

# Esercizi svolti di Fisica Generale II

Dalle lezioni di Giuseppe Dalba

A.V.

24 settembre 2013

**Problema 1.** Preso un filo sottile carico, di lunghezza  $2a$  e distribuzione lineare di carica  $\lambda =$  costante, determinare:

1.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$  in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse del filo.
2. Sempre in un generico punto sull'asse, trovare  $\mathbf{E}$  nel limite in cui  $a \rightarrow \infty$ .

SOLUZIONE:

1. Da considerazioni di simmetria (vedi Figura 1), vale che  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$ , dove  $\mathbf{E}_x$  indica la componente del campo  $\mathbf{E}$  nella direzione  $x$ . Ora,

$$E_x = k_e \int_l \frac{\lambda dl (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Poiché  $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}' = (0, y', 0)$  e  $dl \equiv dy'$ , si ottiene che

$$E_x = k_e \int_{-a}^a \frac{\lambda dy' x}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-a}^a \frac{dy'}{[x^2 + y'^2]^{3/2}}$$

Usando la semplificazione  $y' = x \tan \vartheta$ ,  $dy' = \frac{x}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} E_x &= k_e \lambda x \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \frac{\cancel{x} d\vartheta}{\cancel{\cos^2 \vartheta}} \frac{\cos^{\cancel{2}} \vartheta}{x^{\cancel{1}}} \\ &= \frac{k_e \lambda}{x} \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= \boxed{\frac{2k_e \lambda}{x} \sin(\arctan(a/x))} \end{aligned}$$

2. Per  $a \rightarrow \infty$ ,  $\arctan(a/x) \rightarrow \pi/2$ . Quindi,

$$E \rightarrow \frac{2k_e \lambda}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2k_e \lambda}{x} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}}$$

Notiamo che il campo ha lo stesso andamento riscontrato nel caso di cariche puntiformi! Inoltre, per ragioni di natura pratica, conviene equivalentemente studiare  $x \ll a$  invece che  $a \rightarrow \infty$ .



Figura 1: Filo sottile carico

■

**Problema 2.** Presa una spira sottile carica, di raggio  $R$  e distribuzione lineare di carica  $\lambda =$  costante, determinare:

1.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$  in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse della spira.
2.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$  come nel caso precedente, ma considerando i limiti  $x \ll R$  e  $x \gg R$ .
3.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$  in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse di un disco avente lo stesso raggio e densità di carica superficiale  $\sigma =$  costante.
4.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$  come nel caso precedente, ma considerando il limite  $R \rightarrow \infty$  (piano infinito).

SOLUZIONE:

1. La soluzione è identica al problema del filo sottile carico: chiamando  $x$  l'asse della spira,  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$ . Considerando che  $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$  e  $\mathbf{r}' = (0, y', z')$ , il calcolo diventa:

$$\begin{aligned}
 E_x &= k_e \lambda \int_l \frac{dl(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{k_e \lambda x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_l dl \\
 &= \frac{k_e \lambda x l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \boxed{\frac{k_e \lambda x 2\pi R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

2. Se  $x \ll 1$ ,  $E \rightarrow 0$ . Se  $x \gg R$ , abbiamo invece

$$E \sim \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 x^2}$$

Se  $Q$  è la carica del filo,  $Q = \lambda 2\pi R$ , quindi

$$E \sim \boxed{\frac{k_e Q}{x^2}}$$

Il risultato ci dice che, da lontano, la spira è assimilabile ad una carica puntiforme!

3. Per calcolare il campo generato da un disco, conviene prima calcolare il campo  $dE_x$  generato da un anello sottile, di spessore infinitesimo  $dr'$ . La superficie infinitesima dell'anello sarà dunque  $dS = dr' dl$ <sup>1</sup>. Abbiamo:

$$\begin{aligned} dE_x &= k_e \int_S \frac{\sigma dS (x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_l \frac{\sigma dr' dl x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \int_l dl = \frac{k_e \sigma dr' x l}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x 2\pi r'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ora, basta integrare su tutta la lunghezza del raggio:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r' dr'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{(-2)}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \Big|_0^R \\ &= \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)} \end{aligned}$$

4. Per  $x \ll R$ , dal caso precedente segue immediatamente che:

$$\boxed{E \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

A distanza ravvicinata dal disco,  $\mathbf{E}$  si comporta come un campo costante!

■

**Problema 3.** Calcolare  $\mathbf{E}$  in un generico punto del piano in Figura 2, dove le distribuzioni superficiali di carica schematizzate sono da considerare di lunghezza e larghezza infinite.

SOLUZIONE: Da considerazioni di natura geometrica, si vede chiaramente che il campo assume i valori riportati in Figura 3.

<sup>1</sup> Equivalentemente, è possibile definire  $dS = 2\pi r' dr'$ , cioè prendere una corona circolare infinitesima, e integrare direttamente.



Figura 2: Distribuzioni di carica parallele



Figura 3: Distribuzioni di carica parallele

■

**Problema 4.** Calcolare il campo  $\mathbf{E}$  generato da un piano infinito carico elettricamente, considerandolo come successione infinita di fili di lunghezza a loro volta infinita. Il piano ha una densità superficiale di carica  $\sigma = \text{costante}$ .

**SOLUZIONE:** Iniziamo con delle considerazioni di natura geometrica. Prendiamo il piano di cariche in modo tale che sia coincidente col piano  $xz$  e dividiamolo in tanti fili paralleli all'asse  $z$ , ognuno di spessore infinitesimo  $dx$ . Dalla condizione  $\sigma = \text{costante}$ , otteniamo subito che la densità lineare di carica dei fili  $\lambda = \sigma dx = \text{costante}$ .

Siano ora  $x'$  la distanza di un filo generico dall'asse  $z$  e  $y$  la distanza di un punto generico  $P$  dal piano di cariche. Per semplicità, possiamo prendere  $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$  e  $\mathbf{r} = (0, y, 0)$ , in modo tale che  $P$  abbia coordinate  $(0, y, 0)$  e  $dx = dx'$ . Il campo nel punto  $P$  generato dal filo in posizione  $\mathbf{r}'$  non sarà, in generale, parallelo all'asse  $y$ . Avrà una componente  $E_x$  diretta lungo l'asse  $x$  e una componente  $E_y$  diretta lungo l'asse  $y$ . Ma se prendiamo il filo in posizione  $-\mathbf{r}'$ , quest'ultimo indurrà in  $P$  un campo che avrà componenti  $-E_x$  e  $E_y$ ! Quindi il campo totale generato dai due fili sarà diretto lungo l'asse  $y$  e avrà modulo<sup>2</sup>

$$E_{2 \text{ fili}} = 2E_y = \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)}$$

Ora, per avere il campo generato da tutti i fili, basta usare il principio di sovrapposizione e integrare  $E_{2 \text{ fili}}$  da 0 a  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{+\infty} E_{2 \text{ fili}} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma dx' y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} = \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)} \\ &= \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{y^2 \left( \left( \frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx'}{y}}{\left( \left( \frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \arctan \left( \frac{x'}{y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}} \end{aligned}$$

coerentemente con quanto trovato nel caso del disco a raggio infinito.

■

**Problema 5.** Calcolare il campo  $\mathbf{E}$  generato da una lamina di spessore  $2a$ , che abbia le restanti due dimensioni infinite. La lamina ha una densità volumetrica di carica  $\rho = \text{costante}$ .

**SOLUZIONE:** Per risolvere il problema, basta dividere la lamina metallica in tante “sfoglie” sottili, di spessore infinitesimo  $ds$  e di superficie infinita. La densità di carica superficiale delle “sfoglie”

<sup>2</sup> Per il campo generato da un filo infinitamente lungo, riguardare il relativo esercizio.

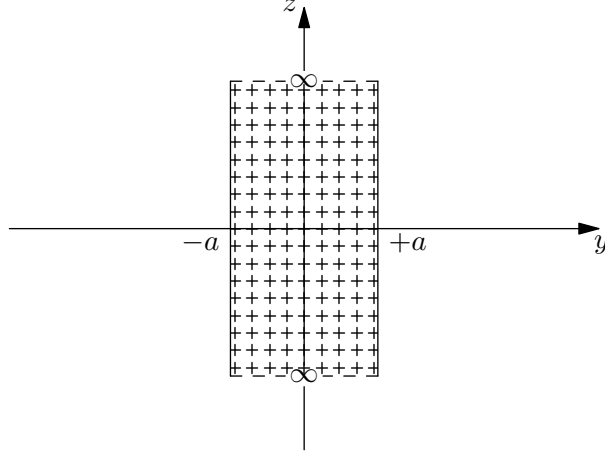


Figura 4: Lamina di spessore  $2a$

sarà dunque  $\sigma = \rho ds = \text{costante}$ , e il campo generato dalla singola sfoglia in un punto generico sarà semplicemente:

$$E_{\text{sfoglia}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0}$$

Per comodità, possiamo posizionare il sistema di riferimento in modo tale che lo spessore della lamina sia parallelo al piano  $yz$  e il piano  $xz$  divida la lamina esattamente a metà (vedi Figura 4). Con questa configurazione  $ds = dy$ , e utilizzando il principio di sovrapposizione è possibile calcolare il campo totale all'esterno della lamina integrando il campo della singola sfoglia da  $-a$  ad  $a$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \int_{-a}^a E_{\text{sfoglia}} = \int_{-a}^a \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_{-a}^a dy \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} 2a = \boxed{\frac{\rho a}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Il campo avrà segno positivo nel verso positivo dell'asse  $y$ , negativo nel verso negativo dell'asse  $y$ .

Per calcolare il campo all'interno della lamina si segue la stessa procedura, cambiando però gli estremi di integrazione. In un punto generico in posizione  $y$  rispetto al piano  $xz$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= - \int_y^a E_{\text{sfoglia}} + \int_{-a}^y E_{\text{sfoglia}} \\ &= - \int_y^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} + \int_{-a}^y \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left( - \int_y^a dy + \int_{-a}^y dy \right) \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (-a + y + y + a) = \boxed{\frac{\rho y}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

■

**Problema 6.** Sia data una sfera cava di raggio  $R$ , carica elettricamente con densità superficiale di carica  $\sigma = \text{costante}$ . Determinare  $\mathbf{E}$  in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Sfruttando la simmetria del problema, possiamo ridurre le dimensioni da 3 a 1 per semplificare i calcoli. Distinguiamo due casi.

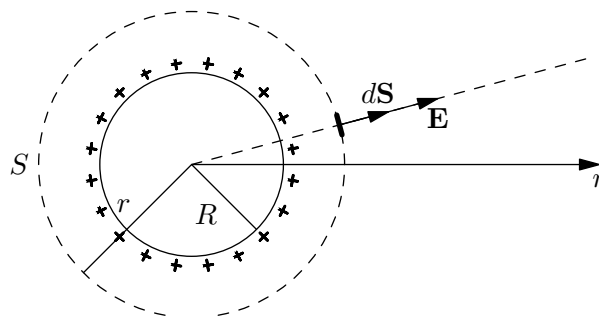


Figura 5: Sfera cava

- $r \geq R$

Vogliamo sfruttare il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A tale scopo, consideriamo una superficie sferica  $S$  di raggio  $r \geq R$ : per la natura del campo,  $\mathbf{E}$  sarà sempre perpendicolare a tale superficie. Inoltre, poiché  $\mathbf{E}$  dipende solo dalla distanza dal centro (una volta fissata la carica generatrice), il modulo di  $\mathbf{E}$  sarà costante in ogni punto della superficie che stiamo considerando (vedi Figura 5).

Possiamo quindi scrivere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

Indicando poi con  $S_f$  la superficie della sfera, dalla definizione si ottiene immediatamente che:

$$Q = \int \sigma dS_f = \sigma \int dS_f = \sigma 4\pi R^2$$

Applicando il Teorema di Gauss, segue che:

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ossia

$$\boxed{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

come nel caso di una carica puntiforme! In particolare per  $r = R$ , sfruttando il fatto che  $Q = \sigma 4\pi R^2$ ,

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- $r < R$

Dal Teorema di Gauss segue banalmente che

$$E = 0$$

■

**Problema 7.** Sia data una sfera di raggio  $R$ , carica elettricamente con densità volumetrica di carica  $\rho = \text{costante}$ . Determinare  $\mathbf{E}$  in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- $r \geq R$

È come nel caso della sfera cava, basta sfruttare il principio di sovrapposizione! Quindi, se  $Q = \int_V \rho(\tau) d\tau$  è la carica contenuta nella sfera, si ha semplicemente che

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

- $r < R$

Sfruttiamo il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Valgono:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Eguagliando le due relazioni sopra, troviamo che

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

■

**Problema 8.** Considerare di nuovo il problema della lamina infinita di spessore  $2a$ , carica elettricamente con densità volumetrica di carica  $\rho = \text{costante}$ . Trovare  $\mathbf{E}$  usando il Teorema di Gauss.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- All'esterno della lamina

Consideriamo un cilindro di altezza  $h \geq 2a$  e raggio di base  $r$ , posizionato in modo che abbia le due basi parallele alle facce della lamina. Calcoliamo il flusso:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{sup. later.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$



Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, perché  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$ . D'altra parte, attraverso le due basi,  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$  e quindi  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EdS$ . Il calcolo si semplifica notevolmente:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{\text{base}} EdS = 2E\pi r^2$$

D'altra parte, la carica contenuta all'interno del cilindro è  $Q = \rho\pi r^2 2a$ , quindi applicando il Teorema di Gauss si ottiene:

$$E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

- All'interno della lamina

Il calcolo è del tutto analogo a quello del caso precedente. Il cilindro, questa volta, avrà un'altezza  $h = 2y < 2a$ , e la carica contenuta all'interno sarà  $Q = \rho\pi r^2 2y$ . Applicando il Teorema di Gauss,

$$E = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$$

■