



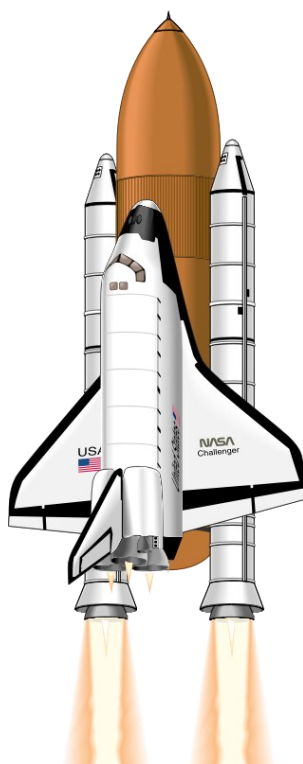
**Politecnico  
di Torino**

**POLITECNICO DI TORINO**

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale**

---

**Esercitazioni di  
Endoreattori avanzati e accesso allo spazio**



**Professori**

Prof. Ing. Lorenzo Casalino

Prof. Ing. Dario Giuseppe Pastrone

Ing. Filippo Masseni

**Studente**

Luca Laguardia s291451

# Sommario

Sommario	1
Esercitazione 1: <i>Ascesa ed inserimento in orbita</i>	2
Esercitazione 2: <i>Staging I</i>	8
Esercitazione 3: <i>Staging II</i>	13
Esercitazione 4: <i>Trasferta LEO-GEO</i>	16
Esercitazione 5: <i>Rischio chimico e fisico</i>	26
Esercitazione 6: <i>Impatto ambientale</i>	31
Esercitazione 7: <i>Settling e Vanes</i>	38
Esercitazione 8: <i>Sponges e Traps</i>	45

# Esercitazione 1: *Ascesa ed inserimento in orbita*

## Parametri noti ed obiettivo

L'obiettivo dell'esercitazione è quello di calcolare gli incrementi di velocità  $\Delta V$  necessari per l'immissione in orbita, considerando due casi di ascesa: il primo verso una *Low Earth Orbit* (LEO) a 200 km di altezza e il secondo verso una *Geostationary Orbit* (GEO) con raggio di 42164 km.

Sono assunte le seguenti ipotesi:

- primo impulso a quota 0 con immissione in un'orbita con apogeo a 150 km di altezza, al limite di visibilità dal punto di lancio (prima di sparire dietro l'orizzonte);
- secondo impulso a 150 km per l'immissione nella trasferta di Hohmann fino all'orbita finale;
- impulso finale di circularizzazione;
- perdite iniziali (tratto 0-1) pari a 1.2 km/s.

## Missione

La missione è divisa in 3 fasi:

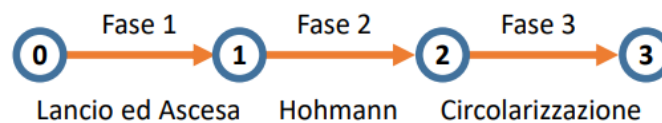


Figura 1: Fasi di missione

La fase 1 include lancio e ascesa, in particolare le manovre di salita verticale, *kick* e rotazione, *zero-lift gravity turn* con spinta parallela alla velocità relativa, e spinta nella direzione ottimale con primo impulso della trasferta di Hohmann. La fase 2 è quella di *coasting*, in cui il razzo sale a motori spenti percorrendo l'orbita di trasferimento di Hohmann. Infine, nella fase 3 si completa la missione con la circularizzazione, ovvero l'inserimento nell'orbita di destinazione.

Vengono fatte le assunzioni di:

- Terra fissa;
- spinta impulsiva al lancio (durante gli impulsi  $T//V_{rel}$ );
- traiettoria balistica;
- spinta impulsiva all'inserimento in orbita.

Innanzitutto, si calcolano i parametri orbitali:

$$r_1 = r_{\oplus} + h_1 = 6371 \text{ km} + 150 \text{ km} = 6521 \text{ km}$$

$$r_{LEO} = r_{\oplus} + h_{LEO} = 6371 \text{ km} + 200 \text{ km} = 6571 \text{ km}$$

$$r_{GEO} = 6371 \text{ km} + 35973 \text{ km} = 42164 \text{ km}$$

$$T_{GEO} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{GEO}^3}{\mu_{\oplus}}} = 86164 \text{ s}$$

con  $\mu_{\oplus} = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ , mentre il periodo coincide con la durata del giorno siderale.

## Fase 1

L'ascesa verticale iniziale fino a 150 km è comune a entrambe le missioni considerate.

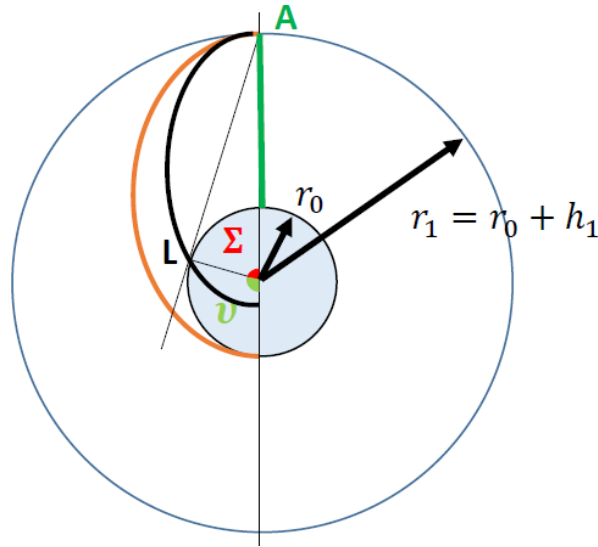


Figura 2: Schema della traiettoria di ascesa

Se si volesse lanciare dai poli perfettamente in verticale (traiettoria verde) si avrebbero dei costi elevatissimi. Si potrebbe pensare di percorrere un'orbita di lancio ellittica “alla Hohmann” (traiettoria arancio) lanciando dal polo opposto, tuttavia anche questa soluzione risulterebbe dispendiosa poiché lancerei in orizzontale. È preferibile lanciare al limite di visibilità (traiettoria nera), in questo modo il lanciatore è in linea di vista con la base di lancio per tutta la durata dell'ascesa, garantendo comunicazione costante fra razzo e stazione di terra.

Si vuole determinare il punto di lancio L in modo che l'apogeo dell'ellisse A sia all'orizzonte, cioè visibile da L. Tale punto è individuato dall'angolo di gittata  $\Sigma$ :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_0}{r_0 + h_1} = \cos \Sigma \Rightarrow \Sigma = 12.3130^\circ$$

L'angolo di anomalia vera è dato quindi da:

$$\nu_0 = \pi - \Sigma = 167.687^\circ$$

Dall'equazione della conica (ellisse) si ricavano i raggi iniziale e finale:

$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \nu_0} = r_\oplus$$

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos(\nu_0 + \Sigma)} = \frac{p}{1 + e \cos \pi} = \frac{p}{1 - e}$$

Uguagliando le due espressioni, si ottengono i valori di eccentricità e semilatus rectum:

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0 \cos \nu_0} = 0.5058$$

$$p = r_1(1 - e) = 3222.6782 \text{ km}$$

Si procede con il calcolo del raggio al perigeo, ossia per  $\nu = 0^\circ$ :

$$r_p = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) = 2140.01 \text{ km}$$

Si tratta chiaramente di una *traiettoria balistica suborbitale* (poiché  $r_p < r_\oplus$ ).

Rimane da definire il semiasse maggiore dell'orbita:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = 4330.4345 \text{ km}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica specifica per un'orbita fissa, somma di energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale, si ha:

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = -46.023 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

da cui si esplicitano le velocità coinvolte:

$$V = \sqrt{2 \left( E + \frac{\mu}{r} \right)}$$

$$V_0 = 5.7520 \text{ km/s}$$

$$V_1 = 5.4959 \text{ km/s}$$

Per l'evoluzione della traiettoria balistica si ottengono due velocità diverse fra loro, la cui differenza rappresenta le sole perdite per gravità. Infatti per via dell'ipotesi di spinta impulsiva non si hanno perdite per disallineamento, e in più si trascura la drag atmosferica.

Si può a questo punto calcolare l'incremento di velocità richiesto per il lancio come:

$$\Delta V_0 = V_0 - 0 = 5.7520 \text{ km/s}$$

## Fase 2a: Hohmann per LEO

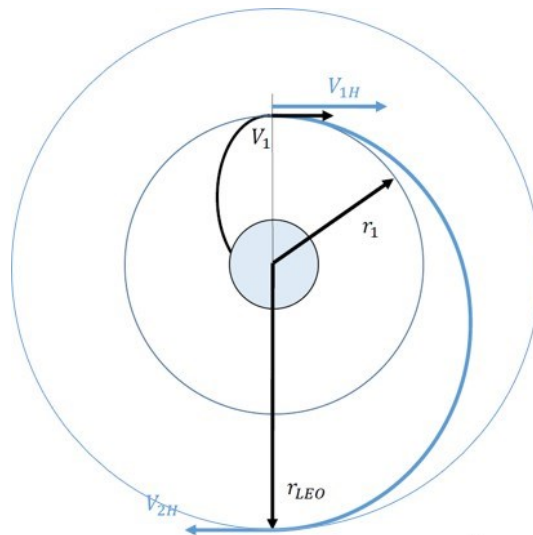


Figura 3: Traiettoria della Hohmann per LEO

Una volta arrivati al raggio  $r_1$  con velocità  $V_1$  sulla traiettoria balistica suborbitale, la fase successiva prevede di fornire un secondo  $\Delta V$  impulsivo per realizzare la trasferta di Hohmann da  $r_1$  fino all'orbita finale con raggio  $r_{LEO}$ .

Come fatto in precedenza, si determinano i parametri orbitali della traiettoria ellittica di trasferimento:

$$a_H = \frac{r_1 + r_{LEO}}{2} = 6546 \text{ km}$$

$$E_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -30.4461 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$e_H = \frac{r_{LEO} - r_1}{r_{LEO} + r_1} = 0.0038$$

Si può notare come l'eccentricità risulti piccola poiché le orbite sono simili (150 km e 200 km). Conoscendo l'energia, si possono calcolare le velocità sulla trasferta:

$$V_{1H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_1} \right)} = 7.8332 \text{ km/s}$$

$$V_{2H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_2} \right)} = 7.7736 \text{ km/s}$$

che risultano simili per via della vicinanza fra i raggi delle due orbite. Infine, l'impulso di partenza sulla Hohmann vale:

$$\Delta V_1 = V_{1H} - V_1 = 2.3373 \text{ km/s}$$

### Fase 3a: circolarizzazione LEO

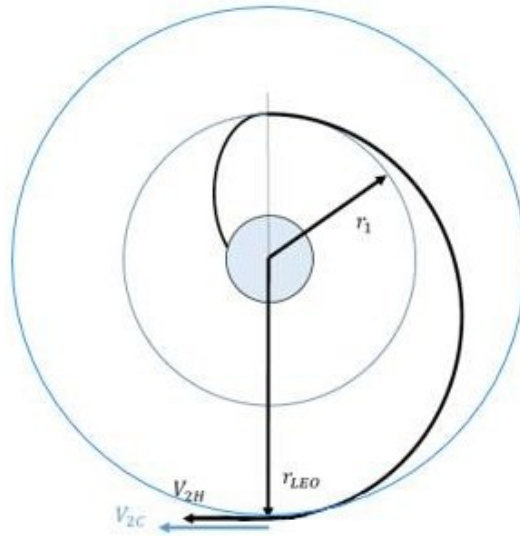


Figura 4: Circolarizzazione per LEO

Percorrendo la trasferta di Hohmann ci si trova al raggio  $r_{LEO}$  con velocità  $V_{H2}$ . Occorre fornire un ulteriore impulso all'apogeo della trasferta per circolarizzare l'orbita:

$$V_{C2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{LEO}}} = 7.7885 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta V_2 = V_{C2} - V_{H2} = 0.0149 \text{ km/s}$$

Si osserva come il  $\Delta V_2$  sia molto piccolo a causa della bassa eccentricità dell'orbita di trasferimento percorsa. Complessivamente si ottiene una velocità che consente di stazionare a raggio costante pari a  $r_{LEO}$ .

È possibile quindi calcolare l'incremento di velocità complessivo, considerando che le perdite per gravità nel primo tratto di ascesa 0-1 non sono incluse nelle formulazioni e vanno pertanto conteggiate nel termine  $\Delta V_p = 1.2 \text{ km/s}$ . Al contrario, le perdite di velocità durante la fase 1-2 sono già incluse

all'interno della formulazione di Hohmann. Così facendo, si ottiene il seguente  $\Delta V$  totale:

$$\Delta V_{tot,LEO} = \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_p = 9.304 \text{ km/s}$$

che rappresenta il costo finale della missione.

## Fase 2b: Hohmann per GEO

Si passa ora all'analisi della seconda missione. L'ascesa fino a 150 km è identica al caso LEO, mentre la fase successiva prevede una nuova trasferta di Hohmann, molto più grande della precedente, caratterizzata da:

$$a_H = \frac{r_1 + r_{GEO}}{2} = 24342.53 \text{ km}$$

$$E_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -8.1873 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Le velocità absidali raggiunte dal rocket su tale ellisse sono:

$$V_{1H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_1} \right)} = 10.2896 \text{ km/s} > V_{1H,LEO}$$

$$V_{2H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_{GEO}} \right)} = 1.5914 \text{ km/s} \ll V_{2H,LEO}$$

$$\Delta V_1 = V_{1H} - V_1 = 4.7937 \text{ km/s}$$

$V_{1H}$  risulta più grande della corrispettiva velocità nel caso di orbita finale LEO in quanto, pur avendo lo stesso raggio di partenza, la trasferta di Hohmann per la GEO ha un'energia meccanica specifica maggiore (ovvero minore in modulo essendo negativa). Anche  $V_{2H}$  è diversa poiché diversa è l'orbita di destinazione ( $r_{GEO} \gg r_{LEO}$ ).

Si può dimostrare che questo stesso  $\Delta V_1$  può essere ottenuto fornendo un impulso di circolarizzazione a raggio  $r_1 = 150 \text{ km}$  più l'impulso per immettersi in una Hohmann fino a  $r_2 = 42164 \text{ km}$ :

$$\Delta V_{1,1} = V_{1C} - V_1 = 2.3224 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{1,2} = V_{1H} - V_{1C} = 2.4713 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_{1,1} + \Delta V_{1,2} = 4.7937 \text{ km/s}$$

## Fase 3b: circolarizzazione GEO

Per circolarizzare l'orbita a  $r_{GEO}$  si spinge di:

$$V_{C2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = 3.0747 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta V_2 = V_{C2} - V_{2H} = 1.4833 \text{ km/s}$$

Dunque il costo totale della missione GEO sarà:

$$\Delta V_{tot,GEO} = \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_p = 13.2288 \text{ km/s}$$

Solitamente il lanciatore fornisce tutti i  $\Delta V$  calcolati tranne l'ultima accensione  $\Delta V_2$  richiesta per circolarizzare in GEO, che viene invece demandata ad un motore di apogeo e non viene effettuata dal

lanciatore stesso a causa dell'elevato incremento di velocità richiesto. Si parla quindi di *Geostationary Transfer Orbit* (GTO) come orbita di destinazione del lanciatore, che nell'esempio considerato è quella raggiunta alla fine della Hohmann, per cui si definisce:

$$\Delta V_{GTO} = \Delta V_{tot,GEO} - \Delta V_2 = 11.7457 \text{ km/s}$$



# Esercitazione 2: *Staging I*

## Introduzione

L'obiettivo dell'esercitazione è quello di determinare il carico utile di un razzo per il trasferimento in LEO e GTO, considerando un numero di stadi variabile  $N = 1 \div 5$  e le seguenti combinazioni di propellente:

- LOX/LH2:  $c_1 = 4.5 \text{ km/s}$ ,  $\epsilon_1 = 0.15$ ;
- LOX/RP-1:  $c_2 = 3.5 \text{ km/s}$ ,  $\epsilon_2 = 0.1$ .

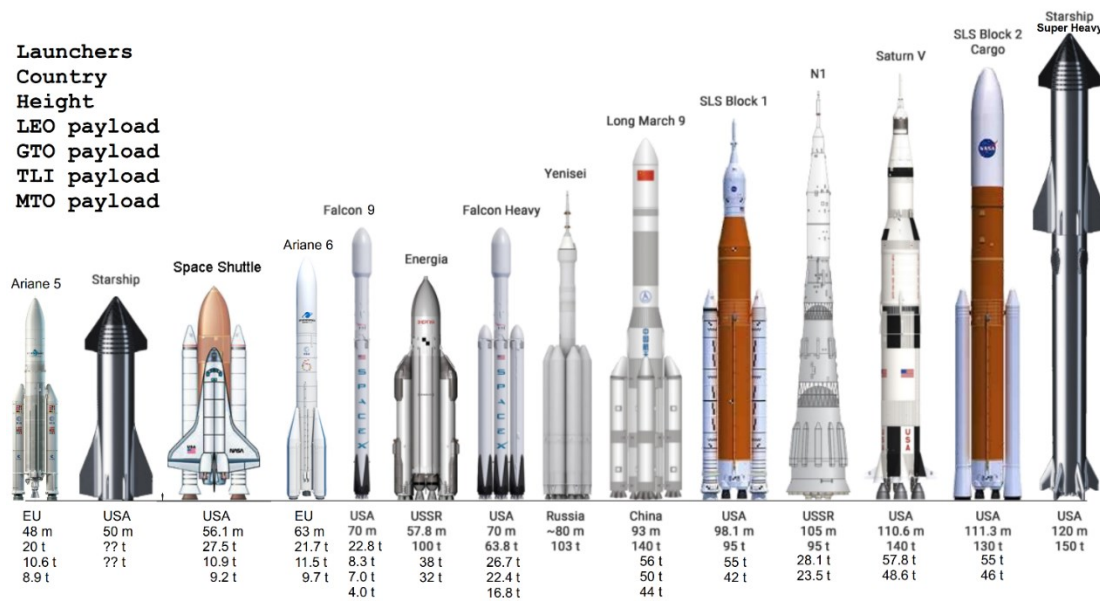


Figura 5: Confronto payload lanciatori

Dall'esercitazione precedente si riprendono i valori dei  $\Delta V$  totali per il trasferimento in LEO e GTO:

$$\Delta V_{LEO} = 9.304 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{GTO} = 11.7457 \text{ km/s}$$

Per comprendere qualitativamente l'andamento delle masse in funzione della variazione di velocità e gli ordini di grandezza in gioco si considera una velocità efficace media  $c = 4 \text{ km/s}$ .

Dall'equazione di Tsiolkovsky, o equazione del razzo:

$$\Delta V = -c \ln \left( \frac{m_f}{m_i} \right) \Rightarrow \frac{m_f}{m_i} = e^{-\frac{\Delta V}{c}}$$

si evince che all'aumentare del  $\Delta V$  il rapporto  $m_f/m_i$  diminuisce esponenzialmente. Per le missioni in esame, considerando un numero di stadi  $N = 1$  e una velocità efficace di scarico media  $c = 4 \text{ km/s}$ , la massa finale risulta pari o inferiore al 10% della massa iniziale, motivo per cui si avrà un carico utile ancora più piccolo (al netto delle masse di propellente e serbatoi). Sarà pertanto necessario effettuare uno *staging* del rocket, ovvero una suddivisione del razzo in più stadi, ciascuno dotato di un serbatoio ed un motore che vengono separati una volta utilizzati.

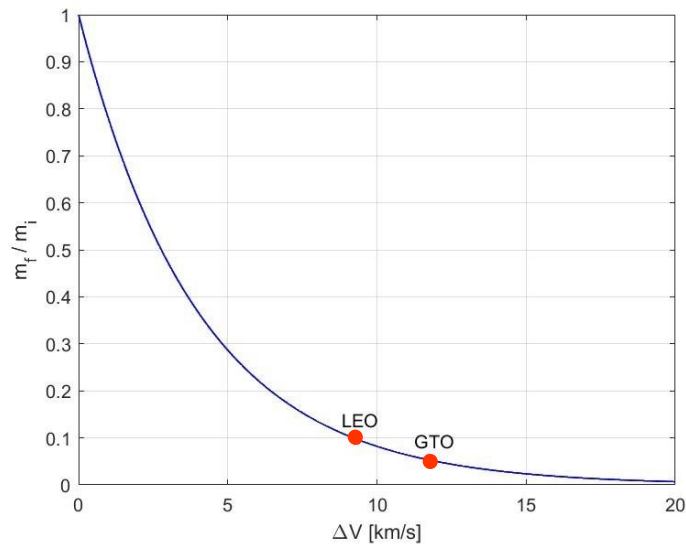


Figura 6: Andamento di  $m_f/m_i$  in funzione di  $\Delta V$

## Parametri noti ed obiettivo

Si definisce lo *structural ratio* o rapporto strutturale:

$$\epsilon = \frac{m_s}{m_s + m_p}$$

Questo rapporto è un indice tecnologico, e diventa tanto più piccolo quanto più la tecnologia per contenere i propellenti è migliore, cioè è minore la massa dei serbatoi a parità di massa da contenere. Nel caso in esame,  $\epsilon$  è maggiore per LOX/LH2 essendo sostanze entrambe criogeniche, dunque conservate a pressioni elevatissime e temperature molto basse. Inoltre la bassa densità dell'idrogeno rende necessario l'utilizzo di tank con pareti più spesse e di conseguenza più pesanti. Per LOX/RP-1, invece,  $\epsilon$  è inferiore perché solo l'ossigeno liquido è criogenico e la densità media del propellente è maggiore.

Altri parametri utili sono:

- propellant fraction:  $\varphi = \frac{m_p}{m_i}$ ;
- mass ratio:  $\lambda = \frac{m_i}{m_f}$ .

L'output che si chiede di determinare è la *payload fraction*, sia relativa al singolo stadio che totale:

$$\lambda = \frac{m_u}{m_i}$$

## Equazioni dello staging

Considerando:

$$m_i = m_s + m_p + m_u$$

$$m_f = m_i - m_p = m_s + m_u \Rightarrow m_p = m_i - m_f$$

si possono riscrivere le precedenti definizioni nel seguente modo:

$$\varphi = \frac{m_p}{m_i} = (1 - \epsilon)(1 - \lambda)$$

$$\Lambda = \frac{m_i}{m_f} = \frac{1}{1 - \varphi}$$

Sostituendo nell'equazione del razzo, si ottiene:

$$\Delta V = -c \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right) = -c \ln\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = -c \ln[\epsilon + \lambda(1 - \epsilon)]$$

da cui:

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \epsilon}{1 - \epsilon}$$

ossia la payload fraction per  $N = 1$ . Tuttavia, con un singolo stadio potremmo anche ottenere un  $\lambda < 0$ : non sarebbe possibile trasportare alcun carico utile con il lanciatore scelto (cioè fissati  $c$  ed  $\epsilon$ ) fino all'orbita di destinazione (ovvero per il  $\Delta V$  assegnato). Ad esempio, per un trasferimento in GTO con LOX/RP1 e  $N = 1$  si avrebbe:

$$\lambda = \frac{e^{-3.35} - 0.1}{1 - 0.1} = -0.072 < 0 \Rightarrow \text{missione infattibile}$$

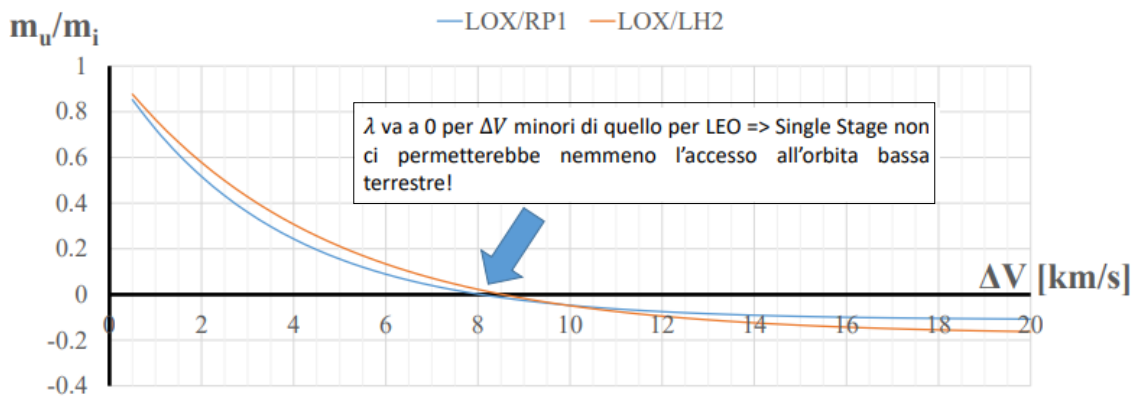


Figura 7: Andamento della payload fraction in funzione di  $\Delta V$  per  $N=1$

### Caso $N > 1$ , stadi tutti uguali

Generalizzo l'equazione del razzo:

$$\Delta V_{tot} = \sum_{j=1}^N \Delta V_j = \sum_{j=1}^N -c_j \ln[\epsilon_j + \lambda_j(1 - \epsilon_j)]$$

Nell'ipotesi di stadi uguali (stessi  $c_j$ ,  $\lambda_j$  e  $\epsilon_j$ ), l'equazione precedente si semplifica molto:

$$\Delta V_{tot} = -N c \ln[\epsilon + \lambda(1 - \epsilon)] = N \Delta V_j$$

$$\lambda_j = \frac{e^{-\frac{\Delta V_{tot}}{Nc}} - \epsilon}{1 - \epsilon}$$

Formalmente l'equazione trovata è la stessa del caso  $N = 1$ , dove però si ha la frazione  $\Delta V_j$  erogata dal singolo stadio (ovvero  $\Delta V_{tot}/N$ ) e si calcola il j-esimo mass ratio  $\lambda_j$  associato al j-esimo stadio.

Si definisce la payload fraction totale:

$$\lambda_{tot} = \frac{m_u}{m_i} = \frac{m_u}{m_{i,N}} \frac{m_{u,N-1}}{m_{i,N-1}} \dots \frac{m_{u,1}}{m_{i,1}} = \lambda_N \lambda_{N-1} \dots \lambda_1 = \prod_{j=1}^N \lambda_j$$

che, nel caso di  $\lambda_j$  tutti uguali (stadi uguali), diventa:

$$\lambda_{tot} = \prod_{j=1}^N \lambda_j = \lambda_j^N$$

### Esempio: LOX/LH2, N=2, stadi tutti uguali

Si determina la payload fraction:  $c = 4.5 \text{ km/s}$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $N = 2$ ,  $\Delta V_{LEO} = 9.3042 \text{ km/s}$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{e^{-\frac{\Delta V_{tot}}{Nc}} - \epsilon}{1 - \epsilon} = \frac{e^{-1.034} - 0.15}{1 - 0.15} = 0.242$$

$$\lambda_{tot} = \lambda_j^N = 0.059$$

Si verifica quindi l'incremento di velocità per il singolo stadio:

$$\Delta V_j = -c_j \ln[\epsilon_j + \lambda_j(1 - \epsilon_j)] = 4.652 \text{ km/s} = \frac{\Delta V_{LEO}}{2}$$

che corrisponde alla metà dell'incremento di velocità necessario per l'inserimento in LEO.

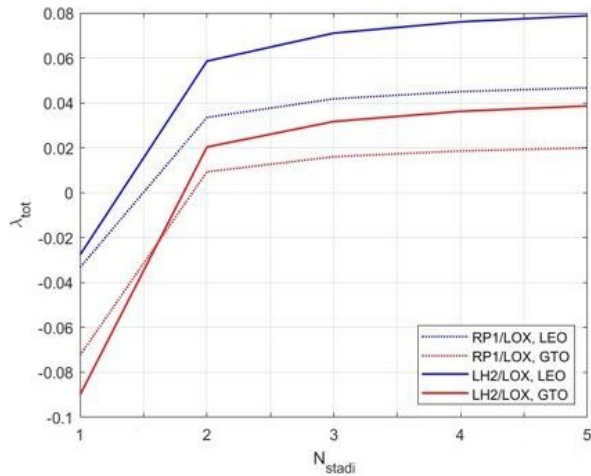


Figura 8: Andamento di  $\lambda_{tot}$  al variare di  $N$

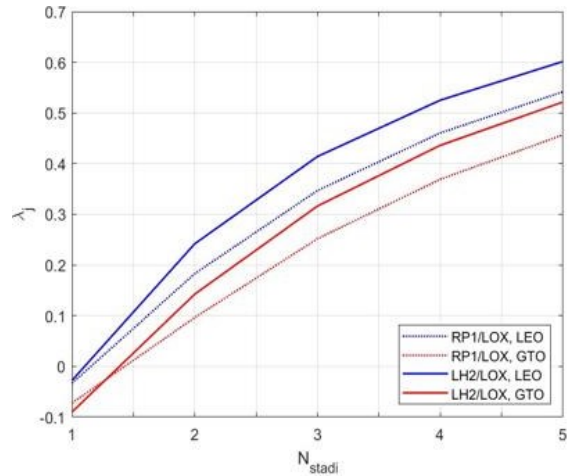


Figura 9: Andamento di  $\lambda_j$  al variare di  $N$

Ripetendo il procedimento per ogni combinazione di propellente e numero di stadi nelle due missioni, si ottengono i due precedenti grafici. Si può osservare che:

- $\lambda_j$  e  $\lambda_{tot}$  tendono entrambi a 1 per  $N \rightarrow \infty$ , ma  $\lambda_j$  ci arriva più velocemente. Per questo motivo raramente si ha  $N > 4$ . Inoltre, come era prevedibile, a parità di  $N$  si ha che  $\lambda_{LEO} > \lambda_{GTO}$  essendo  $\Delta V_{LEO} < \Delta V_{GTO}$ ;

- $\lambda < 0$  per  $N = 1$ , il che sancisce l'infattibilità della missione;
- a parità di missione (orbita di destinazione), le curve per LOX/LH2 (continue) sono sempre al di sopra di quelle per LOX/RP1 (tratteggiate). Ciò significa che LH2 risulta più efficiente di RP-1, e a parità di tutti gli altri parametri garantisce una payload fraction maggiore nonostante abbia un  $\epsilon$  più grande.

In termini di  $\lambda_{tot}$ , passando da 1 a 2 stadi si riscontra un considerevole guadagno, mentre per numeri di stadi superiori il vantaggio è irrilevante.

Per ogni missione si può individuare uno staging ottimale (numero ottimale di stadi) coerentemente ai valori caratteristici di  $\Delta V$ ,  $\epsilon$  e  $c$ :

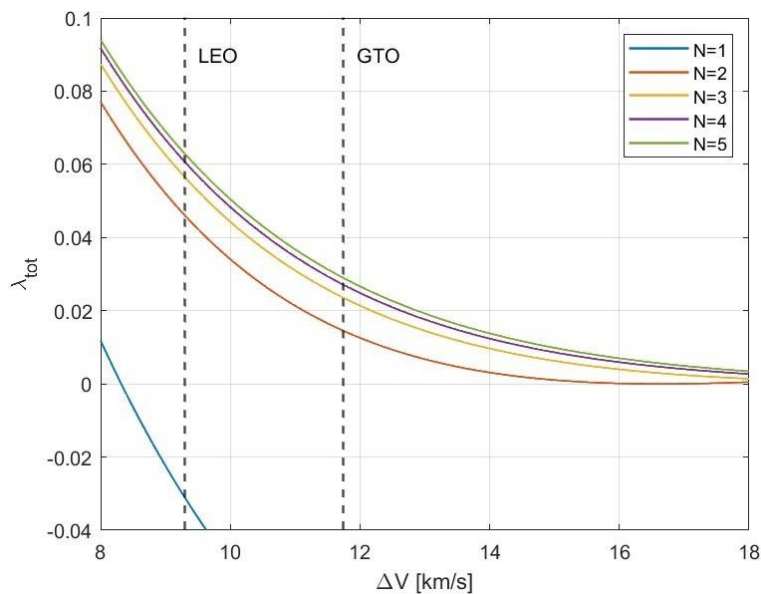


Figura 10: Andamento di  $\lambda_{tot}$  in funzione di  $\Delta V$  al variare del numero degli stadi

In realtà la missione in LEO risulterebbe fattibile (ovvero  $\lambda_{tot} > 0$ ) già con  $N = 2$ , tuttavia inserendo un terzo stadio si guadagna circa l'1% di payload fraction, che su un lanciatore da 1000 tonnellate equivale a 10 tonnellate in più di massa utile trasportabile.

# Esercitazione 3: *Staging II*

---

## Parametri noti ed obiettivo

L'obiettivo dell'esercitazione è quello di confrontare, per un lanciatore a 2 stadi in una missione di inserimento in LEO, i bilanci di massa ottenuti combinando nei modi possibili la scelta dei propellenti (LH2 e RP-1) per i due stadi.

I parametri noti sono l'impulso  $\Delta V_{LEO} = 9.304 \text{ km/s}$  dalle precedenti esercitazioni, la massa iniziale  $m_i = 100 \text{ t}$  e il numero di stadi  $N = 2$ .

## Equazioni dello staging ottimale: problema di ottimizzazione

Tale problema consiste nel massimizzare una funzione goal  $\Phi$ , soddisfacendo il vincolo fisico su  $\lambda_{tot}$  (ottimizzazione vincolata):

$$\Phi = \Delta V_{tot}$$
$$\lambda_{tot} = \prod_{j=1}^N \lambda_j \text{ oppure } \ln \lambda_{tot} = \sum_{j=1}^N \ln \lambda_j$$

Il *metodo degli aggiunti* permette di considerare una seconda funzione goal «aumentata» (ottimizzazione non vincolata), avente l'ottimo coincidente con il punto di vincolo della precedente funzione. La nuova funzione ausiliaria è definita utilizzando il moltiplicatore di Lagrange  $\nu$ :

$$\Phi' = \Delta V_{tot} + \nu \left[ \left( \sum_{j=1}^N \ln \lambda_j \right) - \ln \lambda_{tot} \right]$$

Quando il vincolo è rispettato,  $\Phi' = \Phi$  per qualsiasi valore di  $\nu$ , quindi massimizzando la funzione  $\Phi'$  e soddisfacendo il vincolo si trova direttamente il massimo di  $\Delta V_{tot}$ .

Si individua il punto stazionario imponendo:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda_j} = -c_j \frac{1 - \epsilon_j}{\lambda_j(1 - \epsilon_j) + \epsilon_j} + \frac{\nu}{\lambda_j} = 0$$

Esplicitando  $\lambda_j$ :

$$\lambda_j = \frac{\nu \epsilon_j}{(1 - \epsilon_j)(c_j - \nu)}$$

Resta vero che  $\Delta V_j = -c_j \ln[\epsilon_j + \lambda_j(1 - \epsilon_j)]$ , dunque se  $\nu$  cresce, anche i  $\lambda_j$  devono aumentare, ma  $\Delta V_j$  diminuisce.

Rimane da calcolare proprio il parametro  $\nu$  tale per cui  $\sum_{j=1}^N \Delta V_j = \Delta V_{tot}$  per i  $\lambda_j$  trovati.

## Algoritmo risolutivo: calcolo del moltiplicatore di Lagrange

Per prima cosa si fissa il caso di studio, cioè si fissano  $c_j$  ed  $\epsilon_j$  per  $j = 1:N$  ( $N = 2$ ). Si sceglie un valore di tentativo per il moltiplicatore di Lagrange, ad esempio  $\nu = 1$ , con cui calcolare, per ciascuno dei due stadi:

$$\lambda_j = \frac{v \epsilon_j}{(1 - \epsilon_j)(c_j - v)}$$

$$\Delta V_j = -c_j \ln[\epsilon_j + \lambda_j(1 - \epsilon_j)]$$

$$\sum_{j=1}^N \Delta V_j = \Delta V_{tot}$$

ovviamente per  $j = 1, 2$ . Si definisce una tolleranza, scelta pari a  $10^{-5}$ , da confrontare con l'errore:

$$Err = \Delta V_{tot} - \Delta V_{LEO} \leq tol$$

Si itera fin quando l'errore non è minore della tolleranza: finché  $Err > tol$ , se  $\Delta V_{tot} > \Delta V_{LEO}$  il moltiplicatore  $v$  viene incrementato man mano che il ciclo viene ripetuto, poiché così facendo  $\Delta V_j$  e  $\Delta V_{TOT}$  diminuiscono.

I valori finali ottenuti per ciascuna combinazione di propellenti nei due stadi sono:

Propellenti (Stadio I-II)	$v$
LH2-LH2	2.6021
RP1-LH2	2.3641
LH2-RP1	2.3641
RP1-RP1	2.1777

### Calcolo dei rapporti di massa

Si calcolano i rapporti di massa stadio per stadio ( $j = 1, 2$ ):

$$m_{f,j} = m_{i,j} e^{-\frac{\Delta V}{c_j}}$$

$$m_{p,j} = m_{i,j} - m_{f,j}$$

$$m_{s,j} = \frac{\epsilon_j m_{p,j}}{1 - \epsilon_j}$$

$$m_{u,j} = \lambda_j m_{i,j}$$

$$m_{i,j+1} = m_{u,j}$$

dal momento che la massa iniziale di uno stadio corrisponde al carico utile dello stadio precedente. Infine, si ricavano:

$$\frac{m_{i,1}}{m_{u,N}} = \frac{\text{massa al lancio}}{\text{carico utile a fine missione}}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^N m_{s,j}}{m_{u,N}} = \frac{\text{massa strutturale complessiva}}{\text{carico utile a fine missione}}$$

L'intero procedimento va ripetuto per tutti i 4 casi richiesti dall'esercitazione:

Stadio	Fuel	$\lambda_j$	$\Delta V_j$	$(m_i)_j/m_i$	$(m_f)_j/m_i$	$(m_p)_j/m_i$	$(m_s)_j/m_i$	$(m_u)_j/m_i$	$m_i/m_u$	$m_s/m_u$
I	LH2	0.242	4.652	1.000	0.356	0.644	0.114	0.242	17.083	2.413
II	LH2	0.242	4.652	0.242	0.086	0.156	0.028	0.059		
I	RP-1	0.231	4.120	1.000	0.308	0.692	0.077	0.231	22.140	2.320
II	LH2	0.195	5.184	0.231	0.073	0.158	0.028	0.045		
I	LH2	0.195	5.184	1.000	0.316	0.684	0.121	0.195	22.140	3.005
II	RP-1	0.231	4.120	0.195	0.060	0.135	0.015	0.045		
I	RP-1	0.183	4.652	1.000	0.265	0.735	0.082	0.183	29.863	2.886
II	RP-1	0.183	4.652	0.183	0.048	0.135	0.015	0.034		

Si possono fare le seguenti osservazioni:

- la frazione utile  $\lambda_{tot}$  per LEO è fra il 3% e il 5%;
- cambiando l'ordine degli stadi (secondo e terzo caso) il risultato non cambia: la suddivisione di  $\Delta V_{tot}$  resta uguale ma invertita tra I e II, cambiano i rapporti di massa intermedi e i valori di  $\lambda_j$  sono invertiti, ma il rapporto  $m_i/m_u$  resta lo stesso, con  $m_u=4.5$  t in entrambi i casi per il lanciatore da 100 t considerato;
- LH2 è più performante di RP-1 in termini di  $\Delta V$  fornito (LOX/LH2 ha la miglior  $c$  possibile), ma RP-1 presenta un'efficienza strutturale superiore, data la maggiore densità (stessa quantità di propellente in un serbatoio più piccolo): risulta quindi conveniente utilizzare RP-1 per il primo stadio (masse e dimensioni più contenute, costi ridotti) e LH2 per il secondo (serbatoi un po' più grandi ma altissime prestazioni)  $\rightarrow (m_s/m_i)_{I,RP1} < (m_s/m_i)_{I,LH2}$  mentre  $(\Delta V_j)_{II,LH2} > (\Delta V_j)_{II,RP1}$ ;
- RP-1 non ottimale per stadio II e LH2 costoso per stadio I;
- in missioni reali bisogna sempre effettuare un trade-off fra i costi da sostenere e la necessità di massimizzare il carico utile, a fronte di una minima massa strutturale del razzo;
- spesso si abbinano al primo stadio dei *solid rocket booster* che si separano dopo il lancio: virtualmente si riduce la  $\epsilon$  dello stadio (ora primo stadio + booster) aggiungendo componenti con ottima efficienza strutturale (l'intero corpo dei booster è costituito da propellente);
- la precisione dei calcoli dipende fortemente dall'accuratezza nella determinazione di  $v$ : per fare una ricerca raffinata si potrebbe implementare un metodo di bisezione o Newton.



# Esercitazione 4: *Trasferta LEO-GEO*

## Parametri noti ed obiettivo

Si suppone che alle ore 10:00:00 UTC del 31/01/04 un satellite si trovi sulla verticale di Cape Canaveral ( $\delta = 28.5^\circ N$  lat,  $\lambda = 80.6^\circ W$  long) in un'orbita circolare LEO di raggio 6600 km con *heading angle*  $\psi = 0^\circ$ , cioè con velocità in pieno EST. L'obiettivo dell'esercitazione è quello di analizzare la sequenza di manovre necessaria a portare il satellite in orbita GEO sul meridiano passante per Cape Canaveral entro 2 giorni. Si considereranno diverse combinazioni di manovre effettuabili per confrontarne i risultati e i costi in termini propulsivi  $\Delta V$ .

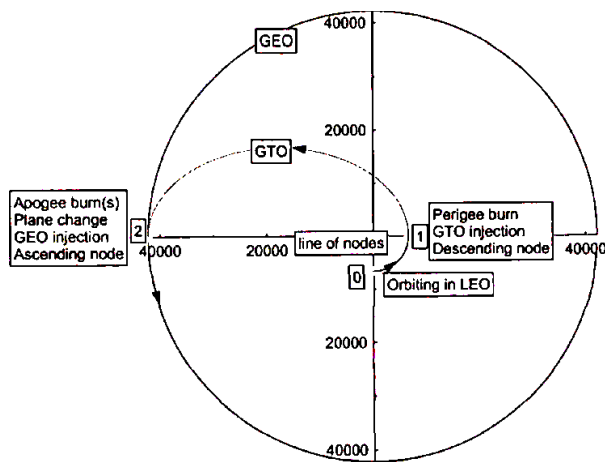


Figura 11: Trasferimento LEO-GEO senza orbita di attesa

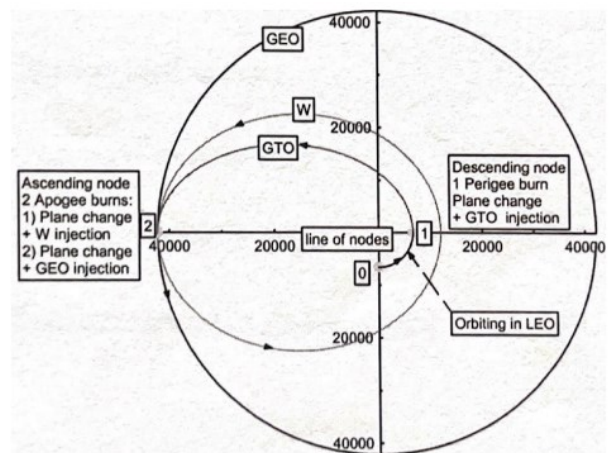


Figura 12: Trasferimento LEO-GEO con orbita di attesa

Dell'orbita di partenza LEO sono noti:

$$r_{LEO} = 6600 \text{ km}$$

$$i_{LEO} = 28.5^\circ$$

da cui si possono ricavare il periodo e la velocità circolare:

$$T_{LEO} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{LEO}^3}{\mu}} = 5336.14 \text{ s}$$

$$V_{c,LEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{LEO}}} = 7.7714 \text{ km/s}$$

Dell'orbita GEO sono invece noti il periodo (pari a un giorno sidereo) e l'inclinazione:

$$T_{GEO} = 86164 \text{ s}$$

$$i_{GEO} = 0^\circ$$

Si possono quindi ricavare il raggio e la velocità circolare:

$$r_{GEO} = \sqrt[3]{\mu \frac{T_{GEO}^2}{4\pi^2}} = 42164.12 \text{ km}$$

$$V_{c,GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{LEO}}} = 3.0747 \text{ km/s}$$

Le manovre a disposizione per effettuare correttamente la missione sono:

- *trasferta* (cambio di raggio);
- *cambio di piano* (cambio di inclinazione dell'orbita).

I vincoli da rispettare sono vincoli di:

- tempo: trasferimento da completare entro 2 giorni;
- posizione: meridiano passante per Cape Canaveral.

### Cambio di raggio: Hohman transfer tra orbite complanari

Per la prima manovra si suppone di compiere la trasferta di Hohmann tra orbite complanari, che costituisce il caso più economico.

Si possono ricavare:

- semiasse maggiore della GTO:

$$a_{GTO} = \frac{r_{LEO} + r_{GEO}}{2} = 24382 \text{ km}$$

- energia meccanica specifica della trasferta:

$$E_H = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a_{GTO}} = -8.174 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

- velocità al perigeo:

$$V_{1H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_{LEO}} \right)} = 10.2196 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_{1H} - \Delta V_{c,LEO} = 2.4482 \text{ km/s}$$

- velocità all'apogeo:

$$V_{2H} = \sqrt{2 \left( E_H + \frac{\mu}{r_{GEO}} \right)} = 1.5997 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta V_2 = \Delta V_{c,GEO} - \Delta V_{2H} = 1.475 \text{ km/s}$$

- costo complessiva della trasferta:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 3.9232 \text{ km/s}$$

- tempo di percorrenza della semiellisse di Hohmann (metà del periodo, essendo  $\Delta v = 180^\circ$ ):

$$\Delta t_H = \frac{1}{2} T_H = \pi \sqrt{\frac{a_{GTO}^3}{\mu_\oplus}} = 18944.66 \text{ s}$$

Si noti che nel tempo  $\Delta t_H$  il satellite percorre  $180^\circ$ , mentre la Terra ruota con la sua velocità angolare, pertanto Cape Canaveral avrà percorso un angolo:

$$\alpha = \Delta L_o = \Delta t_H \omega_{\oplus} = \Delta t_H \frac{360^\circ}{86164 \text{ s}} = 79.15^\circ$$

accumulando così un ritardo in termini angolari pari a  $180^\circ - 79.15^\circ = 100.85^\circ$ . Il satellite non si troverà quindi sul meridiano passante per Cape Canaveral, di conseguenza il vincolo di posizione non risulta rispettato. Si rende necessario pertanto l'utilizzo di una *Waiting Orbit* per poter effettuare il fasamento dell'orbita rispetto alla posizione desiderata e annullare così il ritardo angolare.

### Cambio di inclinazione dell'orbita

Resta da analizzare il cambio di piano. È necessario fornire un certo  $\Delta V_i$  fuori dal piano dell'orbita che non ne aumenta l'energia, essendo  $\Delta V_i \perp V$ , ma varia la direzione del vettore velocità del satellite. Trattandosi di un costo, conviene che esso sia il più piccolo possibile.

$$\Delta V_i = 2V \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)$$

È necessario fare due osservazioni:

- Se ci si trova sulla linea dei nodi (posta a  $90^\circ$  dal punto di partenza), ovvero a  $\delta = 0^\circ$  (all'equatore), si ha:

$$\cos i = \cos \delta \cos \psi \Rightarrow \Delta\psi = \Delta i = i_{LEO} - i_{GEO} = 28^\circ - 0^\circ = 28^\circ$$

In questo modo si minimizza il termine trigonometrico;

- Più è alta la velocità e più risulta costoso cambiare piano (inclinazione). Dunque è preferibile ruotare all'apogeo della GTO, dove la velocità è la più bassa possibile e pari a  $V_{2H}$ :

$$\Delta V_i = 2V_{2H} \sin\left(\frac{i_{LEO}}{2}\right) = 0.788 \text{ km/s}$$

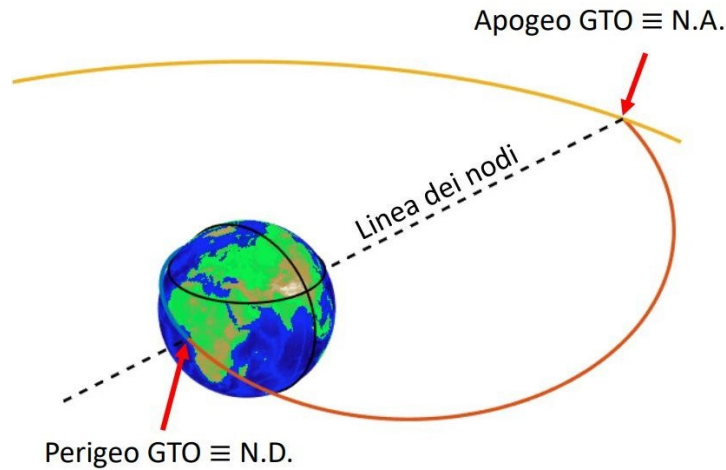


Figura 13: Linea dei nodi della GTO

Alla luce di ciò, conviene trovarsi sulla linea dei nodi (cioè all'intersezione tra il piano della LEO con il piano equatoriale che contiene la GEO) per immettersi nella GTO, fornendo il primo  $\Delta V_1$  in corrispondenza del nodo discendente ( $P \equiv N.D.$ ). In tal modo anche l'apogeo della GTO sarà sulla linea dei nodi (e quindi nel piano equatoriale) e coincidente con il nodo ascendente ( $A \equiv N.A.$ ), dove in seguito si effettuerà il cambio di inclinazione alla minima velocità, minimizzando la spesa di propellente.

Si considerano ora vari casi, ciascuno con una diversa sequenza di manovre e diverse fasi di missione, per vedere se c'è un modo per ridurre il costo complessivo  $\Delta V_{tot}$  combinando le manovre di trasferta e cambio di piano.

### Fasi di missione: CASO A (cambio di piano semplice)

- Punto 0: il satellite si trova sulla verticale di Cape Canaveral alle ore 10:00:00 UTC;
- Punto 1: il satellite giunge sulla linea dei nodi, al nodo discendente, dove ha inizio la trasferta di Hohmann;
- Punto 2: il satellite giunge al nodo ascendente, dove si realizzano separatamente rotazione istantanea dell'orbita e immissione nell'orbita GEO di destinazione, finalizzando la trasferta di Hohmann.

Andando ad analizzare i tempi di missione:

- 0-1: il satellite percorre  $90^\circ$  di orbita LEO in:

$$\Delta t_{01} = \frac{1}{4} T_{LEO} = 1334.03 \text{ s}$$

- 1-2: il satellite percorre  $180^\circ$  di GTO (Hohmann) in:

$$\Delta t_{12} = \Delta t_H = 18944.66 \text{ s}$$

- 0-2: Cape Canaveral percorre  $270^\circ$  di rotazione sulla Terra in:

$$\Delta t_{CC} = \frac{3}{4} 86164 = 64623 \text{ s}$$

che risulta essere maggiore del tempo  $\Delta t_{02} = 20278.70 \text{ s}$  impiegato dal satellite per andare da 0 a 2. Ne consegue che all'arrivo nella GEO il satellite non si troverà sulla verticale di Cape Canaveral.

Nella tabella sottostante sono riassunte le diverse varie fasi della missione, inclusi punti di manovra, istanti di tempo in cui vengono eseguite e relativi costi:

Trasferta LEO/GEO – Soluzione A				
#	Evento	Dove	Ora (GMT)	$\Delta V$ [km/s]
1	LEO $\rightarrow$ GTO	Nodo discendente	10:22:14	$\Delta V_1 = 2.448$
2	Cambio di inclinazione	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_i = 0.788$
3	GTO $\rightarrow$ GEO	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_2 = 1.475$

$$\Delta V_{tot,A} = 4.711$$

### Fasi di missione: CASO B (con orbita di attesa)

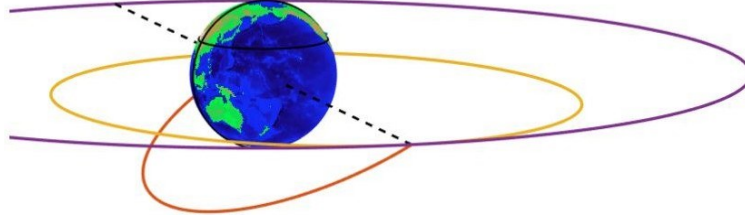


Figura 14: Trasferta LEO-GEO con orbita di attesa

- Punto 0: il satellite si trova sulla verticale di Cape Canaveral alle ore 10:00:00 UTC;
- Punto 1: il satellite giunge sulla linea dei nodi, al nodo discendente, dove ha inizio la trasferta di Hohmann;
- Punto 2: il satellite giunge al nodo ascendente, dove si realizzano separatamente rotazione istantanea dell'orbita e immissione nella *Waiting Orbit* (WO);
- Punto 2'=2: il satellite ha compiuto un giro completo di WO e si ha l'immissione nell'orbita GEO.

Lo scopo dell'inserimento nella WO è quello di fasare il satellite con Cape Canaveral. In particolare, scegliendo un'orbita di attesa con un periodo pari all'anticipo che il satellite ha rispetto a Cape Canaveral, si ha che dopo un giro completo sulla WO il satellite è nuovamente in 2'=2, ma ora il meridiano di Cape Canaveral ha recuperato il suo ritardo angolare, e quindi spacecraft e Cape Canaveral vengono a trovarsi sulla stessa verticale. Perciò il periodo  $T_W$  deve valere:

$$\Delta t_{02} = \Delta t_{01} + \Delta t_{12} = 20278.70 \text{ s}$$

$$\Delta t_{CC} = 64623 \text{ s}$$

$$T_W = \Delta t_{CC} - \Delta t_{02} = 44344.30 \text{ s}$$

Si possono a questo punto determinare semiasse ed energia dell'orbita di attesa:

$$a_W = \sqrt[3]{\mu \frac{T_W^2}{4\pi^2}} = 27078.07 \text{ km}$$

$$E_W = -\frac{\mu}{2a_W} = -7.36 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Per determinare il  $\Delta V_W$  da fornire per immettersi nella WO è necessario determinare la velocità che deve avere il satellite nel punto 2:

$$V_{2W} = \sqrt{2 \left( E_W + \frac{\mu}{r_{GEO}} \right)} = 2.0461 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_W = V_{2W} - V_{2H} = 0.4465 \text{ km/s}$$

Una volta completato un giro sulla WO, bisogna fornire l'ultimo impulso per finalizzare la trasferta e immettersi nella GEO:

$$\Delta V_{2'} = V_{c,GEO} - V_{2W} = 1.0285 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_W + \Delta V_{2'} = 1.475 \text{ km/s}$$

Trasferta LEO/GEO – Soluzione B				
#	Evento	Dove	Ora (GMT)	$\Delta V$ [km/s]
1	LEO $\rightarrow$ GTO	Nodo discendente	10:22:14	$\Delta V_1 = 2.448$
2	Cambio di inclinazione	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_i = 0.788$
3	Immissione in WO	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_W = 0.446$
4	WO $\rightarrow$ GEO	Nodo ascendente	03:57:03*	$\Delta V_{2'} = 1.029$

$$\Delta V_{tot,B} = \Delta V_{tot,A} = 4.711$$

\*del giorno successivo

Con questo tipo di soluzione vengono soddisfatti sia il vincolo sul tempo (durata della missione  $< 2$  giorni), sia il vincolo sulla posizione finale del satellite (stesso meridiano di Cape Canaveral). Tuttavia, il  $\Delta V_{tot}$  ottenuto è lo stesso del caso precedente ma splittato in due fasi separate, una per permettere l'inserimento nella WO e l'altra per finalizzare la GEO. L'utilizzo di una orbita di parcheggio difatti non comporta alcun aumento di costo propulsivo; tuttavia, richiede più tempo che spesso può essere un parametro stringente per una missione.

### Fasi di missione: CASO C (orbita di attesa + rotazione contemporanee)

Una possibile soluzione per ridurre il  $\Delta V_{tot}$  è quello di effettuare la rotazione dell'orbita contemporaneamente alla manovra di immissione nell'orbita di attesa, in quanto i  $\Delta V$  nella realtà si sommano in modo vettoriale  $\rightarrow$  manovra combinata anziché separata. Si avranno quindi le seguenti fasi:

- Punto 0: il satellite si trova sulla verticale di Cape Canaveral alle ore 10:00:00 UTC;
- Punto 1: il satellite giunge sulla linea dei nodi, al nodo discendente, dove ha inizio la trasferta di Hohmann;
- Punto 2: il satellite giunge al nodo ascendente, dove si realizzano contemporaneamente rotazione istantanea dell'orbita e immissione nella WO;
- Punto 2'=2: il satellite ha compiuto un giro completo di WO e si ha l'immissione nell'orbita GEO.

La spesa per la rotazione, come detto in precedenza, è considerabile uno "spreco" in quanto non serve ad aumentare l'energia dell'orbita essendo  $\Delta V_i \perp V$ . Perciò, oltre a effettuare la manovra nel nodo ascendente (così che  $\Delta\psi = \Delta i$ ) e alla minima velocità possibile (apogeo, in modo da minimizzare  $V$  e  $\Delta V_i$ ), nel punto 2 conviene effettuare le manovre contemporaneamente.

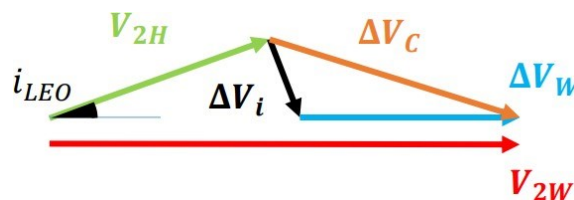


Figura 15: Rappresentazione vettoriale delle manovre di rotazione e immissione in WO

Tramite il teorema di Carnot, o del coseno, si può ricavare l'incremento di velocità associato alla manovra combinata:

$$\Delta V_C = \sqrt{V_{2W}^2 + V_{2H}^2 - 2V_{2W}V_{2H} \cos(i_{LEO})} = 0.996 \text{ km/s}$$

Trasferta LEO/GEO – Soluzione C				
#	Evento	Dove	Ora (GMT)	$\Delta V$ [km/s]
1	LEO $\rightarrow$ GTO	Nodo discendente	10:22:14	$\Delta V_1 = 2.448$
2	Cambio di inclinaz. + WO	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_C = 0.996$
3	WO $\rightarrow$ GEO	Nodo ascendente	03:57:03*	$\Delta V_{2'} = 1.029$

$$\Delta V_{tot,C} = 4.473$$

\*del giorno successivo

Questa operazione ha permesso quindi di risparmiare circa  $0.24 \text{ km/s}$ .

### Fasi di missione: CASO D (orbita di attesa + 2 rotazioni)

Si può ridurre ulteriormente il costo complessivo suddividendo il cambio di piano in due rotazioni, di cui una da effettuare in 2, contemporaneamente alla manovra di immissione nell'orbita di attesa, e l'altra in 2', contemporaneamente all'immissione in GEO (dopo un giro sulla WO).

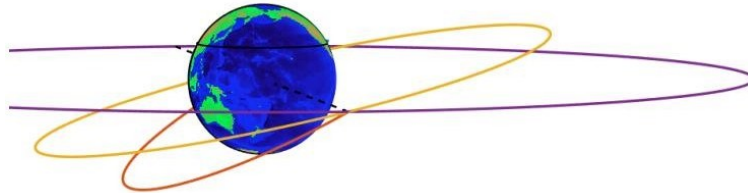


Figura 16: Trasferta LEO-GEO con orbita di attesa e rotazione condivisa

- Punto 0: il satellite si trova sulla verticale di Cape Canaveral alle ore 10:00:00 UTC;
- Punto 1: il satellite giunge sulla linea dei nodi, al nodo discendente, dove ha inizio la trasferta di Hohmann;
- Punto 2: il satellite giunge al nodo ascendente, dove si realizzano contemporaneamente una parte di rotazione dell'orbita e immissione nella WO;
- Punto 2'=2: il satellite ha compiuto un giro completo di WO e si hanno contemporaneamente rotazione rimanente e immissione nell'orbita di destinazione GEO.

Si analizzano vettorialmente le manovre:

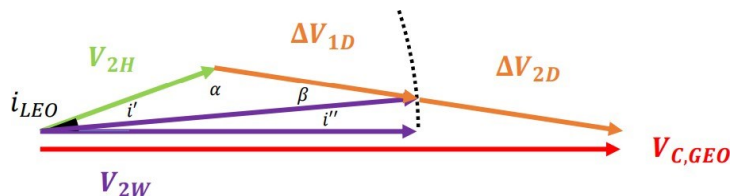


Figura 17: Rappresentazione vettoriale delle due combinazioni di manovre

Si effettua una prima rotazione di un angolo  $i' < i_{LEO}$ , con un  $\Delta V_{1D}$  tale da incrementare la velocità fino a  $V_{2W}$  e permettere l'immissione nell'orbita di attesa. Dopo aver completato un giro sulla WO, in 2'=2 si completa la rotazione, ruotando di  $i''$  tramite un  $\Delta V_{2D}$  tale da incrementare direttamente la velocità fino a  $V_{C,GEO}$  e immettersi nell'orbita geostazionaria.

Tramite il teorema del coseno si può ricavare l'incremento di velocità associato alle due combinazioni di manovre:

$$\Delta V_{1D} + \Delta V_{2D} = \sqrt{V_{c,GEO}^2 + V_{2H}^2 - 2V_{c,GEO}V_{2H}\cos(i_{LEO})} = 1.8351 \text{ km/s}$$

Con il teorema dei seni si possono successivamente calcolare:

$$\frac{\Delta V_{1D} + \Delta V_{2D}}{\sin(i_{LEO})} = \frac{V_{c,GEO}}{\sin \alpha} \Rightarrow \alpha = 126.92^\circ$$

$$\frac{V_{2W}}{\sin \alpha} = \frac{V_{2H}}{\sin \beta} \Rightarrow \beta = 38.68^\circ$$

da cui:

$$i' = 180^\circ - \alpha - \beta = 14.39^\circ$$

$$i'' = i_{LEO} - i' = 14.11^\circ$$

Utilizzando ancora il teorema dei seni si possono ricavare i due rispettivi incrementi di velocità:

$$\Delta V_{1D} = V_{2H} \frac{\sin i'}{\sin \beta} = 0.6363 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{2D} = (\Delta V_{1D} + \Delta V_{2D}) - \Delta V_{1D} = 1.1988 \text{ km/s}$$

Riassumendo in tabella:

Trasferta LEO/GEO – soluzione D				
#	Evento	Dove	Ora (GMT)	$\Delta V$ [km/s]
1	LEO $\rightarrow$ GTO	Nodo discendente	10:22:14	$\Delta V_1 = 2.448$
2	Rotazione $i'$ + immissione WO	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_{1D} = 0.636$
3	Rotazione $i''$ + finalizzazione GEO	Nodo ascendente	03:57:03*	$\Delta V_{2D} = 1.199$
				$\Delta V_{tot,D} = 4.283$

\*del giorno successivo

Si ha complessivamente un'ulteriore riduzione di circa  $0.19 \text{ km/s}$ .

### Fasi di missione: CASO E (orbita di attesa + 3 rotazioni)

L'ultimo caso prevede di aggiungere una terza rotazione “preliminare” in 1, contemporanea all'immissione in GTO, pari a  $2.5^\circ$ . Tale rotazione viene dunque effettuata nel nodo discendente, dove viene fornito il primo  $\Delta V_1$  ad accelerare per iniziare la trasferta di Hohmann, e poi si effettuano due rotazioni come nel caso D (una contemporanea all'immissione in WO e l'altra contemporanea all'inserimento in GEO):



Figura 18: LEO ( $i=28.5^\circ$ ), GTO ( $i=26^\circ$ ), WO ( $i=13.1^\circ$ ), GEO ( $i=0^\circ$ )



- Punto 0: il satellite si trova sulla verticale di Cape Canaveral alle ore 10:00:00 UTC;
- Punto 1: il satellite giunge sulla linea dei nodi, al nodo discendente, dove ha inizio la trasferta di Hohmann contemporaneamente ad una piccola rotazione preliminare;
- Punto 2: il satellite giunge al nodo ascendente, dove si realizzano contemporaneamente una parte di rotazione dell'orbita e immissione nella WO;
- Punto 2' = 2: il satellite ha compiuto un giro completo di WO e si hanno contemporaneamente rotazione rimanente e immissione nell'orbita di destinazione GEO.

La rotazione preliminare in 1 può essere rappresentata vettorialmente come segue:

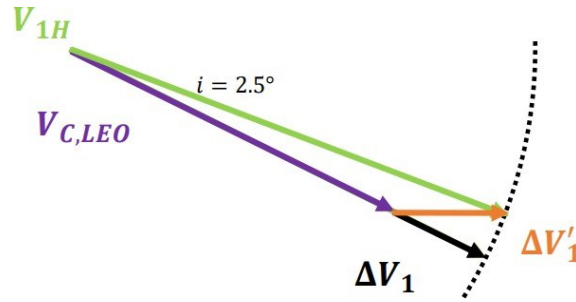


Figura 19: Rappresentazione vettoriale delle manovre di rotazione preliminare e immissione in GTO

Tramite il teorema del coseno si può ricavare:

$$\Delta V_1' = \sqrt{V_{C,LEO}^2 + V_{1H}^2 - 2V_{C,LEO}V_{1H} \cos(2.5^\circ)} = 2.4789 \text{ km/s}$$

Analogamente a quanto fatto nel caso D, tramite relazioni geometriche si ottengono tutti i parametri utili a ricavare i  $\Delta V$ :

$$i_{GTO} = i_{LEO} - 2.5^\circ = 26^\circ$$

$$\Delta V_{1E} + \Delta V_{2E} = \sqrt{V_{C,GEO}^2 + V_{2H}^2 - 2V_{C,GEO}V_{2H} \cos(i_{GTO})} = 1.7808 \text{ km/s}$$

$$\frac{\Delta V_{1E} + \Delta V_{2E}}{\sin(i_{GTO})} = \frac{V_{C,GEO}}{\sin \alpha} \Rightarrow \alpha = 130.81^\circ$$

$$\frac{V_{2W}}{\sin \alpha} = \frac{V_{2H}}{\sin \beta} \Rightarrow \beta = 36.28^\circ$$

$$i' = 180^\circ - \alpha - \beta = 12.91^\circ$$

$$i'' = i_{GTO} - i' = 13.09^\circ$$

$$\Delta V_{1E} = V_{2H} \frac{\sin i'}{\sin \beta} = 0.604 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{2E} = (\Delta V_{1E} + \Delta V_{2E}) - \Delta V_{1E} = 1.1768 \text{ km/s}$$

Trasferta LEO/GEO – soluzione E				
#	Evento	Dove	Ora (GMT)	$\Delta V$ [km/s]
1	LEO $\rightarrow$ GTO + rotazione prelim.	Nodo discendente	10:22:14	$\Delta V_1' = 2.479$
2	Rotazione $i'$ + immissione WO	Nodo ascendente	15:37:59	$\Delta V_{1E} = 0.604$
3	Rotazione $i''$ + finalizzazione GEO	Nodo ascendente	03:57:03*	$\Delta V_{2E} = 1.177$
				$\Delta V_{tot,E} = 4.26$

\*del giorno successivo

Questa soluzione permette di risparmiare ulteriori  $0.023 \text{ km/s}$ . Rispetto al caso B, introducendo le manovre combinate, ovvero sommando vettorialmente i  $\Delta V$ , si è ottenuto un risparmio complessivo pari a  $\Delta V_{tot,B} - \Delta V_{tot,E} = 0.452 \text{ km/s}$ . In questo modo si riesce ad effettuare il cambio di piano gratuitamente, perché il costo della rotazione del piano dell'orbita risulta sostanzialmente trascurabile per  $\Delta\psi$  piccoli:

$$\Delta V_{comb} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos(\Delta\psi)} \cong \sqrt{(V_2 - V_1)^2} = V_2 - V_1$$

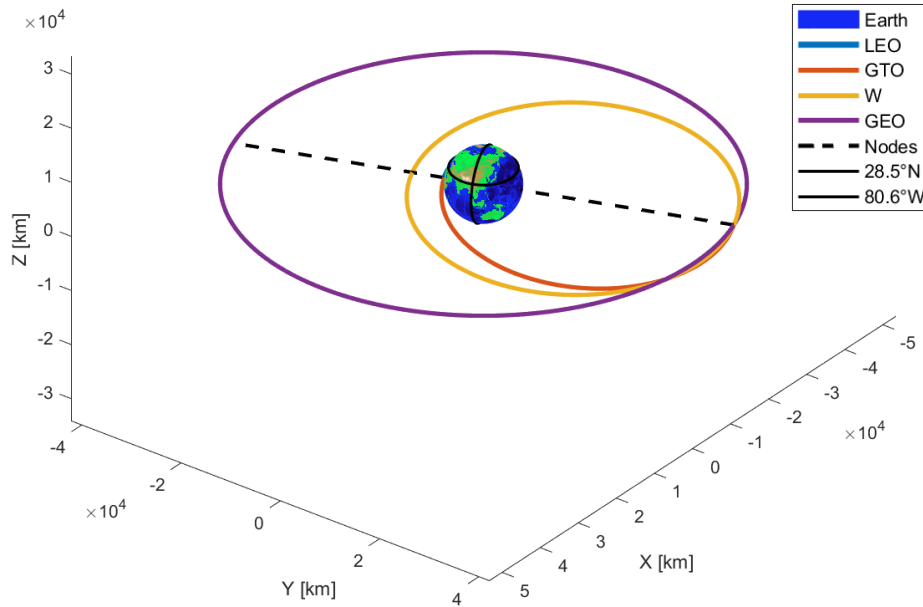


Figura 20: Soluzione finale per la trasferta LEO-GEO

## Esercitazione 5: *Rischio chimico e fisico*

### Tossicità acuta

La tossicità acuta rappresenta l'esposizione ad una sostanza verificatasi una sola volta o per un periodo di tempo ridotto. Questo parametro è quantificabile attraverso la *dose letale* o ATE (*Acute Toxicity Estimates*), che definisce il quantitativo letale di una sostanza, a seconda del tipo di esposizione. Queste soglie letali vengono approssimate con:

- LD<sub>50</sub>: dose letale per il 50% degli individui entro 24h (per ingestione o contatto);
- LC<sub>50</sub>: concentrazione letale per il 50% degli individui entro 24h (per inalazione).

Exposure route	Category 1	Category 2	Category 3	Category 4	Category 5
Oral (mg/kg bodyweight) <i>See notes (a) and (b)</i>	5	50	300	2000	5000 <i>See detailed criteria in Note (g)</i>
Dermal (mg/kg bodyweight) <i>See notes (a) and (b)</i>	50	200	1000	2000	
Gases (ppmV) <i>See notes (a), (b) and (c)</i>	100	500	2500	20000	
Vapours (mg/l) <i>See notes (a), (b), (c), (d) and (e)</i>	0.5	2.0	10	20	<i>See detailed criteria in Note (g)</i>
Dusts and Mists (mg/l) <i>See notes (a), (b), (c) and (f)</i>	0.05	0.5	1.0	5	

Note: Gases concentration are expressed in parts per million per volume (ppmV).

Figura 21: Categorie di tossicità acuta

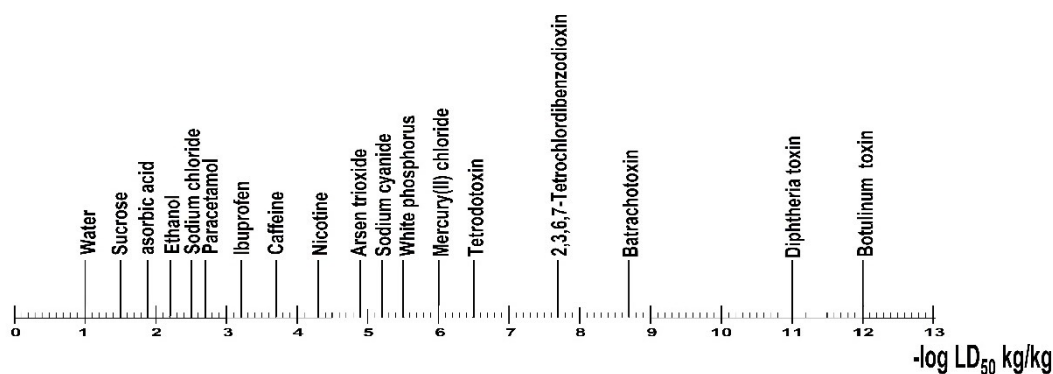


Figura 22: Scala dose letali in scala logaritmica

Queste misurazioni, dato il modo di somministrazione, sono quindi un modo per testare il potenziale tossico di una sostanza solo a breve termine (tossicità acuta), e non si riferiscono alla tossicità a lungo termine (cioè dovuta a contatto con modiche quantità di una certa sostanza per lunghi periodi).

Per quanto riguarda le miscele, è possibile quantificare il livello di tossicità acuta effettuando uno studio apposito sulla base dei dati noti delle singole sostanze e/o miscele simili (*bridging*) e verificando il soddisfacimento di certi criteri imposti dalla normativa. Per tale studio si farà uso di un *flow chart* che definisce un percorso da seguire al fine di classificare la miscela. Tutto dipenderà dai dati noti in partenza e dalla conoscenza della sostanza in questione, tuttavia in mancanza di dati non sarà possibile stimarne la pericolosità, perciò in maniera cautelativa la sostanza verrà etichettata con il

massimo livello possibile. La normativa si evolve nel tempo sulla base delle conoscenze che man mano vengono acquisite sulle varie sostanze.

Sono stati definiti altri valori di soglia per salvaguardare l'incolumità dell'essere umano:

- REL-Ceiling (*Recommended Exposure Limit*): valore da non superare in nessun caso;
- TLV-TWA (*Threshold Limit Value-Time Weighted Average*): valore limite per 8h/giorno;
- TLV-STEL (*Threshold Limit Value-Short Term Exposure Limit*): valore limite per 15 min;
- PEL-TWA (*Permissible Exposure Limits-TimeWeighted Average*): valore limite per 8h/giorno;
- IDLH (*Immediately Dangerous to Life or Health concentration value*): valore limite per rischio immediato di morte;
- LTEL (*Long Term Exposure Limit*): analogo al TLV-TWA, valore limite per 8h/giorno.

In tabella sono riassunti i valori per tipici propellenti storable attualmente utilizzati:

	NTO	N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	MMH	UDMH	Nitric Acid
NIOSH REL—Ceiling	1 <sup>a</sup>	0.03	0.04	0.06	4 <sup>a</sup>
ACGIH TLV—TWA	3	0.01	0.01	0.01	2
OSHA PEL—TWA	5 <sup>b</sup>	1	0.2 <sup>b</sup>	0.5	2
IDLH	13	50	20	15	25
EU-LTEL	N/A	0.01 <sup>c</sup>	N/A	N/A	N/A

<sup>a</sup> ST. <sup>b</sup> Ceiling. <sup>c</sup> Binding Occupational Exposure Limit Value (BOELV).

Figura 23: Valori limite per tipici propellenti storable

### Esempio: Devil's venom

Si tratta di un propellente liquido per razzi composto da una pericolosa combinazione di acido nitrico rosso fumante IRFNA (*Inhibited Red Fuming Nitric Acid*) e idrazina, nello specifico acido nitrico ipergolico UDMH (*Unsymmetrical Dimethyl-hydrazine*)  $H_2NN(CH_3)_2$ .

L'IRFNA è composta da:

- 83.4% HNO<sub>3</sub> (acido nitrico) → LC<sub>50</sub> = 67 ppm
- 13% N<sub>2</sub>O<sub>4</sub> → LC<sub>50</sub> = 27.9 ppm
- 3% H<sub>2</sub>O → presunta non tossicità
- 0.4% HF (acido fluoridrico come inibitore, protegge i serbatoi) → LC<sub>50</sub> = 50 ppm
- 0.2% altro → sostanze sconosciute

Di ogni sostanza è nota la tossicità, per cui per l'intera miscela si ha:

$$\frac{100}{ATE_{IRFNA}} = \frac{83.4}{67} + \frac{13}{27.9} + \frac{0.4}{50} = 1.718 \rightarrow ATE_{IRFNA} = 58.2 \text{ ppm}$$

L'IRFNA risulta quindi essere di CAT 1 (fino a 100 ppm), ovvero la categoria di tossicità più grave, mentre l'UDMH presenta una tossicità acuta pari a LC<sub>50</sub> = 252 ppm e rientra nella CAT 2 (fino a 500 ppm).

Nonostante l'accoppiata di IRFNA e UDMH risulti quindi altamente tossica e corrosiva, essa è stata utilizzata nella missilistica perché questa combinazione di combustibile e ossidante è ipergolica (ossia non richiede una fonte di accensione esterna), il che rende i razzi più semplici, e presenta un elevato impulso specifico. Inoltre, tali sostanze hanno punti di ebollizione elevati rispetto ad altri combustibili (come LH<sub>2</sub>) e ossidanti (come LOX), consentendo ai razzi di essere conservati pronti per il lancio per lunghi periodi senza che il combustibile o l'ossidante evaporino e debbano essere riforniti.

## Trasporto e stoccaggio

È importante tenere in considerazione i rischi legati alle proprietà fisiche del propellente:

### Esplosioni / Infiammabilità con aria a causa di spillamenti (FUEL)

- Alto LFL (lower flammable limit)
- Range esplosivo ristretto (concentrazione min-max per cui posso avere esplosioni)
- Temperatura di flash point > T ambiente (NB: aumenta con la pressione)
- Temperatura di auto-accensione > T ambiente (NB: diminuisce con la pressione)

### Incompatibilità (e.g. reazioni tra contenitore e contenuto)

- Degradazione prestazioni propellente => failure sistema propulsivo
- Corrosione dei contenitori
- Decomposizione / evaporazione selettiva miscele

### Storability

- Pressione di stoccaggio => esplosioni, atmosfere asfissianti
- Temperatura di stoccaggio (liquefazione) => instabilità
- Peso / volume serbatoi di stoccaggio => pressione di vapore
- Temperatura di congelamento (-20 °C)

Figura 24: Rischi di trasporto e stoccaggio

L'NFPA 704 è uno standard introdotto dalla *National Fire Protection Association* per identificare in modo rapido ed efficiente i livelli di rischio e pericolo delle sostanze chimiche, il che è utile per determinare quale equipaggiamento deve essere usato o le eventuali precauzioni per il maneggiamento di queste sostanze e l'intervento immediato in caso di incidente. Tale standard è costituito da un rombo diviso in 4 categorie, in cui sono classificati i materiali pericolosi: la prima di colore blu indica il livello di pericolo per la salute, quella rossa indica il pericolo di infiammabilità, il giallo la reattività/instabilità di un materiale, mentre il quarto di colore bianco contiene indicazioni su alcuni materiali particolari, come ossidanti, corrosivi, radioattivi o reattivi a contatto con l'acqua. Per ognuno di loro la scala di rischio va da 0 a 4, dove 0 è il rischio più basso e 4 quello più elevato.

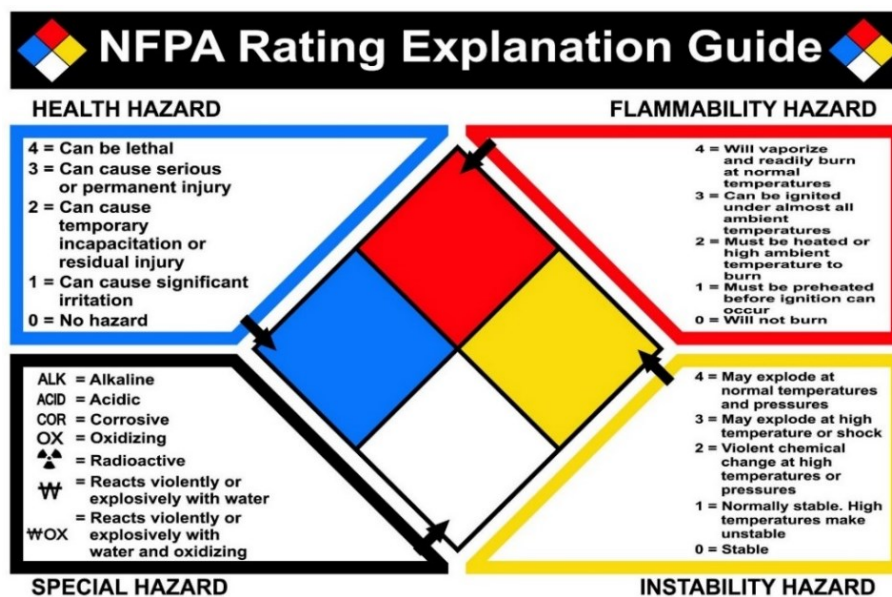


Figura 25: Standard per l'identificazione dei pericoli dei materiali (NFPA 704)

Grazie alle normative, è possibile quindi categorizzare il livello di rischio e pericolo associabile ai propellenti utilizzati per i lanciatori.

## Esempio: RP-1

Si vuole ora calcolare il *lower flammable limit* (LFL) del combustibile RP-1, ovvero un tipo di cherosene (miscela liquida di idrocarburi). Tale valore rappresenta l'estremità inferiore dell'intervallo di concentrazione (espresso in percentuale di volume) massima e minima di un gas o del vapore di un liquido combustibile miscelato con un comburente (generalmente aria), tra i quali può avvenire la combustione in presenza di un innesco.

Si fa riferimento al Modello di Shimy, che attribuisce una certa relazione a seconda dell'idrocarburo considerato:

Paraffinic Hydrocarbons  $\Leftrightarrow C_nH_{2n+2}$

Olefins Hydrocarbons  $\Leftrightarrow C_nH_{2n}$

Iso-Hydrocarbons  $\Leftrightarrow$  catena lineare tranne un atomo di C

Benzene Series  $\Leftrightarrow$  derivati dal benzene

Alcohols  $\Leftrightarrow$  almeno un gruppo OH

In questa trattazione viene presa in considerazione una miscela surrogata, ovvero una combinazione di sostanze aventi le stesse proprietà dell'RP-1, la cui reale combinazione è coperta da segreto aziendale. La miscela considerata è composta da:

Fluid	CAS #	Formula	MW	Mole%
3-ethyl-4,4-dimethyl-2-pentene	53907-59-8	C <sub>9</sub> H <sub>18</sub>	126.24	9.98
Cyclodecene	3618-12-0	C <sub>10</sub> H <sub>18</sub>	138.25	2.11
2-methylnonane	871-83-0	C <sub>10</sub> H <sub>22</sub>	142.28	2.32
2-methylnaphthalene	91-57-6	C <sub>11</sub> H <sub>10</sub>	142.20	5.10
2-methyldecalin	2958-76-1	C <sub>11</sub> H <sub>20</sub>	152.28	22.35
3-methyldecane	13151-34-3	C <sub>11</sub> H <sub>24</sub>	156.31	10.84
1-dodecene	112-41-4	C <sub>12</sub> H <sub>24</sub>	168.32	2.64
Cyclododecane	294-62-2	C <sub>12</sub> H <sub>24</sub>	168.32	4.27
4-methyl-4-undecene	61142-40-3	C <sub>12</sub> H <sub>24</sub>	168.32	10.45
n-dodecane	112-40-3	C <sub>12</sub> H <sub>26</sub>	170.33	1.93
Heptylcyclohexane	5617-41-4	C <sub>13</sub> H <sub>26</sub>	182.35	14.22
1-tridecene	2437-56-1	C <sub>13</sub> H <sub>26</sub>	182.35	1.45
2,7,10-trimethyldodecane	74645-98-0	C <sub>15</sub> H <sub>32</sub>	212.41	10.38
n-hexadecane	544-76-3	C <sub>16</sub> H <sub>34</sub>	226.44	1.95

$\Sigma = 99.99\%$

Figura 26: Miscela surrogata dell'RP-1

Definita la natura dei diversi idrocarburi costituenti la miscela, si può procedere al calcolo del LFL per ciascuna sostanza:

$$LFL_{3-ethyl} = \frac{6}{9} + 0.2 = 0.86\% \text{ vol}$$

$$LFL_{cyclodecene} = \frac{6}{10} + 0.2 = 0.8\% \text{ vol}$$

$$LFL_{1-dodecene} = \frac{6}{12} + 0.2 = 0.7\% \text{ vol}$$

$$LFL_{4-methyl} = \frac{6}{12} + 0.2 = 0.7\% \text{ vol}$$

$$LFL_{1-tridecene} = \frac{6}{13} + 0.2 = 0.66\% \text{ vol}$$

$$LFL_{n-dodecane} = \frac{6}{12} + 0.2 = 0.7\% \text{ vol}$$

$$LFL_{2,7,10-trimethyl} = \frac{6}{15} + 0.2 = 0.6\% \text{ vol}$$

$$LFL_{n-hexa} = \frac{6}{16} + 0.2 = 0.58\% \text{ vol}$$

$$LFL_{2-methylnonane} = \frac{6}{10} + 0.1 = 0.7\% \text{ vol}$$

$$LFL_{3-methyl} = \frac{6}{11} + 0.1 = 0.65\% \text{ vol}$$

$$LFL_{cyclododecane} = \frac{6}{12} + 0.1 = 0.6\% \text{ vol}$$

$$LFL_{2-methylnaph} = \frac{8}{11} = 0.73\% \text{ vol}$$

$$LFL_{2-methyldecalin} = \frac{8}{11} = 0.73\% \text{ vol}$$

$$LFL_{heptyl} = \frac{8}{13} = 0.62\% \text{ vol}$$

Infine, si determina il LFL dell'intera miscela:

$$LFL_{RP-1} = \frac{1}{\sum \frac{X_i}{LFL_i}} = 0.684\% \text{ vol}$$

dove  $X_i$  è la frazione molare dell' $i$ -esimo componente.

## Impatto ambientale

È stato analizzato l'impatto delle sostanze sull'uomo, ma è altrettanto importante studiare l'interazione che queste presentano con l'ambiente. L'entità di tale impatto è dovuta al tipo di propellenti, a seconda che si trovino allo stato iniziale o finale, e ai gas combusti o incombusti che vengono sistematicamente scaricati nell'ambiente.

Per ciascuna causa serve valutare l'effetto, che potrebbe verificarsi, a livello locale o globale, sui vari target come suolo, acqua, vegetazione, atmosfera (cambiamento climatico e strato di ozono).

Ne consegue che, la valutazione dell'impatto ambientale risulta molto complessa poiché al suo interno include diversi aspetti da prendere in considerazione.

# Esercitazione 6: *Impatto ambientale*

## Introduzione

Lo scopo dell'esercitazione verte a definire quanto impatta sull'ambiente la fase di ascesa del lanciatore Falcon 9, a seguito della determinazione di alcuni parametri caratteristici.

La prima fase di una missione spaziale è rappresentata dall'ascesa del lanciatore, durante la quale viene bruciato del propellente, che rilascerà nell'ambiente i prodotti della combustione. L'emissione di questi gas, variabili a seconda della combinazione di propellente adottato, avviene a diverse quote nell'atmosfera fino a raggiungere il vuoto.

Ricordando che l'atmosfera terrestre è suddividibile in diversi strati al variare della quota, si possono trascurare i gas introdotti nella *troposfera*, in quanto i gas in questa regione hanno vita limitata e le emissioni dei rocket sono meno rilevanti rispetto ad altre fonti inquinanti (circa 1%). Questo ragionamento non è più valido una volta che, superata la *tropopausa*, si raggiunge la *stratosfera*, che rispetto alla troposfera presenta delle dinamiche dei gas disaccoppiate in termini di pressioni, temperatura, densità, circolazione, ecc. Infatti a differenza della troposfera, caratterizzata da forti ricircolazioni, nella stratosfera si riscontrano zone di accumulo dove il gas permane per un ampio periodo di tempo (anche centinaia di anni).

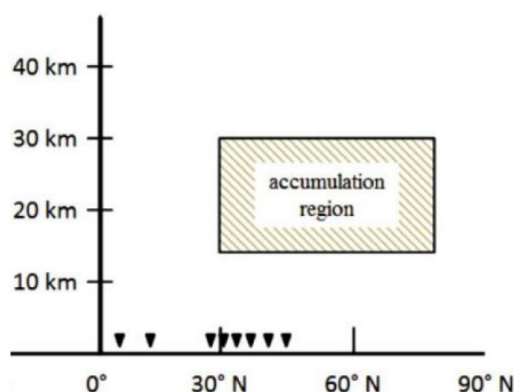


Figura 27: Zona di accumulo dei gas nella stratosfera (15-30 km, 30°N-80°N)

L'emissione di gas, sia in troposfera che in stratosfera, può portare a variazioni del bilancio radiante alla sommità della stratosfera, inducendo un raffreddamento e/o riscaldamento di ambo le zone.

Tipiche sostanze inquinanti, dipendenti dal tipo di endoreattore e dalla zona considerata, sono:

	CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	BC	Al
LOX/RP1	++	+	-	no
LOX/LH2	No	++++	No	no
SRM	+	+	-	+
Ipergolico	-	+	-	no
HRE	+	+	-	no

Figura 28: Principali emissioni per tipologia di endoreattore



Fra i principali responsabili dell'inquinamento atmosferico si riscontrano i gas serra, quali CO, CO<sub>2</sub>, NO<sub>x</sub>, H<sub>2</sub>O, per quanto riguarda la stratosfera, ai quali si affiancano inquinanti come acido cloridrico e ossido di alluminio nella troposfera.

In prima istanza la combinazione di propellente migliore sembra essere LOX/LH<sub>2</sub>, tuttavia, sebbene non vengano emessi elementi inquinanti nella troposfera, l'elevata quantità di H<sub>2</sub>O sprigionata si rivela dannosa per la stratosfera.

Bisogna tener conto anche dell'interazione che si verifica al passaggio del rocket nello strato di ozono, in quanto il lanciatore tenderà ad aprirsi un varco, immettendo localmente una quantità di gas combustibili che andranno a rimescolarsi con lo strato stesso. Questo comporta una serie di effetti non trascurabili e non facilmente determinabili, come il completamento di reazioni chimiche fuori dall'ugello, interazioni tra le varie specie chimiche presenti e infine il passaggio di radiazioni attraverso il buco nell'ozono prima della chiusura dello stesso.

Per poter quantificare l'impatto ambientale esistono diversi parametri:

- GWP (*Global-Warming Potential*): esprime il potenziale contributo di un gas all'effetto serra relativamente all'effetto della CO<sub>2</sub>, tenendo conto del tempo in cui rimane attivo in atmosfera;
- CFP (*Carbon Foot Print*): definisce l'impronta ecologica dei vari gas emessi;
- iRF (*instantaneous Radiative Forcing*): descrive il cambiamento del bilancio di flusso radiante;
- EIs (*Emission Indexes*): indici di emissione delle varie specie chimiche.

## Parametri noti ed obiettivo

La missione analizzata è l'ascesa di un Falcon 9, così definita:

Profilo di missione:	
T+00:00:00	Decollo
T+00:01:22	Max Q, throttle down
T+00:01:28	Quota=17 km (tropopausa)
T+00:02:22	Quota=50 km (stratopausa)
T+00:02:42	MECO (Main Engine Cut Off)
T+00:02:53	Accensione II stadio
T+00:08:34	Spegnimento II stadio
T+00:26:29	Ri-accensione II stadio
T+00:27:25	Spegnimento II stadio



Figura 29: Profilo di missione del Falcon 9

Si può notare come il razzo rallenti a Max-Q, ovvero il punto in cui è sottoposto al massimo stress aerodinamico (massima pressione dinamica  $q = 1/2 \rho V^2$ ). Man mano che un razzo sale nell'atmosfera, la sua velocità aumenta, aumentando le sollecitazioni aerodinamiche. Tuttavia, l'atmosfera si fa più rarefatta con l'altitudine, il che riduce lo stress aerodinamico. Max-Q è il punto in cui queste due tendenze producono la massima sollecitazione sul veicolo, e alcuni razzi riducono la velocità in questo punto per mantenere le sollecitazioni entro i limiti di progetto. Di seguito è riportato un grafico della pressione aerodinamica durante un lancio del Falcon Heavy:

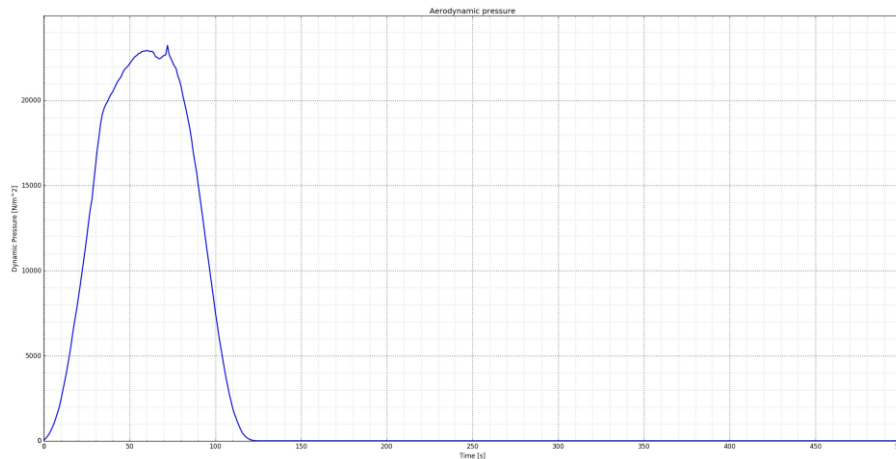


Figura 30: Pressione aerodinamica durante la fase di lancio del Falcon Heavy

Sono noti i seguenti parametri di progetto:

Falcon 9 & Falcon Heavy Payload Upmass			Dimensions	
Variant	Falcon 9 v1.2	Heavy	Height	70 m
LEO	22,800 kg	54,400 kg	Mass	549,054 kg
GTO	8,300 kg	22,200 kg	Stages	2
Escape	4,020 kg	13,600 kg		

First Stage		Second Stage	
Engine	Merlin 1D+	Manufacturer	SpaceX
Manufacturer	SpaceX	Engine	Merlin 1D+ Vacuum
Fuel	RP-1/LOx	Fuel	RP-1/LOx
No. Engines	9	Length	13.8 m
Length	41.2 m	Diameter	3.7 m
Length (w/ Interstage)	47.7 m	Diameter (Fairing)	5.2 m
Diameter	3.7 m	Empty Mass	3,900 kg
Empty Mass	25,600 kg	Propellant Mass	92,670 kg
Propellant Mass	395,700 kg	Thrust	934 kN
Thrust (Sea level)	7,607	Burn Time	397 sec.
Thrust (Vacuum)	8,227 kN		
Burn Time	162 sec.		

Figura 31: Specifiche di progetto del Falcon 9

con mixture ratio e rapporto di espansione degli ugelli del primo e secondo stadio pari a:

$$\alpha_I = 2.34 \quad \alpha_{II} = 2.36$$

$$\varepsilon_I = 21.4 \quad \varepsilon_{II} = 117$$

Inoltre per la trattazione si assumono le seguenti ipotesi semplificative:

- si trascura la riduzione di manetta a Max-Q: in questo modo, poiché la resistenza aerodinamica va calando man mano che l'atmosfera diventa sempre più rarefatta, il lanciatore procederebbe a velocità sempre più sostenute e questo porterebbe alla formazione di un flusso termico più consistente ( $\propto V^3$ );
- mixture ratio nel primo e secondo stadio  $\alpha = \text{cost}$  durante il funzionamento;
- pressione in camera di combustione costante e pari a  $p_c = 9.72 \text{ MPa}$ ;
- modello *frozen* per l'analisi dei gas combusti (la composizione chimica rimane invariata durante l'evoluzione del flusso nel divergente).

Valutando i tempi di accensione dei due stadi:

$$t_{burn,I} = 00:02:42 - 00:00:00 = 162 \text{ s}$$

$$t_{burn,II} = (00:27:25 - 00:26:29) + (00:08:34 - 00:02:53) = 397 \text{ s}$$

I parametri noti per il caso trattato sono:

- Portate di propellente dei due stadi:

$$\dot{m}_{prop,I} = \frac{m_{prop,I}}{t_{burn,I}} = \frac{395700 \text{ kg}}{162 \text{ s}} = 2442.6 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_{prop,II} = \frac{m_{prop,II}}{t_{burn,II}} = \frac{92670 \text{ kg}}{397 \text{ s}} = 233.4 \text{ kg/s}$$

- Flusso termico terrestre irradiato (Long Wave):  $l_{LW} = 235 \text{ W/m}^2$
- Coefficiente di assorbimento specifico della  $\text{CO}_2$ :  $\sigma_{\text{CO}_2} = 0.005 \text{ m}^2/\text{kg}$
- Coefficiente di assorbimento specifico della  $\text{H}_2\text{O}$ :  $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 4 \text{ m}^2/\text{kg}$  ( $\gg \sigma_{\text{CO}_2}$ )
- Area della zona di accumulo nella stratosfera:  $A = 1.2 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$
- Superficie terrestre illuminata:  $A_E = 2.55 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$
- Tempo medio di permanenza dei gas combustibili nella stratosfera:  $\tau = 4 \text{ anni}$

## Emissioni: CEA

Le frazioni dei gas emessi dal lanciatore durante l'ascesa verranno stimate avvalendosi del codice di calcolo CEA (*Chemical Equilibrium with Applications* [NASA]) che permette la valutazione dell'equilibrio chimico in camera. Di seguito sono riportate le schermate di inserimento dei dati richiesti dal programma, relativi a pressione di camera, combustibile e ossidante, mixture ratio e rapporto di espansione:

Select problem and code and click on the "Submit" button:

Type Code	Description
<input checked="" type="radio"/> rocket	Rocket
<input type="radio"/> hp	Assigned Enthalpy & Pressure
<input type="radio"/> tp	Assigned Temperature & Pressure
<input type="radio"/> det	Chapman-Jouguet Detonation
<input type="radio"/> shock	Shock Tube
<input type="radio"/> tv	Assigned Temperature & Density
<input type="radio"/> uv	Combustion at Assigned Density
<input type="radio"/> sp	Assigned Entropy & Pressure
<input type="radio"/> vt	Assigned Entropy & Density

Enter an alphanumeric code [Emission]  
The code is optional and is used to identify your data. Use no more than 15 characters. Blank spaces, hyphens and underscores are allowed, but no special characters (\$, %, etc).

Submit

Problema = «rocket»

How do you want to specify the Oxidizer/Fuel Ratio?

☐ %fuel: %fuel by Weight  
☒ O/F: Oxidizer/Fuel Wt. ratio  
☐ phi: Equivalence based on Fuel/Oxid. wt ratio (Eq 9.19\*)  
☐ ceq ratio: Equivalence based on Valence (Eq 9.18\*)

If these values are not filled, CEA will assume 1:1 Oxidizer/Fuel ratio by weight.  
 \*Reference: NASA RP1311 Part II (Users Manual), p. 13, Sect. 2.4.3

Enter Low-Value, High-Value and Interval

Low Value:   
 High Value:   
 Interval:

Clear Low/High/Int. Fields

The Low-High-Interval values must result in an array of no more than 30 datapoints.

Or, Fill in these numbered fields. Do not use both sides.

1	2.34	11	21
2	2.36	12	22
3		13	23
4		14	24
5		15	25
6		16	26
7		17	27
8		18	28
9		19	29
10		20	30

Clear Numbered Fields

Valori MR del primo e secondo stadio => O/F ratio

Pressure

Enter Low-High-Interval values for no more than 24 datapoints.

1	97.4	9		17	
2		10		18	
3		11		19	
4		12		20	
5		13		21	
6		14		22	
7		15		23	
8		16		24	

Low Value:   
 High Value:   
 Interval:

Clear Low/High/Int. Fields

Select one: ☐ atm ☒ bar ☐ mmHg ☐ psia

\*Ref: NASA RP1311 Part II (Users Manual), p. 13, Section 2.4.8

Pressione di camera = 9.72 MPa

Select one of the following:

Select one of the following compounds for simple (1-component) fuels, or select a mixture using the periodic table:

☐ CH4 ☐ CH4(L) ☐ H2 ☐ H2(L) ☒ RP-1 ☐ Use Periodic Table (mixtures)

- The species listed above are assumed to be pure. If your reactant is not shown here, or you need to blend one or more compounds, use the Periodic Table.
- Please note that any fuel combinations using the Periodic Table will cancel out a current simple-fuel selection.
- Be careful to select the appropriate compounds. Some compounds are represented in the CEA database in more than one form. For example, H2 refers to gas while H2(L) is liquid.
- To specify reactants without distinguishing between 'fuels' and 'oxidants', select 'None' from the Oxidizer Selection page, and CEA will be instructed to skip the Oxidizer Selection Form.

Enter Reactant Temperature(K), if needed:

Please specify how to define reactant mixtures (both Fuels & Oxidizers): ☒ wt% ☐ mole

FUEL = RP1

Select one of the following:

Select one of the following compounds for simple (1-component) oxidizers, or select a mixture using the periodic table:

☐ Air ☐ CL2 ☐ CL2(L) ☐ F2 ☐ F2(L) ☐ H2O2(L) ☐ NH4(L) ☐ N2O ☐ NH4NO3(l) ☐ O2 ☒ O2(L)

Enter Oxidizer Temperature(K), if needed:

☐ Use Periodic Table (mixtures) ☐ None

- Use the Periodic Table if your oxidizer does not appear above or you need a mixture of two or more compounds.
- Please note that selecting oxidizer(s) using the Periodic Table cancels out any simple-oxidizer selection.
- If you do not want your analysis to distinguish between fuels and oxidizers, select None.
- Select your reactants carefully, since some compounds are represented in the CEA Database in more than one form. For example, H2O refers to water vapor while H2O(L) is liquid.

OX = LOX

**Define Exit Conditions (Optional)**

**-Pc/Pc (Chamber/Exit) Pressure Ratios**  
Values will be sorted in Ascending order.

1.   
2.   
3.   
4.   
5.   
6.   
7.   
8.   
9.   
10.   
11.   
12.   
13.   
14.   
15.   
16.   
Clear Numbered Fields

**Subsonic Area Ratios**  
Values will be sorted in Descending order.

1.   
2.   
3.   
4.   
5.   
6.   
7.   
8.   
9.   
10.   
11.   
12.   
13.   
Clear Numbered Fields

**Supersonic Area Ratios**  
Values will be sorted in Ascending order.

1.   
2.   
3.   
4.   
5.   
6.   
7.   
8.   
9.   
10.   
11.   
12.   
13.   
Clear Numbered Fields

Condizione di uscita =>  $\epsilon$  degli ugelli del primo e secondo stadio

**Enter Your Final Choices Before Running CEA.**

Select Your Output File Length:  
☐ Short: Prints only error messages and final tables, excluding atom ratios and species being considered during calculation.  
☒ Long: Prints all output tables.  
☐ Debug: Includes intermediate output.

**CEA Options**  
 Express Products as: ☒ Mass-Fractions ☐ Mole-Fractions  
 Express heat as: ☒ SI units ☐ Calories  
☐ Include Transport Properties?  
 Ref: NASA RP1311 Part I (Analysis), Ch. 5  
☐ Consider Ionized Species as possible products?  
☒ Set Trace Value:  x 10<sup>-5</sup>  
 The Trace Option prints species compositions having mole or mass fractions exceeding the Trace Value. The criteria for equilibrium composition convergence will be tighter to ensure accuracy. Mass- and mole-fractions will be expressed in E-format (eg. 2.0089-4 = 0.0002).

**Rocket Problem Options:**  
 Select one or both: ☐ Equilibrium ☒ Frozen  
 For Frozen Option, select NFZ value: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5  
 Ref: NASA RP1311 Part II (Users Manual), p. 18-19  
 Select: ☒ Infinite Area Combustor ☐ Finite Area Combustor  
 For Finite Area Combustor only, select:  
☒ Mass Flux/Chamber Area, kg/sec-sqm ☐ Contraction Ratio  
 Mass Flux or Contraction Ratio value:   
 Ref: NASA RP1311 Part II (Users Manual), p. 18-19

**Other Parameters**

Name	Definition	Qty.	Value(s)
P	Pressure (bar)	1	97.2
O/F		2	2.34, 2.36
supar	Supersonic Area Ratio	2	21.4, 117

**What do you want to do upon clicking 'Submit'?**  
☒ Perform CEA Analysis. ☐ Tabulate results for insertion into a spreadsheet.  
☐ Change Problem Type ☐ Select species for 'Omit Only/Insert' options.

Formato «long», modello «frozen», «trace» attiva (10<sup>-5</sup>)

Figura 32: Set-up CEA

Segue il post-processing dei risultati relativi al primo e secondo stadio:

O/F = 2.340000

ENTHALPY (KG-HOL)(K)/KG	EFFECTIVE FUEL h(2)/R -0.21270751E+03	EFFECTIVE OXIDANT h(1)/R -0.46783267E+02	MIXTURE h0/R -0.97862381E+02		
KG-FORM.WT./KG	bi(2)	bi(1)	b0i		
*C	0.71550294E-01	0.00000000E+00	0.21422244E-01		
*H	0.13952307E+00	0.00000000E+00	0.41773375E-01		
*O	0.00000000E+00	0.62502344E-01	0.43789067E-01		
POINT ITN	T	C	H	O	
THEORETICAL ROCKET PERFORMANCE ASSUMING FROZEN COMPOSITION					
Pin = 1409.8 PSIA CASE = Emissioni					
REACTANT	WT FRACTION (SEE NOTE)	ENERGY KJ/KG-HOL	TEHP K		
FUEL RP-1	1.0000000	-24717.700	298.150		
OXIDANT O2(L)	1.0000000	-12979.000	90.170		
O/F= 2.34000	%FUEL= 29.940120	R, EQ. RATIO= 1.455413	PHI, EQ. RATIO= 1.455413		
CHAMBER	THROAT	EXIT	EXIT		
Pinf/P	1.0000	1.7823	245.82	2427.60	
P, BAR	97.200	54.535	0.39542	0.04004	
T, K	3633.35	3278.94	1277.58	769.35	
RHO, KG/CU M	7.2631	0.45155	0.48029-2	1.4130-2	
H, KJ/KG	-813.68	-1548.80	-5449.04	-6298.25	
U, KJ/KG	-2151.95	-2756.53	-5919.61	-6581.63	
G, KJ/KG	-42177.6	-38877.9	-19993.6	-15056.9	
S, KJ/(KG)(K)	11.3845	11.3845	11.3845	11.3845	
M, (1/n)	22.574	22.574	22.574	22.574	
Cp, KJ/(KG)(K)	2.0850	2.0628	1.7585	1.5747	
GAMMA	1.2146	1.2174	1.2650	1.3053	
SON VEL, M/SEC	1274.9	1212.5	771.5	608.2	
MACH NUMBER	0.000	1.000	3.946	5.446	
PERFORMANCE PARAMETERS					
Ae/At	1.0000	21.400	117.00		
CSTAR, M/SEC	1775.3	1775.3	1775.3		
CF	0.6830	1.7151	1.8656		
Ivac, M/SEC	2208.6	3199.3	3397.5		
Isp, M/SEC	1212.5	3044.8	3312.0		
MASS FRACTIONS					
*CO	0.44792	*CO2	0.23887	COOH	0.00004
*H	0.00120	HCO	0.00005	H2O	0.00005
*H2	0.01008	H2O	0.25902	H2O2	0.00001
*O	0.00372	*OH	0.03082	*O2	0.00017

O/F = 2.360000

ENTHALPY (KG-HOL)(K)/KG	EFFECTIVE FUEL h(2)/R -0.21270751E+03	EFFECTIVE OXIDANT h(1)/R -0.46783267E+02	MIXTURE h0/R -0.97862381E+02		
KG-FORM.WT./KG	bi(2)	bi(1)	b0i		
*C	0.71550294E-01	0.00000000E+00	0.21294730E-01		
*H	0.13952307E+00	0.00000000E+00	0.41524724E-01		
*O	0.00000000E+00	0.62502344E-01	0.43900456E-01		
POINT ITN	T	C	H	O	
THEORETICAL ROCKET PERFORMANCE ASSUMING FROZEN COMPOSITION					
Pin = 1409.8 PSIA CASE = Emissioni					
REACTANT	WT FRACTION (SEE NOTE)	ENERGY KJ/KG-HOL	TEHP K		
FUEL RP-1	1.0000000	-24717.700	298.150		
OXIDANT O2(L)	1.0000000	-12979.000	90.170		
O/F= 2.36000	%FUEL= 29.761905	R, EQ. RATIO= 1.443079	PHI, EQ. RATIO= 1.443079		
CHAMBER	THROAT	EXIT	EXIT		
Pinf/P	1.0000	1.7820	245.19	2417.07	
P, BAR	97.200	54.545	0.39643	0.04021	
T, K	3642.93	3288.38	1284.86	775.27	
RHO, KG/CU M	7.2717	0.45206	0.48087-2	1.4137-2	
H, KJ/KG	-811.25	-1545.36	-5444.26	-6295.14	
U, KJ/KG	-2147.94	-2751.95	-5915.70	-6579.61	
G, KJ/KG	-42212.9	-38917.5	-20046.6	-15106.0	
S, KJ/(KG)(K)	11.3649	11.3649	11.3649	11.3649	
M, (1/n)	22.660	22.660	22.660	22.660	
Cp, KJ/(KG)(K)	2.0813	2.0592	1.7571	1.5736	
GAMMA	1.2140	1.2168	1.2639	1.3041	
SON VEL, M/SEC	1273.9	1211.7	771.9	609.1	
MACH NUMBER	0.000	1.000	3.943	5.437	
PERFORMANCE PARAMETERS					
Ae/At	1.0000	21.400	117.00		
CSTAR, M/SEC	1774.5	1774.5	1774.5		
CF	0.6828	1.7154	1.8663		
Ivac, M/SEC	2207.5	3198.9	3397.7		
Isp, M/SEC	1211.7	3044.0	3311.8		
MASS FRACTIONS					
*CO	0.44173	*CO2	0.24298	COOH	0.00004
*H	0.00121	HCO	0.00005	H2O	0.00007
*H2	0.00976	H2O	0.25900	H2O2	0.00002
*O	0.00400	*OH	0.03205	*O2	0.00908

PRIMO STADIO

SECONDO STADIO

PRIMO  
STADIO

SECONDO  
STADIO

Figura 33: Post-processing

Calcolate le frazioni di massa delle varie specie chimiche, si possono determinare i vari indici che permettono di quantificare l'impatto ambientale del lanciatore durante le varie fasi operative.

## Emissioni: Global Warming Potential (GWP)

Il GWP è una misura del calore assorbito in un determinato periodo di tempo da un gas serra in atmosfera, espresso come multiplo del calore che verrebbe assorbito dalla stessa massa di anidride carbonica CO<sub>2</sub>. Di seguito sono riportati alcuni valori caratteristici, considerando un periodo di tempo di 100 anni:

Gas	GWP
CO <sub>2</sub>	1
CO	3
CH <sub>4</sub>	27.9
H <sub>2</sub>	5.8
H	5.8

Figura 34: GWP (arco temporale di 100 anni)

Noti i principali gas emessi dal lanciatore e rapportandoli all'emissione equivalente in CO<sub>2</sub>, si può risalire all'impronta ecologica CFP (*Carbon Foot Print*):

$$CFP = \sum_i^n \left( GWP_i \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p(t) X_i(h(t)) dt \right)$$

Le frazioni molari sono costanti durante l'ascesa sia per il primo che per il secondo stadio, in quanto  $\alpha$  è costante, però sono leggermente diverse tra loro perché il mixture ratio è differente. Inoltre, integrando le portate (costanti) nel tempo, si ottengono le masse di propellente del primo e secondo stadio. Quindi, per via delle ipotesi poste in precedenza, la relazione del CFP può essere semplificata:

$$CFP_{lancio} = \sum_i^n GWP_i \cdot X_{i,I} m_{prop,I} + \sum_i^n GWP_i \cdot X_{i,II} m_{prop,II} = 803.34 \text{ tonCO}_2eq$$

Confrontando l'impronta ecologica derivante dal lanciatore con altre fonti di impatto ambientale, risulta:

$$CFP_{cittadino EU} = 14 \text{ tonCO}_2eq/anno$$

$$CFP_{trasporto su ruota medio in EU} = 109 \text{ gCO}_2eq/km \text{ per passeggero}$$

$$CFP_{aviazione civile} = 115 \div 260 \text{ gCO}_2eq/km \text{ per passeggero}$$

### Emissioni: Instantaneous Radiative Forcing (iRF)

L'iRF esprime l'entità dell'alterazione del bilancio di flusso radiante dell'atmosfera (bilancio tra energia entrante ed energia uscente nel sistema Terra-atmosfera) per effetto delle emissioni di un lancio. Questo parametro consente di valutare l'impatto derivante da alcune specie chimiche che apparentemente non gravano sull'ambiente, quantificando inoltre la radiazione che viene riemessa verso lo spazio.

Si procede con la valutazione dell'iRF per CO<sub>2</sub> e H<sub>2</sub>O, ovvero le due principali specie chimiche che impattano nella stratosfera. A tale scopo si definisce il tempo di percorrenza della stratosfera, come differenza tra gli istanti in cui il rocket raggiunge la tropopausa (17 km) e la stratopausa (50 km):

$$t_S - t_T = 00:02:22 - 00:01:28 = 54 \text{ s}$$

La massa emessa nella stratosfera risulta rispettivamente di:

$$m_{CO_2} = \int_{t_T}^{t_S} X_{CO_2,I} \dot{m}_{prop,I} dt = 31507 \text{ kg}$$

$$m_{H_2O} = \int_{t_T}^{t_S} X_{H_2O,I} \dot{m}_{prop,I} dt = 34164.84 \text{ kg}$$

Per cui:

$$iRF_{CO_2} = \frac{l_{LW}\sigma_{CO_2}m_{CO_2}\tau}{A_E} = 5.81 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

$$iRF_{H_2O} = \frac{l_{LW}\sigma_{H_2O}m_{H_2O}\tau}{A} = 1.07 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

I valori di  $iRF$  risultano molto piccoli, ma bisogna considerare che le superfici di riferimento sono dell'ordine di  $10^{14} \text{ m}^2$ . Tuttavia, si osserva come  $iRF_{H_2O} \gg iRF_{CO_2}$ , perciò il contributo dell'anidride carbonica risulta trascurabile rispetto a quello del vapore acqueo, che causa un riscaldamento della troposfera ed un raffreddamento della stratosfera. Si evince quindi come la combinazione di propellenti LOX/LH2 non sia del tutto innocua poiché climalterante nella stratosfera.

## Emissioni: Emission Index (EI)

Per valutare in maniera rapida l'impatto ambientale di un lanciatore è possibile far riferimento agli Indici di Emissione (EIs). In tabella sono riportati i valori di emissione media delle specie chimiche che devono essere tenute sotto controllo (grammi emessi per kg di propellente bruciato):

Rocket Type	EI (CO <sub>2</sub> )	EI (H <sub>2</sub> O)	EI (BC)	EI (SMF)
Kerosene	600	350	10–20–40	0
Cryogenic	0	1000	0	0
SRM	200	350	2–4–8	10–60–120
Hypergolic	150	550	2–4–8	0
Hybrid	200	200	20–40–80	0

Figura 35: Indici di Emissione dei prodotti di combustione

Si può definire l'espressione per il calcolo del *carico stazionario*  $M$  per il prodotto di combustione «C»:

$$M = \frac{2}{3} N m_{prop,tot} 10^{-3} EI(c) \tau$$

con una frequenza annuale di lanci  $N=52$  (effettuati nel 2022) e assumendo che 2/3 delle emissioni avvengano nella stratosfera (mentre 1/3 rimanente avviene al di sotto della tropopausa). Tale fattore è correlato alla tipologia di lanciatore considerato, perciò ci sono casi in cui si adotteranno dei coefficienti differenti a seconda della legge di spinta del lanciatore stesso.

Valutando il carico stazionario per i principali inquinanti emessi in stratosfera, si ottiene:

$$m_{prop,tot} = m_{prop,I} + m_{prop,II} = 488370 \text{ kg}$$

$$M(CO_2) = 4.06 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

$$M(H_2O) = 2.37 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

$$M(BC) = 1.35 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

$$M(SMF) = 0 \text{ kg}$$

Attraverso questo calcolo approssimato è stato possibile valutare l'impatto di diverse tipologie di lanciatori, stimando così l'influenza delle singole specie chimiche.



# Esercitazione 7: *Settling e Vanes*

## Introduzione (Settling)

Nel vuoto, in assenza di qualsiasi accelerazione (0 g), il propellente fluttua nel serbatoio sotto forma di bolle o resta adeso alle pareti del tank. Questo non garantisce, in caso di riaccensione dell'endoreattore, un flusso di massa "free gas liquid" verso la camera di combustione

Il *settling* prevede di fornire spinta in modo da generare un'accelerazione che vada a compattare il propellente vicino all'uscita del tank (verso la camera di combustione); tale spinta viene poi mantenuta per far sì che le bolle di gas pressurizzate si spostino in direzione opposta al liquido per galleggiamento (per il principio di Archimede). Le bolle subiscono una resistenza per effetto viscoso del fluido in cui si muovono finché le forze di attrito non bilanciano la spinta di Archimede, determinandone un moto rettilineo uniforme attraverso il propellente.

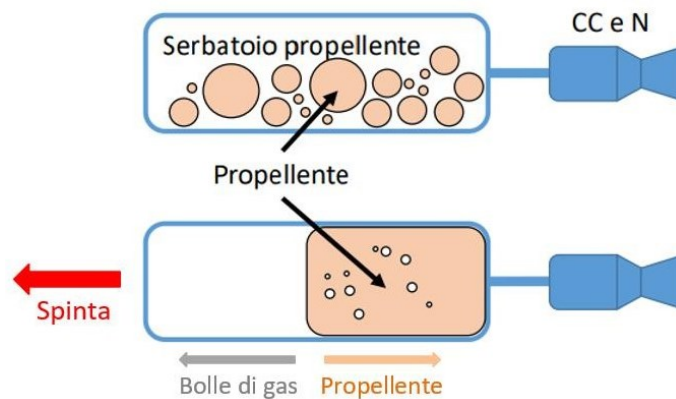


Figura 36: *Settling*

Per alimentare correttamente il motore sono dunque necessarie:

- una prima fase  $t_{acc}$  di accensione del motore e di raccolta del propellente verso il fondo del serbatoio;
- una seconda fase  $t_{gal}$  in cui si attende, a motore acceso, che le bolle percorrano il serbatoio in verso contrario.

Entrambe le fasi richiedono però che si possa prima avviare il motore: si tratta di un problema chiuso risolvibile tramite l'adozione di trappole (vedi Esercitazione 8) che convogliano inizialmente il propellente verso il motore.

## Parametri noti ed obiettivo (Settling)

Si vuole analizzare la procedura di settling per un lanciatore bistadio. Sono noti i seguenti parametri:

- masse in gioco:
  - $m_{0,I} = 22 \text{ t}$  (*dry mass* dello stadio)
  - $m_{res,I} = 9.5 \text{ t}$  (*residual mass* di propellente)
  - $m_{0,II} = 4.5 \text{ t}$
  - $m_{res,II} = 2.5 \text{ t}$

- dimensioni dei serbatoi:
  - $L_{OX,I} = 22.5 \text{ m}$  (lunghezza)
  - $L_{OX,II} = 8.7 \text{ m}$
  - $D_{OX} = 3.66 \text{ m}$  (diametro tank)
- prestazioni:
  - $T_{M,I} = 854 \text{ kN}$  (spinta massima)
  - $T_{m,I} = 487 \text{ kN}$  (spinta minima)
  - $T_{M,II} = 981 \text{ kN}$
  - $T_{m,II} = 626 \text{ kN}$
  - $I_{SP,I} = 311 \text{ s}$  (impulso specifico)
  - $I_{SP,II} = 340 \text{ s}$
  - $\alpha_I = 2.34$  (mixture ratio)
  - $\alpha_{II} = 2.36$
  - $n_{eng,I} = 9$  (numero di motori)
  - $n_{eng,II} = 1$
- caratteristiche fluidodinamiche:
  - $C_d = 0.47$  (coefficiente di resistenza)
  - $r_b = 5 \text{ mm}$  (raggio delle bolle)
  - $\rho_g = 0.1785 \text{ kg/m}^3$  (densità He)
  - $\rho_l = 1141 \text{ kg/m}^3$  (densità LOX)

L'obiettivo è quello di determinare la massa di propellente necessaria per il settling del primo e del secondo stadio assumendo 3 possibili configurazioni: spinta massima, minima e minima con un singolo motore in funzione.

## Settling Time

Durante il settling il propellente libra all'interno del tank, quindi non accelera insieme ad esso (per lo meno non all'inizio) finché non viene raccolto dalle pareti del serbatoio stesso che invece subisce la spinta perché rigidamente vincolato al motore.

Il *settling time* può essere calcolato come somma della durata delle due fasi:

$$t_{set} = t_{acc} + t_{gal} = \sqrt{\frac{2Lm_0}{T}} + \frac{l}{\left[\frac{8}{3} \frac{r_b T}{C_d m_t} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

dove:

- $m_t = m_0 + m_{res}$  è la massa totale dello stage dopo il settling;
- $l = \frac{m_{res}}{\pi R^2 \rho_l}$  è la massima altezza della colonna di liquido che le bolle devono percorrere per raggiungere il pelo libero e uscire dal liquido.

Per il calcolo del tempo di accensione  $t_{acc}$  si utilizza l'equazione oraria del moto uniformemente accelerato:



$$L = \frac{1}{2} a t_{acc}^2 = \frac{1}{2} \frac{T}{m_0} t_{acc}^2 \Rightarrow t_{acc} = \sqrt{\frac{2Lm_0}{T}}$$

Nel caso di serbatoi separati, si considerano i valori maggiori di  $L$  ed  $l$  (in questo caso quelli di LOX) per il settling, per avere tempi più conservativi.

Per il calcolo del tempo di galleggiamento  $t_{gal}$ , invece, si assume la velocità terminale delle bolle pari ad una costante, data dall'equilibrio fra il galleggiamento dovuto alla presenza di un'accelerazione  $T/m_t$  (data dalla spinta) e le forze di attrito viscoso nel liquido. Pertanto il tempo necessario è dato dal rapporto fra spazio percorso e velocità terminale:

$$t_{gal} = \frac{l}{\left[ \frac{8}{3} \frac{r_b T}{C_d m_t} \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Calcolati i tempi, si può ricavare la massa di propellente necessaria per il settling:

$$m_p = \dot{m}_p t_{set} = \frac{T}{I_{SP} g_0} \left\{ \sqrt{\frac{2Lm_0}{T}} + \frac{l}{\left[ \frac{8}{3} \frac{r_b T}{C_d m_t} \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \propto T$$

assieme alle masse di ossidante e combustibile:

$$m_{ox} = m_p \frac{\alpha_I}{1 + \alpha_I} \quad m_{fuel} = m_p \frac{1}{1 + \alpha_I}$$

Risulta conveniente fornire basse spinte per tempi più lunghi piuttosto che spinte alte per tempi brevi, al fine di minimizzare la massa di propellente necessaria per il settling.

Nelle seguenti tabelle sono riassunti i valori di tempi e masse, ottenuti per ciascuno dei due stadi nelle diverse configurazioni richieste:

	STADIO I		
	$T_{MAX}$	$T_{MIN}$	Single Engine
$t_{acc}$ [s]	0.3589	0.4753	1.4258
$t_{gal}$ [s]	0.3008	0.3984	1.1951
$t_{set}$ [s]	0.6597	0.8737	2.6209
$m_p$ [kg]	1662.6260	1255.6870	418.5305
$m_{fuel}$ [kg]	497.7922	375.9543	125.3085
$m_{ox}$ [kg]	1164.834	879.7331	293.2220

	STADIO II		
	$T_{MAX}$	$T_{MIN}$	Single Engine
$t_{acc}$ [s]	0.2825	0.3537	0.3537
$t_{gal}$ [s]	0.1045	0.1308	0.1308
$t_{set}$ [s]	0.3870	0.4845	0.4845
$m_p$ [kg]	113.8700	90.9698	90.9698
$m_{fuel}$ [kg]	33.8899	27.0744	27.0744
$m_{ox}$ [kg]	79.9801	63.8955	63.8955

Serve dunque predisporre una trappola che sia in grado di immagazzinare questo quantitativo di propellente (fuel e oxidizer) necessaria al settling.

### Introduzione (Vanes)

Si tratta di dispositivi il cui compito è quello di convogliare il flusso verso l'uscita del serbatoio. Il loro funzionamento può essere facilmente modellizzato da un piano inclinato su cui il fluido, soggetto ad un'accelerazione, scorre per adesione ad una parete verticale ivi posizionata.

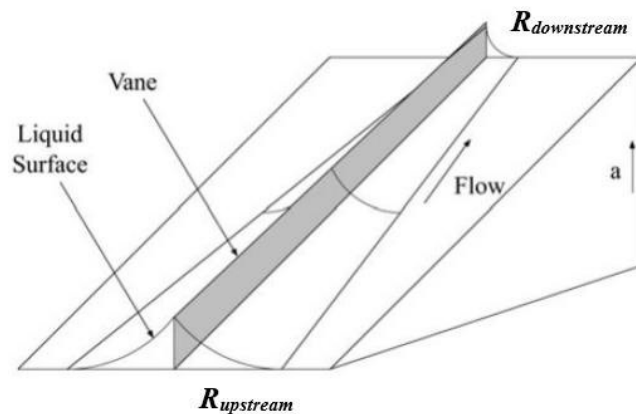


Figura 37: Vanes

Se il raggio di curvatura della superficie di liquido a valle del flusso (in alto in figura) è sufficientemente più piccolo di quello a monte (in basso in figura), si genera un flusso diretto verso l'alto per capillarità: la tensione superficiale (che vuole ridurre la superficie libera e genera il flusso verso l'alto) vince il gradiente gravimetrico e viene bilanciata dalle forze dinamiche e da quelle di attrito lungo le pareti.

L'equazione di Young-Laplace esprime il salto di pressione  $\Delta p$ , dovuto alla tensione superficiale  $\sigma$ , a cavallo della superficie del liquido:

$$\Delta p = p_{gas} - p_{liq} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  rappresentano i raggi di curvatura locale della superficie di liquido.

Invece, la differenza di pressione che innesci il moto del fluido verso valle è:

$$\Delta p_{flow} = p_{up} - p_{down} = \left[ p_{gas} - \sigma \left( \frac{1}{R_{up}} \right) \right] - \left[ p_{gas} - \sigma \left( \frac{1}{R_{down}} \right) \right] = \sigma \left( \frac{1}{R_{down}} - \frac{1}{R_{up}} \right)$$

prendendo le curvature  $R_{down}$  e  $R_{up}$  pari al raggio di raccordo tra vane e parete del tank e trascurando la curvatura nell'altra direzione ( $R_2 \rightarrow \infty$ ,  $1/R_2 \cong 0$ ).

Assumendo il flusso laminare e stazionario da valle a monte (cioè con  $R_{down} < R_{up} \rightarrow \Delta p_{flow} > 0$ ), le forze di pressione motrici risultano equilibrate da tre diversi contributi:

$$\Delta p_{hydrostatic} = \rho a \Delta z$$

$$\Delta p_{viscous} = \frac{2\mu Q \bar{s}^2 L}{\bar{A}^3}$$

$$\Delta p_{dynamic} = \rho \frac{\Delta(u^2)}{2} = \rho \frac{\Delta(Q^2/A^2)}{2}$$

con  $\bar{s}$  e  $\bar{A}$  che rappresentano rispettivamente la lunghezza del perimetro bagnato e la sezione di passaggio al raggio di curvatura medio.

Sommando tutti i termini e applicando il principio di Bernoulli si deriva la seguente espressione:

$$\sigma \left( \frac{1}{R_{down}} - \frac{1}{R_{up}} \right) = \rho a (z_{down} - z_{up}) + \frac{2\mu Q \bar{s}^2 L}{\bar{A}^3} + \rho \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{A_{down}^2} - \frac{1}{A_{up}^2} \right)$$

### Parametri noti ed obiettivo (Vanes)

Si vuole effettuare l'analisi di un vane, schematizzato in figura, progettato per il raccoglimento di propellente nel serbatoio di un endoreattore.

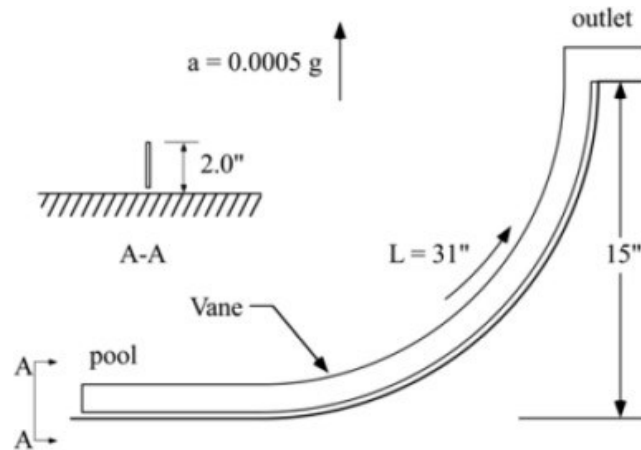


Figura 38: Geometria del vane considerato

Sono noti i seguenti parametri:

- propellente in esame = idrazina
- $a = 0.0005 \text{ g} = 0.0049 \text{ m/s}^2$
- $R_{down} = 1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$
- $R_{up} = 4.76 \text{ in} = 0.1209 \text{ m}$

- $\bar{A} = 2.93 \text{ in}^2 = 1.89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
- $\bar{s} = 9.5 \text{ in} = 0.2413 \text{ m}$
- $\mu = Ae^{\frac{B}{T-C}}$  (viscosità dinamica a  $T=300 \text{ K}$ )
- $A = 0.03625 \text{ mPa} \cdot \text{s}$
- $B = 683.29 \text{ K}$
- $C = 83.603 \text{ K}$
- $\sigma = 0.066 \text{ N/m}$  (tensione superficiale)
- $\rho = 1021 \text{ kg/m}^3$  (densità idrazina)
- $SF = 9.5$  (fattore di sicurezza)

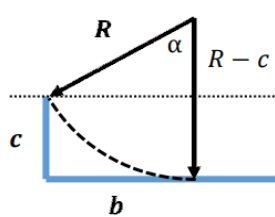
È richiesto di:

- calcolare la portata volumetrica  $Q$  che risale lungo il vane in condizioni stazionarie;
- tracciare la curva  $R_{up} = R_{up}(R_{down})$ ;
- calcolare la massima accelerazione a cui il sistema è in grado di funzionare.

### Calcolo della portata lungo il vane

Tramite considerazioni geometriche è possibile determinare le aree di passaggio del fluido a monte e a valle del vane:

- upstream ( $R > c$ ):



$$\alpha = \arccos\left(\frac{R-c}{R}\right) = 54.5623^\circ$$

$$b = R \sin \alpha = 3.878 \text{ in}$$

$$A_{up} = 2 \left\{ (b \cdot c) - \left[ \frac{\alpha}{2} R^2 - \frac{b(R-c)}{2} \right] \right\} = 0.3898 \text{ in}^2 = 0.00299 \text{ m}^2$$

Figura 39: Geometria upstream

- downstream ( $R < c$ ):



$$A_{down} = 2 \left( R^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 \right) = 0.01091 \text{ in}^2 = 0.000277 \text{ m}^2$$

Figura 40: Geometria downstream

Per calcolare la portata totale  $Q$  si utilizza l'equazione di equilibrio:

$$\sigma \left( \frac{1}{R_{down}} - \frac{1}{R_{up}} \right) = \rho a (z_{down} - z_{up}) + \frac{2\mu Q \bar{s}^2 L}{\bar{A}^3} + \rho \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{A_{down}^2} - \frac{1}{A_{up}^2} \right)$$

Trattandosi di un'equazione non lineare, la si risolve in MATLAB<sup>®</sup> (tramite il comando *fsolve*), ottenendo:

$$Q = 3.914 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow \dot{m} \cong 4 \text{ g/s}$$

### Curva di $R_{up}$ al variare di $R_{down}$

Per tracciare l'andamento di  $R_{up}$  in funzione di  $R_{down}$  è sufficiente fissare la portata  $Q$  al valore trovato e far variare  $R_{up}$ , calcolando di volta in volta i corrispettivi  $R_{down}$ . È importante fare attenzione al calcolo delle sezioni di passaggio quando  $R > c$  oppure  $R < c$  (superamento del valore di soglia  $c$  da cui dipende la relazione geometrica da applicare). La curva finale ottenuta è la seguente:

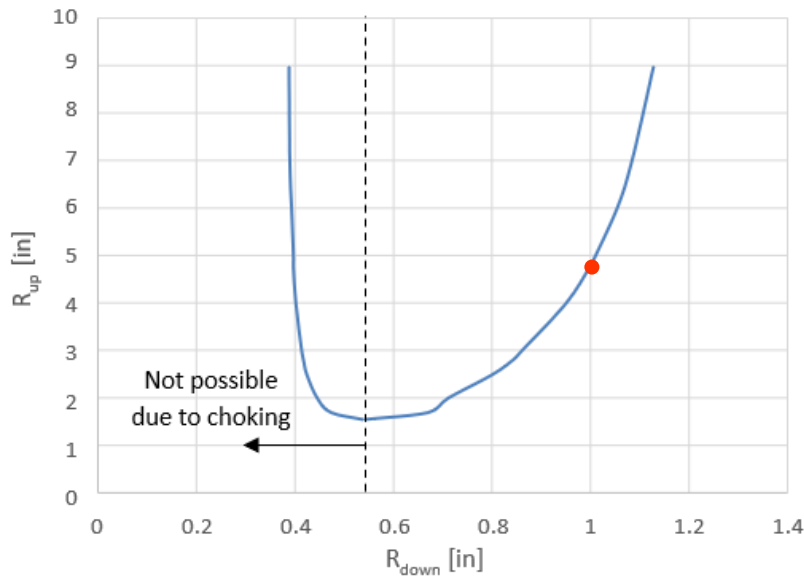


Figura 41: Curva  $R_{up} = R_{up}(R_{down})$

Si osserva come, per ogni  $R_{up}$  in input, si individuino due soluzioni di  $R_{down}$ , sebbene quelle del ramo di sinistra non siano fisiche (condizioni al contorno incompatibili) bensì frutto delle assunzioni del modello.

### Calcolo dell'accelerazione limite di funzionamento

L'accelerazione limite per cui è assicurato il funzionamento del sistema è individuata dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{SF} \sigma \left( \frac{1}{R_{down}} - \frac{1}{R_{up}} \right) < \rho a (z_{down} - z_{up})$$

da cui:

$$a_{MAX} = \frac{\frac{1}{SF} \sigma \left( \frac{1}{R_{down}} - \frac{1}{R_{up}} \right)}{\rho (z_{down} - z_{up})} = 0.0035 \text{ m}^2/\text{s} = 3.6 \cdot 10^{-4} g$$

Si utilizza SF perché si stanno trascurando le perdite per attrito viscoso e le perdite dinamiche. In caso di accelerazioni troppo elevate, la tensione superficiale non sarebbe nemmeno in grado di sollevare il liquido.

# Esercitazione 8: *Sponges e Traps*

## Introduzione (Sponges)

Il funzionamento alla base di questi dispositivi è analogo al caso precedente dei vanes. Le spugne sono sostanzialmente composte da pannelli disposti radialmente, solitamente forati per alleggerire la struttura e consentire il passaggio di liquido da un settore all'altro. A causa dell'accelerazione laterale, il liquido tende a spostarsi da un lato (verso il basso nella figura), mentre la tensione superficiale vuole ridurre il pelo libero mantenendo il liquido vicino al centro della spugna dove i setti convergenti sono più vicini tra loro.

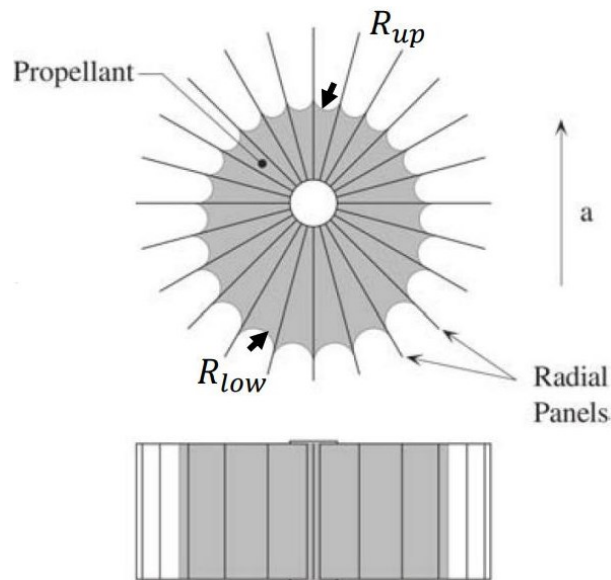


Figura 42: Spugna

Trascurando le perdite per scorrimento del fluido, l'equilibrio è dato da tensione superficiale e forze idrostatiche:

$$\text{tensione superficiale} = \text{tensione idrostatica} \rightarrow \sigma \left( \frac{1}{R_{up}} - \frac{1}{R_{low}} \right) = \rho a \Delta z$$

dove  $R_{up}$  e  $R_{low}$  sono i raggi di raccordo della superficie di liquido tra i pannelli (geometricamente diversi rispetto a quelli definiti per i vanes).

Se  $R_{up} < R_{low}$  allora la tensione superficiale è in grado di mantenere il propellente all'interno della spugna bilanciando le forze idrostatiche.

## Parametri noti (Sponges)

Si consideri una spugna con le seguenti caratteristiche:

- propellente in esame = tetrossido di azoto (NTO)
- $a = 0.005 \text{ g} = 0.049 \text{ m/s}^2$
- $R_{up} = 0.05 \text{ in} = 0.00127 \text{ m}$
- $r_{up} = 1.02 \text{ in} = 0.0259 \text{ m}$

- $\sigma = 0.0262 \text{ N/m}$  (tensione superficiale)
- $\rho = 1443 \text{ kg/m}^3$  (densità NTO)

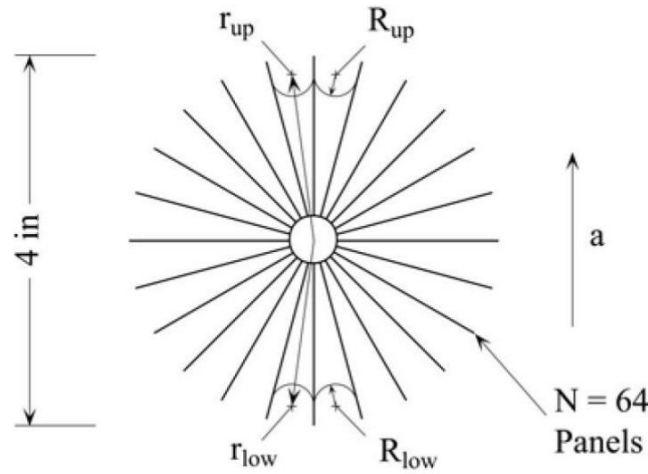


Figura 43: Geometria della spugna considerata

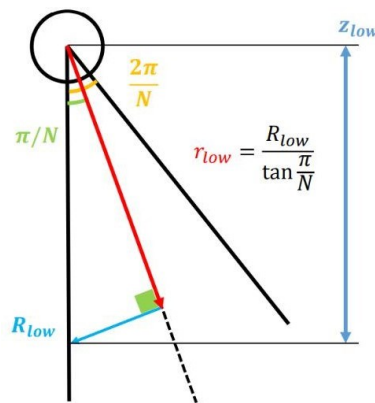
Per semplificare la trattazione, si ipotizza che i raggi di curvatura considerati siano pari a metà della distanza tra i pannelli della spugna, trascurando la curvatura nella direzione ortogonale.

È richiesto di:

- calcolare  $R_{low}$ ;
- tracciare la curva  $R_{low} = R_{low}(R_{up})$ ;
- stimare l'altezza  $h$  della spugna necessaria per contenere 1 kg di NTO.

### Calcolo di $R_{low}$

Si consideri un settore di spugna compreso tra due pannelli adiacenti. Tramite considerazioni geometriche si possono ricavare:



$$z_{low} = \frac{R_{low}}{\sin \frac{\pi}{N}}$$

$$z_{up} = \frac{R_{up}}{\sin \frac{\pi}{N}}$$

Figura 44: Porzione di spugna compresa tra due pannelli

che, sostituite nell'equazione di equilibrio scritta in precedenza, producono un'equazione non lineare nell'incognita  $R_{low}$ :

$$\sigma \left( \frac{1}{R_{up}} - \frac{1}{R_{low}} \right) = \frac{\rho a}{\sin \frac{\pi}{N}} (R_{up} + R_{low})$$

Risolvendola in MATLAB® (tramite il comando *fsolve*) si ottengono due soluzioni distinte:

$$R_{low}^I = 0.0625 \text{ in} = 0.00159 \text{ m}$$

$$R_{low}^{II} = 0.449 \text{ in} = 0.0114 \text{ m}$$

a cui corrispondono rispettivamente:

$$r_{low}^I = 1.27 \text{ in} = 0.032 \text{ m}$$

$$r_{low}^{II} = 9.15 \text{ in} = 0.23 \text{ m}$$

La seconda soluzione non è accettabile in quanto  $r_{low}^{II}$  risulta maggiore della dimensione della spugna (4 in) comportando la separazione della superficie.

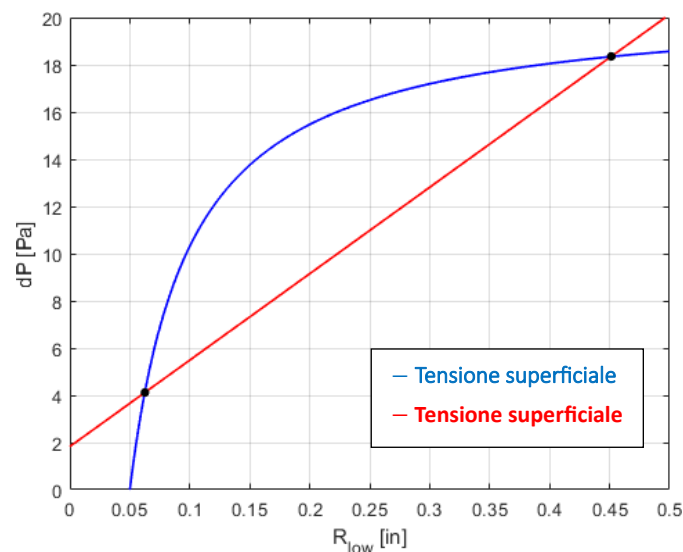


Figura 45: Curva  $\Delta p - R_{low}$

### Curva di $R_{low}$ al variare di $R_{up}$

Per tracciare l'andamento di  $R_{low}$  in funzione di  $R_{up}$  si fa variare  $R_{up}$  in un intervallo compreso tra 0 e 0.1 in, calcolando per ogni valore le due soluzioni distinte di  $R_{low}$ . Dall'andamento mostrato in figura, si osserva come non vi siano più soluzioni per  $R_{up} > 0.069 \text{ in}$  (ovvero per  $r_{up} > 1.4 \text{ in}$ ), valore oltre il quale la spugna non è più in grado di trattenere il liquido, che quindi gocciola via.

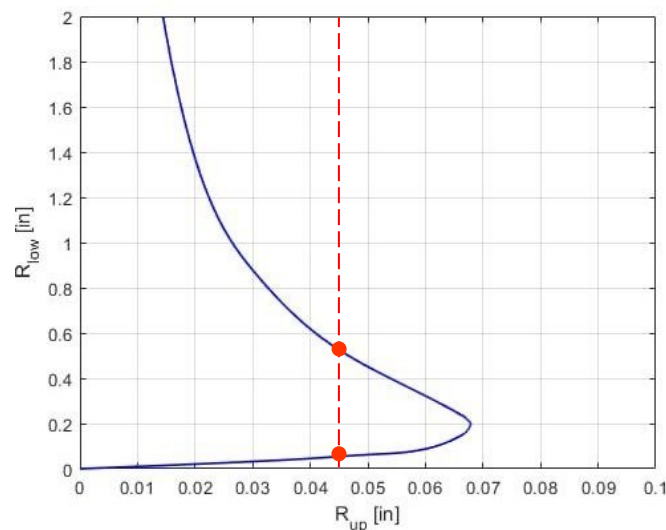


Figura 46: Curva  $R_{low} = R_{low}(R_{up})$



## Calcolo dell'altezza della spugna

Infine, si può stimare l'altezza della spugna necessaria per contenere 1 kg di propellente, scrivendo in prima approssimazione la massa di liquido contenuta nella spugna come:

$$m = \rho V = \rho Ah = \rho \pi r_{medio}^2 h$$

da cui si ricava:

$$h = \frac{m}{\rho \pi r_{medio}^2} = \frac{m}{\rho \pi \left( \frac{r_{low}^I + r_{up}}{2} \right)^2} = 0.261 \text{ m}$$

## Introduzione (Traps & Throughs)

La trappola è un dispositivo chiuso capace di trattenere una certa quantità di propellente sfruttando la tensione superficiale tra quest'ultimo e un mezzo poroso. Possono essere ricaricabili, ovvero consentire riempimenti multipli (*refillable*) o consentirne uno singolo (*unrefillable*).

I passanti, invece, sono dispositivi aperti che trattengono una certa quantità di propellente sfruttando le forze idrostatiche, motivo per cui non presentano un valore limite dell'accelerazione di funzionamento, ma risultano sensibili solo alla direzione di tale accelerazione.

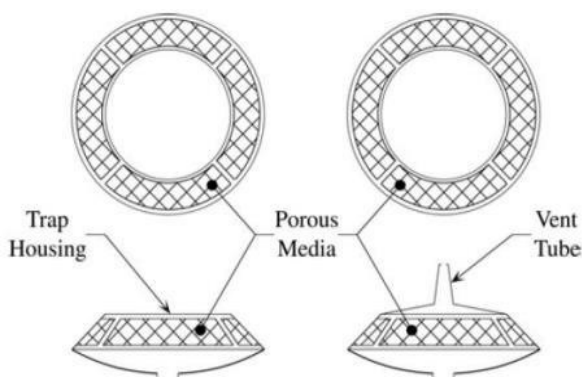


Figura 47: Non Refillable e Refillable Traps

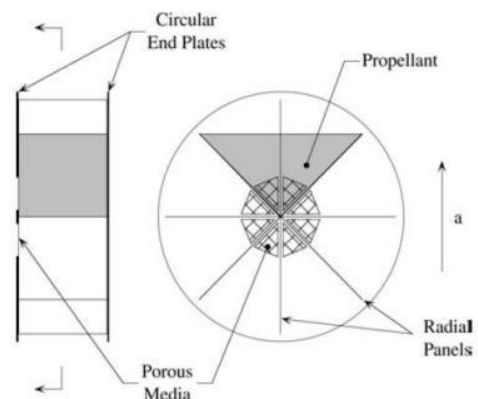


Figura 48: Throughs

Man mano che il propellente fluisce verso la camera di combustione, le trappole (in particolare le *unrefillable*) si svuotano e il gas tende ad entrare nella trappola attraverso l'elemento poroso. La tensione superficiale del liquido tende però a ridurre la superficie libera delle bolle di gas che si formano all'interno dei fori (opponendosi alla pressione del gas) e a richiamare a sé il liquido sottostante, andando a vincere le forze idrostatiche che tendono a spingere il liquido verso il basso.

Il meccanismo funziona soltanto se la tensione superficiale del liquido è sufficiente a bilanciare le forze idrostatiche ( $\Delta p_{hyd}$ ) e le perdite ( $\Delta p_{loss}$ ), ossia le bolle non si devono rompere. Viceversa, il gas riuscirebbe ad entrare nella trappola rompendo le bolle all'interno dei pori.

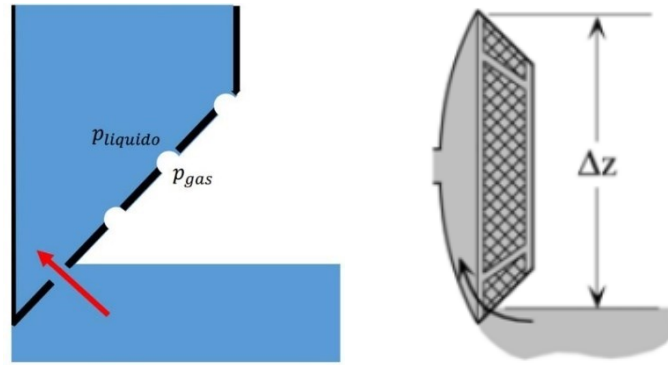


Figura 49: Funzionamento di una trappola

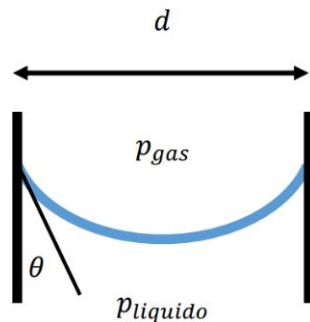
Il *Bubble Point* (BP = Punto di Bolla) rappresenta la massima differenza di pressione tra liquido e gas (bolla) che può essere raggiunta prima di avere la *rottura del menisco* formato dal liquido (che si verifica quando il  $\Delta p$  imposto dal gas vince la tensione superficiale) e la conseguente entrata del gas all'interno della barriera. Il BP non viene ricavato utilizzando la legge di Young-Laplace, ma lo si misura attraverso prove sperimentali che giocano sulla differenza di pressione all'interfaccia liquido-gas, aumentandola fino ad avere la rottura della bolla e la penetrazione del gas.

Alla luce di ciò si può sostenere che una trappola funziona correttamente (ovvero il gas non sfonda il menisco, penetrando all'interno) soltanto se il punto di bolla è maggiore della somma tra componente idrostatica e perdite:

$$BP \geq \Delta p_{hyd} + \Delta p_{loss} = \rho a \Delta z + f(Q, \rho, v, a, Element)$$

dove  $\Delta p_{hyd}$  è il contributo gravimetrico, mentre  $\Delta p_{loss}$  raccoglie le varie perdite (dovute al passaggio del liquido attraverso lo schermo, all'attrito con le pareti della trappola e alla velocità).

Considerando un foro come quello in figura, si può formulare una legge empirica per il BP:



$$BP = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d}$$

Figura 50: Schema Bubble Point

### Parametri noti (Traps)

Si consideri una trappola con le seguenti caratteristiche:

- propellente in esame = tetrossido di azoto (NTO)
- $a = 0.005 \text{ g} = 0.049 \text{ m/s}^2$
- $\sigma = 0.0262 \text{ N/m}$
- $\rho = 1443 \text{ kg/m}^3$
- $\Delta z = 10 \text{ in}$
- $\theta = 70^\circ$
- $SF = 1.5$

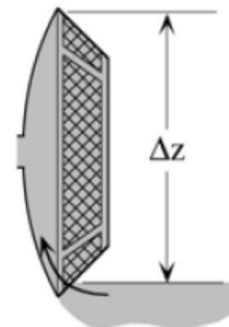


Figura 51: Geometria della trappola considerata

Sotto l'ipotesi di perdite  $\Delta p_{loss}$  trascurabili, è richiesto di:

- calcolare il massimo diametro dei fori;
- diagrammare  $d = d(a)$  per  $\Delta z = 10 \text{ in}$ ,  $\Delta z = 20 \text{ in}$  e  $\Delta z = 30 \text{ in}$ .

### Calcolo del massimo diametro dei fori

Si può ricavare il massimo diametro dei fori ponendo:

$$BP \geq \Delta p_{hyd} + \cancel{\Delta p_{loss}} = SF \cdot \rho a \Delta z \Rightarrow \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d} \geq SF \cdot \rho a \Delta z$$

$$\Rightarrow d \leq \frac{1}{SF} \frac{4\sigma \cos \vartheta}{\rho a \Delta z} = 1.3305 \text{ mm}$$

### Curva diametro—accelerazione al variare di $\Delta z$

Infine, per studiare l'influenza dell'accelerazione e del  $\Delta z$  sul diametro dei fori, si diagramma  $d(a)$  per tre diversi valori di  $\Delta z$ :

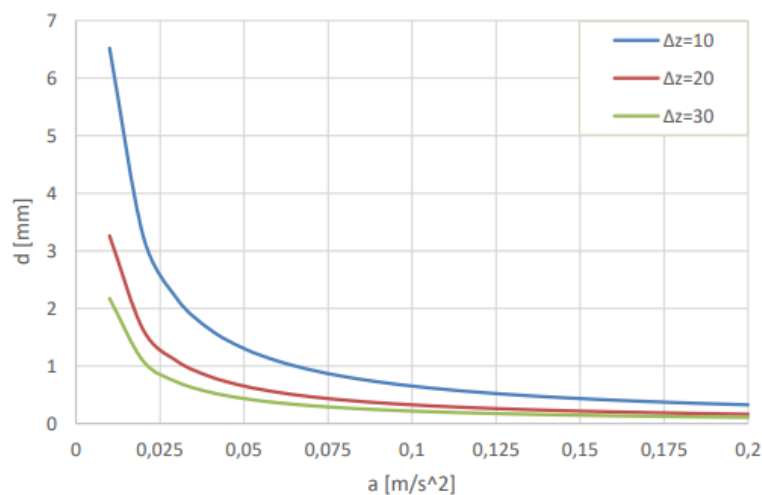


Figura 52: Curva diametro—accelerazione ( $\Delta z = 10 \text{ in}$ ,  $20 \text{ in}$ ,  $30 \text{ in}$ )