FISICA GENERALE I

Prof. Annalisa Allocca – A.A. 2022/23

INDICE DEGLI ARGOMENTI

INFORMAZIONI PROPEDEUTICHE

GRANDEZZE FISICHE

Una **grandezza fisica** è una grandezza che si può misurare e quantificare oggettivamente. Tra le grandezze fisiche si trovano quelle **fondamentali**, che non derivano da nessuna altra grandezza e che compongono le seconde, quelle **derivate**. Le grandezze fisiche fondamentali sono sette:

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	l	Metro	m
Tempo	t	Secondo	s
Intensità luminosa	I	Candela	cd
Massa	m	Chilogrammo	kg
Intensità di corrente	i	Ampere	A
Temperatura	T	Kelvin	K
Quantità di sostanza	n	Mole	mol

La lunghezza, il tempo e la massa sono le grandezze utilizzate nella meccanica, quella parte della fisica che studia il movimento e le interazioni tra i corpi. Bisogna fare un appunto: dire massa e dire peso non è la stessa cosa, in quanto il peso è una forza risultante dal prodotto della massa per l'accelerazione di gravità di un pianeta.

Queste grandezze fondamentali hanno la loro origine in tempi diversi e con strumenti diversi, generalmente però si usavano dei **campioni** per definirle. Quando ci si è accorti che il campione in se e per se non era particolarmente stabile a causa di modifiche causate dal tempo, è iniziato il processo di aggiornamento delle definizioni delle grandezze fondamentali usando però delle **costanti fisiche o matematiche esatte** (che sono per definizione certe e immutabili) per dare una definizione certa e immutabile della grandezza (ad esempio il metro è definito in funzione della velocità della luce e il tempo in funzione delle oscillazioni di un atomo di cesio-132).

Dalle grandezze fisiche fondamentali dipendono le grandezze fisiche derivate, infatti operando con le unità di misura si possono ottenere nuove unità che facilitano la scrittura di una misura. Tuttavia, durante una misura va prestata attenzione all'**analisi dimensionale**, cioè allo studio delle unità di misura e di come esse si combinano nelle varie operazioni. Un esempio di analisi dimensionale è:

$$P = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[m][a]}{[l^2]} = \frac{[m][l][t^{-2}]}{[l^2]} = [m][l^{-1}][t^{-2}] = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

Ogni teoria scientifica va dimostrata sperimentalmente, cioè sviluppando una teoria, individuando le grandezze in gioco e misurarle con un esperimento riproducibile.

NOTAZIONE SCIENTIFICA

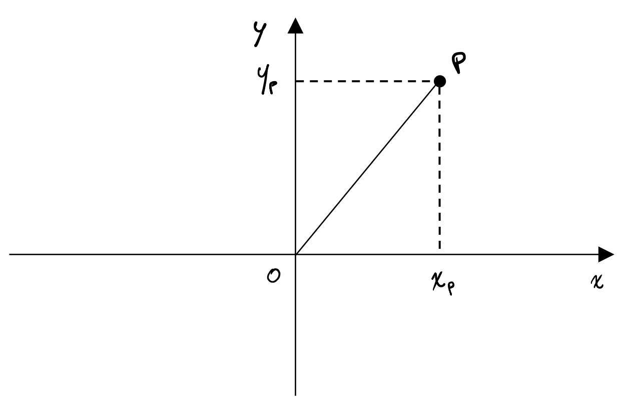
La **notazione scientifica** è utilizzata per scrivere un qualsiasi numero come **una potenza di dieci**. Essa è diventata uno standard in quanto ci permette di scrivere e operare con dei numeri eccessivamente piccoli o eccessivamente grandi in sole poche cifre. Per scrivere un numero in notazione scientifica si moltiplica una **mantissa** (un numero razionale da 1 a 9) per la potenza di dieci che rende il numero una mantissa.

$$3nm = 0{,}000000003m = 3 \cdot 10^{-9}m$$

In questo esempio per rendere $0{,}000000003$ una mantissa bisognava spostare la virgola di nove posizioni, quindi moltiplicando per 10^{-9}.

SISTEMI DI RIFERIMENTO

Il **sistema di riferimento** serve a determinare universalmente la posizione di un punto in uno spazio. Per fissare un sistema di riferimento si prende un punto come **origine** e vi si fanno passare due rette orientate e divise in unità di misura. Per determinare la posizione di un punto esso si proietta su uno dei due assi perpendicolarmente (arbitrario) individuando su entrambi altri due punti: le **coordinate**. Nel **sistema di riferimento cartesiano**, quello più comune ed utilizzato, gli assi sono perpendicolari, ciò significa che proiettare su un asse equivale a proiettare sull'altro; l'asse orizzontale viene chiamato **asse delle ascisse**, o **asse x**, mentre quello verticale è chiamato **asse delle ordinate**, o **asse y**, mentre le proiezioni su i due assi sono le **coordinate cartesiane**. I due assi hanno solitamente la stessa unità di misura ma questa non è una condizione necessaria.



Conoscendo le coordinate di un punto è possibile anche calcolare la **distanza da quel punto all'origine**, utilizzando il teorema di Pitagora (l'ipotenusa è la distanza e i cateti perpendicolari sono le due coordinate):

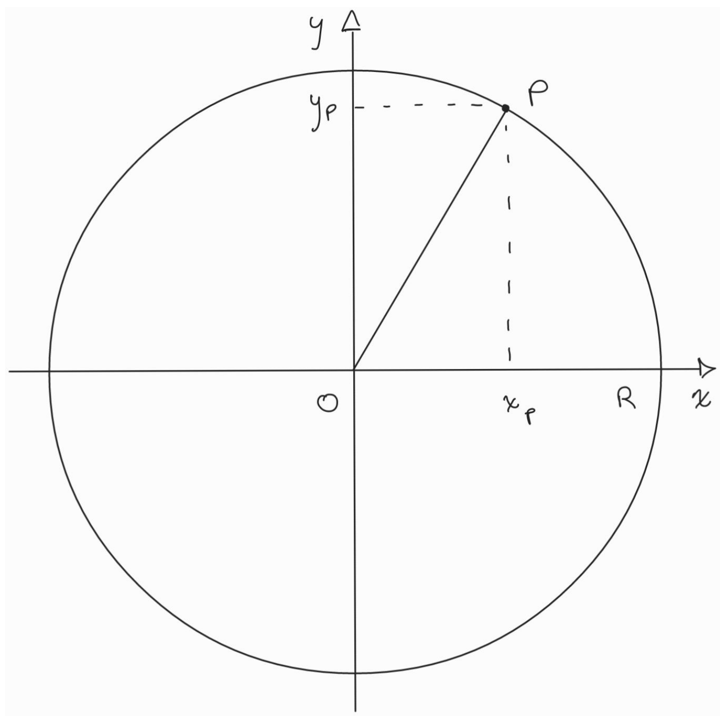
$$\overline{OP} = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2}$$

Ma dal momento in cui x_O e y_O sono entrambi 0, vengono esclusi.

TRIGONOMETRIA

La **trigonometria** è quella parte della matematica che studia i triangoli in funzione dei propri angoli e delle regole goniometriche. Essa si basa sul concetto di **circonferenza goniometrica**, cioè quella circonferenza di raggio 1 e centro in O.

$$x^2 + y^2 = 1$$



In una circonferenza goniometrica ogni punto ad essa appartenente individua un **angolo**, che si può descrivere come il rapporto tra l'arco che esso individua e il raggio della circonferenza stessa:

$$\theta = \frac{\overline{PR}}{r} = \frac{[l]}{[l]}$$

Dall'analisi dimensionale si nota che **gli angoli sono grandezze assolute** ma per convenzione esse vengono misurate arbitrariamente in **gradi** o **radianti**. Un radiante è definito come quell'angolo sotteso all'arco di circonferenza che misura quanto il raggio. Se provassimo a calcolare l'angolo in radianti dell'intera circonferenza C:

$$C = 2\pi r$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

In questo modo, conoscendo anche l'angolo giro in gradi (360°), si può impostare la proporzione per la **conversione di gradi e radianti**:

$$360°: 2\pi = \theta_{deg}: \theta_{rad}$$

Per convenzione quando si va a misurare un angolo lo si definisce positivo in senso orario e negativo in senso antiorario.

La trigonometria si basa su tre funzioni goniometriche fondamentali: il **seno**, il **coseno** e la **tangente**.

$$sen\theta = \frac{y_P}{r} = y_P \; ; \; cos\theta = \frac{x_P}{r} = x_P \; ; \; tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{y_P}{x_P}$$

Sulla circonferenza goniometrica esistono due modi di descrivere la posizione di un punto, usando le **coordinate cartesiane** (cioè le componenti lungo gli assi del punto) o le **coordinate polari** (indicando il raggio e l'angolo che individuano il punto):

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\theta \\ y = r \cdot sen\theta \end{cases}$$ COORDINATE CARTESIANE

Ora poiché *r* è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con le coordinate del punto come cateti, si può calcolare le coordinate polari usando il **teorema di pitagora** per il raggio e la **funzione inversa della tangente** per l'angolo:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(\frac{y}{x}) \end{cases}$$ COORDINATE POLARI

ERRORI

Tranne le costanti, ogni misura è soggetta ad un **errore**. Esistono diversi tipi di errore:

ERRORE MASSIMO: dipende dalla sensibilità dello strumento.

ERRORE SISTEMATICO: derivato dalla calibrazione errata del dispositivo, che viene detto starato;

ERRORE CASUALE: causato da condizioni esterne all'oggetto e allo strumento (una folata di vento muove il mio oggetto).

Per effettuare una misura quanto più accurata possibile bisogna **ripeterla diverse volte** e **quantificare l'errore**, elencando l'**incertezza**.

Per paragonare due grandezze e i loro rispettivi errori si deve calcolare l'**errore relativo**, cioè il rapporto dell'errore rispetto alla grandezza. Il numero che risulta sarà da 0 a 1 e potremo calcolarlo in percentuale moltiplicandolo per 100, ottenendo l'**errore percentuale**.

Quantificare l'errore significa anche determinare quante **cifre significative** scrivere quando si effettua la misura. Generalmente ogni cifra diversa da zero è una cifra significativa e lo zero lo è solo quando si trova a destra della virgola da solo.

Lavorando con le cifre significative è inevitabile non incontrare casi di **arrotondamento**. L'arrotondamento può essere:

PER ECCESSO: quando si va alla cifra dopo se l'ultima è maggiore di cinque

PER DIFETTO: quando si va alla cifra prima se l'ultima è minore di cinque

Quando l'ultima cifra è cinque la scelta è arbitraria.

GRANDEZZA SCALARE E GRANDEZZA VETTORIALE

Una grandezza si dice **scalare** quando è espressa unicamente da un numero e si dice **vettoriale** quando è composta dalla terna di **direzione**, **verso** e **modulo.**

DIREZIONE DI UN VETTORE: è la retta su cui il vettore giace;

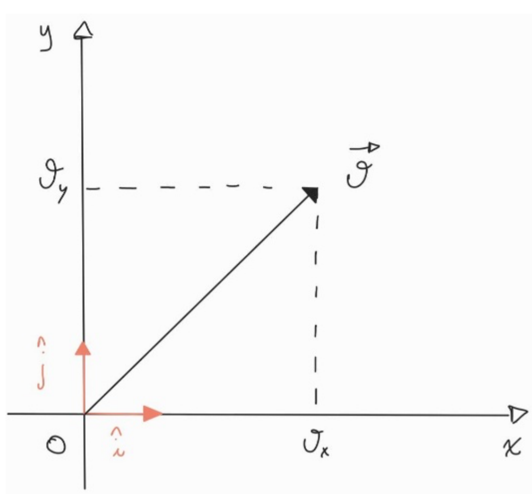
VERSO DI UN VETTORE: è l'orientamento del vettore sulla sua direzione; perciò, per un vettore esistono solo due versi;

MODULO DI UN VETTORE: è la quantità che caratterizza il vettore, può essere indicata dalla sua lunghezza ed è sempre positivo;

PUNTO DI APPLICAZIONE: è la coda del vettore ed è il punto in cui esso viene applicato. Sono chiamati **equipollenti** quei vettori che hanno lo stesso modulo, lo stesso verso e direzione parallela ma punto di applicazione diverso

Uno scalare viene indicato con una lettera minuscola mentre un vettore con una lettera in grassetto su cui viene posta o una linea o una freccia, $\vec{\boldsymbol{v}}$ o $\overline{\boldsymbol{v}}$, il modulo invece lo si indica o con la semplice lettera oppure con le due barre laterali, $|\overline{\boldsymbol{v}}|$.

Il **versore** è un vettore adimensionale con modulo unitario che, se moltiplicati per uno scalare (come, ad esempio, il modulo del vettore $\overline{\boldsymbol{v}}$) restituiscono un vettore ed è usato per indicare l'origine di qualcosa (ad esempio l'origine vettoriale di un vettore o degli assi cartesiani). I versori sono indicati con il simbolo ^ sulla lettera che lo caratterizza, $\hat{\boldsymbol{\imath}}$.



Esiste anche un altro modo di indicare i versori, cioè moltiplicando un vettore generico per l'inverso del suo modulo:

$$\hat{v} = \bar{v} \cdot \frac{1}{v}$$

Un vettore può essere descritto anche in funzione delle sue **componenti x e y**, individuate dalla proiezione della punta del vettore con la coda nell'origine.

$$\bar{v} \equiv (v_x;\ v_y)$$

Ma anche come somma del prodotto tra le componenti e i versori.

$$\bar{v} = v_x \cdot \hat{\imath} + v_y \cdot \hat{\jmath}$$

Il modulo del vettore può essere visto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo dove le componenti lungo gli assi sono i cateti.

$$|\bar{v}| = \sqrt{|v_x \cdot \hat{\imath}|^2 + \left|v_y \cdot \hat{\jmath}\right|^2} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Altri due modi di esprimere i vettori sono con le **funzioni goniometriche** e con le **coordinate polari**. Infatti, si può individuare la circonferenza che ha come raggio il modulo del vettore e origine nel suo punto di applicazione, individuando anche l'angolo θ; in questa situazione le componenti assumono i seguenti valori:

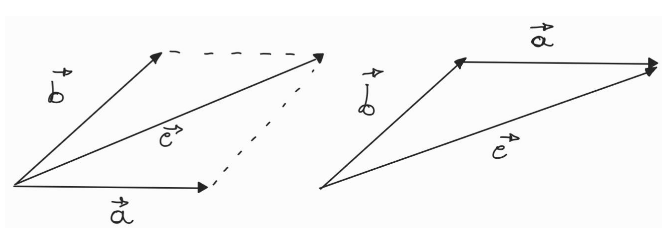
$\bar{v} = \begin{cases} v_x = v \cdot cos\theta \\ v_y = v \cdot sin\theta \end{cases}$ in coordinate cartesiane

$\bar{v} \equiv (v;\ \theta)$ in coordinate polari, dove v è il modulo e $\theta = arctg\,\frac{v_y}{v_x}$.

OPERAZIONI CON I VETTORI

Due vettori possono essere sia **graficamente che analiticamente sommati**. Graficamente ci vengono in aiuto le regole del **parallelogramma** e **punta-coda**.

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA: Si fanno coincidere le code dei due vettori e si tracciano le loro parallele partendo dalla punta dell'altro. Il vettore somma sarà quello che ha punto di applicazione nelle code dei due vettori e punta nell'intersezione delle proiezioni parallele.



REGOLA PUNTA-CODA: Si fa coincidere la punta di un vettore con la coda dell'altro. Il vettore somma sarà quello che ha punto di applicazione nella coda del primo e punta nella punta del secondo. Il metodo punta-coda è preferibile in quanto è reiterabile, cioè può essere applicato a più vettori

Per quanto riguarda la sottrazione si usa la **somma algebrica del primo vettore e del secondo cambiato di verso**:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$$

Analiticamente, invece, la somma di due vettori non è la somma dei moduli dei due vettori. Per ottenere il modulo di un vettore somma si deve comunque effettuare il teorema di pitagora sulle sue componenti, che saranno la **somma delle componenti omologhe dei vettori addendi**:

$$\bar{c} \equiv (a_x + b_x;\ a_y + b_y)$$

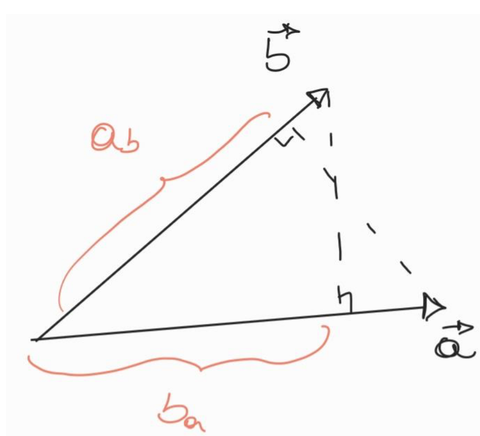
Per quanto riguarda i prodotti con i vettori ne esistono di tre tipi: **prodotto di un vettore per uno scalare**, **prodotto scalare di due vettori** e **prodotto vettoriale di due vettori**.

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE: è ancora un vettore ma il modulo viene calcolato moltiplicando il modulo del vettore con lo scalare. Il risultato è un vettore più lungo o più corto del precedente

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI: è uno scalare ed è commutativo; è il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro sul primo.

$$c = a \cdot b_a = a_b \cdot b = ab \cdot cos\theta$$

Dove θ è l'angolo tra i due vettori quando i punti di applicazione coincidono.



Tale formula può anche essere scritta seguendo il seguente procedimento:

$$\bar{a} * \bar{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) * (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) = a_xb_x\hat{\imath} * \hat{\imath} + a_xb_y\hat{\imath} * \hat{\jmath} + a_yb_x\hat{\jmath} * \hat{\imath} + a_yb_y\hat{y} * \hat{y}$$
$$= a_xb_x\hat{\imath} * \hat{\imath} + a_yb_y\hat{y} * \hat{y} = a_xb_x + a_yb_y$$

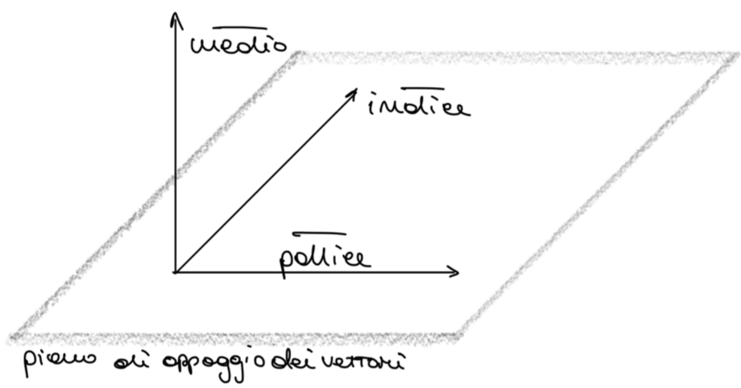
Tale risultato esce fuori in quanto il prodotto scalare di due versori ortogonali è 0 e di due versori paralleli 1.

$$\hat{\imath} * \hat{\imath} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \cdot \cos(0) = 1$$

$$\hat{\jmath} * \hat{\imath} = j \cdot i \cdot \cos(90°) = 0$$

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI: è un vettore che ha come direzione la retta perpendicolare al piano individuato dalle direzioni dei due vettori di cui si fa il prodotto, modulo pari a $|\overline{\boldsymbol{A}}||\overline{\boldsymbol{B}}| \cdot sen\theta$ (dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori) e verso dettato dalla **regola della mano destra**.

Per la regola della mano destra, posto il primo vettore sul pollice e il secondo sull'indice, il verso del vettore prodotto sarà indicato dal verso in cui punta il medio, che viene posto perpendicolarmente a pollice e indice



$$\overline{\boldsymbol{m}} = \overline{\boldsymbol{p}} \times \overline{\boldsymbol{\imath}}$$

Il prodotto vettoriale non è commutativo, infatti invertendo l'ordine dei vettori si otterrà un vettore con verso diverso da quello mostrato in figura.

Eseguendo il prodotto vettoriale sfruttando le componenti dei singoli vettori si ottiene:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{C}} = \overline{\boldsymbol{A}} \times \overline{\boldsymbol{B}} = &\left(A_x \cdot \hat{\imath} + A_y \cdot \hat{\jmath} + A_z \cdot \hat{k}\right) \times \left(B_x \cdot \hat{\imath} + B_y \cdot \hat{\jmath} + B_z \cdot \hat{k}\right) \\ &= (A_x \cdot \hat{\imath} \times B_x \cdot \hat{\imath}) + \left(A_x \cdot \hat{\imath} \times B_y \cdot \hat{\jmath}\right) + \left(A_x \cdot \hat{\imath} \times B_z \cdot \hat{k}\right) + \left(A_y \cdot \hat{\jmath} \times B_x \cdot \hat{\imath}\right) \\ &+ \left(A_y \cdot \hat{\jmath} \times B_y \cdot \hat{\jmath}\right) + \left(A_y \cdot \hat{\jmath} \times B_z \cdot \hat{k}\right) + \left(A_z \cdot \hat{k} \times B_x \cdot \hat{\imath}\right) + \left(A_z \cdot \hat{k} \times B_y \cdot \hat{\jmath}\right) \\ &+ \left(A_z \cdot \hat{k} \times B_z \cdot \hat{k}\right)\end{aligned}$$

Considerando i tre versori nello spazio, da questa scrittura si possono fare alcune considerazioni:

- $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = i \cdot i \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e questo vale per tutti i prodotti vettoriali con i versori omologhi;
- quando i versori non sono omologhi, il loro prodotto vettoriale restituisce il terzo versore con il verso dipeso dalla regola della mano destra.

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{C}} = \overline{\boldsymbol{A}} \times \overline{\boldsymbol{B}} &= \left(A_x \cdot \hat{\imath} \times B_y \cdot \hat{\jmath}\right) + \left(A_x \cdot \hat{\imath} \times B_z \cdot \hat{k}\right) + \left(A_y \cdot \hat{\jmath} \times B_x \cdot \hat{\imath}\right) + \left(A_y \cdot \hat{\jmath} \times B_z \cdot \hat{k}\right) \\
&+ \left(A_z \cdot \hat{k} \times B_x \cdot \hat{\imath}\right) + \left(A_z \cdot \hat{k} \times B_y \cdot \hat{\jmath}\right) \\
&= \left(A_x B_y \cdot \hat{k}\right) + \left(-A_x B_z \cdot \hat{\jmath}\right) + \left(-A_y B_x \cdot \hat{k}\right) + \left(A_y B_z \cdot \hat{\imath}\right) + \left(A_z B_x \cdot \hat{\jmath}\right) \\
&+ \left(-A_z B_y \cdot \hat{\imath}\right) = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\imath} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

La scrittura per componenti può essere ricavata anche da una matrice 3x3, seguendo alcune regole: una componente si scrive come determinante della matrice a cui sono state tolte righe e colonne del versore di quella componente.

$$
\overline{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & j & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}
$$

$$
C_x = A_y B_z - A_z B_y
$$

$$
C_y = A_z B_x - A_x B_z
$$

$$
C_z = A_x B_y - A_y B_x
$$

CINEMATICA

NOZIONI FONDAMENTALI DI CINEMATICA

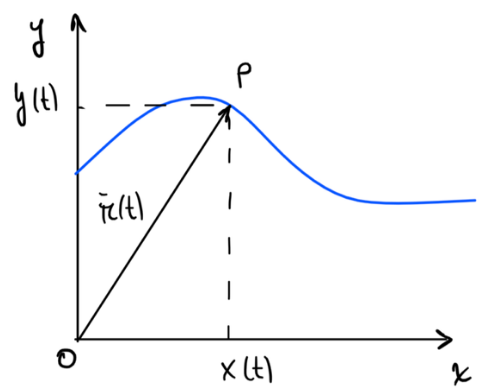
La cinematica è una parte della **meccanica**, una delle parti della fisica più antiche che studia il movimento dei corpi. La meccanica si divide in due, **cinematica** e **dinamica**; la cinematica studia il movimento dei corpi **senza tenere conto delle cause** che spingono il corpo a muoversi, mentre la dinamica le analizza. Lo studio della cinematica avviene considerando come soggetto il **modello del punto materiale**, cioè di un corpo la cui estensione è assimilata ad un punto e le cui forme fisiche sono trascurate. Il vantaggio di questo approccio sta nella possibilità di trascurare alcuni fenomeni complessi come le rotazioni o le vibrazioni, tenendo conto solo delle **traslazioni**.

Il moto del punto materiale è determinato dalla variazione della sua posizione nel tempo in un **sistema di riferimento**, che qui assume un'importanza vitale.

Le grandezze che sono messe in gioco nello studio della cinematica sono tutte grandezze vettoriali:

- **Posizione**;
- **Spostamento**, posizione in movimento;
- **Velocità**, spostamento nel tempo
- **Accelerazione**, velocità nel tempo.

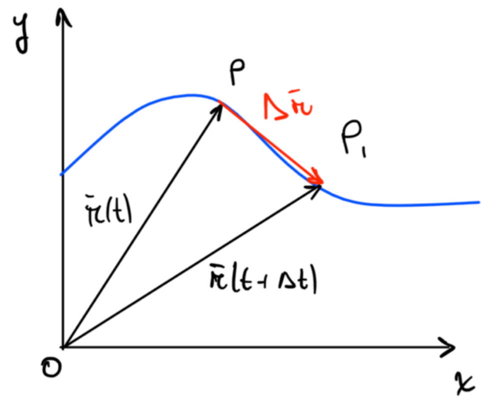
Legato al concetto di posizione e spostamento è il concetto di **traiettoria**: essa è il luogo dei punti che il corpo occupa nel tempo e si rappresenta come una linea continua.



Preso un qualsiasi punto P sulla traiettoria, si definisce il **vettore spostamento** $\bar{r}(t)$ nel punto P come il vettore che congiunge l'origine del nostro sistema di riferimento con il punto, avente come componenti $x(t)$ e $y(t)$, definite anche **leggi orarie**.

$$\bar{r}(t) = x(t)\widehat{u_x} + y(t)\widehat{u_y}$$

Il vettore spostamento, come le sue componenti, **varia in funzione del tempo** per cui dopo un certo intervallo di tempo esso sarà cambiato:



Si individua, dunque, il vettore $\overline{\Delta r}$, la differenza dei vettori spostamento cambiati nel tempo:

$$\overline{\Delta r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$$

Tale vettore serve a definire la **velocità media**, infatti essa è la variazione dello spostamento nel tempo ed è parallela al vettore spostamento (è una moltiplicazione di un vettore per uno scalare):

$$\overline{v_m} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$$

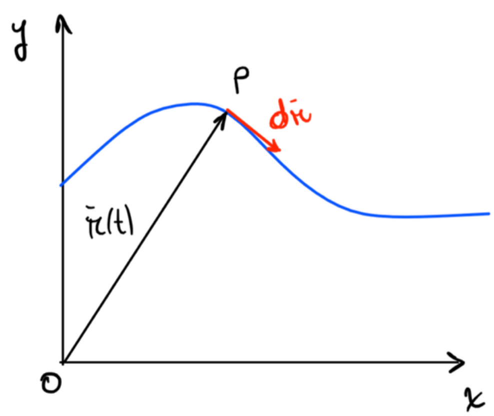
Dimensionalmente:

$$v_m = [L][T^{-1}] = m/s$$

Quando si considera un intervallo di tempo infinitesimo (con $\Delta t \to 0$) si ottiene la **velocità istantanea**, definita come la velocità in un preciso istante di tempo t e calcolata sfruttando il concetto di derivata:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr \cdot \widehat{u_r}}{dt}$$

Dove $\widehat{u_r}$ è il **versore tangente** alla curva della traiettoria ed è ortogonale rispetto al vettore spostamento.



Si può anche trovare la velocità istantanea in funzione delle leggi orarie del vettore spostamento:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d(r \cdot \widehat{u_r})}{dt} = \frac{d(r_x\widehat{u_x} + r_y\widehat{u_y})}{dt} = \frac{d(r_x\widehat{u_x}) + d(r_y\widehat{u_y})}{dt} = \frac{d(x)\widehat{u_x}}{dt} + \frac{d(y)\widehat{u_y}}{dt}$$
$$= v_x\widehat{u_x} + v_y\widehat{u_y}$$

Con l'operazione inversa si può giungere alla posizione avendo la velocità, tutto ciò che serve è l'**integrale definito**.

Infatti, partendo dalla formula appena ricavata, si estrae $d\bar{r}$:

$$d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt$$

Si integra da entrambe le parti dell'equazione ma a sinistra, avendo come costante di integrazione $d\bar{r}$ si considerano le posizioni r_0 e r, mentre a sinistra le corrispettive temporali:

$$\int_{r_0}^{r} d\bar{r} = \int_{t_0}^{t} \bar{v}\,(t)dt$$

$$\int_{r_0}^{r} d\bar{r} = \bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \bar{v}\,(t)dt$$

Per ricavare $\bar{r}(t)$:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{v}\,(t)dt$$

Con un ragionamento analogo si può ricavare anche la velocità media:

$$\overline{v_m} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0}$$

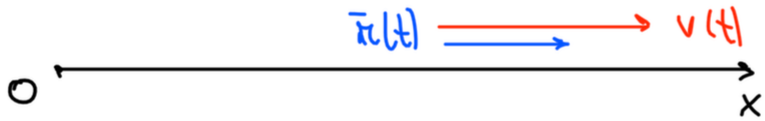
Utilizzando la relazione $\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \bar{v}\,(t)dt$, si può anche scrivere:

$$\overline{v_m} = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t} \bar{v}\,(t)dt$$

MOTO RETTILINEO

Il **moto rettilineo** è il più semplice in quanto è un moto **unidimensionale** che avviene su una sola retta. Pertanto, il sistema di riferimento sarà composto da **un solo asse** e sia velocità che posizione avranno la stessa direzione e **una sola componente**. Quest'ultima caratteristica fa si che si debba descrivere una sola **legge oraria**, quella sulla componente x.

Ovviamente per semplicità grafica i due vettori sono fuori asse, ma bisogna considerarli solo in relazione all'asse x come unico asse del moto.



Per quanto riguarda le leggi orarie:

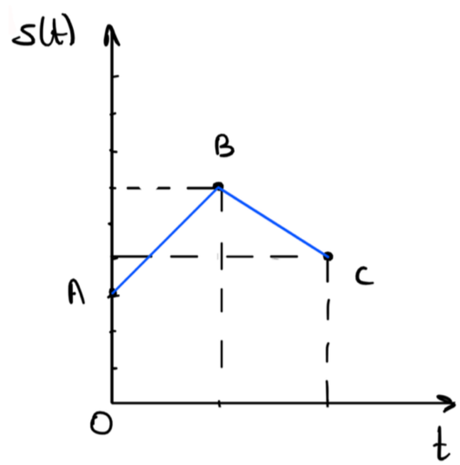
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x \cdot dt$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

È possibile anche rappresentare lo spostamento del punto materiale in funzione del tempo in un grafico che prende il nome di **diagramma orario spazio-tempo**. Tale diagramma non è altro che la rappresentazione cartesiana della legge oraria sugli assi di spazio e tempo.

Tempo (s)	Posizione (m)
0	30
10	57
20	38

Con questi dati si ricostruisce il diagramma:



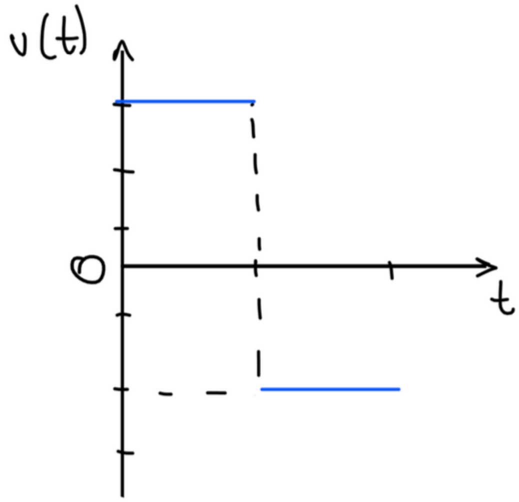
Si può analogamente fare con la velocità, descrivendo il **diagramma orario velocità-tempo**, cioè la rappresentazione cartesiana della legge oraria della velocità sugli assi di velocità e tempo.

Tempo (s)	Posizione (m)
0	30
10	57
20	38

Calcolando le rispettive variazioni si ottiene il seguente grafico:

$$v_1 = \frac{27m}{10s} = 2{,}7\ m/s$$

$$v_2 = \frac{-19m}{10s} = -1{,}9\ m/s$$



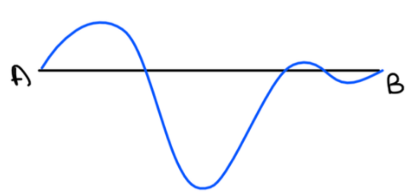
Anche nel moto rettilineo conosciuta la legge oraria della posizione si può ottenere la velocità e viceversa, sempre usando le regole di derivazione e integrazione.

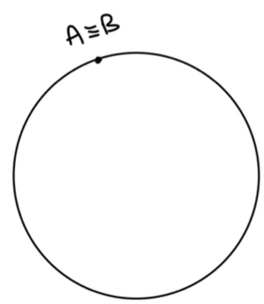
$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

Dal momento in cui

$$dx = v(t) \cdot dt$$

Tuttavia, bisogna distinguere i due concetti di **spostamento** e **distanza percorsa**. Nel linguaggio comune i due termini sono sinonimi ma quando si parla di spostamento non si fa altro che indicare la differenza di posizione dall'istante iniziale a quello finale, mentre per distanza percorsa si indica la quantità effettiva di metri percorsi. Ad esempio, in una pista di atletica circolare da 400 metri la distanza percorsa è 400 metri ma lo spostamento è zero, in quanto posizione d'inizio e di fine sono le stesse. In questo caso $\Delta x = \int_{x_0}^{x_0} dx = x_0 - x_0 = 0$





MOTO RETTILINEO UNIFORME

Il **moto rettilineo uniforme** è un tipo di moto rettilineo nel quale la **velocità** è **costante** nel tempo. Ciò altera la legge oraria e la trasforma in una legge lineare nel tempo, cioè spazi uguali sono percorsi in tempi uguali.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

Ma v è una costante, perciò:

$$x(t) = x(t_0) + v\int_{t_0}^{t} dt$$

Cioè:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Per introdurre il moto rettilineo uniformemente accelerato bisogna introdurre il concetto di accelerazione. L'accelerazione si configura come la variazione di velocità nel tempo, e si calcola analogamente alla velocità per lo spostamento. L'accelerazione media è dunque:

$$\overline{a_m} = \frac{\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

Ma quando $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}$$

Ottenendo così l'accelerazione istantanea:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{[L][T^{-1}]}{[T]} = [L][T^{-2}] = m/s^2$$

L'accelerazione si può anche considerare in funzione della posizione, in quanto la velocità è la sua derivata prima. Pertanto, l'accelerazione è la derivata seconda della posizione su due volte il tempo.

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Considerando il nostro moto unidimensionale, l'accelerazione ha la stessa direzione dello spostamento e della velocità e, come loro, anche una sola componente.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x \cdot dt$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Che sono le leggi orarie ereditate dal moto rettilineo classico.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$

Ma, come per il moto rettilineo uniforme la velocità era una costante, in questo caso lo è l'accelerazione, pertanto si può scrivere:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a \int_{t_0}^{t} dt = v_x(t_0) + a(t - t_0)$$

Avendo ottenuto la legge oraria della velocità, si può ricavare quella della posizione in funzione dell'accelerazione, per comodità $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{0}^{t} v_x \cdot dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{0}^{t} (v_0 + at) \cdot dt$$

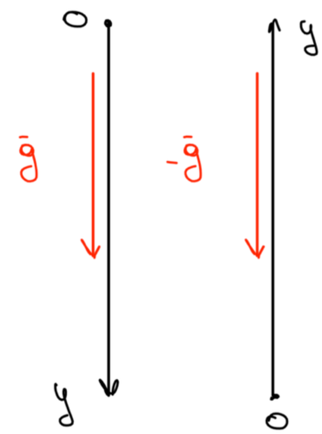
$$x(t) = x(t_0) + \int_{0}^{t} v_0 \cdot dt + \int_{0}^{t} at \cdot dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Generalizzato:

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

Anche l'accelerazione di gravità ($g = 9{,}81 m/s^2$) è un'accelerazione in un moto rettilineo uniformemente accelerato e come ogni accelerazione dipende strettamente dal sistema di riferimento. Infatti, se si considera un SdR orientato verso il centro della terra, *g* sarà positiva; al contrario, se si orienta il SdR verso il cielo, *g* sarà negativo.



In funzione del sistema di riferimento cambiano anche le leggi orarie dei rispettivi moti:

$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ nel primo caso

$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ nel secondo caso

Fino ad ora si è espressa ogni quantità cinematica solo in funzione del tempo, ma alcune volte è comodo esprimerle in funzione della posizione. In tal caso si converte l'accelerazione in funzione del tempo in funzione della posizione. Considerando $v = v[v(t)]$, l'accelerazione sarà:

$$a = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

Da ciò si ricava:

$$v \cdot dv = a \cdot dx$$

Integrando entrambi i membri per le rispettive costanti di integrazione:

$$\int_{v_0}^{v} v \cdot dv = \int_{x_0}^{x} a \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2 = a(x - x_0)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}{v_0}^2 + a(x - x_0)$$

MOTO ARMONICO

Il **moto armonico** è un particolare tipo di moto rettilineo che avviene ripetutamente sulla stessa regione di spazio, con un punto materiale che percorre periodicamente tale spazio. Pertanto, considerata x_0 la posizione a riposo, essa sarà il punto medio tra due valori *a* e -*a* tra cui oscillerà il nostro punto; il moto armonico si configura quindi come un **moto periodico**, cioè un moto che si ripete ad intervalli di tempo T regolari e quantificabili. Il **periodo** individua anche un'altra grandezza, la **frequenza** ν, calcolata come il reciproco del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} = [T^{-1}] = s^{-1} = Hz$$

La legge oraria del moto armonico, che è un **moto oscillante**, è una **legge sinusoidale** espressa in funzione della **pulsazione** ω, della **fase** φ e dell'**ampiezza** A:

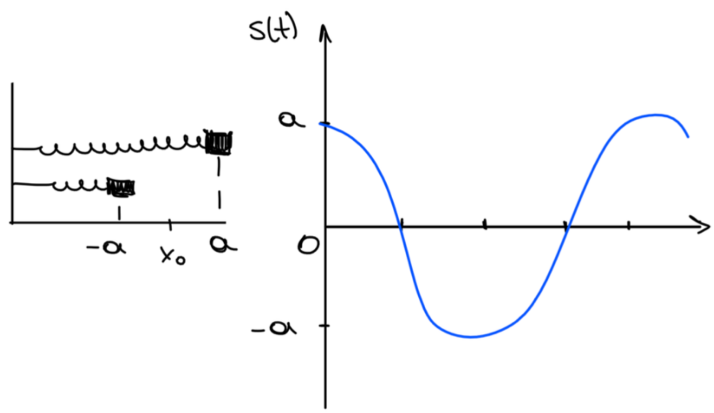
$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

L'ampiezza è la distanza tra i valori massimi che il punto materiale raggiunge nel suo moto, nel nostro caso:

$$A = 2a$$

Mentre la fase indica il momento in cui inizia la nostra misurazione del tempo in funzione delle oscillazioni; se un corpo sta oscillando posso iniziare a prendere la misurazione da quando è in posizione a o da quando è in posizione x_0, nel primo caso la funzione sarà una funzione coseno mentre nel secondo caso una funzione coseno traslata di φ.



Come per i moti precedenti, si calcola velocità e accelerazione derivando la **legge oraria del moto armonico**:

$$v(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2[x(t)]}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Nel nostro moto armonico le costanti A e φ determinano le **condizioni iniziali del moto**, infatti calcolando lo spostamento e la velocità all'istante t=0:

$$x(0) = Acos(\varphi)$$

$$v(0) = -A\omega sin(\varphi)$$

Analogamente però, se si conoscono le condizioni iniziali, si possono ricavare A e φ. Per quanto riguarda la fase:

$$\varphi = arctg\left(\frac{sin\varphi}{cos\varphi}\right) = arctg\left(\frac{-v_0}{\omega x(0)}\right)$$

In quanto:

$$\frac{-v_0}{\omega x(0)} = \frac{-(-A\omega sin\varphi)}{\omega(Acos\varphi)} = \frac{sin\varphi}{cos\varphi}$$

Per l'ampiezza invece:

$$A^2 = \frac{{v_0}^2}{\omega^2} + {x_0}^2$$

In quanto:

$$\frac{{v_0}^2}{\omega^2} + {x_0}^2 = A^2\sin^2(\varphi) + A^2cos^2(\varphi) = A^2[\sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi)] = A^2$$

MOTO SU UNA TRAIETTORIA CURVILINEA

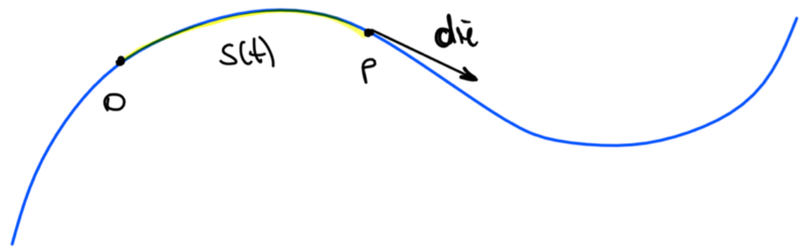
Il **moto unidimensionale** è un'**astrazione**, per cui il caso comune è di un **moto curvilineo**. Questo tipo di moto lo si può impostare secondo un sistema di riferimento cartesiano; tuttavia, è più conveniente usare il metodo dell'**ascissa curvilinea**. Infatti, conosciuta la traiettoria di un moto si può esprimere l'ascissa curvilinea s(t) come la lunghezza che va da un'**origine arbitraria** O e un punto P. In questo modo si conosce sia lo spostamento che la forma di questo spostamento, permettendoci di descrivere completamente il moto.

Analogamente a come si è fatto in un sistema di riferimento cartesiano, si scompone il movimento in una serie infinitesime di **spostamenti** dr tutti **tangenti alla traiettoria**. In questo caso avremo:

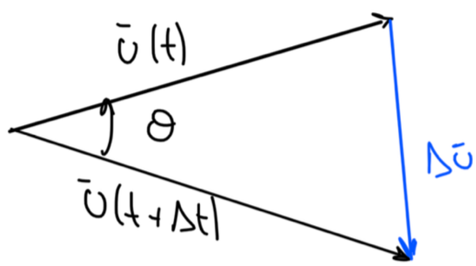
$$d\bar{r} = ds \cdot \widehat{u_t}$$

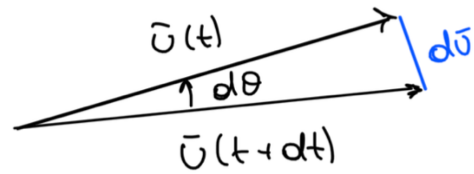
Dove ds è la distanza percorsa da questo minimo spostamento. Pertanto, nel descrivere la velocità si nota che essa diventa costante:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds \cdot \widehat{u_t}}{dt} = v \cdot \widehat{u_t}$$



Tuttavia, il fatto che la velocità sia costante non significa che non ci sia accelerazione; infatti, se la velocità è costante in modulo, non lo è in **verso**, il quale **cambia continuamente** in una traiettoria curvilinea. Con una velocità di modulo costante e versore variabile l'accelerazione non è più la **derivata** della velocità ma **del vettore** che descrive la velocità stessa. Per derivare un vettore $\bar{u}$ bisogna considerare il suo incremento $\Delta\bar{u} = \bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)$ e il limite per $\Delta t \to 0$:





Per calcolare d$\bar{u}$ si può ricorrere alla definizione di angolo sotteso ad un arco, perché si può assimilare $\bar{u}(t + \Delta t)$ e $\bar{u}(t)$ come raggi di circonferenza e d$\bar{u}$ come arco:

$$d\theta = \frac{du}{u}$$

Ma poiché si sta considerando il versore di modulo 1:

$$d\theta = du$$

In questa situazione limite du è perpendicolare a $\bar{u}(t + \Delta t)$ e a $\bar{u}(t)$ per cui si può scrivere:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta \cdot \widehat{u_N}}{dt}$$

Dove $\widehat{u_N}$ è il versore normale al versore di partenza $\bar{u}(t)$.

Se si prende il caso generale in cui la velocità non sia costante:

$$a(t) = \frac{d(v\overline{u_t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\overline{u_T} + \frac{d\overline{u_t}}{dt}v = \frac{dv}{dt}\overline{u_t} + v\frac{d\theta}{dt}\overline{u_N}$$

Ma poiché:

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

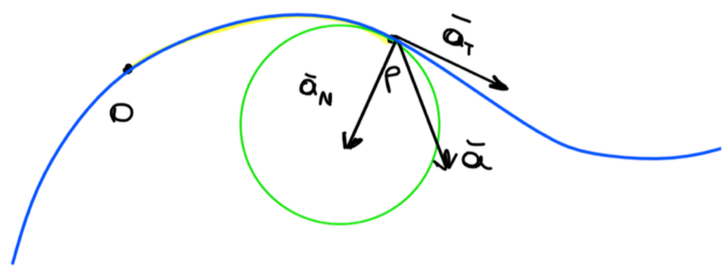
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds} v = \frac{v}{R}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}\overline{u_t} + \frac{v^2}{R}\overline{u_N} = a_T + a_N$$

Dove R è il raggio della circonferenza osculatrice.

L'accelerazione è dotata di due **componenti**, quella **tangente** alla curva e parallela alla velocità (che rappresenta la variazione in modulo) e una **normale** alla curva e alla velocità (che rappresenta la variazione in verso) e diretta al centro del cerchio osculatore (la circonferenza individuata dall'arco di spostamento minimo considerato s(t)). L'accelerazione normale è chiamata anche **accelerazione centripeta**.



MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Il **moto circolare uniforme** è un particolare tipo di moto su traiettoria curvilinea che avviene su una circonferenza nella quale **la velocità è costante di modulo ma non di direzione**.

Si possono così descrivere le leggi orarie di questo moto in maniera analoga a quelle del moto su traiettoria curvilinea e in funzione dell'angolo θ.

$$\begin{cases} x(t) = Rcos\theta(t) \\ y(t) = Rsin\theta(t) \end{cases}$$

$$\theta = \frac{s(t)}{R}$$

$$\bar{a} = \frac{v^2}{R}\widehat{u_N}$$

Nel moto circolare uniforme entra in gioco una nuova grandezza, la **velocità angolare**, definita come il **rapporto tra l'angolo spazzato in un determinato tempo**:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ma quando $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{R \cdot dt} = \frac{v}{R}$$

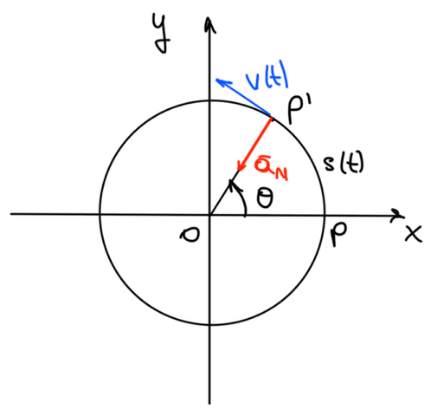
Con questa relazione si può dire che **raggio e velocità tangenziale sono direttamente proporzionali**.

Definita la velocità angolare in funzione della velocità:

$$v = \omega R$$

Analogamente si descrive l'accelerazione in funzione della velocità angolare:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Il moto circolare uniforme è un **moto periodico**, perché il punto percorre ripetutamente una circonferenza. Vengono così reintrodotte il **periodo**, il tempo necessario al punto di compiere una traiettoria completa prima di ripeterla, e la **frequenza**, la quantità di traiettorie percorse in un secondo. Queste due sono grandezze dipendenti, infatti:

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{T}$$

Con la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare si possono allargare le relative definizioni a tutta la circonferenza, ottenendo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

E viceversa; infatti, si può ottenere l'una dall'altra.

Quando varia anche il modulo della velocità, l'**accelerazione** assume due componenti, quella **radiale** (l'accelerazione centripeta) e quella **tangenziale** (l'accelerazione angolare), definita come:

$$\alpha_T = \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{R \cdot dt} = \frac{a_T}{R}$$

Le leggi del moto circolare uniformemente accelerato sono:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha_T t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_T t$$

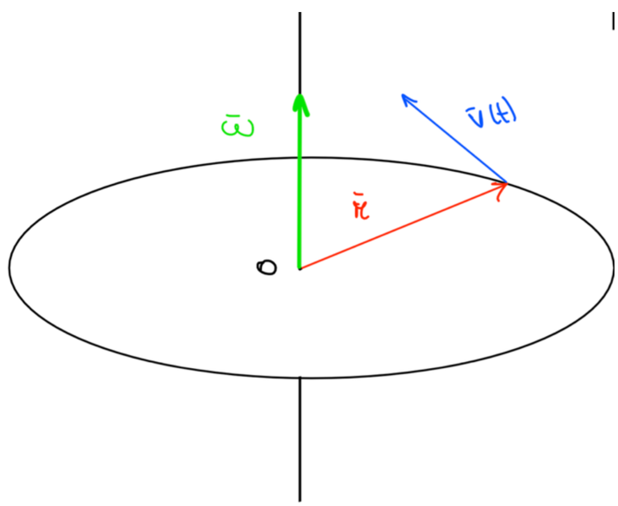
La velocità angolare può essere espressa come vettore; pertanto, si sfrutta la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare per calcolare il prodotto vettoriale:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Nonostante spesso bisogna individuare la direzione e il verso della velocità angolare, **si definisce la relazione a partire dalla velocità tangenziale**, quindi la regola della mano destra va fatta come formula inversa. Questa operazione serve a descrivere e a trovare l'**asse di rotazione del moto**.

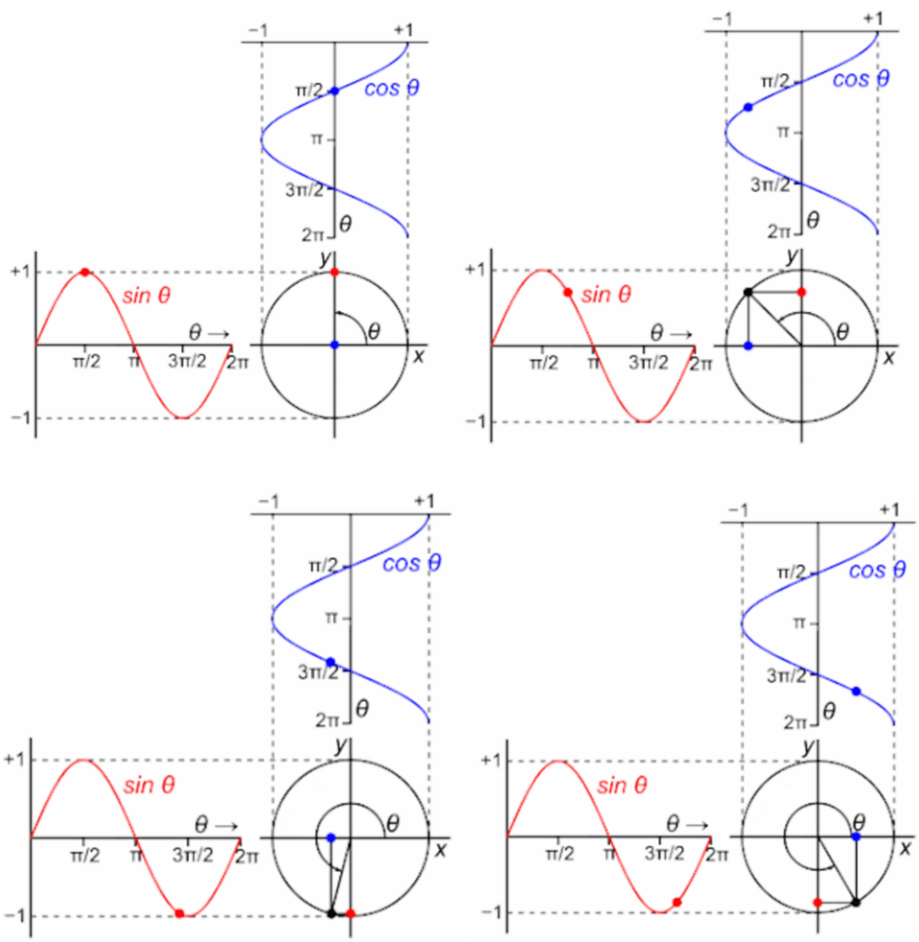
Analogamente per l'accelerazione:

$$\bar{a} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \overline{a_T} + \overline{a_N}$$



Il moto circolare può essere scomposto in **due moti armonici di eguale ampiezza e sfasati di $\pi/2$.** Infatti, se si proiettano i punti della circonferenza sull'asse x si nota che nel procedere in senso orario del moto circolare essi verranno toccati due volte, una prima volta al passaggio della prima semi circonferenza e una seconda al passaggio della seconda semicirconferenza, descrivendo un moto armonico. Anche analiticamente si può descrivere la legge oraria del moto circolare come moto armonico:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos(\theta_0 + \omega t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) = R\sin(\theta_0 + \omega t) \end{cases}$$



MOTO PARABOLICO

Il moto parabolico è un particolare moto bidimensionale che avviene lungo un arco di parabola. Un punto materiale è lanciato con velocità v_0 con un angolo rispetto all'asse delle ascisse θ, la sua velocità iniziale avrà le componenti:

$$v_0 = v_{0x}\widehat{u_x} + v_{0y}\widehat{u_y}$$

$$v_{0x} = v_0 cos\theta \;\; v_{0y} = v_0 sin\theta$$

Come in ogni moto (bidimensionale), lo spostamento sarà anch'esso individuato da due componenti:

$$\bar{r}(t) = x(t)\widehat{u_x} + y(t)\widehat{u_y}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\cos(\theta)\, t \;\; y(t) = y_0 + v_0\sin(\theta)\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si può notare che lungo la componente *x* il moto è un moto rettilineo uniforme e lungo la componente y è un moto rettilineo uniformemente accelerato. Ciò significa che il corpo sarà accelerato solo verso il basso, che la velocità lungo x sarà sempre costante e che i due moti agiscono indipendentemente dall'altro.

$$\bar{a}(t) = a_x\widehat{u_x} + a_y\widehat{u_y} = 0 + \bar{g}$$

Infatti, solo la velocità lungo y è accelerata:

$$v(t) = v_x\widehat{u_x} + v_y\widehat{u_y} = v_0\cos(\theta)\,\widehat{u_x} + (v_0 sin\theta - gt)\widehat{u_y}$$

Il moto parabolico, come indica il nome e come già anticipato, avviene lungo un arco di parabola che, analiticamente, risulta fuori estraendo il tempo t dalla componente x(t) e inserendolo nella componente y(t):

$$x(t) = x_0 + v_0\cos(\theta)\,t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_0\cos(\theta)}$$

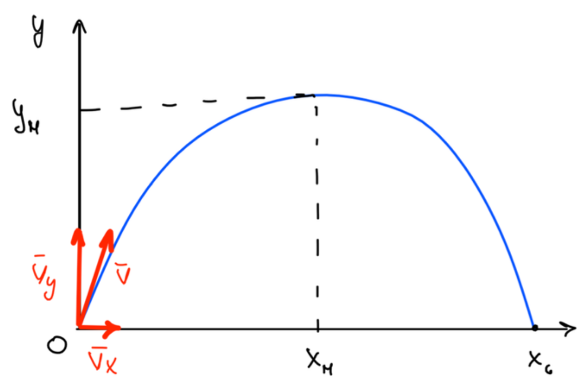
Per semplicità si assume che $x_0 = 0$;

$$y(t) = y_0 + tg(\theta)x - \frac{g}{2(v_0\cos(\theta))^2}x^2$$

Da questa equazione di secondo grado si ricavano i coefficienti:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{g}{2(v_0\cos(\theta))^2} \\ b = \dfrac{v_0\sin(\theta)}{v_0\cos(\theta)} = tg(\theta) \\ c = y_0 \end{cases}$$

Da ciò è confermato che la traiettoria del moto parabolico è un arco di parabola con concavità rivolta verso il basso.



È definita gittata la distanza unidimensionale lungo l'asse x che il corpo percorre durante il moto parabolico. Si ottiene dall'equazione della traiettoria ponendo $y = 0$:

$$0 = y_0 + \frac{v_0\sin(\theta)}{v_0\cos(\theta)}x - \frac{g}{2(v_0\cos(\theta))^2}x^2$$

$$x_G = \frac{-tg(\theta) \pm \sqrt{tg(\theta)^2 + \frac{2gy_0}{(v_0\cos(\theta))^2}}}{-\frac{g}{(v_0\cos(\theta))^2}}$$

Ma quando $y_0 = 0$:

$$x_G = \frac{2tg(\theta){v_0}^2\cos{(\theta)}^2}{g}$$

$$x_G = \frac{2\cos(\theta)\sin(\theta)\,{v_0}^2}{g}$$

$$x_G = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\theta)$$

Da ciò si arriva anche a dedurre che la gittata massima si ha a 45°.

Conoscendo la gittata si può calcolare il tempo di volo, cioè il tempo che il corpo impiega per percorrere l'intera parabola:

$$x(t_V) = v_0\cos(\theta)\,t_V$$

$$t_V = \frac{x_G}{v_0\cos(\theta)}$$

Ma il tempo di volo si può calcolare anche considerando l'ordinata 0:

$$0 = y(t) = y_0 + v_0\sin(\theta)\,t_V - \frac{1}{2}g{t_V}^2$$

Cambiando segno e calcolando la radice:

$$t_V = \frac{v_0\sin(\theta) \pm \sqrt{(v_0\sin(\theta))^2 + 2gy_0}}{g}$$

L'altezza massima è la massima coordinata y raggiunta dal corpo e coincide con il momento in cui la coordinata y della velocità è zero, considerando t_M come il tempo necessario a raggiungere l'altezza massima:

$$v_y = 0 = v_0\sin(\theta) - gt_M$$

$$t_M = \frac{v_0\sin(\theta)}{g}$$

Sostituendo il tempo nella legge oraria della coordinata y:

$$y(t_M) = y_0 + v_0\sin(\theta)\frac{v_0\sin(\theta)}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin(\theta)}{g}\right)^2$$

$$y(t_M) = y_0 + \frac{{v_0}^2 \sin(\theta)^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2 \sin(\theta)^2}{g}$$

$$y(t_M) = y_0 + \frac{{v_0}^2 \sin(\theta)^2}{2g}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

DINAMICA

La **dinamica** è quella parte della meccanica che studia il **perché** i corpi si muovono, **le cause** di ciò che è stato descritto nella cinematica. Quando si parla di dinamica si fa spesso riferimento alla **meccanica newtoniana**, che prevede corpi di **dimensioni paragonabili al quotidiano** (perché se si considerano corpi atomici c'è bisogno della meccanica quantistica) e di **velocità basse** rispetto alla massima velocità raggiungibile, quella della luce ($v \ll c = 3 \cdot 10^8 m/s$, altrimenti si dovrebbe ricorrere alla teoria della relatività). Nel corso del XVII secolo il fisico inglese Isaac Newton ha formalizzato i cosiddetti **principi della dinamica** che descrivono il perché del movimento dei corpi; essi sono:

PRINCIPIO DI INERZIA: fu formulato per la prima volta da Galileo Galilei quando mostrò che in una nave che si muove a velocità costante non si poteva sapere se la nave fosse ferma o si stesse muovendo. Fu Newton a formalizzare questo principio, affermando che *"Un corpo tende a rimanere nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme (cioè a velocità costante, senza accelerazioni)"*. Come conseguenza del principio di inerzia si può dire che leggi della fisica valgono sempre per tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Ciò equivale a dire che un corpo è in un **sistema di riferimento inerziale** (velocità costante) se su di esso agisce una forza totale nulla che lo fa rimanere nel suo moto rettilineo uniforme:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = 0 \implies a = 0 m/s^2$$

In funzione di quanto appena detto si definisce la **massa inerziale**, cioè quella proprietà di un corpo che misura la resistenza del corpo a cambiare da una condizione inerziale ad una non inerziale.

L'**inerzia** è la tendenza di un corpo a resistere ai cambiamenti di velocità.

SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA: nel principio di inerzia viene menzionato il concetto di **forza**; una forza è una **grandezza vettoriale** che tende a far **cambiare stato** al corpo su cui è applicata. Quando una forza rompe lo stato di quiete di un corpo (che non avviene sempre) imprime un'**accelerazione** al corpo che è **inversamente proporzionale alla massa e direttamente proporzionale all'intensità di tale forza**:

$$a \propto \frac{1}{m}$$

$$a \propto F$$

Pertanto, si ottiene:

$$a \propto \frac{F}{m}$$

Che si traduce nella celebre formula di Newton:

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

Considerando l'accelerazione come derivata seconda dello spostamento, la seconda legge della dinamica diventa:

$$\bar{F} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Se si sta studiando un insieme di forze si può scrivere anche:

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F_i} = m\bar{a}$$

L'unità di misura della forza è il **Newton**, definito come la forza necessaria ad accelerare un corpo di $1kg$ a $1m/s^2$.

$$[M][L][T^{-2}] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

La forza in quanto vettore può essere scomposta nelle sue componenti:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

Nel caso della forza peso due componenti sono nulle perché è una forza unidimensionale.

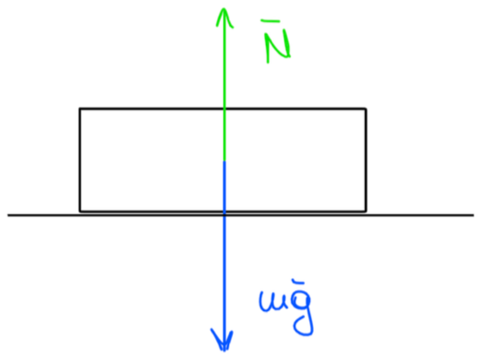
Le forze possono essere **forze di contatto** o essere **forze a distanza**, in quel caso interviene un **campo di forze**.

TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA: quando la forza è una forza di contatto si dice che, "*Se un corpo A applica una forza su un corpo B, allora il corpo B applicherà una forza uguale e contraria sul corpo A"*, oppure *"Ad ogni azione corrisponde una reazione opposta e contraria"*.

È stato precedentemente accennato che una forza non sempre cambia lo stato di un corpo, ciò accade quando la reazione scatenata secondo il terzo principio della dinamica è uguale alla forza originaria (e la sommatoria delle forze è nulla):

$$\overline{F_{AB}} = -\overline{F_{BA}}$$

Un esempio di ciò appena descritto è la **forza peso**: quando si è seduti o in piedi la forza peso agisce lo stesso ma il nostro stato non è cambiato perché agisce la **reazione vincolare** come azione opposta e contraria.



$$\overline{F_p} + \bar{R} = 0$$

Non va fatta confusione tra peso e massa, le due cose sono diverse: il peso è la forza con cui si è spinti verso il centro della terra e la massa è il rapporto tra il peso e l'accelerazione di gravità.

$$m = \frac{F}{a}$$

EQUILIBRIO STATICO E DINAMICO

Si parla di **condizione di equilibrio statico** di un corpo il permanere del suo stato di quiete nonostante le forze su di esso applicate e può essere interpretato anche come la sommatoria di tutte le forze applicate pari a zero:

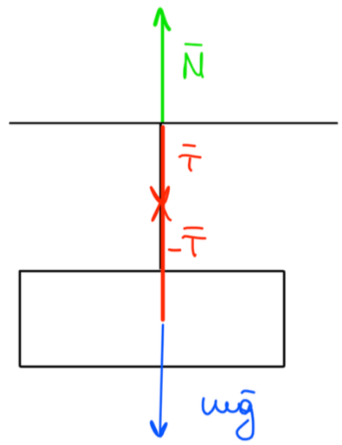
$$\sum_{i=0}^{n} \overline{F_i} = 0N$$

Per raggiungere l'equilibrio, tuttavia, è necessario che questa condizione sia verificata su tutte le componenti, quindi allargando la definizione di equilibrio statico:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{xi} = 0N$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{yi} = 0N$$

La reazione vincolare N è proprio quella forza che permette ad un corpo in quiete soggetto a forza peso di permanere nel suo stato. Un altro esempio di forza che permette l'equilibrio statico è la **tensione della corda**, una forza applicata su un filo inestensibile in tensione di massa trascurabile che bilancia la forza che lo tende. In un filo in tensione, il valore della tensione e dell'accelerazione è lo stesso in tutti i punti del filo



Nel momento in cui un corpo non è statico si raggiunge la condizione di **equilibrio dinamico**; infatti, tale condizione è raggiunta solo nel momento in cui il corpo è soggetto ad una forza non costante, cioè diversa da zero (condizione di equilibrio statico non rispettata). La condizione di equilibrio dinamico implica direttamente un'**accelerazione non costante** (visto che forza e accelerazione sono direttamente proporzionali), descrivendo un moto vario.

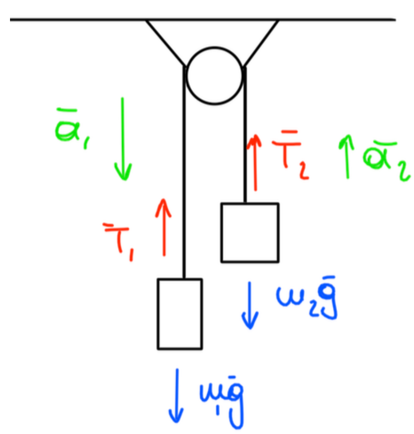
In una condizione di equilibrio dinamico, come già mostrato, l'accelerazione non è costante e perciò essa avrà **due componenti**: una tangenziale e una normale alla traiettoria:

$$\bar{a} = a_T + a_N$$

Ma non solo l'accelerazione, visto che essa compone la forza, anche quest'ultima avrà le medesime componenti:

$$\bar{F} = F_T + F_N = ma_T + ma_N = m\frac{dv}{dt} + m\frac{v^2}{R}$$

Un utilizzo pratico della tensione della fune è rappresentato dalla **macchina di Atwood**, un sistema di due masse sospese a mezz'aria da una puleggia leggera e priva di attrito.



Con tale macchina si può calcolare l'**accelerazione di gravità** solamente misurando l'accelerazione dei due corpi, infatti:

$$\sum \bar{F} = m\bar{g} + \bar{T} = m\bar{a}$$

Applicando ai due corpi tale relazione e sottraendo membro a membro le componenti, si ottiene una misura accurata dell'accelerazione di gravità:

$$\sum F_{y1} = -m_1 g + T = m_1 a$$

$$\sum F_{y2} = -m_2 g + T = -m_2 a$$

La sottrazione membro a membro restituisce:

$$g(-m_1 + m_2) = a(m_1 + m_2)$$

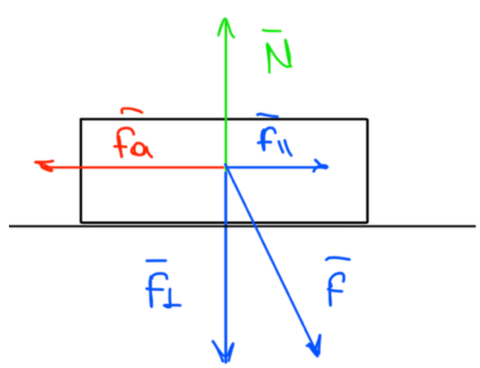
$$g = a\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}$$

FORZA DI ATTRITO STATICA E DINAMICA

La **forza di attrito** è una forza di **contatto elettrica** tra gli strati esterni delle molecole di un corpo e descrive la tendenza di due materiali ad **impedire il movimento**. Essa si adatta sia all'equilibrio statico che dinamico, infatti si possono riconoscere le omonime forze di attrito nelle rispettive situazioni:

FORZA DI ATTRITO STATICA: interviene quando il corpo è in quiete e si oppone ad una forza che non è sufficiente a generare movimento; infatti, è più piccola della **forza limite** per lo spostamento del corpo;

FORZA DI ATTRITO DINAMICA: quando la forza di attrito statica supera la forza limite per lo spostamento si genera la forza di attrito dinamica, che interviene per frenare il movimento di un oggetto su una superficie.



La forza d'attrito è sempre **parallela** al piano di scorrimento dell'oggetto e, quando la forza su di esso applicata cui l'attrito si oppone è anch'essa parallela al piano, si misura:

$$\overline{F_{as}} = -\bar{F} = \mu_s \bar{N}$$

Nel caso la forza applicata al corpo non sia parallela al piano si calcola la sua componente ortogonale al piano stesso e parallela alla reazione vincolare.

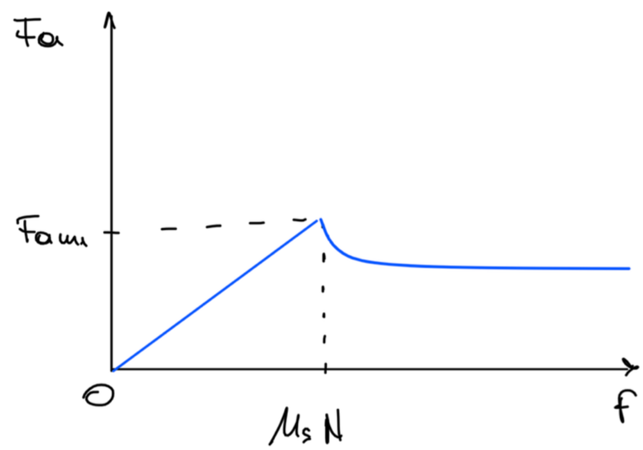
Questa calcolata è la **forza di attrito statica massima**, generalmente si avrà sempre una condizione del genere:

$$0 \leq \overline{F_{as}} \leq \mu_s \overline{N}$$

Nel caso dinamico non cambia la natura della forza ma la sua **forma**: è una **forza di movimento** e, pertanto, entra in gioco il **versore** parallelo alla velocità del corpo e opposto all'attrito insieme al coefficiente di attrito dinamico μ_D, mentre nel caso statico interviene solo quello statico μ_s. Il **coefficiente di attrito** è una misura assoluta che indica il modo in cui vengono a contatto due superfici.

$$\overline{F_{aD}} = \mu_D \overline{N} \widehat{u_v}$$

Nel caso statico la forza applicata e la forza d'attrito sono in una relazione lineare, nel caso dinamico in una relazione quasi costante:



La zona in cui il grafico è lineare è detta **regione statica**, quella quasi costante **regione dinamica**.

IL PIANO INCLINATO

Il **piano inclinato** rallenta la caduta di un corpo in funzione della pendenza, se è minore allora il corpo sarà più lento e se è maggiore sarà più veloce. Con questo strumento Galileo riuscì a dimostrare che un corpo in caduta libera si muove di **moto rettilineo uniformemente accelerato**.

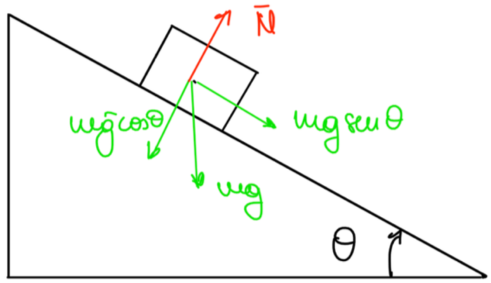
La scomposizione delle forze agenti sul piano è la seguente:

$$\begin{cases} \sum F_x = mg \cdot \sin\theta = ma \\ \sum F_y = N - mg \cdot \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Ed è su ciò che si basa la dimostrazione di Galileo, infatti:

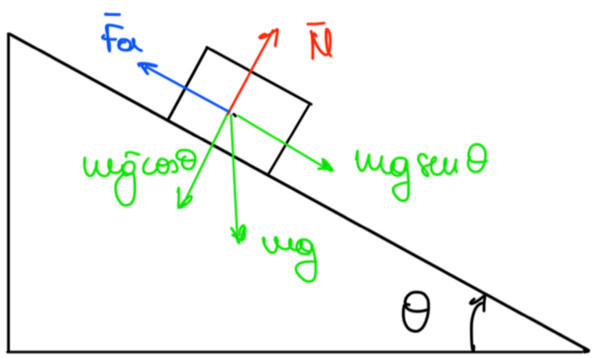
$$a = g \cdot \sin\theta$$

Con il piano a 0° il corpo non si muove, con il piano a 90° il corpo cade con accelerazione pari a g.



Il caso appena considerato è quello in cui il piano inclinato sia composto da una **superficie liscia**, su cui non agisce l'attrito. Tale condizione è **ideale** e nella realtà si presenta perlopiù la situazione di un **piano scabro**, nel quale compare anche la forza di attrito:

$$\begin{cases} \sum F_x = mg \cdot \sin\theta - F_{AS} \leq mg \cdot \sin\theta - \mu_S \cdot mg \cdot \cos\theta \\ \sum F_y = N - mg \cdot \cos\theta = 0 \end{cases}$$



Per la **condizione di equilibrio**:

$$0 = mg \cdot \sin\theta - F_{AS}$$

Ma poiché per l'equilibrio la forza d'attrito non deve essere maggiore del suo massimo

$$mg \cdot \sin(\theta) \leq \mu_S \cdot mg \cdot \cos\theta$$

$$\sin(\theta) \leq \mu_S \cos\theta$$

Così si configura la condizione per l'equilibrio in un **piano inclinato scabro**:

$$\mu_S \geq \tan\theta$$

Quando però l'equilibrio è rotto:

$$\begin{cases} \sum F_x = mg \cdot \sin\theta - F_{AD} = mg \cdot \sin\theta - \mu_D \cdot mg \cdot \cos\theta = ma \\ \sum F_y = N - mg \cdot \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$a = g(\sin\theta - \mu_D \cdot \cos\theta)$$

Quando il piano è abbastanza inclinato da permettere il movimento si inquadra l'**angolo massimo per permettere la stasi $\boldsymbol{\theta_S}$**:

$$\mu_S = \tan\theta_S$$

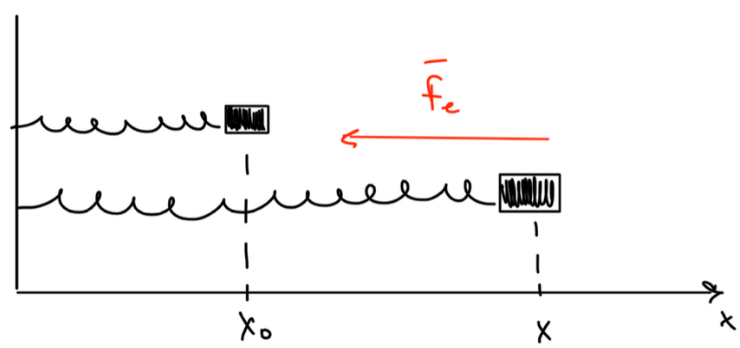
Altrimenti per $\theta > \theta_S$ il corpo si muove con coefficiente $\mu_D < \mu_S$.

FORZA ELASTICA

La **forza elastica** è una **forza di richiamo** diretta verso l'asse del corpo elastico che spinge un corpo a tornare nel suo stato di quiete. Infatti, se si definisce una **posizione a riposo $\boldsymbol{x_0}$** e si allunga la molla fino alla posizione x, si può determinare la **variazione dello spostamento** e, in funzione di esso, calcolare la forza che spinge il corpo a x_0.

$$\Delta x = x - x_0$$

$$F = -k\Delta x$$



Dove k è la **costante elastica**, una grandezza che ci descrive la **resistenza della molla** e ha dimensione:

$$k = -\frac{F}{\Delta x} = \frac{[F]}{[L]} = \frac{N}{m}$$

Tale formula prende il nome di **Legge di Hooke**; la formula presenta il **segno negativo** per indicare che essa si dirige in **verso opposto al movimento**, pertanto:

$\Delta x = x - x_0 > 0$, forza di richiamo negativa.

$\Delta x = x - x_0 < 0$, forza di richiamo positiva.

Si possono individuare delle similitudini tra la **legge di Hooke** e il **moto armonico**:

$$F = -k\Delta x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x$$

Detto $\frac{k}{m} = \omega^2$, in quanto $a = \omega^2 x = \frac{F}{m}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Questa equazione differenziale di secondo ordine ha come soluzione:

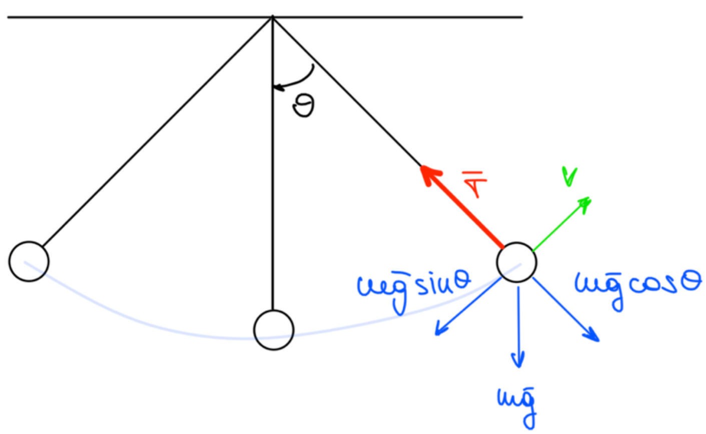
$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

E con: $\begin{cases} a = A\cos\varphi \\ b = A\sin\varphi \end{cases}$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Che è la legge oraria del **moto armonico**; infatti, lasciata andare libera una molla da una posizione x, essa percorrerà avanti e indietro lo stesso percorso descrivendo proprio un moto armonico.

IL PENDOLO SEMPLICE



Con **pendolo semplice** si indica un punto materiale sospeso tramite un filo inestensibile di massa trascurabile. In **condizione di equilibrio** il filo pende **parallelo alla verticale** ed il punto materiale si trova nella **posizione più bassa**, mentre se esso viene spostato da tale condizione inizia ad **oscillare** intorno alla condizione di equilibrio. In questa situazione si distinguono le componenti **tangente** e **normale alla traiettoria**. Per quanto riguarda la componente normale:

$$\widehat{u_N} = mg\cos\theta - T = ma_N$$

Considerando l'accelerazione normale come accelerazione centripeta:

$$a_N = \frac{v^2}{L} = \omega^2 L$$

Risulta:

$$T = m(g\cos\theta - \omega^2 L)$$

Si considera il **caso statico** in quanto non c'è movimento **per la componente verticale** del pendolo; per la componente tangenziale:

$$\widehat{u_T} = -mg\sin\theta = ma_T$$

Il meno deriva dal fatto che questa componente è rappresentata da una **forza di richiamo** che si oppone al movimento.

Ma l'accelerazione è la stessa accelerazione tangenziale del **moto circolare** (con α accelerazione angolare):

$$a_T = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{g}{L}\sin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\sin\theta = 0$$

Che coincide con l'equazione del moto armonico, posto $\omega^2 = \frac{v^2}{L^2} = \frac{g}{L}$. La soluzione di questa **equazione differenziale del secondo ordine** si ottiene considerando le **serie di Taylor** e facendo la considerazione che per angoli piccoli $\sin\theta \approx \theta$:

$$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = L\,\theta(t) = L\theta_0\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

Con queste informazioni si può dire che il punto materiale ha **velocità nulla negli estremi** di oscillazione ($\theta = \theta_0$), dove **si inverte anche il verso del moto**, e **velocità massima in corrispondenza della verticale** ($\theta = 0$).

Il **moto**, dunque, è **periodico** e **armonico**, di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La similitudine con il moto armonico sta nelle oscillazioni periodiche del pendolo e quelle con il moto circolare risiedono nella traiettoria che traccia archi di circonferenza di raggio L.

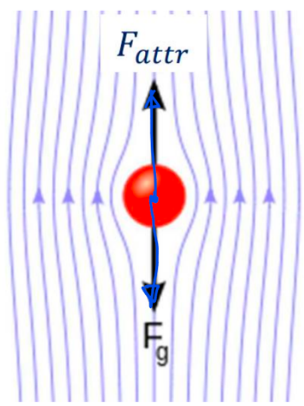
FORZA DI ATTRITO VISCOSO

La **forza di attrito viscoso** è quella che si oppone al movimento di un corpo **in un fluido** ed è direttamente proporzionale alla velocità del corpo:

$$\overline{F_{AV}} = -b\bar{v}$$

Dove b è un coefficiente misurato come:

$$[b] = [F][L][T^{-1}] = N \cdot m \cdot s^{-1} = Kg \cdot s^{-1}$$



L'accelerazione vale dunque:

$$a = -\frac{b\bar{v}}{m} = \frac{dv}{dt}$$

La seguente **equazione differenziale del primo ordine** si risolve:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v} dv = -\frac{b}{m}\int_{t_0}^{t} dt$$

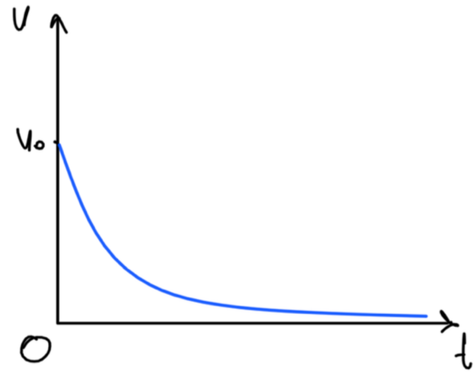
$$\log v - \log v_0 = -\frac{b}{m}(t - t_0)$$

Considerando $\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} = [s^{-1}]$:

$$\log v - \log v_0 = -\frac{1}{\tau}(t - t_0)$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$



Il caso appena considerato si applica quando viene **trascurata la forza peso**, se invece essa viene considerata:

$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$g - \frac{b}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

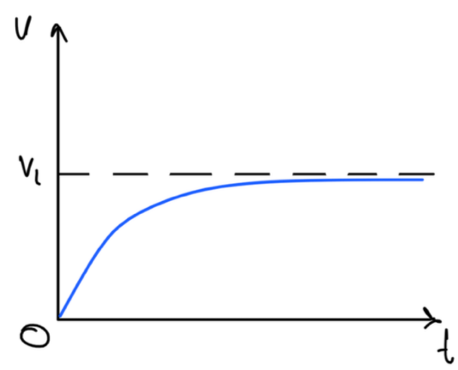
Integrando e considerando $v_0 = 0$ e $t_0 = 0$ per semplicità:

$$-\tau \ln\left(\frac{g - \frac{v}{\tau}}{g}\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{g - \frac{v}{\tau}}{g}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{g - \frac{v}{\tau}}{g} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v(t) = \tau g\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Con questa formula si giustifica il fenomeno per cui dopo una certa quantità di tempo un corpo in caduta in un fluido assume una **velocità limite** che non supera, come nel caso di una goccia di pioggia in aria. Tuttavia, il **caso dell'aria è particolare**, in quanto:

$$F_{AV} = \frac{1}{2}\rho c S v^2$$

Dove:

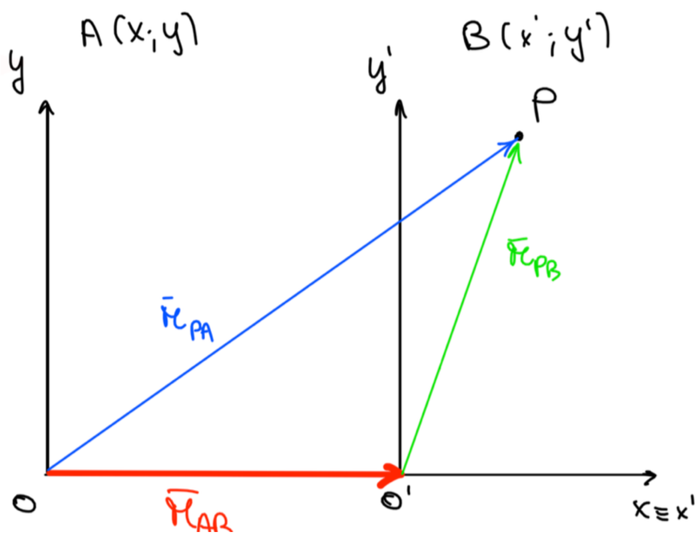
- S è la **superficie di contatto** del corpo;
- c è il **coefficiente di resistenza** (che dipende dal mezzo);
- ρ è **la densità dell'aria**, $1{,}29\,\frac{kg}{m^3}$.

Pertanto, la **velocità limite** è:

$$v_L = \sqrt{\frac{2F_{AV}}{\rho c S}}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO RELATIVO

Un **sistema di riferimento** è l'oggetto fisico a cui viene "ancorato" il sistema di coordinate e da cui dipende la **velocità di un oggetto al suo interno**. Infatti, **se il sistema di riferimento è in moto, allora è in moto qualsiasi oggetto al suo interno**. Tuttavia, la **percezione del movimento** per l'oggetto in un sistema di riferimento è diversa da quella di un altro in funzione delle loro velocità:



$$\overline{r_{PA}} = \overline{r_{PB}} + \overline{r_{BA}}$$

La seguente equazione afferma che la posizione di un punto in un sistema di riferimento A deriva dalla somma della posizione del sistema di riferimento A rispetto ad un altro B e la posizione del punto nel sistema B. Derivando tutte le espressioni si ottiene un risultato simile ma per le **velocità** e, derivando ancora, per le **accelerazioni**.

Per le velocità:

$$\frac{d\overline{r_{PA}}}{dt} = \frac{d\overline{r_{PB}}}{dt} + \frac{d\overline{r_{AB}}}{dt}$$

$$\overline{v_{PA}} = \overline{v_{PB}} + \overline{v_{AB}}$$

Per le accelerazioni:

$$\frac{d^2\overline{r_{PA}}}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r_{PB}}}{dt^2} + \frac{d^2\overline{r_{BA}}}{dt^2}$$

$$\frac{d\overline{v_{PA}}}{dt} = \frac{d\overline{v_{PB}}}{dt} + \frac{d\overline{v_{BA}}}{dt}$$

$$\overline{a_{PA}} = \overline{a_{PB}} + \overline{a_{BA}}$$

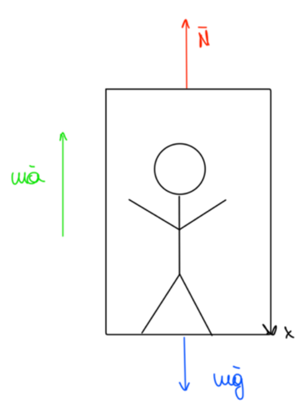
Quando la velocità di un sistema rispetto all'altro è costante, $v_{BA} = 0$, si parla di **sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro**; in questo caso l'accelerazione di un corpo in un sistema equivale a quella dello stesso oggetto nell'altro sistema:

$$\overline{a_{PA}} = \overline{a_{PB}}$$

Questi sistemi sono detti anche **sistemi inerziali** in quanto in essi vale il principio di inerzia. In essi sono presenti solo **forze reali** mentre se il sistema non è in moto rettilineo uniforme si generano le cosiddette **forze apparenti**. Le forze apparenti non sono altro che l'**inerzia** che tende a far rimanere un corpo in **moto rettilineo uniforme**; una di esse è la **forza centrifuga**, che si oppone all'accelerazione centripeta e tende a spostare il corpo fuori da una traiettoria circolare, oppure la **forza peso apparente**, che entra in gioco quando un corpo sembra fluttuare in seguito ad una caduta nel vuoto. In tutti i casi non vale la legge di inerzia e la seconda legge di Newton deve tener conto dell'accelerazione del sistema di riferimento:

$$\sum F = mg - N = ma$$

$$N = m(g - a)$$



Analiticamente le forze apparenti si giustificano come una **differenza di accelerazione**:

$$x = x' + x'_0$$

Dove x'_0 può essere espresso con la legge oraria di un **moto uniformemente accelerato**:

$$x'_0 = x'_{0i} + v'_{oi}t + \frac{1}{2}aa'_0$$

$$x' = x - x'_0 = x - x'_{0i} + v'_{oi}t + \frac{1}{2}a'_0t^2$$

Derivando due volte per ottenere l'accelerazione:

$$v' = v - v'_{0i} - a'_0t$$

$$a' = a - a'_0$$

Questa è però una particolarizzazione della **legge generale dell'accelerazione** di un sistema di riferimento. Infatti, prendendo un sistema di riferimento fisso S(x, y, z) e uno mobile S'(x, y, z) in cui l'origine di S' si muove con velocità v'_0 e ruota con velocità angolare ω, l'accelerazione del sistema è:

$$r = r'_0 + r'$$

$$v = v'_0 + \frac{dr'}{dt} = v'_0 + \left(\frac{dx'}{dt}\overline{u_x} + \frac{dy'}{dt}\overline{u_y} + \frac{dz'}{dt}\overline{u_z}\right) + \left(\frac{d\overline{u_x}}{dt}x' + \frac{d\overline{u_y}}{dt}y' + \frac{d\overline{u_z}}{dt}y'\right)$$

Quest'ultima componente deriva dal fatto che cambiano nel tempo anche i versori degli assi.

$$a = \boldsymbol{a}' + \left(\boldsymbol{a}'_{\boldsymbol{0}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')\right) + (\boldsymbol{2\omega} \times \boldsymbol{v}')$$

Dove il primo termine tra parentesi è l'**accelerazione di trascinamento** e il secondo l'**accelerazione di Coriolis**:

$$a = a' + a_t + a_c$$

Si definisce **sistema di riferimento solidale alla Terra** quello che **ruota insieme alla Terra**, ma esso **non è inerziale**. Si sceglie per convenzione quel **sistema di riferimento inerziale** chiamato **delle stelle fisse**, che prende come **origine** il **centro di massa del sistema solare** (molto vicino al Sole) e **assi orientati verso le stelle fisse**, cioè quegli astri con un **movimento** così **lento** da sembrare fisse rispetto agli altri corpi celesti.

DINAMICA

I modelli di analisi utilizzati finora si sono basati sul concetto di **punto materiale**, cioè **un corpo che interagisce con l'Universo**; esiste però un modello di studi che prende in considerazione **più punti materiali** che agiscono e condizionano uno stesso spazio e per analizzarli e studiarli va chiarito il concetto di **Sistema** e **Ambiente**. Un Sistema è una piccola porzione circoscritta e finita di Universo nel quale agiscono i punti materiali e l'Ambiente è ciò che circonda il Sistema. Inoltre, nella Fisica Classica, si preferisce sempre introdurre i **Principi Fondamentali** come **leggi di conservazione** di una grandezza fisica. Pertanto, viene introdotto il concetto di **quantità di moto**.

Supposto che la massa di un punto materiale non cambi e che la velocità a cui esso si muove **non è relativistica** ($v \ll c$), si definisce quantità di moto il prodotto della massa con la velocità.

$$\bar{p} = m\bar{v} = [M][L][T^{-1}] = kg \cdot \frac{m}{s}$$

In un sistema di riferimento inerziale (isolato) **la quantità di moto** di un corpo libero (non soggetto a forze esterne) **si conserva sempre**, ma quando il corpo è soggetto ad una **forza esterna** essa **cambia** continuamente:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F}$$

In generale vale la seguente relazione, valida come **alternativa espressione della seconda legge della dinamica**:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Integrando per effettuare il calcolo inverso si può ottenere l'**impulso**, definito come la **variazione della quantità di moto**.

$$\int_0^t \bar{F} dt = \int_{p_0}^{p} d\bar{p} = \bar{p} - \overline{p_0} = \Delta\bar{p} = \bar{J}$$

Tuttavia, il teorema dell'impulso è valido solo quando si conosce la **dipendenza temporale della forza**, $\bar{F}(t)$, ma spesso non è nota e per applicarlo ci si serve del **teorema della media** degli integrali per calcolare il **valor medio della forza agente**:

$$\overline{F_m} = \frac{\Delta\bar{p}}{t - t_0}$$

ENERGIA, LAVORO E POTENZA

Tutt'ora non si ha una precisa definizione di **energia**, si sa che è **un numero che si attribuisce a uno o più corpi** per descrivere il loro **stato** (quando una forza interviene a cambiare lo stato del corpo, cambia anche l'energia) e che essa **si trasforma da una forma** ad un'altra passando da un corpo ad un altro pur **lasciando invariata la quantità complessiva di** energia (principio di conservazione dell'energia).

L'energia associata al moto di un corpo di massa m è chiamata energia cinetica e si descrive come:

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

E si misura in Joule: $k = [M][L^2][T^2] = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = J$

La relazione con la forza è dovuta al fatto che quando la si applica ad un oggetto esso accelera, cambiando la velocità del corpo e la sua energia cinetica. Con questa informazione si può dare una **definizione più generica di energia**, cioè come **lavoro**, misurato anch'esso in Joule: **il lavoro è l'energia trasferita ad un corpo o da un corpo per mezzo di una forza**. Quando l'energia è ceduta al corpo si parla di **lavoro positivo**, se è ceduta dal corpo si parla di **lavoro negativo**.

Considerando un corpo in **movimento su una superficie liscia**, priva di attrito, che percorre una **distanza d** e si calcoli l'**accelerazione** tenendo conto della seconda legge della dinamica:

$$F = ma$$

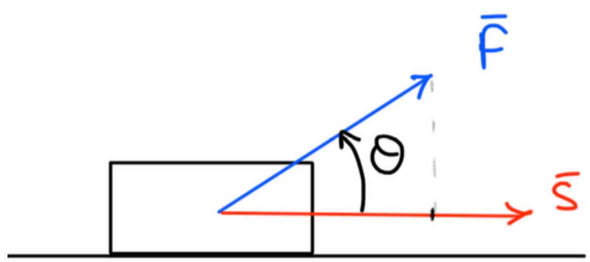
$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + ad$$

Moltiplicando per la massa:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mad$$

$$k - k_0 = \Delta k = mad = Fd = W$$

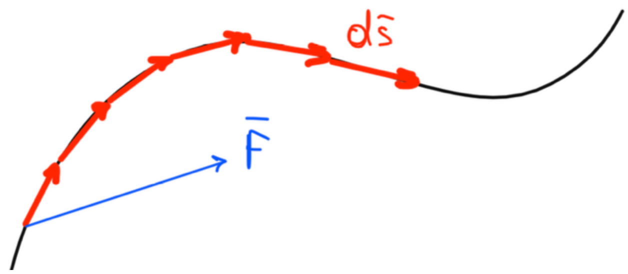
Pertanto, si descrive il lavoro della forza come l'**energia trasferita ad un corpo per mezzo di una forza che produce uno spostamento**. Il lavoro, che è uno scalare, si definisce positivo quando l'energia è ceduta al corpo e negativo quanto è ceduta dal corpo.



$$W = \bar{F} \cdot \bar{d} = Fd\cos\theta$$

Quando la forza produce uno **spostamento non lineare** non si può calcolare lo spostamento cinematico (come differenza tra posizione finale e iniziale) ma bisogna considerare la **traiettoria**. Per fare ciò si ricorre all'**integrale di linea**, che scompone lo spostamento totale in **spostamenti infinitesimi** assimilabili ad una retta, in modo da calcolare il lavoro per ognuno e sommarli per ottenere il prodotto finale.

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F \cdot ds \cdot \cos\theta = \int_A^B F_T \cdot ds$$



Ciò significa che **il lavoro dipende solo dalla componente ortogonale della forza al movimento** e se essa non dipende dallo spostamento la si considera costante.

Avendo così definito il **lavoro in funzione di un angolo $\boldsymbol{\theta}$** si può discutere il suo valore in funzione di tale angolo:

- $\theta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta > 0 \Longrightarrow W > 0;$
- $\theta > \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta < 0 \Longrightarrow W < 0;$
- $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Longrightarrow W = 0.$

In funzione di quanto appena detto si può affermare:

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F_T ds = m a_T ds = m\frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = mv\, dv$$

Integrando ambo i membri per ottenere il lavoro:

$$W = \int_{v_0}^{v_f} mv\, dv = m\int_{v_0}^{v_f} v\, dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{k_f} - E_{k_0}$$

Tale espressione può anche essere posta sotto forma di accelerazione in funzione della posizione:

$$W = E_{k_f} - E_{k_0} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m[a_x(x - x_0)] = ma_x d = F_x d$$

Quello appena mostrato è definito **teorema dell'energia cinetica** o **teorema delle forze vive** e afferma che **il lavoro effettuato su un corpo di massa m equivale alla variazione di energia cinetica e**, quindi, **di velocità**. Non a caso si può calcolare il lavoro come prodotto scalare di una distanza per una forza, cioè massa per accelerazione, la quale è variazione di velocità.

Supponendo la forza costante, la variazione di lavoro nel tempo è definita **potenza**:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(Fr)}{dt} = F\frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

Quella appena descritta è la **potenza istantanea**, che caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro. La **potenza media**, invece:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

In entrambi i casi l'unità di misura è il Watt:

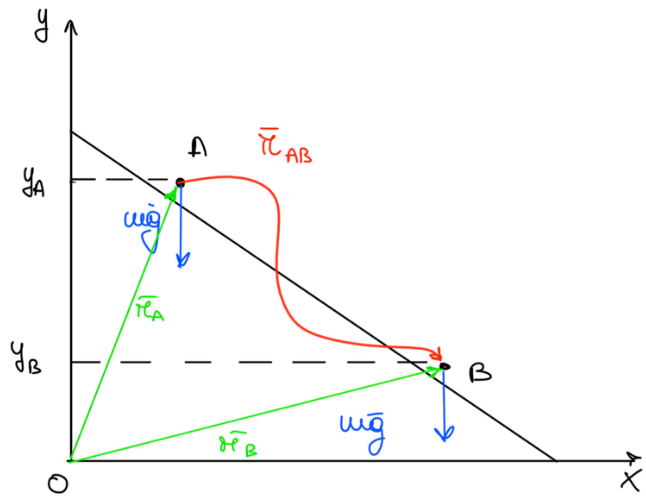
$$P = \frac{[E]}{[T]} = J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

Considerando come forza che è coinvolta nel lavoro la forza peso, si può calcolare il **lavoro della forza peso**:

$$W = \int_A^B m\bar{g} \cdot d\bar{s} = m\bar{g} \int_A^B d\bar{s} = m\bar{g}(\bar{r}_B - \bar{r}_A) = mg(r_B - r_A)\cos\theta = mg(y_B - y_A)$$

Da ciò si deduce che il lavoro della forza peso dipende unicamente dalla **variazione di quota** che comporta l'applicazione della forza, **indipendentemente dal percorso effettuato**. Quando $y_B < y_A$ allora il lavoro è negativo, se $y_B > y_A$ il lavoro è positivo.



Quando sotto analisi è la forza elastica si parla di **lavoro della forza elastica**.

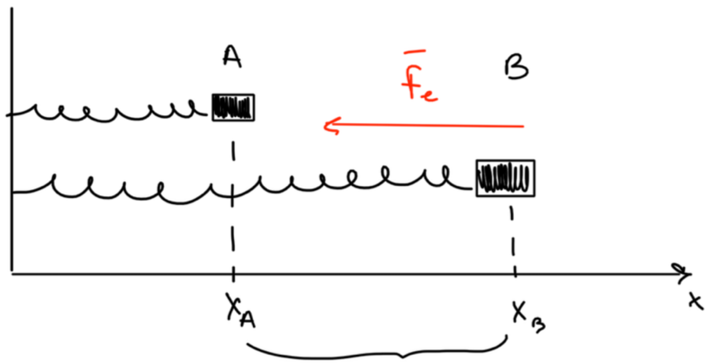
$$W = \int_A^B \bar{F}_e \cdot d\bar{s} = \int_A^B -k\bar{x} \cdot d\bar{x} = \int_A^B -kx\,\bar{u}_x \cdot dx\,\bar{u}_x$$

Ma il prodotto scalare di due vettori paralleli è 1, pertanto:

$$W = -k\int_A^B x \cdot dx == \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

In questo caso si definisce lavoro positivo quello della **compressione** e negativo quello dell'**estensione**.

Analogamente al lavoro della forza peso, anche quello della forza elastica **non dipende dalla traiettoria**, ma **solo dalla posizione** iniziale e finale del corpo.



Diverso è il caso del **lavoro della forza di attrito radente dinamico**:

$$W = \int_A^B \bar{F}_{att} \cdot d\bar{s} = \int_A^B -\mu_d N\, \bar{u}_v \cdot d\bar{s} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

Da ciò si deduce che il lavoro della forza di attrito radente dinamico, a differenza di quello della forza peso e di quello della forza elastica, **dipende dalla traiettoria**.

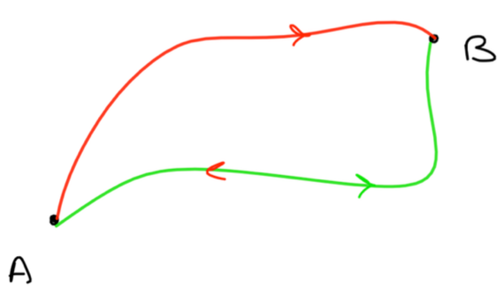
Si distinguono così le forze il cui lavoro non dipende dal percorso effettuato e quelle il cui lavoro dipende dal percorso. Le prime sono dette **forze conservative** e le seconde **forze non conservative**. Per le forze non conservative si può fare il seguente ragionamento:

$$W = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II}$$

Tenendo conto che invertendo gli estremi di integrazione si inverte l'intero integale:

$$W = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I = -\int_B^A (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II}$$

$$\int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I - \int_B^A (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = \oint \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0$$

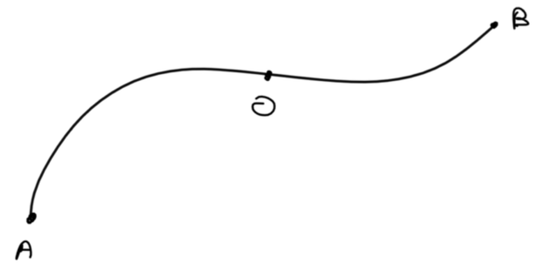


Pertanto, si può affermare che l'**integrale di una forza conservativa lungo un circuito chiuso** è zero.

Se in un sistema di riferimento si fissa un'origine O, ad un corpo appartenente a tale sistema su cui agisce una **forza conservativa** si può associare una q**uantità di energia che dipende solo dalla posizione P**, l'**energia potenziale** del punto P.

$$E_{pP} = -\int_{O}^{P} F \cdot ds$$

È possibile esprimere il **lavoro in funzione dell'energia potenziale**:



$$W = \int_{A}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{A}^{O} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{O}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\int_{O}^{A} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{O}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{s} = E_{pA} - E_{pB}$$

Cioè:

$$W = -\Delta E_p$$

Da ciò si definisce l'energia potenziale come la **capacità di fornire lavoro di un corpo**.

Ma per il teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta E_k$$

Pertanto, solo per le forze conservative:

$$\Delta E_p + \Delta E_k = 0$$

Inoltre, sempre solo per le forze conservative, si può definire il **principio di conservazione dell'energia meccanica** (definita come la somma di energia cinetica e potenziale):

$$E_m = E_k + E_p$$

La cui variazione è zero per quanto detto prima.

Nel caso di **forze non conservative**, l'**energia meccanica non si conserva** e, dunque, la sua variazione è diversa da zero. Infatti, il lavoro di tale forza è proprio la variazione di energia meccanica:

$$W_{nc} = E_{mB} - E_{mA}$$

In generale per le forze non conservative:

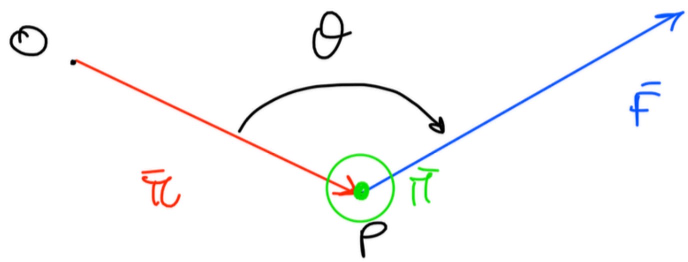
$$W_{tot} = W_c + W_{nc} = -\Delta E_p + \Delta E_m = -\Delta E_p + (\Delta E_k + \Delta E_p) = \Delta E_k$$

Quanto appena detto è **in conformità con il teorema delle forze vive e con la definizione di energia potenziale**, che può essere descritta solo per forze conservative.

MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN POLO

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = OP \cdot F \cdot \sin\theta$$

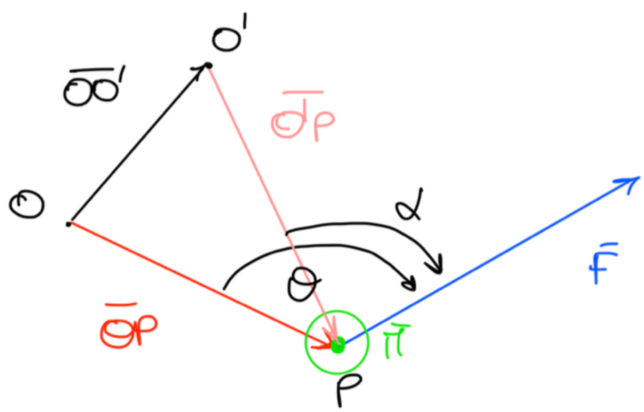
Il **momento di una forza rispetto ad un polo** si definisce come il **prodotto vettoriale** del vettore che congiunge il polo di riferimento al punto di applicazione della forza per la forza stessa. In quanto prodotto vettoriale, il momento di una forza è un vettore che avrà direzione perpendicolare al piano di appoggio dei due vettori fattore, verso dettato dalla regola della mano destra.



Si può definire anche **il momento di una forza** rispetto ad un polo quando è **già noto il momento della stessa forza per un altro polo**:

$$\overline{O'P} = \overline{OP} - \overline{OO'}$$

$$\bar{M}_{O'} = \overline{OP} \times \bar{F} - \overline{OO'} \times \bar{F} = \bar{M}_O - \overline{OO'} \times \bar{F} = \bar{r}' \times \bar{F}$$



In genere **il momento di un vettore dipende dal polo** che si prende in considerazione.

Quando il vettore preso in considerazione per il calcolo del momento è il vettore quantità di moto, si parla di **momento angolare**:

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{L} = [L][M][L][T^{-1}] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = N \cdot m \cdot s$$

Calcolando la **variazione del tempo** del momento angolare:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{t} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O$$

Da tale relazione, chiamata **teorema del momento angolare**, si deduce che **la variazione di momento angolare di un corpo equivale al momento delle forze esterne al corpo**. Infatti, quando esse sono zero, il **momento angolare** del sistema **si conserva**.

$$\frac{dL}{dt} = \bar{M} \Longrightarrow d\bar{L} = \bar{M}dt$$

Integrando ambo i membri:

$$\int_{L_0}^{L_f} d\bar{L} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{M}dt = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{r} \times \bar{F})dt = \bar{r} \times \int_{t_0}^{t_f} \bar{F}dt$$

$$\Delta\bar{L} = \bar{r} \times \bar{J}$$

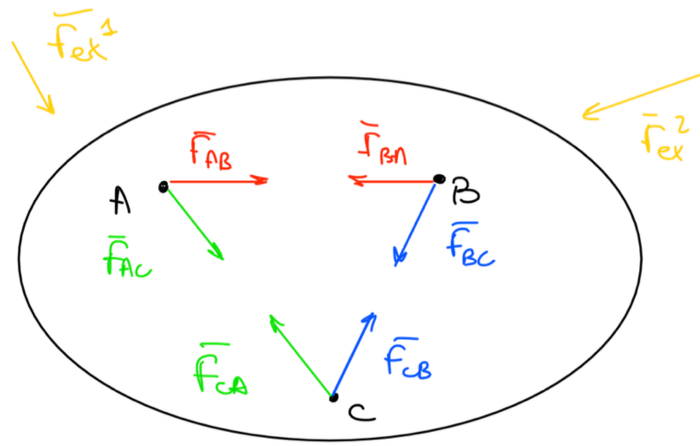
Pertanto, si può affermare che **la variazione di momento angolare è pari al momento dell'impulso della forza esterna applicata al punto**.

SISTEMI DI PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

L'astrazione del **punto materiale** come unico corpo agente in un sistema di riferimento è una **condizione ideale** in quanto i corpi sono **sempre in relazione tra loro**. Pertanto, si definisce **sistema di punti materiali** un sistema in cui interagiscono **n punti materiali** e su cui agiscono due tipologie di forze:

- **Forze interne**, generate dall'interazione tra corpi;
- **Forze esterne**, generate dall'interazione del sistema con l'Universo.



Quando si considera il sistema nella sua totalità **la sommatoria delle forze interne è zero** perché, per il terzo principio della dinamica, ogni forza applicata da un corpo ad un altro è bilanciata dalla forza applicata dall'altro sul corpo; tuttavia, se si considera un corpo che fa parte del sistema allora le forze interne sono diverse da zero. In generale, **la forza totale di un corpo è data dalla somma delle forze interne per quelle esterne**.

Sia per il sistema che per i suoi singoli membri è possibile **descrivere e associarvi tutte le grandezze che sono state definite in precedenza per il punto materiale**.

Se si considera una grandezza applicata all'intero sistema, sorge la questione sul dove la grandezza vettoriale associata è applicata. **Il punto in cui ogni vettore di un sistema di punti materiali è applicato è detto centro di massa** ed è equivalente al **punto dove è concentrata tutta la massa**. Il centro di massa si definisce come **quell'unico punto di un corpo per cui il corpo stesso si può considerare un punto materiale**, o in alternativa che effettua sempre e solo traslazioni.

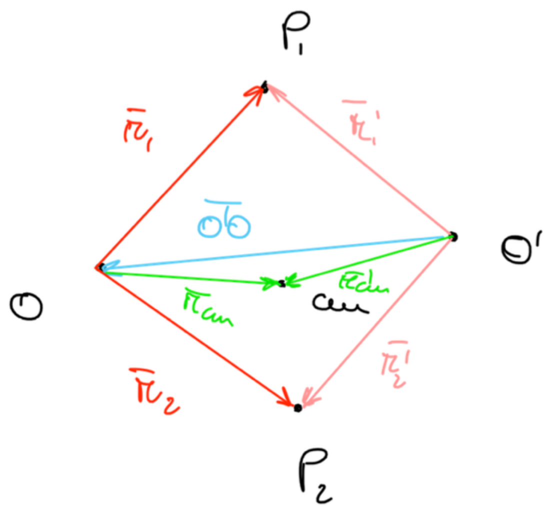
Il centro di massa **non dipende dal sistema di riferimento** ma la sua misura ne può essere influenzata; infatti, la posizione individuata dal raggio vettore si misura:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \cdots + m_n\bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Il raggio vettore può, successivamente, essere **scomposto nelle sue componenti cartesiane**:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Poiché non dipende dal sistema di riferimento, il centro di massa può essere definito anche **in funzione di un'origine** diversa rispetto a quella con cui si è calcolata la sua posizione:



$$\bar{r}_1' = \bar{r}_1 + \overline{O'O}$$

$$\bar{r}_2' = \bar{r}_2 + \overline{O'O}$$

Pertanto:

$$\bar{r}_{cm}' = \bar{r}_{cm} + \overline{O'O}$$

Il centro di massa è un comune punto del sistema e gli si può associare uno spostamento, una velocità e un'accelerazione:

$$\bar{v}_{cm} = \frac{d\bar{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\bar{P}}{\sum m_i}$$

Cioè, **la quantità di moto totale del sistema equivale al prodotto della massa totale del sistema per la velocità del centro di massa**:

$$\bar{P} = M_{tot}\bar{v}_{cm}$$

Analogamente per l'accelerazione:

$$\bar{a}_{cm} = \frac{d\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \bar{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \bar{F}_{in} + \sum \bar{F}_{ex}}{\sum m_i}$$

Ma poiché la sommatoria delle forze interne è zero:

$$\bar{a}_{cm} = \frac{\sum \bar{F}_{ex}}{\sum m_i}$$

Cioè:

$$\bar{F}_{ex} = M_{tot}\bar{a}_{cm}$$

In seguito a questo ragionamento si può definire il **teorema del centro di massa**: **il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne**.

Congiungendo i due risultati, sulla velocità e sull'accelerazione del centro di massa, si ottiene la **prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi**:

$$\bar{F}_{ex} = m\bar{a}_{cm} = m\frac{d\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

La risultante delle forze esterne di un sistema è uguale alla variazione di quantità di moto totale del sistema nel tempo.

Si definisce, inoltre, anche la **condizione di conservazione della quantità di moto** di un sistema come la sommatoria delle forze esterne pari a zero. Al verificarsi di questa condizione, inoltre, **il centro di massa resta in quiete** o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme (primo principio della dinamica).

Con queste informazioni si possono definire alcune proprietà del centro di massa:

- l'azione delle forze interne **non può modificare lo stato di moto** del centro di massa;
- su ciascun punto del sistema agiscono **forze interne** ed **esterne**;
- la definizione di centro di massa è **matematica**;
- la quantità di moto al centro di massa è **uguale** alla quantità di moto del sistema;
- l'accelerazione del centro di massa dipende dalla **somma delle forze esterne** agenti sul sistema.

In un sistema di punti isolato, cioè in cui la risultante delle forze esterne è zero, si ha che:

$$\bar{a}_{cm} = 0 \quad \bar{v}_{cm} = 0 \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = 0$$

Infatti, si può affermare, grazie alla prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi, che **in assenza di forze esterne la quantità di moto si conserva**. In tale condizione, **il centro di massa rimane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme**. La conservazione della quantità di moto **può anche avvenire solo lungo una sola direzione**, in tal caso anche la conservazione del momento è solo lungo una direzione.

Precedentemente è stato definito il teorema del momento angolare; tuttavia, tale definizione è ristretta ad una serie di condizioni notevoli. Generalmente il **teorema del momento angolare** afferma:

$$\bar{L} = \sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

Considerando il caso generale, si prende in considerazione un **generico sistema di riferimento in moto rispetto ad uno fermo**. Pertanto:

$$\bar{v} = \bar{v}_o' + \bar{v}'$$

$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_o'$$

Che si traduce in:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum (\bar{v} - \bar{v}_o') \times m_i \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum \bar{v} \times m_i \bar{v}_i - \sum \bar{v}_0' \times m_i \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

Considerando il prodotto vettoriale di due vettori paralleli pari a zero e poiché $\bar{v}_0'$ non dipende da i:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} - \bar{v}_0' \times \sum m_i \bar{v}_i$$

Estraendo il secondo termine dalla formula per il calcolo della velocità del centro di massa:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} - \bar{v}_0' \times \bar{v}_{cm} \sum m_i$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i - \bar{v}_0' \times \bar{v}_{cm} \sum m_i$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_0 - \bar{v}_0' \times M_{tot} \bar{v}_{cm}$$

Questo risultato differisce dal risultato precedente solo per la presenza del termine $\bar{v}_0' \times M_{tot}\bar{v}_{cm}$. Infatti, **le due versioni del teorema coincidono quando** $\bar{v}_0' \times M_{tot}\bar{v}_{cm} = 0$, cioè:

- Quando il polo 0 è **fisso**;
- Quando il centro di massa **coincide con il polo** 0;
- Quando il centro di massa **non si muove**;
- Quando il centro di massa **si muove parallelamente** al polo.

Tuttavia, considerando $m_i\bar{a}_i$ come la **somma delle forze interne ed esterne** per il corpo i:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{in} + \bar{F}_i^{ex}$$

$$\sum \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{in} + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ex} = \bar{M}_0^{in} + \bar{M}_0^{ex}$$

Ma il momento delle forze interne:

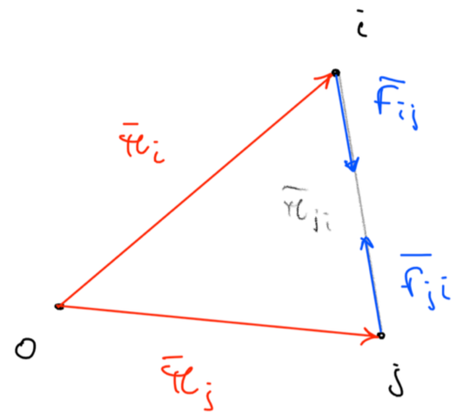
$$\bar{M}_{ij}^{in} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji}$$

Considerando il terzo principio della dinamica:

$$\bar{M}_{ij}^{in} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} - \bar{r}_j \times \bar{F}_{ij} = (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ij} = \bar{r}_{ij} \times \bar{F}_{ij}$$

Ma per lo stesso principio, la forza di i su j giace sulla **retta congiungente i due corpi**, stessa retta su cui giace il vettore $\bar{r}_{ij}$. Pertanto:

$$\bar{M}_{ij}^{in} = 0$$



Applicando questo stesso principio a tutti i corpi:

$$\bar{M}_0^{in} + \bar{M}_0^{ex} = \bar{M}_0^{ex}$$

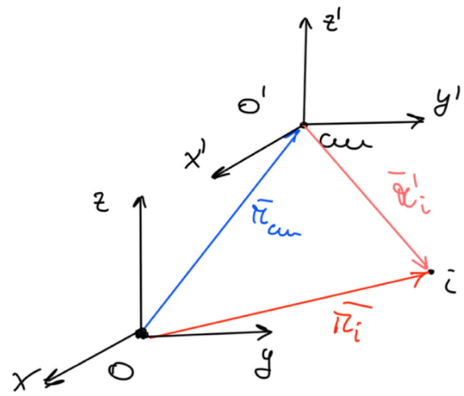
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_0^{ex} - \bar{v}_0' \times M_{tot}\bar{v}_{cm}$$

Quella appena descritta è detta **Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi**.

In genere quando $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$ il **momento angolare è costante** (**Principio di conservazione del momento angolare**).

SISTEMI DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

È possibile impostare un **sistema di riferimento con origine nel centro di massa, assi che lasciano invariate le loro direzioni e versi in funzione di un sistema di riferimento fisso** (al massimo sono ad essi paralleli). In genere un sistema di questo tipo **non è inerziale**, o meglio lo è finché è **nulla l'accelerazione del centro di** massa ed è **nulla la risultante delle forze esterne**.



Indicando con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa, si indica la posizione di un punto i rispetto al sistema fisso:

$$\bar{r}_i = \bar{r}'_i + \bar{r}_{cm}$$

Derivando si ottengono le omonime velocità:

$$\bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{v}_{cm}$$

Ovviamente, **la velocità e lo spostamento del centro di massa rispetto all'omonimo sistema sono zero**:

$$\bar{a}'_{cm} = 0 \qquad \bar{v}'_{cm} = 0 \qquad \bar{r}'_{cm} = 0$$

Da ciò consegue:

$$\sum m_i r'_i = 0 \qquad \sum m_i v'_i = 0 \qquad \sum m_i a'_i = 0$$

Anche se i singoli termini $m_i r'_i$, $m_i v'_i$ e $m_i a'_i$ sono diversi da zero.

Dal momento in cui si prende in considerazione un sistema di riferimento non inerziale, bisogna **tenere conto della forza di inerzia** e dell'**accelerazione di trascinamento**, pari all'accelerazione dell'origine (cioè del centro di massa). Pertanto, per ogni punto:

$$\bar{F}_i^{ex} + \bar{F}_i^{in} - m_i \bar{a}_{cm} = m_i \bar{a}'_i$$

Tutto ciò non va in contraddizione con quanto detto prima; infatti, sommando i contributi dei singoli punti del sistema:

$$\bar{F}^{ex} - M_{tot}\bar{a}_{cm} = \sum m_i a'_i = 0$$

$$\bar{F}^{ex} = M_{tot}\bar{a}_{cm}$$

Per quanto riguarda i momenti si può dire che **il momento risultante** rispetto al centro di massa del sistema del centro di massa rispetto alle forze esterne **non ha alcun contributo proveniente dalle forze interne e dalla forza di inerzia**:

$$M'^{(ex)} = \sum \bar{r}_i' \times \left(\bar{F}_i^{\,ex} + \bar{F}_i^{\,in} - m_i\bar{a}_{cm}\right) = \sum \bar{r}_i' \times \left(\bar{F}_i^{\,ex} - m_i\bar{a}_{cm}\right)$$
$$= \sum \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{\,ex} - \sum \bar{r}_i' \times m_i\bar{a}_{cm}$$
$$= \sum \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{\,ex} - \sum m_i\bar{r}_i' \times \bar{a}_{cm} = \sum \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{\,ex}$$

Inoltre, dato L' il momento angolare rispetto al centro di massa nel sistema del centro di massa:

$$M'^{(ex)} = \frac{d\bar{L}'}{dt}$$

Da ciò consegue che **il teorema del momento angolare vale anche nei sistemi di riferimento non inerziali**, purché si scelga come polo il centro di massa.

TEOREMI DI KÖNIG

I **teoremi di König** forniscono una **relazione** tra le quantità misurate nel **sistema di riferimento inerziale** e le stesse quantità misurate nel **sistema di riferimento del centro di massa**.

I TEOREMA DI KÖNIG: momento angolare

$$L = \sum (\bar{r}_{cm} + \bar{r}_i') \times m_i(\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i')$$
$$= \sum \bar{r}_{cm} \times m_i\bar{v}_{cm} + \sum \bar{r}_i' \times m_i\bar{v}_{cm} + \sum \bar{r}_{cm} \times m_i\bar{v}_i' + \sum \bar{r}_i' \times m_i\bar{v}_i'$$
$$= \sum \bar{r}_{cm} \times m_i\bar{v}_{cm} + \sum \bar{r}_i' \times m_i\bar{v}_i'$$
$$\bar{L} = (\bar{r}_{cm} \times M_{tot}\bar{v}_{cm}) + \bar{L}' = \bar{L}_{cm} + \bar{L}'$$

Cioè, il **momento angolare del sistema di riferimento inerziale** è pari alla **somma** del momento angolare nel **sistema di riferimento del centro di massa** ($\bar{L}'$) e del momento angolare del centro di massa nel **sistema di riferimento inerziale** ($\bar{L}_{cm}$).

II TEOREMA DI KÖNIG: energia cinetica

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i(\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i\bar{v}_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i\bar{v}'^2{}_i + \sum m_i\bar{v}_{cm}\bar{v}_i'$$
$$= \sum \frac{1}{2} m_i\bar{v}_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i\bar{v}'^2{}_i$$
$$E_k = E_k^{cm} + E_k'$$

Cioè, l'**energia cinetica del sistema di riferimento inerziale** è pari alla somma dell'energia cinetica del **sistema di riferimento del centro di massa** (E_k') e dell'energia cinetica del centro di massa nel **sistema di riferimento inerziale** (E_k^{cm}).

I teoremi di König evidenziano la **scomposizione del momento angolare e dell'energia cinetica global in moto medio del sistema** (moto del centro di massa) **e moto interno** (moto del sistema rispetto al centro di massa). Tale scomposizione **non è valida per la quantità di moto**, che è uguale per un sistema e per il centro di massa.

Per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica, **il centro di massa non riassume le proprietà del sistema**; infatti, **non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa** (cioè quantità di moto e risultante delle forze) **per ricavare momento angolare ed energia cinetica globali** ma si deve **tener conto del moto rispetto al centro di massa**.

Si distinguono così per il **singolo punto materiale** e per il **sistema di punti materiali**:

	Singolo punto materiale	Sistema di punti materiali
Quantità di moto	$\bar{p} = m\bar{v}$	$\bar{p} = \sum m_i \bar{v}_i = M\bar{v}_{cm}$
Momento angolare	$\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v}$	$\bar{L} = \bar{L}_{cm} + \bar{L}'$
Energia cinetica	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = E_k^{cm} + E_k'$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il **lavoro che agisce sulla particella i-esima** del sistema di punti materiali è dato da:

$$dW_i = \bar{F}_i \cdot \bar{r}_i = \bar{F}_i^{ex} \cdot \bar{r}_i + \bar{F}_i^{in} \cdot \bar{r}_i$$

$$W = W^{ex} + W^{in}$$

In generale, il **lavoro delle forze interne** può essere **diverso da zero** e ciò dipende dalla **variazione delle mutue distanze** tra i punti del sistema (ciò non accade nel corpo rigido in quanto tali distanze non cambiano).

Ma poiché, per quanto è stato dimostrato per il singolo punto materiale:

$$W = \sum \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Dove A e B sono le condizioni iniziali e finali del movimento che genera lavoro; quindi:

$$W = \Delta E_k = W^{ext} + W^{in}$$

Quando in gioco ci sono **solo forze conservative**, il lavoro può essere espresso anche in funzione della **variazione di energia potenziale**:

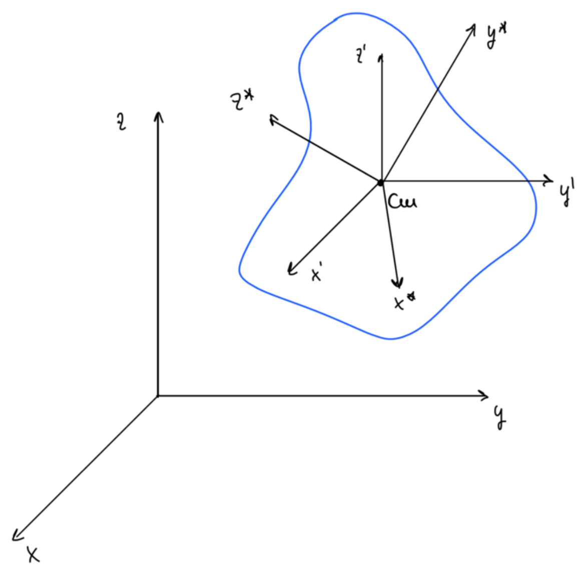
$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

Da ciò consegue, sempre in conformità con quanto detto per il singolo punto materiale, che l'**energia meccanica**, in un sistema di punti materiali in cui intervengono solo forze conservative, **si conserva**.

CORPO RIGIDO

Il **corpo rigido** è un particolare sistema di punti materiali caratterizzato da una tale **mutua interazione che ogni punto rimane fisso rispetto agli altri**. È un modello di **corpo ideale** a cui si avvicinano i corpi solidi ordinari.

Il corpo rigido non può essere trattato alla stregua del punto materiale, in quanto il suo moto può essere scomposto in un **moto complessivo** (assimilabile al moto del centro di massa) e nel **moto dei punti intorno al centro di massa**; inoltre, mentre il punto materiale può compire solo traslazioni, il corpo rigido può **sia traslare che ruotare**, quindi può rototraslazionare.



Se per un sistema di punti materiali è stato definito un sistema di riferimento solidale al centro di massa, per un corpo rigido è possibile fare altrettanto, delimitando **tre sistemi di riferimento**:

- **Sistema di riferimento inerziale fisso**, è quello solidale ad un origine O fuori dal corpo $(x; y; z)$;
- **Sistema di riferimento del centro di massa**, è quello solidale al centro di massa e descrive le proprietà del sistema dei punti $(x'; y': z')$;
- **Sistema di riferimento del corpo rigido**, è quello solidale al corpo rigido ed è utile a determinare il moto del corpo rigido in funzione agli altri sistemi $(x *; y *; z *)$.

In quanto particolare sistema di punti materiali, il corpo rigido è dotato anch'esso di **centro di massa**:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Poiché la mutua distanza tra i punti di un corpo rigido non cambia, **il lavoro delle forze interne è nullo così come la sommatoria di tutte le forze interne**. Pertanto, le **equazioni cardinali** e il **teorema dell'energia cinetica** possono essere descritti come:

- I equazione cardinale (solo forze esterne)

$$\bar{F} = m\bar{a}_{cm}$$

- II equazione cardinale (solo momento delle forze esterne)

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

- Teorema dell'energia cinetica

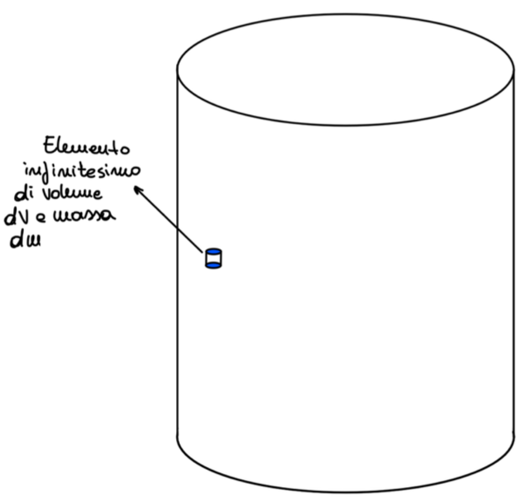
$$W = \Delta \mathrm{E_k}$$

Osservando un oggetto si può affermare che esso è **composto da tanti elementi infinitesimi** che appaiono molto piccoli a livello macroscopico ma molto grandi a livello atomico. Ognuno di questi piccoli elementi è dotato di massa, di volume e, dunque, di densità; essendo molto piccoli si possono descrivere come:

$$\rho = \frac{dV}{dm}$$

Tale quantità è definita come **densità atomica**, dal momento in cui si sta parlando di quantità infinitesime e si fa riferimento a porzioni atomiche di un corpo.

Questa suddivisione in elementi atomici di un corpo permette di effettuare un **passaggio da una rappresentazione discreta di un oggetto** (quale può essere quella di un sistema di punti materiali) **ad una continua**, portando il vantaggio di poter utilizzare **tutte le nozioni precedentemente sviluppate** per i corpi discreti e di poter sfruttare i **principi del calcolo integrale**. La riduzione che precedentemente ha portato alla trasformazione di una variazione Δ ad una quantificazione infinitesima *d* porta adesso alla **trasformazione di sommatorie Σ in integrali $\int$**.



Ai sensi di tale ragionamento si possono aggiornare alcune definizioni.

- **Massa totale del corpo**

$$M_{tot} = \int dm = \int \rho dV$$

- **Centro di massa del corpo**

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r} \rho dV}{\int \rho dV}$$

Ma poiché ρ è una costante:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r} dV}{\int dV} = \frac{\int \bar{r} dV}{V}$$

Per i **corpi non omogenei** (cioè quelli in cui la densità di un corpo non è la stessa in tutti i suoi punti, $M \neq \int dm$) si fa uso della **densità puntuale** (**o media** nel caso non si potesse ottenere quella punto per punto):

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r} \rho dV}{\int \rho dV} = \frac{1}{M} \int \bar{r} \rho(x; y; z) dV$$

La densità di un corpo continuo può essere definita in funzione della dimensione spaziale di riferimento:

- **Densità lineare**

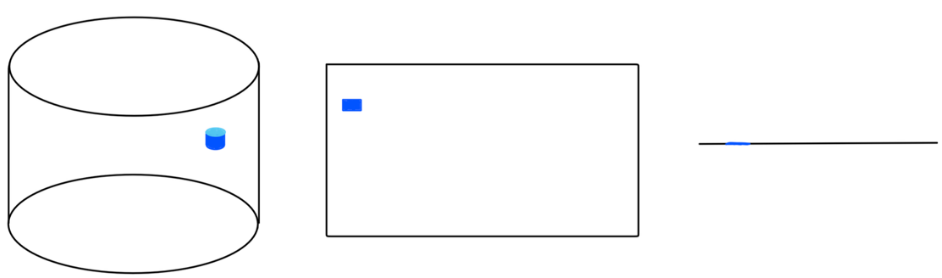
$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

- **Densità superficiale**

$$\rho_S = \frac{dm}{dS}$$

- **Densità volumica**

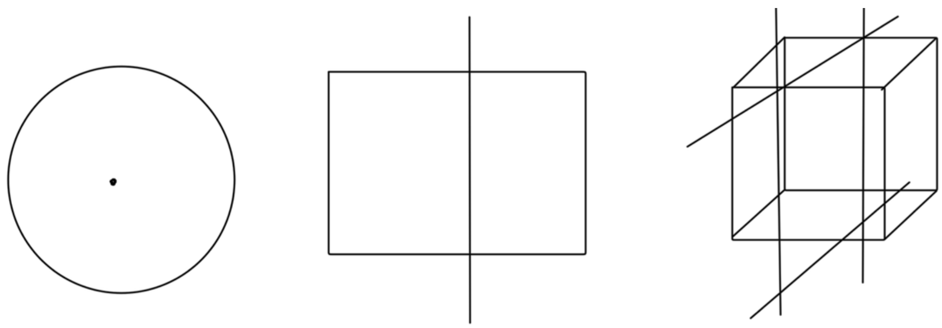
$$\rho_V = \frac{dm}{dV}$$



Inoltre, si definisce **volume specifico** di un solido la quantità di Volume nell'unità di massa e, pertanto, si determina:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm}$$

Un corpo si definisce **simmetrico rispetto ad un punto** se il suo centro di massa coincide con il centro di simmetria, **simmetrico rispetto ad un asse** se il suo centro di massa giace sull'asse di simmetria e **simmetrico rispetto ad un piano** se il suo centro di massa giace sul piano di simmetria.



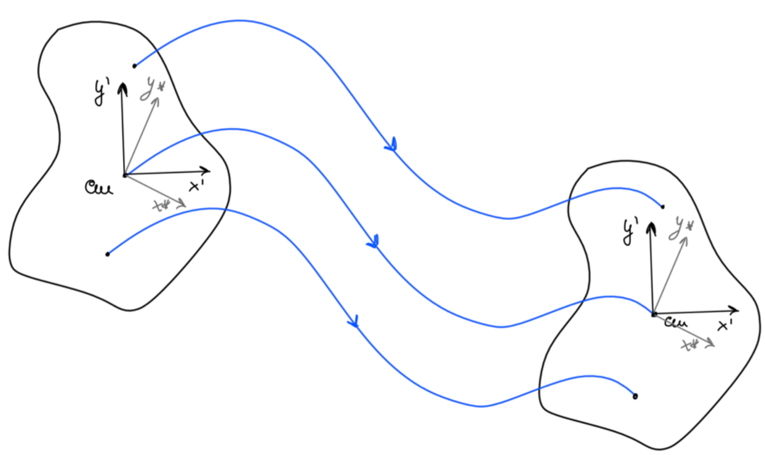
MOTO DEL CORPO RIGIDO

Come anticipato in precedenza, il **moto del corpo rigido** può essere **scomposto in due moti**: un moto **traslatorio** e uno **rotatorio**, con la possibilità di essere combinati o meno in un moto **rototraslazionale**.

Il **moto traslatorio** di un corpo rigido è lo **stesso per tutti i punti del corpo**, in modulo direzione e verso. In particolare, il moto di un punto qualsiasi del corpo rigido **è uguale al moto del centro di massa**, in quanto la posizione del sistema di riferimento del corpo rigido e del sistema di riferimento del centro di massa non cambia rispetto all'altro. Infatti, **noto il moto traslatorio del centro di massa ed è noto il moto traslatorio di qualsiasi altro punto** (ciò non vale con le rotazioni). Da ciò si deducono le equazioni del moto e del momento angolare di un corpo:

$$\bar{F} = m\bar{a}_{cm}$$

$$\bar{L} = \bar{L}_{cm} = \bar{r}_{cm} \times M\bar{v}_{cm}$$



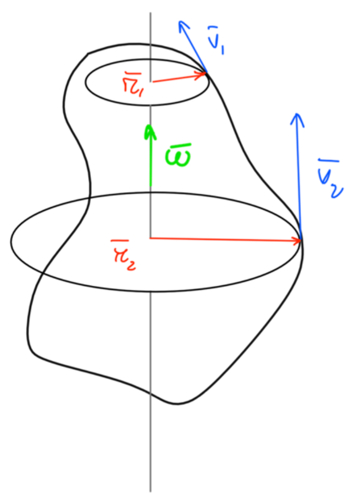
Nel **moto di rotazione** di un corpo è importante ricordare il concetto di **velocità angolare**, che può essere considerata sia come il rapporto della variazione di angolo sul tempo che come il rapporto della velocità sul raggio del cerchio osculatore che traccia il movimento:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Il moto di rotazione prevede che **ogni punto del corpo rigido compiano traiettorie circolari su circonferenze parallele tra loro con centro sullo stesso asse di rotazione** (che non è necessariamente l'asse su cui giace il centro di massa). **La rigidità del corpo impone** che, nonostante i singoli punti del corpo non viaggiano alla stessa velocità, **la velocità angolare rimanga invariata**. Infatti, **un corpo più vicino all'asse viaggerà con una velocità minore rispetto ad un corpo che è più lontano dall'asse**.

$$r_1 < r_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$$

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$



Mentre, invece, l'equazione che descrive la **rotazione di un corpo** è la seguente:

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Nel moto **rototraslazionale** ogni spostamento infinitesimo può essere considerato come la **somma di un'infinitesima traslazione e un'infinitesima rotazione**, identificate da $\bar{v}$ e $\bar{\omega}$.

Se per il punto materiale bastava dire che l'accelerazione di un corpo era nulla per dichiarare l'equilibrio statico, **con un corpo rigido bisogna necessariamente verificare l'assenza di traslazioni *e* di rotazioni**, se uno dei due moti è diverso da zero allora il corpo non è in equilibrio statico.

Quindi le **condizioni per l'equilibrio statico** sono:

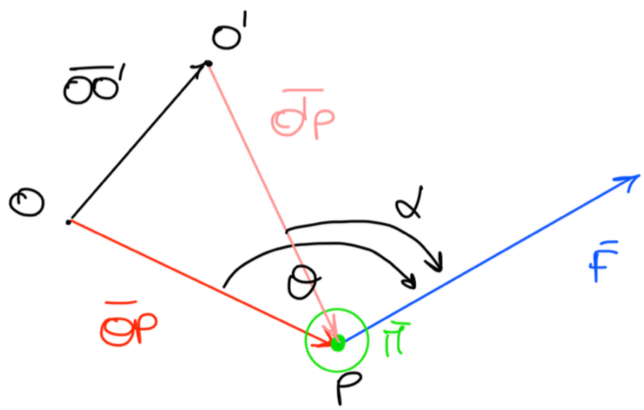
$$\begin{cases} \bar{a}_{cm} = 0 \Longrightarrow \bar{F} = 0 \\ \bar{\omega} = 0 \Longrightarrow \bar{M} = 0 \end{cases}$$

Quanto detto per il punto materiale riguardo al momento di una forza rispetto ad un polo vale anche nel caso di un corpo rigido; tuttavia, in quest'ultimo caso, come **momento complessivo** va considerata la **sommatoria di tutti i contributi che derivano dai singoli punti del corpo**. Pertanto, il momento di un sistema di forze rispetto ad un polo O diventa:

$$\bar{M}_O = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

Se si sposta il polo il ragionamento è analogo:

$$\bar{M}_{O'} = \sum \bar{r}_i' \times \bar{F}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum \overline{O'O} \times \bar{F}_i = \bar{M}_O + \overline{O'O} \times \bar{F}$$



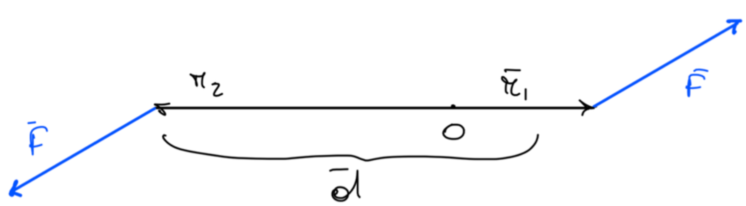
Se la **forza totale su un sistema è zero il momento non dipende dal polo**. Infatti, preso il caso in cui due forze uguali ma con verso opposto vengono applicate in due punti diversi il momento totale diventa:

$$\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F} \ \wedge \ \bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}$$

Ma poiché

$$\bar{r}_1 = \bar{d} - \bar{r}_2$$

$$\bar{M}_{tot} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 = \bar{d} \times \bar{F} - \bar{r}_2 \times \bar{F} + \bar{r}_2 \times \bar{F} = \bar{d} \times \bar{F}$$



Dove **d** (o in altri casi si può scrivere **b**) è il **braccio**, cioè la **distanza tra le rette di azione delle forze**.

In generale **una forza ed un momento non sono necessariamente ortogonali**, ciò significa che non è possibile trovare due punti tali che valga la definizione di prodotto vettoriale tra la distanza di quei punti e la forza.

Sia dato un **sistema di forze parallele** tali che esiste un versore per cui le singole forze possono essere descritte come segue:

$$\bar{F}_i = F_i \hat{u}$$

La risultante di tutti i contributi sarà:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_i = \sum F_i \hat{u}$$

Il **momento di questo sistema di forze** sarà:

$$\bar{M} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum \bar{r}_i \times F_i \hat{u} = \sum F_i \bar{r}_i \times \hat{u} = \bar{r}_c \left(\sum F_i\right) \times \hat{u}$$

Da questa relazione si può concludere:

$$\sum F_i \bar{r}_i = \bar{r}_c \left(\sum F_i\right)$$

E cioè:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}$$

Dove $\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{c}}$ è definito il **centro delle forze parallele**, cioè quel punto in cui **si può considerare applicata la forza totale** che deriva dalla somma di tutti i singoli contributi del sistema. **Per la forza peso** il centro delle forze parallele è chiamato **baricentro** e **coincide con il centro di massa** del sistema, in quanto l'accelerazione di gravità è una costante e la si può portare fuori dalla sommatoria:

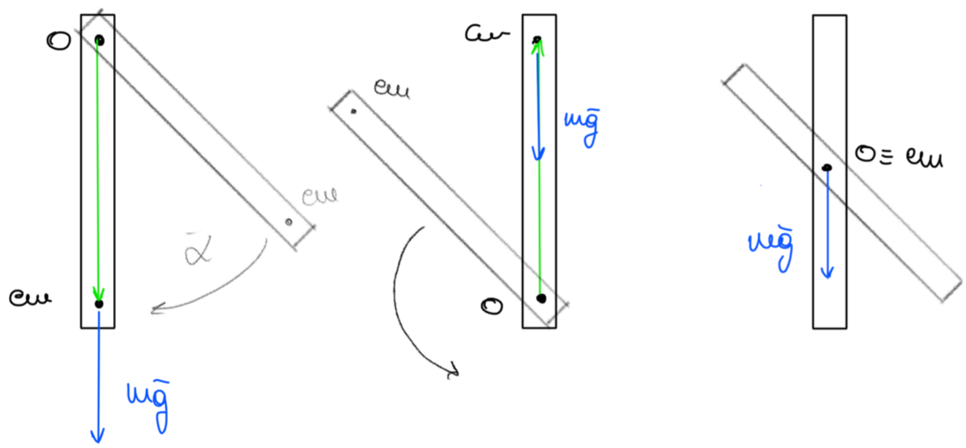
$$\bar{r}_c = \frac{\sum mg\bar{r}_i}{\sum mg} = \frac{g\sum m_i \bar{r}_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} = \bar{r}_{cm}$$

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Si supponga di avere un **corpo** che sia **sospeso da un centro di sospensione O**. Il corpo si definisce in **equilibrio** se il **momento della forza peso rispetto a tale punto O è zero**, cioè se **il centro di massa si trova lungo la verticale passante per il centro di sospensione** (vettori paralleli); se il centro di massa è **sotto il punto di sospensione** si parla di **equilibrio stabile**, in quanto il corpo tenderà sempre a tornare in questa posizione se viene spostato, se il centro di massa si trova **sopra il punto di sospensione** si parla di **equilibrio instabile**, in quanto appena spostato di un minimo il corpo tenderà a raggiungere l'equilibrio stabile.

Anche nel caso in cui **il baricentro coincide con il centro di sospensione** si ha la condizione di **equilibrio** (distanza zero) ma a differenza del caso precedente se viene spostato il corpo attorno a tale centro esso permane nel suo equilibrio; in tal caso si parla di **equilibrio indifferente**.

Se **il centro di massa è spostato rispetto alla verticale il momento della forza peso non è zero** e si genera un'**accelerazione angolare** che tende a far assumere al corpo la posizione di equilibrio.



ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO

Un corpo rigido ruota sempre attorno ad un asse, detto **asse di rotazione**, il quale non necessariamente deve passare per il centro di massa. Un asse di rotazione è tale quando **tutti i suoi punti sono fissi e possono**, pertanto, **essere usati come polo per il calcolo dei momento**; inoltre, lungo essa **è posizionata la velocità angolare** e, nel caso in cui sia variabile, l'**accelerazione angolare**.

Durante la rotazione **ogni infinitesima porzione di massa** *dm* descrive una **traiettoria circolare** nel **piano ortogonale a quello dell'asse di rotazione** e con un raggio pari alla distanza del corpo dall'asse stesso.

Conoscendo la relazione tra velocità angolare e velocità tangenziale, si può descrivere il momento angolare come:

$$d\bar{L} = \bar{r} \times dm\bar{v} = \bar{r} \times dmR\bar{\omega}$$

Che in modulo:

$$dL = rdmR\omega$$

In quanto i vettori sono ortogonali tra loro. Sia considerata la **componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare** (in questo caso lungo l'asse z):

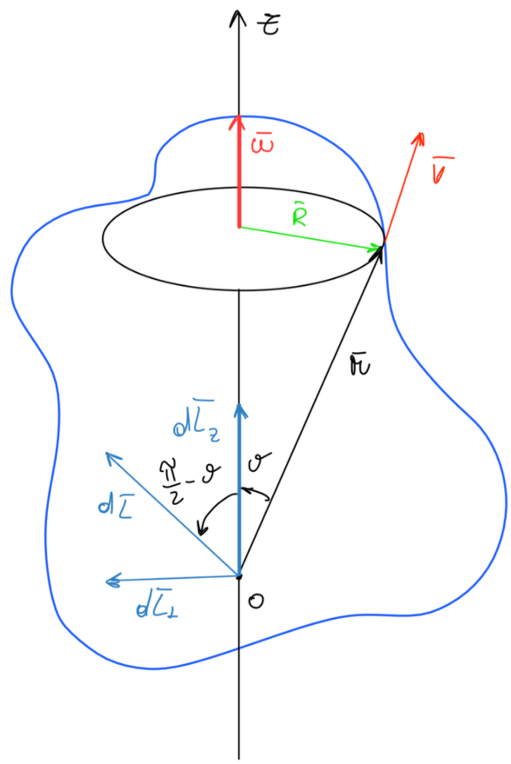
$$dL_z = dL\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = dL\sin\vartheta = dmR\omega \cdot r\sin\vartheta = dm\,R^2\omega$$

Integrando tale quantità:

$$L_z = \int dL_z = \omega \int R^2 dm = I_z \omega \ [kg \cdot m^2]$$

La quantità $\boldsymbol{I_z}$ è detta **momento di inerzia rispetto all'asse z** e **dipende** strettamente **dall'asse di rotazione**. Può capitare che il **momento angolare non sia parallelo a tale asse** e che ruoti insieme al corpo rigido; in questo caso per il calcolo del momento di inerzia **si tiene sempre conto della componente parallela** all'asse di rotazione che avrà la stessa direzione (può al massimo variare in modulo seguendo la legge appena descritta). Al **contrario la componente ortogonale cambia continuamente direzione**, oltre al modulo:

$$L_\perp = \int dL \cos\vartheta = \int dm\, r\omega \cos\vartheta$$



Un caso particolare di rotazione si ha quanto il **momento angolare è parallelo all'asse di rotazione**: quando si verifica ciò non è vero che le componenti ortogonali all'asse di rotazione del momento angolare sono assenti ma che **per ogni $\boldsymbol{dL_i}$ c'è un $\boldsymbol{dL_j}$ simmetrico e ortogonale rispetto all'asse di rotazione che annulla i contributi**. La situazione si configura così:

$$\bar{L} = I_z \bar{\omega} \Leftrightarrow L = L_z \wedge L_\perp = 0$$

Nel caso in cui L vari, le variazioni sono sempre parallele alla velocità angolare.

Con queste informazioni è possibile ricavare le **equazioni del moto** di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse:

$$d\bar{L} = \frac{d(I_z \bar{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\bar{\omega}}{dt} = I_z \bar{\alpha} = \bar{M}$$

Analogamente per la **legge oraria**:

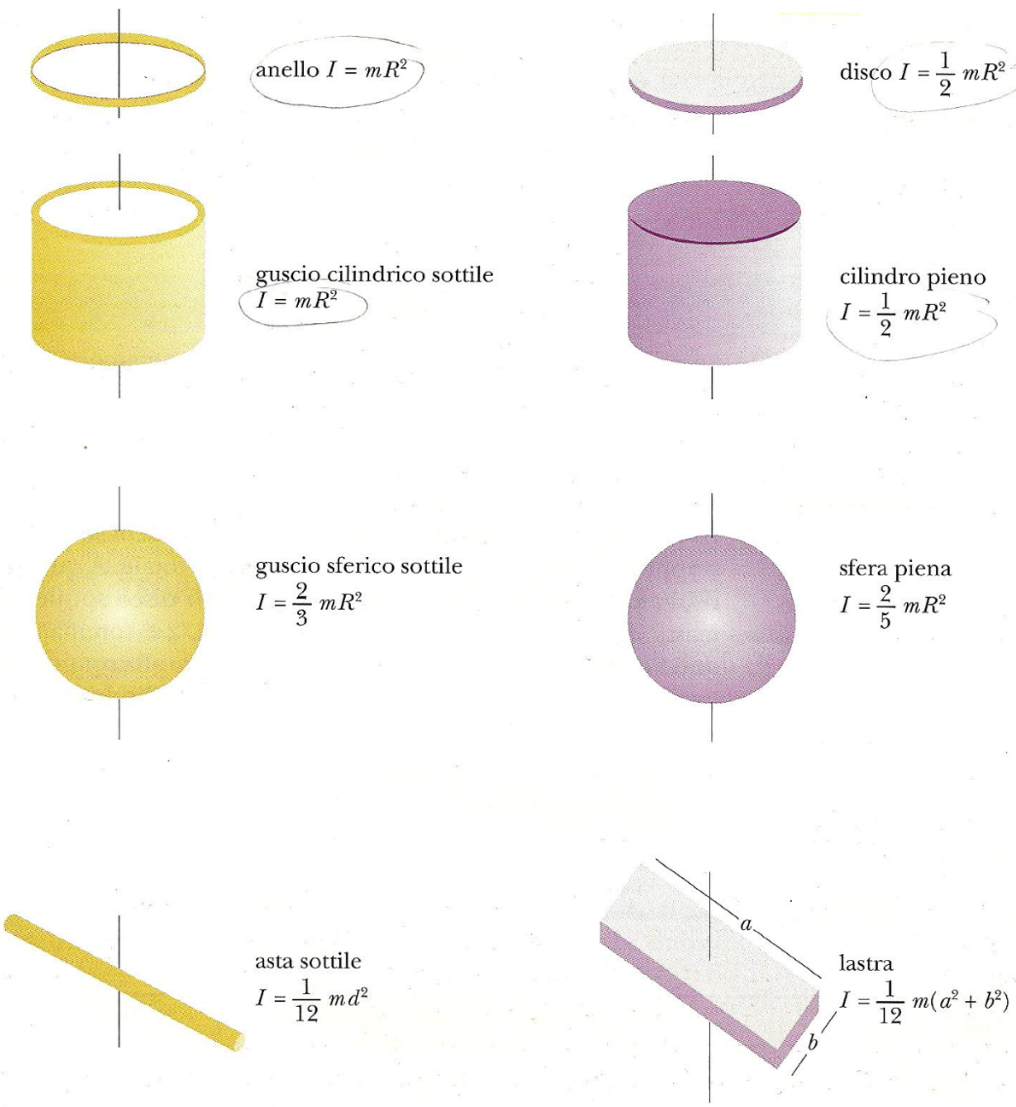
$$\alpha = \frac{M}{I_z} \Leftrightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \Leftrightarrow \vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \omega dt$$

Dall'equazione che regola la velocità angolare si possono notare delle **similitudini con l'equazione della dinamica di Newton**:

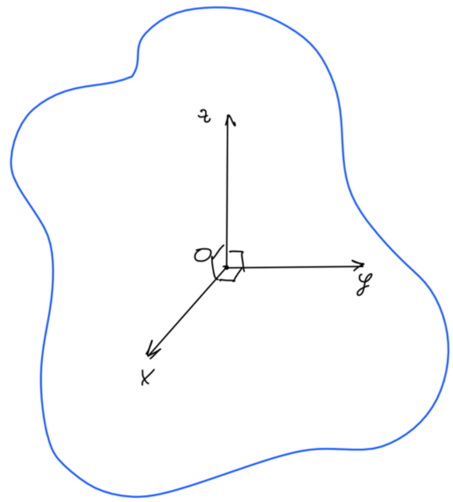
$$a = \frac{F}{m} \wedge \alpha = \frac{M}{I_z}$$

Infatti, il **momento di inerzia** svolge lo stesso ruolo della **massa inerziale**: entrambi rappresentano l'**inerzia di un corpo a ricevere una certa accelerazione**; tuttavia, se la massa si può sempre associare ad un corpo, **il momento di inerzia ha necessariamente bisogno di un asse** per essere definito.

Per alcuni corpi notevoli il momento di inerzia è:



Si definiscono **assi principali di inerzia** quegli assi che, scelto un punto O di un corpo rigido, sono **sempre trovabili**, **mutuamente ortogonali** tra loro, con **centro in O** e tali che, se vengono scelti come asse di rotazione, $\bar{L}$ **è parallelo a** $\bar{\omega}$.



Quando **il momento angolare si conserva** (nei moti rotatori come per la quantità di moto per i moti traslatori), **momento di inerzia e velocità angolare si devono bilanciare** per poter conservare tale costanza. Infatti, **al cambiamento della forma del corpo rigido** (un corpo che allarga le braccia ad esempio) devono **corrispondere cambiamenti di velocità angolare e momento di inerzia inversamente proporzionali** che conservino il momento angolare. In particolare, quando la distanza che congiunge due punti del corpo rigido aumenta, **aumenta il momento angolare** e **diminuisce la velocità angolare**.

$$\bar{M}^{ex} = 0 = \frac{d\bar{L}}{dt} \Longrightarrow L \text{ è costante}$$

È possibile calcolare anche l'**energia cinetica** di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse, considerando in primis l'energia cinetica infinitesima di un infinitesimo elemento e poi integrando per ricavare l'equazione completa. L'energia cinetica di un infinitesima massa *dm* è pari a:

$$dE_k = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 R^2$$

$$E_k = \int \frac{1}{2} dm\, \omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm\, R^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Una forma alternativa per l'energia cinetica è:

$$\omega = \frac{L}{I_z} \Longrightarrow E_k = \frac{1}{2} I_z \left(\frac{L}{I_z}\right)^2 = \frac{L^2}{2I_z}$$

Come per un punto materiale, il **lavoro di un corpo** rigido si può calcolare come la **variazione di energia cinetica**:

$$W = \Delta E_k$$

Considerando i contributi infinitesimi e sapendo che $dy = f'(x)dx$:

$$dW = dE_k = d\left(\frac{1}{2}I_z\omega^2\right)d\omega = I_z\omega d\omega = I_z\frac{d\vartheta}{dt}d\omega = I_z d\vartheta\alpha$$

Ma $\alpha = \frac{M}{I_z}$, pertanto:

$$dW = Md\vartheta$$

Integrando:

$$W = \int_0^\vartheta Md\vartheta$$

Ottenendo il lavoro si può ottenere anche la **potenza istantanea**:

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\vartheta}{dt} = M\omega$$

Sapendo che **il momento di inerzia dipende dalla massa** e sapendo che **la massa può essere espressa come densità atomica**, si può affermare che **il momento di inerzia dipende dalla distribuzione delle masse intorno all'asse di rotazione**:

$$I_z = \int R^2dm = \int R^2\rho dV = \int \rho(x^2+y^2)R^2dV$$

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il **teorema di Huygens-Steiner** entra in gioco quando si vuole semplificare il **calcolo del momento di inerzia relativo ad un asse che non passa per il centro di massa**. In tal caso il momento di inerzia si calcola:

$$I = I_{cm} + md^2$$

Dove $\boldsymbol{I_{cm}}$ **è il momento di inerzia del centro di massa** e **d la distanza dell'asse dal centro di massa**.

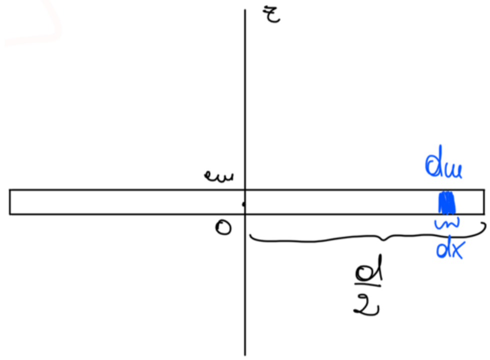
Sia presa ad esempio un'**asta omogenea di lunghezza *d*** e ne sia calcolato il momento di inerzia rispetto ad un asse di rotazione che passa per:

- il suo **centro di massa**;
- l'**estremo** dell'asta.

Sapendo che $dm = \rho dV$ e $dV = Sdx$.

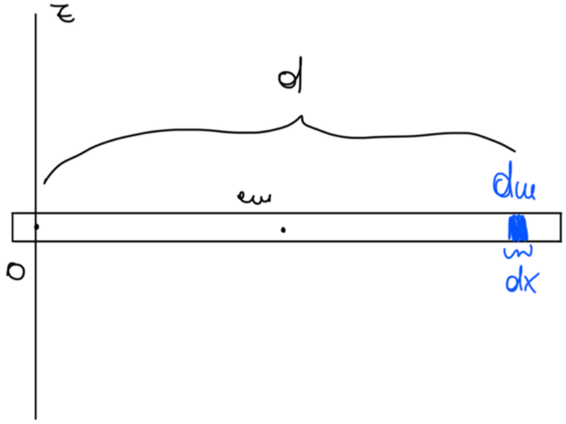
Per il primo punto dei due viene presa in considerazione la **metà della distanza**, in quanto il centro di massa è al centro dell'asta (omogenea):

$$I_{cm} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho S dx\, x^2 = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \rho S \left(\frac{d^3}{24} + \frac{d^3}{24}\right) = \rho S d \frac{d^2}{12} = \frac{md^2}{12}$$



Per l'estremo dell'asta si considera l'**intera distanza** *d*:

$$I_z = \int_0^d \rho S dx\, x^2 = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^d = \rho S d \frac{d^2}{3} = \frac{md^2}{3}$$



Con questi due risultati è possibile applicare il **teorema inverso di Huygens-Steiner**:

$$I_z = I_{cm} + md^2$$

$$\frac{1}{3}md^2 = \frac{1}{12}md^2 + m\frac{d^2}{4}$$

Ciò ci dimostra che **la distanza dal centro di massa** dell'asse di rotazione è $\boldsymbol{\frac{d}{2}}$, che sostiene l'ipotesi effettuata in precedenza.

Riprendendo l'espressione dell'**energia cinetica applicando il teorema di Huygens-Steiner**:

$$E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}md^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

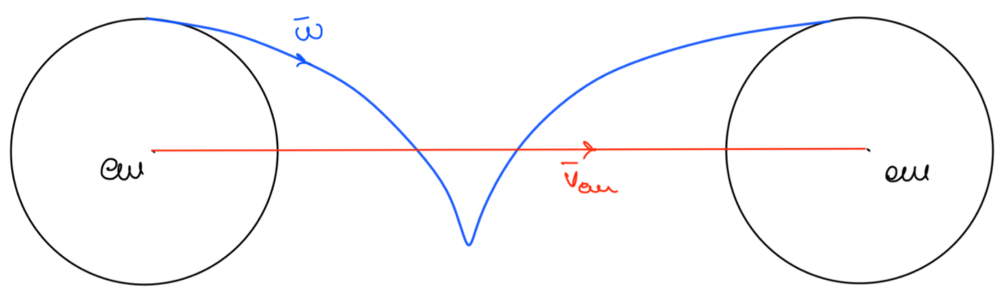
Da ciò si può concludere che l'**energia cinetica di un corpo rigido in rotazione** attorno ad un asse non passante per il centro di massa è data dalla **somma dell'energia cinetica rotazionale attorno all'asse passante per il centro di massa e dell'energia cinetica traslazionale del centro di massa**. Va notato, infine, che **la velocità del centro di massa e la velocità angolare non sono indipendenti**, bensì sono legate dalla relazione:

$$v_{cm} = \omega d$$

Dove d è la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione.

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Fino ad ora è stato trattato il caso in cui l'**asse di rotazione** fosse **fermo rispetto al corpo in rotazione**; tuttavia, si può presentare il caso in cui **l'asse** non sia fermo ma **si muove insieme al corpo**, in tal caso si definisce il **moto di puro rotolamento**.



Sia preso ad esempio un **cilindro che ruota su una superficie piana** con asse di rotazione posizionato sulla circonferenza esterna. In tal caso, durante il movimento **il cilindro compirà un arco di circonferenza** che inquadra l'angolo:

$$d\vartheta = \frac{\overline{CC'}}{R}$$

Dove $\overline{CC'}$ è l'arco di circonferenza percorso e R il raggio della circonferenza (o distanza dal centro di massa dell'asse di rotazione).

Se si considera un **moto di puro rotolamento**, **senza slittamenti**, il **centro di massa** compirà una **traiettoria rettilinea**, dunque è in un **moto traslatorio**, e **i punti attorno** ad esso una **traiettoria più complessa**, che può essere assimilata ad un **moto rotatorio**.

Il corpo ruota con una velocità $\overline{\omega}$ rispetto ad un centro di massa passante per un punto C che cambia di posizione istante per istante; **la velocità di ciascun punto è sempre calcolata in funzione della velocità angolare** ma dipende anche dalla distanza del punto dall'asse di rotazione, quindi dal punto C, ed essa è sempre perpendicolare a tale distanza:

$$v_p = |\overline{PC}|\omega$$

Mentre il centro di massa prosegue per la sua traiettoria rettilinea a velocità e accelerazione:

$$v_{cm} = \omega r \wedge a_{cm} = \alpha r$$

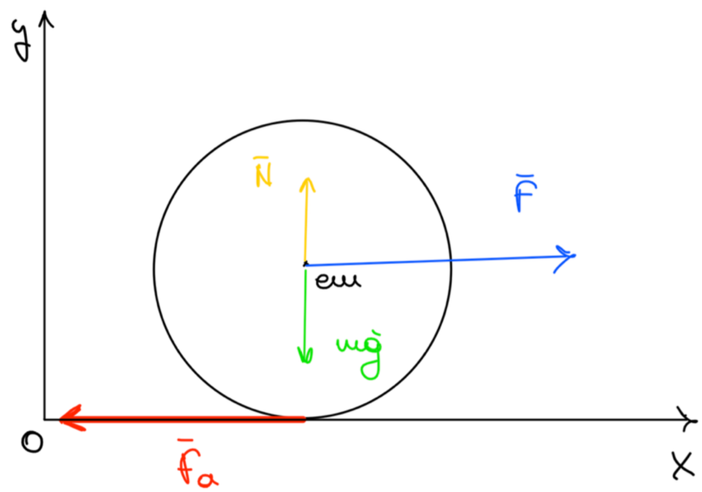
Questa tipologia di movimento è definita **rototraslazione**, in quanto **combinazione di un moto traslatorio** (quello del centro di massa) **e uno rotatorio** (quello della successione di spostamenti infinitesimi dei punti attorno al centro di massa).

Un moto di puro rotolamento, senza slittamenti, può essere **innescato grazie all'applicazione di una forza** sul corpo. In tal caso si sviluppa il seguente diagramma delle forze:

$$\sum \bar{F}_y = m\bar{g} + \bar{N} = 0 \wedge \sum \bar{F}_x = \bar{F} - \bar{F}_a = m\bar{a}_{cm}$$

Inoltre, grazie al **teorema del momento angolare**, scelto il punto O come polo:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}_a = I\bar{\alpha} = \frac{I\bar{a}_{cm}}{r}$$



Imponendo a sistema queste due equazioni si ottengono i seguenti risultati:

$$a_{cm} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \wedge F_a = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

Infatti:

$$a_{cm} = \frac{r^2 F_a}{I} \Longrightarrow F - \frac{mr^2 F_a}{I} = F_a$$

$$F = F_a\left(1 - \frac{mr^2}{I}\right) \Leftrightarrow F_a = \frac{F}{1 - \frac{mr^2}{I}}$$

E:

$$r(F - ma_{cm}) = \frac{Ia_{cm}}{r}$$

$$F - ma_{cm} = \frac{Ia_{cm}}{r^2}$$

$$F = a_{cm}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

$$a_{cm} = \frac{F}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

Tuttavia, **la forza applicata non può superare un certo valore** che dipende strettamente dalla forza di attrito:

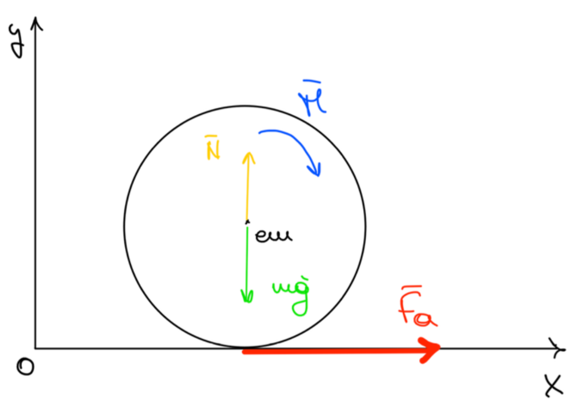
$$F_a \leq \mu_s N \Leftrightarrow \frac{F}{1 - \frac{mr^2}{I}} \leq \mu_s mg \Leftrightarrow F \leq \mu_s mg\left(1 - \frac{mr^2}{I}\right)$$

Analogamente, si può prendere in considerazione un **cilindro che ruota sotto l'effetto di un momento costante** (come, ad esempio, un motore) che spinge il corpo in avanti. In tale situazione **la forza di attrito non va a contrastare il movimento**, come per il caso precedente, bensì lo va a **favorire**; infatti, la forza di attrito è **diretta nel verso del movimento**. Con dei ragionamenti analoghi a quelli effettuati in precedenza si può mostrare:

$$a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \wedge F_a = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

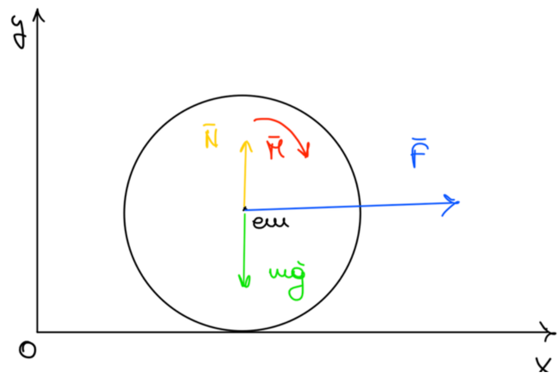
E anche in tal caso **il momento deve necessariamente seguire delle indicazioni** dettate dalla forza di attrito:

$$F_a \leq \mu_s N \Leftrightarrow \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \leq \mu_s mg \Leftrightarrow M \leq \mu_s mgr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$



Infine, è possibile trovare un **caso generale** in cui al corpo **sono applicati sia una forza che un momento**. In tale situazione **non si sa a priori il verso della forza di attrito**, bisogna dapprima **studiare le conseguenze** del momento e della forza per determinare quale delle due prevale sull'altro.

$$a_{cm} = \frac{F + \frac{M}{r}}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \wedge F_a = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2}F}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

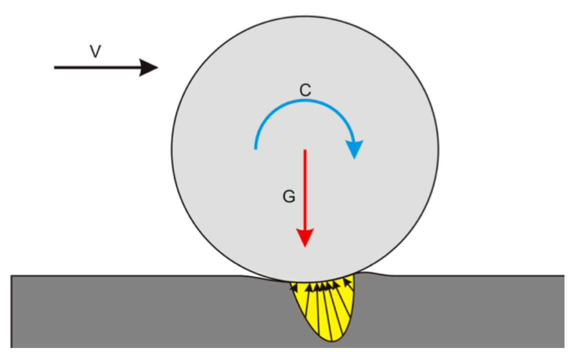


Poiché nel moto di puro rotolamento **la forza d'attrito agisce su un punto fermo** (si parla, infatti, di attrito statico) essa compie un lavoro nullo. Pertanto, si può affermare che nel moto di rotolamento l'**energia meccanica del corpo si conserva**.

In realtà si nota che, dopo un certo periodo di tempo in cui **il corpo** è in movimento, esso **si arresta**. Ciò è dovuto all'esistenza di un terzo tipo di attrito, l'**attrito volvente**, che è attribuito alle **deformazioni locali del corpo** e che si può schematizzare come un **momento frenante della reazione normale**:

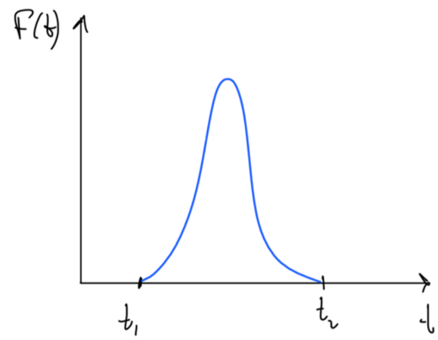
$$M_v = h\,mg$$

Con *h* il **coefficiente di attrito volvente**.



DINAMICA DEGLI URTI

Si definisce **urto tra due corpi** generici **l'interazione tra i due in un intervallo di tempo molto breve rispetto a quelli di osservazione** del loro moto e in cui **la quantità di moto dei due corpi cambia repentinamente**. Le forze che causano questo effetto sono dette **forze impulsive**.



Il **teorema dell'impulso** aveva già dato una **quantificazione di questo intervallo** di tempo, sostenendo che l'**impulso** era vettorialmente pari alla **differenza della quantità di moto** in un determinato **intervallo di tempo**:

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t} F dt = \int_{\bar{p}_0}^{\bar{p}} d\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_0 = \Delta\bar{p} = [N \cdot s]$$

Se si considera il **sistema formato dai due corpi**, le forze che interagiscono durante un urto sono sempre **forze interne**; pertanto, **la quantità di moto generale del sistema rimane invariata**:

$$\bar{p}_{in} = m_1\bar{v}_1^{in} + m_2\bar{v}_2^{in} = m_1\bar{v}_1^{fin} + m_2\bar{v}_2^{fin} = \bar{p}_{fin}$$

$$\bar{P} = (m_1 + m_2)\bar{v}_{cm} = k$$

Ciò che cambia è la quantità di moto per i singoli corpi:

$$\Delta\bar{p}_1 = m_1\left(\bar{v}_1^{fin} - \bar{v}_1^{fn}\right) = \bar{J}_{2\to1} = \int_{t_1}^{t_2} F_{2\to1} dt$$

$$\Delta\bar{p}_2 = m_2\left(\bar{v}_2^{fin} - \bar{v}_2^{in}\right) = \bar{J}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{1\to2} dt$$

Combinando questi due risultati si ottiene:

$$\bar{F}_{1\to2} = -\bar{F}_{2\to1} \ \wedge\ \bar{J}_{1\to2} = -\bar{J}_{2\to1}$$

La quantità di moto totale del sistema si conserva anche in presenza di forze esterne, a patto che **non siano forze impulsive**, per cui il contributo della variazione di quantità di moto sia trascurabile. Solo nel caso in cui la forza esterna sia della stessa entità della forza impulsiva va considerata ma non viene trattata in questa sede.

Con queste informazioni si può ridefinire un **urto come un'interazione tra due corpi con un'intensità nettamente maggiore delle eventuali forze esterni presenti**. Pertanto, si possono notare due fenomeni durante un urto:

- lo **scambio di quantità di moto tra i singoli corpi** durante l'urto sotto forma di impulsi dovuti dalle forze interne tra i corpi stessi;
- la **conservazione della quantità di moto totale** del sistema.

Se si possono fare considerazioni sulla conservazione della quantità di moto, **non vale lo stesso per la conservazione dell'energia meccanica** in quanto **non è noto a priori se le forze impulsive sono forze conservative o meno**. Inoltre, poiché durante l'urto non varia la posizione dei punti, **non varia l'energia potenziale** e, pertanto, **non si può neanche assumere a priori la conservazione dell'energia cinetica**. Infatti, per il teorema di Köenig:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 + E_k'$$

Il primo contributo è l'**energia cinetica del centro di** massa, che è **costante** nell'urto, mentre il secondo contributo è l'**energia cinetica rispetto al centro di massa**, che **può cambiare in presenza di forze non conservative**.

Nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\bar{P} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2' + (m_1 + m_2)\bar{v}_{cm} = 0 \Longrightarrow \bar{p}_1' = -\bar{p}_2'$$

L'energia cinetica del sistema del centro di massa è semplicemente quella relativa al centro di massa e, normalmente, si ha:

$$E_{k,fin}' \neq E_{k,in}'$$

Esistono tre tipologie di urti:

- urto **elastico**, si conservano quantità di moto ed energia cinetica del sistema;
- urto **anelastico**, si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica;
- urto **completamente anelastico**, si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica; in particolare, l'energia cinetica rispetto al centro di massa è zero, il che equivale a dire che i due corpi rimangono uniti dopo l'urto e la loro posizione coincide con il centro di massa.

URTO ELASTICO

Durante un urto elastico si **conservano sia quantità di moto che energia cinetica**; infatti, le forze interne al sistema sono tutte conservative e **i due corpi si muovono lungo la stessa direzione**, prima e dopo l'urto, che viene definito centrale.

$$\bar{P}_{in} = \bar{P}_{fin} \ \wedge \ E_k^{in} = E_k^{fin}$$

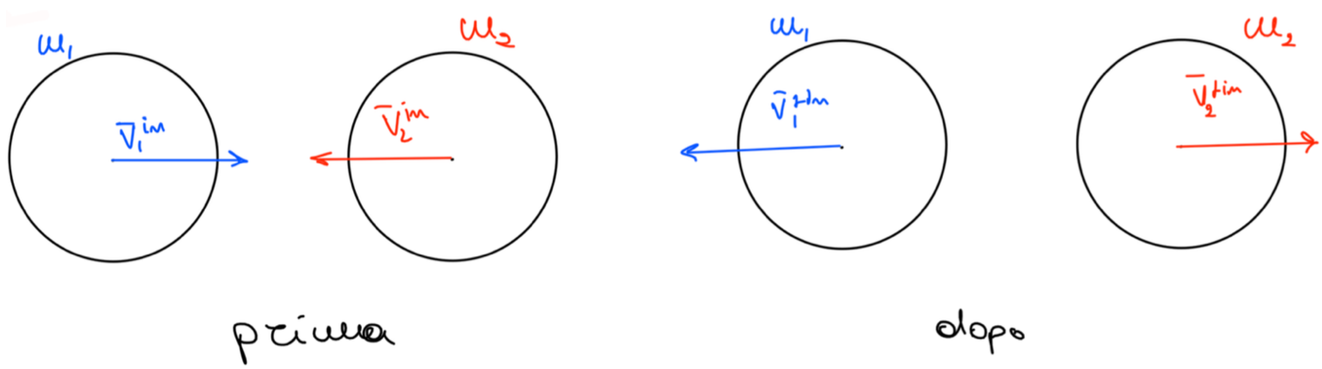
$$m_1\bar{v}_1^{in} + m_2\bar{v}_2^{in} = m_1\bar{v}_1^{fin} + m_2\bar{v}_2^{fin} \ \wedge \ \frac{1}{2}m_1\left(\bar{v}_1^{in}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\bar{v}_2^{in}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\bar{v}_1^{fin}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\bar{v}_2^{fin}\right)^2$$

Da ciò si conclude che:

$$v_1^{fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_1^{in} + 2m_2v_2^{in}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^{fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_2^{in} + 2m_1v_1^{in}}{m_1 + m_2}$$



URTO ANELASTICO

È il caso più comune; si **conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica** e i due corpi **tornano a separarsi dopo l'urto**. L'**energia cinetica** non può assumere tutti i valori ma c'è bisogno di un **valore minimo** per poter garantire la conservazione della quantità di moto. **Una frazione dell'energia cinetica viene assorbita dal sistema** e ciò è dovuto al fatto che l'impulso della forza di interazione di un corpo con un altro nella fase di deformazione degli oggetti è maggiore rispetto a quello nella fase di restituzione; pertanto, si definisce **coefficiente di restituzione**:

$$e = -\frac{p_1'^{fin}}{p_1'^{in}}$$

Ma poiché la quantità di moto del sistema è nulla:

$$e = -\frac{p_1'^{fin}}{p_1'^{in}} = -\frac{p_2'^{fin}}{p_2'^{in}} = -\frac{v_1'^{fin}}{v_1'^{in}} = -\frac{v_2'^{fin}}{v_2'^{in}}$$

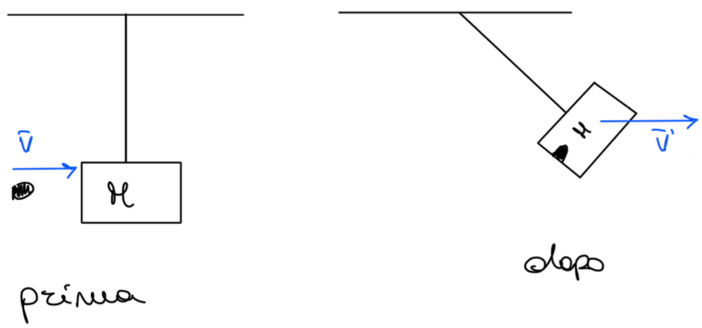
URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

I due corpi rimangono attaccati dopo l'urto formando un unico corpo di massa $m_1 + m_2$, **si conserva quantità di moto ma non l'energia cinetica**. La velocità del centro di massa dopo l'urto diventa:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{v}_{cm}$$

$$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Grazie agli **urti completamenti anelastici** è possibile determinare la **velocità di un proiettile** con l'uso del **pendolo balistico**. Tale strumento consiste in un blocco di legno di massa nota appeso verticalmente e su cui viene sparato un proiettile orizzontalmente a velocità *v*. Determinando l'**altezza massima** raggiunta dal pendolo dopo l'urto, si può arrivare a ricavare la velocità di un proiettile.



$$m\bar{v} = (m + M)\bar{v}'$$

$$E_m^{in} = \frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh = E_m^{fin}$$

$$\frac{1}{2}v'^2 = gh$$

$$h = \frac{v'^2}{2g}$$

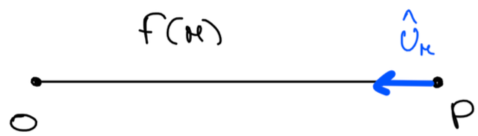
Quando si parla di **corpi rigidi** (o di punti materiali che interagiscono con i corpi rigidi), se l'**urto** è **elastico** allora **si conserva l'energia** cinetica e **se il corpo rigido è vincolato non si conserva la quantità di moto**, in quanto viene **assorbita dal vincolo** (la reazione vincolare è di intensità comparabile alle forze interne). Se agiscono **solo forze interne il momento angolare è sempre nullo** mentre **se sono presenti forze esterne ma si sceglie un polo in modo che il loro momento** (compreso il momento delle reazioni vincolari) **sia nullo allora si conserva il momento angolare**.

GRAVITAZIONE

LE FORZE CENTRALI E LE LEGGI DI KEPLERO

Le forze di un sistema di **forze** sono dette **centrali** se sono tutte **dirette verso uno stesso centro O**, cioè se sono **applicate sulla retta congiungente** il punto di applicazione della forza stessa e il centro delle forze O. Il **modulo** di queste forze può essere descritto come **funzione della distanza** tra il punto di applicazione e il centro delle forze e possono essere generalmente espresse:

$$\bar{F} = F(r)\hat{u}_r$$

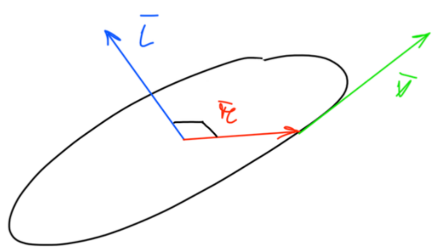


La presenza di una forza, funzione della posizione, **agisce nello spazio e lo modifica**, modificando lo stato di tutte le particelle attorno ad essa stabilendo un **campo di forze**. Questo tipo di forze si oppone a quelle viste fino ad ora, che erano tutte forze di contatto.

Il **momento angolare di un campo di forze** centrali è sempre **costante**, in quanto:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}_r = r\hat{u}_r \times F(r)\hat{u}_r = Fr \cdot \sin 0° = 0$$

Dal momento in cui il **momento angolare** è per definizione **perpendicolare al piano** inquadrato dal vettore posizione e dal vettore velocità, **il piano in cui si muove il corpo** soggetto alla forza centrale **è sempre lo stesso** perché il momento angolare è costante nel tempo. Analogamente il verso del momento angolare **definisce il verso del moto** del corpo e, nel caso in cui il corpo sia soggetto ad un campo di forze centrali, anch'esso è costante.



L'espressione del momento angolare può essere semplificata, in quanto la velocità si scompone in **velocità radiale** (parallela al vettore distanza) e **velocità tangenziale** (perpendicolare a quella radiale):

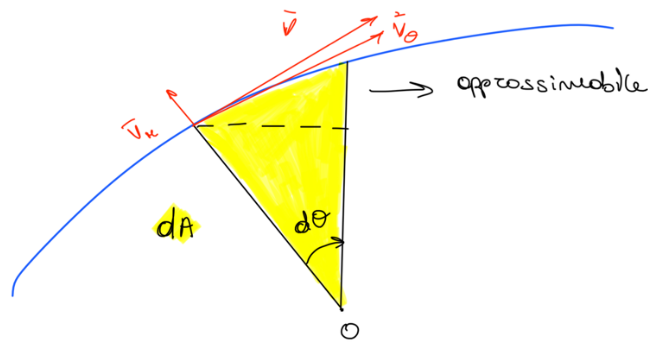
$$\bar{L} = \bar{r} \times m(\bar{v}_r + \bar{v}_\vartheta) = \bar{r} \times m\bar{v}_r + \bar{r} \times m\bar{v}_\vartheta = r\hat{u}_r \times mv\hat{u}_r + \bar{r} \times m\bar{v}_\vartheta = \bar{r} \times m\bar{v}_\vartheta$$

Che in modulo (costante) è:

$$L = rmv = m\omega r^2 = mr^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

Se si considera la **funzione area** percorsa dal corpo:

$$A = \frac{1}{2} r \cdot r d\vartheta = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$$



La cui variazione nel tempo viene definita **velocità areale**:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

Ma considerando quanto detto prima per il momento angolare:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{m}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

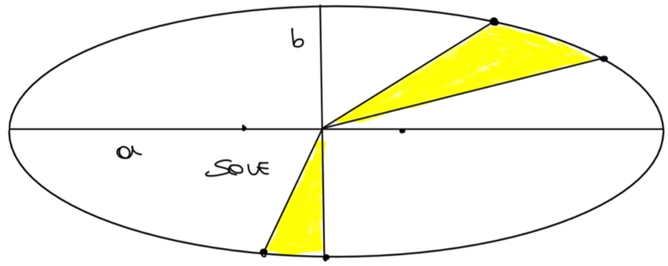
Attorno al **1570 Nicolò Copernico** formulò l'ipotesi **eliocentrica**, che fu oggetto di studi da parte di **Tycho Brahe** a fine decennio. Nel primo ventennio del secolo successivo queste scoperte furono la base per gli studi di **Giovanni Keplero** e per le sue **tre leggi**:

1. I pianeti percorrono **orbite ellittiche** attorno al **sole**, il quale occupa **uno dei due fuochi** dell'ellisse;
2. La **velocità areale** con cui il raggio vettore unisce il sole ad un pianeta è **costante** (aree uguali in tempi uguali);

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 0$$

3. Il **quadrato del periodo di rivoluzione** di un pianeta è **proporzionale al cubo del semiasse maggiore** dell'ellisse.

$$T^2 = ka^3$$

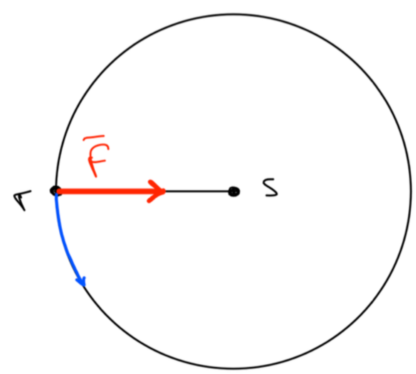


LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Le tre leggi di Keplero forniscono un'**interpretazione cinematica** del moto dei pianeti, mentre per un'**interpretazione** dinamica bisogna aspettare il **1666** con la formulazione della **legge di gravitazione universale** da parte di Sir. **Isaac Newton**. Egli fece interagire la sua legge della dinamica con la terza legge di Keplero, **approssimando l'orbita di un pianeta** attorno al sole come **circolare**:

$$a_c = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 r}{kr^2} = \frac{4\pi^2}{kr^2}$$

$$F = ma_c = m\frac{4\pi^2}{kr^2}$$



Si nota che tale forza è **inversamente proporzionale al quadrato raggio** dell'orbita (si dice che il raggio di azione è infinito).

Tuttavia, questa è la formula della gravitazione di un corpo attratto dal sole. Per determinare la **forza reciproca di attrazione** di due corpi si invoca il terzo principio della dinamica:

$$m_S\frac{4\pi^2}{k_S r^2} = |F_{T\to S}| = |F_{S\to T}| = m_T\frac{4\pi^2}{k_T r^2}$$

$$m_S\frac{4\pi^2}{k_S r^2} = m_T\frac{4\pi^2}{k_T r^2}$$

$$m_T k_S = m_S k_T$$

Definendo la **costante di gravitazione universale** (indipendente da masse coinvolte e conformazione del sistema):

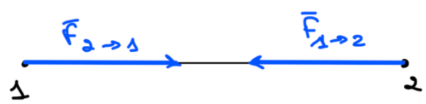
$$G = \frac{4\pi^2}{m_S k_T} = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = 6.67 \cdot 10^{11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$F = G\frac{m_S m_T}{r^2}$$

Che in forma vettoriale:

$$F_{S \to T} = G\frac{m_T m_S}{r^2}\hat{u}_{S \to T} = -G\frac{m_T m_S}{r^2}\hat{u}_{T \to S}$$

$$F_{T \to S} = G\frac{m_T m_S}{r^2}\hat{u}_{T \to S} = -G\frac{m_T m_S}{r^2}\hat{u}_{S \to T}$$



Considerando come corpi la Terra e un corpo di massa *m* la formula si aggiorna:

$$F = G\frac{m_T m}{r_T^2} = mg \Leftrightarrow g = \frac{Gm_T}{r_T^2}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Giustificando il calcolo eseguito fino ad ora inconsciamente.

Tuttavia, la legge di gravitazione universale prende in considerazione quella che viene definita **massa gravitazionale**, cioè quella che si oppone all'attrazione gravitazionale, mentre la legge $F = mg$ prende in considerazione solo **quella inerziale**. Allora l'uguaglianza ha senso solo se si considerano **massa inerziale e massa gravitazionale come la stessa cosa**.

È possibile dimostrare che, in quanto forza centrale, la **forza gravitazionale** è una **forza conservativa**:

$$W = \int_A^B -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = E_p^A - E_p^B$$

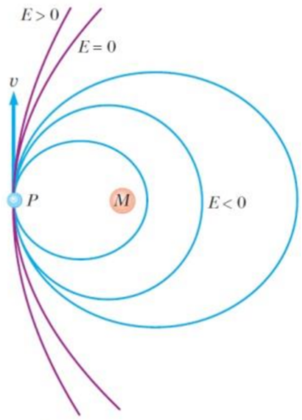
In generale:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Considerando la **somma di energia meccanica ed energia cinetica**, si distinguono le seguenti tipologie di orbite:

- Orbite **aperte**
    - Orbita **iperbolica** $E_k + E_p < 0 \Leftrightarrow |E_p| < E_k$;
    - Orbita **parabolica** $E_k + E_p = 0 \Leftrightarrow |E_p| = E_k$
- Orbite **chiuse**

- Orbita **ellittica** $E_k + E_p > 0 \Leftrightarrow |E_p| > E_k$



In genere per un satellite la velocità con cui arriva nel punto P determina il tipo di orbita attorno alla Terra. Un'orbita si definisce ellittica quando la sua **eccentricità** è:

$$0 \leq \epsilon^2 < 1$$

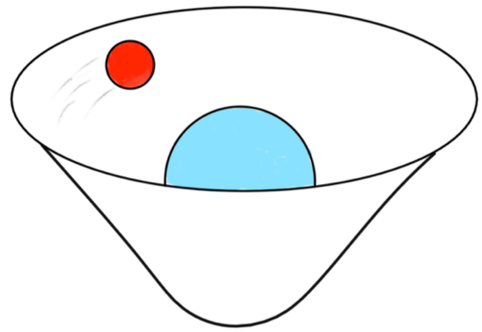
$$\epsilon = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Dove b è il **semiasse minore** e a il **semiasse maggiore** (quando sono **uguali**, cioè nella circonferenza, l'**eccentricità** è pari a zero).

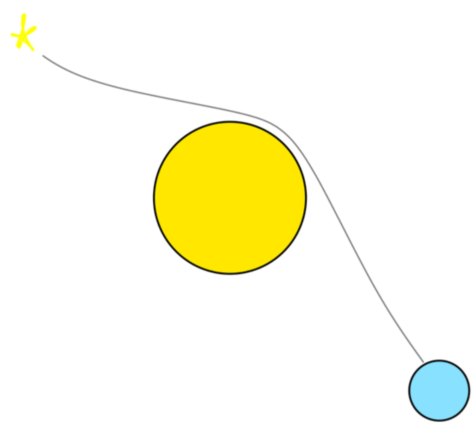
DA NEWTON AD EINSTEIN

In una delle sue riflessioni sulla sua più grande scoperta, la legge di gravitazione universale, Newton scrisse: "*... abbiamo spiegato i fenomeni celesti* (cinematicamente e dinamicamente, n.d.r.) *attraverso la forza di gravità, ma non siamo riusciti ad attribuire una causa a questa forza*". Infatti, con la sua celebre frase "*Non fingo ipotesi*", **Newton aveva messo le mani avanti** affermando che **si era limitato a descrivere come** i corpi fossero soggetti ad una forza **e di che intensità** era tale forza ma **non aveva dato un interpretazione a tale risultato**. Ci pensò tre secoli più tardi il fisico tedesco **Albert Einstein** con lo sviluppo della **teoria della relatività generale** e la sua pubblicazione nel **1915**.

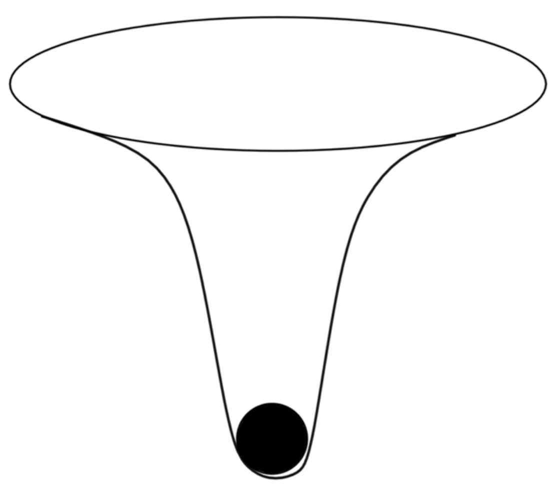
Nella teoria Einstein fornisce una **spiegazione più generale del movimento dei corpi celesti**, indipendentemente dalla loro massa, posizione e velocità (purché sia inferiore a quella della luce). Se **per Newton lo spazio era piatto, il tempo assoluto e la gravitazione una forza**, **per Einstein** le cose cambiano: **lo spazio e il tempo sono connessi** (spazio-tempo), **le masse dei corpi piegano il tessuto spazio temporale** (come una palla piega un telo sospeso in aria) e **la gravità è una conseguenza di tale fenomeno**.



Maggiore è la massa e maggiore è la curvatura che il corpo causa nel tessuto, spiegando la diretta proporzionalità tra massa e forza di gravità newtoniana. **Anche la luce è soggetta a tale fenomeno** (tanto che è stata utilizzata per inverare la teoria di Einstein), infatti, essa si piega in presenza di masse molto grandi; tale fenomeno permette l'osservazione di corpi celesti che sono occultati da altri:



Tra le prove empiriche che hanno dato giustificazione alla teoria einsteiniana c'è la scoperta nel **2015** delle **onde gravitazionali**, una **flessione del tessuto spazio** temporale dovuta all'**interazione di due corpi celesti**. Tale scoperta è servita anche come **prima prova diretta dell'esistenza dei buchi neri**, corpi di una densità tale da flettere così tanto lo spazio-tempo da non lasciar passare neanche la luce.



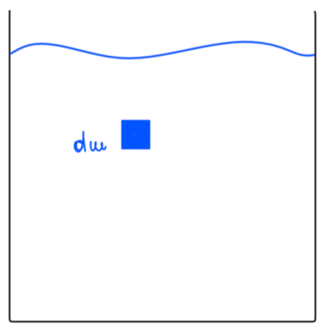
FLUIDODINAMICA

I FLUIDI

La **fluidodinamica** è quella parte della fisica che studia il **comportamento dei fluidi**. Per fluido si intende un corpo che, a differenza del corpo rigido, **non è caratterizzato da una propria forma**; in altre parole, un fluido è un **sistema di punti materiali** le cui mutue distanze non sono costanti. Esistono due tipologie di fluido:

- **Liquidi**, hanno un volume ben definito, una superficie limite e sono caratterizzati da deboli legami intramolecolari che permettono alla materia di non aggregarsi solidamente;
- **Gas**, non hanno un volume proprio ma occupano tutto il volume a disposizione dato dal contenitore che li delimita e sono caratterizzati da legami intramolecolari così deboli da non avere quasi alcuna interazione.

I fluidi, dal punto di vista **macroscopico**, sono **sistemi continui**; tuttavia, si devono considerare come un **numero infinito di elementi di massa $\boldsymbol{dm = \rho dV}$**. Ognuno di questi elementi del fluido può **scorrere rispetto alle altre**, e pur essendoci **forze di attrito interne**, non sono sufficienti a determinare una situazione di equilibrio. Un **fluido è in quiete**, infatti, quando **le forze tra gli elementi del fluido sono normali alle superfici di separazione**, altrimenti si genererebbe uno squilibrio che porta allo scorrimento reciproco.



I fluidi trattati in questa sede sono definiti **fluidi ideali** e sono caratterizzati dall'**assenza di attrito viscoso** tra le parti interne e dalla proprietà di **incomprimibilità**. Da ciò si può desumere che si parla **prevalentemente di liquidi**, che le forze tra i vari elementi del fluido sono sempre ortogonali alla superficie di applicazione e che la densità del fluido è sempre costante.

Per determinare il **comportamento meccanico** di un fluido è necessario scomporre le forze che possono agire su di esso in due categorie:

- **Forze di volume**, che agiscono su ciascun elemento infinitesimo dm di massa;
- **Forze di pressione**, che agiscono su ogni elemento infinitesimo dS di superficie.

Si definisce **pressione di un fluido** il rapporto tra l'infinitesima forza normale applicata su una superficie e la superficie infinitesima stessa:

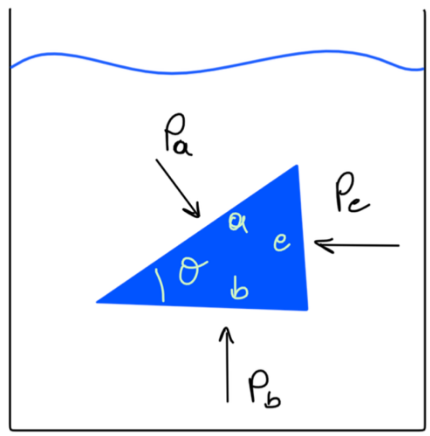
$$p = \frac{dF_n}{dS} = \frac{[N]}{[m^2]} = [Pa]$$

Si può dimostrare, inoltre, che **un fluido si trova nella condizione di equilibrio quando la sommatoria delle forze relative alle pressioni applicate su un elemento di un fluido è zero** per ogni componente:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$



Lo strumento che viene utilizzato per determinare la pressione di un fluido è il **barometro**. Grazie a tale strumento è stato possibile determinare anche un'altra misura della pressione, quella del **bar**, a cui si aggiungono altre due unità di misura, l'**atmosfera** e i **millimetri di mercurio**:

$$1\ bar = 10^5 Pa \wedge 1\ atm = 1013\ bar$$

La **forza** che produce una pressione può esercitare un **lavoro**. Il **lavoro infinitesimo** relativo all'elemento di massa infinitesima dm corrisponde a:

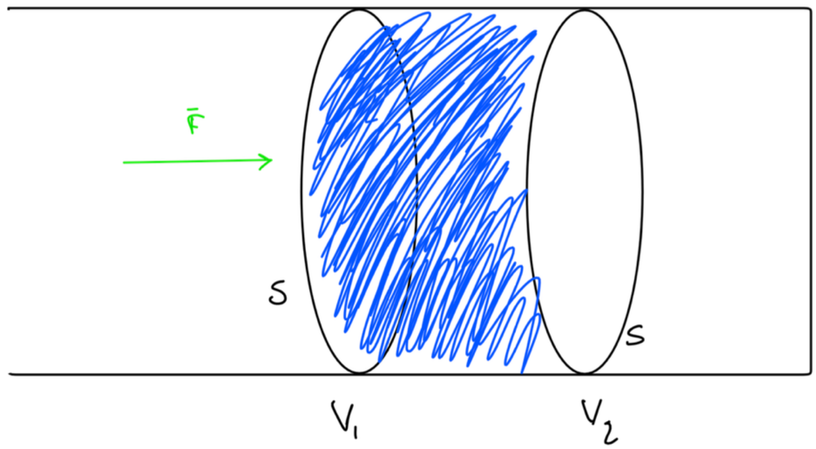
$$dW = Fdx = pSdx = pdV$$

Calcolando il **lavoro complessivo**:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

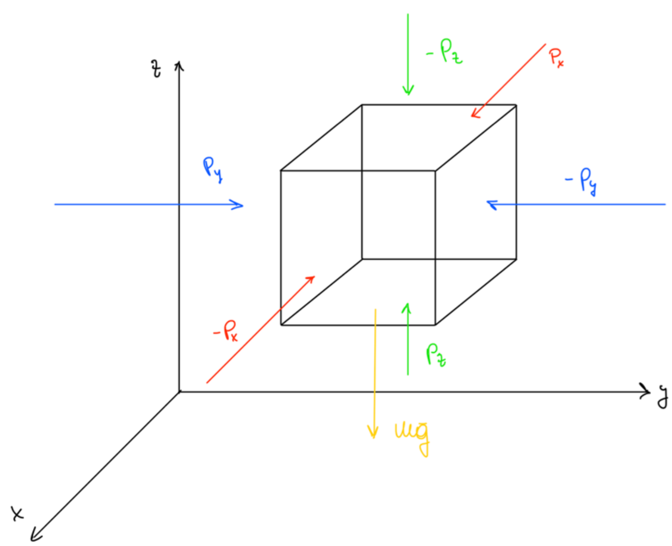
Che, nel caso in cui la pressione non dipenda dal volume:

$$W = p(V_2 - V_1)$$



LA LEGGE DI STEVINO E IL PRINCIPIO DI PASCAL

Grazie a quanto detto in precedenza, è stata definita la **stasi di un fluido** la condizione per cui **la sommatoria delle forze applicate sulle superfici dei singoli elementi è nulla**, che equivale a dire che tutti gli elementi hanno **accelerazione e velocità zero**. Nel caso di un fluido soggetto a forza peso, le sommatorie diventano:



$$\sum F_x = p(x)dS - p(x+dx)dS = 0$$

$$\sum F_y = p(y)dS - p(y+dy)dS = 0$$

$$\sum F_z = p(z)dS - p(z+dz)dS - dmg = 0$$

Se per le prime due componenti il calcolo è semplice, per la componente z bisogna sottolineare che:

$$p(z)dS - p(z+dz)dS - dmg = p(z)dS - p(z+dz)dS - \rho dVg$$
$$= p(z)dS - p(z+dz)dS - \rho dSdzg = 0$$

$$dS[p(z) - p(z+dz) - \rho dzg] = 0$$

$$p(z) - p(z+dz) - \rho dzg = 0$$

$$dp - \rho dzg = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Ciò equivale a dire che **la pressione di un fluido varia in funzione della quota in accordo con la sua densità e l'accelerazione di gravità**. Integrando per ottenere la pressione:

$$\int_{p(z)}^{p(z+dz)} dp = -\int_{z}^{z+dz} \rho g dz$$

$$p(z) - p(z+dz) = -\rho g(z + dz - z)$$

Sostituendo per semplicità la variazione di quota con *h*:

$$p(h) = p_o + \rho gh$$

Tale formula è chiamata **Legge di Stevino**, che descrive l'**aumento della pressione al variare della** profondità dalla superficie del fluido di riferimento (è una legge lineare). È possibile instaurare una **similitudine** tra la **legge di Stevino** e l'**energia potenziale**, infatti:

$$\rho gh \approx mgh$$

Dalla legge di Stevino si può dedurre il cosiddetto **principio di Pascal**, il quale afferma che **alla variazione di pressione in un punto del fluido corrisponde una variazione di pressione all'interno di tutto il fluido**, cioè si trasmette inalterata all'interno del fluido:

$$p = p_0 + dp$$

Un'applicazione di tale principio è il **torchio idraulico**, uno strumento costituito da due tubi comunicanti a U, di sezione diversa e riempiti di un fluido noto. Generalmente le **sezioni** sono **di ordini di grandezza diversi** ($S_1 \approx cm^2$ e $S_2 \approx m^2$) in modo da poter **sollevare carichi molto pesanti con forze molto piccole**.

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} \wedge p_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

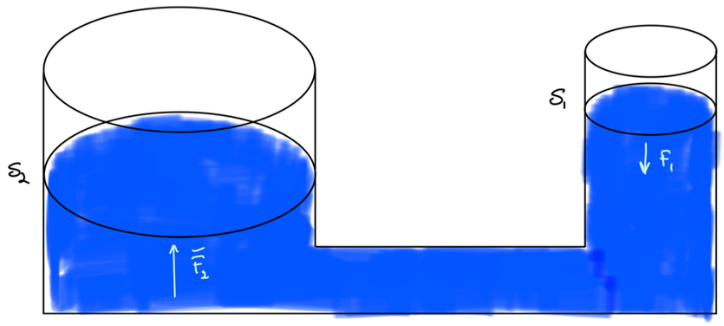
Ma per il principio di Pascal la pressione applicata su una superficie si distribuisce uniformemente su tutti i punti del fluido, compresa la superficie opposta di sezione diversa:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Considerando superfici sferiche:

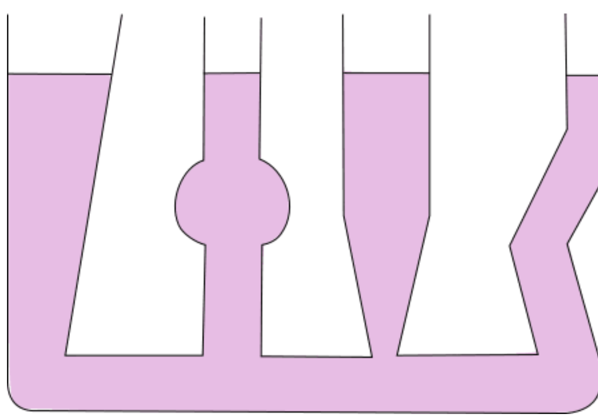
$$F_2 = F_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}$$



I VASI COMUNICANTI E IL BAROMETRO DI TORRICELLI

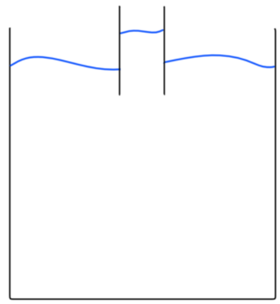
Si definiscono **superfici isobariche** tutte quelle superfici su cui la pressione è la stessa.

Sul concetto di superficie isobarica si basa il principio dei **vasi comunicanti**, secondo cui **un fluido** versato in diversi vasi di diversa forma e volume ma che comunicano tra di loro **si posa allo stesso livello di altezza**, su superfici isobariche, in quanto sul fluido agisce solo la pressione atmosferica.



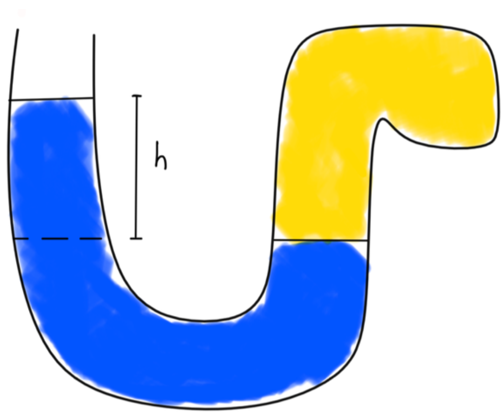
Ciò **non vale** se, considerati due o più vasi, **si immerge** un vaso in un altro, in tal caso interviene la **legge di Jurin** che regola l'intensità della risalita del fluido lungo il vaso immerso:

$$h = \frac{2\gamma \cos\vartheta}{\rho g r}$$



Dove ϑ è l'angolo di raccordo liquido-contenitore, γ è la tensione superficiale e r il raggio del tubo piccolo.

Evangelista Torricelli fu il primo a sostenere che **anche l'aria effettuasse una pressione** e dimostrò tale teoria sfruttando il concetto di superfici isobariche; lo strumento di cui si servì è il **manometro ad U**.

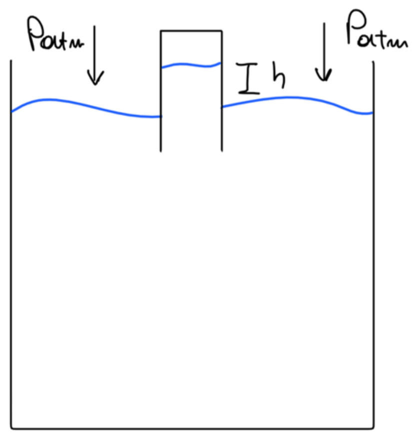


Si definisce manometro ad U **un tubo piegato** in cui un'estremità è aperta e una è chiusa e delimitata da un'appendice che contiene un fluido. Si riempie il manometro di un secondo fluido; si calcola **la differenza di altezza** tra la superficie isobarica del secondo fluido (che corrisponde a quella che delimita i due fluidi) e la superficie all'apice del tubo aperto come il **rapporto tra la differenza di pressione e il prodotto tra densità e accelerazione di gravità**.

$$h = \frac{|p_1 - p_2|}{\rho g}$$

Torricelli utilizzò lo stesso principio, usando il **mercurio** (e non l'acqua perché si sarebbe alzata di 10 metri), notando che la pressione che l'aria esercita sul mercurio contenuto nel tubo aperto ne **faceva alzare il livello di 760 mm**.

Da ciò deriva l'unità di misura in mmHg; infatti, $1\ atm = 760\ mmHg$. Per misurare la pressione con tale unità si utilizza il **barometro di Torricelli**:



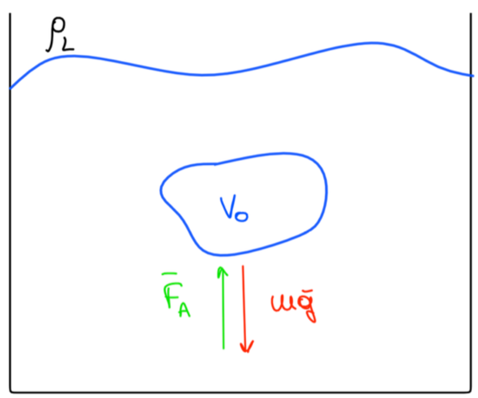
IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Sia considerato un **fluido di nota densità** e sia prelevata idealmente una **porzione di fluido di volume V_0**. Poiché **il fluido è in stasi**, **la risultante delle forze** che agiscono sulla porzione delimitata di fluido **è zero**, il che significa che **la forza peso deve essere bilanciata** da una forza uguale e contraria:

$$\sum \bar{F} = 0 \Leftrightarrow -m\bar{g} = \bar{F}_A$$

Che, considerando l'alternativa definizione del peso per un fluido:

$$\bar{F}_A = -\rho V_0 \bar{g}$$

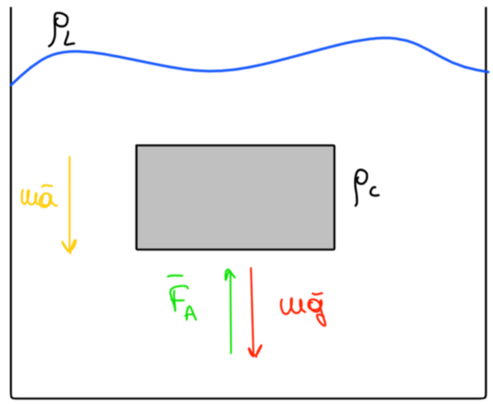


Tale forza viene chiamata **Spinta di Archimede** e deriva dal principio dell'omonimo. Se si applica **lo stesso principio ad un corpo esterno**, di densità nota e stesso volume, che viene immerso nel fluido si possono fare alcune considerazioni. Definita m_F la massa del fluido e m_C la massa del corpo estraneo:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{A_F} + m_C\bar{g} = -m_F\bar{g} + m_C\bar{g} = (\rho_C - \rho_F)V_0\bar{g}$$

Il corpo può trovarsi in tre condizioni:

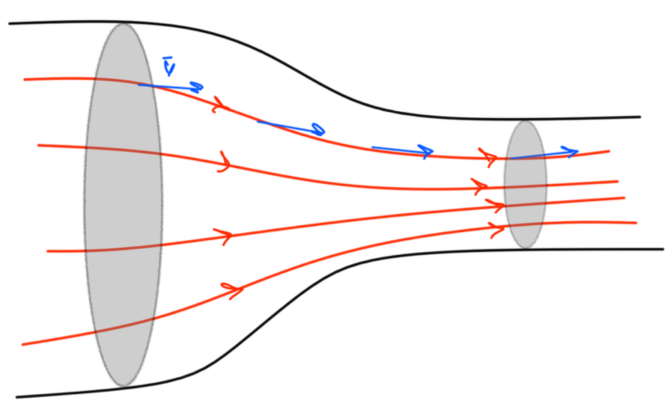
- **affonda**, se la sua densità è maggiore di quella del fluido, $\boldsymbol{\rho_C > \rho_F}$;
- **sale a galla**, se la sua densità è minore di quella del fluido, $\boldsymbol{\rho_C < \rho_F}$;
- **rimane in stasi**, se la sua densità è uguale a quella del fluido, $\boldsymbol{\rho_C = \rho_F}$;



MOTO DI UN FLUIDO

Per studiare il **moto di un fluido** bisognerebbe applicare **a ciascun elemento infinitesimo** del fluido stesso **le leggi della dinamica di Newton**, il che è alquanto **difficile**. Si può **fissare l'attenzione su un singolo elemento di posizione P(x; y; z) e di velocità v(x; y; z; t)** all'istante t. Se **la velocità non dipende dal tempo**, v(x; y; z) si può affermare di essere in un **regime stazionario**.

Siano tracciate le **linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità ma sono tangenti al suo vettore**; tali linee sono dette **linee di corrente** e, nel caso di regime stazionario, sono sempre **costanti nel tempo** e **coincidono con le traiettorie degli elementi** del fluido corrispondenti. In un regime variabile le linee di corrente non sono costanti e la traiettoria degli elementi di fluido è costituita da una successione di tratti. Da ciò si deduce che, in regime stazionario, **per un punto passa una sola linea di corrente e non ci sono intersezioni fra linee**.



Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S individuano un **tubo di flusso**, che **coincide con l'intero condotto se portato al limite**. Siano considerati delle **linee di flusso** che percorrono perpendicolarmente un **tubo di flusso di sezione S a velocità v**; la **legge di Leonardo** definisce la **portata del tubo di flusso** come il **volume di fluido che passa attraverso la sezione nell'unità di tempo**:

$$q = vS = \left[\frac{m}{s}\right][m^2] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Parlando di **fluidi ideali**, quindi di fluidi incomprimibili e a densità costante, se si considera un tubo di sezione S, **la massa del fluido può passare solo dall'entrata e dall'uscita** (essendo in regime stazionario) e **poiché la densità è costante** per ipotesi, **non varia il volume** tra l'entrata e l'uscita. Da ciò si desume che **la portata di un fluido ideale in regime stazionario è costante** e se aumenta la sezione diminuisce di conseguenza la velocità (e viceversa).

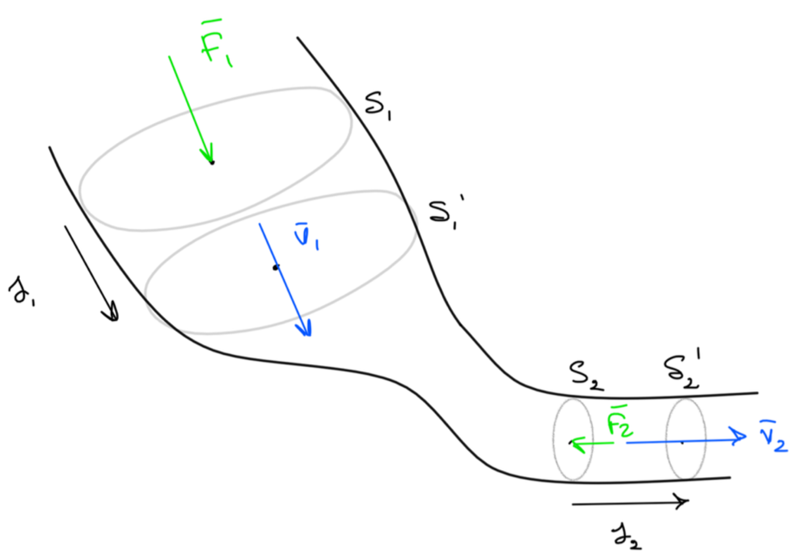
$$v_1 S_1 = q = v_2 S_2$$

Sia preso un fluido ideale che scorre in un tubo a sezione variabile. **Un volume di tale fluido si sposta** tra le sezioni $S_1 S_2$ alle sezioni $S_1' S_2'$, **individuando uno spostamento** s_1 tra S_1 e S_1' e uno spostamento s_2 tra S_2 e S_2'. **Calcolato il volume che passa durante questo spostamento**:

$$\Delta V_1 = s_1 S_1 \;\; \wedge \;\; \Delta V_2 = s_2 S_2$$

Ma poiché il fluido è incomprimibile ed è a densità costante:

$$\boldsymbol{\Delta V_1 = \Delta V_2}$$



Grazie al **teorema di Bernoulli**, detto anche **proprietà fondamentale della fluidodinamica**, è possibile ricavare la **relazione tra velocità e pressione del fluido** nelle varie sezioni del condotto in cui scorre, usando il teorema dell'energia cinetica. Il **movimento del fluido** corrisponde a **spostare nel volume ΔV_2 la massa contenuta nel volume ΔV_1**; pertanto, **l'energia potenziale**

tra le sezioni S_1' e S_2 è costante nonostante nel tempo gli elementi che lo compongono sono cambiati. Da ciò si deduce il lavoro della forza peso:

$$W = -\Delta E_p = -mg(z_2 - z_1) = -\rho \Delta V g(z_2 - z_1)$$

Dove z_1 e z_2 sono le quote a cui si trovano i due volumi uguali. Il **lavoro delle forze di pressione** dovute alle pareti del condotto è nullo, in quanto ortogonali allo spostamento, mentre il lavoro di quelle a monte di S_1 e a valle di S_2 è:

$$W_p = \bar{F}_1 \cdot \bar{s}_1 + \bar{F}_2 \cdot \bar{s}_2 = p_1 S_1 s_1 - p_2 S_2 s_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = (p_1 - p_2)\Delta V$$

Analogamente all'**energia potenziale, tra le sezioni S_1' e S_2 è costante**, pertanto la variazione di energia cinetica equivale a:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Ma per il **teorema dell'energia cinetica**:

$$W + W_p = \Delta E_k$$

$$(p_1 - p_2)\Delta V - \rho \Delta V g(z_2 - z_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Separando i termini corrispondenti alle due sezioni:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

Cioè, **in un fluido ideale in regime stazionario che scorre lungo un condotto a sezione variabile, la somma della pressione, della densità di energia cinetica e della densità di energia potenziale è costante lungo il condotto**, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = k$$

TERMODINAMICA

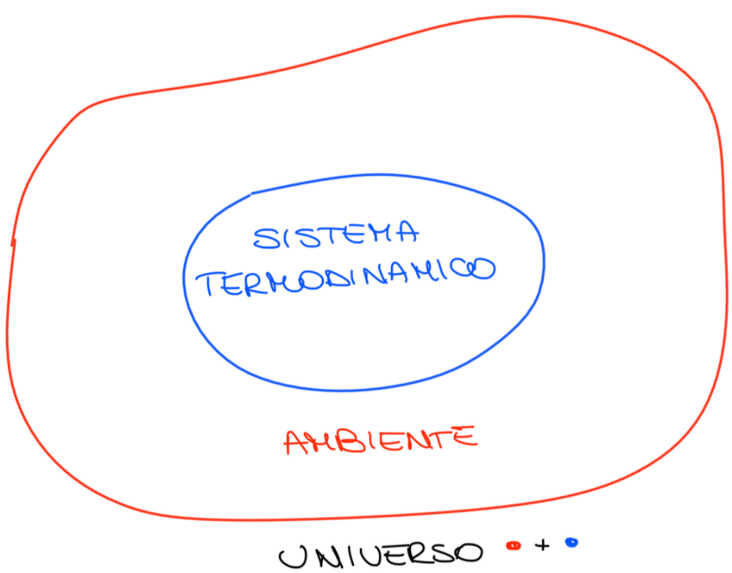
INTRODUZIONE ALLA TERMODINAMICA

La meccanica non è sufficiente a descrivere i **fenomeni legati allo scambio di** energia sotto forma di calore **e** non può neanche descrivere con le sue leggi i **sistemi che coinvolgono un elevato numero di particelle**, dell'ordine delle moli.

Tali sistemi vengono chiamati **sistemi termodinamici** e sono l'oggetto della **termodinamica**, la branca della fisica che **studia il fenomeno del trasferimento di calore**. Nel passaggio da meccanica a termodinamica non cambia solo l'argomento della trattazione ma anche il modo di concepire e prevedere il comportamento degli oggetti studiati: con la **meccanica** si faceva riferimento ad un **modello deterministico**, per il quale si può sapere l'esatta posizione e l'esatta velocità di ogni particella coinvolta nello studio, con la **termodinamica**, poiché non si possono applicare i principi della dinamica ad ogni singola particella, si utilizza un **modello probabilistico** che concentra l'attenzione sul comportamento medio del sistema.

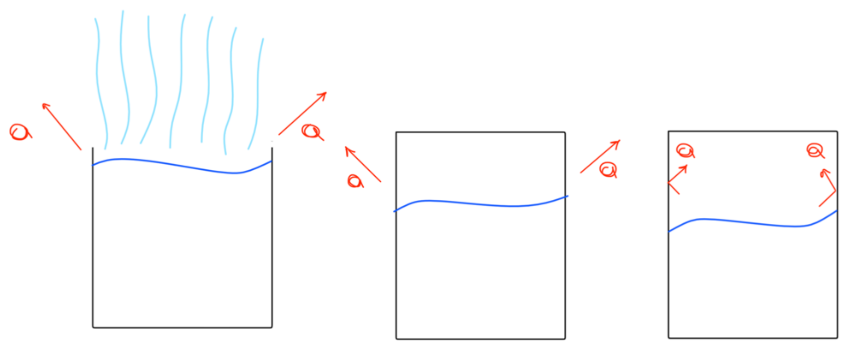
Lo **studio macroscopico dei sistemi termodinamici** prevede l'introduzione di nuove grandezze fisiche e la generalizzazione di altre al fine di poterle includere in diverse teorie. L'oggetto principale della termodinamica è l'esame del **bilancio energetico complessivo di un corpo** (si estende il campo di indagine a processi non "meccanici") che, solo alla fine del XIX secolo, fu associato a **scambi energetici** di varia natura, precedentemente erano attribuiti ad un presunto **fluido "calorico"**.

Un **sistema termodinamico** è una **porzione locale di universo** costituita da una o più parti e le cui **proprietà fisiche macroscopiche** sono **di interesse**. Il sistema interagisce con l'**ambiente**, che contribuisce alla **trasformazione delle proprietà fisiche** macroscopiche del primo. Infine, l'**universo** è l'insieme del **sistema termodinamico e** dell'**ambiente** ma non va confuso con l'universo fisico, **è un concetto locale**.



I sistemi termodinamici possono essere di tre tipologie:

- **Sistema aperto**, quando avviene uno **scambio di energia e materia** tra il sistema e l'ambiente;
- **Sistema chiuso**, quando avviene uno **scambio di energia ma non di materia** tra il sistema e l'ambiente;
- **Sistema isolato**, quando **non c'è alcuno scambio** tra il sistema e l'ambiente.



EQUILIBRIO TERMODINAMICO E IL PRINCIPIO ZERO

Le **proprietà di un sistema termodinamico** possono essere classificate in:

- **Variabili estensive**, che esprimono una proprietà globale del sistema, che dipende dalle sue dimensioni o dalla sua estensione e sono additive (massa, volume ...);
- **Variabili intensive**, esprimono una proprietà locale, che può variare da punto a punto del sistema e non sono additive (temperatura, pressione, densità ...).

Quando un **sistema termodinamico è lasciato libero di evolversi**, senza interazioni con l'ambiente, **tende a raggiungere uno stato di equilibrio termodinamico**, cioè la condizione in cui le variabili termodinamiche non variano più nel tempo. Quando accade ciò le variabili vengono dette **variabili di stato**.

Quando, invece**, un sistema si trova in uno stato di equilibrio al suo interno e con l'ambiente**, si verificano le seguenti condizioni:

- **Equilibrio meccanico** (equilibrio di forze e momenti);
- **Equilibrio chimico** (assenza di reazioni);
- **Equilibrio termico** (la temperatura è la stessa dell'ambiente).

Si parla, inoltre, di **equazione di stato** per far riferimento alle **relazioni tra le variabili termodinamiche** quando il sistema è all'equilibrio. Ad esempio, se le variabili sono T, V, p:

$$f(p, V, T) = 0$$

Che corrisponde alla **forma implicita**, oppure:

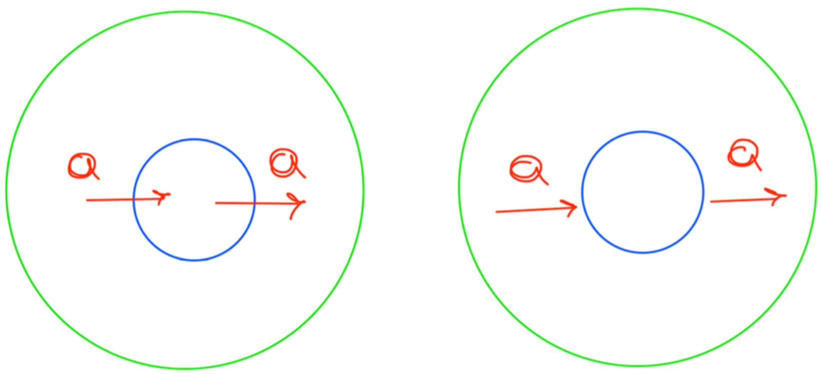
$$p = p(V, T); T = T(p, V); V = V(p, T)$$

Dati due stati di un sistema, una **trasformazione termodinamica** è il passaggio da uno stato ad un altro, individuando:

- **Stato iniziale e stato finale**, che sono stati in cui vige l'equilibrio;
- **Stati intermedi**, possono essere sia di equilibrio che di non equilibrio, in quest'ultimo caso non è detto che si è capaci di determinare tutte le variabili termodinamiche.

Definita **parete di separazione** il limite che distingue sistema termodinamico e ambiente, essa può essere di due tipologie:

- Parete **diatermica**, che **permette** lo scambio termico e il raggiungimento del relativo equilibrio;
- Parete **adiabatica**, che **impedisce o ritarda** il raggiungimento dell'equilibrio termico.



Con questa base si è capaci di definire il **principio zero della termodinamica**, chiamato così in quanto **principio base della termodinamica** formulato dopo la scoperta dei primi due. Esso afferma che **se due sistemi, A e B, sono ciascuno in equilibrio con un sistema C, allora essi sono in equilibrio tra loro** (principio di induzione). In altri termini, si può affermare **che ogni corpo possiede una proprietà chiamata temperatura e che quando due corpi sono in equilibrio termico, le loro temperature sono uguali**:

$$T_A = T_C \wedge T_B = T_C \Longrightarrow T_A = T_B$$

LA TEMPERATURA E IL CALORE

Come ogni altra grandezza, la **temperatura** deve essere **definita in funzione di un dato già dimostrato per cui essa varia**. In particolare, si definisce **grandezza termica X** quella grandezza che **varia in funzione della temperatura** e **T(X) la funzione temperatura della grandezza termica**. Per ottenere una grandezza misurabile è necessario prendere dei punti di riferimento e creare una scala in base ad essi.

Principalmente esistono due scale:

- **Scala Kelvin**, ottenuta prendendo come zero la **temperatura in cui la materia è completamente ferma**, dove un grado equivale ad 1/273,16 volte la temperatura del punto critico dell'acqua;

- **Scala Celsius** (o **centigrada**), che prende in considerazione come zero il **punto triplo dell'acqua** (la temperatura a cui l'acqua si trova in tutti e tre gli stati) e come grado centesimo il punto di ebollizione dell'acqua. Considerando i valori intermedi da zero a cento come quelli compresi tra questi due valori di temperatura, si crea la scala Celsius.

È possibile mostrare come sia la scala Celsius che quella Kelvin siano due **scale centigrade**; infatti, prendendo il punto triplo e il punto di ebollizione dell'acqua, essi saranno:

$$0.01°C \rightarrow 273.15°K$$

$$100°C \rightarrow 323.16°K$$

Le cui differenze sono 100 ° C/K. Avendo due scale centigrade è possibile affermare **che un grado °C equivale ad un grado °K** (Attenzione, non sono equiparate le misure della temperatura ma l'unità della scala).

Esiste una terza scala, usata prevalentemente nel sistema di misure statunitense, il **Fahrenheit**, che differisce dalle altre due scale per il diverso modo di determinare un grado e non è una scala centigrada. Infatti, se per la conversione da Celsius a Kelvin basta aggiungere 273.15, per il Fahrenheit bisogna risolvere la seguente equazione:

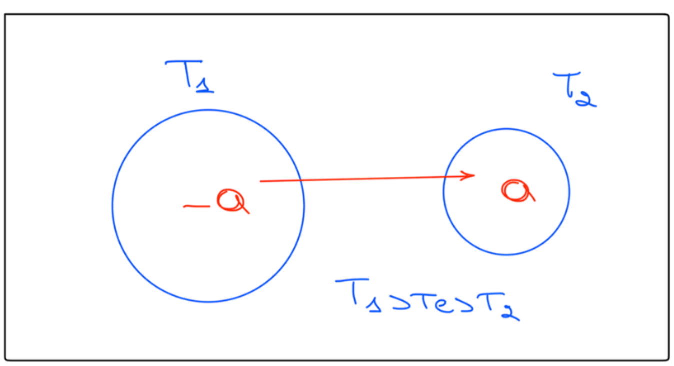
$$t(°F) = \frac{9}{5}T(°K) - 459.67 = \frac{9}{5}T(°C) + 32$$

Lo studio della variazione di temperatura in seguito al passaggio di energia è definito **calorimetria**. Il **calore** viene definito come **la quantità di energia da fornire ad 1 Kg di acqua per aumentare la sua temperatura di un grado** e si calcola in **Calorie** (Cal). Inoltre, in uno scambio di **calore**, esso può essere:

- **Ceduto**, in tal caso dQ è negativo;
- **Assorbito**, in tal caso dQ è positivo.

Presi **due sistemi termodinamici a diverse temperature che si scambiano calore**, in seguito alla loro interazione **le temperature a cui si troveranno saranno uguali** perché avranno raggiunto un **equilibrio termico**.

$$T_2 < T_e < T_1$$



I due sistemi, nel raggiungere la situazione di equilibrio, **si scambiano una quantità uguale di calore**, da un corpo essa è ceduta e dall'altro è acquistata:

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_1 = -Q_2$$

Tuttavia, **le temperature non si possono incontrare esattamente a metà** dei valori perché in tal modo viene **esclusa la grandezza estensiva dei due corpi**; pertanto, si effettua una **media ponderata che tiene conto della massa e** di una quantità che specifica la capacità di un materiale di trasferire calore, il **calore specifico**:

$$dQ = mcdT$$

Dove il calore specifico è individuato come **il calore da scambiare con l'unità di massa per variare la temperatura di 1°K**:

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} = \left[\frac{Cal}{Kg\ K}\right]$$

Portando al primo membro la massa, si ottiene la **capacità termica**, che descrive **la capacità di un determinato corpo di massa *m* di un determinato materiale a trasferire calore**:

$$C = cm = \frac{dQ}{dT} = \left[\frac{Cal}{K}\right]$$

Fino ad ora è stato considerato lo scambio infinitesimo di calore dQ, per ottenere il **calore totale** scambiato:

$$Q = \int dQ = \int_{T_i}^{T_f} mc\ dT$$

Il **calore specifico può dipendere dalla temperatura** ma in questa sede si considerano scambi di calore per cui la variazione di calore specifico è irrilevante:

$$Q_{tot} = mc\left(T_f - T_i\right)$$

Considerando l'uguaglianza di calore precedentemente mostrata:

$$Q_1 = m_1c_1(T_e - T_1) = -Q_2 = -m_2c_2(T_e - T_2)$$

$$C_1T_e - C_1T_1 = C_2T_2 - C_2T_e$$

$$T_e(C_1 + C_2) = C_1T_1 + C_2T_2$$

$$T_e = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}$$

Da ciò si può affermare che la temperatura di equilibrio di due sistemi che si scambiano calore è la **media ponderata alla massa e al calore specifico dei due sistemi**.

PROCESSI ISOTERMI

Si parla di **processo isotermico** quel processo di **scambio di calore** in cui la **temperatura rimane costante**. Una classe di processi isotermi ben nota è quella dei **cambiamenti di stato**, cioè quelle trasformazioni in cui **la materia cambia stato di aggregazione**. Durante questi processi nonostante la temperatura sia costante, **c'è scambio di calore**, che può essere identificato dal **calore latente**, cioè la **quantità di energia per unità di massa scambiata durante il cambiamento di stato:**

$$Q = m\lambda$$

Nei processi isotermi il corpo che rimane a temperatura costante viene detto **serbatoio**, o **sorgente di calore**, in quanto esso **scambia calore continuamente** pur rimanendo a temperatura costante con una capacità termica infinita.

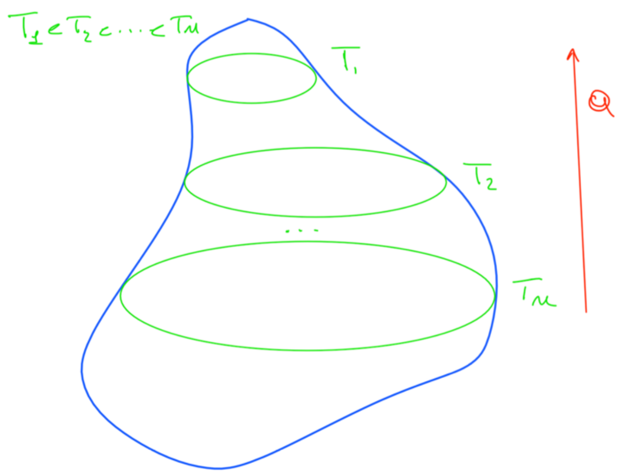
La trasmissione del calore può avvenire essenzialmente in tre modi diversi:

- **Conduzione**

Cioè attraverso il **contatto** dei corpi, ed è regolata dalla **legge di Fourier**:

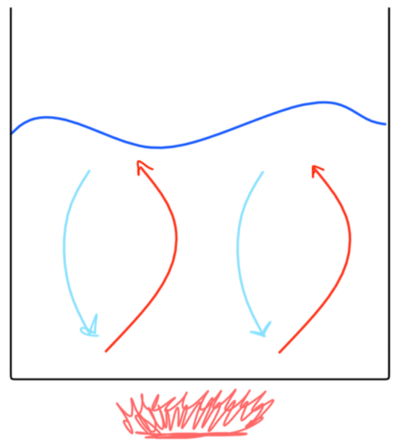
$$dQ = -k\frac{dT}{dn}\,dS\,dt$$

Dove ***dn*** è lo **spessore infinitesimo perpendicolare** alla **superficie *dS***, ***k*** è la **conducibilità termica del materiale**, ***dT*** la **variazione infinitesima di temperatura** e ***dQ*** lo **scambio infinitesimo di calore** avvenuto perpendicolarmente alla superficie di contatto. ***dQ* ha segno negativo in quanto il processo avviene sempre da sorgenti più calde a quelle più fredde**.



- **Convezione**

Avviene solitamente nei **liquidi** e consiste in uno **scambio di materia**. La parte del liquido più vicina alla sorgente di calore viene riscaldata maggiormente, con una conseguente dilatazione e riduzione della densità che si traduce in una maggior **spinta di Archimede**. Il liquido caldo così sale e lascia il posto a quello freddo, che ha modo di diventare più caldo del liquido sulla superficie, il quale si raffredda leggermente. Questo processo è chiamato **moto convettivo**.



- **Irraggiamento**

Avviene grazie all'**emissione di onde elettromagnetiche** che si propagano nell'aria ed è regolato dalla **legge di Stefan-Boltzmann**:

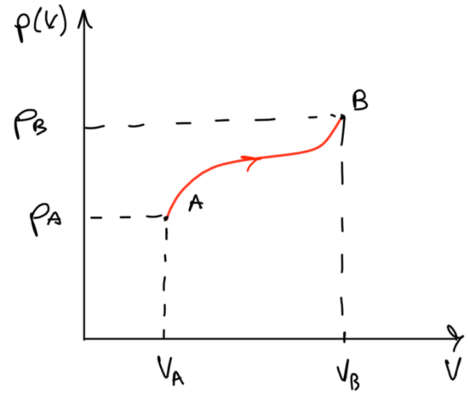
$$\varepsilon = A\sigma e T^4$$

Dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ **è l'emissività di un corpo**, A **la superficie**, σ è la costante (universale) **di Boltzmann** e vale $5.6 \cdot 10^{-8}\ J/m^2sK^4$; infine $\boldsymbol{e}$ **è l'emissività**, un valore che **va da 0 ad 1** (dove 1 indica un corpo completamente assorbente e per nulla irraggiante, nero), ed è **tipico del corpo**.

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

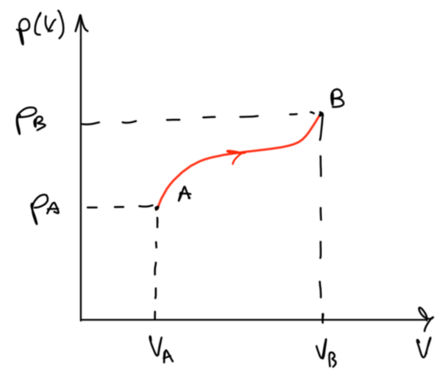
Durante una **trasformazione termodinamica** un sistema passa **da una condizione di equilibrio iniziale A ad una condizione di equilibrio finale B** durante cui cambia una o tutte le variabili termodinamiche. **Lo stato di un sistema si determina in funzione delle variabili di stato** che, in relazione tra loro, risultano nelle equazioni di stato.

Una trasformazione può essere rappresentata su un piano cartesiano, detto **piano di Clapeyron** in cui la pressione è rappresentata come funzione del volume.

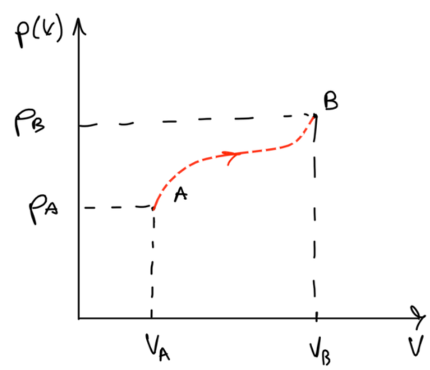


Le trasformazioni termodinamiche possono essere classificate come:

- **Trasformazioni reversibili**, una trasformazione **quasi-statica** in cui **non intervengono forze dissipative** e per cui è possibile rappresentare ogni stato infinitesimo della trasformazione con una **linea continua** poiché ognuno di tali stati intermedi è di **equilibrio**, con le variabili termodinamiche ben definite. Questo tipo di trasformazione **può essere interrotta in qualsiasi momento** e, invertendo le condizioni, **ripercorsa in senso opposto**.



- **Trasformazioni non reversibile**, una trasformazione **non quasi-statica** o in cui **intervengono forze dissipative** (o entrambi i casi). Gli **stati intermedi sono sconosciuti** e vengono rappresentati con una **linea tratteggiata**; inoltre, **non è possibile effettuare il processo inverso**.

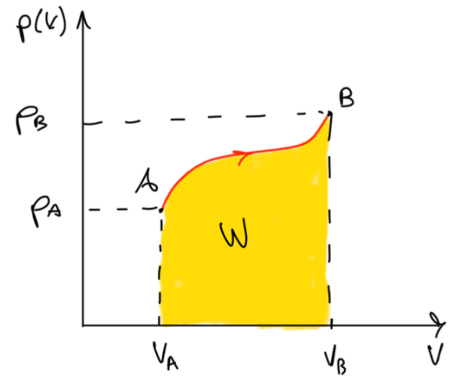


LAVORO TERMODINAMICO

Il **lavoro termodinamico** corrisponde al **lavoro infinitesimo eseguito dalla pressione**:

$$dW = F\,dh = p\,S\,dh = p\,dV$$

Che corrisponde all'**area sottesa al grafico nel piano di Clapeyron**;



$$W = \int p(V)dV$$

Tuttavia, tale operazione si può risolvere **solo quando è nota la pressione** in funzione del volume, il che accade:

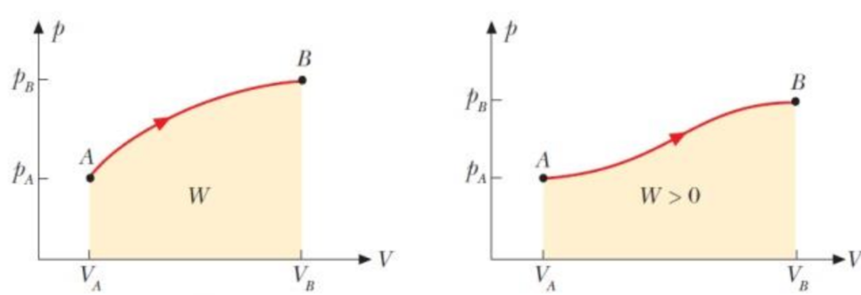
- **Quando è nota la pressione esterna ed essa è costante**, cioè indipendente dal volume

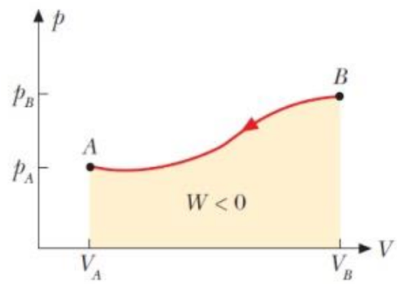
$$W = p_{amb}\int dV = p_{amb}(V_2 - V_1)$$

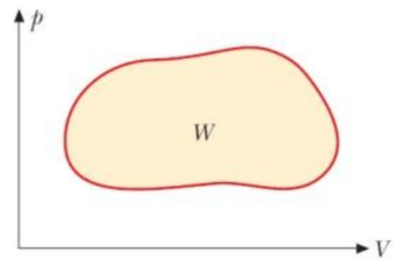
- **La trasformazione è reversibile ed è nota la legge della pressione** in funzione della pressione

Poiché è l'area del trapezoide sotteso al grafico nel piano di Clapeyron, **il lavoro dipende sempre dal percorso effettuato** per arrivare da un punto A ad un punto B. Il lavoro può così essere:

- $\boldsymbol{W > 0}$ se $\boldsymbol{V_B < V_A}$ oppure la curva chiusa è percorsa in senso **orario**;
- $\boldsymbol{W < 0}$ se $\boldsymbol{V_B > V_A}$ oppure la curva chiusa è percorsa in senso **antiorario**.







PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

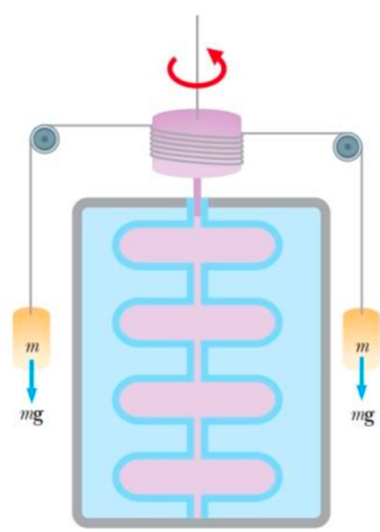
Il **primo principio della termodinamica** è un principio **empirico**, cioè formulato attraverso diverse osservazioni, principalmente grazie al lavoro di **Joule**. Egli effettuò una serie di esperimenti grazie ai quali concluse che **in una trasformazione la variazione di temperatura era proporzionale al lavoro speso** per aumentare la temperatura del sistema:

$$W \propto \Delta T$$

Uno di questi esperimenti consisteva nel collegare ad un thermos una turbina azionata da delle masse lasciate libere di cadere. Inserendo nel thermos dell'acqua e azionando il meccanismo, Joule notò che **il lavoro compiuto dalla forza peso portava all'innalzamento della temperatura dell'acqua**; inoltre, tale lavoro **non dipendeva dal tipo di trasformazione** ma solo dallo stato iniziale e quello finale del sistema, ma poiché **il lavoro delle forze conservative è sempre associato ad una variazione di energia potenziale**, fu possibile associare a quel lavoro un'energia, detta **energia interna del sistema**, che equivale a:

$$\Delta U = -W$$

L'esperimento che condusse Joule prevedeva l'implementazione di una **trasformazione adiabatica** del sistema, quindi senza scambi con l'ambiente; pertanto, **il calore scambiato era nullo** e rimaneva fuori dall'equazione.



Solo successivamente è stato possibile ricondurre il caso adiabatico ad un caso particolare; infatti, **generalizzando quel principio** si ottenne la seguente formula, detta **primo principio della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - W = U_{fin} - U_{in}$$

In genere l'**energia interna del sistema è funzione delle variabili termodinamiche**. A tale risultato si giunse considerando anche la similitudine tra la proporzionalità della temperatura con il lavoro e con il calore:

$$W \propto \Delta T$$

$$Q \propto \Delta T$$

Studiando il segno del lavoro si può concludere:

- $\boldsymbol{W > 0}$, **il sistema fa lavoro sull'ambiente** e l'energia del sistema diminuisce;
- $\boldsymbol{W < 0}$, **l'ambiente fa lavoro sul sistema** e ne aumenta l'energia.

Una **trasformazione ciclica** (cioè che inizia e finisce nello stesso stato) si può affermare che abbia **variazione di energia interna nulla**, portando l'equivalenza tra calore e lavoro:

$$\Delta U = 0 \Leftrightarrow Q = W$$

In particolare, se nel ciclo $\boldsymbol{Q > 0}$**, il sistema assorbe calore e fornisce lavoro**. Questo particolare tipo di trasformazione definisce la cosiddetta **Macchina Termica**.

Infine, si può affermare che se un sistema effettua una trasformazione da un sistema A ad un sistema B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, **Q e W dipendono dalla particolare trasformazione** (come è stato mostrato in precedenza) **ma non la loro differenza**, l'energia interna del sistema.

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

Si definiscono **gas ideali** quei fluidi che non hanno **né una forma né un volume proprio** e che **possono essere compressi**. Tale fluido **viene descritto dalle sue variabili termodinamiche**, legate dall'equazione di stato:

- **Pressione** p;
- **Volume** V;
- **Temperatura** T;

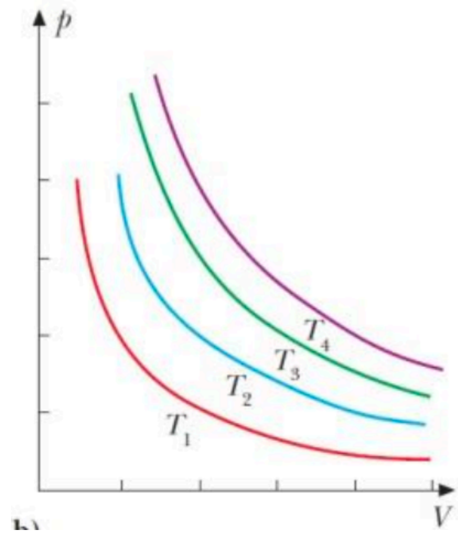
In questa astrazione **le molecole sono assunte puntiformi e non interagenti**, in quanto la pressione è bassa e la temperatura alta rispetto alle condizioni che portano alla condensazione. Il termine **ideale** associato ai gas ideali termodinamici **ha un diverso significato rispetto a quello utilizzato per i gas ideali fluidodinamici**.

Le tre equazioni che regolano i gas ideali sono:

- **Legge isoterma di Boyle**

Preso un gas a **temperatura costante**, la relazione tra pressione è volume è costante ed è identificata, nel piano di Clapeyron, da rami di iperbole.

$$pV = k$$



- **Legge isobara di Volta – Gay Lussac**

Coinvolge una trasformazione a **pressione costante**, risultando in un aumento lineare con la temperatura:

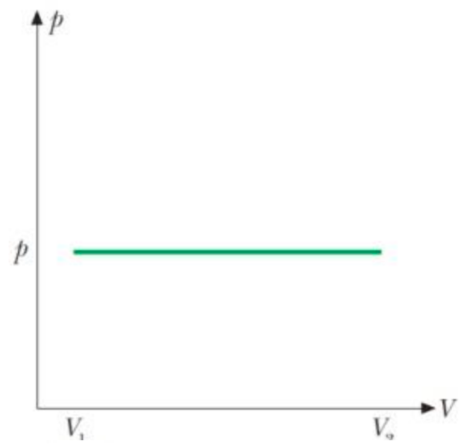
$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

Dove **V_0 è il volume del gas a temperatura t = 0, t è la temperatura in °C e α il coefficiente di espansione e vale $\frac{1}{273.15}$ °C^{-1}**. Grazie a questa legge è stato possibile dimostrare perché non si può portare un corpo allo zero assoluto. Infatti:

$$V = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0\alpha T$$

Dove **T è la temperatura in Kelvin**. Da ciò si conclude che allo zero assoluto il volume del solido dovrebbe essere nullo, il che non può accadere.

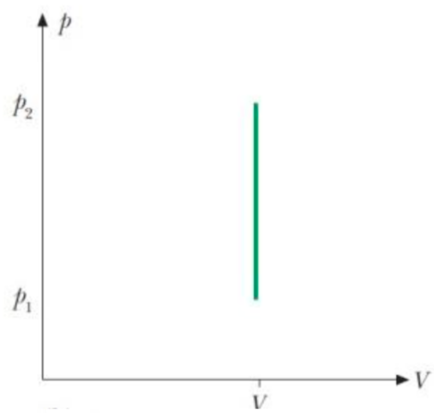
Sul **piano di Clapeyron** una trasformazione isobara è rappresentata da un **segmento parallelo all'asse del volume**.



- **Legge isocora di Volta – Gay Lussac**

È una trasformazione a **volume costante**; infatti, sul piano di Clapeyron è rappresentata da un **segmento verticale** e parallelo all'asse della pressione e descrive una trasformazione in cui la pressione varia linearmente con la temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$



Dove $\boldsymbol{p_0}$ **è la pressione del gas a temperatura t = 0 e** $\boldsymbol{\beta}$ **è una costante indipendente dal tipo di gas**.

Poiché si parla di **gas ideali**, le due costanti $\boldsymbol{\alpha}$ **e** $\boldsymbol{\beta}$ **sono uguali**:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} °C^{-1}$$

Con tale risultato è possibile ricondursi alla formula di conversione da scala Celsius a scala Kelvin:

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273.15 + t$$

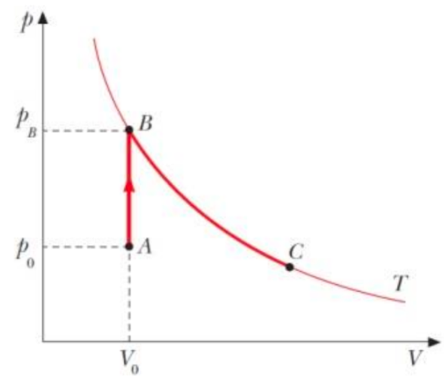
Inoltre, a temperatura $T = 0$, cioè allo zero assoluto, sia il volume che la pressione sono nulli, invalidando l'ipotesi di poter raggiungere temperature uguali o inferiori ad essa.

Avogadro definì una **mole** come $6.02214 \cdot 10^{23}$ molecole/atomi di una determinata sostanza, affermando anche che **volumi uguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di moli**. Tale proposizione viene definita **legge di Avogadro** e definisce come una mole di un qualsiasi gas, a data temperatura e pressione, **occupa sempre lo stesso volume**. A tps (cioè a temperatura e pressione standard, $t_0 = 0°C = 273.15\ K$ e $p_0 = 101325\ Pa$) il volume molare equivale a:

$$V_m = 0.02241\ m^3 = 22.41\ L$$

Prese **n moli di un gas ideale** a tps che **occupano un volume $\boldsymbol{V_0 = nV_m}$** e si portato il gas da uno stato A ad uno C con **una trasformazione isocora AB e una trasformazione isoterma BC**, si ha:

$p_B = p_0 \alpha T$ nella trasformazione isocora e nella trasformazione isoterma $pV = k$.



Combinando i due risultati:

$$pV = p_B V_0 = p_0 \alpha T V_0 = n p_0 V_m \alpha T$$

Considerando $p_0 V_m \alpha = R$, la costante dei gas ideali, si ottiene:

$$pV = nRT$$

Che risponde adeguatamente alla **legge di Boyle**. Tale formulazione, valida solo per i gas ideali, **lega tutte e tre le variabili termodinamiche**, pressione, temperatura e volume.

Per le trasformazioni isocora e isobara è possibile determinare il calore scambiato usando il concetto di calore specifico; infatti, per un'isocora:

$$dQ = nc_V dT$$

Mentre per un isobara:

$$dQ = nc_p dT$$

Dove **$\boldsymbol{c_V}$ e $\boldsymbol{c_p}$ sono il calore specifico molare a volume e pressione costante**. Per un isoterma non è possibile determinare il calore specifico in quanto:

$$c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \wedge dT = 0$$

Dalle due relazioni appena mostrate è possibile determinare il **calore scambiato durante la trasformazione**. Se i calori specifici non dipendono dalla temperatura:

$$Q_V = nc_V\Delta T \wedge Q_p = nc_p\Delta T$$

Altrimenti:

$$Q_V = n\int c_V dT \wedge Q_p = n\int c_p dT$$

È possibile dimostrare come **il calore specifico a pressione costante sia sempre maggiore di quello a volume costante**. Prese, infatti, due trasformazioni, una isocora e una isobara, per la trasformazione isocora la variazione di volume è nulla:

$$\Delta V = 0 \Longrightarrow W = p\Delta V = 0$$

Quindi:

$$Q_V = nc_V\Delta T = \Delta U + W = \Delta U$$

Mentre per la trasformazione isobara:

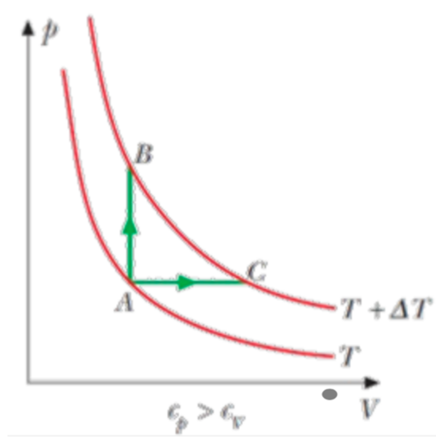
$$Q_p = nc_p\Delta T = \Delta U + p\Delta V$$

Da ciò si può concludere che:

$$Q_p > Q_V$$

$$nc_p\Delta T > nc_V\Delta T$$

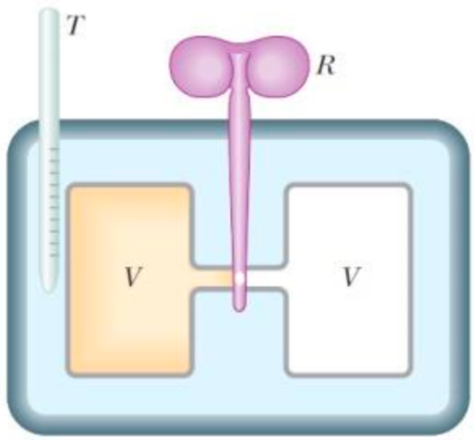
$$c_p > c_V$$



Si può, quindi, affermare che **il calore che bisogna cedere ad una mole di gas per innalzare la sua temperatura di 1K è minore nel caso di una trasformazione isocora**.

Siano presi due contenitori collegati da un rubinetto e sia messo in uno dei due contenitori un certo volume V a pressione p di un gas ideale. Siano i due recipienti contenuti in un ambiente tale che le pareti del sistema siano adiabatiche. Una volta aperto il sistema si può notare che il volume e la pressione cambiano in funzione dell'espansione del gas nel secondo recipiente; tale processo è chiamato **espansione libera del gas nel vuoto**. Si può dunque dire delle variabili di stato:

$$\Delta V \neq 0 \wedge \Delta p \neq 0 \wedge \Delta T = 0$$



Si può notare come **non ci sia scambio di calore con l'esterno**, essendo la **trasformazione adiabatica**, e **non ci sia alcun lavoro** (né sul né dal sistema) perché l**e pareti dei recipienti sono rigide**. Calcolando la variazione di energia interna del sistema con $Q = W = 0$, si ottiene:

$$\Delta U = 0$$

Dunque, durante un'espansione libera di un gas ideale la variazione di energia interna del sistema è pari a zero; inoltre, si può affermare che **l'energia interna ad un singolo stato è una funzione della temperatura,** in quanto l'energia interna è una funzione di stato (cioè dipende dalle variabili di stato del sistema) e **l'unica variabile a non variare è la temperatura**:

$$U = U(T)$$

Siano adesso considerate una trasformazione isocora e una isoterma. L'energia interna del sistema sarà:

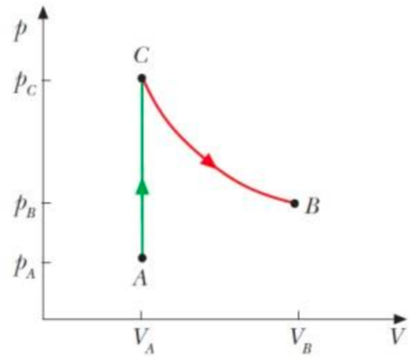
$$\Delta U = U_B - U_A$$

Ma i due termini possono essere descritti in funzione delle due singole trasformazioni:

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A$$

Ma poiché la variazione di energia interna in una trasformazione isoterma è zero:

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$



Tuttavia, **durante la trasformazione isocora**, poiché il volume non è cambiato, **non c'è stato alcun lavoro**, e la variazione di energia interna equivale a:

$$\Delta U = Q = nc_V \Delta T$$

Combinando i due risultati:

$$\Delta U = U_C - U_A = nc_V \Delta T$$

Che per trasformazioni infinitesime:

$$dU = nc_V dT \Longrightarrow c_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$$

Ma, tenendo conto di $\Delta U = Q$:

$$c_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}$$

Grazie a quanto detto fino ad ora è possibile **riscrivere il primo principio della termodinamica**:

$$dU = dQ - dW = nc_V dT$$

E **vale per qualsiasi trasformazione**. Per una trasformazione isobara si ha che il calore infinitesimo è pari a:

$$dQ = nc_V dT + pdV = nc_p dT$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali:

$$dQ = nc_V dT + nRdT = nc_p dT$$

Da cui si ricava l'**equazione di Mayer**:

$$c_p - c_V = R$$

Inoltre, dalla relazione di Mayer è possibile estrarre una nuova grandezza, definita come il **rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore a volume costante**:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

STUDIO DI ALCUNE TRASFORMAZIONI

Si prendano in considerazione le seguenti trasformazioni:

- **Trasformazione adiabatica reversibile**

In questo tipo di trasformazione **non c'è alcun tipo di scambio di calore**; pertanto, l'energia interna del sistema diventa:

$$\Delta U = -W$$

Per una trasformazione adiabatica da uno stato A ad uno stato B:

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_V(T_B - T_A)$$

Ma considerando l'equazione di stato dei gas ideali e la relazione $c_p = \gamma c_V$:

$$pV = n\left(c_p - c_V\right)T = nc_V(\gamma - 1)T$$

Da cui:

$$nc_V T = \frac{1}{(\gamma - 1)} pV$$

Considerato per i due stati A e B:

$$-\Delta U_{AB} = \frac{1}{(\gamma - 1)}(p_B V_B - p_A V_A)$$

Inoltre, considerando le trasformazioni infinitesime:

$$dQ = 0 = dU + dW = nc_V dT + pdV$$

$$nc_V dT = -nRT\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V}\frac{dV}{V}$$

$$-\frac{dT}{T} = (\gamma - 1)\frac{dV}{V}$$

Integrando entrambi i membri:

$$-\int_{T_A}^{T_B}\frac{1}{T}dT = (\gamma - 1)\int_{V_A}^{V_B}\frac{1}{V}dV$$

$$-\log(T_B - T_A) = \log(V_B - V_A)^{(\gamma - 1)}$$

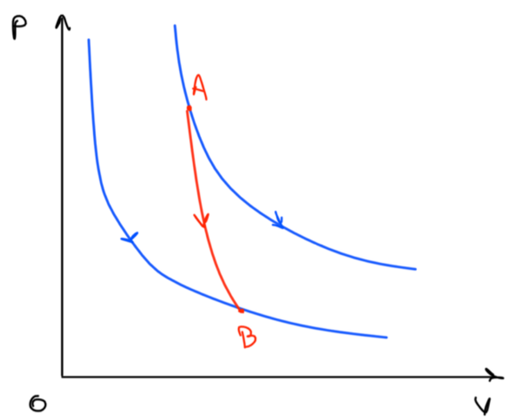
$$\log\frac{T_A}{T_B} = \log\frac{V_B^{(\gamma - 1)}}{V_A^{(\gamma - 1)}}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{V_B^{(\gamma-1)}}{V_A^{(\gamma-1)}}$$

$$T_A V_A^{(\gamma-1)} = T_B V_B^{(\gamma-1)} = k$$

Analogamente si possono dimostrare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} TV^{(\gamma-1)} = k \\ pV^{\gamma} = k \\ Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = k \end{cases}$$



- **Trasformazioni isoterme**

Nelle trasformazioni isoterme **la temperatura è costante** e sia la sua variazione che la variazione di energia interna sono pari a zero. Da ciò si può desumere:

$$Q = W$$

$$pV = k$$

Il lavoro può essere così scritto:

$$Q = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Si consideri il caso in cui la trasformazione decomprima il gas, quindi $\boldsymbol{V_B < V_A}$**, si ha un lavoro negativo**, mentre se $\boldsymbol{V_B > V_A}$ **il lavoro è maggiore di zero** e il sistema compie lavoro sull'ambiente.

- **Trasformazione isocora**

Durante una trasformazione isocora **il volume del gas non cambia** e, pertanto, non viene eseguito alcun tipo di lavoro. L'energia interna del sistema diventa:

$$\Delta U = Q = nc_V(T_B - T_A)$$

Considerando l'equazione di stato dei gas perfetti e sapendo che il volume è costante:

$$p_A V_A = nRT_A \wedge p_B V_B = nRT_B$$

$$V_A = V_B$$

$$\frac{nRT_A}{p_A} = \frac{nRT_B}{p_B}$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

- **Trasformazione isobara**

Sviluppando un ragionamento analogo a quello fatto per le trasformazioni isocore, si ottiene:

$$p_A V_A = nRT_A \wedge p_B V_B = nRT_B$$

$$\frac{nRT_A}{V_A} = \frac{nRT_B}{V_B}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Per quanto riguarda l'energia interna del sistema:

$$Q = nc_p \Delta T \wedge W = p\Delta V = nR\Delta T$$

$$\Delta U = Q - W = nc_p \Delta T - p\Delta V = nc_p \Delta T - nR\Delta T = nc_V \Delta T$$

CICLO DI CARNOT

Esiste un quarto tipo di trasformazioni che costituisce una categoria a sé stante, la **trasformazione ciclica**. Una trasformazione ciclica **è tale se lo stato iniziale è uguale allo stato iniziale**; da ciò consegue che **la variazione di temperatura e di energia interna del sistema sono nulle**:

$$\Delta T = 0 \wedge \Delta U = 0 \Longrightarrow Q = W$$

In base al **segno del calore e del lavoro** si distinguono due tipologie di trasformazioni:

- **Macchina termica**, se il sistema assorbe calore e produce lavoro

$$Q > 0 \wedge W > 0$$

- **Macchina frigorifera**, se il sistema cede calore e gli si applica un lavoro

$$Q < 0 \wedge W < 0$$

Tuttavia, il calore e il lavoro totale del ciclo di Carnot possono essere espressi come una somma di calore e lavoro positivo e negativo:

$$Q_{tot} = Q_{ced} + Q_{ass}$$

$$W_{tot} = W_{sub} + W_{fat}$$

Si definisce una nuova grandezza, **il rendimento**, che descrive la quantità di calore perso nel processo di trasformazione. Il rendimento si definisce:

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{ass} + Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}$$

Ma poiché il calore ceduto è una quantità negativa:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}$$

Ma poiché il sistema **non può non cedere calore** ma **non può neanche assorbire meno di quanto ha ceduto**:

$$0 \leq \eta < 1$$

Praticamente il **ciclo di Carnot** è rappresentato da **quattro trasformazioni**:

- **due trasformazioni isoterme** (AB e CD);
- **due trasformazioni adiabatiche** (BC e DA).

Nella trasformazione **AB**:

$$Q_{ass} = nRT_2 \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Nella trasformazione **BC**:

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

$$W_{BC} = -\Delta U = -nc_V(T_1 - T_2) > 0$$

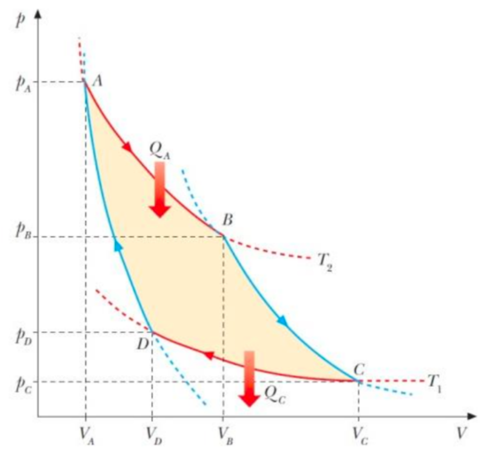
Nella trasformazione **CD**:

$$Q_{ced} = nRT_1 \log\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

Nella trasformazione **DA**:

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

$$W_{DA} = -\Delta U = -nc_V(T_2 - T_1) < 0$$



Grazie a ciò si può descrivere il rendimento:

$$\eta = 1 + \frac{nRT_1 \log\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_2 \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{nRT_1 \log\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_2 \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\log\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Ma poiché:

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1} \wedge T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

E:

$$\frac{T_1 V_C}{T_1 V_D} = \frac{T_2 V_B}{T_2 V_A}$$

Da cui:

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$