

# PROGETTO “MODEL-BASED” DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO IN AMBIENTE SIMULINK



Francesco Tornatore Luca Lazzaroni

Facoltà di Ingegneria Elettronica e Tecnologie dell’Informazione  
Università degli Studi di Genova

Tesi di Laurea Triennale

27 Ottobre 2017



## **Ringraziamenti**

Ringraziamo il professor Marco Baglietto che ci ha guidati in questo nostro  
primo ‘lavoro’

A chi ci paga gli studi e a chi ci aiuta a non abbandonarli,  
a buon rendere...

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modello del motore</b>	<b>3</b>
2.1	Dalla potenza alla velocità angolare . . . . .	3
2.2	Dalla velocità angolare alla coppia . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Pendolo su carrello</b>	<b>9</b>
3.1	Modello e relative equazioni . . . . .	9
3.2	Linearizzazione del modello . . . . .	12
3.3	Stabilizzazione del pendolo . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>25</b>



# Elenco delle figure

2.1	Schema a blocchi Motore . . . . .	3
2.2	Carico per aumentare Inerzia del motore . . . . .	4
2.3	Risposta al gradino con $\omega_c = 100rad/s$ . . . . .	5
2.4	Risposta al gradino con $\omega_c = 25rad/s$ . . . . .	5
2.5	Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello . . . . .	6
2.6	Modello completo del Motore <sup>[6]</sup> . . . . .	7
2.7	Risposta al gradino del modello completo . . . . .	8
3.1	Modello del pendolo su carrello . . . . .	9
3.2	Realizzazione fisica del pendolo su carrello . . . . .	16
3.3	Massima velocità di oscillazione libera . . . . .	17
3.4	Schema a blocchi del sistema complessivo . . . . .	17
3.5	Momento della forza applicato alla ruota . . . . .	19
3.6	Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$ . . . . .	19
3.7	Particolare del Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$ . . . . .	20
3.8	Sistema complessivo controllato proporzionalmente . . . . .	20
3.9	Sistema reale controllato proporzionalmente . . . . .	21
3.10	Uscita $\theta$ del sistema per $P = -1.95$ . . . . .	22
3.11	Uscita $\theta$ del sistema per $P = -5.75$ . . . . .	22
3.12	Uscita $\theta$ del sistema per $P = -8$ . . . . .	23
3.13	Sistema in ciclo aperto . . . . .	23
3.14	Sistema in ciclo chiuso con regolatore P . . . . .	24



# Elenco delle tabelle

2.1	Parametri del carico dell'albero motore . . . . .	7
3.1	Parametri del sistema Carrello-Pendolo . . . . .	15



# Capitolo 1

## Introduzione

Nel seguente elaborato si affronta il problema della modellazione e conseguente controllo di un sistema fisico realizzato con dispositivo LEGO MINDSTORMS EV3 e alcuni tra i sensori e attuatori disponibili per questo modello. In particolare i componenti utilizzati oltre al Brick (un microcontrollore all'interno del quale vengono caricati i programmi da eseguire) sono un potente motore e un sensore di posizione angolare (encoder).

La scelta di questa tesi è dovuta alla volontà di mettersi alla prova per la prima volta con un progetto completo che comprendesse tutte le fasi di realizzazione, dalla modellazione alla sintesi, di un sistema.

L'obiettivo principale è quello di applicare i fondamenti della Teoria dei Sistemi e dei Controlli Automatici per controllare e smorzare l'oscillazione di un pendolo su di un carrello con trazione motrice.

Come altro obiettivo, ma non meno importante, c'è l'intento di fornire del materiale didattico da mostrare a studenti che si accingono ad affrontare argomenti come quelli trattati per la prima volta, in modo da rendere più interessante e pragmatica una materia che durante il corso degli studi vedranno quasi esclusivamente su carta, e magari suscitare in loro il desiderio di continuare il nostro percorso in una nuova tesi.

Proprio per tali motivi abbiamo deciso di non utilizzare l'ambiente di sviluppo proprietario della casa produttrice, il quale vela tutta la teoria dei sistemi dinamici e del controllo che si nasconde dietro al funzionamento della Tecnologia LEGO, per adottare un approccio più ingegneristico.

Per la modellazione, la simulazione e l'analisi del sistema si fa uso dell'ambiente di sviluppo Simulink, strettamente integrato con MATLAB, il quale fornisce una miriade di strumenti utili al progetto. Grazie al suddetto ambiente si riesce a stabilire una connessione WI-FI (con l'ausilio dell'adattatore wireless USB Netgear WNA1100) oppure USB tra PC e robot con la quale il programma viene caricato ed in seguito eseguito in modalità auto-

noma o guidata, a seconda delle esigenze, tramite l'impostazione di alcuni parametri.

Nei seguenti capitoli, dopo un'attenta analisi della risposta al gradino del motore LEGO utilizzato per la locomozione, si procede con l'identificazione del modello dello stesso.

Si prosegue scrivendo le equazioni fisiche del modello del pendolo su carrello, facendo alcune considerazioni su quelle che sono le approssimazioni fatte per semplificarlo.

Una volta individuati gli ingressi, le variabili di stato e le uscite di interesse, le equazioni di stato sono facilmente ricavabili.

La quasi totalità dei sistemi fisici è non lineare e la ricerca di soluzioni analitiche è complessa ed esula dalle nostre competenze. È tuttavia solitamente possibile trasformare un problema non lineare in un problema che lo sia localmente, cioè trovare un sistema lineare che approssimi, entro un certo raggio, il sistema originale. Quindi si cercano i punti di equilibrio e infine si linearizzano le equazioni di stato attorno a tali punti.

Per ricostruire ora il sistema complessivo, bisogna esaminare la relazione tra l'uscita del primo, il motore, e l'ingresso del secondo, il carrello, così da aggiungere un sistema intermedio che trasformi e adatti il segnale tra i due blocchi principali.

Ricavata la funzione di trasferimento totale si analizza la stabilità con i sopraccitati strumenti di MATLAB e si ricercano i possibili regolatori atti a velocizzare la risposta del sistema agli stimoli in modo da ridurre il tempo di assestamento nella maniera desiderata.

## Capitolo 2

# Modello del motore

### 2.1 Dalla potenza alla velocità angolare

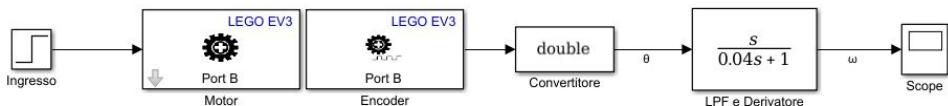


Figura 2.1: Schema a blocchi Motore

Il LEGO MINDSTORMS EV3 è dotato di un motore, l'EV3 Large Servo Motor, la cui velocità angolare, misurata in *deg/s*, è stata assunta come uscita del sistema.

I valori di ingresso accettabili sono compresi tra -100 e +100, dove  $\pm 100$  corrispondono alla massima potenza erogabile in entrambi i versi di rotazione.

Al fine di riuscire a modellarlo, abbiamo applicato al motore un albero dotato di pesi posti a una certa distanza dallo stesso in modo tale da incrementarne il momento d'inerzia  $I$ . Questo poiché in assenza di un carico significativo la dinamica del motore risulta troppo veloce per essere identificata con gli strumenti a nostra disposizione. In particolare l'insufficiente precisione e la limitata frequenza massima di campionamento dell'encoder non permettono una corretta analisi del transitorio del motore. Al fine di ridurre il più possibile l'errore è stato scelto come tempo di campionamento dell'encoder il valore minimo supportato: 0.001s.

Come conseguenza all'aggiunta del carico, si ha una diminuzione dell'accelerazione angolare massima  $\alpha$  in accordo con la seconda legge di Newton (in forma angolare)  $\tau = I\alpha$ , dove  $\tau$  è il momento della forza o, più semplicemente, la coppia massima erogata, valore caratteristico del motore.

In questo modo il tempo di assestamento  $t_a$  del sistema è sensibilmen-



Figura 2.2: Carico per aumentare Inerzia del motore

te più lungo ed è dunque possibile trovare una funzione di trasferimento assimilabile a quella dell'EV3 Large Servo Motor.

All'interno del motore, come già accennato, è presente un encoder che permette di misurare, in gradi, la posizione angolare  $\theta$  dello stesso. Perciò, al fine di ottenere la velocità angolare  $\omega$ , è stato applicato in cascata un derivatore, e per introdurre il polo necessario alla realizzabilità del blocco, un filtro passa basso con frequenza di taglio  $\omega_c = 25\text{rad/s}$ .

Quest'ultimo è indispensabile per attenuare le alte frequenze della risposta del sistema, dovute alla derivazione del segnale campionato, affinché la funzione in uscita sia meno spezzata possibile e, di conseguenza, più facilmente identificabile.

In prima analisi si è scelto un filtro con un  $\omega_c$  più elevata, ovvero  $100\text{rad/s}$ , in modo che la costante di tempo non influenzasse la dinamica del motore stesso. Il risultato che si ottiene sotto tali condizioni, utilizzando come

ingresso una funzione gradino con valore finale pari a 50, è mostrato nella figura 2.3.

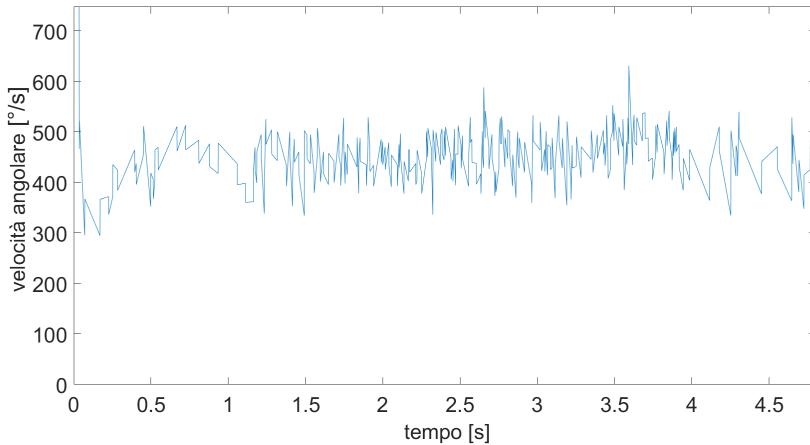


Figura 2.3: Risposta al gradino con  $\omega_c = 100\text{rad/s}$

E' evidente come la frequenza di taglio scelta per il filtro non sia sufficiente ad eliminare le alte frequenze dell'uscita per cui, procedendo gradualmente siamo giunti a scegliere una frequenza  $\omega_c = 25\text{rad/s}$  con la quale l'uscita del sistema diventa accettabile (figura 2.4). Prendendo quindi in esame

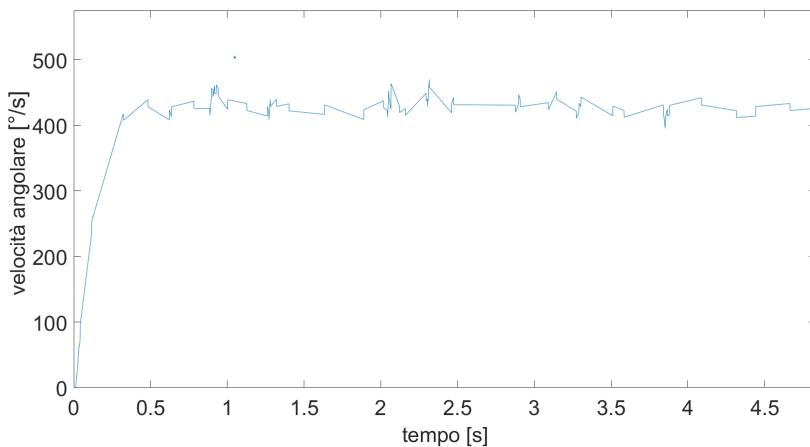


Figura 2.4: Risposta al gradino con  $\omega_c = 25\text{rad/s}$

quest'ultimo grafico è evidente che sia possibile approssimare la funzione di trasferimento del motore come una funzione del 1° ordine la cui ‘forma campione’ è data dalla formula

$$T(s) = \frac{k}{1 + s\tau}$$

Abbiamo quindi stimato una costante di tempo  $\tau$  (tempo che impiega la funzione a raggiungere il 63.2% del valore di regime) del sistema pari a circa  $0.15\text{s}$  e guadagno statico  $k$  di 10.4.

La funzione di trasferimento che ne consegue è dunque:

$$T_{motore}(s) = \frac{10.4}{0.15s + 1}$$

In figura 2.5 un confronto tra  $T_{motore}(s)$  e la funzione di trasferimento reale del motore.

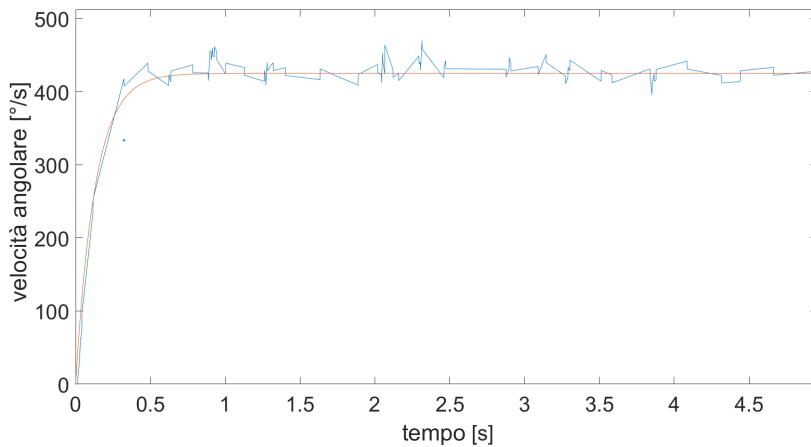


Figura 2.5: Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello

## 2.2 Dalla velocità angolare alla coppia

È necessario ora ottenere la coppia generata dal motore in funzione del tempo al fine di utilizzarla come ingresso per la funzione di trasferimento del pendolo la quale sarà trattata in modo approfondito nel capitolo 3.

L'equazione fisica utilizzata per calcolare tale coppia è la seguente:

$$\tau = K\omega + I\alpha$$

dove il primo termine indica appunto la coppia, mentre i restanti due sono rispettivamente l'attrito interno al motore e il momento torcente. Più nello specifico  $K$  rappresenta il coefficiente di smorzamento viscoso misurato in  $N \cdot m \cdot s/\text{deg}$ ,  $\omega$  la velocità angolare,  $I$  il momento d'inerzia<sup>[1]</sup> del sistema e  $\alpha$  l'accelerazione angolare.

Calcoliamo innanzi tutto

$$I = 3M_Rd_R^2 + 3M_rd_r^2 + 3I_a + 3I_A + \frac{m_ar^2}{2}$$

nella quale i primi due termini indicano i momenti d'inerzia delle sei ruote, il terzo e il quarto quelli delle sei aste che collegano le ruote all'albero, mentre l'ultimo termine rappresenta il momento d'inerzia dell'albero (asta centrale). Nel calcolo dell'inerzia di ogni componente si sono ovviamente fatte le approssimazioni del caso: le aste sono state considerate omogenee e di sezione circolare, le ruote, masse puntiformi concentrate nel loro centro di massa. Per calcolare l'inerzia delle sei aste utilizziamo il teorema di Huygens-Steiner<sup>[1]</sup>, o degli assi paralleli:

$$I = I_{cdm} + m_{asta}d^2$$

Dove  $d$  è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_{asta}l^2 + m_{asta}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{asta}l^2$$

Inserendo ora i parametri misurati e riportati nella tabella 2.1, si ricava un momento d'inerzia  $I$  pari a  $0.001364 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ .

Sigla	Valore	U.d.m.	Parametro
$M_R$	0.0395	kg	massa ruota grande
$M_r$	0.023	kg	massa ruota piccola
$m_a$	0.0015	kg	massa asta corta
$m_A$	0.002	kg	massa asta lunga
$l_a$	0.068	m	lunghezza asta corta
$r$	0.002	m	raggio asta
$l_A$	0.091	m	lunghezza asta lunga
$d_r$	0.061	m	distanza ruota piccola - asse di rotazione
$d_R$	0.085	m	distanza ruota grande - asse di rotazione

Tabella 2.1: Parametri del carico dell'albero motore

Essendo  $\tau = K\omega + I\alpha$  possiamo disegnare tramite Simulink il diagramma a blocchi rappresentato in figura 2.6:

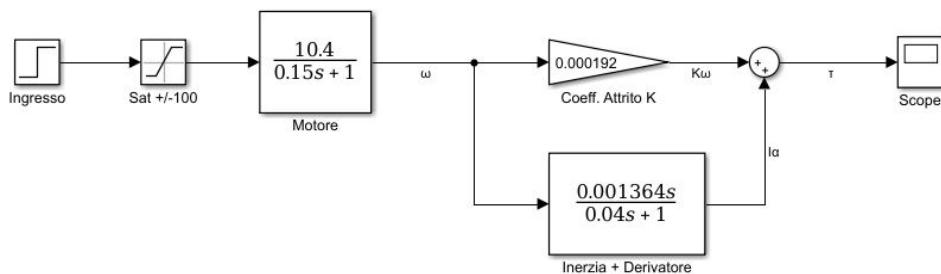


Figura 2.6: Modello completo del Motore<sup>[6]</sup>

L'uscita del sistema è proprio la coppia  $\tau$  desiderata.

Si può notare come nel blocco inferiore siano stati aggiunti il derivatore e il filtro passa-basso già utilizzati in precedenza per ricavare la velocità dalla posizione. Il primo è necessario dal momento che l'accelerazione angolare  $\alpha$  è proprio la derivata della velocità angolare  $\omega$ . Per quanto riguarda il filtro, invece, il discorso è analogo a quello trattato in precedenza: è stato aggiunto (scegliendo appositamente una frequenza di taglio abbastanza alta da non alterare la dinamica del sistema) siccome un derivatore puro sarebbe stato fisicamente irrealizzabile (funzione impropria).

Inoltre si è resa necessaria anche l'aggiunta di un blocco di saturazione dell'ingresso dal momento che, come già reso noto in precedenza, l'EV3 Large Servo Motor accetta valori compresi tra -100 e +100 considerando quelli esterni a tale intervallo coincidenti con gli estremi.

In ultimo il valore di  $K$ , unico parametro incognito rimasto, è stato invece ricavato sperimentalmente avendo nota dalle specifiche LEGO<sup>[5]</sup> la coppia massima a regime dell'EV3 Large Servo Motor  $\tau_{reg} = 0.2 N \cdot m$ .

Come mostrato in figura 2.7 un valore di  $K$  pari a  $0.000192 Nm \cdot s/deg$  per un ingresso a gradino con valore finale 100 consente di rispettare appieno tale specifica.

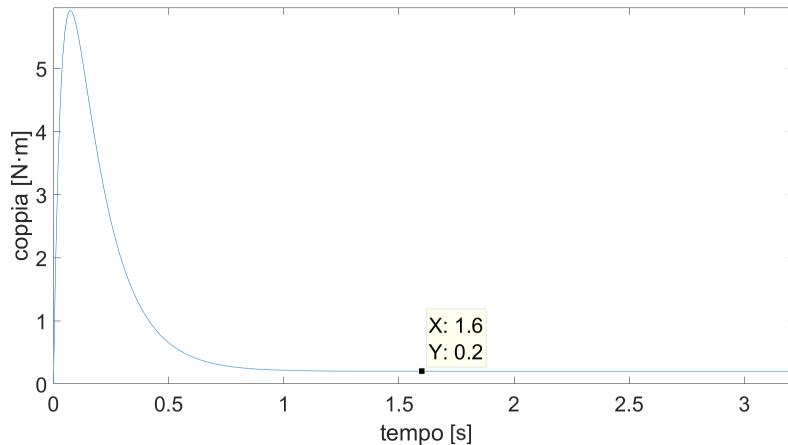


Figura 2.7: Risposta al gradino del modello completo

## Capitolo 3

# Pendolo su carrello

### 3.1 Modello e relative equazioni

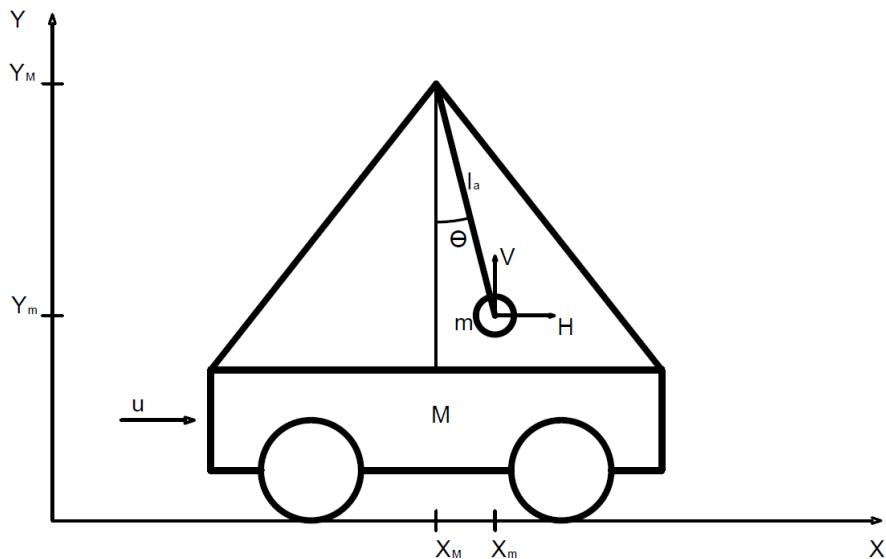


Figura 3.1: Modello del pendolo su carrello

#### Premessa

Per quel che riguarda quanto trattato nel seguito, per ovvi motivi di semplicità si terrà conto di una situazione ideale.

Verranno dunque trascurati l'attrito volvente, causato dal contatto delle ruote del carrello con il suolo, ma anche la resistenza del mezzo per quanto concerne il pendolo.

Sarà poi verificato in seguito che tali approssimazioni introducono un errore trascurabile ai fini del controllo del sistema reale, anche se, per un'analisi più accurata, sarebbe stato probabilmente più corretto tenerne conto.

**Bilanciamento forze sull'asta**

Eseguiamo di seguito, sfruttando la Seconda Legge di Newton, il computo delle forze agenti sulla massa  $m$  del pendolo lungo entrambi gli assi cartesiani.

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove  $H$  e  $V$  sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa  $m$  per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo poi:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.2)$$

**Bilanciamento forze sul carrello**

Richiamando nuovamente la Legge sopracitata si ha:

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

da cui sostituendo la 3.1:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

**Bilanciamento momenti del sistema asta-massa**

In questo caso utilizziamo la versione angolare della solita Legge:

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (3.4)$$

sostituendo la 3.1 e la 3.2:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + \\ &\quad + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\
& = mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\
& = ml_a(g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta))
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta

$$I_a = \frac{1}{12} m_a l_a^2 + m_a \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_a l_a^2 = 0.000045 kg \cdot m^2$$

molto inferiore (1 ordine di grandezza) rispetto a quello della massa  $m$  attaccata al pendolo:

$$I_m = ml_a^2 = 0.00041 kg \cdot m^2$$

possiamo per semplicità trascurarlo, per cui poniamo  $I_m = 0$ .

Il sistema che deriva dalla 3.3 e dalla 3.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema:

$$\begin{aligned}
& (M+m) \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)} + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\
& \ddot{\theta} \left[ ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)} \right] = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\
& \ddot{\theta} = \frac{\left[ u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \right] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} \Rightarrow \\
& \ddot{\theta} = \frac{u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema:

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 3.6:

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - \frac{u l_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g \sin(\theta) [-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + u l_a \cos(\theta) + m l_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g l_a \sin(\theta)(M + m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\
&= \frac{-g m \sin^3(\theta) - g M \sin(\theta) + u \cos(\theta) + m l_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g M \sin(\theta) + g m \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\
&= \frac{u + m l_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + g m \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M}
\end{aligned}$$

Assegniamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\left\{
\begin{array}{l}
x_1 \triangleq x_M \\
x_2 \triangleq \dot{x}_M \\
x_3 \triangleq \theta \\
x_4 \triangleq \dot{\theta} \\
y_1 \triangleq x_M \\
y_2 \triangleq \theta
\end{array}
\right.$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + m l_a x_4^2 \sin(x_3) + g m \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + m l_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M + m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

## 3.2 Linearizzazione del modello

### Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo  $\underline{f}(\underline{x}, u) = \underline{0}$  (dove  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$ ) da cui:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si può notare che i punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"), caso da noi trattato nel seguito.

In ultimo, siccome il punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello, possiamo per semplicità scegliere  $x_1 = 0$ .

### Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio  $\tilde{\underline{x}} = \underline{0}$ ,  $\tilde{u} = 0$  trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))](M + m \sin^2(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \Big|_{\tilde{\underline{x}}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3)x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \\ &\frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M + m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\ &\frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m + M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \\ &= -\frac{(M + m)g}{Ml_a} \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) = \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a}\end{aligned}$$

Le equazioni di stato linearizzate sono dunque:

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento  $T_{y_2, u}$  tra l'ingresso  $u$  (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_2$  (angolo  $\theta$  del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$\begin{aligned}T_{y_2, u}(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M + m)g}\end{aligned}$$

in cui il segno meno è coerente col fatto che il semiperiodo iniziale dell'oscillazione del pendolo sia in direzione opposta rispetto al movimento del carrello.

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del LEGO MINDSTORMS EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento.

<b>Sigla</b>	<b>Valore</b>	<b>U.d.m.</b>	<b>Parametro</b>
$M$	0.7535	$kg$	massa carrello
$m$	0.016	$kg$	massa all'estremità del pendolo
$g$	9.81	$m/s^2$	accelerazione di gravità
$l_a$	0.166	$m$	lunghezza asta del pendolo
$r$	0.034	$m$	raggio ruote motrici

Tabella 3.1: Parametri del sistema Carrello-Pendolo

Data la tabella 3.1 si ha:

$$T_{y_2,u}(s) = -\frac{1}{0.125s^2 + 7.541}$$

### 3.3 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sé è un sistema già stabile; lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo e quindi il transitorio del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici. In figura 3.2 si può vedere la realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large Servo Motor come trazione e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.

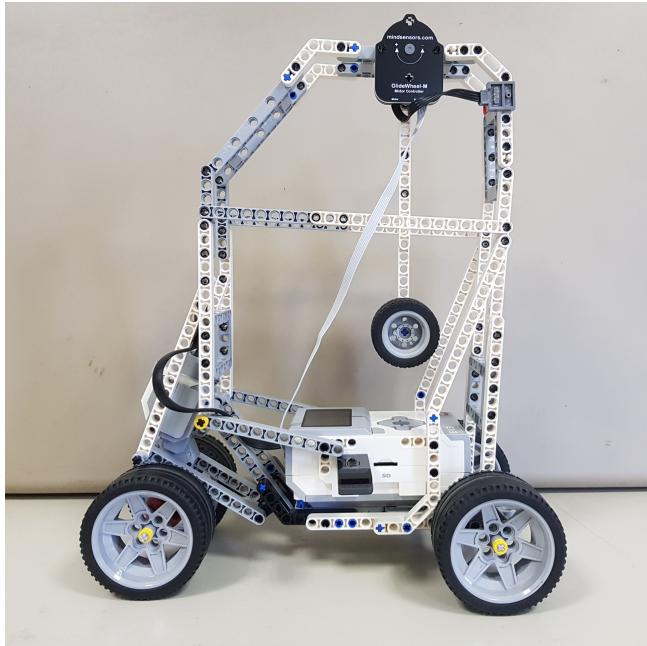


Figura 3.2: Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Da specifiche tale encoder è in grado di raggiungere un tempo di campionamento minimo di  $0.001s$  (così come il motore) col quale non si riesce sempre a campionare in modo corretto. Per ovviare, almeno parzialmente, al problema abbiamo deciso di abbassare la frequenza di campionamento, in modo però da non perdere nessuna variazione dell'angolo del pendolo.

Per fare questo abbiamo calcolato la massima velocità raggiunta durante la sua oscillazione libera tra  $[-31^\circ, 31^\circ]$  (intervallo entro il quale il pendolo è vincolato per costruzione).

Da tale esperimento è risultato che durante la prima oscillazione (in figura 3.3), il pendolo, raggiunge per  $\theta = 0^\circ$  la velocità  $\omega = 250 \text{ deg/s}$  (calcolata con un semplice rapporto incrementale e approssimata per eccesso per garantire un certo margine) per cui il tempo di campionamento necessario a non perdere nessuna variazione dell'angolo sarebbe stato  $t_c = \frac{1}{250} = 0.004s$ .

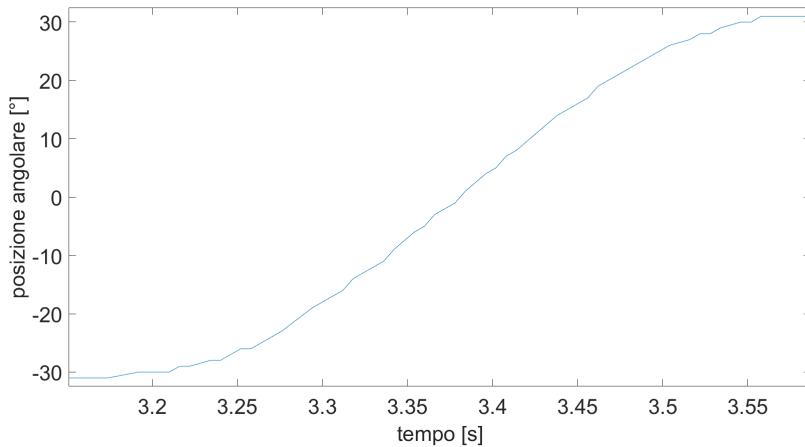


Figura 3.3: Massima velocità di oscillazione libera

Sfruttando il modello del motore LEGO da noi identificato al capitolo 2 si può quindi ricavare la funzione di trasferimento del sistema complesso (avente come ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

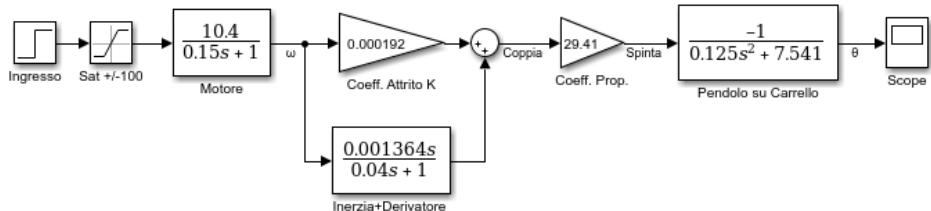


Figura 3.4: Schema a blocchi del sistema complessivo

Siccome in uscita al modello del motore abbiamo la coppia erogata dallo stesso, per poterlo mettere in serie al modello del pendolo su carrello (il quale come ingresso riceve una spinta sotto forma di forza) occorre adattare il collegamento I/O. Poiché si assume un moto di puro rotolamento delle ruote del carrello, si tratta di trovare il giusto coefficiente  $C$  di proporzionalità tra coppia e spinta.

Per trovare la relazione tra queste ultime si procede con il calcolo dell'energia cinetica del carrello, introducendo il concetto di massa equivalente  $M_e = (1 + \beta)M_c$  (dove  $M_c$  è la massa totale del carrello) per tenere conto delle masse rotanti, ossia delle ruote. Il concetto alla base della massa equivalente è la conservazione dell'energia cinetica. Si impone che l'energia cinetica complessiva della vettura traslante alla velocità  $v$  più quella delle varie masse

rotanti, ciascuna con la propria velocità di rotazione, sia uguale a quella della massa totale equivalente in moto puramente traslatorio alla velocità  $v$ . Allora si ha che:

$$E_c = \frac{1}{2}M_e v^2 = \frac{1}{2}M_c v^2 + 4\frac{1}{2}I\omega^2$$

dove, a terzo membro, il primo termine tiene conto dell'energia cinetica traslazionale mentre il secondo di quella rotazionale, e operando le seguenti sostituzioni

$$\omega^2 = \left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{2}M_R r^2$$

dove si è considerata la ruota come un cilindro omogeneo di raggio  $r$ , si ha che:

$$\frac{1}{2}M_e v^2 = \frac{1}{2}M_c v^2 + \frac{1}{2}2M_R v^2$$

da cui è immediato

$$M_e = M_c + 2M_R$$

Siccome dalla tabella 3.1 si ha  $M_c = M + m = 0.7695\text{kg}$  e dalla tabella 2.1 si ha  $M_R = 0.0395\text{kg}$ , si può trascurare la  $M_R$  considerando  $M_e = M_c$ . Perciò si approssima

$$E_c = \frac{1}{2}M_c v^2$$

Sotto tali condizioni l'energia erogata dal motore viene dissipata unicamente nel moto traslazionale del carrello.

In tutto questo le ruote, in virtù della coppia del motore, applicano nel punto di appoggio col terreno una forza diretta nel verso opposto allo spostamento del carrello e, per la terza legge di Newton, esse ne ricevono una uguale e contraria (almeno finché l'attrito statico non viene vinto).

A partire da questa considerazione e dalle approssimazioni fatte, la forza impressa dal terreno alle ruote non è altro che la spinta applicata al carrello. Dunque la relazione tra la spinta e la coppia è data dalla formula fisica del momento della forza<sup>[1]</sup>

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = (r \sin(\phi))F = r_{\perp} F$$

ove  $r_{\perp}$  rappresenta il braccio della forza  $F$ . Poiché nel nostro caso  $r$  risulta essere il raggio della ruota ed  $F$  la forza tangente alla ruota abbiamo ricavato, sostituendo il suo valore dalla tabella 3.1:

$$F = \frac{\tau}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{r} = 29.41$$

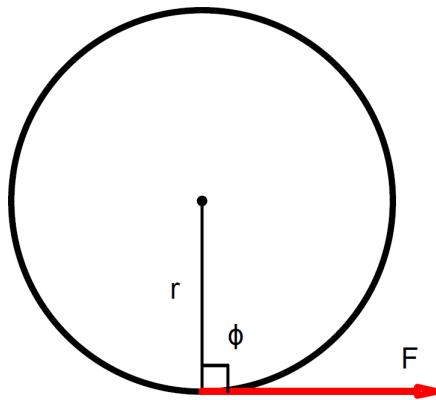


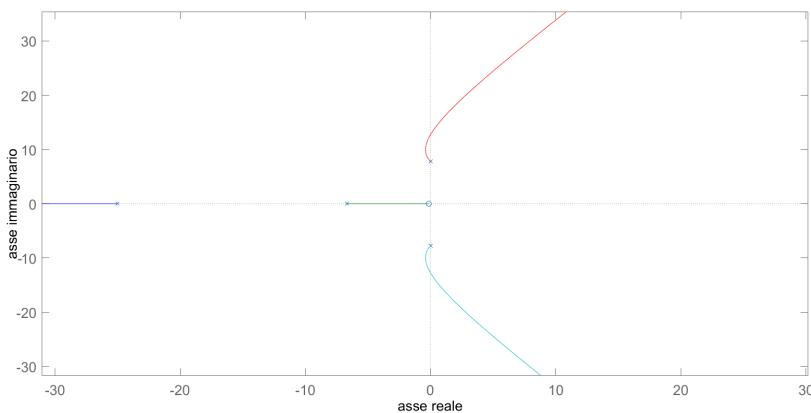
Figura 3.5: Momento della forza applicato alla ruota

Per realizzare ora una retroazione algebrica sull'uscita che ci permetta di controllare il pendolo in ciclo chiuso, possiamo riassumere in un'unica funzione di trasferimento il sistema complessivo.

Per farlo ci siamo serviti del ‘Linear Analisys Tool’ di Simulink che, tra le altre cose, può essere utilizzato per ricostruire la funzione di trasferimento tra due punti specificati di un sistema (nel nostro caso tra l’ingresso del motore e l’uscita  $\theta$ ).

$$T_{y_2,u} = -\frac{559.5s + 78.3}{s^4 + 31.67s^3 + 227s^2 + 1910s + 10050}$$

Tra i principali modi per studiarne la stabilità in ciclo chiuso uno dei più noti è il luogo delle radici<sup>[2][3]</sup>, il quale permette di verificare lo spostamento dei poli al variare del guadagno.

Figura 3.6: Luogo delle Radici di  $-T_{y_2,u}$

Quello che si prova a fare è spostare tutti i poli in ciclo chiuso nel semipiano destro, mantenendoli possibilmente vicini all'asse Reale. Questo perché se nei poli predomina la parte Immaginaria essi introdurranno maggiore oscillazione nell'assestamento della risposta del sistema.

Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibile utilizzare un semplice regolatore Proporzionale purché il suo guadagno rientri in un intervallo molto limitato, ovvero  $P \in (-5.75, 0)$ .

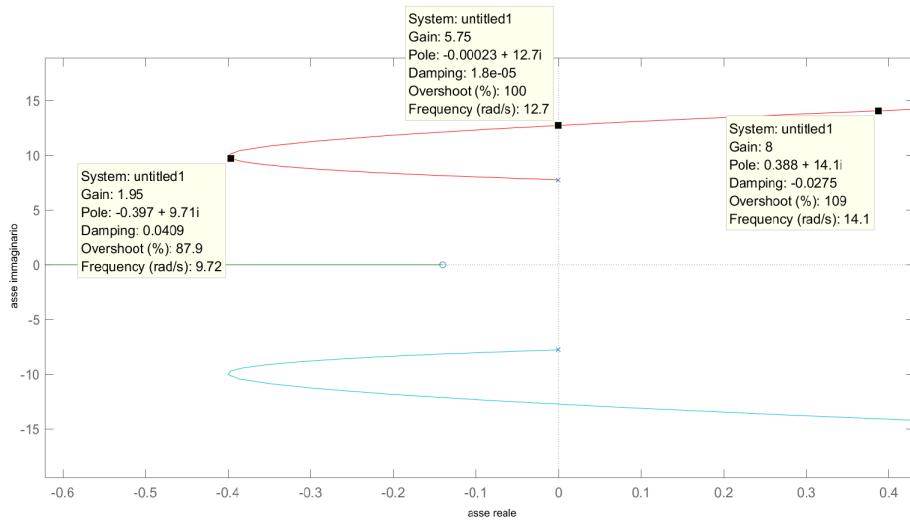


Figura 3.7: Particolare del Luogo delle Radici di  $-T_{y2,u}$

Attraverso l'utilizzo dello strumento MATLAB chiamato ‘rlocus’, il quale consente di ottenere data una funzione il luogo delle radici, siamo arrivati a definirne il guadagno  $P = -1.95$  (vedi figura 3.7) come ottimale, dato il massimo rapporto possibile tra parte Reale e parte Immaginaria, in ciclo chiuso, dei due poli complessi coniugati.

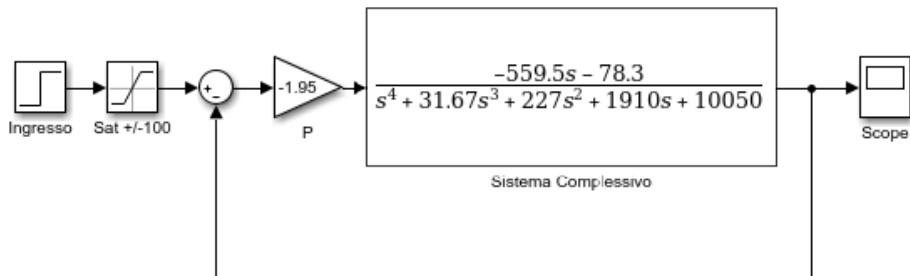


Figura 3.8: Sistema complessivo controllato proporzionalmente

Tale valore è stato in seguito validato dall'analisi della risposta del sistema durante la simulazione attraverso diversi esperimenti, i cui risultati saranno mostrati nel seguito.

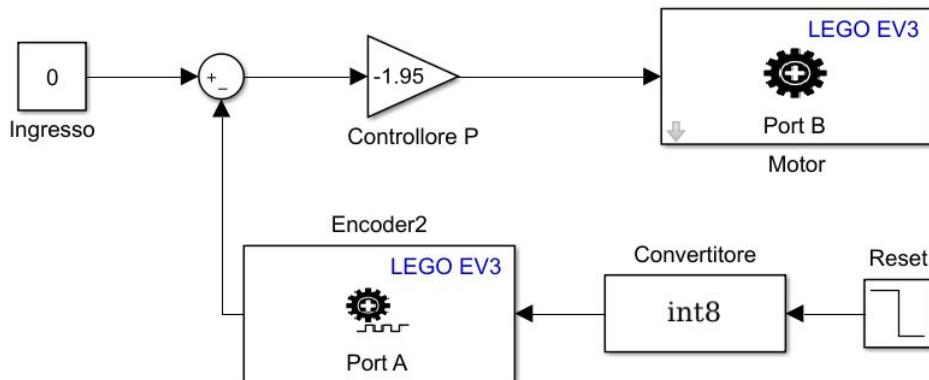


Figura 3.9: Sistema reale controllato proporzionalmente

Nella realizzazione dello schema a blocchi in Simulink, caricato nel Brick EV3 MINDSTORMS per confermare la veridicità dei risultati ottenuti, abbiamo posto un ingresso costante a 0 poiché si assume il pendolo inizialmente a riposo nel punto di equilibrio  $\theta = 0^\circ$  e perché si vuole mantenerlo in tale posizione.

L'encoder, invece, è settato a 0 tramite un segnale di reset dopo un tempo pari a  $0.001s$  dall'inizializzazione poiché, all'avvio del programma caricato nel Brick, viene considerato come angolo  $\theta = 0^\circ$  di riferimento il primo valore misurato. Per effettuare tale operazione è necessario inserire nello schema un convertitore dal momento che il GlideWheel-M richiede in ingresso unicamente un segnale di tipo 'int8' (interi a 8 bit), mentre il blocco di reset ne genera uno 'double' a 64 bit in accordo con lo standard IEEE 754.

Sotto tali presupposti il motore, avendo ingresso nullo, non erogherà potenza fino quando il pendolo non verrà spostato dal suo stato iniziale.

Al variare della posizione angolare, il motore reagirà muovendo il carrello nella stessa direzione per riportare il pendolo nel suo punto di equilibrio.

Come accennato poco fa, ad ulteriore conferma della veridicità del luogo delle radici, abbiamo provato a controllare il sistema fisico al variare di  $P$  durante una simulazione interattiva, nella quale è possibile modificare in tempo reale, da PC, il valore del guadagno del regolatore, e, come mostrato nella figura 3.12, il sistema risulta effettivamente instabile per valori che si discostano dall'intervallo di stabilità trovato.

L'esperimento è così costituito: avviato il programma nel Brick siamo noi ad innescare la prima oscillazione nel pendolo in modo da osservarne il comportamento. Nel caso in cui esso non riesca a ritornare nel punto di equilibrio

autonomamente allora siamo noi a fermarlo. L'esperimento viene ripetuto tre volte nei casi più significativi del guadagno del regolatore  $P$ .

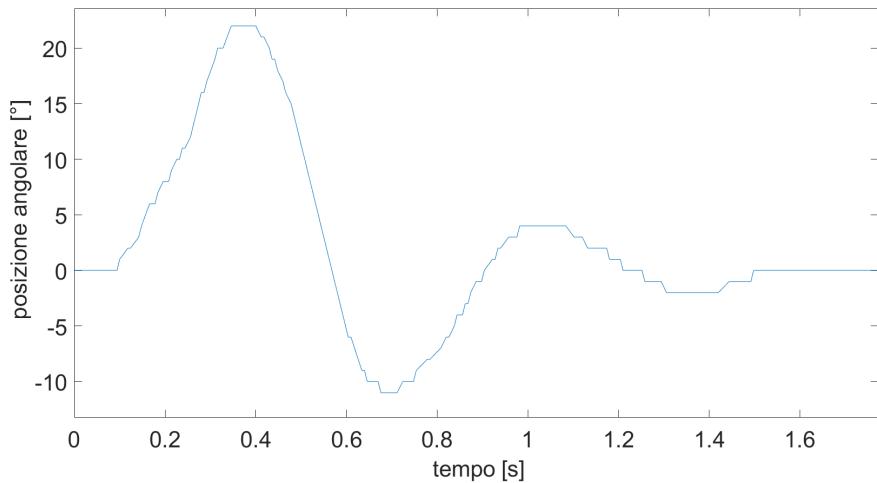


Figura 3.10: Uscita  $\theta$  del sistema per  $P = -1.95$

Nel primo caso ( $P = -1.95$ ) è chiaro come il pendolo ritorni nel punto di equilibrio quasi immediatamente (asintoticamente stabile).

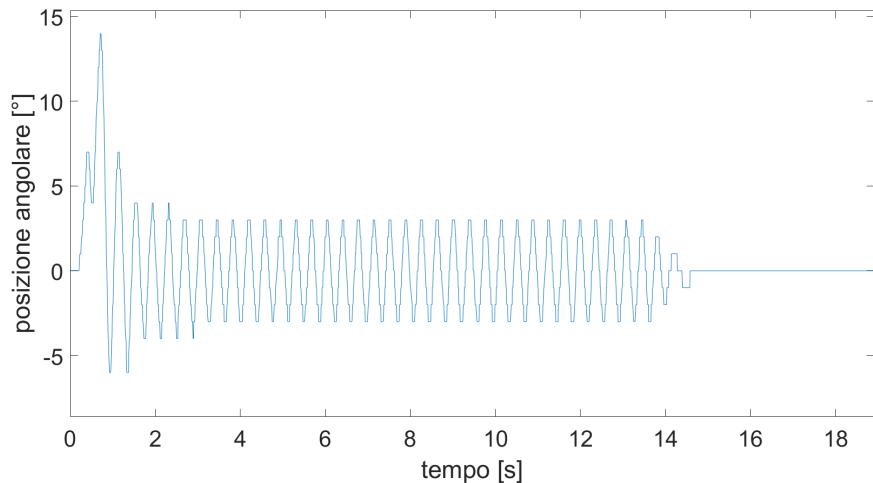
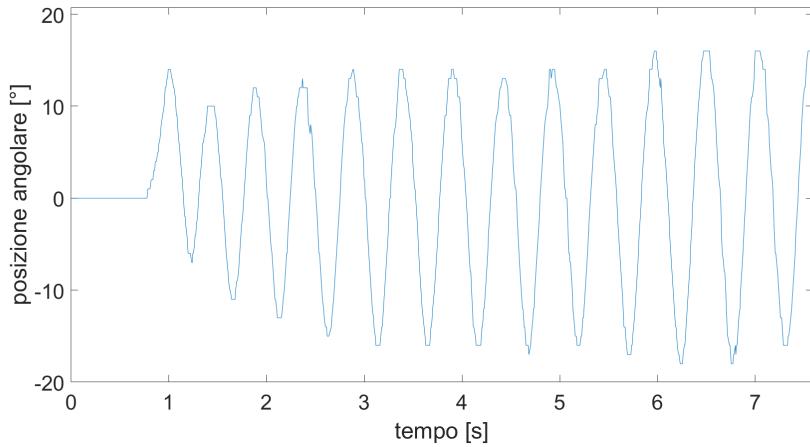


Figura 3.11: Uscita  $\theta$  del sistema per  $P = -5.75$

Nel secondo caso ( $P = -5.75$ ), in seguito ad uno smorzamento iniziale non riesce a ritornare nel punto di equilibrio, ma continua ad oscillare fino al nostro intervento, evidente conseguenza della posizione dei poli in ciclo chiuso sull'asse immaginario (semplicemente stabile).

Figura 3.12: Uscita  $\theta$  del sistema per  $P = -8$ 

Nel terzo e ed ultimo caso ( $P = -8$ ), non avviene nemmeno uno smorzamento iniziale ma anzi, l'oscillazione provocata viene amplificata dal sistema fino a giungere in una situazione nella quale le ipotesi del modello vengono violate: le ruote del carrello iniziano a slittare, inficiando dunque le equazioni trovate al paragrafo 3.3 che si basavano sul moto di puro rotolamento (instabile).

Assodato quindi come  $P = -1.95$  porti ad una situazione più che accettabile, si è cercato di quantificare il miglioramento raggiunto tra sistema in ciclo aperto e sistema in ciclo chiuso con retroazione unitaria.

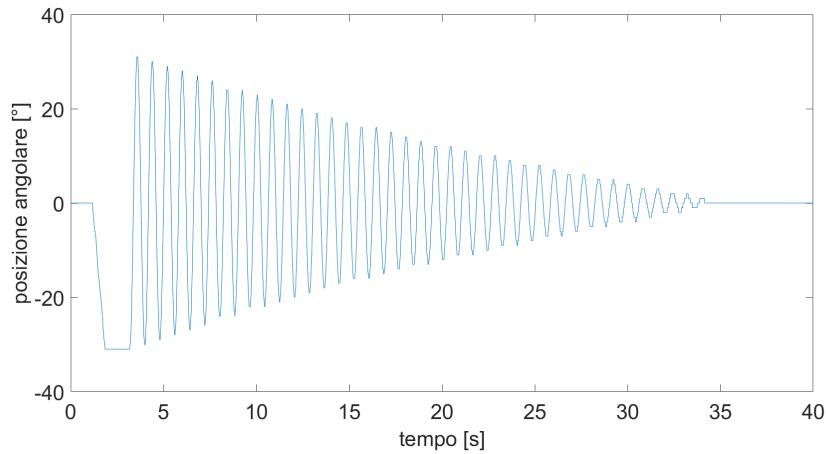


Figura 3.13: Sistema in ciclo aperto

Come si può vedere nel grafico in figura 3.13, posizionando il pendolo ad un'angolazione di  $\theta = 31^\circ$  (massima raggiungibile per costruzione) e la-

sciandolo quindi libero di oscillare, in ciclo aperto(ovvero senza controllo sul motore) si raggiunge il punto di stabilità  $\theta = 0^\circ$  in poco più di 30 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.4 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

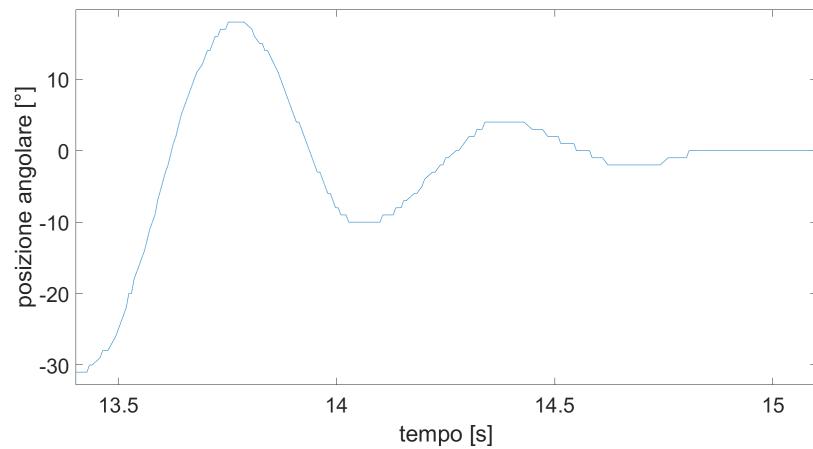


Figura 3.14: Sistema in ciclo chiuso con regolatore P

# Capitolo 4

## Conclusioni

Nonostante alcuni limiti legati alla piattaforma LEGO MINDSTORMS EV3, quali ad esempio la scarsa sensibilità degli strumenti di misura e il tempo di campionamento minimo degli stessi troppo alto, che hanno in parte complicato il raggiungimento degli obiettivi prestabiliti, è stato comunque possibile ottenere risultati soddisfacenti in linea con quanto prefissato.

In fase di progettazione numerose sono state le problematiche relative in particolar modo all'identificazione del modello del motore dovute tanto all'esigua esperienza quanto anche all'utilizzo di strumenti di misura destinati ad un utilizzo prettamente ludico e perciò non professionali.

Ciò nonostante il dispositivo costruito è in grado di stabilizzare il pendolo su di esso installato in un tempo pari a 1.4 s: dato apprezzabile se si pensa che in assenza di controllo sul motore il tempo richiesto per raggiungere il punto di equilibrio è circa 30 s: valore pressappoco venti volte superiore.

Inoltre il sistema reale rispetta piuttosto fedelmente i vincoli di guadagno calcolati utilizzando il criterio del luogo delle radici, chiaro indice del fatto che le approssimazioni eseguite e i limiti del LEGO MINDSTORMS EV3 soprattutto potrebbero non aver inficiato più di tanto sul risultato finale.

Numerosi sono poi i miglioramenti che si sarebbero potuti apportare, ma che la mancanza di tempo non ci ha permesso di approfondire nel dettaglio. Tra questi citiamo il confronto tra modello linearizzato e non, per verificare se effettivamente il primo introduce un errore non trascurabile, oppure lo stesso esperimento, ma con l'utilizzo del pendolo inverso e, dunque, con punto di equilibrio instabile. In ultimo il controllo dell'angolo del pendolo unito a quello della posizione del carrello utilizzando per esempio un osservatore di Luenberger.

Il lavoro svolto, seppur migliorabile, è stato ad ogni modo soddisfacente e didattico; ci auguriamo dunque di aver procurato una buona base per eventuali sviluppi futuri.



# Bibliografia

- [1] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fondamenti di Fisica*. Casa Editrice Ambrosiana. Distribuzione esclusiva Zanichelli, 2015.
- [2] Giovanni Marro, *Controlli automatici*. Quinta edizione. Zanichelli, 2005.
- [3] Benjamin C. Kuo, *Automatic Control Systems*. Terza edizione. Prentice Hall, 1975.
- [4] Ashley C. Mitchell: Modeling and Control of a Motor System using the LEGO EV3 robot,  
[https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc804943/m2/1/high\\_res\\_d/thesis.pdf](https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc804943/m2/1/high_res_d/thesis.pdf)
- [5] LEGO System: Specs of Large Servo Motor,  
<https://shop.lego.com/en-CA/EV3-Large-Servo-Motor-45502>
- [6] Muindi Dennis Mutheke D.: Digital Control of a line following robot,  
<http://eie.uonbi.ac.ke/sites/default/files/cae/engineering/eie/DIGITAL%20CONTROL%20OF%20A%20LINE%20FOLLOWING%20ROBOT.pdf>
- [7] Alessio Antenucci: Realizzazione e Controllo di un pendolo inverso con carrello,  
<http://control.disp.uniroma2.it/carnevale/archivio/Tesi/antenuccialessio/tesi.pdf>
- [8] Bos P. van den and Valk L. (4095154): Integration Project: Balancing Robot  
[http://laurensvalk.com/files/Bos\\_Valk\\_SC4050\\_Balancing\\_Robot.pdf](http://laurensvalk.com/files/Bos_Valk_SC4050_Balancing_Robot.pdf)