

Francesco Tornatore  
Luca Lazzaroni

PROGETTO "MODEL-BASED"  
DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO  
IN AMBIENTE SIMULINK

Tesi di Laurea Triennale

Università degli Studi di Genova  
Ottobre 2017

...DEDICA...

## **Sommario**

... versione del sommario in italiano ...



# Indice

<b>1 Pendolo su carrello</b>	<b>7</b>
1.1 Modello del motore . . . . .	7
<b>2 Pendolo su carrello</b>	<b>9</b>
2.1 Equazioni e linearizzazione del modello . . . . .	9
<b>3 Pendolo inverso su carrello</b>	<b>13</b>
3.1 Equazioni e linearizzazione del modello . . . . .	13

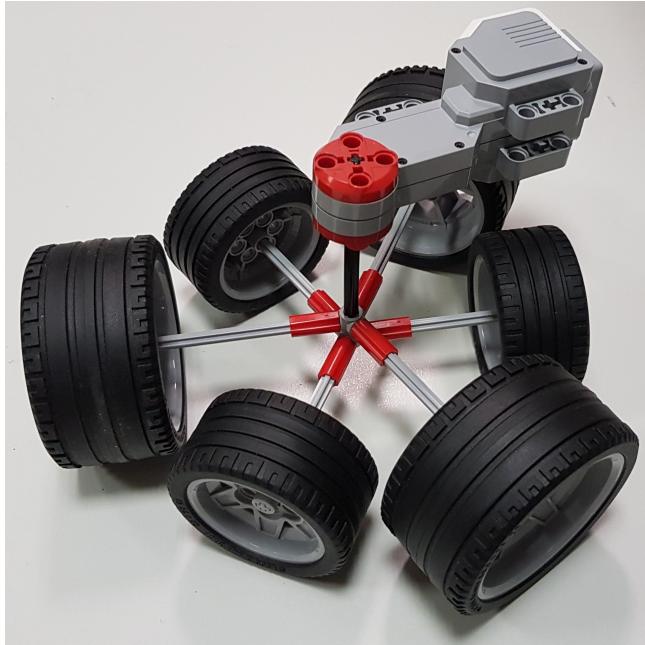


# Capitolo 1

## Pendolo su carrello

### 1.1 Modello del motore

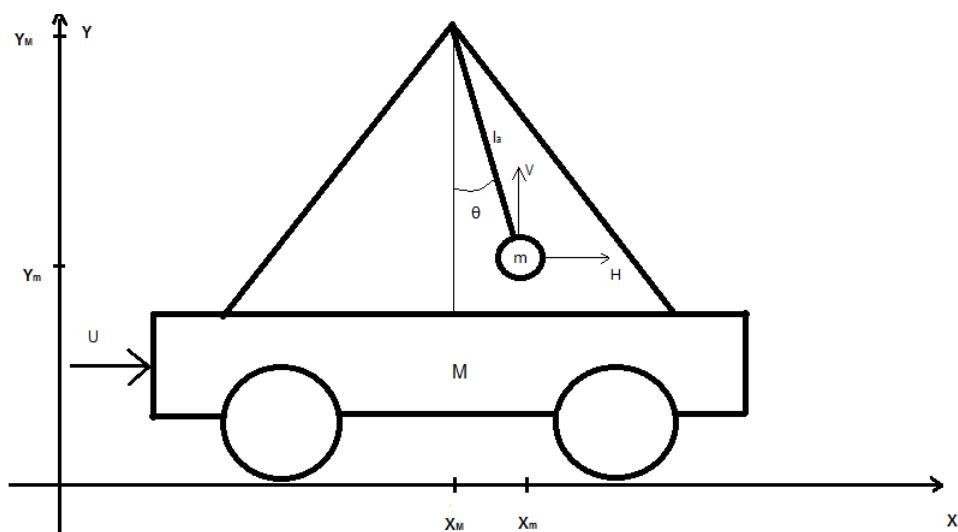
Il motore del LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un encoder in grado di contare i giri, valore assunto come uscita del sistema. I valori di ingresso possibili sono invece compresi tra -100 e +100 e corrispondono alla potenza. Al fine di modellare nel modo più preciso possibile abbiamo applicato un albero motore dotato di pesi in modo tale da incrementare il momento d'inerzia  $I$  e, di conseguenza, diminuire l'accelerazione angolare  $\alpha$  in accordo con la seconda legge di Newton in forma angolare  $\tau = I\alpha$  dove  $\tau$  indica il momento della forza o, più semplicemente, la coppia del motore: valore caratteristico del motore. In questo modo il tempo di assestamento del sistema  $t_a$ , direttamente proporzionale a  $\alpha$ , è sensibilmente più lungo ed è dunque possibile trovare una funzione di trasferimento rappresenti il motore più fedelmente.



# Capitolo 2

## Pendolo su carrello

### 2.1 Equazioni e linearizzazione del modello



Modello del pendolo su carrello realizzato con LEGO MINDSTORM EV3

#### Bilanciamento forze sull'asta

Asse x:

$$m\ddot{x}_m = H \quad (2.1)$$

Asse y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg \quad (2.2)$$

Avendo:

$$x_m = x_M + l_a \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.3)$$

$$y_m = y_F - l_a \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{y}_m = l_a (\ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \quad (2.4)$$

Si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.5)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.6)$$

### Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H \quad (2.7)$$

sostituendo la 3.3 si ha:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

### Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (2.9)$$

sostituendo la 3.3 e la 3.4:

$$\begin{aligned} I_m \dot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ &\quad + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\ &= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il sistema che deriva dalla 2.8 e dalla 2.10 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{cases}$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Dalla 2.8 si ottiene:

$$\ddot{x}_M = \frac{u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta}}{M + m}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)I_m\dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta)\ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)}$$

Le derivate prime delle variabili di stato del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta}}{M + m} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_M \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)I_m\dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta)\ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)} \end{cases}$$

### Punti di equilibrio del sistema

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio  $\underline{x} = \underline{0}$ ,  $u = 0$  trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{ml_a x_4^2 \cos(x_3) + ml_a \sin(x_3)x_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{2ml_a x_4 \sin(x_3) - ml_a \cos(x_3)\ddot{x}_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{(ml_a)[-g \cos(x_3)(M + m) + \sin(x_3)u - 2 \cos(x_3) \sin(x_3)x_4 ml_a + (\sin^2(x_3) - \cos^2(x_3))x_4^2 ml_a]}{ml_a^2(M + m)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{(M + m)I_m - 2 \cos(x_3) \sin(x_3)x_4 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(x_3)\ddot{x}_4}{ml_a(M + m)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{1}{M+m} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{-\cos(x_3)}{l_a(M+m)}$$

Sostituendo quindi nelle precedenti equazioni il punto di equilibrio si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{l_a} & \frac{I_m}{ml_a^2} \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ \frac{-1}{l_a(M+m)} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di Trasferimento  $T(s)$  tra l'ingresso  $u$  (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_2$  (angolo  $\theta$  del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$\begin{aligned}T_{u,y_2}(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M+m}{l_a(M+m)} \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{-1}{l_a(M+m)(s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a})}\end{aligned}$$

# Capitolo 3

## Pendolo inverso su carrello

### 3.1 Equazioni e linearizzazione del modello

#### Bilanciamento forze sull'asta

asse x:

$$m\ddot{x}_m = H \quad (3.1)$$

asse y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg \quad (3.2)$$

con:

$$H = m\ddot{x}_m - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} \quad (3.3)$$

$$V = mg - ml \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ml \sin(\theta)\ddot{\theta} \quad (3.4)$$

#### Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H \quad (3.5)$$

sostituendo la 3.3

$$M\ddot{x}_M = u - [m\ddot{x}_m - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\ddot{\theta}]$$

$$(M+m)\ddot{x}_M + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

#### Bilanciamento momenti sistema Asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = lV \sin(\theta) - lH \cos(\theta) \quad (3.6)$$

sostituendo la 3.3 e la 3.4 e semplificando

$$\cos(\theta)\ddot{x}_M + l\ddot{\theta} = g \sin(\theta)$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u + mlx_4^2 \sin(x_3) - mg \sin(x_3) \cos(x_3)}{M + m \sin^2(x_3)} \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{g \sin(x_3)(M + m) - \cos(x_3)(u + mlx_4 \sin(x_3))}{l(M + m \sin^2(x_3))} \quad (3.10)$$

### Ricerca punti di equilibrio del pendolo inverso

$$\begin{cases} x_1 = \forall (\text{non dipende dalla posizione del carrello}) \\ x_2 = 0 \\ x_3 = k\pi (\text{k pari pendolo inverso, k dispari pendolo normale}) \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per semplicità scelgo  $x_1 = 0$  e per trattare il pendolo inverso scelgo  $x_3 = 0$ .

### Linearizzazione delle equazioni attorno al punto di equilibrio

$$\underline{\delta \dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

La funzione di Trasferimento tra ingresso  $u$  (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e uscita  $y_2$  (angolo del pendolo rispetto alla verticale)

$$T_{y_2,u}(s) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{(M+m)g}{lM}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} = \frac{-1}{lMs^2 - (M+m)g}$$