

# PROGETTO “MODEL-BASED” DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO IN AMBIENTE SIMULINK



Francesco Tornatore Luca Lazzaroni

DITEN - Dipartimento di Ingegneria Navale, Elettrica,  
Elettronica e delle Telecomunicazioni

Università degli Studi di Genova

Tesi di Laurea Triennale

27 Ottobre 2017



## **Ringraziamenti**

Ringraziamo il professor Marco Baglietto che ci ha guidati in questo nostro  
primo ‘lavoro’

A chi ci paga gli studi e a chi ci aiuta a non abbandonarli,  
a buon rendere...

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modello del motore</b>	<b>3</b>
2.1	Dalla potenza alla velocità angolare . . . . .	3
2.2	Dalla velocità angolare alla coppia . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Pendolo su carrello</b>	<b>9</b>
3.1	Modello e relative equazioni . . . . .	9
3.2	Linearizzazione del modello . . . . .	12
3.3	Stabilizzazione del pendolo . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>23</b>



# Elenco delle figure

2.1	Schema a blocchi Motore . . . . .	3
2.2	Carico per aumentare Inerzia del motore . . . . .	4
2.3	Risposta al gradino con $\omega_c = 100 \text{ Hz}$ . . . . .	5
2.4	Risposta al gradino con $\omega_c = 25 \text{ Hz}$ . . . . .	5
2.5	Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello . . . . .	6
2.6	Modello completo del Motore . . . . .	7
2.7	Risposta al gradino del modello completo . . . . .	8
3.1	Modello del pendolo su carrello . . . . .	9
3.2	Realizzazione fisica del pendolo su carrello . . . . .	15
3.3	Massima velocità di oscillazione libera . . . . .	16
3.4	Schema a blocchi del sistema complessivo . . . . .	16
3.5	Momento della forza applicato alla ruota . . . . .	17
3.6	Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$ . . . . .	18
3.7	Particolare del Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$ . . . . .	18
3.8	Sistema complessivo controllato proporzionalmente . . . . .	19
3.9	Sistema reale controllato proporzionalmente . . . . .	19
3.10	Uscita $\theta$ del sistema per valori di $P = -2, -6, -8$ . . . . .	20
3.11	Sistema in ciclo aperto . . . . .	20
3.12	Sistema in ciclo chiuso con Regolatore P . . . . .	21



# Elenco delle tabelle

2.1	Parametri del carico dell'albero motore . . . . .	7
3.1	Parametri del sistema Carrello-Pendolo . . . . .	15



# Capitolo 1

## Introduzione

Nel seguente elaborato si affronta il problema della modellazione e conseguente controllo di un sistema fisico realizzato con dispositivo LEGO MIND-STORM EV3 e alcuni tra i principali sensori e attuatori disponibili per questo modello.

L'obiettivo è quello di applicare i principi della Teoria dei Sistemi e dei Controlli Automatici per controllare e smorzare l'oscillazione di un pendolo su di un carrello con trazione motrice.

Per la modellazione, la simulazione e l'analisi del sistema si fa uso dell'ambiente di sviluppo Simulink, strettamente integrato con MATLAB, il quale fornisce una miriade di strumenti utili al progetto.

Dal suddetto ambiente si riesce a stabilire una connessione WI-FI (con l'aiuto dell'adattatore wireless USB Netgear WNA1100) oppure USB tra PC e robot con la quale il programma viene caricato ed in seguito eseguito in modalità autonoma o guidata, a seconda delle esigenze, tramite l'impostazione di alcuni parametri.

Inizialmente si procede con l'identificazione, in seguito all'analisi della risposta al gradino, del modello del motore LEGO utilizzato per la locomozione.

Si prosegue scrivendo le equazioni fisiche del modello del pendolo su carrello, quindi si cercano i punti di equilibrio e infine si linearizzano le equazioni di stato attorno a tali punti.

L'unione dei due sistemi considerati porta ad uno complessivo, del quale si analizza la stabilità con i sopracitati strumenti di MATLAB e si realizzano due tra i possibili regolatori atti a velocizzare la risposta del sistema agli stimoli in modo da ridurre il tempo di assestamento nella maniera desiderata.



# Capitolo 2

## Modello del motore

### 2.1 Dalla potenza alla velocità angolare

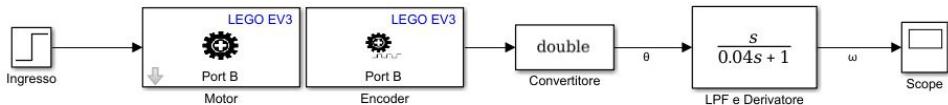


Figura 2.1: Schema a blocchi Motore

Il LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un motore, l'EV3 Large Servo Motor, la cui velocità angolare, misurata in *rad/s*, è stata assunta come uscita del sistema.

I valori di ingresso accettabili sono compresi tra -100 e +100, dove  $\pm 100$  indicano la massima potenza erogabile in entrambi i versi di rotazione.

Al fine di riuscire a modellarlo, abbiamo applicato al motore un albero dotato di pesi posti a una certa distanza dallo stesso in modo tale da incrementarne il momento d'inerzia  $I$ . Questo poiché in assenza di un carico significativo la dinamica del motore risulta troppo veloce per essere identificata con gli strumenti a nostra disposizione. In particolare l'insufficiente precisione e la limitata frequenza massima di campionamento dell'encoder non permettono una corretta analisi del transitorio del motore. Al fine di ridurre il più possibile l'errore è stato scelto come tempo di campionamento dell'encoder il valore minimo supportato:  $0.001s$ .

Come conseguenza dell'aggiunta del carico, si ha una diminuzione dell'accelerazione angolare massima  $\alpha$  in accordo con la seconda legge di Newton (in forma angolare)  $\tau = I\alpha$ , dove  $\tau$  è il momento della forza o, più semplicemente, la coppia massima erogata, valore caratteristico del motore.

In questo modo il tempo di assestamento  $t_a$  del sistema è sensibilmente più lungo ed è dunque possibile trovare una funzione di trasferimento assimilabile a quella dell'EV3 Large Servo Motor.



Figura 2.2: Carico per aumentare Inerzia del motore

All'interno del motore è inoltre presente un'encoder che permette di misurare, in gradi, la posizione angolare  $\theta$  dello stesso. Perciò, al fine di ottenere la velocità angolare  $\omega$ , è stato applicato in cascata un derivatore, ma anche un filtro passa basso con frequenza di taglio  $\omega_c = 100 \text{ Hz}$ , necessario per attenuare le alte frequenze della risposta del sistema, dovute alla derivazione del segnale campionato, al fine di ottenere una funzione in uscita meno spezzata possibile e, di conseguenza, più facilmente identificabile.

In prima analisi si è scelto un filtro con un  $\omega_c$  elevata in modo che la costante di tempo non influenzasse la dinamica del motore stesso. Il risultato che si ottiene sotto tali condizioni, utilizzando come ingresso una funzione gradino con valore finale pari a 50, è mostrato nella figura 2.3.

E' evidente come la frequenza di taglio scelta per il filtro non sia sufficiente ad eliminare le alte frequenze dell'uscita per cui procedendo gradualmente siamo giunti a scegliere una frequenza  $\omega_c = 25 \text{ Hz}$  con la quale l'uscita del

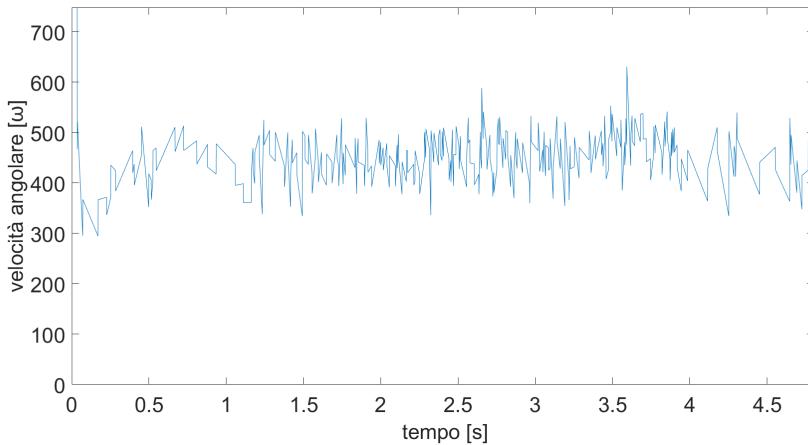


Figura 2.3: Risposta al gradino con  $\omega_c = 100 \text{ Hz}$

sistema diventa accettabile (figura 2.4). Prendendo quindi in esame quest'ul-

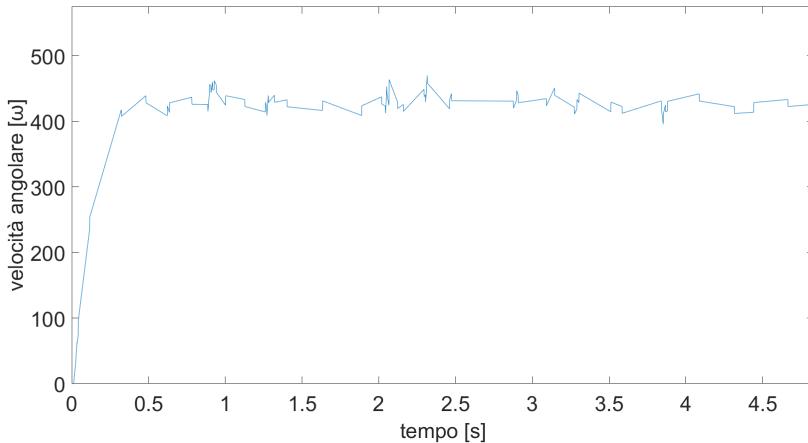


Figura 2.4: Risposta al gradino con  $\omega_c = 25 \text{ Hz}$

timo grafico è evidente che si possa approssimare la funzione di trasferimento del motore come una funzione del 1° ordine la cui ‘forma campione’ è data dalla formula

$$T(s) = \frac{k}{1 + s\tau}$$

Abbiamo quindi stimato una costante di tempo  $\tau$  (tempo che impiega la funzione a raggiungere il 63.2% del valore di regime) del sistema pari a circa  $0.15s$  e guadagno statico  $k$  di 10.4.

La funzione di trasferimento che ne conseguе è dunque:

$$T_{motore}(s) = \frac{10.4}{0.15s + 1}$$

In figura 2.5 un confronto tra  $T_{motore}(s)$  e la funzione di trasferimento reale del motore.

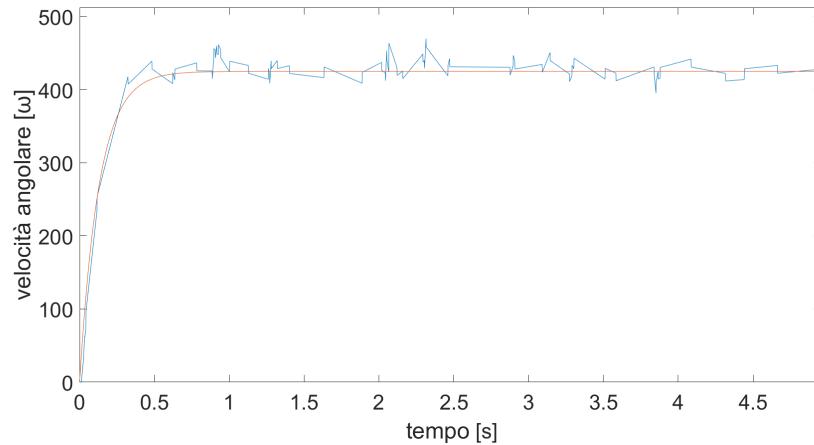


Figura 2.5: Risposta al gradino del Motore reale e del suo modello

## 2.2 Dalla velocità angolare alla coppia

È necessario ora ottenere la coppia generata dal motore in funzione del tempo al fine di utilizzarla come ingresso per la funzione di trasferimento del pendolo che sarà trattata in modo approfondito nel capitolo 3.  
L'equazione fisica utilizzata per calcolare tale coppia è la seguente:

$$\tau = K\omega + I\alpha$$

dove il primo termine indica appunto la coppia, mentre i restanti due sono rispettivamente l'attrito interno al motore e il momento torcente. Più nello specifico  $K$  rappresenta il coefficiente di smorzamento viscoso misurato in  $N \cdot m \cdot s/rad$ ,  $\omega$  la velocità angolare,  $I$  il momento d'inerzia del sistema e  $\alpha$  l'accelerazione angolare.

Calcoliamo innanzi tutto

$$I = 3M_Rd_R^2 + 3M_rd_r^2 + 3I_a + 3I_A + \frac{m_ar^2}{2}$$

nella quale primi due termini indicano i momenti d'inerzia delle sei ruote (assunte come masse puntiformi per semplicità), il terzo e il quarto quelli

delle sei aste che collegano le ruote all'albero, mentre l'ultimo termine rappresenta il momento d'inerzia dell'albero (asta centrale).

Per calcolare l'inerzia delle sei aste utilizziamo il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli:

$$I = I_{cdm} + m_{asta}d^2$$

Dove  $d$  è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_{asta}l^2 + m_{asta}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{asta}l^2$$

Inserendo ora i parametri misurati e riportati nella tabella 2.1, si ricava un momento d'inerzia  $I$  pari a  $0.001364 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ .

Sigla	Valore	U.d.m.	Parametro
$M_R$	0.0395	kg	massa ruota grande
$M_r$	0.023	kg	massa ruota piccola
$m_a$	0.0015	kg	massa asta corta
$m_A$	0.002	kg	massa asta lunga
$l_a$	0.068	m	lunghezza asta corta
$r$	0.002	m	raggio asta
$l_A$	0.091	m	lunghezza asta lunga
$d_r$	0.061	m	distanza ruota piccola - asse di rotazione
$d_R$	0.085	m	distanza ruota grande - asse di rotazione

Tabella 2.1: Parametri del carico dell'albero motore

Essendo  $\tau = K\omega + I\alpha$  possiamo disegnare tramite Simulink il diagramma a blocchi rappresentato in figura 2.6:

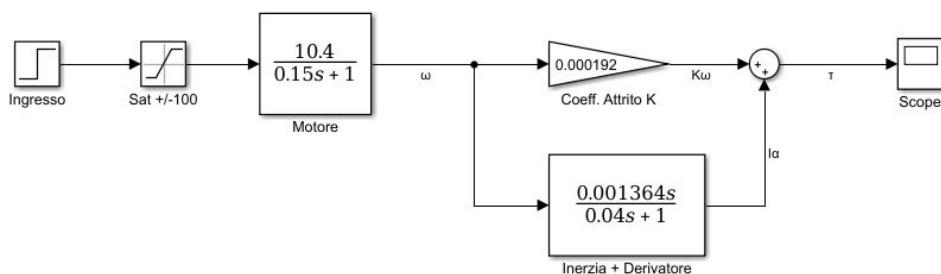


Figura 2.6: Modello completo del Motore

L'uscita del sistema è proprio la coppia  $\tau$  desiderata.

Si può notare come nel blocco inferiore siano stati aggiunti il derivatore e il filtro passa basso. Il primo è necessario dal momento che l'accelerazione angolare  $\alpha$  è proprio la derivata della velocità angolare  $\omega$ . Per quanto riguarda

il filtro, invece, è stato aggiunto (scegliendo appositamente una frequenza di taglio abbastanza alta da non alterare la dinamica del sistema) siccome un derivatore puro sarebbe stato fisicamente irrealizzabile (funzione impratica).

Inoltre si è resa necessaria anche l'aggiunta di un blocco di saturazione dell'ingresso dal momento che, come già reso noto in precedenza, l'EV3 Large Servo Motor accetta valori compresi tra -100 e +100 considerando quelli esterni a tale intervallo coincidenti con gli estremi.

In ultimo il valore di  $K$ , unico parametro incognito rimasto, è stato invece ricavato sperimentalmente avendo nota dalle specifiche LEGO la coppia a regime dell'EV3 Large Servo Motor  $\tau_{reg} = 0.2 N \cdot m$ .

Come mostrato in figura 2.7 un valore di  $K$  pari a  $0.000192 Nm \cdot s/rad$  consente di rispettare appieno tale specifica.

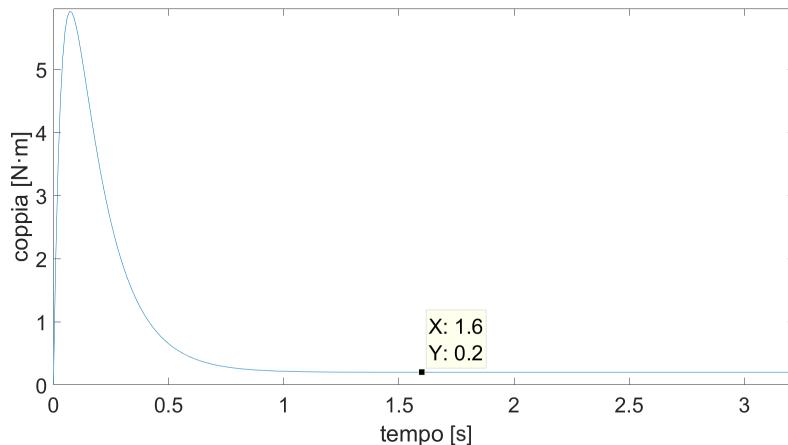


Figura 2.7: Risposta al gradino del modello completo

## Capitolo 3

# Pendolo su carrello

### 3.1 Modello e relative equazioni

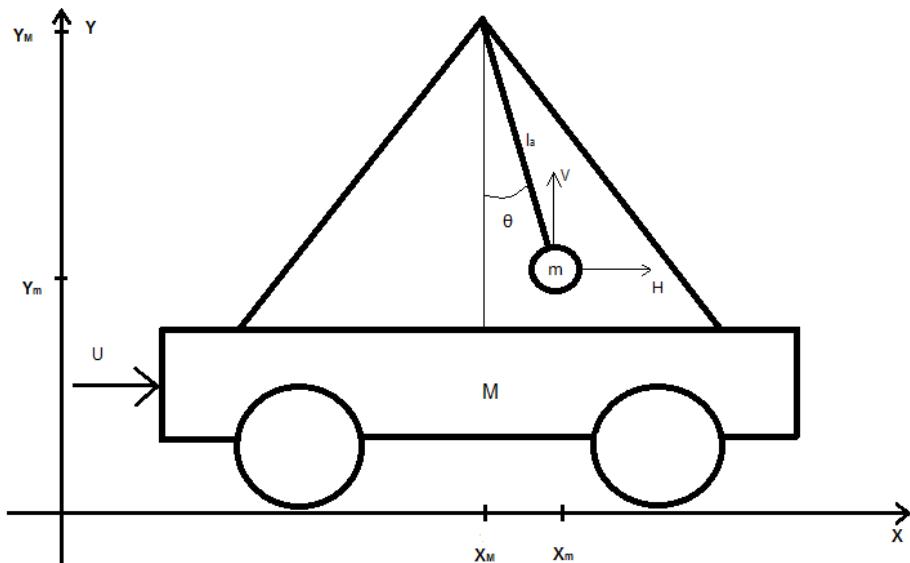


Figura 3.1: Modello del pendolo su carrello

#### Bilanciamento forze sull'asta

Eseguiamo di seguito, sfruttando la Seconda Legge di Newton, il computo delle forze agenti sul pendolo lungo entrambi gli assi cartesiani.

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove  $H$  e  $V$  sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa  $m$  per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo poi:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (3.2)$$

### Bilanciamento forze sul carrello

Richiamando nuovamente la Legge sopracitata si ha:

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

da cui sostituendo la 3.1:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

### Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

In questo caso utilizziamo la versione angolare della solita Legge:

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (3.4)$$

sostituendo la 3.1 e la 3.2:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + \\ &\quad + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) + \\ &\quad - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\ &= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta

$$I_m = \frac{1}{12} m_a l_a^2 + m_a \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_a l_a^2 = 0.000045 kg \cdot m^2$$

molto inferiore (1 ordine di grandezza) rispetto a quello della massa  $m$  attaccata al pendolo,

$$I_m = ml_a^2 = 0.00041 kg \cdot m^2$$

possiamo per semplicità trascurarlo, per cui poniamo  $I_m = 0$ .

Il sistema che deriva dalla 3.3 e dalla 3.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a\ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema

$$\begin{aligned} (M+m)\left(\frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}\right) + ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta} &= u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ \ddot{\theta}(ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)}) &= u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{[u + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)}] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} &\Rightarrow \\ \ddot{\theta} = \frac{u \cos(\theta) + ml_a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} & \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dalla seconda equazione del sistema

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 3.6

$$\begin{aligned} \ddot{x}_M &= \frac{-g \sin(\theta) - \frac{ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} = \\ &= \frac{g \sin(\theta)[-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\ &= \frac{-gm \sin^3(\theta) - gM \sin(\theta) + u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gM \sin(\theta) + gm \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\ &= \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + gm \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M} \end{aligned}$$

Assegniamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\begin{cases} x_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}_M \\ x_3 \stackrel{\Delta}{=} \theta \\ x_4 \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta} \\ y_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\ y_2 \stackrel{\Delta}{=} \theta \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

## 3.2 Linearizzazione del modello

### Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo  $\underline{f}(\underline{x}, u) = \underline{0}$  (dove  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$ ) da cui:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si capisce che punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"), caso da noi trattato ne seguito.

In ultimo siccome il punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello possiamo per semplicità scegliere  $x_1 = 0$ .

### Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio  $\underline{x} = \underline{0}$ ,  $\tilde{u} = 0$  trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))](M + m \sin^2(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3) x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) = \\
& \frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M+m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\
& \left. \frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m+M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \right|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \\
& = -\frac{(M+m)g}{Ml} \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) = \left. \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \right|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\
& \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) = \left. \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \right|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a}
\end{aligned}$$

Le equazioni di stato linearizzate sono dunque:

$$\begin{aligned}
\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\
\underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}
\end{aligned}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento  $T_{y_2, u}$  tra l'ingresso  $u$  (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita  $y_2$  (angolo  $\theta$  del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$\begin{aligned}
T_{y_2, u}(s) &= C(sI - A)^{-1} B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\
&= -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M+m)g}
\end{aligned}$$

in cui il segno meno è coerente col fatto che il semiperiodo iniziale dell'oscillazione del pendolo sia in direzione opposta rispetto al movimento del carrello.

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del LEGO MINDSTORM EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento.

Data la tabella 3.1 si ha:

$$T_{y_2, u}(s) = -\frac{1}{0.125s^2 + 7.541}$$

Sigla	Valore	U.d.m.	Parametro
$M$	0.7535	kg	massa carrello
$m$	0.016	kg	massa all'estremità del pendolo
$g$	9.81	$m/s^2$	accelerazione di gravità
$l_a$	0.166	$m$	lunghezza asta del pendolo
$r$	0.034	$m$	raggio ruote motrici

Tabella 3.1: Parametri del sistema Carrello-Pendolo

### 3.3 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sè è un sistema già stabile, lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo e quindi il transitorio del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici. In figura 3.2 si può vedere la realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large Servo Motor come trazione e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.



Figura 3.2: Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Da specifiche quest'ultimo può raggiungere un tempo di campionamento minimo di 0.001s (così come il motore) al quale valore non si riesce sempre a campionare in modo corretto. Per ovviare, almeno parzialmente, al problema abbiamo deciso di abbassare la frequenza di campionamento, in modo però da non perdere nessuna variazione dell'angolo del pendolo.

Per fare questo abbiamo calcolato la massima velocità raggiunta durante la sua oscillazione libera tra  $[-31^\circ, 31^\circ]$  (intervallo entro il quale il pendolo è vincolato per costruzione).

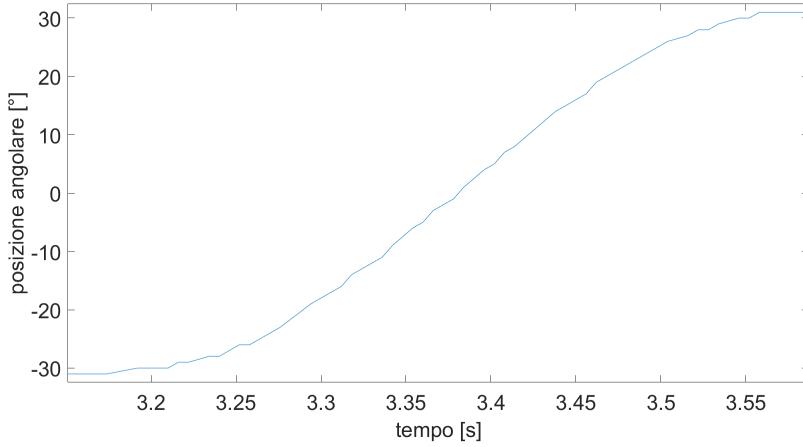


Figura 3.3: Massima velocità di oscillazione libera

Da tale esperimento è risultato che durante la prima oscillazione (in figura 3.3), il pendolo, raggiunge per  $\theta = 0^\circ$  la velocità  $\omega = 250 \text{ deg/s}$  (calcolata con un semplice rapporto incrementale) per cui il tempo di campionamento necessario a non perdere nessuna variazione dell'angolo sarebbe stato  $t_c = \frac{1}{250} = 0.004s$ .

Sfruttando il modello del motore LEGO da noi identificato al capitolo 2 si può quindi ricavare la funzione di trasferimento del sistema complessivo (avente come ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

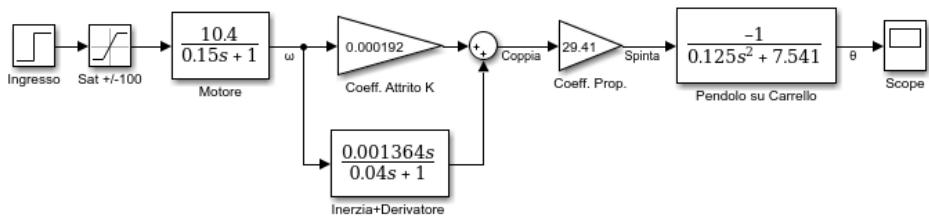


Figura 3.4: Schema a blocchi del sistema complessivo

Siccome in uscita al modello del motore abbiamo la coppia erogata dallo stesso, per poterlo mettere in serie al modello del pendolo su carrello (il quale come ingresso riceve una spinta sotto forma di forza) occorre adattare il collegamento I/O. Poiché si assume un puro moto di rotolamento delle

ruote del carrello si tratta di trovare il giusto coefficiente  $C$  di proporzionalità tra coppia e spinta.

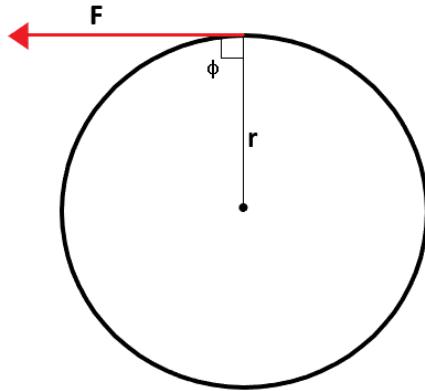


Figura 3.5: Momento della forza applicato alla ruota

La relazione tra queste ultime è data dalla formula fisica del momento della forza

$$\tau = r \times F = (r \sin(\phi))F = r_{\perp}F$$

ove  $r_{\perp}$  rappresenta il braccio della forza  $F$ . Poiché nel nostro caso  $r$  risulta essere il raggio della ruota ed  $F$  la forza tangente alla ruota abbiamo ricavato sostituendo il suo valore dalla tabella 3.1:

$$F = \frac{\tau}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{r} = 29.41$$

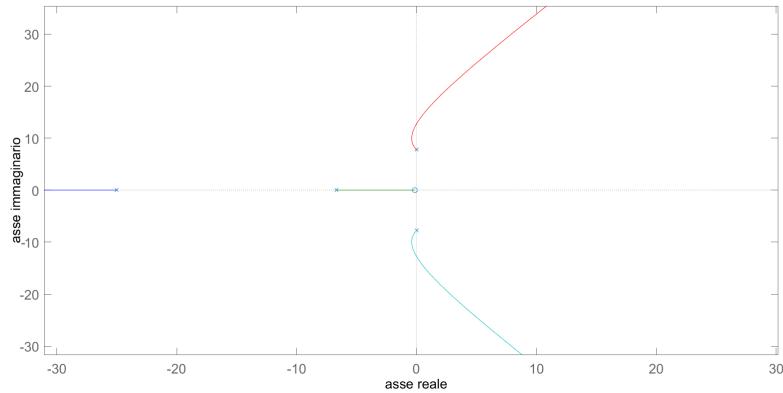
Per realizzare ora una retroazione algebrica sull'uscita che ci permetta di controllarlo in ciclo chiuso, possiamo riassumere in un'unica funzione di Trasferimento il sistema complessivo:

$$T_{y2,u} = -\frac{559.5s + 78.3}{s^4 + 31.67s^3 + 227s^2 + 1910s + 10050}$$

della quale si può calcolare il luogo delle radici per studiarne la stabilità in ciclo chiuso.

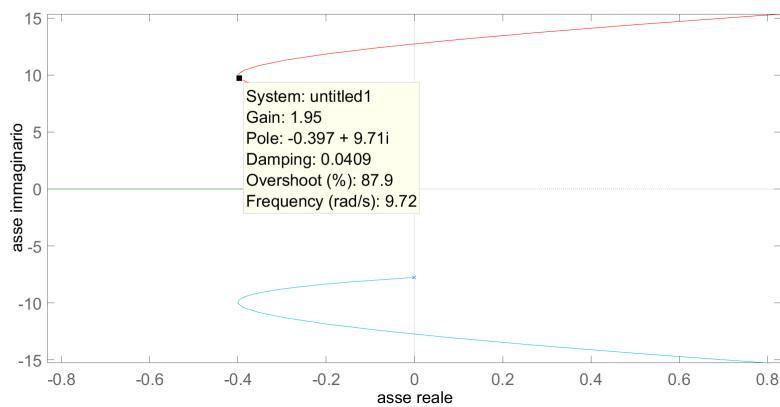
Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibile utilizzare un semplice Regolatore Proporzionale purché il suo guadagno rientri in un intervallo molto limitato ovvero  $P \in (-6, 0)$ .

Attraverso l'utilizzo dello strumento MATLAB chiamato ‘rlocus’, il quale consente di ottenere data una funzione il luogo delle radici, siamo arrivati a definirne il guadagno  $P = -2$  (vedi figura 3.7) come ottimale dato il massimo

Figura 3.6: Luogo delle Radici di  $-T_{y2,u}$ 

rapporto possibile tra parte reale e parte immaginaria dei poli complessi coniugati in ciclo chiuso.

Tale valore è stato in seguito confermato anche con diversi esperimenti i cui risultati sono mostrati in figura 3.10. .

Figura 3.7: Particolare del Luogo delle Radici di  $-T_{y2,u}$ 

Nella realizzazione dello schema a blocchi in Simulink, caricato nel Brick EV3 MINDSTORM per confermare la veridicità dei risultati ottenuti in MATLAB, abbiamo posto un ingresso costante 0 poiché si assume il pendolo inizialmente a riposo nel punto di equilibrio  $\theta = 0^\circ$ .

L'encoder, invece, è settato a 0 tramite un segnale di reset dopo un tempo pari a  $0.001s$  dall'inizializzazione poiché, all'avvio del programma caricato nel Brick, l'encoder considera come angolo  $\theta = 0^\circ$  di riferimento il primo valore misurato.

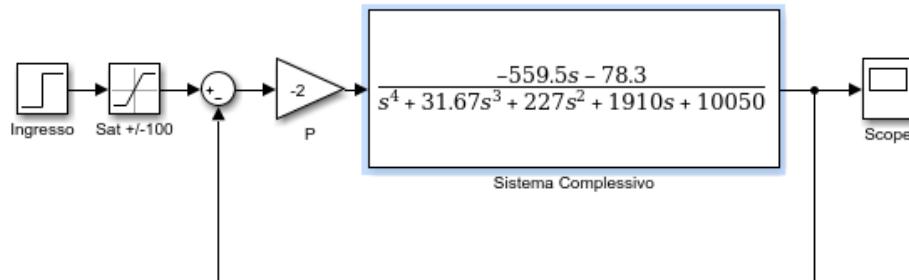


Figura 3.8: Sistema complessivo controllato proporzionalmente

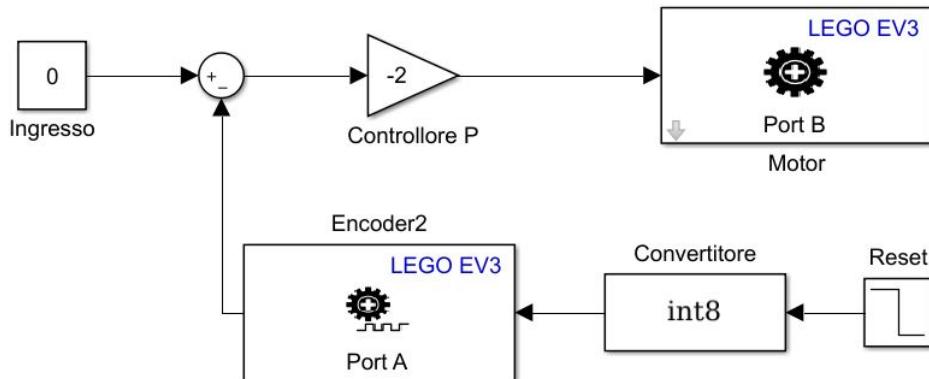


Figura 3.9: Sistema reale controllato proporzionalmente

A conferma della veridicità del luogo delle radici abbiamo provato a controllare il sistema al variare di  $P$  e come mostrato nelle figura 3.10 il sistema risulta effettivamente instabile per valori che si discostano dall'intervallo di stabilità trovato.

Sotto tali presupposti il motore, avendo ingresso nullo, non erogherà potenza fino quando il pendolo non verrà spostato dal suo stato iniziale.

Al variare della posizione angolare, il motore reagisce muovendo il carrello nella stessa direzione per riportare il pendolo nel suo punto di equilibrio.

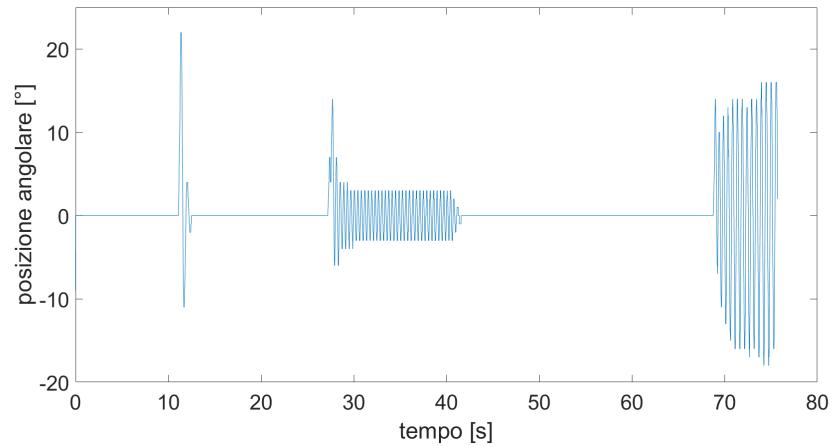


Figura 3.10: Uscita  $\theta$  del sistema per valori di  $P = -2, -6, -8$

Come si può vedere nel grafico in figura 3.11 posizionando il pendolo ad un'angolazione di  $\theta = 31^\circ$  e lasciandolo quindi libero di oscillare, in ciclo

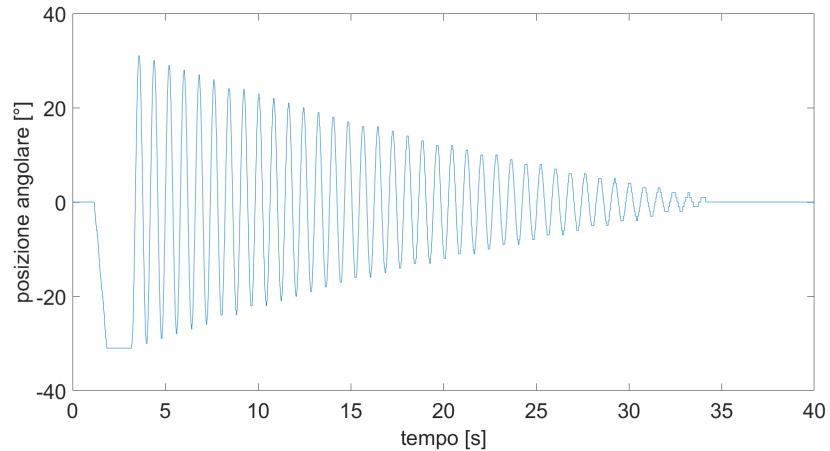


Figura 3.11: Sistema in ciclo aperto

aperto (ovvero senza controllo sul motore), si raggiunge il punto di stabilità  $\theta = 0^\circ$  in poco più di 30 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.4 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

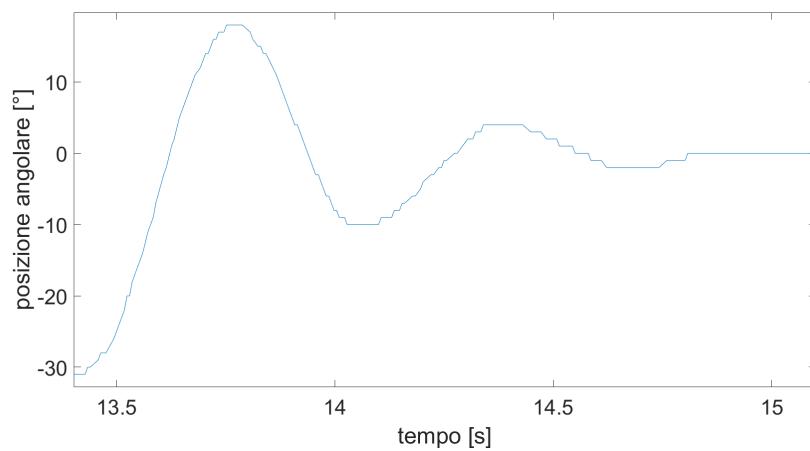


Figura 3.12: Sistema in ciclo chiuso con Regolatore P



# Capitolo 4

## Conclusioni

Nonostante alcuni limiti legati alla piattaforma LEGO MINDSTORM EV3, i quali hanno in parte complicato il raggiungimento degli obiettivi prestabiliti, è stato comunque possibile ottenere risultati soddisfacenti in linea con quanto prefissato.

In fase di progettazione numerose sono state le problematiche relative in particolar modo all'identificazione del modello del motore dovute tanto all'esigua esperienza quanto anche all'utilizzo di strumenti di misura destinati ad un utilizzo prettamente ludico e perciò non professionali.

Ciò nonostante il dispositivo costruito è in grado di stabilizzare il pendolo su di esso installato in un tempo pari a  $1.4\text{ s}$ : dato apprezzabile se si pensa che in assenza di controllo sul motore il tempo richiesto per raggiungere il punto di equilibrio è circa  $30\text{ s}$ : valore pressappoco venti volte superiore.

Inoltre il sistema reale rispetta piuttosto fedelmente i vincoli di guadagno calcolati utilizzando il criterio del luogo delle radici, chiaro indice del fatto che le approssimazioni eseguite e i limiti del LEGO MINDSTORM EV3 soprattutti potrebbero non aver inficiato più di tanto sul risultato finale.

Numerosi sono poi i miglioramenti che si sarebbero potuti apportare, ma che la mancanza di tempo non ci ha permesso di approfondire nel dettaglio. Tra questi citiamo il confronto tra modello linearizzato e non per verificare se effettivamente il primo introduce un errore non trascurabile, oppure lo stesso esperimento, ma con l'utilizzo del pendolo inverso e, dunque, con punto di equilibrio instabile. In ultimo il controllo dell'angolo del pendolo unito a quello della posizione del carrello utilizzando per esempio un osservatore di Luenberger.

Il lavoro svolto, seppur migliorabile, è stato ad ogni modo soddisfacente e didattico; ci auguriamo dunque di aver procurato una buona base per eventuali sviluppi futuri.



# Bibliografia

- [1] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fondamenti di Fisica*. Casa Editrice Ambrosiana. Distribuzione esclusiva Zanichelli, 2015.
- [2] Ashley C. Mitchell: Modeling and Control of a Motor System using the LEGO EV3 robot,  
[https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc804943/m2/1/high\\_res\\_d/thesis.pdf](https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc804943/m2/1/high_res_d/thesis.pdf)
- [3] LEGO System: Specs of Large Servo Motor,  
<https://shop.lego.com/en-CA/EV3-Large-Servo-Motor-45502>
- [4] Muindi Dennis Mutheke D.: Digital Control of a line following robot,  
<http://eie.uonbi.ac.ke/sites/default/files/cae/engineering/eie/DIGITAL%20CONTROL%20OF%20A%20LINE%20FOLLOWING%20ROBOT.pdf>
- [5] Alessio Antenucci: Realizzazione e Controllo di un pendolo inverso con carrello,  
<http://control.disp.uniroma2.it/carnevale/archivio/Tesi/antenuccialessio/tesi.pdf>
- [6] Bos P. van den and Valk L. (4095154): Integration Project: Balancing Robot  
[http://laurensvalk.com/files/Bos\\_Valk\\_SC4050\\_Balancing\\_Robot.pdf](http://laurensvalk.com/files/Bos_Valk_SC4050_Balancing_Robot.pdf)