

Francesco Tornatore  
Luca Lazzaroni

# PROGETTO ”MODEL-BASED” DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO IN AMBIENTE SIMULINK

Tesi di Laurea Triennale

Università degli Studi di Genova  
Ottobre 2017

...DEDICA...

## **Sommario**

... versione del sommario in italiano ...



# Indice

<b>1 Pendolo su carrello</b>	<b>7</b>
1.1 Modello del motore . . . . .	7
<b>2 Pendolo su carrello</b>	<b>9</b>
2.1 Modello e relative Equazioni . . . . .	9
2.2 Linearizzazione del modello . . . . .	12
2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'Asta . . . . .	15
2.4 Stabilizzazione del pendolo . . . . .	17
2.5 Controllo della posizione del carrello . . . . .	18
<b>3 Pendolo inverso su carrello</b>	<b>21</b>
3.1 Equazioni e linearizzazione del modello . . . . .	21

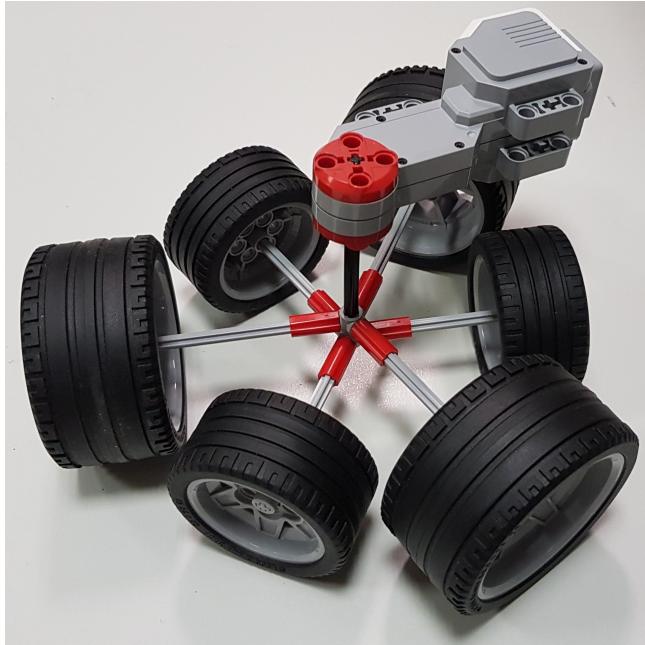


# Capitolo 1

## Pendolo su carrello

### 1.1 Modello del motore

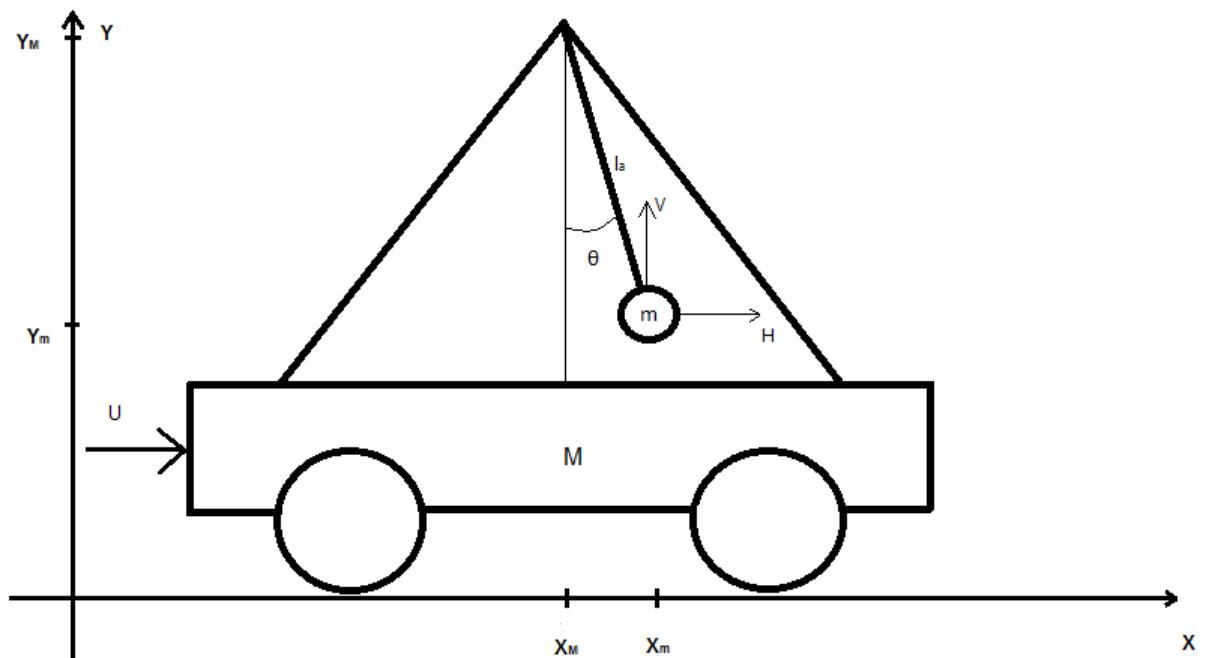
Il motore del LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un encoder in grado di contare i giri, valore assunto come uscita del sistema. I valori di ingresso possibili sono invece compresi tra -100 e +100 e corrispondono alla potenza. Al fine di modellare nel modo più preciso possibile abbiamo applicato un albero motore dotato di pesi in modo tale da incrementare il momento d'inerzia  $I$  e, di conseguenza, diminuire l'accelerazione angolare  $\alpha$  in accordo con la seconda legge di Newton in forma angolare  $\tau = I\alpha$  dove  $\tau$  indica il momento della forza o, più semplicemente, la coppia del motore: valore caratteristico del motore. In questo modo il tempo di assestamento del sistema  $t_a$ , direttamente proporzionale a  $\alpha$ , è sensibilmente più lungo ed è dunque possibile trovare una funzione di trasferimento rappresenti il motore più fedelmente.



# Capitolo 2

## Pendolo su carrello

### 2.1 Modello e relative Equazioni



Modello del pendolo su carrello

**Bilanciamento forze sull'asta**

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove  $H$  e  $V$  sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa  $m$  per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.2)$$

### Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

sostituendo la 2.1 si ha:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

### Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (2.4)$$

sostituendo la 2.1 e la 2.2:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ &\quad + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\ &= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta molto inferiore rispetto a quello della massa  $m$  attaccata al pendolo, possiamo per semplicità trascurarla, per cui poniamo  $I_m = 0$ . Vedremo poi nel paragrafo 2.3 che i risultati senza approssimazione saranno praticamente gli stessi.

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema

$$\begin{aligned}
 & (M+m)\left(\frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}\right) + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\
 & \ddot{\theta}(ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)}) = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\
 & \ddot{\theta} = \frac{[u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)}] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} \Rightarrow \\
 & \ddot{\theta} = \frac{u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 2.6

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - \frac{ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} = \\
 & = \frac{g \sin(\theta)[-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\
 & = \frac{-gm \sin^3(\theta) - gM \sin(\theta) + u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gM \sin(\theta) + gm \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\
 & = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + gm \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M}
 \end{aligned}$$

Assegnamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\begin{cases} x_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}_M \\ x_3 \stackrel{\Delta}{=} \theta \\ x_4 \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta} \\ y_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ y_2 \stackrel{\Delta}{=} \theta \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

## 2.2 Linearizzazione del modello

### Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo  $\underline{f}(\underline{x}, u) = \underline{0}$  (dove  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$ ):

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si capisce che punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"). Siccome il punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello possiamo per semplicità scegliere  $x_1 = 0$ .

### Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio  $\underline{x} = \underline{0}$ ,  $\tilde{u} = 0$  trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))](M + m \sin^2(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \Big|_{\underline{x}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3) x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\underline{x}, \tilde{u}} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\underline{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M + m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\ &\quad - \frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m + M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \Big|_{\underline{x}, \tilde{u}} = \\ &= -\frac{(M + m)g}{Ml} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\underline{x}, \tilde{u}} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) = \left. \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \right|_{\underline{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a}$$

Le equazioni linearizzate sono dunque:

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento  $T(s)$  tra l'ingresso  $u$  (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_2$  (angolo  $\theta$  del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$\begin{aligned}T_{u,y_2}(s) &= C(sI-A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M+m)g}\end{aligned}$$

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del Lego MINDSTORM EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento

Parametro	Valore	Unità di misura
$M$	0.7295	Kg
$m$	0.015	Kg
$g$	9.81	$\frac{m}{s^2}$
$l_a$	0.166	m

Data la precedente tabella si ha:

$$T_{u,y_2}(s) = -\frac{1}{0.121s^2 + 7.303}$$

## 2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'Asta

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 senza trascurare l'inerzia dell'asta  $I_m$  è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ I_m\ddot{\theta} = ml_a(g \sin(\theta) + l_a\ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{cases}$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Dalla 2.3 si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_M &= \frac{u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta}}{M + m} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)I_m\dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta)\ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)} \end{aligned}$$

Le derivate prime delle variabili di stato del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta}}{M + m} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_M \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)I_m\dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta)\ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)} \end{cases}$$

### Punti di equilibrio del sistema

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio  $\underline{x} = \underline{0}$ ,  $u = 0$  trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}) &= \frac{ml_a x_4^2 \cos(x_3) + ml_a \sin(x_3) \dot{x}_4}{M+m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}) &= \frac{2ml_a x_4 \sin(x_3) - ml_a \cos(x_3) \ddot{x}_4}{M+m}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}) &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}) &= \frac{(ml_a)[-g \cos(x_3)(M+m) + \sin(x_3)u - 2 \cos(x_3) \sin(x_3) \dot{x}_4 ml_a + (\sin^2(x_3) - \cos^2(x_3)) ml_a^2(M+m)]}{ml_a^2(M+m)} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}) &= \frac{(M+m)I_m - 2 \cos(x_3) \sin(x_3) x_4 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(x_3) \ddot{x}_4}{ml_a(M+m)} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}) &= \frac{1}{M+m} & \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}) &= \frac{-\cos(x_3)}{l_a(M+m)}\end{aligned}$$

Sostituendo quindi nelle precedenti equazioni il punto di equilibrio si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{l_a} & \frac{I_m}{ml_a^2} \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M+m}{0} \\ -1 \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di Trasferimento  $T(s)$  tra l'ingresso  $u$  (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_2$  (angolo  $\theta$  del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

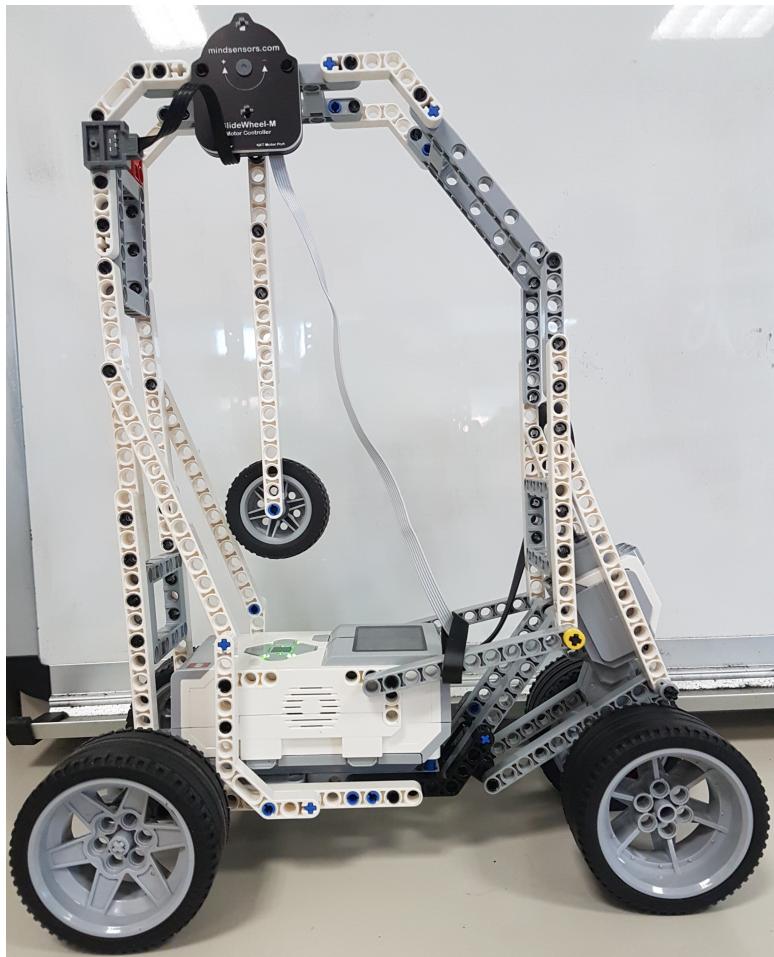
$$T_{u,y_2}(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M+m}{0} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_a}{l_a(M+m)} \\ \frac{-1}{l_a(M+m)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{l_a(M+m)(s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a})}$$

## 2.4 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sè è un sistema già stabile, lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici.

Di seguito la realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large come trazione del carrello e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.



Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Sfruttando il modello del motore EV3 Large da noi ricavato si può quindi ricavare la funzione di Trasferimento del sistema complessivo(avente come

ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

#### IMMAGINE SIMULINK MODELLO SISTEMA PENDOLO+MOTORE NON RETROAZIONATO

Il sistema complessivo in ciclo aperto è dato quindi dalla seguente funzione di Trasferimento ricavata con l'ausilio del 'Linear Analisys Tool' di Simulink:

$$T_{u,y_2} = \frac{1}{\text{nonricordo}}$$

della quale possiamo calcolare il luogo delle radici per studiarne la stabilità.

#### IMMAGINE ROOT LOCUS

Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibile utilizzare un semplice Regolatore Proporzionale purchè il suo guadagno  $P \in [-\text{qualcosa}, 0]$ .

#### IMMAGINE SIMULINK CON REGOLATORE PROPORZIONALE

Il Regolatore proporzionale permette di ridurre ampiamente il periodo di oscillazione del pendolo.

Nel seguito abbiamo sperimentato e osservato il comportamento del sistema cercando di quantificare il miglioramento ottenuto. Come si può vedere nel seguente grafico posizionando il pendolo ad un'angolazione iniziale di  $\theta = 30^\circ$ , in ciclo aperto(ovvero senza controllo sul motore) si raggiunge il punto di stabilità  $\theta = 0^\circ$  in poco più di 25 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.15 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

#### GRAFICI DI OSCILLAZIONE PENDOLO IN OL E CL

Un Regolatore migliore potrebbe essere un PID(Proporzionale Integrativo Derivativo) che permette grazie all'aggiunta di uno zero ( $\in \Re$ ), e quindi necessariamente almeno un polo ( $\in \Re$ ) di avere un maggiore margine di stabilità.

## 2.5 Controllo della posizione del carrello

Fino ad ora abbiamo trascurato la seconda uscita di nostro interesse, ovvero la posizione del carrello  $x_M$ . Perciò vogliamo provare a controllare quest'ultima in modo da decidere non solo il tempo di assestamento del pendolo ma allo stesso tempo anche la posizione del carrello dove il sistema dovrà assestarsi.

A tal proposito riprendiamo le equazioni ricavate al paragrafo 2.2.

Dalle seguenti equazioni di stato linearizzate attorno al punto di equilibrio  $\underline{x} = 0, u = 0$

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

si può ricavare la funzione di trasferimento  $T(s)$  tra l'ingresso  $u$  (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_1$  (posizione  $x_M$  del carrello):

$$\begin{aligned}T_{u,y_1}(s) &= C(sI-A)^{-1}B = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & \frac{1}{s^2} & * & \frac{mg}{s^2(Ms^2 + \frac{(m+M)g}{l_a})} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2 + \frac{g}{l_a}}{s^2(Ms^2 + \frac{(M+m)g}{l_a})}\end{aligned}$$

Sostituendo i parametri del modello si ha:

$$T_{u,y_2}(s) = \frac{1.371s^2 + 81.02}{s^2(s^2 + 60.311)}$$



# Capitolo 3

## Pendolo inverso su carrello

### 3.1 Equazioni e linearizzazione del modello

**Bilanciamento forze sull'asta**

asse x:

$$m\ddot{x}_m = H \quad (3.1)$$

asse y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg \quad (3.2)$$

con:

$$H = m\ddot{x}_m - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} \quad (3.3)$$

$$V = mg - ml \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ml \sin(\theta)\ddot{\theta} \quad (3.4)$$

**Bilanciamento forze sul carrello**

$$M\ddot{x}_M = u - H \quad (3.5)$$

sostituendo la 3.3

$$M\ddot{x}_M = u - [m\ddot{x}_m - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml \cos(\theta)\ddot{\theta}]$$

$$(M+m)\ddot{x}_M + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

**Bilanciamento momenti sistema Asta-massa**

$$I_m \ddot{\theta} = lV \sin(\theta) - lH \cos(\theta) \quad (3.6)$$

sostituendo la 3.3 e la 3.4 e semplificando

$$\cos(\theta)\ddot{x}_M + l\ddot{\theta} = g \sin(\theta)$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u + mlx_4^2 \sin(x_3) - mg \sin(x_3) \cos(x_3)}{M + m \sin^2(x_3)} \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{g \sin(x_3)(M + m) - \cos(x_3)(u + mlx_4 \sin(x_3))}{l(M + m \sin^2(x_3))} \quad (3.10)$$

### Ricerca punti di equilibrio del pendolo inverso

$$\begin{cases} x_1 = \forall (\text{non dipende dalla posizione del carrello}) \\ x_2 = 0 \\ x_3 = k\pi (\text{k pari pendolo inverso, k dispari pendolo normale}) \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per semplicità scelgo  $x_1 = 0$  e per trattare il pendolo inverso scelgo  $x_3 = 0$ .

### Linearizzazione delle equazioni attorno al punto di equilibrio

$$\underline{\delta \dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

La funzione di Trasferimento tra ingresso  $u$  (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e uscita  $y_2$  (angolo del pendolo rispetto alla verticale)

$$T_{y_2,u}(s) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{(M+m)g}{lM}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} = \frac{-1}{lMs^2 - (M+m)g}$$