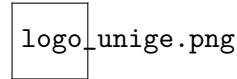


PROGETTO “MODEL-BASED” DEL CONTROLLO DI ROBOT LEGO IN AMBIENTE SIMULINK



Francesco Tornatore Luca Lazzaroni

DITEN - Dipartimento di Ingegneria Navale, Elettrica,
Elettronica e delle Telecomunicazioni

Università degli Studi di Genova

Tesi di Laurea Triennale

27 Ottobre 2017

...DEDICA...

Sommario

... versione del sommario in italiano ...

Indice

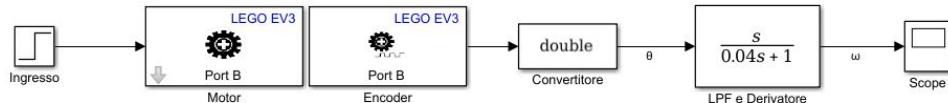
1 Pendolo su carrello	1
1.1 Modello del motore	1
1.2 Dalla velocità angolare alla coppia	4
2 Pendolo su carrello	7
2.1 Modello e relative Equazioni	7
2.2 Linearizzazione del modello	10
2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'asta(Forse da Togliere)	12
2.4 Stabilizzazione del pendolo	14
2.5 Controllo della posizione del carrello	17
3 Pendolo inverso su carrello(forse da togliere)	19
3.1 Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio . .	19

Elenco delle figure

Capitolo 1

Pendolo su carrello

1.1 Modello del motore



Il LEGO MINDSTORM EV3 è dotato di un motore, l'EV3 Large Servo Motor, la cui velocità angolare, misurata in *rad/s*, è stata assunta come uscita del sistema.

I valori di ingresso possibili sono invece compresi tra -100 e +100, dove +100 indica la massima potenza erogabile, mentre -100 idem, ma con verso di rotazione opposto.

Al fine di modellare nel modo più preciso possibile abbiamo applicato a tale motore un albero dotato di pesi posti a una certa distanza da quest'ultimo in modo tale da incrementare il momento d'inerzia I e, di conseguenza, diminuire l'accelerazione angolare massima α in accordo con la seconda legge di Newton (in forma angolare) $\tau = I\alpha$, dove τ è il momento della forza o, più semplicemente, la coppia massima erogata: valore caratteristico del motore.

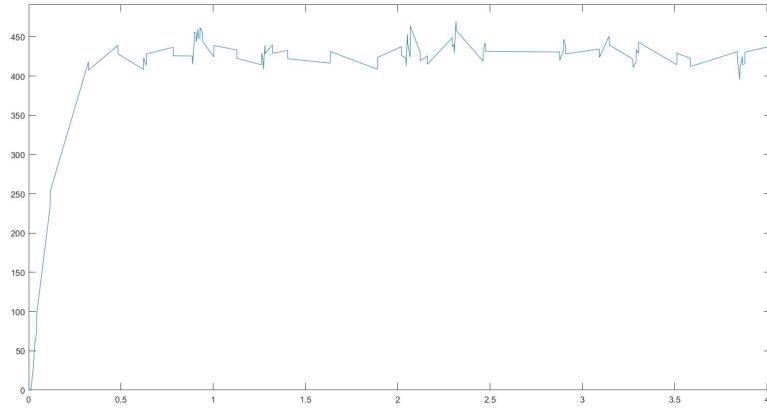


In questo modo il tempo di assestamento t_a del sistema, direttamente proporzionale a α , è sensibilmente più lungo ed è dunque più semplice trovare una funzione di trasferimento assimilabile a quella dell'EV3 Large Servo Motor.

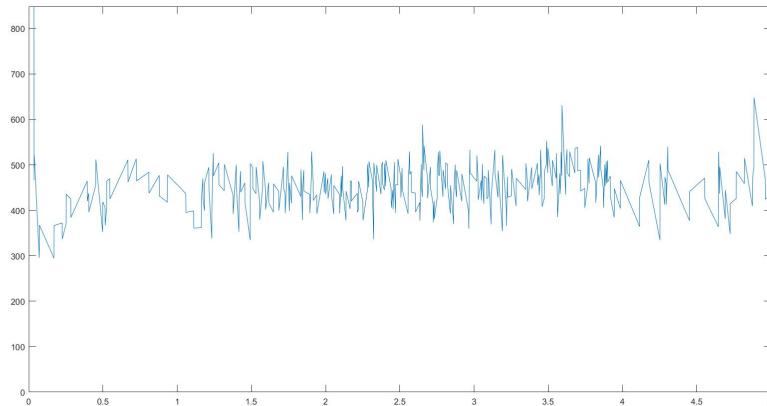
L'encoder presente all'interno del motore è poi in grado di misurare, in *rad*, la rotazione dello stesso. Di conseguenza, al fine di ottenere la velocità angolare ω è stato applicato in cascata un derivatore, ma anche un filtro passa basso con frequenza di taglio $\omega_c = 25 \text{ Hz}$, necessario per attenuare le alte frequenze del sistema, al fine di ottenere una funzione in uscita meno spezzata possibile e, di conseguenza, più facilmente identificabile.

Al fine di ridurre il più possibile l'errore è stato scelto come tempo di campionamento dell'encoder il valore minimo supportato: 0.001 s.

Il risultato che si ottiene utilizzando come ingresso una funzione gradino con valore finale pari a 50 è mostrato nella figura seguente:



Scegliendo invece una frequenza di taglio del filtro passa basso $\omega_c = 100Hz$ l'uscita del sistema diventa:



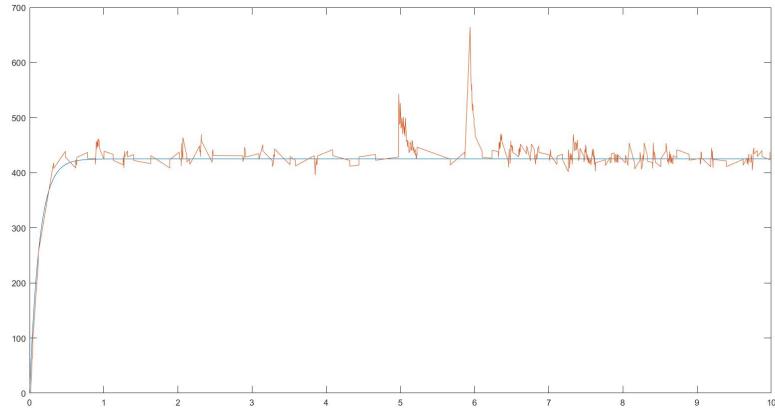
Si può notare come la frequenza di taglio sia troppo elevata non attenuando abbastanza le alte frequenze e rendendo così impossibile una stima della funzione di trasferimento.

Prendendo quindi in esame il primo dei due grafici si può stimare una costante di tempo τ (tempo che impiega la funzione a raggiungere il 63% del valore di regime) del sistema pari a circa $0.15 s$ e guadagno statico 10.4 .

La funzione di trasferimento che ne consegue è dunque:

$$T_{motore}(s) = \frac{10.4}{0.15s + 1}$$

Di seguito un confronto tra $T_{motore}(s)$ e la funzione di trasferimento reale del motore.



1.2 Dalla velocità angolare alla coppia

È necessario ora ottenere la coppia generata dal motore in funzione del tempo al fine di utilizzarla come ingresso per la funzione di trasferimento del pendolo che sarà trattata in modo approfondito nel prossimo capitolo. La formula utilizzata per calcolare tale coppia è la seguente:

$$\tau = K\omega + I\alpha$$

Dove il primo termine dell'equazione indica appunto la coppia, mentre i restanti due sono rispettivamente lo smorzamento viscoso e il momento torcente. Più nello specifico K rappresenta il coefficiente di smorzamento viscoso misurato in $Nm s/rad$, ω la velocità angolare, I il momento d'inerzia del sistema e α l'accelerazione angolare.

Calcoliamo innanzi tutto I :

$$I = 3M_R d_R^2 + 3M_r d_r^2 + 3I_a + 3I_A + \frac{m_a r^2}{2}$$

Il primi due termini indicano i momenti d'inerzia delle sei ruote (assunte come masse uniformi per semplicità), il terzo e il quarto quelli delle sei aste che collegano le ruote all'albero, mentre l'ultimo termine rappresenta il momento d'inerzia dell'albero (asta centrale).

Per calcolare I delle sei aste utilizziamo il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli:

$$I = I_{cdm} + m_{asta}d^2$$

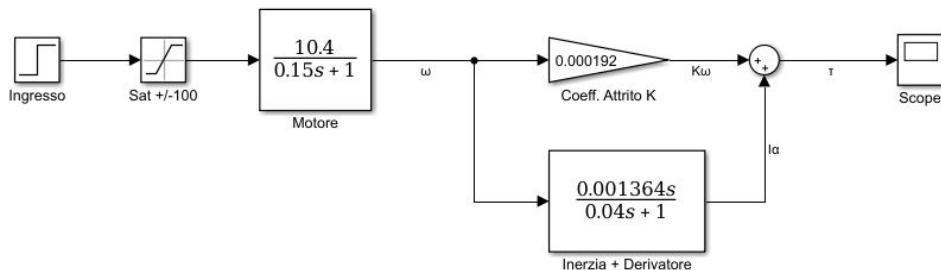
Dove d è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_{asta}l^2 + m_{asta}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{asta}l^2$$

Inserendo ora i parametri calcolati sperimentalmente e riportati nella seguente tabella, si ricava un momento d'inerzia I pari a 0.001364 Kg m^2 .

Parametro	Valore	Unità di misura
M_R	0.0395	kg
M_r	0.023	kg
m_a	0.0015	kg
m_A	0.002	kg
l_a	0.068	m
r	0.002	m
l_A	0.091	m
d_r	0.061	m
d_R	0.085	m

Essendo $\tau = K\omega + I\alpha$ possiamo disegnare tramite Simulink il seguente diagramma a blocchi:



L'uscita del sistema è proprio la coppia τ desiderata.

Si può notare come nel blocco inferiore siano stati aggiunti il derivatore e il filtro passa basso.

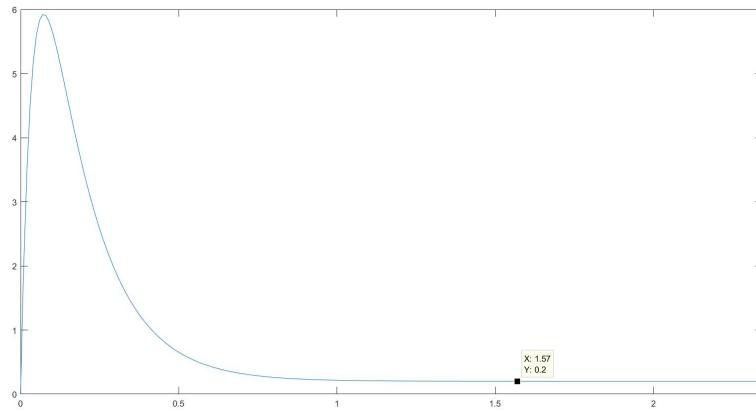
Il primo è necessario dal momento che l'accelerazione angolare α è proprio la derivata della velocità angolare ω .

Per quanto riguarda il filtro, invece, è stato aggiunto (scegliendo appositamente una frequenza di taglio abbastanza alta da non alterare la dinamica del sistema) siccome un derivatore puro è fisicamente irrealizzabile (funzione impropria).

Inoltre si è resa necessaria anche l'aggiunta di un blocco di saturazione dell'ingresso dal momento che, come già reso noto in precedenza, l'EV3 Large Servo Motor accetta valori compresi tra -100 e +100.

In ultimo il valore di K è stato invece ricavato sperimentalmente avendo nota la coppia a regime, caratteristica dell'EV3 Large Servo Motor e pari a 0.2 Nm .

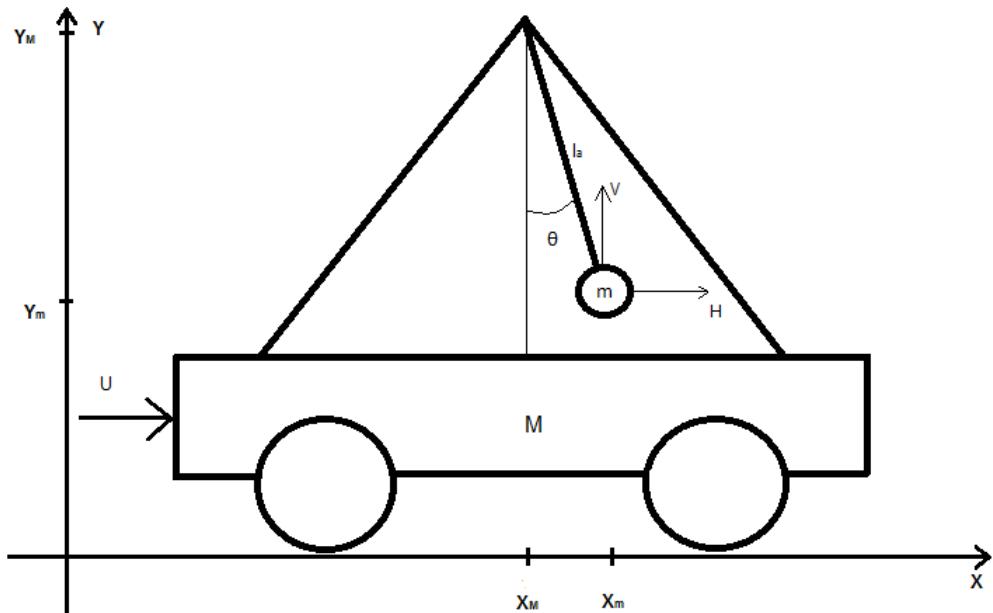
Come si può notare nella seguente figura un valore di K pari a 0.000192 $Nm s/rad$ permette di rispettare appieno tale specifica.



Capitolo 2

Pendolo su carrello

2.1 Modello e relative Equazioni



Modello del pendolo su carrello

Bilanciamento forze sull'asta

Asse X:

$$m\ddot{x}_m = H$$

Asse Y:

$$m\ddot{y}_m = V - mg$$

Dove H e V sono le reazioni vincolari (orizzontale e verticale) a cui è sottoposta la massa m per il fatto di essere bloccata all'estremità dell'asta.

Essendo:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M + l_a \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M - l_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ y_m &= y_M - l_a \cos(\theta) \Rightarrow \ddot{y}_m = l_a \sin(\theta) \ddot{\theta} + l_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$H = m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.1)$$

$$V = mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.2)$$

Bilanciamento forze sul carrello

$$M\ddot{x}_M = u - H$$

sostituendo la 2.1 si ha:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M &= u - m\ddot{x}_M + ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} \\ (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bilanciamento momenti del sistema asta-massa

$$I_m \ddot{\theta} = l_a V \sin(\theta) + l_a H \cos(\theta) \quad (2.4)$$

sostituendo la 2.1 e la 2.2:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\theta} &= l_a \sin(\theta) [mg + ml_a \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \sin(\theta) \ddot{\theta}] + \\ &\quad + l_a \cos(\theta) [m\ddot{x}_M - ml_a \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}] = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) + \\ &\quad - ml_a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + ml_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta} = \\ &= mgl_a \sin(\theta) + ml_a^2 \ddot{\theta} + ml_a \ddot{x}_M \cos(\theta) = \\ &= ml_a (g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta molto inferiore rispetto a quello della massa m attacca al pendolo, possiamo per semplicità trascurarlo, per cui poniamo $I_m = 0$. Vedremo poi nel paragrafo 2.3 che i risultati senza approssimazione saranno praticamente gli stessi.

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema

$$(M+m) \left(\frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)} \right) + ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(ml_a \cos(\theta) - \frac{l_a(M+m)}{\cos(\theta)}) &= u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)} \\
\ddot{\theta} &= \frac{[u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \frac{g \sin(\theta)(M+m)}{\cos(\theta)}] \cos(\theta)}{ml_a \cos^2(\theta) - l_a(M+m)} \Rightarrow \\
\ddot{\theta} &= \frac{u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + g \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema

$$\ddot{x}_M = \frac{-g \sin(\theta) - l_a \ddot{\theta}}{\cos(\theta)}$$

e sostituendo ora la 2.6

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_M &= \frac{-g \sin(\theta) - \frac{ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{-l_a(m \sin^2(\theta) + M)}}{\cos(\theta)} = \\
&= \frac{g \sin(\theta)[-l_a(m \sin^2(\theta) + M)] + ul_a \cos(\theta) + ml_a^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gl_a \sin(\theta)(M+m)}{l_a \cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} = \\
&= \frac{-gm \sin^3(\theta) - gM \sin(\theta) + u \cos(\theta) + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + gM \sin(\theta) + gm \sin(\theta)}{\cos(\theta)(m \sin^2(\theta) + M)} \\
&= \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + gm \cos(\theta) \sin(\theta)}{m \sin^2(\theta) + M}
\end{aligned}$$

Assegnamo le variabili di stato e definiamo le uscite desiderate:

$$\left\{
\begin{array}{l}
x_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\
x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}_M \\
x_3 \stackrel{\Delta}{=} \theta \\
x_4 \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta} \\
y_1 \stackrel{\Delta}{=} x_M \\
y_2 \stackrel{\Delta}{=} \theta
\end{array}
\right.$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni appena ricavate si ottengono le equazioni:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} \\ x_4 \\ -\frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \end{bmatrix}$$

2.2 Linearizzazione del modello

Punti di equilibrio del sistema

Per la ricerca dei punti di equilibrio poniamo $\underline{f}(\underline{x}, u) = 0$ (dove $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$):

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + gm \cos(x_3) \sin(x_3)}{m \sin^2(x_3) + M} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{u \cos(x_3) + ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + g(M+m) \sin(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} = 0 \end{cases}$$

Dal precedente sistema si capisce che punti di equilibrio del pendolo su carrello sono due, uno instabile per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\pi \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

ovvero quando il pendolo è rivolto verso l'alto (pendolo inverso), l'altro, stabile, per

$$\begin{cases} x_1 = \forall \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

quando il pendolo è rivolto verso il basso (pendolo "normale"). Siccome il

punto di equilibrio non dipende dalla posizione del carrello possiamo per semplicità scegliere $x_1 = 0$.

Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio $\underline{x} = \underline{0}$, $\tilde{u} = 0$ trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[ml_a x_4^2 \cos(x_3) + mg(\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3))](M + m \sin^2(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \\ &\quad - \left. \frac{[u + ml_a x_4^2 \sin(x_3) + mg \sin(x_3) \cos(x_3)](2 \sin(x_3) \cos(x_3))}{(M + m \sin^2(x_3))^2} \right|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{mg}{M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{2ml_a \sin(x_3) x_4}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{1}{M + m \sin^2(x_3)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, u) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}, u) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}, u) &= 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}, u) &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}, u) &= \frac{[u \sin(x_3) - ml_a x_4^2 (\cos^2(x_3) - \sin^2(x_3)) - g \cos(x_3)(M + m)][l_a(m \sin^2(x_3) + M)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} + \\ &\quad - \left. \frac{[-u \cos(x_3) - ml_a x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3) - g \sin(x_3)(m + M)][2ml_a \sin(x_3) \cos(x_3)]}{l_a^2(m \sin^2(x_3) + M)^2} \right|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \\ &= -\frac{(M + m)g}{Ml} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}, u) &= \frac{-2ml_a x_4 \sin(x_3) \cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}, u) &= \frac{-\cos(x_3)}{l_a(m \sin^2(x_3) + M)} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = -\frac{1}{ml_a} \end{aligned}$$

Le equazioni linearizzate sono dunque:

$$\underline{\delta \dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M + m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

Calcolando ora la funzione di trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_2 (angolo θ del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

$$T_{y_2,u}(s) = C(sI - A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 + \frac{(M+m)g}{Ml_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ = -\frac{1}{Ml_a s^2 + (M+m)g}$$

Inserendo ora i parametri del modello fisico del pendolo su carrello realizzato con l'ausilio del Lego MINDSTORM EV3 si può procedere all'identificazione della funzione di trasferimento

Parametro	Valore	Unità di misura
M	0.7535	kg
m	0.015	kg
g	9.81	m/s^2
l_a	0.166	m

Data la precedente tabella si ha:

$$T_{y_2,u}(s) = -\frac{1}{0.125s^2 + 7.539}$$

2.3 Modello senza trascurare l'inerzia dell'asta(Forse da Togliere)

Il sistema che deriva dalla 2.3 e dalla 2.5 senza trascurare l'inerzia dell'asta I_m è dunque il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + ml_a \cos(\theta)\ddot{\theta} = u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ I_m \ddot{\theta} = ml_a(g \sin(\theta) + l_a \ddot{\theta} + \ddot{x}_M \cos(\theta)) \end{cases}$$

Assegno le variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x_M \\ x_2 = \dot{x}_M \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Dalla 2.3 si ottiene:

$$\ddot{x}_M = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}}{M + m}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)I_m \dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)}$$

Le derivate prime delle variabili di stato del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u + ml_a \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - ml_a \cos(\theta) \ddot{\theta}}{M + m} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_M \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)I_m \dot{\theta} - g \sin(\theta)ml_a(M + m) - \cos(\theta)ml_a u - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 m^2 l_a^2 + m^2 l_a^2 \cos^2(\theta) \ddot{\theta}}{ml_a^2(m + M)} \end{cases}$$

Punti di equilibrio del sistema

Vogliamo ora linearizzare le precedenti equazioni di stato attorno al punto di equilibrio $\underline{x} = \underline{0}$, $u = 0$ trovato:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{ml_a x_4^2 \cos(x_3) + ml_a \sin(x_3) \dot{x}_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{2ml_a x_4 \sin(x_3) - ml_a \cos(x_3) \ddot{x}_4}{M + m}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\underline{x}) = \frac{(ml_a)[-g \cos(x_3)(M + m) + \sin(x_3)u - 2 \cos(x_3) \sin(x_3) \dot{x}_4 ml_a]}{ml_a^2(M + m)} +$$

$$+ \frac{(ml_a)(\sin^2(x_3) - \cos^2(x_3))x_4^2 ml_a}{ml_a^2(M + m)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\underline{x}) = \frac{(M+m)I_m - 2\cos(x_3)\sin(x_3)x_4m^2l_a^2 + m^2l_a^2\cos^2(x_3)\ddot{x}_4}{ml_a(M+m)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{1}{M+m} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}(\underline{x}) = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial u}(\underline{x}) = \frac{-\cos(x_3)}{l_a(M+m)}$$

Sostituendo quindi nelle precedenti equazioni il punto di equilibrio si ottiene:

$$\underline{\delta\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{l_a} & \frac{I_m}{ml_a^2} \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \underline{\delta u}$$

$$\underline{\delta y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}$$

Calcolando ora la funzione di Trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso u (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_2 (angolo θ del pendolo rispetto alla verticale) si ottiene:

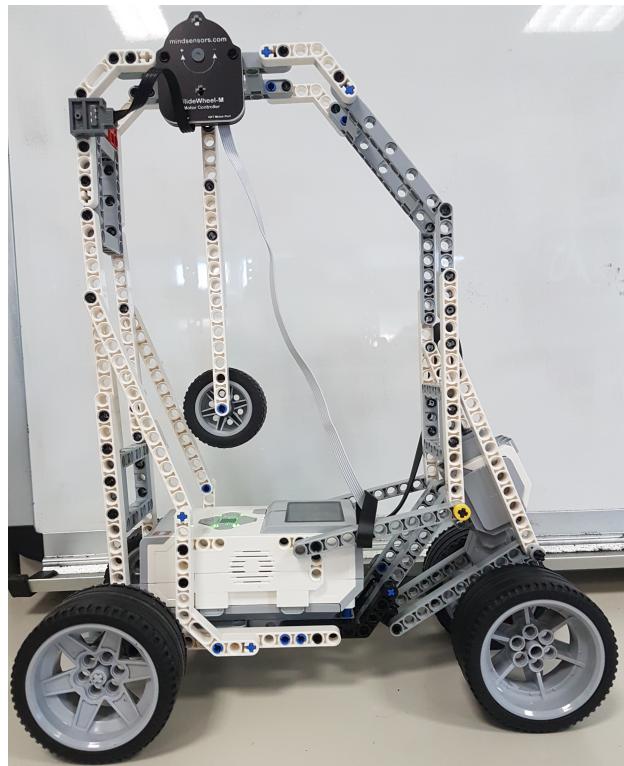
$$T_{y_2,u}(s) = C(sI-A)^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{l_a(M+m)(s^2 - \frac{I_m}{ml_a^2}s + \frac{g}{l_a})}$$

2.4 Stabilizzazione del pendolo

Il pendolo di per sè è un sistema già stabile, lo scopo della realizzazione su carrello consiste nello smorzarne l'oscillazione riducendo la costante di tempo del sistema grazie all'impiego di due ruote motrici.

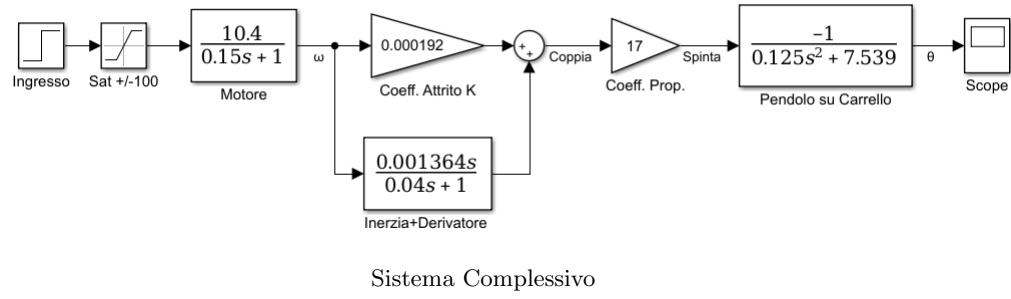
Di seguito la realizzazione del pendolo su carrello utilizzando un motore EV3 Large Servo Motor come trazione e un encoder GlideWheel-M per misurare l'angolo del pendolo rispetto alla verticale.



Realizzazione fisica del pendolo su carrello

Sfruttando il modello del motore LEGO da noi ricavato si può quindi ricavare la funzione di Trasferimento del sistema complessivo (avente come ingresso la potenza richiesta al motore e come uscita la posizione angolare del pendolo).

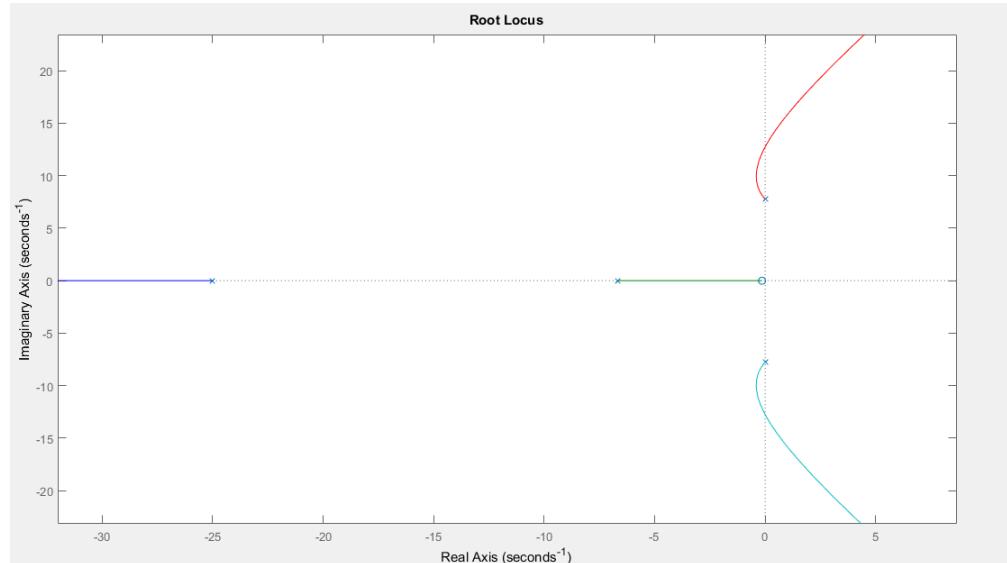
Siccome in uscita al modello del motore abbiamo la coppia erogata dallo stesso, per poterlo mettere in serie al modello del pendolo su carrello (il quale come ingresso riceve una spinta sotto forma di forza) occorre adattare il collegamento I/O. Poichè si assume un puro moto di rotolamento delle ruote del carrello si tratta di trovare il giusto coefficiente di proporzionalità tra coppia e spinta. Abbiamo verificato sperimentalmente con la sovrapposizione dei grafici simulati e reali del sistema complessivo che tale coefficiente risulta essere all'incirca 17.



Per realizzare ora una retroazione algebrica sull'uscita che ci permetta di controllarlo in ciclo chiuso, possiamo riassumere in un'unica funzione di Trasferimento il sistema complessivo:

$$T_{y_2,u} = -\frac{323.4s + 45.26}{s^4 + 31.67s^3 + 227s^2 + 1910s + 10050}$$

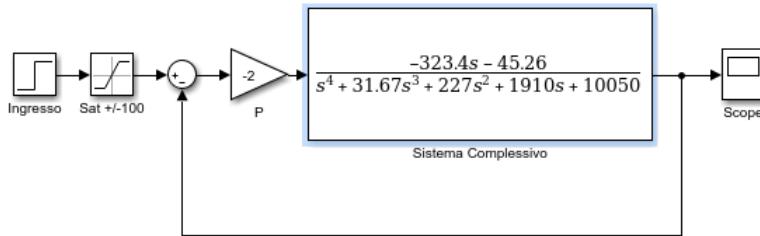
della quale si può calcolare il luogo delle radici per studiarne la stabilità in ciclo chiuso.



Luogo delle Radici di $-T_{y_2,u}$

Come si evince dal luogo delle radici del sistema, è possibile utilizzare un semplice Regolatore Proporzionale purchè il suo guadagno rientri in un intervallo molto limitato ovvero $P \in (-10, 0)$.

Attraverso l'utilizzo di uno strumento MATLAB quale ‘sisotool’ e grazie ad un’analisi sperimentale siamo arrivati a definirne il guadagno $P = -2$.



Sistema Retroazionato algebricamente

Il Regolatore proporzionale permette di ridurre ampiamente il periodo di oscillazione del pendolo.

Abbiamo quindi sperimentato e osservato il comportamento del sistema cercando di quantificare il miglioramento ottenuto. Come si può vedere nel seguente grafico posizionando il pendolo ad un'angolazione iniziale di $\theta = 30^\circ$, in ciclo aperto(ovvero senza controllo sul motore) si raggiunge il punto di stabilità $\theta = 0^\circ$ in poco più di 25 secondi, mentre risulta un tempo di appena 1.15 secondi per quanto riguarda il sistema in ciclo chiuso.

GRAFICI DI OSCILLAZIONE PENDOLO IN OL E CL

Un Regolatore migliore potrebbe essere un PID(Proporzionale Integrativo Derivativo) che permette grazie all'aggiunta di uno zero ($\in \Re$), e quindi necessariamente almeno un polo ($\in \Re$) di avere un maggiore margine di stabilità.

PARTE IN FASE DI SVILUPPO

2.5 Controllo della posizione del carrello

Fino ad ora abbiamo trascurato la seconda uscita di nostro interesse, ovvero la posizione del carrello x_M . Perciò vogliamo provare a controllare quest'ultima in modo da decidere non solo il tempo di assestamento del pendolo ma allo stesso tempo anche la posizione del carrello dove il sistema dovrà assestarsi.

A tal proposito riprendiamo le equazioni ricavate al paragrafo 2.2.

Dalle seguenti equazioni di stato linearizzate attorno al punto di equilibrio $x = 0, u = 0$

$$\begin{aligned}\underline{\delta \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml_a} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

si può ricavare la funzione di trasferimento $T_{y_1,u}(s)$ tra l'ingresso u (forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e l'uscita y_1 (posizione x_M del carrello):

$$\begin{aligned}T_{y_1,u}(s) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & \frac{1}{s^2} & * & \frac{mg}{s^2(Ms^2 + \frac{(m+M)g}{l_a})} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml_a} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2 + \frac{g}{l_a}}{s^2(Ms^2 + \frac{(M+m)g}{l_a})}\end{aligned}$$

Sostituendo i parametri del modello si ha:

$$T_{y_1,u}(s) = \frac{1.327s^2 + 78.42}{s^2(s^2 + 60.27)}$$

Capitolo 3

Pendolo inverso su carrello(forse da togliere)

3.1 Linearizzazione del modello attorno al punto di equilibrio

Utilizzando le equazioni ricavate al paragrafo 2.2 e linearizzandole attorno al punto di equilibrio instabile si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\underline{\delta\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \underline{\delta u} \\ \underline{\delta y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\delta x}\end{aligned}$$

La funzione di Trasferimento tra ingresso u (Forza esercitata sul carrello, avanti/indietro) e uscita y_2 (angolo del pendolo rispetto alla verticale)

$$T_{y_2,u}(s) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & \frac{1}{s^2 - \frac{(M+m)g}{lM}} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} = \frac{-1}{lMs^2 - (M+m)g}$$