

Francesco Tornatore
Luca Lazzaroni

PROGETTO “MODEL-BASE”
DEL CONTROLLO DI ROBOT
LEGO
IN AMBIENTE SIMULINK

Tesi di Laurea Triennale

Università degli Studi di Genova
Ottobre 2017

...DEDICA...

Sommario

... versione del sommario in italiano ...

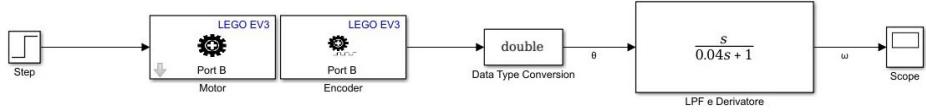
Indice

| | |
|---|-----------|
| 1 Pendolo su carrello | 7 |
| 1.1 Modello del motore | 7 |
| 1.2 Dalla velocità angolare alla coppia | 10 |
| 2 Pendolo su carrello | 13 |
| 2.1 Modello e relative Equazioni | 13 |
| 2.2 Linearizzazione del modello | 16 |
| 2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'asta(Forse da Togliere) | 18 |
| 2.4 Stabilizzazione del pendolo | 20 |
| 2.5 Controllo della posizione del carrello | 23 |
| 3 Pendolo inverso su carrello(forse da togliere) | 25 |
| 3.1 Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio . . | 25 |

Capitolo 1

Pendolo su carrello

1.1 Modello del motore



Il LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un motore, l'EV3 Large Servo Motor, la cui velocità, misurata in *rad/s*, è stata assunta come uscita del sistema.

I valori di ingresso possibili sono invece compresi tra -100 e +100, dove +100 indica la massima potenza, mentre -100 idem, ma con verso di rotazione opposto.

Al fine di modellare nel modo più preciso possibile abbiamo applicato a tale motore un albero dotato di pesi posti a una certa distanza da quest'ultimo in modo tale da incrementare il momento d'inerzia I e, di conseguenza, diminuire l'accelerazione angolare massima α in accordo con la seconda legge di Newton in forma angolare $\tau = I\alpha$ dove τ indica il momento della forza o, più semplicemente, la coppia massima erogata: valore caratteristico del motore.

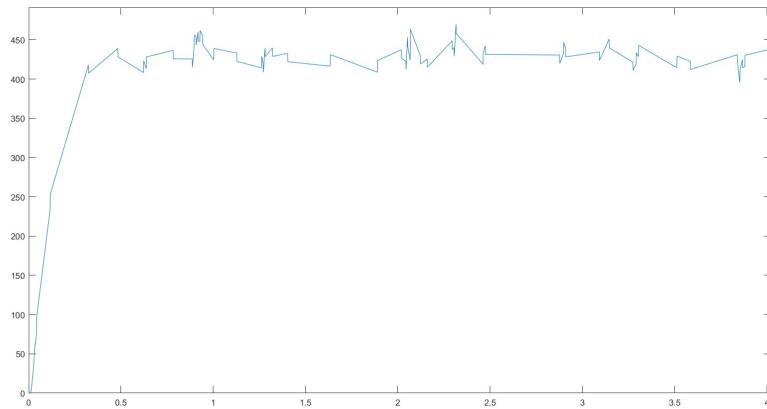


In questo modo il tempo di assestamento t_a del sistema, direttamente proporzionale a α , è sensibilmente più lungo ed è dunque più semplice trovare una funzione di trasferimento assimilabile a quella dell'EV3 Large Servo Motor.

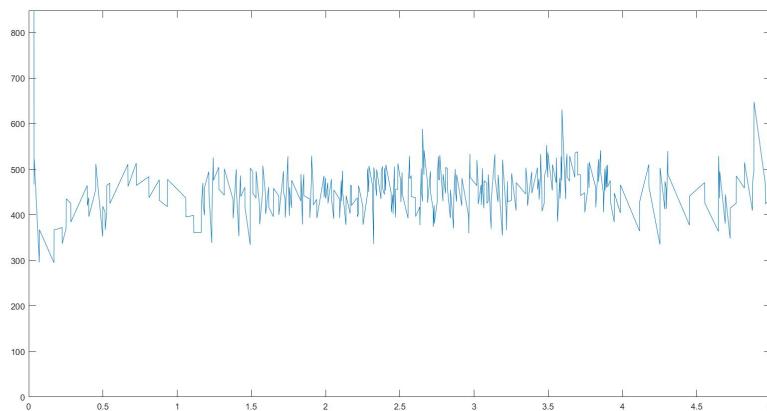
L'encoder presente all'interno del motore è poi in grado di misurare, in *rad*, la rotazione dello stesso. Di conseguenza, al fine di ottenere la velocità angolare ω è stato applicato in cascata un derivatore, ma anche un filtro low-pass con frequenza di taglio $\omega_c = 25 \text{ Hz}$, necessario per attenuare le alte frequenze del sistema al fine di ottenere una funzione di trasferimento meno spezzata possibile.

Per l'encoder è stato invece scelto un tempo di campionamento di 0.001 s , il minimo supportato.

Il risultato che si ottiene utilizzando come ingresso una funzione gradino con valore finale pari a 50 è mostrato nella figura seguente:



Scegliendo invece una frequenza di taglio del LPF $\omega_c = 100Hz$ la funzione di trasferimento diventa:



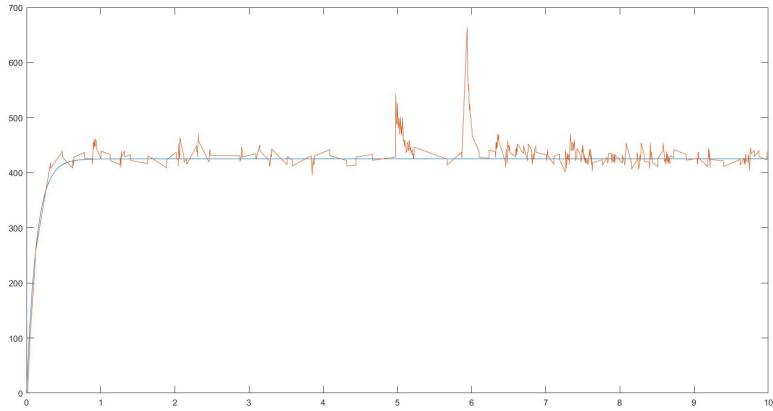
Si può notare come la frequenza di taglio sia troppo alta rendendo così impossibile la stima della funzione di trasferimento.

Prendendo quindi in esame il primo dei due grafici si può stimare una costante di tempo τ del sistema pari a circa $0.15 s$ e guadagno 10.4 .

La funzione di trasferimento che ne consegue è dunque:

$$T_m(s) = \frac{10.4}{0.15s + 1}$$

Di seguito un confronto tra $T_m(s)$ e la funzione di trasferimento reale del motore.



1.2 Dalla velocità angolare alla coppia

A questo punto è necessario ottenere la coppia generata dal motore in funzione del tempo al fine di utilizzarla come ingresso per la funzione di trasferimento del pendolo che sarà trattata nel prossimo capitolo.

La formula utilizzata per calcolare tale coppia è la seguente:

$$\tau = K\omega + I\alpha$$

Dove τ indica appunto la coppia, K il coefficiente di smorzamento viscoso misurato in $Nm s/rad$, ω la velocità angolare, I il momento d'inerzia del sistema e α l'accelerazione angolare.

Calcoliamo innanzi tutto I :

$$I = 3Ml^2 + 3ml^2 + 6I_{asta}$$

Il primo coefficiente indica il momento d'inerzia generato dalle tre ruote grandi, il secondo da quelle piccole, mentre il terzo dalle sei aste che collegano le ruote all'albero, di lunghezza l .

Per calcolarlo utilizziamo il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli:

$$I = I_{cdm} + m_{asta}d^2$$

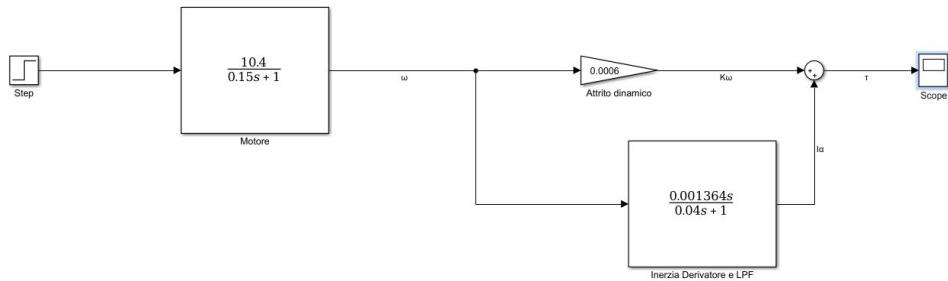
Dove d è la distanza dell'asta dal centro di massa.

Si ottiene dunque:

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_{asta}l^2 + m_{asta}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{asta}l^2$$

Sostituendo i valori di masse e lunghezze misurati si ricava un momento d'inerzia I pari a 0.001364 Kg m^2 .

Essendo $\tau = K\omega + I\alpha$ possiamo disegnare con Simulink il seguente diagramma a blocchi:



L'uscita del sistema è proprio la coppia τ desiderata.

Si può notare come nel blocco inferiore siano stati aggiunti il derivatore e il LPF di cui è stato discusso precedentemente.

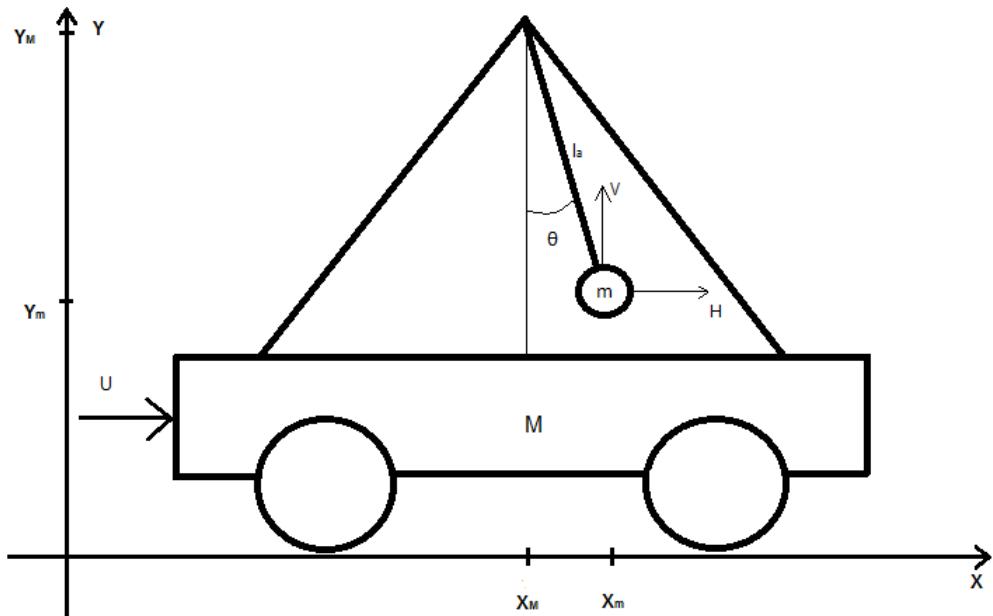
Il primo è necessario dal momento che per ottenere l'accelerazione angolare α bisogna derivare la velocità angolare ω .

Per quanto riguarda il LPF, invece, è stato aggiunto dal momento che un derivatore puro è fisicamente irrealizzabile (funzione strettamente propria). Il valore di K è stato invece scelto pari a 0.0006 Nm s/rad come da specifiche dell'EV3 Large Servo Motor.

Capitolo 2

Pendolo su carrello

2.1 Modello e relative Equazioni



Modello del pendolo su carrello

Bilanciamento forze sull'asta

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove H e V sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa m per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.2)$$

Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

sostituendo la 2.1 si ha:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (2.4)$$

sostituendo la 2.1 e la 2.2:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + \\ &\quad + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) + \\ &\quad - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\ &= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta molto inferiore rispetto a quello della massa m attaccata al pendolo, possiamo per semplicità trascurarlo, per cui poniamo $I_m = 0$. Vedremo poi nel paragrafo 2.3 che i risultati senza approssimazione saranno praticamente gli stessi.

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema

$$(M+m) \left(\frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)} \right) + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)}) &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\
\ddot{\theta} &= \frac{[u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)}] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} \Rightarrow \\
\ddot{\theta} &= \frac{u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 2.6

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_M &= \frac{-g \sin(\theta) - \frac{ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} = \\
&= \frac{g \sin(\theta)[-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\
&= \frac{-gm \sin^3(\theta) - gM \sin(\theta) + u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gM \sin(\theta) + gm \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\
&= \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + gm \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M}
\end{aligned}$$

Assegnamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\left\{
\begin{array}{l}
x_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\
x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}_M \\
x_3 \stackrel{\Delta}{=} \theta \\
x_4 \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta} \\
y_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\
y_2 \stackrel{\Delta}{=} \theta
\end{array}
\right.$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

2.2 Linearizzazione del modello

Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo $\underline{f}(\underline{x}, u) = 0$ (dove $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$):

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si capisce che punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"). Siccome il

punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello possiamo per semplicità scegliere $x_1 = 0$.

Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio $\underline{x} = \underline{0}$, $\tilde{u} = 0$ trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))](M + m \sin^2(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3) x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M + m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\ &\quad - \frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m + M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \\ &= -\frac{(M + m)g}{Ml} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a} \end{aligned}$$

Le equazioni linearizzate sono dunque:

$$\underline{\delta \dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M + m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_2 (angolo θ del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$T_{y_2,u}(s) = C(sI - A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ = -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M+m)g}$$

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del Lego MINDSTORM EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento

| Parametro | Valore | Unità di misura |
|-----------|--------|-----------------|
| M | 0.7535 | kg |
| m | 0.015 | kg |
| g | 9.81 | m/s^2 |
| l_a | 0.166 | m |

Data la precedente tabella si ha:

$$T_{y_2,u}(s) = -\frac{1}{0.125s^2 + 7.539}$$

2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'asta(Forse da Togliere)

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 senza trascurare l'inerzia dell'asta I_m è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ I_m \ddot{\theta} = ml_a(g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{cases}$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Dalla 2.3 si ottiene:

$$\ddot{x}_M = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}}{M + m}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)I_m \dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)}$$

Le derivate prime delle variabili di stato del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}}{M + m} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_M \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)I_m \dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)} \end{cases}$$

Punti di equilibrio del sistema

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio $\underline{x} = \underline{0}$, $u = 0$ trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{ml_a x_4^2 \cos(x_3) + ml_a \sin(x_3) \dot{x}_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{2ml_a x_4 \sin(x_3) - ml_a \cos(x_3) \ddot{x}_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{(ml_a)[-g \cos(x_3)(M + m) + \sin(x_3)u - 2 \cos(x_3) \sin(x_3) \dot{x}_4 ml_a]}{ml_a^2(M + m)} +$$

$$+ \frac{(ml_a)(\sin^2(x_3) - \cos^2(x_3))x_4^2 ml_a}{ml_a^2(M + m)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{(M+m)I_m - 2\cos(x_3)\sin(x_3)x_4m^2l_a^2 + m^2l_a^2\cos^2(x_3)\ddot{x}_4}{ml_a(M+m)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{1}{M+m} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{-\cos(x_3)}{l_a(M+m)}$$

Sostituendo quindi nelle precedenti equazioni il punto di equilibrio si ottiene:

$$\underline{\delta\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{l_a} & \frac{I_m}{ml_a^2} \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

Calcolando ora la funzione di Trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso u (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_2 (angolo θ del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

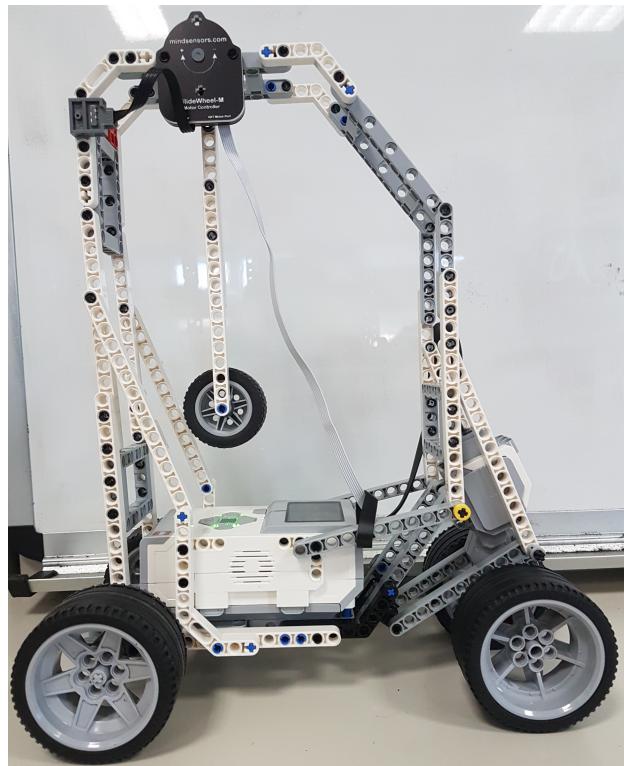
$$T_{y_2,u}(s) = C(sI-A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{l_a(M+m)(s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a})}$$

2.4 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sè è un sistema già stabile, lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici.

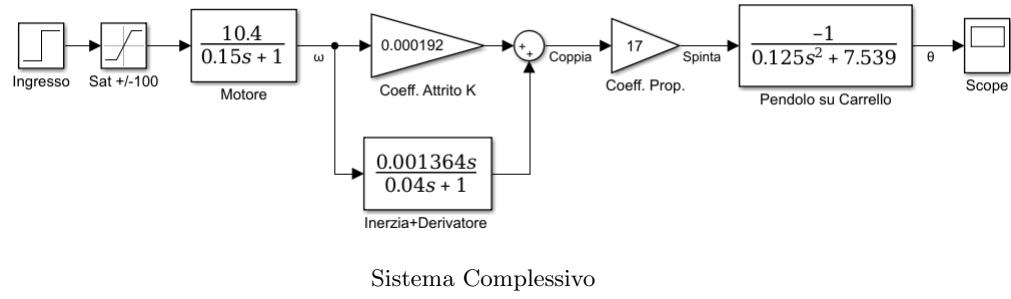
Di seguito la realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large Servo Motor come trazione e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.



Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Sfruttando il modello del motore LEGO da noi ricavato si può quindi ricavare la funzione di Trasferimento del sistema complessivo (avente come ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

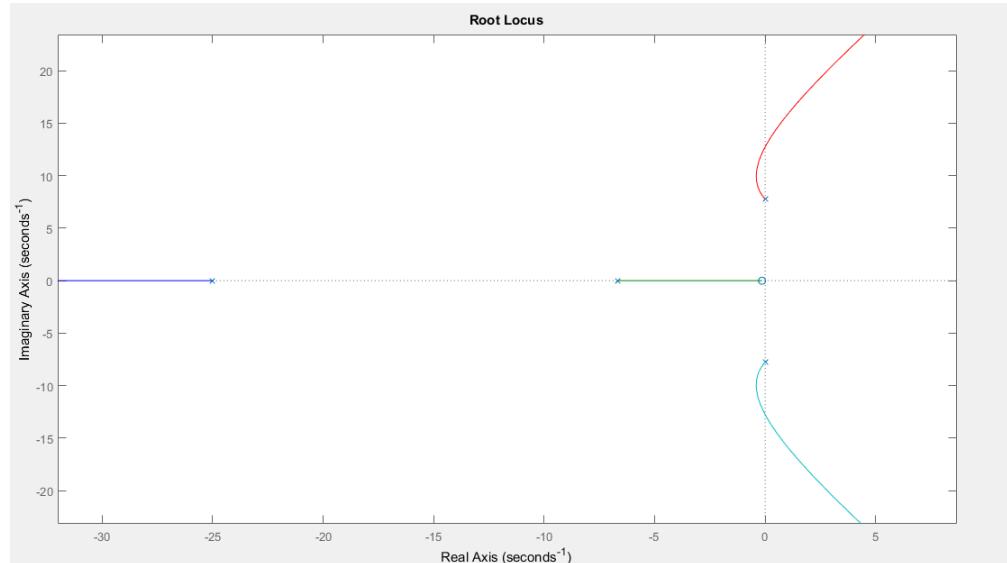
Siccome in uscita al modello del motore abbiamo la coppia erogata dallo stesso, per poterlo mettere in serie al modello del pendolo su carrello (il quale come ingresso riceve una spinta sotto forma di forza) occorre adattare il collegamento I/O. Poichè si assume un puro moto di rotolamento delle ruote del carrello si tratta di trovare il giusto coefficiente di proporzionalità tra coppia e spinta. Abbiamo verificato sperimentalmente con la sovrapposizione dei grafici simulati e reali del sistema complessivo che tale coefficiente risulta essere all'incirca 17.



Per realizzare ora una retroazione algebrica sull'uscita che ci permetta di controllarlo in ciclo chiuso, possiamo riassumere in un'unica funzione di Trasferimento il sistema complessivo:

$$T_{y_2,u} = -\frac{323.4s + 45.26}{s^4 + 31.67s^3 + 227s^2 + 1910s + 10050}$$

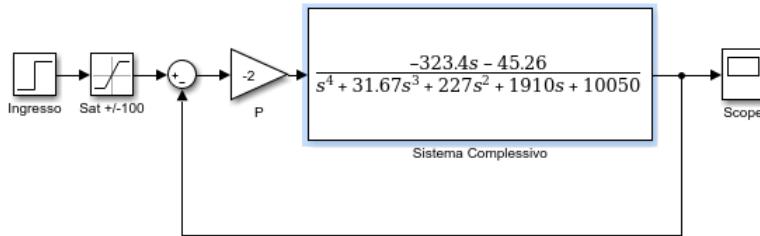
della quale si può calcolare il luogo delle radici per studiarne la stabilità in ciclo chiuso.



Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$

Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibile utilizzare un semplice Regolatore Proporzionale purchè il suo guadagno rientri in un intervallo molto limitato ovvero $P \in (-10, 0)$.

Attraverso l'utilizzo di uno strumento MATLAB quale ‘sisotool’ e grazie ad un’analisi sperimentale siamo arrivati a definirne il guadagno $P = -2$.



Sistema Retroazionato algebricamente

Il Regolatore proporzionale permette di ridurre ampiamente il periodo di oscillazione del pendolo.

Abbiamo quindi sperimentato e osservato il comportamento del sistema cercando di quantificare il miglioramento ottenuto. Come si può vedere nel seguente grafico posizionando il pendolo ad un'angolazione iniziale di $\theta = 30^\circ$, in ciclo aperto(ovvero senza controllo sul motore) si raggiunge il punto di stabilità $\theta = 0^\circ$ in poco più di 25 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.15 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

GRAFICI DI OSCILLAZIONE PENDOLO IN OL E CL

Un Regolatore migliore potrebbe essere un PID(Proporzionale Integrativo Derivativo) che permette grazie all'aggiunta di uno zero ($\in \Re$), e quindi necessariamente almeno un polo ($\in \Re$) di avere un maggiore margine di stabilità.

PARTE IN FASE DI SVILUPPO

2.5 Controllo della posizione del carrello

Fino ad ora abbiamo trascurato la seconda uscita di nostro interesse, ovvero la posizione del carrello x_M . Perciò vogliamo provare a controllare quest'ultima in modo da decidere non solo il tempo di assestamento del pendolo ma allo stesso tempo anche la posizione del carrello dove il sistema dovrà assestarsi.

A tal proposito riprendiamo le equazioni ricavate al paragrafo 2.2.

Dalle seguenti equazioni di stato linearizzate attorno al punto di equilibrio $x = 0, u = 0$

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

si può ricavare la funzione di trasferimento $T_{y_1,u}(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_1 (posizione x_M del carrello):

$$\begin{aligned}T_{y_1,u}(s) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & \frac{1}{s^2} & * & \frac{mg}{s^2(Ms^2 + \frac{(m+M)g}{l_a})} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2 + \frac{g}{l_a}}{s^2(Ms^2 + \frac{(M+m)g}{l_a})}\end{aligned}$$

Sostituendo i parametri del modello si ha:

$$T_{y_1,u}(s) = \frac{1.327s^2 + 78.42}{s^2(s^2 + 60.27)}$$

Capitolo 3

Pendolo inverso su carrello(forse da togliere)

3.1 Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio

Utilizzando le equazioni ricavate al paragrafo 2.2 e linearizzandole attorno al punto di equilibrio instabile si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\underline{\delta\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

La funzione di Trasferimento tra ingresso u (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e uscita y_2 (angolo del pendolo rispetto alla verticale)

$$T_{y_2,u}(s) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{(M+m)g}{lM}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} = \frac{-1}{lMs^2 - (M+m)g}$$