

Esercizi svolti di Fisica Generale II

Dalle lezioni di Giuseppe Dalba

A.V.

27 settembre 2013

Problema 1. Preso un filo sottile carico, di lunghezza $2a$ e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse del filo.
2. Sempre in un generico punto sull'asse, trovare \mathbf{E} nel limite in cui $a \rightarrow \infty$.

SOLUZIONE:

1. Da considerazioni di simmetria (vedi Figura 1), vale che $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$, dove \mathbf{E}_x indica la componente del campo \mathbf{E} nella direzione x . Ora,

$$E_x = k_e \int_l \frac{\lambda dl (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Poiché $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (0, y', 0)$ e $dl \equiv dy'$, si ottiene che

$$E_x = k_e \int_{-a}^a \frac{\lambda dy' x}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-a}^a \frac{dy'}{[x^2 + y'^2]^{3/2}}$$

Usando la semplificazione $y' = x \tan \vartheta$, $dy' = \frac{x}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$, abbiamo:

$$\begin{aligned} E_x &= k_e \lambda x \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \frac{\cancel{x} d\vartheta}{\cancel{\cos^2 \vartheta}} \frac{\cos^{\cancel{2}} \vartheta}{x^{\cancel{1}}} \\ &= \frac{k_e \lambda}{x} \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= \boxed{\frac{2k_e \lambda}{x} \sin(\arctan(a/x))} \end{aligned}$$

2. Per $a \rightarrow \infty$, $\arctan(a/x) \rightarrow \pi/2$. Quindi,

$$E \rightarrow \frac{2k_e \lambda}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2k_e \lambda}{x} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}}$$

Notiamo che il campo ha lo stesso andamento riscontrato nel caso di cariche puntiformi! Inoltre, per ragioni di natura pratica, conviene equivalentemente studiare $x \ll a$ invece che $a \rightarrow \infty$.



Figura 1: Filo sottile carico

■

Problema 2. Presa una spira sottile carica, di raggio R e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse della spira.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando i limiti $x \ll R$ e $x \gg R$.
3. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse di un disco avente lo stesso raggio e densità di carica superficiale $\sigma =$ costante.
4. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando il limite $R \rightarrow \infty$ (piano infinito).

SOLUZIONE:

1. La soluzione è identica al problema del filo sottile carico: chiamando x l'asse della spira, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$. Considerando che $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ e $\mathbf{r}' = (0, y', z')$, il calcolo diventa:

$$\begin{aligned}
 E_x &= k_e \lambda \int_l \frac{dl(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{k_e \lambda x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_l dl \\
 &= \frac{k_e \lambda x l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \boxed{\frac{k_e \lambda x 2\pi R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

2. Se $x \ll 1$, $E \rightarrow 0$. Se $x \gg R$, abbiamo invece

$$E \sim \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 x^2}$$

Se Q è la carica del filo, $Q = \lambda 2\pi R$, quindi

$$E \sim \boxed{\frac{k_e Q}{x^2}}$$

Il risultato ci dice che, da lontano, la spira è assimilabile ad una carica puntiforme!

3. Per calcolare il campo generato da un disco, conviene prima calcolare il campo dE_x generato da un anello sottile, di spessore infinitesimo dr' . La superficie infinitesima dell'anello sarà dunque $dS = dr' dl$ ¹. Abbiamo:

$$\begin{aligned} dE_x &= k_e \int_S \frac{\sigma dS (x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_l \frac{\sigma dr' dl x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \int_l dl = \frac{k_e \sigma dr' x l}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x 2\pi r'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ora, basta integrare su tutta la lunghezza del raggio:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r' dr'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{(-2)}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \Big|_0^R \\ &= \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)} \end{aligned}$$

4. Per $x \ll R$, dal caso precedente segue immediatamente che:

$$\boxed{E \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

A distanza ravvicinata dal disco, \mathbf{E} si comporta come un campo costante!

■

Problema 3. Calcolare \mathbf{E} in un generico punto del piano in Figura 2, dove le distribuzioni superficiali di carica schematizzate sono da considerare di lunghezza e larghezza infinite.

SOLUZIONE: Da considerazioni di natura geometrica, si vede chiaramente che il campo assume i valori riportati in Figura 3.

¹ Equivalentemente, è possibile definire $dS = 2\pi r' dr'$, cioè prendere una corona circolare infinitesima, e integrare direttamente.



Figura 2: Distribuzioni di carica parallele



Figura 3: Distribuzioni di carica parallele

■

Problema 4. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da un piano infinito carico elettricamente, considerandolo come successione infinita di fili di lunghezza a loro volta infinita. Il piano ha una densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Iniziamo con delle considerazioni di natura geometrica. Prendiamo il piano di cariche in modo tale che sia coincidente col piano xz e dividiamolo in tanti fili paralleli all'asse z , ognuno di spessore infinitesimo dx . Dalla condizione $\sigma = \text{costante}$, otteniamo subito che la densità lineare di carica dei fili $\lambda = \sigma dx = \text{costante}$.

Siano ora x' la distanza di un filo generico dall'asse z e y la distanza di un punto generico P dal piano di cariche. Per semplicità, possiamo prendere $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ e $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, in modo tale che P abbia coordinate $(0, y, 0)$ e $dx = dx'$. Il campo nel punto P generato dal filo in posizione \mathbf{r}' non sarà, in generale, parallelo all'asse y . Avrà una componente E_x diretta lungo l'asse x e una componente E_y diretta lungo l'asse y . Ma se prendiamo il filo in posizione $-\mathbf{r}'$, quest'ultimo indurrà in P un campo che avrà componenti $-E_x$ e E_y ! Quindi il campo totale generato dai due fili sarà diretto lungo l'asse y e avrà modulo²

$$E_{2 \text{ fili}} = 2E_y = \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)}$$

Ora, per avere il campo generato da tutti i fili, basta usare il principio di sovrapposizione e integrare $E_{2 \text{ fili}}$ da 0 a $+\infty$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{+\infty} E_{2 \text{ fili}} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma dx' y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} = \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)} \\ &= \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{y^2 \left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx'}{y}}{\left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \arctan \left(\frac{x'}{y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}} \end{aligned}$$

coerentemente con quanto trovato nel caso del disco a raggio infinito.

■

Problema 5. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da una lamina di spessore $2a$, che abbia le restanti due dimensioni infinite. La lamina ha una densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Per risolvere il problema, basta dividere la lamina metallica in tante “sfoglie” sottili, di spessore infinitesimo ds e di superficie infinita. La densità di carica superficiale delle “sfoglie”

² Per il campo generato da un filo infinitamente lungo, riguardare il relativo esercizio.

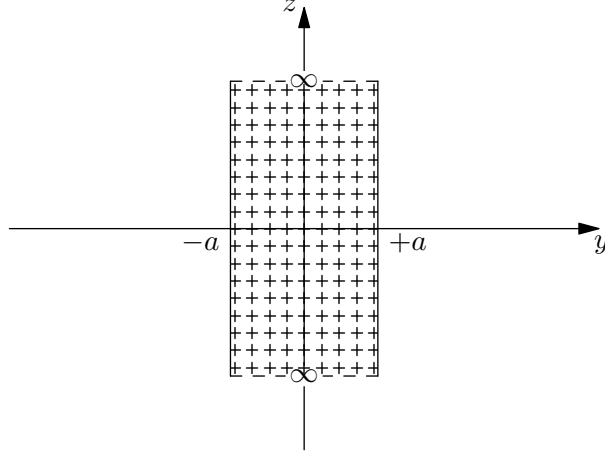


Figura 4: Lamina di spessore $2a$

sarà dunque $\sigma = \rho ds = \text{costante}$, e il campo generato dalla singola sfoglia in un punto generico sarà semplicemente:

$$E_{\text{sfoglia}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0}$$

Per comodità, possiamo posizionare il sistema di riferimento in modo tale che lo spessore della lamina sia parallelo al piano yz e il piano xz divida la lamina esattamente a metà (vedi Figura 4). Con questa configurazione $ds = dy$, e utilizzando il principio di sovrapposizione è possibile calcolare il campo totale all'esterno della lamina integrando il campo della singola sfoglia da $-a$ ad a :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \int_{-a}^a E_{\text{sfoglia}} = \int_{-a}^a \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_{-a}^a dy \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} 2a = \boxed{\frac{\rho a}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Il campo avrà segno positivo nel verso positivo dell'asse y , negativo nel verso negativo dell'asse y .

Per calcolare il campo all'interno della lamina si segue la stessa procedura, cambiando però gli estremi di integrazione. In un punto generico in posizione y rispetto al piano xz , si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= - \int_y^a E_{\text{sfoglia}} + \int_{-a}^y E_{\text{sfoglia}} \\ &= - \int_y^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} + \int_{-a}^y \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(- \int_y^a dy + \int_{-a}^y dy \right) \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (-a + y + y + a) = \boxed{\frac{\rho y}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

■

Problema 6. Sia data una sfera cava di raggio R , carica elettricamente con densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Sfruttando la simmetria del problema, possiamo ridurre le dimensioni da 3 a 1 per semplificare i calcoli. Distinguiamo due casi.

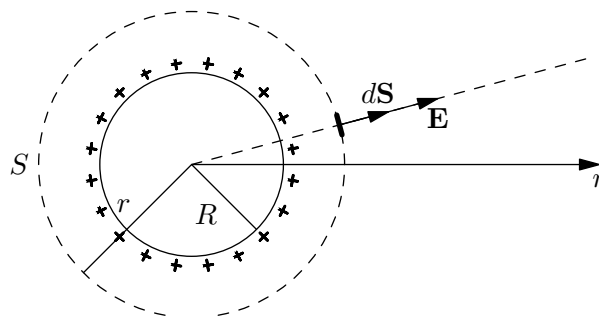


Figura 5: Sfera cava

- $r \geq R$

Vogliamo sfruttare il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A tale scopo, consideriamo una superficie sferica S di raggio $r \geq R$: per la natura del campo, \mathbf{E} sarà sempre perpendicolare a tale superficie. Inoltre, poiché \mathbf{E} dipende solo dalla distanza dal centro (una volta fissata la carica generatrice), il modulo di \mathbf{E} sarà costante in ogni punto della superficie che stiamo considerando (vedi Figura 5).

Possiamo quindi scrivere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

Indicando poi con S_f la superficie della sfera, dalla definizione si ottiene immediatamente che:

$$Q = \int \sigma dS_f = \sigma \int dS_f = \sigma 4\pi R^2$$

Applicando il Teorema di Gauss, segue che:

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ossia

$$\boxed{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

come nel caso di una carica puntiforme! In particolare per $r = R$, sfruttando il fatto che $Q = \sigma 4\pi R^2$,

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- $r < R$

Dal Teorema di Gauss segue banalmente che

$$E = 0$$

■

Problema 7. Sia data una sfera di raggio R , carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- $r \geq R$

È come nel caso della sfera cava, basta sfruttare il principio di sovrapposizione! Quindi, se $Q = \int_V \rho(\tau) d\tau$ è la carica contenuta nella sfera, si ha semplicemente che

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

- $r < R$

Sfruttiamo il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Valgono:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Eguagliando le due relazioni sopra, troviamo che

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

■

Problema 8. Considerare di nuovo il problema della lamina infinita di spessore $2a$, carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Trovare \mathbf{E} usando il Teorema di Gauss.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- All'esterno della lamina

Consideriamo un cilindro di altezza $h \geq 2a$ e raggio di base r , posizionato in modo che abbia le due basi parallele alle facce della lamina. Calcoliamo il flusso:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{sup. later.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, perché $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$. D'altra parte, attraverso le due basi, $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ e quindi $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Il calcolo si semplifica notevolmente:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{\text{base}} E dS = 2E\pi r^2$$

D'altra parte, la carica contenuta all'interno del cilindro è $Q = \rho\pi r^2 2a$, quindi applicando il Teorema di Gauss si ottiene:

$$E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

- All'interno della lamina

Il calcolo è del tutto analogo a quello del caso precedente. Il cilindro, questa volta, avrà un'altezza $h = 2y < 2a$, e la carica contenuta all'interno sarà $Q = \rho\pi r^2 2y$. Applicando il Teorema di Gauss,

$$E = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$$

■

Problema 9. Due cariche q puntiformi e della stessa grandezza sono disposte a distanza a lungo l'asse in posizione simmetrica rispetto al piano $y = 0$ (Figura 6). Si calcoli il campo elettrico in ciascun punto del piano nei seguenti casi:

1. Le cariche siano dello stesso segno.
2. Le cariche abbiano polarità opposta.

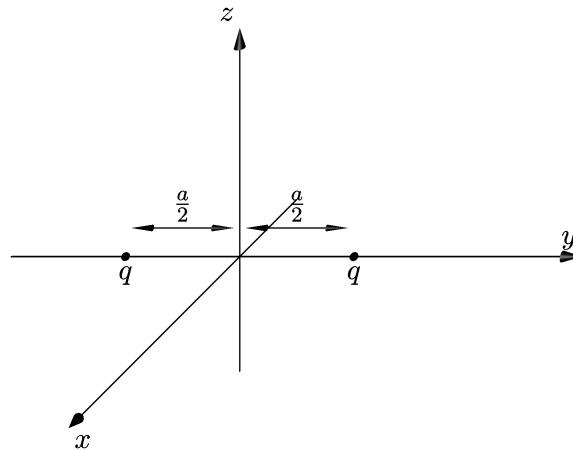


Figura 6: Cariche puntiformi in tre dimensioni

SOLUZIONE: Iniziamo col notare che il piano $y = 0$ corrisponde all'“asse” (bidimensionale) del segmento che congiunge le due cariche; inoltre, la forza elettrica è una forza centrale, quindi possiamo ridurre il problema da 3 a 2 dimensioni. Detto in altro modo, si tratta di studiare l'andamento del campo sull'asse del segmento che congiunge due cariche puntiformi.

Per comodità, scegliamo come asse proprio l'asse x ; il generico punto $(x, 0, 0)$ avrà dunque distanza $\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ da ognuna delle due cariche. Il modulo del campo \mathbf{E} nel punto preso in considerazione sarà chiaramente

$$E = k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

e la direzione di \mathbf{E} formerà con l'asse x un angolo ϑ tale che:

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}; \quad \sin \vartheta = \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Fatte queste premesse, possiamo ora distinguere i due casi.

1. Cariche dello stesso segno

Supponiamo, per semplicità, che le due cariche siano positive (se fossero entrambe negative il campo elettrico differirebbe solo per il verso). La situazione è schematizzata in Figura 7.



Figura 7: Due cariche positive

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= 2E \cos \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2k_e q x}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{q x}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}} \end{aligned}$$

2. Cariche di segno opposto

Supponiamo, per semplicità, che la carica di sinistra in Figura 8 sia positiva e quella a destra negativa (se fosse al contrario il campo elettrico differirebbe solo per il verso).

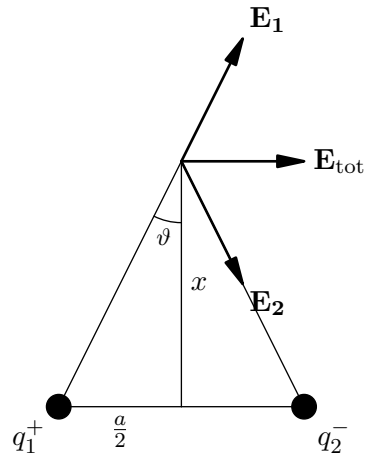


Figura 8: Due cariche di segno opposto

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}} &= 2E \sin \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\
 &= \frac{k_e q a}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{q a}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

■