabilità non nulla. In tal caso, la PDF della variabile si può scrivere come segue:

$$f_X(x) = f_X^{(c)}(x) + \sum_{i=1}^M p_i \delta(x - z_i)$$

Con $f_X^{(c)}(x)$ funzione continua e positiva; la CDF in corrispondenza del caso misto diventa:

$$F_X(x) = F_X^{(c)}(x) + \sum_{i=1}^M p_i u(x - z_i)$$

Si può notare nella CDF un salto in corrispondenza di ogni punto z_i che ammonta a p_i ; inoltre, tutto ciò che è stato detto nel caso discreto a proposito del valore assunto dalla CDF nel punto di salto vale anche per il caso misto.

Con tutte le definizioni a disposizione, si possono **classificare i tre tipi di variabile aleatoria**:

- **Continua** $\Leftrightarrow F_X(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$;
- **Discreta** $\Leftrightarrow F_X(x)$ è costante a tratti;
- **Mista** $\Leftrightarrow F_X(x)$ non è né continua né costante a tratti.

Si vuole concludere il capitolo analizzando le proprietà che caratterizzano la PDF e la CDF di una variabile aleatoria. In primis si può affermare che i valori p_i delle **funzioni di distribuzione di una variabile aleatoria devono sempre essere positivi e minori di 1**, in quanto rappresentazione di una probabilità, e la loro somma deve restituire proprio questo valore in quanto rappresentazione della **probabilità dell'evento $X \in \mathbb{R}$** :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i \in [1, M] \wedge \sum_{i=1}^M p_i = 1$$

Da questa proprietà ci si può collegare alla caratteristica di **positività della PDF di una variabile aleatoria continua**. Ragionando per assurdo, se la PDF fosse negativa in un punto x_0 , a causa della continuità sarebbe negativa in un intorno I_{x_0} in cui anche l'integrale sarebbe negativo; tuttavia, l'integrale della PDF su un insieme è la probabilità della variabile aleatoria di appartenere all'insieme, deve essere un valore numerico compreso tra 0 e 1 e non può essere negativo come l'assurdo vuole dimostrare. Segue che la PDF è una funzione non negativa e, come conseguenza, che la CDF è una funzione non decrescente.

Come già annunciato, considerato \mathbb{R} come insieme su cui calcolare la probabilità, si ha:

$$P[X \in \mathbb{R}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$$

Tale proprietà può essere usata anche come **criterio per individuare funzioni che non possono essere valide PDF**; infatti, **una funzione non può essere PDF quando o non è continua o non è positiva o non ha integrale esteso all'asse reale unitario**. Da quanto appena detto e dalla definizione di PDF si desume che:

$$F_X(+\infty) = 1 \wedge F_X(-\infty) = 0$$

Con riferimento al caso misto, per lo stesso motivo per cui la PDF di una variabile aleatoria continua deve essere positiva, **anche $f_X^{(c)}(x)$ deve essere sempre positiva, così come il valore di ogni area p_i delle delta di Dirac** che compaiono nella definizione di PDF:

$$f_X^{(c)}(x) \geq 0 \wedge p_i \geq 0$$

Infine, la condizione di unità dell'integrale esteso all'asse reale diventa:

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_X^{(c)}(x) dx + \sum_{i=1}^M p_i = 1$$

LA MEDIA STATISTICA DI UN NUMERO ALEATORIO

Sia considerata una **collezione di N realizzazioni di una variabile aleatoria digitale**, $\{x_1, \dots, x_N\}$, ciascuna delle quali appartiene ad un insieme di M valori assunti dalla variabile aleatoria $\{z_1, \dots, z_M\}$; denotando con N_l il numero di volte con cui il valore z_l è assunto dalle realizzazioni della collezione in esame, si calcola la media aritmetica dei valori assunti dalla collezione come:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} [N_1 z_1 + \dots + N_M z_M] = \sum_{l=1}^M \frac{N_l}{N} z_l$$

Al tendere all'infinito del numero di elementi della collezione, la media aritmetica muta in **media statistica del numero aleatorio** la cui definizione può essere scritta, considerando il fatto che per $N \rightarrow +\infty$ il rapporto N_l/N tende alla probabilità p_l , come:

$$E[X] = \sum_{l=1}^M p_l z_l$$

Chiaramente, è una quantità facilmente calcolabile quando si dispone della distribuzione di probabilità del numero, a patto che M non sia troppo elevato; in alternativa, $E[X]$ può essere approssimata dalla media aritmetica per un valore di N sufficientemente elevato.

La formula appena enunciata può essere alternativamente scritta come segue, in seno alla definizione di **PDF per un numero aleatorio discreto** e al **teorema del campionamento della delta di Dirac**:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{l=1}^M p_l z_l \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - z_l) dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^M p_l z_l \delta(x - z_l) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^M p_l x \delta(x - z_l) \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\sum_{l=1}^M p_l \delta(x - z_l) \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

La formula appena rilevata **non è esclusiva di variabili aleatorie discrete** ma può essere estesa al **caso continuo e al caso misto**. Il processo che conduce alla dimostrazione prevede la **generazione di un numero aleatorio discreto**, costituito da un **numero finito di cifre** per arrotondamento di **una variabile continua** (utilizzando il teorema della media); facendo poi divergere il numero di cifre utilizzate, **la media statistica e la PDF dei due numeri vanno a coincidere**. Sia considerata la **variabile discreta \hat{X}_q** i cui valori possibili sono chiamati $z_n = n\Delta$ e che sono **assunti con probabilità**:

$$p_n = \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} f_X(x) dx$$

Il **valor medio** di questa variabile discreta è:

$$E[\hat{X}_q] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n z_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \left(\int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} f_X(x) dx \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} z_n f_X(x) dx$$

Per far coincidere i due numeri aleatori bisogna far **tendere Δ a 0**, che equivale ad **aumentare all'infinito il numero di cifre decimali della rappresentazione**; in questo modo si ottiene una **valutazione del valor medio della variabile continua**:

$$\begin{aligned} E[X] &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E[\hat{X}_q] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} z_n f_X(x) dx \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{n\Delta + \frac{\Delta}{2}} z_n f_X(x) dx \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{n\Delta + \frac{\Delta}{2}} x f_X(x) dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

La sostituzione di z_n costante con la variabile di integrazione x è lecita siccome non produce alterazioni in riferimento al limite per $\Delta \rightarrow 0$. Per quanto riguarda le **variabili miste** si segue un procedimento analogo: si definisce la **variabile aleatoria discreta \hat{X}_q** i cui valori possibili non sono solo $\tilde{z}_n = n\Delta$ con probabilità:

$$\tilde{p}_n = \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} f_X^{(c)}(x) dx$$

Ma anche i valori z_l con probabilità A_l per $l \in [1, M]$. Il **valor medio** di questa variabile discreta è:

$$E[\hat{X}_q] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_n \tilde{z}_n + \sum_{l=1}^M A_l z_l = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\tilde{z}_n - \frac{\Delta}{2}}^{\tilde{z}_n + \frac{\Delta}{2}} \tilde{z}_n f_X^{(c)}(x) dx + \sum_{l=1}^M A_l z_l$$

Come nel caso reale, la dimostrazione si conclude facendo **tendere Δ a 0 per far avvicinare il numero discreto \hat{X}_q al numero misto X :**

$$\begin{aligned} E[X] &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E[\hat{X}_q] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\tilde{z}_n - \frac{\Delta}{2}}^{\tilde{z}_n + \frac{\Delta}{2}} \tilde{z}_n f_X^{(c)}(x) dx + \sum_{l=1}^M A_l z_l \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{n\Delta + \frac{\Delta}{2}} \tilde{z}_n f_X^{(c)}(x) dx \right) + \sum_{l=1}^M A_l z_l \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{n\Delta + \frac{\Delta}{2}} x f_X^{(c)}(x) dx \right) + \sum_{l=1}^M A_l z_l \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X^{(c)}(x) dx + \sum_{l=1}^M A_l \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - z_l) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X^{(c)}(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^M A_l x \delta(x - z_l) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X^{(c)}(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\sum_{l=1}^M A_l \delta(x - z_l) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(f_X^{(c)}(x) + \sum_{l=1}^M A_l \delta(x - z_l) \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

Va tenuto in conto che **la media di un numero aleatorio potrebbe non esistere**: nel **caso continuo** potrebbe non essere integrabile la quantità $x f_X(x)$ (anche se lo fosse $f_X(x)$) e nel **caso discreto** potrebbe non convergere la serie di termine generico $p_l z_l$ (anche se convergesse quella per p_l). Si può concludere elencando i **due modi con cui determinare la media statistica di una variabile aleatoria**: facendo la **media aritmetica di una collezione e portando N all'infinito** o usando la **formula integrale**, che richiede l'uso della PDF della stessa variabile aleatoria.

Sia g un'operazione deterministica da svolgere; si conosce bene quale sia il valore deterministico $y = g(x)$ a partire da una variabile deterministica x ma si vuole conoscere la densità di probabilità $f_Y(y)$ del numero aleatorio Y definito come $g(X)$ a partire dalla densità di probabilità che descrive il numero aleatorio X . Supponendo che X sia una variabile aleatoria discreta descritta dalla **distribuzione di probabilità**:

$$\{z_1, \dots, z_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

Allora anche $Y = g(X)$ sarà una variabile aleatoria discreta, la cui distribuzione di probabilità è:

$$\{g(z_1), \dots, g(z_M)\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

In base a quanto precedentemente detto, la media statistica di Y è:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{l=1}^M p_l g(z_l) = \sum_{l=1}^M p_l g(z_l) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - z_l) dx \right) = \sum_{l=1}^M \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_l g(z_l) \delta(x - z_l) dx \right) \\ &= \sum_{l=1}^M \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_l g(x) \delta(x - z_l) dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\sum_{l=1}^M p_l \delta(x - z_l) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Quest'ultima uguaglianza vale anche per le variabili aleatorie continue e miste ed è detta anche **teorema fondamentale della media**. Per estendere il risultato al caso continuo si ricorre ad un ragionamento del tutto analogo a quello usato per dimostrare la relativa media; quindi, si definisce una variabile aleatoria discreta \hat{X}_q in cui i valori possibili sono chiamati $z_n = n\Delta$ e vengono assunti con probabilità:

$$p_n = \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} f_X(x) dx$$

La funzione g applicata alla variabile in questione produce anch'essa una variabile aleatoria discreta, $g(\hat{X}_q)$, che assume i valori $g(z_n)$ con probabilità p_n . Valutando il **valor medio** di questa nuova variabile discreta:

$$E[g(\hat{X}_q)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n g(z_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(z_n) \left(\int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} f_X(x) dx \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} g(z_n) f_X(x) dx \right)$$

Portando Δ a 0 per far avvicinare la variabile discreta generata e la variabile continua in esame:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E[g(\hat{X}_q)] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} g(z_n) f_X(x) dx \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{n\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{n\Delta + \frac{\Delta}{2}} g(x) f_X(x) dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

L'approssimazione di $g(z_n)$ costante alla variabile di integrazione $g(x)$ è lecita siccome si sta operando con riferimento al limite per $\Delta \rightarrow 0$. L'estensione al caso misto del teorema fondamentale della media è sulla falsariga della dimostrazione della relativa media statistica.

Sia considerata la variabile aleatoria $Y = ag(X) + b$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono fissati, allora:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} [ag(x) + b]f_X(x)dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = aE[g(X)] + b$$

La **proprietà di linearità** appena enunciata permette di **limitare il calcolo della media alla quantità aleatoria $g(X)$** , lasciando a come fattore e b come termine additivo da contare dopo aver determinato $E[g(X)]$.

Per una **PDF simmetrica rispetto al punto a** , risulta che proprio **tal punto è la media della relativa variabile aleatoria**:

$$f_X(a-x) = f_X(a+x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E[X] = a$$

Infatti:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+a)f_X(x+a)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x+a)dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x+a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x+a)dx + a = a \end{aligned}$$

La relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x+a)dx = 0$$

È dovuta al fatto che **$xf_X(x)$ è una funzione dispari** (prodotto di una funzione dispari, x , e una pari, la funzione simmetrica f_X), quindi **l'integrale lungo l'asse reale si annulla**.

Considerando le **funzioni g_1 e g_2 tali che**:

$$g_1(x) \geq g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vale la relazione:

$$g_1(x)f_X(x) \geq g_2(x)f_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per **qualunque PDF $f_X(x)$** , dal momento in cui è stato dimostrato che è una funzione sempre non negativa; quindi, si può desumere che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)f_X(x)dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)f_X(x)dx$$

Ovvero che:

$$g_1(x) \geq g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E[g_1(X)] \geq E[g_2(X)]$$

Si può estendere questo risultato ai seguenti casi:

$$g_1(x) \geq a \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E[g_1(X)] \geq a$$

$$g_1(x) \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E[g_1(X)] \leq a$$

IL TEOREMA DI TRASFORMAZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Per elaborare un numero aleatorio digitale, ovvero per passare da un numero aleatorio discreto X ad uno altrettanto discreto $Y = g(X)$, bisogna dapprima passare dalla distribuzione di probabilità di X a quella di Y :

$$\{z_1, \dots, z_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\} \Rightarrow \{g(z_1), \dots, g(z_M)\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

Per poi verificare di poter fondere due (o più) elementi tali che:

$$g(z_i) = g(z_k) \quad \forall i \neq k$$

Nel caso in cui a due valori assumibili dalla variabile X corrisponda un unico valore assumibile dalla variabile Y ; sotto queste ipotesi, la probabilità che Y assuma $g(z_i)$ è la somma della probabilità che X assuma il valore z_i o z_k :

$$(Y = g(z_i) = g(z_k)) \equiv (X = z_i) + (X = z_k)$$

Dove l'operazione di OR viene fatta su due proposizioni disgiunte potendone valutare la probabilità con la relativa somma. Questa fusione è sintetizzata dalla seguente formula, che consente di esprimere la PDF della variabile Y :

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^M p_i \delta(y - g(z_i)) = \sum_{i=1}^{M_y} p_i^{(y)} \delta(y - y_i)$$

L'ultima diseguaglianza è stata introdotta per fondere gli elementi della prima somma corrispondenti a due delta di Dirac nello stesso punto ($\delta(y - g(z_i))$ e $\delta(y - g(z_k))$), sommandone le aree ($p_i^{(y)} = p_i + p_k$).

Volendo estendere questa regola al caso continuo, bisogna considerare quattro casi differenti in relazione alle possibili soluzioni dell'equazione nell'incognita x :

$$g(x) = y$$

PRIMO CASO

Si scelga un valore di y per cui non esiste soluzione. In tal caso:

$$f_Y(y) = 0$$

Perché è sempre possibile trovare un intorno di y in cui non esistono soluzioni e la probabilità che Y appartenga a questo intorno è nulla, prima ancora che si faccia tendere l'intorno stesso ad un singolo punto; ciò significa che la densità, funzione non negativa, è nulla in tutto l'intorno, anche nel punto considerato.

SECONDO CASO

Si scelga un valore di y per cui la soluzione è unica ed è x_y e siano considerati due intorni di questi valori, $I_y = [y - \Delta y, y + \Delta y]$ e $I_{x_y} = [x_y - \Delta x, x_y + \Delta x]$; si può scegliere un Δy abbastanza piccolo da far in modo che in ogni punto dell'intorno I_y esistono e sono uniche le soluzioni

(monodromia). Dal punto di vista logico, questo ragionamento può essere sintetizzato dalla seguente relazione:

$$(Y \in I_y) \equiv (X \in I_{x_y})$$

Oppure:

$$(y - \Delta y \leq Y \leq y + \Delta y) \equiv (x_y - \Delta x \leq X \leq x_y + \Delta x)$$

Si possono, quindi, **uguagliare le relative probabilità**:

$$\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_Y(y) dy = \int_{x_y-\Delta x}^{x_y+\Delta x} f_X(x) dx$$

Oppure, **usando il teorema della media**:

$$\exists y_0 \in I_y, x_0 \in I_{x_y} : 2\Delta y \cdot f_Y(y_0) = 2\Delta x \cdot f_X(x_0) \Leftrightarrow f_Y(y_0) = f_X(x_0) \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Per un incremento Δy sufficientemente piccolo, la **corrispondenza dei due insiemi** attraverso la funzione g precedentemente enunciata comporta che:

$$g(x_y + \Delta x) = y \pm \Delta y \wedge g(x_y - \Delta x) = y \mp \Delta y$$

Il segno superiore al secondo membro è adottato quando g è localmente crescente in I_{x_y} , viceversa per il segno inferiore. Ricavando Δy e dividendo ambo i membri per Δx si ha:

$$\Delta y = \pm[g(x_y + \Delta x) - y] = \pm[g(x_y + \Delta x) - g(x_y)]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{[g(x_y + \Delta x) - g(x_y)]}{\Delta x}$$

Ma per piccoli incrementi Δy si ha la tendenza di Δx a zero e il rapporto diventa la derivata di $g(x_y)$, modulata appositamente dal segno \pm in base alla monotonia locale della funzione; cioè:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = |g'(x_y)|$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left| g^{-1}'(y = g(x_y)) \right|$$

Quest'ultima relazione è possibile dal momento in cui in I_y la funzione è monodroma. Riscrivendo con queste informazioni la PDF:

$$f_Y(y) = f_X(x_y) |g^{-1}'(y)|$$

Con:

$$x_0, y_0 \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0, 0} x_y, y$$

TERZO CASO

Si scelga un valore di y per cui la soluzione dell'equazione esiste e non è unica (si ammette il caso di infinite soluzioni, a meno che esse siano di una quantità numerabile) e si denotino con x_1, \dots, x_k le k soluzioni. **Definito un intorno $I_y = [y - \Delta y, y + \Delta]$, esiste un insieme di intorni $I_x^i = [x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i]$ tale che per ogni elemento di I_y esiste un elemento in ciascuno degli intorni I_x^i che soddisfa l'equazione** in esame. Resta valida l'equivalenza logica:

$$(Y \in I_y) \equiv (X \in I_x^1) + \dots + (X \in I_x^k)$$

Per un valore di Δy sufficientemente piccolo, è possibile rendere le operazioni di OR disgiunte e valutare la probabilità come un'operazione di somma:

$$P[Y \in I_y] = \sum_{i=1}^k P[X \in I_x^i]$$

$$\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_Y(y) dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_i-\Delta x_i}^{x_i+\Delta x_i} f_X(x) dx$$

Risolvendo questi integrali con il **teorema della media**:

$$\exists y_0 \in I_y, x_0^{(i)} \in I_x^i \forall i \in [1, k] : 2\Delta y \cdot f_Y(y_0) = \sum_{i=1}^k 2\Delta x_i \cdot f_X(x_0^{(i)}) \Leftrightarrow f_Y(y_0) = \sum_{i=1}^k f_X(x_0^{(i)}) \frac{\Delta x_i}{\Delta y}$$

Per un incremento Δy sufficientemente piccolo, la corrispondenza degli insiemi attraverso la funzione g precedentemente enunciata comporta che:

$$g(x_i + \Delta x_i) = y \pm \Delta y \wedge g(x_i - \Delta x_i) = y \mp \Delta y$$

Il segno superiore al secondo membro è adottato quando g è localmente crescente in I_x^i , viceversa per il segno inferiore. Ricavando Δy e dividendo ambo i membri per Δx si ha:

$$\Delta y = \pm[g(x_i + \Delta x_i) - y] = \pm[g(x_i + \Delta x_i) - g(x_i)]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \pm \frac{[g(x_i + \Delta x_i) - g(x_i)]}{\Delta x_i}$$

Ma per piccoli incrementi Δy si ha la tendenza di Δx_i a zero e il rapporto diventa la derivata di $g(x_i)$, modulata appositamente dal segno \pm in base alla monotonia locale della funzione; cioè:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} = |g'(x_i)|$$

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta y} = |g_i^{-1}'(y = g(x_i))|$$

Quest'ultima relazione è possibile dal momento in cui in I_y la funzione è monodroma e ha k determinazioni per la funzione inversa. Riscrivendo con queste informazioni la PDF:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^k f_X(x_i) |g_i^{-1}'(y)|$$

Con:

$$x_0, y_0 \xrightarrow{\Delta x_i, \Delta y \rightarrow 0, 0} x_i, y$$

Questo terzo caso può essere interpretato anche come una **generalizzazione dei due precedenti**, dove il primo va inteso con $k = 0$ e il secondo con $k = 1$.

QUARTO CASO

L'insieme delle soluzioni dell'equazione ha la potenza del continuo, cioè è composto da almeno un intervallo; sia $A(y)$ l'insieme di soluzioni in questione, occorre valutare la probabilità che la variabile X sia in questo insieme:

$$p_A = P[X \in A(y)]$$

Se tale probabilità non è nulla, significa che la variabile aleatoria Y assume il valore y con probabilità non nulla, ovvero che è presente una delta di Dirac nel punto y con area p_A .

Volendo estendere questa regola al caso misto, occorre trasformare dapprima la componente continua della densità ($f_X^{(c)}$ secondo i principi appena descritti) e poi aggiungervi i valori $g(z_l)$ assunti con probabilità non nulla A_l ; esiste anche la possibilità di dover aggiungere alla probabilità A_l un'ulteriore massa qualora la funzione g convogli nel punto $g(z_l)$ una massa di probabilità che nella variabile X è distribuita con continuità sull'asse reale. Per fare ciò è possibile definire un insieme di k diverse restrizioni monodrome della funzione inversa g^{-1} da \mathbb{R} a E_i (con $i \in [1, k]$); in \mathbb{R} occorre, poi, distinguere i vari y_l (con $l \in [1, L]$) per i quali l'insieme delle soluzioni ha la potenza del continuo. Per ciascun $i \in [1, k]$ si definisce la funzione $g_i^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow E_i$ che esprime la soluzione dell'equazione in esame, la quale cade in E_i se esiste in tale insieme (non per tutti i valori di $y \in \mathbb{R}$ esisterà una soluzione in ciascun E_i). Ovviamente, l'unione di tutti i k insiemi E_i compone l'asse reale meno l'unione degli insiemi S_l aventi la potenza del continuo e che sono soluzione dell'equazione $g(x) = y_l$ per $l \in [1, L]$:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^k E_i \cup \bigcup_{l=1}^L S_l$$

La formula più generale per la trasformazione di una variabile aleatoria (che include anche i casi precedenti) è:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{i=1}^k \frac{f_X^{(c)}(x_i)}{|g'(x_i)|} + \sum_{l=1}^L \left[\int_{S_l} f_X^{(c)}(x) dx \right] \delta(y - y_l) + \sum_{l=1}^M p_l \delta(y - g(z_l)) \\ &= \sum_{i=1}^k f_X^{(c)}(x_i) |g_i^{-1}'(y)| + \sum_{l=1}^L \left[\int_{S_l} f_X^{(c)}(x) dx \right] \delta(y - y_l) + \sum_{l=1}^M p_l \delta(y - g(z_l)) \end{aligned}$$

Chiaramente, nella prima sommatoria va escluso l' i -esimo addendo se, per il fissato valore di y , non esiste una soluzione in E_i . Gli impulsi di Dirac in f_Y sono presenti per due motivi: in primis

perché sono già presenti in f_X e poi perché sono generati dalla trasformazione g a valere sulla componente continua $f_X^{(c)}$. **La generalità della formula è dovuta al fatto che:**

- **Caso continuo**

$$\sum_{l=1}^M p_l \delta(y - g(z_l)) = 0$$

- **Caso discreto**

$$\sum_{i=1}^k \frac{f_X^{(c)}(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{l=1}^L \left[\int_{S_l} f_X^{(c)}(x) dx \right] \delta(y - y_l) = 0$$

- **Caso continuo con valori y_l per cui l'insieme delle soluzioni S_l ha la potenza del continuo**

$$\sum_{l=1}^L \left[\int_{S_l} f_X^{(c)}(x) dx \right] \delta(y - y_l) \neq 0 \wedge \int_{S_l} f_X^{(c)}(x) dx \neq 0$$

Si propongano di seguito alcuni **esempi notevoli di trasformazione delle variabili aleatoria**. In prima istanza si analizza il caso della **moltiplicazione di un numero aleatorio per una costante reale**, per la quale **lo zero conserva ancora il ruolo di elemento neutro**; infatti:

$$Y = g(X) = aX$$

Con $a = 0$:

$$Y = 0 \quad \forall X \wedge f_Y(y) = \delta(y)$$

Qualora $a \neq 0$, **la funzione g è invertibile in tutto \mathbb{R}** , la sua derivata vale sempre a , $k = 1$ e $x = y/a$; quindi:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

Osservando alcuni casi particolari, come quello per cui $a = -1$:

$$Y = -X \Rightarrow f_Y(y) = f_X(-y)$$

Oppure quello per cui $a > 0$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

Valutando la relazione tra le CDF di Y e di X :

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \int_{-\infty}^y f_Y(x) dx = \int_{-\infty}^y \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^y f_X\left(\frac{x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\frac{y}{a}} af_X(z) dz \Leftrightarrow x = az \wedge a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{\frac{y}{a}}^{+\infty} af_X(z) dz \Leftrightarrow x = az \wedge a < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\frac{y}{a}} f_X(z) dz \Leftrightarrow x = az \wedge a > 0 \\ \int_{\frac{y}{a}}^{+\infty} f_X(z) dz \Leftrightarrow x = az \wedge a < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} F_X\left(\frac{y}{a}\right) \Leftrightarrow x = az \wedge a > 0 \\ 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y}{a}} f_X(z) dz \Leftrightarrow x = az \wedge a < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X\left(\frac{y}{a}\right) \Leftrightarrow a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y}{a}\right) \Leftrightarrow a < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si consideri la trasformazione:

$$Z = g(X) = X + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

La funzione g è invertibile ed ha derivata unitaria su tutto \mathbb{R} ; quindi:

$$f_Z(z) = f_X(z - a)$$

DESCRIZIONI SINTETICHE ED ESEMPI DI VARIABILI ALEATORIE

Sebbene la PDF sia una descrizione completa della variabile aleatoria, è importante andare a considerare i due parametri fondamentali di una sua descrizione sintetica. Il primo parametro descrive il punto attorno cui è centrata la PDF e potrebbe benissimo essere la media $E[X]$, oppure la mediana; la mediana è definita come il valore che divide in due parti uguali la PDF della variabile aleatoria:

$$x_{me} : \int_{-\infty}^{x_{me}} f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

In alcuni casi discreti e misti il punto di esatta metà della PDF potrebbe non essere individuabile; in tal caso la mediana è il valore che consente di approssimare al meglio questa uguaglianza. In ultima istanza, il primo parametro della descrizione sintetica potrebbe essere anche la moda, ovvero il punto in cui la densità raggiunge il massimo:

$$x_{mo} : f_X(x_{mo}) = \max_x f_X(x)$$

Quando una densità presenta diversi massimi locali è chiamata densità multimodale.

Il secondo parametro descrive la larghezza della densità attorno al punto centrale appena individuato e può essere definito con l'uso della deviazione standard, la radice quadrata della varianza:

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2]$$

La linearità della media permette di dire che:

$$\begin{aligned}
 E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= 121
 \end{aligned}$$

Quindi, la varianza può essere anche definita come la differenza tra la media del quadrato (detto **valore quadratico medio**) e il **quadrato della media**.

Il motivo per cui la deviazione standard è l'unico strumento usato per descrivere la larghezza della PDF è dovuto alla **disuguaglianza di Chebichev**, ottenuta a partire dalla **disuguaglianza di Markov** per una variabile aleatoria positiva Y (ovvero una variabile per cui $f_Y(y) = 0 \forall y < 0$) e per un numero reale $a > 0$:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} y f_Y(y) dy \geq \int_a^{+\infty} y f_Y(y) dy \geq a \int_a^{+\infty} f_Y(y) dy = a P[Y \geq a]$$

$$P[Y \geq a] \leq \frac{E[Y]}{a}$$

Applicando questo risultato alla variabile positiva $Y = |X - E[X]|^n$:

$$P[|X - E[X]| \geq a] = P[|X - E[X]|^n \geq a^n] \leq \frac{E[|X - E[X]|^n]}{a^n}$$

La quantità $E[|X - E[X]|^n]$ è detta **momento centrale della variabile aleatoria X di ordine n** ($E[|X|^n]$ è solo momento di ordine n) e la disuguaglianza (attribuita a Bienaymé) è valida per i diversi valori di a ; in particolare, preso $n = 2$ e $a = k\sqrt{VAR[X]} = k\sigma$, si ottiene la disuguaglianza di Chebichev:

$$P[|X - E[X]| \geq k\sigma] \leq \frac{E[|X - E[X]|^2]}{k^2 VAR[X]} = \frac{1}{k^2}$$

Il risultato permette di dire che la **variabile aleatoria si allontana dalla sua media** di una quantità $k\sigma$ con una piccola probabilità, più piccola tanto più grande è k . Segue che la **varianza o la deviazione standard** (sua radice) **misurano il grado di dispersione della variabile aleatoria intorno al suo valore medio**.

Si consideri una **variabile aleatoria ottenuta come combinazione lineare**, $Y = aX + b$, si vuole determinare la relativa **varianza**. Si valuti dapprima la media:

$$E[Y] = aE[X] + b$$

Quindi:

$$E[(Y - E[Y])^2] = E[(aX + b - aE[X] - b)^2] = E[(aX - aE[X])^2] = a^2 E[(X - E[X])^2]$$

$$= a^2 VAR[X]$$

Si può concludere dicendo che, con una trasformazione lineare, la varianza varia in maniera **quadratico con il coefficiente moltiplicativo e indipendentemente da quello additivo**.

Di seguito si elencano esempi di variabili aleatorie notevoli:

- **Variabile aleatoria uniforme**

Per descrivere la variabile aleatoria uniforme si usano le seguenti PDF e CDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow x \in [0,1] \\ 0 & \Leftrightarrow x \notin [0,1] \end{cases} \wedge F_X(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x \leq 0 \\ x & \Leftrightarrow x \in [0,1] \\ 1 & \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

La PDF in questione è valida, in quanto positiva ed avente integrale unitario su tutto l'asse reale; media e mediana di questa variabile valgono $\frac{1}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

La **varianza**, invece, è $1/12$; infatti, il **valore quadratrico medio** è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

Una diretta estensione di questa variabile è la **variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[a, b]$** :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \Leftrightarrow x \in [a, b] \\ 0 & \Leftrightarrow x \notin [a, b] \end{cases} \wedge F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \Leftrightarrow x \in [a, b] \\ 1 & \Leftrightarrow x \geq b \end{cases}$$

Si può notare che anche **questa PDF è ben definita**, in quanto positiva e avente integrale unitario sull'asse reale; infine, è importante notare la relazione che c'è fra le due variabili appena menzionate:

$$Y = a + (b - a)X$$

- **Variabile aleatoria gaussiana**

Questo numero aleatorio è detto anche **variabile aleatoria normale** e la sua PDF è definita come segue:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Si può verificare che, per ogni $m, \sigma > 0$, **questa PDF è ben definita**; infatti, è positiva in quanto composta da funzioni positive ma ha anche integrale unitario sull'asse reale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sigma d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} \end{aligned}$$

Si è posto prima $x - m = y$, poi $y = \sigma\alpha$. Passando in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho d\vartheta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right]_0^{+\infty} d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1 \end{aligned}$$

Per la **media** di una tale PDF è possibile sfruttare la media di una distribuzione simmetrica e dire che:

$$E[X] = m$$

Per la **varianza**, si dimostri che essa è σ^2 :

$$\begin{aligned} VAR[X] = E[(X - m)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma\alpha)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sigma d\alpha = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \right\} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sigma^2 \end{aligned}$$

Si è posto prima $x - m = y$, poi $y = \sigma\alpha$; nell'ultimo passaggio si è considerata la funzione integranda come la PDF di una variabile gaussiana con $m = 0$ e $\sigma^2 = 1$, quindi l'integrale è unitario e la formula della varianza per questa variabile è stata dimostrata.

Si consideri un **caso particolare della variabile gaussiana**, a cui si farà riferimento con \bar{X} , per cui $m = 0$ e $\sigma^2 = 1/2\pi$:

$$f_{\bar{X}}(x) = e^{-\pi x^2}$$

Questa PDF fornisce **l'autofunzione della trasformata di Fourier**:

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \Rightarrow \mathcal{F}[x(t)](f) = x(f) = e^{-\pi f^2}$$

Si consideri, invece, la variabile aleatoria $X_0 = \bar{X}\sqrt{2\pi\sigma^2}$:

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} f_{\bar{X}}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Segue che:

$$X = \bar{X}\sqrt{2\pi\sigma^2} + m$$

Infatti:

$$f_X(x) = f_{X_0}(x - m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} f_{\bar{X}}\left(\frac{x - m}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La variabile aleatoria gaussiana è anche un importante esempio dell'eventualità in cui **la primitiva della PDF (ovvero la CDF) non sia esprimibile sottoforma di funzioni elementari**; per questo motivo **ne sono stati tabellati i valori assunti**, con notevole precisione e ad un passo di campionamento molto elevato. Per la **variabile gaussiana con media nulla e varianza unitaria** (detta variabile gaussiana normalizzata) **si usa la funzione $Q(x)$** ed esprime **la probabilità della variabile di eccedere il valore x** :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Un altro **caso notevole di variabile gaussiana** è quella a **media nulla e varianza $\frac{1}{2}$** , usata per definire **la funzione di errore $\text{erf}(x)$** come **la probabilità della variabile di non eccedere in valore assoluto il numero $x \geq 0$** :

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt$$

Mentre per **funzione di errore complementare $\text{erfc}(x)$** si intende la probabilità della stessa variabile di eccedere in valore assoluto il numero $x \geq 0$:

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

La relazione che intercorre tra tutte queste funzioni è:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \text{erfc}(x) = 2Q(x\sqrt{2})$$

Infatti, ponendo $z = t/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-z^2} \sqrt{2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Data una generica gaussiana (modo con cui ci si riferisce ad una variabile aleatoria gaussiana), la **probabilità che essa ecceda un valore fissato** può essere scritta come:

$$P[X \geq x] = P\left[\frac{X - m}{\sigma} \geq \frac{x - m}{\sigma}\right] = Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Tenendo conto che:

$$\frac{X - m}{\sigma}$$

Ha **media nulla e varianza unitaria**, quindi si può usare $Q(x)$ per esprimere la sua probabilità di eccedere:

$$\frac{x - m}{\sigma}$$

Segue che la **CDF di una gaussiana può essere scritta come:**

$$F_X(x) = P[X \leq x] = 1 - P[X > x] = 1 - P[X \geq x] = 1 - Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

- **Variabile aleatoria di Bernoulli**

La variabile in questione di un parametro p è una variabile discreta caratterizzata da: $M = 2$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $p_1 = 1 - p$ e $p_2 = p$. Ovvero, è una variabile che prende i valori $\{0,1\}$ ed assume 1 con probabilità p .

- **Variabile aleatoria binomiale**

Indicata con $B(m, p)$ e caratterizzata dai parametri m e p , è una variabile discreta e assume i seguenti valori con le relative probabilità:

$$z_k = k \wedge p_k = \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k} \quad \forall k \in [0, m]$$

- **Variabile aleatoria geometrica**

Caratterizzata dal parametro p , è una variabile discreta e assume i seguenti valori con le relative probabilità:

$$z_k = k \wedge p_k = p(1 - p)^{k-1} \quad \forall k \in [0, +\infty)$$

- **Variabile aleatoria di Poisson di parametro λ**

$$z_k = k \wedge p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall k \in [0, +\infty)$$

- Altri esempi di variabili aleatorie continue
 - **Esponenziale**

$$f_E(x) = e^{-x} u(x)$$

- **Esponenziale negativa**

$$f_N(x) = e^x u(-x)$$

- **Esponenziale bilatera (o di Laplace)**

$$f_L(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

- **Rayleigh**

$$f_R(x) = 2x e^{-x^2} u(x)$$

Si vuole concludere il capitolo menzionando la **descrizione incompleta di una variabile aleatoria**: una descrizione di questo tipo, né completa né sintetica, fa ricorso ai **quantili di ordine N della**

variabile. Un quantile di ordine N è una quantità notevole che prende un nome specifico in funzione dell'ordine N :

- $N = 2 \Rightarrow$ mediana;
- $N = 3 \Rightarrow$ terzili;
- $N = 4 \Rightarrow$ quartili;
- $N = 5 \Rightarrow$ quintili;
- $N = 6 \Rightarrow$ sestili;
- $N = 10 \Rightarrow$ decili;
- $N = 100 \Rightarrow$ percentili;
- ...

I quantili di ordine N di un numero aleatorio sono $N - 1$ e costituiscono un **campionamento del grafico della CDF**; in particolare, l' i -esimo quantile x_i è definito dalla seguente relazione:

$$F_X(x_i) = \frac{i}{N} \quad \forall i \in [1, N - 1] \Leftrightarrow P[X \leq x_i] = \frac{i}{N}$$

Mentre la **caratterizzazione completa** consiste nell'intero grafico della CDF, attraverso i quantili si ha una descrizione incompleta, che si avvicina a quella completa al crescere di N , ma comunque più ricca della descrizione sintetica in termini di media e varianza.

IL CONCETTO DI VETTORE ALEATORIO

Una volta esteso il concetto di numero reale, è possibile estendere anche altre strutture costruite sulla base del numero reale; in particolare, si parla di **vettore aleatorio** quando si fa riferimento all'estensione al caso aleatorio del vettore costruito sul numero reale. Un vettore aleatorio X avente n componenti reali è concepito al fine di fornire una **descrizione quantitativa della variabilità di una grandezza vettoriale**; questo tipo di descrizione è condotta mediante l'uso di una collezione di N realizzazioni del vettore aleatorio, $\{x_1, \dots, x_N\}$, dove ogni x_i è un vettore reale di n numeri reali, cioè un elemento di \mathbb{R}^n .

L'appartenenza di un vettore aleatorio ad un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è dapprima descritta dalla **frequenza empirica** valutata con riferimento alla specifica collezione:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_D(x_i)$$

Ma può essere più sinteticamente descritta mediante la **CDF empirica** del vettore X con riferimento alla specifica collezione:

$$\hat{F}_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{D(\mathbf{x})}(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{p=1}^n u(x^{(p)} - x_i^{(p)})$$

Dove $D(\mathbf{x})$ è l'insieme dei vettori $y \in \mathbb{R}^n$ tali che $y \leq x$; la **disuguaglianza tra vettori** va intesa nel senso che tutte le componenti del vettore rispettano la medesima relazione:

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \Leftrightarrow y^{(p)} \leq x^{(p)} \quad \forall p \in [1, n]$$

Quindi:

$$D(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y^{(p)} \leq x^{(p)} \forall p \in [1, n]\}$$

Si noti che **la conoscenza della CDF empirica implica la conoscenza della frequenza empirica per ogni dominio D** ; in particolare, si consideri il caso in cui D è un rettangolo in \mathbb{R}^n :

$$D = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \alpha^{(p)} \leq y^{(p)} \leq \beta^{(p)} \forall p \in [1, n]\}$$

Con $\boldsymbol{\alpha}^{(p)}$ e $\boldsymbol{\beta}^{(p)}$ **componenti dei vettori reali $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ che definiscono il dominio**. Si dimostra che la frequenza empirica si può scrivere in termini di CDF empirica:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_D(\mathbf{x}_i) = \sum_{k \in K_p} \hat{F}_X^{(N)}(\gamma_k) - \sum_{k \in K_d} \hat{F}_X^{(N)}(\gamma_k)$$

Questa relazione mostra che, con riferimento al dominio rettangolare D , **la frequenza empirica si può scrivere usando la CDF empirica calcolata in 2^n punti γ_k ; ciascun punto si ottiene, dapprima considerando un intero $k \in [0, 2^n - 1]$, poi passando alla sua rappresentazione binaria $b_1 b_2 \dots b_n$ ed infine selezionando come p -esima componente di γ_k** :

$$\gamma_k^{(p)} = \begin{cases} \beta^{(p)} & \Leftrightarrow b_p = 0 \\ \alpha^{(p)} & \Leftrightarrow b_p = 1 \end{cases}$$

Tenendo conto che **ogni bit b_p della stringa dipende da k** . In questo modo, **usando i due vettori $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ che definiscono il dominio si formano** (al variare di k tra i suoi 2^n valori) i diversi γ_k su cui va valutata la CDF empirica; il **segno di ciascun termine della CDF dipende poi dalla parità della stringa di bit** relativa alla rappresentazione standard binaria di k . Più precisamente, K_p è l'insieme dei $k \in [0, 2^n - 1]$ per cui la stringa di bit è composta da un numero pari di uno, mentre K_d è l'insieme dei $k \in [0, 2^n - 1]$ per cui la stringa di bit è composta da un numero dispari di uno.

Per dimostrare la relazione appena introdotta occorre partire dalla **definizione di CDF empirica**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_D(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{p=1}^n \left[u(\beta^{(p)} - x_i^{(p)}) - u(\alpha^{(p)} - x_i^{(p)}) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} \prod_{p=1}^n (-1)^{b_p} u(\gamma_k^{(p)} - x_i^{(p)}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{p=1}^n b_p} \prod_{p=1}^n u(\gamma_k^{(p)} - x_i^{(p)}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{p=1}^n b_p} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{p=1}^n u(\gamma_k^{(p)} - x_i^{(p)}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{p=1}^n b_p} \hat{F}_X^{(N)}(\gamma_k) \end{aligned}$$

Dove b_p corrisponde alla scelta del primo addendo ($b_p = 0$) o del secondo addendo ($b_p = 1$) nel p -esimo fattore del prodotto. Le possibili scelte per ciascun fattore che compone il generico addendo in cui si scomponete la produttoria complessiva (e quindi per la sequenza $b_1 b_2 \dots b_n$ che denota tali scelte) corrispondono a **tutti i possibili numeri interi rappresentabili su n bit di cui la**

sequenza considerata diviene la rappresentazione standard binaria. Il valore di $\gamma_k^{(p)}$ è dato dal valore corrispondente alla scelta effettuata per ciascun fattore precedentemente esposta; dalla relazione finale appena rilevata si deduce direttamente la tesi della dimostrazione, tenendo conto che ogni b_p dipende da k e dalle definizioni date degli insiemi K_p e K_d .

Per rendere più semplice la comprensione di quanto appena detto, **si consideri il caso $n = 1$, $b_1 \in \{0, 1\}$, $K_p = \{0\}$ e $K_d = \{1\}$** ; la formula generale diventa:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})}(\mathbf{x}_i) = \hat{F}_X^{(N)}(\beta^{(1)}) - \hat{F}_X^{(N)}(\alpha^{(1)})$$

Per $n = 2$, $b_1 b_2 \in \{00, 01, 10, 11\}$, $K_p = \{0, 3\}$ e $K_d = \{1, 2\}$ la formula generale diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{((\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}) \times (\alpha^{(2)}, \beta^{(2)})})(\mathbf{x}_i) \\ = \hat{F}_X^{(N)}(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) + \hat{F}_X^{(N)}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) - \hat{F}_X^{(N)}(\alpha^{(2)}, \beta^{(1)}) - \hat{F}_X^{(N)}(\alpha^{(1)}, \beta^{(2)}) \end{aligned}$$

Quando il dominio D è un plurirettangolo (ovvero l'unione di rettangoli nello spazio), si può calcolare la frequenza empirica del dominio sommando le frequenze empiriche dei vari rettangoli che lo compongono, ciascuna delle quali si può trovare ricorrendo alla CDF empirica.

La relazione che è stata appena dimostrata presenta un **notevole aumento della complessità** in termini esponenziali all'aumentare di n , rendendone **poco pratica l'applicazione**. Questo discorso non va inteso come un'esclusiva della frequenza empirica, **tutta la teoria di estensione al vettore aleatorio è segnata da un'esponenziale crescita della complessità al crescere della dimensione del vettore**, condizione detta **maledizione della dimensionalità**.

A partire dalla **definizione di CDF empirica**, facendo **tendere N all'infinito** si ottiene una **indipendenza della frequenza empirica dalla specifica collezione**, ottenendo una caratteristica del numero aleatorio detta **probabilità dell'evento $X \in D$** :

$$P[X \in D] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_D(\mathbf{x}_i)$$

Conoscere il vettore aleatorio X significa conoscere la probabilità dell'evento $X \in D$ al variare del dominio D ; il significato di questa probabilità è legato alla frazione di realizzazioni di una collezione che appartiene al dominio fissato al divergere del numero N di elementi della collezione. In base alla relazione tra frequenza empirica e CDF empirica e alla relazione tra frequenza empirica e probabilità dell'evento, si può dedurre che **esiste anche una relazione tra la conoscenza della CDF empirica e della probabilità in questione**; il limite appena enunciato definisce la funzione **CDF teorica del vettore aleatorio X** ed è denotata con $F_X(\mathbf{x})$:

$$F_X(\mathbf{x}) = P[X \leq \mathbf{x}] = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_X^{(N)}(\mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{p=1}^n u(x^{(p)} - x_i^{(p)})$$

Con $x_i^{(p)}$ si indica la p -esima componente del vettore \mathbf{x}_i e con $x^{(p)}$ la p -esima componente del vettore \mathbf{x} . Per quanto detto prima, **la conoscenza del vettore aleatorio X passa per la conoscenza**

della sua CDF teorica; questa ha la funzione di descrivere in maniera sintetica la collezione, che non può divergere dalla descrizione di una collezione di un'infinità numerabile di elementi. In altri termini, **se la convergenza non sussiste, la descrizione della collezione in esame non sarebbe una descrizione equivalente alla CDF in esame**, ma ad un'altra CDF.

La **derivata della CDF teorica**, intesa nel senso delle distribuzioni ed in modo parziale rispetto a tutte le sue componenti, prende il nome di **PDF**; usando il **teorema fondamentale del calcolo integrale** si può scrivere:

$$P[X \in D] = \int_D f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Pertanto, **la PDF** (per la quale specificazione è ammesso l'uso della delta di Dirac) **consente di esprimere la probabilità che il vettore aleatorio X appartenga al dominio D mediante un processo di integrazione sul dominio stesso.** Il vettore aleatorio è detto **continuo** quando nella definizione di PDF non è necessario usare la delta di Dirac, mentre è **discreto** quando la si usa esclusivamente ed è **misto** se non è né continuo né discreto.

Con riferimento ad un **dominio rettangolare**, si noti che l'espressione della frequenza empirica in termini della **CDF empirica**, se portata al limite di N che tende all'infinito, produce alla analoga espressione della **probabilità che il vettore aleatorio X appartenga al dominio rettangolare in termini di CDF teorica**:

$$\int_D f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k \in K_p} F_X(\mathbf{y}_k) - \sum_{k \in K_d} F_X(\mathbf{y}_k)$$

Questa relazione costituisce anche l'espressione del **teorema fondamentale del calcolo integrale** in un **dominio rettangolare di dimensione n** .

Quando il vettore aleatorio X coincide con il vettore reale \mathbf{a} , allora risulta che la **CDF empirica valutata nel vettore x vale**:

$$\prod_{p=1}^n u(x^{(p)} - a^{(p)})$$

Di conseguenza anche la **CDF teorica coincide con tale funzione** perché non dipende da N ; inoltre, la sua **derivata nel senso delle distribuzioni**:

$$\prod_{p=1}^n \delta(x^{(p)} - a^{(p)}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

È la **PDF corrispondente al vettore a quando guardato come vettore aleatorio**.

Un vettore aleatorio qualsiasi può essere specificato fornendo la **CDF**, la **PDF oppure una collezione di un numero infinito di realizzazioni**. Anche di un vettore reale vanno determinate tali caratteristiche per poter procedere all'estensione appena considerata; in particolare, si noti che la collezione corrispondente ad un vettore reale è composta da infinite ripetizioni del vettore stesso:

$$\mathbf{a} \Leftrightarrow \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}, \dots\}$$

Infine, si noti anche che **per un vettore reale l'appartenenza ad un dominio ammette sempre risposta binaria**, o appartiene o non appartiene al dominio.

LE TRE RAPPRESENTAZIONI DI UN VETTORE ALEATORIO

Si analizzino le corrispondenze tra le varie rappresentazioni possibili di un numero aleatorio; in primis si nota che **da PDF a CDF si procede per integrazione indefinita n – dimensionale**, con un'opportuna scelta della costante arbitraria, mentre **da CDF a PDF tramite derivazione mista n – dimensionale**, grazie alla definizione di primitiva. Il passaggio tra le due rappresentazioni è abbastanza agevole, con l'importante eccezione delle PDF non elementarmente integrabili.

Riguardo al **passaggio da PDF ad una generica collezione di N realizzazioni**, intesa come estratta da un'unica collezione di infiniti elementi, **si usa la relazione $X = g(X_0)$ con g funzione $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$** e X_0 vettore aleatorio avente d componenti, caratterizzato da una specifica PDF per cui sono scritti software appositi alla generazione di una collezione corrispondente; il software produce una collezione di N elementi, si costruisce la relativa CDF empirica e la si valuta in relazione alla CDF teorica di X_0 , permettendo di vedere le differenze e aggiustare il meccanismo generativo.

Viceversa, **data una collezione di N realizzazioni del vettore aleatorio X , $\{x_1, \dots, x_N\}$, si può ottenere la relativa CDF empirica usando il meccanismo precedentemente mostrato**; questa non è altro che **un'approssimazione della CDF teorica al crescere di N** e si può mostare che **il numero di elementi N richiesti per avere una ragionevole approssimazione cresce esponenzialmente con la dimensione n del vettore**. L'impossibilità pratica di collezionare il numero di realizzazioni richieste per ricostruire il modello teorico a partire dai soli dati empirici costituisce la motivazione fondamentale per considerare diversi approcci, in cui considerazioni di tipo teorico o ipotetico si associano in modo essenziale alla collezione disponibile per ricostruire la CDF del vettore aleatorio.

Quando **il numero di realizzazioni è sufficiente** (spesso accade ragionevolmente quando $n = 2 \vee n = 3$) si può anche ottenere una **ragionevole approssimazione della PDF del vettore aleatorio**, estendendo al caso vettoriale la formula già mostrata per il caso scalare:

$$\hat{f}_X(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}) * \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

Dove **K deve essere una densità n – dimensionale con supporto intorno all'origine**; come nel caso monodimensionale, **il supporto va dimensionato opportunamente e va ridotto progressivamente al crescere del valore disponibile di N** .

Tradizionalmente si è trascurata la descrizione pratica fornita dalla collezione di N realizzazioni e tuttora **la maledizione della dimensionalità costringe a ricorrere ad essa solo all'interno di un opportuno contesto teorico**.

Esistono vettori aleatori che assumono solo un numero finito M di valori $\{z_1, \dots, z_M\}$; la probabilità $P[X \in D]$ è nulla se nessuno degli M punti appartiene al dominio D ; siccome ciò vale qualunque sia il dominio D che non contenga tali punti, **la PDF vale zero eccetto che in tali punti**. Affinché la PDF di un campione di un segnale digitale integrata sull'asse reale fornisca l'unità, è necessario che essa contenga delle delta di Dirac nei punti menzionati:

$$f_X(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M p_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l)$$

Con $p_l \geq 0$ affinché l'integrale su un dominio che contiene solo un punto \mathbf{z}_l degli M valori assumibili non sia negativo. Chiaramente, integrando su tutto lo spazio \mathbb{R}^n , risulta:

$$\sum_{l=1}^M p_l = 1$$

Un vettore aleatorio digitale è, pertanto, descritto dalla **doppia specificazione dei valori che possono essere assunti e dalla probabilità di assumere un certo valore**:

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

p_l denota la **probabilità che X sia uguale a \mathbf{z}_l** ed è pari al **limite per $N \rightarrow +\infty$ della frazione di volte che X assuma tale valore in una collezione**. L'insieme di valori assumibili e delle relative probabilità prende il nome di **distribuzione di probabilità di un vettore aleatorio discreto**.

Nonostante il metodo per approssimare la PDF teorica (affrontato nei capitoli dedicati alle variabili aleatorie) sia molto generale, quando si sa che la PDF è di tipo discreto (come nel caso appena enunciato) si possono ottenere il valore M e i valori $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\}$ dall'**osservazione dei valori assunti dalle realizzazioni \mathbf{x}_i della collezione** e si possono approssimare le probabilità dalla relazione:

$$p_l = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{\mathbf{z}_l\}}(\mathbf{x}_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N_l}{N}$$

N_l è il numero di volte in cui il valore \mathbf{z}_l viene assunto dalle realizzazioni che compongono la collezione. In altri termini, siccome il parametro p_l rappresenta la probabilità che X appartenga ad un dominio D sufficientemente stretto intorno a \mathbf{z}_l da non contenere nessun altro \mathbf{z}_k assunto dal vettore aleatorio, allora tale probabilità rappresenta il limite della frequenza empirica della collezione relativa ad un tale dominio.

LA MEDIA STATISTICA DI UN VETTORE ALEATORIO

Sia considerata una **collezione $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ di N realizzazioni di un vettore aleatorio discreto** e si proceda a calcolarne la **media aritmetica dei valori assunti**:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i = \sum_{l=1}^M \frac{N_l}{N} \mathbf{z}_l$$

Tenendo conto che $\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\}$, ovvero che ciascuna realizzazione coincide con almeno uno dei valori di tale insieme, e che N_l è il numero di volte con cui la quantità \mathbf{z}_l compare nella collezione. La **media aritmetica su una collezione** al tendere all'infinito del numero di suoi elementi viene definita **media statistica $E[X]$ del vettore aleatorio digitale X** ; sapendo che:

$$\frac{N_l}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p_l$$

Si può scrivere che:

$$E[X] = \sum_{l=1}^M p_l \mathbf{z}_l$$

Pertanto, la **media statistica** può essere facilmente calcolata quando si dispone della distribuzione di probabilità del relativo vettore aleatorio discreto X , purché il numero M non sia troppo elevato. In base alla definizione di PDF di un campione di un segnale digitale:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^M p_l \mathbf{z}_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^M p_l \mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x} \sum_{l=1}^M p_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Sebbene derivata con riferimento ad un vettore aleatorio discreto, questa relazione è ancora valida per vettori continui o misti (la dimostrazione sarà svolta in seguito).

Disponendo di una collezione $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ di N realizzazioni di un vettore aleatorio discreto, si può calcolare in modo abbastanza diretto i valori assunti ($\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\}$) e la distribuzione empirica di probabilità ($\{N_1/N, \dots, N_M/N\}$); quest'ultima tende alla distribuzione (teorica) di probabilità al tendere di N ad infinito.

Considerato un vettore aleatorio discreto X descritto dalla distribuzione di probabilità:

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

È possibile definire una sua funzione deterministica e scalare, g , e conseguentemente la variabile aleatoria $Y = g(X)$; si vuole determinare la densità $f_Y(y)$ a partire dalla densità che descrive il vettore X . Dal momento in cui questo è discreto, anche Y sarà una variabile discreta, che assume i valori e le probabilità:

$$\{g(\mathbf{z}_1), \dots, g(\mathbf{z}_M)\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

La sua **media statistica** sarà:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{l=1}^M p_l g(\mathbf{z}_l) = \sum_{l=1}^M p_l g(\mathbf{z}_l) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} p_l g(\mathbf{z}_l) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} p_l g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^M p_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_l) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale anche per le variabili aleatorie continue e miste e viene detto teorema fondamentale della media; la dimostrazione per il caso generale sarà affrontata in seguito.

Come si è avuto modo di intuire, per elaborare un vettore aleatorio discreto X in un numero aleatorio $Y = g(X)$, si può facilmente passare dalla distribuzione di probabilità del vettore a quella del numero valutando:

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\} \Rightarrow \{g(\mathbf{z}_1), \dots, g(\mathbf{z}_M)\} \wedge \{p_1, \dots, p_M\}$$

Successivamente, occorre verificare di poter fondere due elementi $g(\mathbf{z}_k) = g(\mathbf{z}_i)$ (con $i \neq k$) in un unico elemento caratterizzato dal valore comune assunto con probabilità $p_i + p_k$.

Nei moderni calcolatori, l'uso di grandi numeri di bit per rappresentare un'informazione rende possibile l'incontro di grandezze digitali che possono assumere un numero M elevato di valori; in tale situazione, è poco opportuno fare ricorso al modello di numero discreto, piuttosto che al classico modello continuo, e la stima della PDF di Y può essere condotta passando da una collezione di N realizzazioni di X ad una collezione di N realizzazioni di Y e poi risalendo ad una stima della PDF (o CDF) tramite la loro versione empirica per N elevato. L'alternativa è quella di usare il teorema di trasformazione di variabile aleatoria, che esprime direttamente il legame tra le due PDF.

IL TEOREMA DI TRASFORMAZIONE DI UN VETTORE ALEATORIO

La trasformazione di un vettore aleatorio n – dimensionale X tramite una funzione vettoriale deterministica g , genera un nuovo vettore aleatorio n – dimensionale Y la cui densità è legata al vettore di partenza mediante il teorema di trasformazione di vettori aleatori; la dimostrazione di questo teorema passa per la seguente uguaglianza:

$$\int_D f_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{g^{-1}(D)} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Con $g^{-1}(D)$ l'immagine inversa del dominio D attraverso la funzione g . Si assume per semplicità che quest'ultima assuma in ingresso e in uscita un vettore di dimensione n e che il suo dominio si possa partizionare in k insiemi E_i (si suppone essere un'infinità numerabile) in cui sia invertibile. Detto D_{y_0} un intorno sufficientemente piccolo di \mathbf{y}_0 , si indichi con D_{x_i} l'intorno corrispondente in E_i attraverso l'applicazione g , centrato in \mathbf{x}_i e definito come la soluzione in E_i dell'equazione:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$$

Se la soluzione non esiste $D_{x_i} = \emptyset$. Risulta:

$$\int_{D_{y_0}} f_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \int_{D_{x_i}} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Usando il teorema della media:

$$f_Y(\bar{\mathbf{y}} \in D_{y_0}) |D_{y_0}| = \sum_{i=1}^k f_X(\bar{\mathbf{x}} \in D_{x_i}) |D_{x_i}|$$

Tenendo conto che, per i teoremi sul cambio di variabile negli integrali multipli:

$$|D_{y_0}| = \int_{D_{y_0}} d\mathbf{y} = \int_{D_{x_i}} |J_g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = |J_g(\bar{\mathbf{x}} \in D_{x_i})| |D_{x_i}|$$

$$|D_{x_i}| = \int_{D_{x_i}} d\mathbf{x} = \int_{D_{y_0}} |J_{g_i^{-1}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = |J_{g_i^{-1}}(\bar{\mathbf{y}} \in D_{y_0})| |D_{y_0}|$$

Intorno a \mathbf{y}_0 si ottiene la seguente relazione:

$$f_Y(\mathbf{y}_0) = \sum_{i=1}^k f_X(\mathbf{x}_i) |J_{g_i^{-1}}(\mathbf{y}_0)| = \sum_{i=1}^k \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{|J_g(\mathbf{x}_i)|}$$

Dove si è indicato con $|J_g(\mathbf{x})|$ il determinante della matrice Jacobiana della funzione g nel punto \mathbf{x}_i .

Si noti che \mathbf{x}_i dipende da \mathbf{y}_0 anche se non esplicitamente denotato, essendo la soluzione dell'equazione $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$; se in E_i non ci sono soluzioni, manca l' i -esimo addendo della sommatoria appena enunciata.

La formula generale del teorema di trasformazione può essere usata per valutare la PDF del vettore trasformato (Y) quando si conosce la PDF del vettore trasformando (X) e la matrice Jacobiana della trasformazione (g) diretta o inversa. L'alternativa è usare la procedura delineata nei capitoli dedicati alle trasformazioni di variabili aleatorie, tipicamente di più semplice utilizzo tramite il ricorso a software di elaborazione.

Un'estensione della funzione g (assunta invertibile in ciascuno dei k insiemi E_i in cui si partiziona \mathbb{R}^n) assume che l'unione di ogni E_i non formi l'intero \mathbb{R}^n ma che esista un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti \mathbf{y}_p tali che l'equazione ammetta soluzione in tutto un intero dominio D_{y_p} :

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_p \Leftrightarrow \mathbf{x} \in D_{y_p}$$

In tal caso, l'unione di tutti gli E_i e di tutti i D_{y_p} forma \mathbb{R}^n . Alla formula appena dimostrata per il calcolo di $f_Y(\mathbf{y}_0)$ si somma il contributo dovuto a questi punti di incompleta invertibilità di g e l'espressione completa della PDF di Y diventa:

$$f_Y(\mathbf{y}_0) = \sum_{i=1}^k \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{|J_g(\mathbf{x}_i)|} + \sum_{p=1}^P \left(\int_{D_{y_p}} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \delta(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_p)$$

Si propone l'esempio di trasformazioni vettoriali elementari, somma e sottrazione a due addendi, per applicare il teorema di trasformazione dei vettori aleatori. Sia considerato:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix} = g \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) = g(\mathbf{X})$$

Per la funzione vettoriale considerata esiste sempre la proprietà di invertibilità, con $k = 1$ e $E_1 = \mathbb{R}^2$, risultando in:

$$\mathbf{x}_y = \mathbf{x}_{[y_1 \ y_2]} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Inoltre, per la funzione considerata:

$$|J_g(x)| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| = 2$$

Per cui:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(\mathbf{x}_y) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

Si consideri la **funzione del vettore aleatorio X che permuta in ordine arbitrario le componenti del vettore stesso**; ovviamente, il vettore permutato Y è anch'esso un vettore aleatorio. Si vuole trovare l'espressione della PDF $f_Y(y)$ del vettore permutato in termini della PDF $f_X(x)$ del vettore in ingresso alla funzione; denotando l'operazione di permutazione con g_P , si può scrivere:

$$Y = g_P(X)$$

Ovviamente, questa funzione è invertibile su tutto \mathbb{R}^n e la sua inversa è g_P^{-1} . Si può applicare la formula di trasformazione con $k = 1$, $x_1 = g_P^{-1}(y)$ e matrice Jacobiana composta da un solo uno su ogni riga e zero in tutte le altre posizioni della riga in modo da avere un solo uno per colonna:

$$|J_{g_P}(x)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \forall x$$

Quindi:

$$f_Y(y) = f_X(g_P^{-1}(y)) \Leftrightarrow f_X(x) = f_Y(g_P(x))$$

Questa relazione permette di dire che **occorre permutare l'ordine delle variabili della PDF per ottenere la PDF del vettore permutato**.

Detto ciò, si passa a dimostrare un teorema in precedenza solo annunciato.

DIMOSTRAZIONE GENERALE TEOREMA FONDAMENTALE DELLA MEDIA

Ipotesi:

$\forall X$ vettore aleatorio : $f_X(x)$ è la sua PDF

$\forall g$ funzione vettoriale

Tesi:

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$$

Dimostrazione:

Detta $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$:

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} f_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} \sum_{i=1}^k \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{|J_g(\mathbf{x}_i)|} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{|J_g(\mathbf{x}_i)|} d\mathbf{y}$$

Effettuando un cambio di variabile con la funzione g definita tra E_i e \mathbb{R}^n :

$$E_i \leftrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y} = g(\mathbf{x})$$

Allora:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{|J_g(\mathbf{x}_i)|} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} g(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{|J_g(\mathbf{x})|} |J_g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

CVD

Si è usata la proprietà per cui:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_i(g(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

Che vale se $\mathbf{x} \in E_i$, dal momento in cui \mathbf{x}_i è la soluzione dell'equazione $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.

COMPONENTI ALEATORIE DI VETTORI ALEATORI

Considerato un vettore aleatorio \mathbf{X} e la sua p -esima componente X_p ; la funzione di estrazione di tale componente è una funzione del vettore aleatorio \mathbf{X} , quindi restituirà un numero aleatorio. In questo capitolo si vuole determinare la relazione che sussiste tra la PDF del vettore aleatorio \mathbf{X} e la PDF della variabile aleatoria X_p .

Tra l'eventualità che X_p appartenga al dominio D e l'eventualità che \mathbf{X} appartenga al dominio D^n , definito come l'insieme di tutti i vettori n -dimensionali la cui p -esima componente appartiene a D , sussiste una relazione logica di equivalenza; pertanto:

$$\begin{aligned} P[X_p \in D] &= [\mathbf{X} \in D^n] = \int_{D^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_D \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D f_{X_p}(x_p) dx_p \end{aligned}$$

L'integrazione avviene su tutto l'asse reale per ogni componente, ad eccezione della p – esima che avviene su D . L'ultima relazione discende dalla proprietà fondamentale della PDF di una variabile aleatoria (ovvero quella per cui il suo integrale su un dominio coincide con la probabilità che la variabile appartenga a tale dominio). **Confrontando gli ultimi termini dell'uguaglianza** si deduce che:

$$f_{X_p}(x_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots, dx_{p-1}, dx_{p+1}, \dots, dx_n$$

Questa PDF viene chiamata **marginale**, mentre quella $f_X(\mathbf{x})$ del vettore viene chiamata **congiunta di tutte le variabili aleatorie che compongono il vettore stesso**; la formula appena enunciata permette di **trovare la PDF marginale attraverso l'integrazione della PDF congiunta su tutte le componenti del vettore aleatorio ad eccezione della p – esima**, quella rispetto alla quale si vuole effettuare l'estrazione.

A partire dal vettore aleatorio \mathbf{X} , si consideri il vettore da esso estratto \mathbf{X}_e selezionando solo alcune componenti; si indichi con n_e la dimensione di \mathbf{X}_e e K l'insieme di cardinalità n_e contenente gli indici selezionati per estrarre il vettore in esame. Per semplicità, si considera il vettore estratto come composto dalle prime n_e componenti e quello non estratto dalle ultime $n - n_e$; ovviamente, visto che la funzione responsabile dell'estrazione è una **funzione del vettore aleatorio \mathbf{X} , il risultato sarà anch'esso una quantità vettoriale aleatoria**.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_e \\ \mathbf{X}_{ne} \end{bmatrix}$$

Si vuole ricavare la relazione esistente tra la PDF f_X del vettore aleatorio \mathbf{X} di partenza e quella del vettore estratto \mathbf{X}_e . Tra l'eventualità che \mathbf{X}_e appartenga al dominio $D \subseteq \mathbb{R}^{n_e}$ e l'eventualità che \mathbf{X} appartenga al dominio D^n , definito come l'insieme di tutti i vettori n – dimensionalni la cui e – esima estrazione appartiene a D ; pertanto:

$$P[\mathbf{X}_e \in D] = P[\mathbf{X} \in D^n] = \int_D \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_{ne} \end{bmatrix} \right) d\mathbf{x}_e d\mathbf{x}_{ne} = \int_D f_{\mathbf{X}_e}(\mathbf{x}_e) d\mathbf{x}_e$$

Le integrazioni successive alla prima (che è sull'insieme D) sono $n - n_e$, mentre l'ultima e la terzultima relazione discendono dalla proprietà fondamentale della PDF di un vettore aleatorio. Per confronto delle ultime due relazioni si deduce che:

$$f_{\mathbf{X}_e}(\mathbf{x}_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_{ne} \end{bmatrix} \right) d\mathbf{x}_{ne}$$

Per trattare il caso più generico di un insieme K di n_e valori degli indici di estrazione del vettore \mathbf{X}_e dal vettore \mathbf{X} , si denota con $\mathbf{Y} = g_p(\mathbf{X}) = [\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_{ne}^T]^T$ il vettore permutato a partire da \mathbf{X} tale che le componenti di quest'ultimo con indice in K formino le prime n_e componenti di \mathbf{Y} . Sulla base della relazione appena introdotta, si può scrivere la seguente:

$$f_{\mathbf{X}_e}(\mathbf{x}_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_{ne} \end{bmatrix} \right) dy_{ne}$$

Infatti, il vettore \mathbf{X}_e rappresenta il vettore estratto prendendo le prime n_e componenti del vettore \mathbf{Y} . Utilizzando la relazione sulle permutazioni introdotta precedentemente, relativa al caso in cui \mathbf{Y} è una permutazione del vettore \mathbf{X} , si può scrivere:

$$f_{X_e}(\mathbf{x}_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(g_p^{-1}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_{ne} \end{bmatrix}\right)\right) d\mathbf{y}_{ne}$$

Pertanto, per trovare la PDF del vettore estratto occorre integrare la PDF congiunta di partenza f_X su tutte le sue componenti non estratte dal vettore di partenza.

Sviluppando l'esempio della trasformazione elementare, è stata determinata la densità del vettore \mathbf{Y} in funzione della densità del vettore \mathbf{X} :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) = g(\mathbf{X})$$

Estraendo la prima componente del vettore \mathbf{Y} è possibile determinare la densità della somma delle due variabili aleatorie X_1 e X_2 che compongono il vettore \mathbf{X} ; utilizzando la formula della PDF marginale:

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) dy_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) dy_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2f_{X_1 X_2}(z, y_1 - z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2}(z, y_1 - z) dz \end{aligned}$$

Dopo aver posto:

$$z = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Se le due variabili sono indipendenti, la convoluzione delle PDF degli operandi fornisce la PDF del risultato:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z) f_{X_2}(y_1 - z) dz = (f_{X_1} * f_{X_2})(y_1)$$

Si consideri un vettore aleatorio \mathbf{X} , di cui si calcola la PDF congiunta e dalla quale si estraggono le PDF marginali, talvolta sussiste la seguente relazione:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{p=1}^n f_{X_p}(x_p)$$

Questa proprietà si esprime sinteticamente dicendo che tutte le n componenti di un vettore aleatorio sono indipendenti tra loro, ovvero che \mathbf{X} è un vettore a componenti indipendenti tra di loro; inoltre, ogni estrazione che parte da \mathbf{X} gode della stessa proprietà.

Quando sussiste l'indipendenza tra le n componenti di un vettore aleatorio \mathbf{X} , è possibile passare dalla collezione di N realizzazioni del vettore a ciascuna PDF marginale $f_{X_p}(x_p)$ per tutti i valori $p \in [1, n]$; in tale passaggio, il valore di N richiesto per avere una buona approssimazione è quello relativo al caso monodimensionale (in pratica tutte le densità marginali possono essere ben stimate anche se il valore di n è elevato).

IL CONDIZIONAMENTO TRA DUE VARIABILI ALEATORIE

Prima di affrontare il **concetto di condizionamento**, si vuole introdurre una certa **distinzione tra condizionamento, causalità e casualità**. Quando **tra due variabili X e Y esiste un legame di causalità**, il fatto che X assuma un certo valore è causa dell'alterazione del valore di Y ; chiaramente il legame di causalità induce anche un condizionamento (come sarà a breve più chiaro). Quest'ultimo gode di **simmetria**, cioè se X è condizionata da Y allora anche Y sarà condizionata da X , ma non è vero per la causalità, che è una proprietà non simmetrica. Tra le due variabili **esiste condizionamento ma non causalità quando i valori da esse assunte sono entrambi l'effetto di un'altra stessa causa**. Differente è il discorso sulla **casualità**, che si riferisce ad uno scenario in cui **non sussistono né legami causali né legami di condizionamento e la conoscenza del valore di X non porta nessuna informazione riguardo Y** ; un legame di causalità può anche essere espresso sotto termini di **indipendenza**.

L'**indipendenza e il condizionamento tra variabili aleatorie** (o vettori aleatori) sono due concetti strettamente legati tra di loro; una **variabile Y esercita un condizionamento sulla variabile X** quando la **conoscenza del valore di Y modifica la PDF che descrive la variabile X** . L'esistenza di un condizionamento si rileva osservando la **PDF del vettore bidimensionale $[X, Y]^T$** ; in particolare, **se sussiste indipendenza** tra le due componenti **non esiste un condizionamento**, se invece **le due variabili non sono indipendenti** allora **le due PDF che le descrivono** (prima di ricevere informazioni) **sono le PDF marginali che si estraggono dalla PDF congiunta della coppia**. Non appena si acquisisce qualche informazione sulla variabile X , la PDF di Y si modifica per effetto delle informazioni stesse; risulta quindi di interesse individuare la nuova PDF che descrive Y .

Si proceda affrontando **il caso più semplice**, in cui si considerano **due variabili aleatorie binarie**:

$$X \in \{0,1\} \wedge Y \in \{0,1\}$$

Si supponga di **disporre di una collezione di N realizzazioni della coppia di variabili, $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$** ; si consideri il sottoinsieme della collezione relativa a X che contenga solo $x_i = 1$ e si valuti la frequenza empirica con cui la variabile assume tale valore:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{1\}}(x_i) = \frac{N_x}{N}$$

Dove si è indicato con N_x il **numero di volte in cui nella collezione appare il valore 1**. Si consideri, poi, il **sottoinsieme della collezione relativa a Y che contenga solo $y_i : x_i = 1$** e si valuti la **frequenza empirica con cui la variabile assume il valore 1**:

$$\frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \chi_{\{1\}}(y_{e,i}) = \frac{N_e}{N_x}$$

Dove si è indicato con N_e il **numero di volte in cui nella collezione appare il valore 1**. La frequenza empirica con cui entrambi gli elementi della coppia valgono, $(X, Y) = (1,1)$, uno si può scrivere come:

$$\frac{N_e}{N} = \frac{N_x}{N} \frac{N_e}{N_x}$$

Per $N \rightarrow +\infty$, si indicano:

- **Probabilità che si verifichi l'eventualità $(X, Y) = (1, 1)$** la quantità

$$\frac{N_e}{N}$$

- **Probabilità che si verifichi l'eventualità $X = 1$** la quantità

$$\frac{N_x}{N}$$

- **Probabilità che si verifichi l'eventualità $Y = 1$ ristretta ai casi in cui $X = 1$** la quantità

$$\frac{N_e}{N_x}$$

Si potrà sospettare un condizionamento se la frequenza empirica con cui si verifica l'eventualità $Y = 1$ sull'intera collezione è diversa dalla frequenza empirica con cui si presenta la stessa eventualità sul sottoinsieme di $y_i : x_i = 1$. Facendo tendere N all'infinito si potrà scrivere:

$$P[(X, Y) = (1, 1)] = P[Y = 1|X = 1]P[X = 1]$$

Indicando con $P[Y = 1|X = 1]$ il valore limite della frequenza empirica dell'evento $Y = 1$ condizionato dall'evento $X = 1$. In questi termini, si potrà sospettare un condizionamento se:

$$P[Y = 1|X = 1] \neq P[Y = 1]$$

In caso contrario, si potranno sostituire i termini di questa (falsa) disuguaglianza e scrivere:

$$P[(X, Y) = (1, 1)] = P[Y = 1]P[X = 1]$$

Si può notare l'esistenza di una perfetta simmetria: dalla sequenza di N realizzazioni si possono estrarre le N_y per cui $y_i = 1$ e valutare la frequenza empirica con cui la variabile Y assume tale valore:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{1\}}(y_i) = \frac{N_y}{N}$$

Si consideri, poi, il sottoinsieme della collezione relativa a X che contenga solo $x_i : y_i = 1$ e si valuti la frequenza empirica con cui la variabile assume il valore 1:

$$\frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \chi_{\{1\}}(x_{e,i}) = \frac{N_e}{N_y}$$

Dove si è indicato con N_e il numero di volte in cui nella collezione appare il valore 1. La frequenza empirica con cui entrambi gli elementi della coppia valgono, $(X, Y) = (1, 1)$, uno si può scrivere come:

$$\frac{N_e}{N} = \frac{N_y}{N} \frac{N_e}{N_y}$$

Si potrà sospettare un condizionamento se la frequenza empirica con cui si verifica l'eventualità $X = 1$ sull'intera collezione è diversa dalla frequenza empirica con cui si presenta la stessa eventualità sul sottoinsieme di $x_i : y_i = 1$. Facendo tendere N all'infinito si potrà scrivere:

$$P[(X, Y) = (1, 1)] = P[X = 1|Y = 1]P[Y = 1]$$

Indicando con $P[X = 1|Y = 1]$ il valore limite della frequenza empirica dell'evento $X = 1$ condizionato dall'evento $Y = 1$. In questi termini, si potrà sospettare un condizionamento se:

$$P[X = 1|Y = 1] \neq P[X = 1]$$

In caso contrario, si potranno sostituire i termini di questa (falsa) disuguaglianza e scrivere:

$$P[(X, Y) = (1, 1)] = P[X = 1]P[Y = 1]$$

In base alla dualità appena messa in luce, è possibile scrivere che:

$$P[(X, Y) = (1, 1)] = P[Y = 1|X = 1]P[X = 1] = P[X = 1|Y = 1]P[Y = 1]$$

Oppure:

$$P[X = 1|Y = 1] = P[Y = 1|X = 1] \frac{P[X = 1]}{P[Y = 1]}$$

Quindi si può conoscere come il condizionamento $Y = 1$ agisce sulla variabile X se si conosce come il condizionamento $X = 1$ agisce sulla variabile Y . Infine, si notino le seguenti relazioni:

- $N_y - N_e$ è il numero di elementi della collezione per cui $(x_i, y_i) = (0, 1)$;
- $N - N_x$ è il numero di elementi della collezione per cui $x_i = 0$;
- $(N_y - N_e)/(N - N_x)$ è la frequenza empirica dell'evento $Y = 1$ tra gli elementi della collezione per cui $x_i = 0$ (e al limite per $N \rightarrow +\infty$ tende a $P[Y = 1|X = 0]$);

Infatti:

$$\frac{N_y}{N} = \frac{N_e + (N_y - N_e)}{N} = \frac{N_e}{N} + \frac{N_y - N_e}{N} = \frac{N_e}{N_x} \frac{N_x}{N} + \frac{N_y - N_e}{N - N_x} \frac{N - N_x}{N}$$

E per $N \rightarrow +\infty$:

$$P[Y = 1] = P[Y = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Y = 1|X = 0]P[X = 0]$$

Da cui è possibile aggiornare la formula precedente:

$$P[X = 1|Y = 1] = \frac{P[Y = 1|X = 1]P[X = 1]}{P[Y = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Y = 1|X = 0]P[X = 0]}$$

Questa nuova relazione mostra chiaramente come sia possibile conoscere l'effetto del condizionamento di Y su X se si conosce quantitativamente il condizionamento inverso e si può scrivere anche in relazione al condizionamento $Y = 0$:

$$\begin{aligned} P[X = 1|Y = 0] &= \frac{P[Y = 0|X = 1]P[X = 1]}{P[Y = 0|X = 1]P[X = 1] + P[Y = 0|X = 0]P[X = 0]} \\ &= \frac{(1 - P[Y = 1|X = 1])P[X = 1]}{(1 - P[Y = 1|X = 1])P[X = 1] + (1 - P[Y = 1|X = 0])P[X = 0]} \end{aligned}$$

In maniera del tutto duale:

$$\begin{aligned} P[Y = 1|X = 1] &= \frac{P[X = 1|Y = 1]P[Y = 1]}{P[X = 1|Y = 1]P[Y = 1] + P[X = 1|Y = 0]P[Y = 0]} \\ P[Y = 1|X = 0] &= \frac{(1 - P[X = 1|Y = 1])P[Y = 1]}{(1 - P[X = 1|Y = 1])P[Y = 1] + (1 - P[X = 1|Y = 0])P[Y = 0]} \end{aligned}$$

Per estendere quanto detto finora al caso di vettori aleatori, si definisce la seguente variabile:

$$X = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mathbf{X} \in D_x \\ 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} \notin D_x \end{cases}$$

Che è chiaramente una **variabile aleatoria binaria** che assume un valore piuttosto che un altro in corrispondenza dell'appartenenza del vettore aleatorio al dominio $D_x \subseteq \mathbb{R}^n$. Analogamente:

$$Y = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mathbf{Y} \in D_y \\ 0 \Leftrightarrow \mathbf{Y} \notin D_y \end{cases}$$

Queste relazioni tra variabili e vettori aleatori permettono di affermare che:

$$P[X = 1] = P[X \in D_x] \wedge P[Y = 1] = P[Y \in D_y]$$

Quindi:

$$P[X \in D_x, Y \in D_y] = P[X \in D_x | Y \in D_y]P[Y \in D_y]$$

La questione fondamentale diventa **la ricerca di un possibile condizionamento**, ovvero **la possibilità che la condizione $Y \in D_y$ induca una variazione della densità del vettore X** , denotata con:

$$f_{X|Y \in D_y}(\mathbf{x})$$

In base alla stessa definizione di PDF, **la probabilità che il nuovo vettore condizionato, $X|Y \in D_y$ appartenga a D_x è valutata integrando questa nuova PDF su D_x** :

$$P[X \in D_x | Y \in D_y] = \int_{D_x} f_{X|Y \in D_y}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Inoltre, poiché la densità non condizionata del vettore \mathbf{Y} e la probabilità che entrambi i vettori appartengano ai domini possono essere scritte:

$$P[Y \in D_y] = \int_{D_y} f_Y(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

$$P[X \in D_x, Y \in D_y] = \int_{D_x} \int_{D_y} f_{XY}(x, y) dx dy$$

Allora:

$$\int_{D_x} \int_{D_y} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{D_x} f_{X|Y \in D_y}(x) dx \int_{D_y} f_Y(y) dy$$

Tenendo conto della **reciprocità del condizionamento**:

$$\int_{D_x} \int_{D_y} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{D_x} f_X(x) dx \int_{D_y} f_{Y|X \in D_x}(y) dy$$

Supponendo i due vettori X e Y continui, facendo stringere i domini D_x e D_y intorno ai punti x e y , si ottiene la formula di fattorizzazione della PDF congiunta:

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$$

Con la quale è possibile **individuare anche la relazione tra le due densità condizionate**; in particolare, laddove $f_Y(y) \neq 0$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_{XY}(x, y) dx} = \frac{f_{Y|X}(y, x) f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_{Y|X}(y, x) f_X(x) dx}$$

Detta **formula di Bayes per il caso continuo**. Si prosegua considerando **due vettori aleatori discreti**:

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i | Y = y_j] P[Y = y_j] = P[Y = y_j | X = x_i] P[X = x_i]$$

Questa relazione può essere usata per **ottenere il legame tra le due probabilità condizionate**:

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[Y = y_j]} = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{\sum_l P[X = x_l, Y = y_j]} = \frac{P[Y = y_j | X = x_i] P[X = x_i]}{\sum_l P[Y = y_j | X = x_l] P[X = x_l]}$$

Detta **formula di Bayes per il caso discreto**. Si prosegua considerando **due vettori aleatori, uno continuo X e uno discreto Y** ; in questo caso, **facendo stringere il dominio D_x intorno al punto x** si ottiene:

$$\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy = P[Y = y_j] f_{X|Y}(x | Y = y_j) = f_X(x) P[Y = y_j | X = x]$$

Quest'uguaglianza è enunciata in relazione all'integrale doppio introdotto per il caso continuo quando D_y contiene il solo valore discreto y_j , cioè:

$$f_{X|Y}(x | Y = y_j) = f_{X|Y \in D_y}(x)$$

$$P[Y = y_j | X = x] = \lim_{D_x \rightarrow x} \frac{\int_{D_x} \int_{D_y} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{D_x} f_X(x) dx} = \frac{\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy}{f_X(x)}$$

Le due densità condizionate precedenti possono essere relazionate reciprocamente sulla base delle seguenti relazioni:

$$f_{X|Y}(x|Y = y_j) = \frac{\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy}{P[Y = y_j]} = \frac{\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{D_y} f_{XY}(x, y) dx dy} = \frac{P[Y = y_j | X = x] f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} P[Y = y_j | X = x] f_X(x) dx}$$

Detta **prima formula di Bayes per il caso misto**. Inoltre:

$$P[Y = y_j | X = x] = \frac{\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy}{f_X(x)} = \frac{\int_{D_y} f_{XY}(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}^n} f_{XY}(x, y) dy} = \frac{f_{X|Y}(x|Y = y_j) P[Y = y_j]}{\sum_l f_{X|Y}(x|Y = y_l) P[Y = y_l]}$$

Detta **seconda formula di Bayes per il caso misto**. Questa formula, scritta come:

$$P[Y = y_j | X = x] = \frac{f_{X|Y}(x|Y = y_j) P[Y = y_j]}{f_X(x)}$$

È cruciale per il progetto di un ricevitore ottimo.

Dalla formula di fattorizzazione della PDF congiunta si può **trovare la media di un vettore aleatorio X soggetto al condizionamento $Y = y$** , con Y vettore aleatorio continuo:

$$E[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

Ottenendo un **valor medio dipendente dal valore di y usato per il condizionamento**. Se poi si va a **mediare il risultato rispetto alla densità del vettore Y** , si ottiene proprio la **media di X** :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}^n} E[X|Y=y] f_Y(y) dy$$

Infatti, usando la media condizionata, la regola di Bayer per il caso continuo al secondo membro della relazione e le regole per ottenere la PDF marginale a partire dalla congiunta si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} E[X|Y=y] f_Y(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} x f_{XY}(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x \int_{\mathbb{R}^n} f_{XY}(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x) dx = E[X] \end{aligned}$$

Un **risultato analogo** può essere ottenuto se Y è un vettore discreto; detti $\{y_1, \dots, y_M\}$ i valori assunti da Y condizionatamente, si ottiene **dapprima la media condizionata della variabile $X_{Y=y_i}$ mediando rispetto alla sua densità $f_{X|Y}(x|Y = y_i)$** :

$$E[X_{Y=y_i}] = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x|Y=y_i) dx$$

Il risultato ottenuto **dipende dal valore condizionante y_i** ; successivamente, **se si va a mediare rispetto alla PDF di Y il risultato ottenuto**, si ottiene la **media di X** :

$$E[X] = \sum_{i=1}^M P[Y=y_i] E[X_{Y=y_i}]$$

La dimostrazione si ottiene sostituendo al secondo membro di $E[X_{Y=y_i}]$ nella formula ed usando la formula di Bayes per il caso misto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M P[Y=y_i] E[X_{Y=y_i}] &= \sum_{i=1}^M P[Y=y_i] \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x|Y=y_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} x P[Y=y_i] f_{X|Y}(x|Y=y_i) dx = \sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x) P[Y=y_i|X=x] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x) \left(\sum_{i=1}^M P[Y=y_i|X=x] \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x) dx = E[X] \end{aligned}$$

Un risultato analogo può essere ottenuto se X è un vettore discreto che assume i valori $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\}$. Si possono considerare i due casi sul vettore condizionante Y :

- Y è un vettore continuo

Si ottiene la media di $X_{|Y=y}$:

$$E[X_{|Y=y}] = \sum_{i=1}^M \mathbf{z}_i P[X=\mathbf{z}_i|Y=y]$$

Che dipende da y . Mediando rispetto alla PDF di Y si ottiene la media di X :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}^n} E[X_{|Y=y}] f_Y(y) dy$$

- Y è un vettore discreto

Si ottiene prima la media di $X_{|Y=y_i}$:

$$E[X_{|Y=y_i}] = \sum_{i=1}^M \mathbf{z}_i P[X=\mathbf{z}_i|Y=y_i]$$

E poi si media sulla PDF di Y per ottenere la media di X :

$$E[X] = \sum_{j=1}^M P[Y=y_j] E[X_{|Y=y_j}]$$

Pertanto, il teorema della media condizionata assume quattro forme diverse a seconda della natura continua o discreta dei vettori X e Y .

Si osserva, in ultima istanza, il caso degenero $X = Y$; la relazione di condizionamento diventa:

$$P[X \in D'_x | X \in D''_x] = \frac{P[X \in D'_x, X \in D''_x]}{P[X \in D''_x]} = \frac{P[X \in D'_x \cap D''_x]}{P[X \in D''_x]}$$

LA DESCRIZIONE SINTETICA DI UN VETTORE ALEATORIO

Sebbene la PDF costituisca una descrizione completa di un vettore aleatorio, è importante considerare i due parametri fondamentali per una sua descrizione sintetica. Il primo parametro descrive il punto intorno al quale è centrata la PDF ed è spesso indicato con la media $E[X]$; detta X_p la p -esima componente di X , si può facilmente verificare che la p -esima componente del vettore $E[X]$ è proprio la media della variabile estratta dalla p -esima componente del vettore, $E[X_p]$:

$$E[X] = [E[X_1], \dots, E[X_n]]^T$$

Il secondo parametro descrittivo definisce quanto sia variabile la densità congiunta intorno al punto centrale nelle varie direzioni possibili di allontanamento; questa caratteristica è descritta dalla matrice di covarianza del vettore aleatorio:

$$\mathbf{C} = E[(X - E[X])(X - E[X])^T] = E\left[\begin{bmatrix} X_1 - E[X_1] \\ \dots \\ X_n - E[X_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - E[X_1], \dots, X_n - E[X_n] \end{bmatrix}\right]$$

Il cui termine generico (p, k) è dato dalla mutua covarianza tra la p -esima e k -esima componente del vettore X :

$$\begin{aligned} E[(X_p - E[X_p])(X_k - E[X_k])] &= E[X_p X_k] - E[X_p E[X_k]] - E[X_k E[X_p]] + E[E[X_p] E[X_k]] \\ &= E[X_p X_k] - E[X_p] E[X_k] - E[X_p] E[X_k] + E[X_k] E[X_p] = E[X_p X_k] - E[X_p] E[X_k] \end{aligned}$$

Si può notare che i termini (p, p) -esimi della diagonale sono le varianze σ_p^2 dei termini X_p . Al di fuori della diagonale, si usa definire in maniera equivalente il coefficiente di relazione:

$$\rho_{p,k} = \frac{E[X_p X_k] - E[X_p] E[X_k]}{\sigma_p \sigma_k} \in [-1, 1]$$

Si può notare la simmetria della matrice di covarianza, per $n = 2$:

$$\begin{aligned} E[X] = [E[X_1], E[X_2]] \Rightarrow \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} E[X_1^2] - E[X_1]^2 & E[X_2 X_1] - E[X_2] E[X_1] \\ E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] & E[X_2^2] - E[X_2]^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si usa parlare di matrice di correlazione con riferimento alla matrice:

$$E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$$

Questa matrice coincide con quella di covarianza quando il vettore aleatorio è a media nulla, cioè quando $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$.

Pertanto, il numero di elementi di una descrizione sintetica di un vettore aleatorio è dato dalle n componenti del vettore delle medie e dagli $n + (n^2 - n)/2$ elementi che descrivono la matrice di covarianza. Il vettore aleatorio è detto **in correlato**, o che le sue componenti sono **in correlate**, quando la matrice di covarianza è diagonale.

Un'importante proprietà della matrice di covarianza è data dal fatto di essere una **matrice semidefinita positiva**; infatti, per ogni \mathbf{w} risulta che:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^T E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T] \mathbf{w} = E[\mathbf{w}^T (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{w}] \\ &= E\left[\left[\mathbf{w}^T (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])\right] [(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{w}]\right] = E[[\mathbf{w}^T (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])]^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è stata usata la prima delle formule di relazione tra segno di funzione e segno di media, con $a = 0$. La matrice è anche **definita positiva a meno che il vettore $\mathbf{X} - \mathbf{m}$ non giace in un sottospazio di \mathbb{R}^n** ; infatti, in tal caso si potrebbe trovare un vettore non nullo \mathbf{w} ortogonale a tutte le realizzazioni del vettore in esame (condizione essenziale affinché l'ultima relazione sia nulla).

La matrice di covarianza, in quanto reale e simmetrica, **ammette una decomposizione in autovettori ed autovalori reali**:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^T$$

Dove \mathbf{u}_i è l'autovettore i -esimo (vettore colonna), α_i l'autovalore corrispondente, \mathbf{U} la matrice degli autovettori la cui i -esima colonna è costituita da \mathbf{u}_i ($\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$) e Σ la matrice diagonale contenente gli n autovalori $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$. Gli autovettori sono definiti per essere ortonormali:

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_k = \delta(i - k)$$

O, equivalentemente:

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$$

Inoltre, considerando che la matrice identica ha tutti autovalori unitari:

$$\mathbf{I} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{U}^T$$

Ciò dimostra che la matrice \mathbf{U} è ortogonale, ovvero:

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$$

Tale relazione mostra anche che il determinante di \mathbf{U} è tale che il suo quadrato è unitario ($|\det \mathbf{U}| = 1$). Occorre usare la regola del determinante del prodotto come prodotto dei determinanti delle singole matrici all'espressione precedente, e tenere conto che la trasposizione non incide sul determinante; applicando questa stessa regola alla matrice \mathbf{C} si dimostra semplicemente che:

$$\det C = \det \Sigma = \prod_{i=1}^n \alpha_i$$

A partire da un vettore \mathbf{X} è interessante considerare il vettore $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \mathbf{X}$, la cui i -esima componente $Y_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{X}$ è la proiezione del vettore \mathbf{X} sull' i -esimo autovettore e costituisce quindi una variabile aleatoria. Data la definizione di \mathbf{Y} , si può scrivere:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n Y_i \mathbf{u}_i$$

Si può facilmente verificare che \mathbf{Y} è un vettore incorrelato; infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_Y &= E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = E[(\mathbf{U}^T \mathbf{X})(\mathbf{U}^T \mathbf{X})^T] = E[\mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{U}] = \mathbf{U}^T E[\mathbf{X} \mathbf{X}^T] \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_X \mathbf{U} = \mathbf{U}^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^T) \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \Sigma \mathbf{I} = \Sigma \end{aligned}$$

Ma Σ è diagonale e il vettore \mathbf{Y} è incorrelato; inoltre, si vede che la componente Y_1 ha varianza α_1 , maggiore di tutte le altre, mentre la n -esima componente ha varianza α_n , minore di tutte le altre. Segue che nella definizione precedente ($\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$) la componente $Y_1 \mathbf{u}_1$ è quella più importante, siccome corrisponde al massimo autovalore, e viene detta componente principale del vettore \mathbf{X} .

Si consideri un vettore di due variabili aleatorie, $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, la cui matrice di covarianza presenta sulla diagonale le varianze σ_1^2 e σ_2^2 , mentre fuori è presente la quantità $E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])]$. Il coefficiente di correlazione delle due variabili aleatorie è definito come:

$$\rho = \frac{E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])]}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Pertanto, la matrice di covarianza di \mathbf{X} si scrive come:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{C} = (1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

Siccome \mathbf{C} è definita semipositiva, il suo determinante è non negativo, quindi:

$$|\rho| \leq 1$$

Quindi, il coefficiente di correlazione varia dal caso $\rho = 0$ (incorrelazione delle due variabili aleatorie) al caso $|\rho| = 1$. Si parla di correlazione diretta quando $\rho > 0$ e di correlazione inversa quando $\rho < 0$.

IL VETTORE GAUSSIANO E LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Il vettore \mathbf{X} si dice gaussiano, o anche normale, se la sua PDF è:

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\det \mathbf{M}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}$$

Bisogna verificare che la PDF appena enunciata è ben definita; in prima battuta, si rende necessario che la matrice \mathbf{M} sia quadrata, altrimenti non sarebbe possibile definire la forma quadratica nella formula. Inoltre, si può ritenere che essa sia simmetrica, in quanto una componente antisimmetrica non influenzerebbe la forma quadratica (ha diagonale nulla e elementi (i, k) uguali a elementi (k, i) , quindi $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 0 \forall \mathbf{x}$). In quanto reale e simmetrica, \mathbf{M} ha autovalori reali.

La PDF non è ben definita se non è infinitesima all'infinito lungo qualsiasi direzione in cui ci si allontani dall'origine. Ciò comporta che tutti gli autovalori devono essere positivi; infatti, detto β_i un autovalore negativo relativo all'autovettore \mathbf{v}_i , al divergere di λ diverge anche il vettore $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \lambda \mathbf{v}_i$ mentre la forma quadratica tenderebbe a $-\infty$. Si può, quindi, scrivere:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{M} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) = \lambda \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \lambda \mathbf{v}_i = \lambda^2 \mathbf{v}_i^T \beta \mathbf{v}_i = \lambda^2 \beta_i$$

Ma la funzione non sarebbe infinitesima neanche se $\beta_i = 0$ per λ che diverge, il che preclude la possibilità che il suo integrale sia unitario su \mathbb{R}^n . Segue che, la funzione f_X è una PDF se \mathbf{M} è una matrice simmetrica e definita positiva.

Definita una base \mathbf{v}_i di autovettori ortonormali con relativi autovalori, si può rappresentare la matrice \mathbf{M} come:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}_{\beta} \mathbf{V}^T \wedge \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \wedge \boldsymbol{\Sigma}_{\beta} = \text{diag}[\beta_1, \dots, \beta_n]$$

Come visto in precedenza, **la matrice di autovettori è ortogonale ($\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$) con determinante unitario in modulo ($|\det \mathbf{V}| = 1$)**, dal momento in cui:

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{V} \cdot \det \boldsymbol{\Sigma}_{\beta} \cdot \det \mathbf{V}^T = \det \boldsymbol{\Sigma}_{\beta} = \prod_{i=1}^n \beta_i$$

Si considera il caso in cui il vettore $\mathbf{Y} : \mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$ precedentemente introdotto abbia **componenti gaussiane ed indipendenti**. Avendo una **matrice di covarianza diagonale**, $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ e α_i varianza di Y_i , l'**assunzione di gaussianità di Y_i** consente di scrivere la sua PDF come:

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\alpha_i}(y_i - E[Y_i])}$$

L'**assunzione di indipendenza**, invece, consente di scrivere la densità del vettore di \mathbf{Y} come prodotto delle PDF marginali:

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\alpha_i}(y_i - E[Y_i])} = \left(\frac{\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i^{-1} (y_i - E[Y_i])^2} \\ &= \left(\frac{\det \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - E[\mathbf{Y}])^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - E[\mathbf{Y}])} \end{aligned}$$

Dall'espressione ottenuta si può notare che **il vettore considerato è un vettore gaussiano**, a media $E[\mathbf{Y}]$ e matrice $M = \Sigma^{-1}$ per cui, almeno in questo caso, **la matrice della PDF gaussiana è l'inverso della matrice di covarianza**.

Si consideri il vettore : $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$, di cui \mathbf{Y} contiene le proiezioni sui suoi autovettori. Conservando l'assunzione precedente di \mathbf{Y} con componenti gaussiane e indipendenti, **si trovi la PDF di \mathbf{X} usando il teorema di trasformazione di vettore aleatorio**. In tal caso, si ha **un'unica soluzione dell'equazione collegata alla trasformazione**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{U}^T\mathbf{x}$$

Ed il modulo del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale proprio $|\det \mathbf{U}|$; pertanto:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{|\det \mathbf{U}|} = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \left(\frac{\det \Sigma^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T\mathbf{x}-E[\mathbf{Y}])^T\Sigma^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{x}-E[\mathbf{Y}])} \\ &= \left(\frac{\det \Sigma^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T\mathbf{x}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T E[\mathbf{Y}])^T\Sigma^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{x}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T E[\mathbf{Y}])} \\ &= \left(\frac{\det \Sigma^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{U}E[\mathbf{Y}])^T\mathbf{U}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^T(\mathbf{x}-\mathbf{U}E[\mathbf{Y}])} \\ &= \left(\frac{\det(\mathbf{U}^T\Sigma\mathbf{U})^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{U}E[\mathbf{Y}])^T(\mathbf{U}^T\Sigma\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{U}E[\mathbf{Y}])} \\ &= \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-E[\mathbf{X}])^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-E[\mathbf{X}])} \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\mathbf{U}^T\Sigma\mathbf{U} = \mathbf{C}$ e che $E[\mathbf{X}] = \mathbf{U} \cdot E[\mathbf{Y}]$ (per la linearità della media). Segue che **anche il vettore \mathbf{X} è gaussiano** e quella appena descritta è la forma usualmente fornita per la **PDF gaussiana**:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-E[\mathbf{X}])^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-E[\mathbf{X}])}$$

Si può associare la matrice \mathbf{M} del caso generale con l'inversa della matrice di covarianza \mathbf{C} del vettore \mathbf{X} . Questo risultato dimostra in generale che **la forma generale**, con \mathbf{M} reale, simmetrica e definita positiva, **costituisce una valida PDF**, che **il vettore \mathbf{m} presente in tale definizione è la media del vettore in esame** e con \mathbf{M} l'inversa della matrice di covarianza dello stesso vettore.

Per riassumere il processo sviluppato finora, si è considerata una funzione del tipo generale, si è costruito dapprima un vettore \mathbf{Y} e poi un vettore \mathbf{X} che avessero come PDF una funzione di quel tipo e come matrice di covarianza l'inverso della matrice della funzione considerata.

Un'ulteriore proprietà importante dei vettori gaussiani riguarda la loro **chiusura rispetto alle trasformazioni lineari**; definito il vettore \mathbf{X} con PDF gaussiana $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (appena dimostrata) e il vettore $\mathbf{Z} = \mathbf{AX}$, si dimostra la proprietà dapprima nel caso di una matrice \mathbf{A} quadrata e invertibile, applicando il teorema di trasformazione di vettore aleatorio con un'unica soluzione al problema di inversione

della trasformazione e con il valore assoluto del determinante del Jacobiano che coincide con il valore assoluto del determinante di \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f_X(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}) = |\det A|^{-1} \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}-E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}-E[\mathbf{X}])} \\
 &= |\det A|^{-1} \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}E[\mathbf{X}])} \\
 &= |\det A|^{-1} \left(\frac{\det \mathbf{C}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-AE[\mathbf{X}])^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{z}-AE[\mathbf{X}])} \\
 &= \left(\frac{\det \mathbf{A}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-AE[\mathbf{X}])^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{z}-AE[\mathbf{X}])} \\
 &= \left(\frac{\det \mathbf{A}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])^T (\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])} \\
 &= \left(\frac{\det \mathbf{C}_{\mathbf{Z}}^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])^T \mathbf{C}_{\mathbf{Z}}^{-1} (\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])}
 \end{aligned}$$

Ciò dimostra che anche **il vettore \mathbf{Z} è gaussiano**, con vettore delle medie $E[\mathbf{Z}] = E[\mathbf{AX}] = AE[\mathbf{X}]$ e matrice di covarianza $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = E[\mathbf{ZZ}^T] = E[\mathbf{AXX}^T \mathbf{A}^T] = AE[\mathbf{XX}^T] \mathbf{A}^T = \mathbf{ACA}^T$. Qualora **la matrice \mathbf{A} non fosse invertibile** (perché il suo numero di righe è minore di n ma comunque linearmente indipendenti), allora occorre **completarla aggiungendo un numero di righe sufficienti $\bar{\mathbf{A}}$ affinché sia invertibile**; in tal caso:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{AX} \\ \bar{\mathbf{AX}} \end{bmatrix}$$

Che è un vettore gaussiano perché la matrice $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}}]^T$ rispetta le ipotesi per presentare la dimostrazione appena fatta. Resta da dimostrare che **se \mathbf{Z} è gaussiano allora anche un vettore estratto da esso**, prendendo un certo numero di componenti, è **gaussiano**; si prenda in considerazione il vettore gaussiano:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x+n_y} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_y}$$

E si determini la PDF del vettore \mathbf{X} ; Per semplicità **si assume che il vettore delle medie di \mathbf{Z} sia nullo**, rendendo nullo anche il vettore delle medie di \mathbf{X} e \mathbf{Y} . La matrice di covarianza di \mathbf{Z} è scritta come:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \left[\mathbf{X}^T \mathbf{Y}^T \right] \right\} = \begin{bmatrix} E[\mathbf{XX}^T] & E[\mathbf{XY}^T] \\ E[\mathbf{YX}^T] & E[\mathbf{YY}^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_X & \mathbf{C}_{XY} \\ \mathbf{C}_{XY}^T & \mathbf{C}_Y \end{bmatrix}$$

Per invertire questa matrice si ricorre alla formula di inversione della matrice partizionata a blocchi:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\Delta^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} : \Delta = D - CA^{-1}B$$

Per cui:

$$\mathbf{C}_Z^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_X^{-1} + \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} & -\mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} : \Delta = \mathbf{C}_Y - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY}$$

Quindi, la forma quadratica nella PDF di \mathbf{Z} si scrive come:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T \mathbf{C}_Z \mathbf{z} &= [\mathbf{x}^T \mathbf{y}^T] \mathbf{C}_Z \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}^T \mathbf{y}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_X^{-1} + \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} & -\mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{x}^T \mathbf{y}^T] \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_X^{-1} + \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1}) \mathbf{x} + (-\mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1}) \mathbf{y} \\ (-\Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1}) \mathbf{x} + (\Delta^{-1}) \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= [(\mathbf{C}_X^{-1} + \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1}) \mathbf{x} + (-\mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1}) \mathbf{y}] \mathbf{x}^T \\ &\quad + [(-\Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1}) \mathbf{x} + (\Delta^{-1}) \mathbf{y}] \mathbf{y}^T \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY} \Delta^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Delta^{-1} \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{y}^T \Delta^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Per ottenere **la formula del determinante** occorre guardare alla seguente forma equivalente di tale matrice:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_{n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} & A^{-1}B \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} : \Delta = D - CA^{-1}B$$

Dove I_n indica la matrice identica di dimensione n . Il determinante della prima matrice è pari al **determinante di A** ; infatti, questo può essere determinato **procedendo lungo l'ultima colonna della matrice**, in cui ci sono **un solo elemento non nullo e pari ad uno**. Il coefficiente con cui tale elemento non nullo entra nel calcolo del determinante è **positivo**, per cui **la prima matrice ha determinante uguale a quello del minore rispetto all'ultima riga ed all'ultima colonna**. Per valutare il **determinante di tale minore** si procede **allo stesso modo**, fino a trovare dopo n_y passi il determinante di A . Allo stesso modo, si valuta che il determinante della seconda matrice al secondo membro dell'uguaglianza vale Δ ; pertanto:

$$\det \mathbf{C}_Z = \det \mathbf{C}_X \det \Delta$$

E la PDF può essere scritta come:

$$\begin{aligned} f_Z(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x+n_y}{2}} (\det \mathbf{C}_Z)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])^T \mathbf{C}_Z^{-1} (\mathbf{z}-E[\mathbf{Z}])} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x+n_y}{2}} (\det \mathbf{C}_X \det \Delta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})\right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x}{2}} (\det \mathbf{C}_X)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_y}{2}} (\det \Delta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})} \end{aligned}$$

Mentre la PDF di X si ottiene integrando su tutte le altre componenti del vettore Z :

$$\begin{aligned}
 f_X(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{n_y}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x+n_y}{2}} (\det \mathbf{C}_X \det \Delta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})} d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x}{2}} (\det \mathbf{C}_X)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^{n_y}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_y}{2}} (\det \Delta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})} d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x}{2}} (\det \mathbf{C}_X)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}}
 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che la funzione integranda è una valida PDF gaussiana e quindi il suo integrale sull'asse reale è unitario. **Usando la formula di Bayes per il caso continuo**, si può anche scrivere la PDF di $Y|_{X=x}$:

$$f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_y}{2}} (\det \Delta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})^T \Delta^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x})}$$

Il vettore Y è condizionato al fatto che X assuma il valore \mathbf{x} , rimane un vettore gaussiano ma il suo vettore delle medie non è più nullo (ma $\mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{x}$) e la sua matrice di covarianza non è più \mathbf{C}_y (ma $\Delta = \mathbf{C}_y - \mathbf{C}_{XY}^T \mathbf{C}_X^{-1} \mathbf{C}_{XY}$). Quindi, l'effetto del condizionamento è quello di modificarne il vettore delle medie e la matrice di covarianza.

Si consideri la variabile ottenuta dalla manipolazione delle X_i variabili aleatorie indipendenti tra di loro:

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \frac{S}{N}$$

La densità di S è:

$$f_S(s) = (f_{X_1} * \dots * f_{X_N})(s)$$

L'operazione di convoluzione tende ad allargare la PDF di S rispetto a quelle di X_i ; segue che la PDF di Y è:

$$f_Y(y) = N f_S(Ny)$$

Pertanto, la moltiplicazione per N dell'argomento y tende a restringere i valori di y per cui la PDF è significativamente diversa da zero; questo effetto è opposto a quello della convoluzione appena descritto, sebbene esso domini su quello dell'operazione di moltiplicazione. Assumendo che tutte le variabili X_i abbiano la stessa PDF, la varianza di Y si può scrivere:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}$$

Quindi, al crescere di N , la varianza è infinitesima, ovvero la media Y delle variabili X_i tende a diventare deterministica; infatti, quando la varianza tende a zero la PDF tende ad una delta di Dirac (in merito alla disuguaglianza di Chebichev) e, quindi, Y tende ad un numero reale per $N \rightarrow +\infty$. Questo risultato è usualmente chiamato legge dei grandi numeri.

Un altro elemento importante è **la tendenza verso una PDF gaussiana delle varie operazioni di convoluzione associate alla somma di variabili aleatorie**. Non solo, **accade che la PDF di S è gaussiana se le PDF delle variabili aleatorie indipendenti sono già gaussiane**; questo risultato è stato dimostrato con riferimento al vettore gaussiano ma lo si può anche vedere dal fatto che l'impulso gaussiano è l'autofunzione del prodotto di convoluzione. Accade anche che **le PDF che vanno in convoluzione hanno caratteristiche simili**, allora **la PDF di S** (o equivalentemente di Y) **tende ad essere gaussiana**.