

PROGETTO “MODEL-BASED” DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO IN AMBIENTE SIMULINK



Francesco Tornatore Luca Lazzaroni

DITEN - Dipartimento di Ingegneria Navale, Elettrica,
Elettronica e delle Telecomunicazioni

Università degli Studi di Genova

Tesi di Laurea Triennale

27 Ottobre 2017

Ringraziamenti

Ringraziamo il chiar.mo professore Marco Baglietto che ci ha guidati in
questa nostra prima ‘pubblicazione’

A chi ci paga gli studi e a chi ci aiuta a non abbandonarli,
a buon rendere...

Sommario

Indice

1	Introduzione	1
2	Modello del motore	3
2.1	Dalla potenza alla velocità angolare	3
2.2	Dalla velocità angolare alla coppia	6
3	Pendolo su carrello	9
3.1	Modello e relative equazioni	9
3.2	Linearizzazione del modello	12
3.3	Stabilizzazione del pendolo	15
3.4	Controllo della posizione del carrello	19
4	Pendolo inverso su carrello(forse da togliere)	21
4.1	Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio . .	21
5	Conclusioni	23

Elenco delle figure

2.1	Schema a blocchi Motore	3
2.2	Albero per aumentare Inerzia del motore	4
2.3	Risposta al gradino con $\omega_c = 25 \text{ Hz}$	5
2.4	Risposta al gradino con $\omega_c = 100 \text{ Hz}$	5
2.5	Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello	6
2.6	Modello completo del Motore	7
2.7	Risposta al gradino del modello completo	8
3.1	Modello del pendolo su carrello	9
3.2	Realizzazione fisica del pendolo su carrello	15
3.3	Massima velocità di oscillazione libera	16
3.4	Momento della forza	16
3.5	Schema a blocchi del sistema complessivo	17
3.6	Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$	17
3.7	Sistema complessivo controllato proporzionalmente	18
3.8	Sistema reale controllato proporzionalmente	18
3.9	Sistema in ciclo aperto	19
3.10	Sistema in ciclo chiuso con Regolatore P	20

Capitolo 1

Introduzione

Capitolo 2

Modello del motore

2.1 Dalla potenza alla velocità angolare

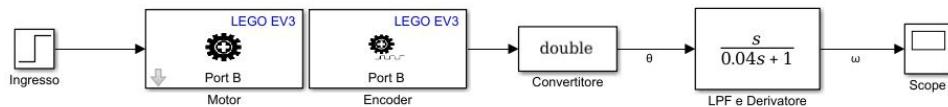


Figura 2.1: Schema a blocchi Motore

Il LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un motore, l'EV3 Large Servo Motor, la cui velocità angolare, misurata in rad/s , è stata assunta come uscita del sistema.

I valori di ingresso possibili sono invece compresi tra -100 e +100, dove +100 indica la massima potenza erogabile, mentre -100 idem, ma con verso di rotazione opposto.

Al fine di modellare nel modo più preciso possibile abbiamo applicato a tale motore un albero dotato di pesi posti a una certa distanza da quest'ultimo in modo tale da incrementare il momento d'inerzia I e, di conseguenza, diminuire l'accelerazione angolare massima α in accordo con la seconda legge di Newton (in forma angolare) $\tau = I\alpha$, dove τ è il momento della forza o, più semplicemente, la coppia massima erogata: valore caratteristico del motore.



Figura 2.2: Albero per aumentare Inerzia del motore

In questo modo il tempo di assestamento t_a del sistema, direttamente proporzionale a α , è sensibilmente più lungo ed è dunque più semplice trovare una funzione di trasferimento assimilabile a quella dell'EV3 Large Servo Motor.

All'interno del motore è inoltre presente un'encoder che permette di misurare, in gradi, la posizione angolare dello stesso. Di conseguenza, al fine di ottenere la velocità angolare ω è stato applicato in cascata un derivatore, ma anche un filtro passa basso con frequenza di taglio $\omega_c = 25 \text{ Hz}$, necessario per attenuare le alte frequenze del sistema, al fine di ottenere una funzione in uscita meno spezzata possibile e, di conseguenza, più facilmente identificabile.

Al fine di ridurre il più possibile l'errore è stato scelto come tempo di campionamento dell'encoder il valore minimo supportato: 0.001 s .

Il risultato che si ottiene utilizzando come ingresso una funzione gradino con

valore finale pari a 50 è mostrato nella figura 2.3.

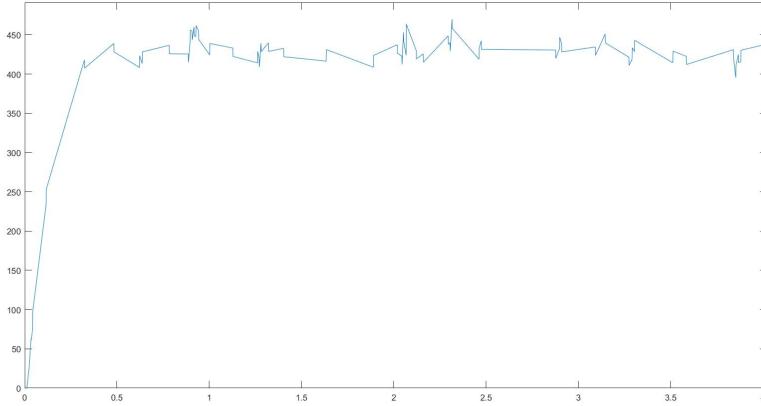


Figura 2.3: Risposta al gradino con $\omega_c = 25 \text{ Hz}$

Scegliendo invece una frequenza di taglio del filtro passa basso $\omega_c = 100 \text{ Hz}$ l'uscita del sistema diventa:

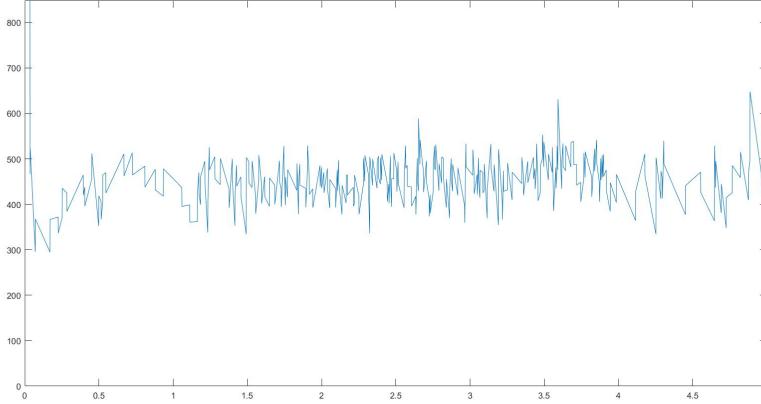


Figura 2.4: Risposta al gradino con $\omega_c = 100 \text{ Hz}$

Si può notare come la frequenza di taglio sia troppo elevata non attenuando abbastanza le alte frequenze e rendendo così impossibile una stima della funzione di trasferimento.

Prendendo quindi in esame il primo dei due grafici si può stimare una costante di tempo τ (tempo che impiega la funzione a raggiungere il 63% del valore di regime) del sistema pari a circa 0.15 s e guadagno statico 10.4.

La funzione di trasferimento che ne consegue è dunque:

$$T_{motore}(s) = \frac{10.4}{0.15s + 1}$$

Di seguito un confronto tra $T_{motore}(s)$ e la funzione di trasferimento reale del motore.

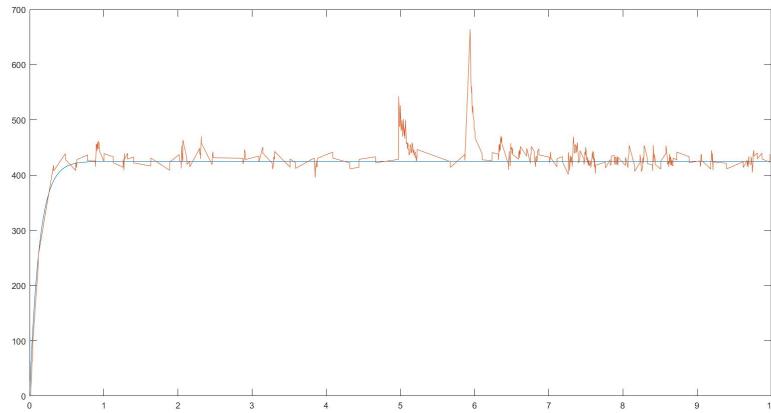


Figura 2.5: Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello

2.2 Dalla velocità angolare alla coppia

È necessario ora ottenere la coppia generata dal motore in funzione del tempo al fine di utilizzarla come ingresso per la funzione di trasferimento del pendolo che sarà trattata in modo approfondito nel prossimo capitolo. La formula utilizzata per calcolare tale coppia è la seguente:

$$\tau = K\omega + I\alpha$$

Dove il primo termine dell'equazione indica appunto la coppia, mentre i restanti due sono rispettivamente lo smorzamento viscoso e il momento torcente. Più nello specifico K rappresenta il coefficiente di smorzamento viscoso misurato in $Nm s/rad$, ω la velocità angolare, I il momento d'inerzia del sistema e α l'accelerazione angolare.

Calcoliamo innanzi tutto I :

$$I = 3M_R d_R^2 + 3M_r d_r^2 + 3I_a + 3I_A + \frac{m_a r^2}{2}$$

Il primi due termini indicano i momenti d'inerzia delle sei ruote (assunte come masse uniformi per semplicità), il terzo e il quarto quelli delle sei

aste che collegano le ruote all'albero, mentre l'ultimo termine rappresenta il momento d'inerzia dell'albero (asta centrale).

Per calcolare I delle sei aste utilizziamo il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli:

$$I = I_{cdm} + m_{asta}d^2$$

Dove d è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_{asta}l^2 + m_{asta}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{asta}l^2$$

Inserendo ora i parametri calcolati sperimentalmente e riportati nella tabella sottostante, si ricava un momento d'inerzia I pari a $0.001364 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$.

Sigla	Valore	U.d.m.	Parametro
M_R	0.0395	kg	massa ruota grande
M_r	0.023	kg	massa ruota piccola
m_a	0.0015	kg	massa asta corta
m_A	0.002	kg	massa asta lunga
l_a	0.068	m	lunghezza asta corta
r	0.002	m	raggio asta
l_A	0.091	m	lunghezza asta lunga
d_r	0.061	m	distanza ruota piccola - asse di rotazione
d_R	0.085	m	distanza ruota grande - asse di rotazione

Essendo $\tau = K\omega + I\alpha$ possiamo disegnare tramite Simulink il diagramma a blocchi rappresentato in figura 2.6:

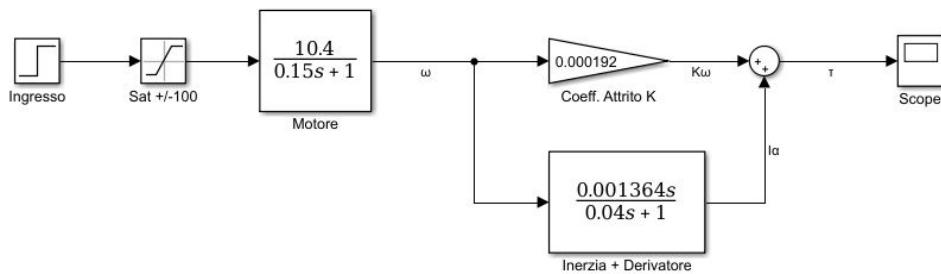


Figura 2.6: Modello completo del Motore

L'uscita del sistema è proprio la coppia τ desiderata.

Si può notare come nel blocco inferiore siano stati aggiunti il derivatore e il filtro passa basso.

Il primo è necessario dal momento che l'accelerazione angolare α è proprio la derivata della velocità angolare ω .

Per quanto riguarda il filtro, invece, è stato aggiunto (scegliendo appositamente una frequenza di taglio abbastanza alta da non alterare la dinamica del sistema) siccome un derivatore puro è fisicamente irrealizzabile (funzione impropria).

Inoltre si è resa necessaria anche l'aggiunta di un blocco di saturazione dell'ingresso dal momento che, come già reso noto in precedenza, l'EV3 Large Servo Motor accetta valori compresi tra -100 e +100.

In ultimo il valore di K è stato invece ricavato sperimentalmente avendo nota la coppia a regime, caratteristica dell'EV3 Large Servo Motor e pari a $0.2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Come si mostrato in figura 2.7 un valore di K pari a $0.000192 \text{ Nm} \cdot \text{s}/\text{rad}$ consente di rispettare appieno tale specifica.

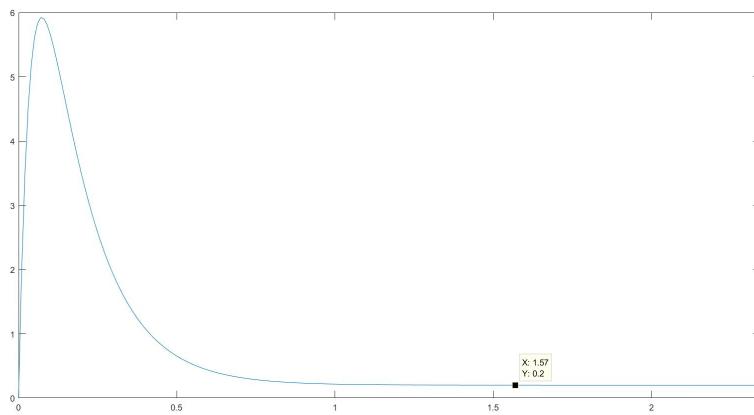


Figura 2.7: Risposta al gradino del modello completo

Capitolo 3

Pendolo su carrello

3.1 Modello e relative equazioni

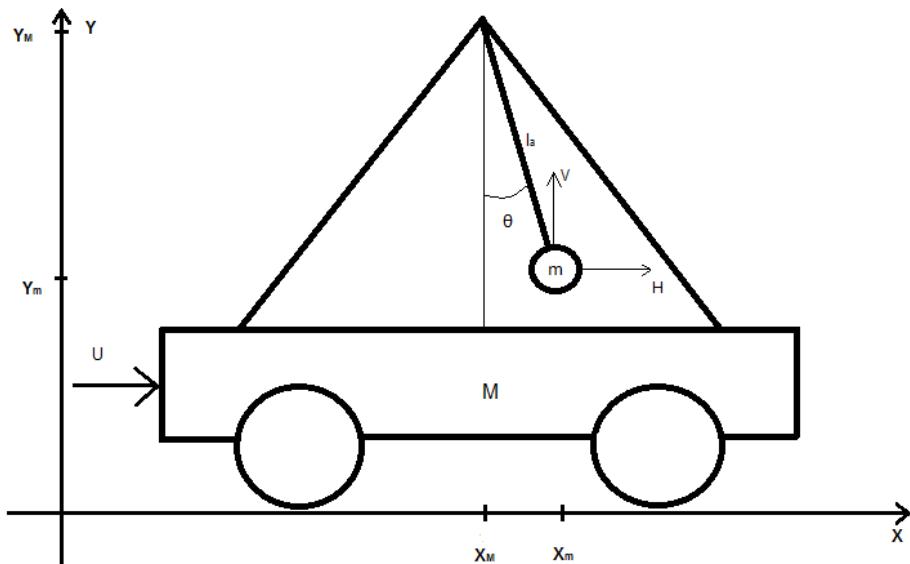


Figura 3.1: Modello del pendolo su carrello

Bilanciamento forze sull'asta

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove H e V sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa m per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo:

$$\begin{aligned}x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.2)$$

Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

sostituendo la 3.1 si ha:

$$\begin{aligned}M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\(M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta)\end{aligned} \quad (3.3)$$

Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (3.4)$$

sostituendo la 3.1 e la 3.2:

$$\begin{aligned}I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + \\&\quad + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\&= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) + \\&\quad - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\&= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\&= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta))\end{aligned} \quad (3.5)$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta

$$I_m = \frac{1}{12} m_a l_a^2 + m_a \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_a l_a^2 = 0.000045 \quad kg \cdot m^2$$

molto inferiore rispetto a quello della massa m attaccata al pendolo,

$$I_m = ml_a^2 = 0.00041 \quad kg \cdot m^2$$

possiamo per semplicità trascurarlo, per cui poniamo $I_m = 0$.

Il sistema che deriva dalla 3.3 e dalla 3.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema

$$\begin{aligned}
 & (M+m)\left(\frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}\right) + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\
 & \ddot{\theta}(ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)}) = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\
 & \ddot{\theta} = \frac{[u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)}] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} \Rightarrow \\
 & \ddot{\theta} = \frac{u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 3.6

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - \frac{ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} = \\
 & = \frac{g \sin(\theta)[-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\
 & = \frac{-gm \sin^3(\theta) - gM \sin(\theta) + u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gM \sin(\theta) + gm \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\
 & = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + gm \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M}
 \end{aligned}$$

Assegniamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\begin{cases} x_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}_M \\ x_3 \stackrel{\Delta}{=} \theta \\ x_4 \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta} \\ y_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ y_2 \stackrel{\Delta}{=} \theta \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

3.2 Linearizzazione del modello

Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo $\underline{f}(\underline{x}, u) = \underline{0}$ (dove $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$):

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si capisce che punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"). Siccome il punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello possiamo per semplicità scegliere $x_1 = 0$.

Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio $\tilde{x} = 0, \tilde{u} = 0$ trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))(M + m \sin^2(x_3))]}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3) x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M + m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\ &\quad - \frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m + M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \\ &= -\frac{(M + m)g}{Ml} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a} \end{aligned}$$

Le equazioni linearizzate sono dunque:

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{0} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_2 (angolo θ del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$\begin{aligned}T_{y_2,u}(s) &= C(sI-A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M+m)g}\end{aligned}$$

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del Lego MINDSTORM EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento

Sigla	Valore	U.d.m.	Parametro
M	0.7535	kg	massa carrello
m	0.016	kg	massa all'estremità del pendolo
g	9.81	m/s^2	accelerazione di gravità
l_a	0.166	m	lunghezza asta del pendolo

Data la precedente tabella si ha:

$$T_{y_2,u}(s) = -\frac{1}{0.125s^2 + 7.541}$$

3.3 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sè è un sistema già stabile, lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici.

In figura 3.2 realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large Servo Motor come trazione e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.

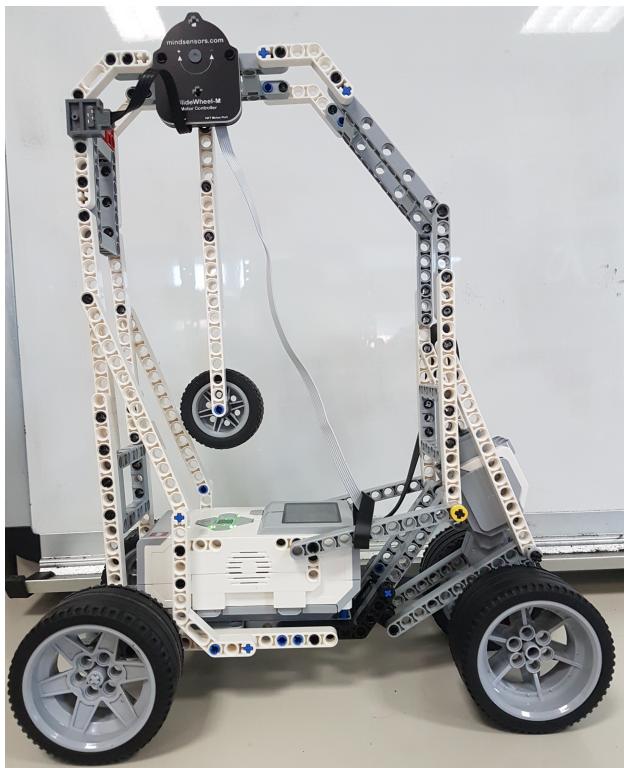


Figura 3.2: Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Da specifiche quest'ultimo può raggiungere un tempo di campionamento minimo di 0.001s (così come il motore) ma a tale valore non riesce sempre a campionare in modo corretto, perciò abbiamo deciso di aumentarlo in modo da non perdere nessuna variazione anche alla massima velocità angolare raggiunta dal pendolo durante l'oscillazione libera tra $[-31^\circ, 31^\circ]$ (intervallo entro il quale il pendolo è vincolato per costruzione). Da tale esperimento è risultato che durante la prima oscillazione (in figura 3.3), il pendolo, raggiunge per $\theta = 0^\circ$ la velocità $\omega = 250 \text{ deg/s}$ (calcolata con un semplice rapporto incrementale) per cui il tempo di campionamento ottimale sarebbe stato $t_c = \frac{1}{250} = 0.004\text{s}$. Sfruttando il modello del motore LEGO da noi ricavato si può quindi ricavare la funzione di Trasferimento del sistema com-

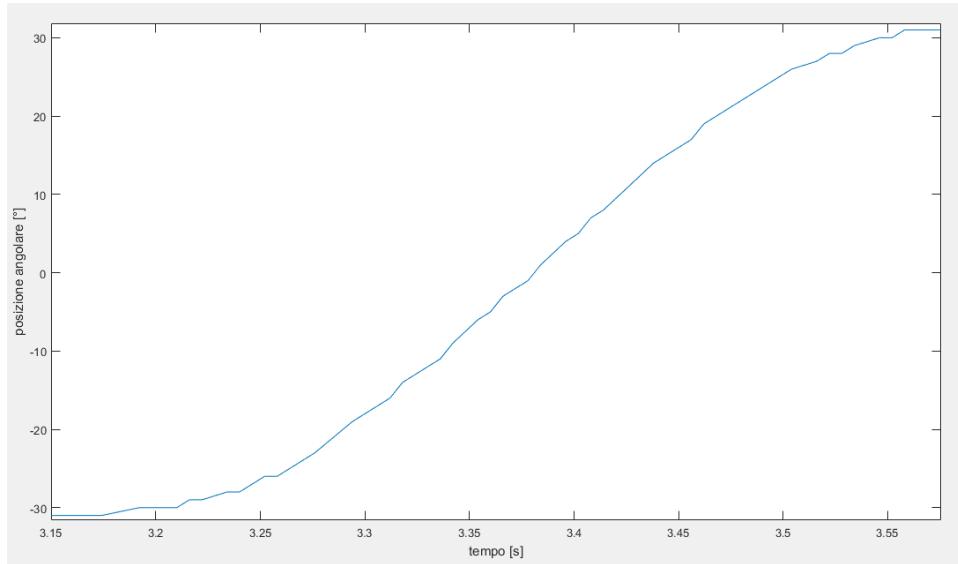


Figura 3.3: Massima velocità di oscillazione libera

plessivo (avente come ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

Siccome in uscita al modello del motore abbiamo la coppia erogata dallo stesso, per poterlo mettere in serie al modello del pendolo su carrello (il quale come ingresso riceve una spinta sotto forma di forza) occorre adattare il collegamento I/O. Poiché si assume un puro moto di rotolamento delle ruote del carrello si tratta di trovare il giusto coefficiente C di proporzionalità tra coppia e spinta.

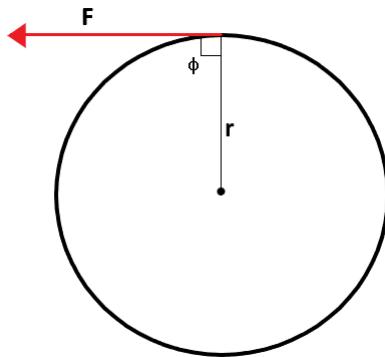


Figura 3.4: Momento della forza

La relazione tra queste ultime è data dalla formula fisica del momento della forza $\tau = r \times F = (r \sin(\phi))F = r_{\perp}F$ ove r_{\perp} rappresenta il braccio della forza F . Poiché nel nostro caso r risulta essere il raggio della ruota ed F la

forza tangente alla ruota abbiamo ricavato

$$F = \frac{\tau}{r} \Rightarrow C = \frac{1}{r} = 29.41$$

Per realizzare ora una retroazione algebrica sull'uscita che ci permetta di

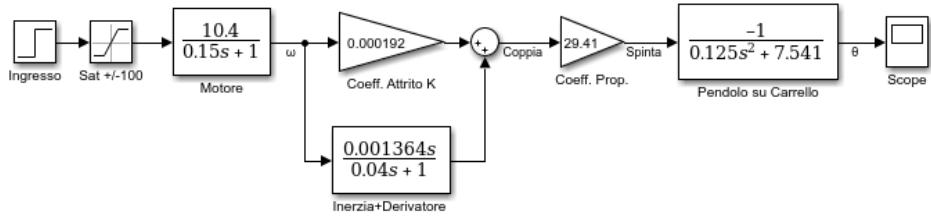


Figura 3.5: Schema a blocchi del sistema complessivo

controllarlo in ciclo chiuso, possiamo riassumere in un'unica funzione di Trasferimento il sistema complessivo:

$$T_{y_2,u} = -\frac{559.5s + 78.3}{s^4 + 31.67s^3 + 227s^2 + 1910s + 10050}$$

della quale si può calcolare il luogo delle radici per studiarne la stabilità in ciclo chiuso. Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibi-

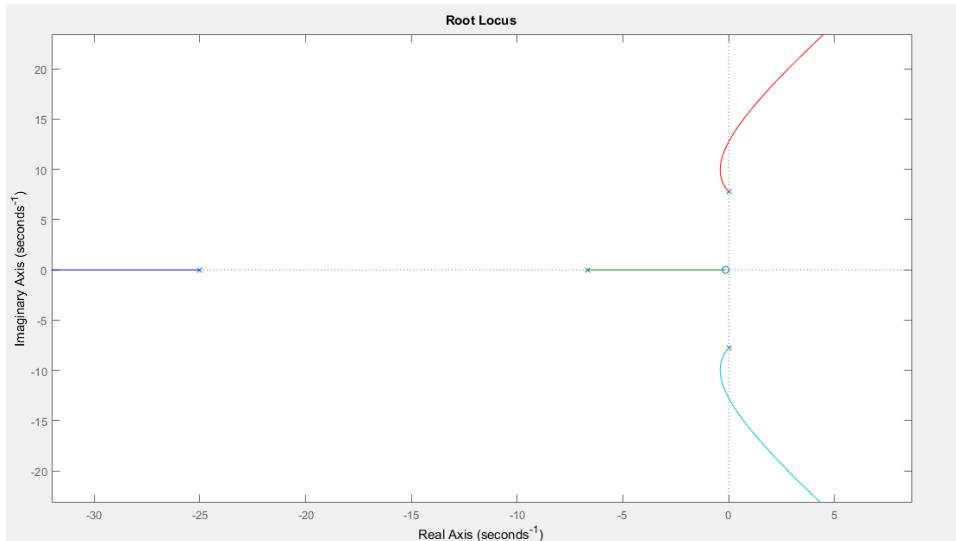


Figura 3.6: Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$

le utilizzare un semplice Regolatore Proporzionale purché il suo guadagno rientri in un intervallo molto limitato ovvero $P \in (-10, 0)$.

Attraverso l'utilizzo di uno strumento MATLAB quale ‘sisotool’ siamo arri-

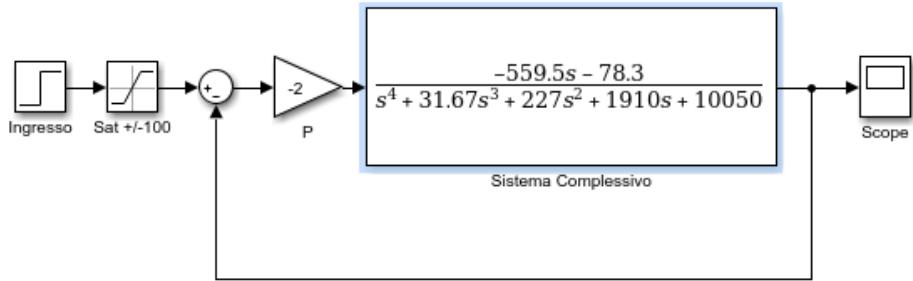


Figura 3.7: Sistema complessivo controllato proporzionalmente

vati a definirne il guadagno $P = -2$, in seguito verificato anche sperimentalmente.

Nella realizzazione dello schema a blocchi in Simulink, caricato nel Brick EV3 MINDSTORM per confermare la veridicità dei risultati ottenuti in MATLAB, abbiamo posto un ingresso costante 0 poiché si assume il pendo-

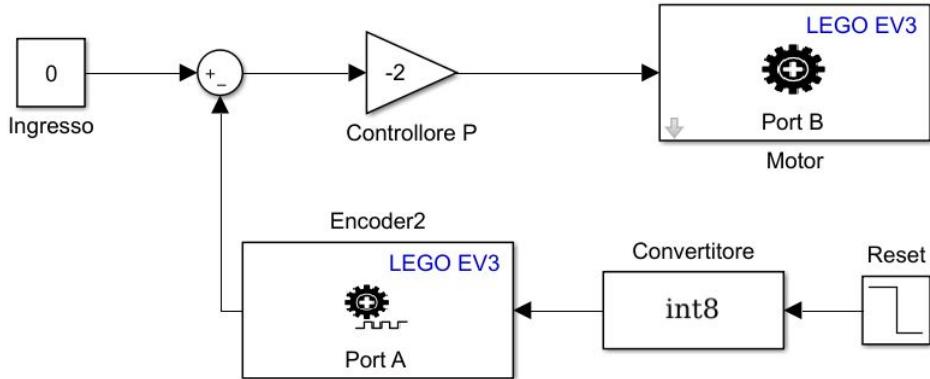


Figura 3.8: Sistema reale controllato proporzionalmente

lo inizialmente a riposo nel punto di equilibrio $\theta = 0^\circ$.

L'encoder, invece, è settato a 0 tramite un segnale di reset dopo un tempo pari a $0.001s$ dall'inizializzazione poiché, all'avvio del programma caricato nel Brick, l'encoder considera come angolo $\theta = 0^\circ$ di riferimento il primo valore misurato.

Sotto tali presupposti il motore, avendo ingresso nullo, non erogherà potenza fino quando il pendolo non verrà spostato dal suo stato iniziale.

Alla variazione della posizione angolare, il motore reagisce muovendo il carrello nella stessa direzione per riportare il pendolo nel suo punto di equilibrio.

Come si può vedere nel grafico in figura 3.9 posizionando il pendolo ad un'angolazione di $\theta = 31^\circ$ e lasciandolo quindi libero di oscillare, in ciclo aperto

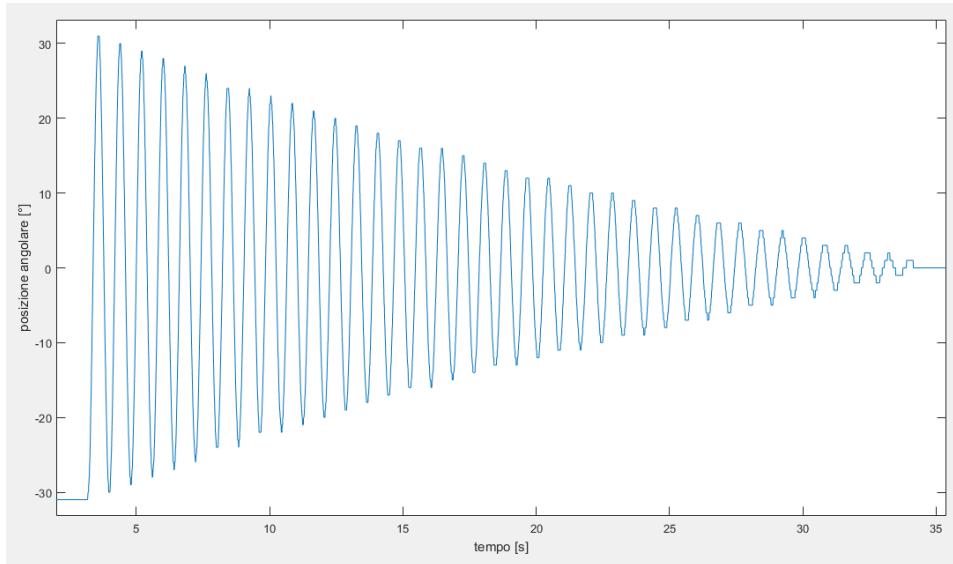


Figura 3.9: Sistema in ciclo aperto

(ovvero senza controllo sul motore), si raggiunge il punto di stabilità $\theta = 0^\circ$ in poco più di 30 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.4 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

Un Regolatore migliore potrebbe essere un PID (Proporzionale Integrativo Derivativo) che permette grazie all'aggiunta di uno zero ($\in \Re$), e quindi necessariamente almeno un polo ($\in \Re$) di avere un maggiore margine di stabilità.

3.4 Controllo della posizione del carrello

Fino ad ora abbiamo trascurato la seconda uscita di nostro interesse, ovvero la posizione del carrello x_M . Perciò vogliamo provare a controllare quest'ultima in modo da decidere non solo il tempo di assestamento del pendolo ma allo stesso tempo anche la posizione del carrello dove il sistema dovrà assestarsi.

A tal proposito riprendiamo le equazioni ricavate al paragrafo 3.2.

Dalle seguenti equazioni di stato linearizzate attorno al punto di equilibrio $\underline{x} = 0, u = 0$

$$\underline{\delta\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

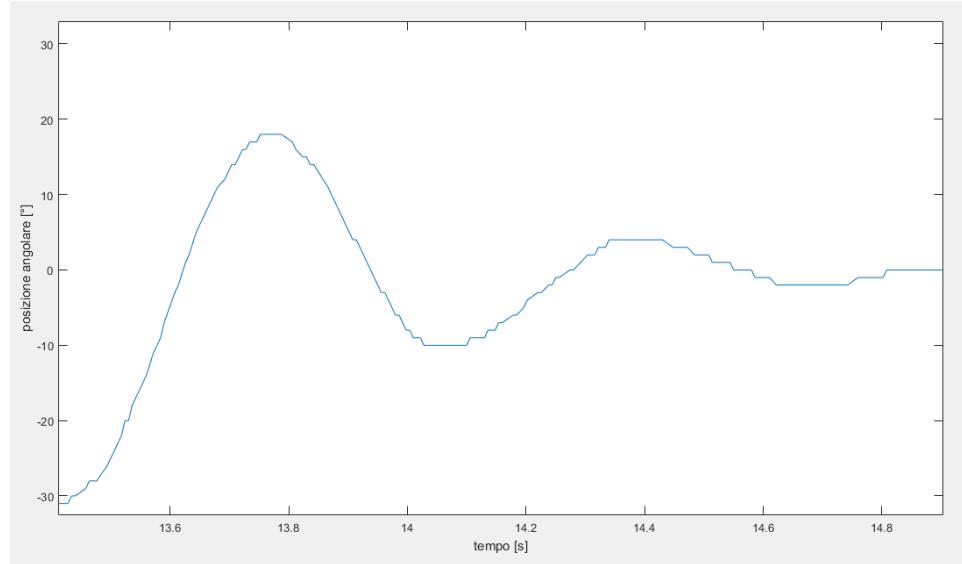


Figura 3.10: Sistema in ciclo chiuso con Regolatore P

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

si può ricavare la funzione di trasferimento $T_{y_1,u}(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_1 (posizione x_M del carrello):

$$T_{y_1,u}(s) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & \frac{1}{s^2} & * & \frac{mg}{s^2(Ms^2 + \frac{(m+M)g}{l_a})} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{s^2 + \frac{g}{l_a}}{s^2(Ms^2 + \frac{(M+m)g}{l_a})}$$

Sostituendo i parametri del modello si ha:

$$T_{y_1,u}(s) = \frac{1.327s^2 + 78.42}{s^2(s^2 + 60.34)}$$

Capitolo 4

Pendolo inverso su carrello(forse da togliere)

4.1 Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio

Utilizzando le equazioni ricavate al paragrafo 3.2 e linearizzandole attorno al punto di equilibrio instabile si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\underline{\delta\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

La funzione di Trasferimento tra ingresso u (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e uscita y_2 (angolo del pendolo rispetto alla verticale)

$$T_{y_2,u}(s) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{(M+m)g}{lM}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} = \frac{-1}{lMs^2 - (M+m)g}$$

22CAPITOLO 4. PENDOLO INVERSO SU CARRELLO(FORSE DA TOGLIERE)

Capitolo 5

Conclusioni

Bibliografia

- [1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.
- [2] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. (German) [*On the electrodynamics of moving bodies*]. Annalen der Physik, 322(10):891–921, 1905.
- [3] Knuth: Computers and Typesetting,
<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>