

Esercizi svolti di Fisica Generale II

Dalle lezioni di Giuseppe Dalba

A.V.

30 ottobre 2013

Problema 1. *Preso un filo sottile carico, di lunghezza $2a$ e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:*

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse del filo.
2. Sempre in un generico punto sull'asse, trovare \mathbf{E} nel limite in cui $a \rightarrow \infty$.

SOLUZIONE:

1. Da considerazioni di simmetria (vedi Figura 1), vale che $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$, dove \mathbf{E}_x indica la componente del campo \mathbf{E} nella direzione x . Ora,

$$E_x = k_e \int_l \frac{\lambda dl (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Poiché $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (0, y', 0)$ e $dl \equiv dy'$, si ottiene che

$$E_x = k_e \int_{-a}^a \frac{\lambda dy' x}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-a}^a \frac{dy'}{[x^2 + y'^2]^{3/2}}$$

Usando la semplificazione $y' = x \tan \vartheta$, $dy' = \frac{x}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$, abbiamo:

$$\begin{aligned} E_x &= k_e \lambda x \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \frac{\cancel{x} d\vartheta}{\cancel{\cos^2 \vartheta}} \frac{\cos^{\cancel{1}} \vartheta}{x^{\cancel{1}}} \\ &= \frac{k_e \lambda}{x} \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= \boxed{\frac{2k_e \lambda}{x} \sin(\arctan(a/x))} \end{aligned}$$

2. Per $a \rightarrow \infty$, $\arctan(a/x) \rightarrow \pi/2$. Quindi,

$$E \rightarrow \frac{2k_e \lambda}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2k_e \lambda}{x} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}}$$

Notiamo che il campo ha lo stesso andamento riscontrato nel caso di cariche puntiformi! Inoltre, per ragioni di natura pratica, conviene equivalentemente studiare $x \ll a$ invece che $a \rightarrow \infty$.



Figura 1: Filo sottile carico

■

Problema 2. Presa una spira sottile carica, di raggio R e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse della spira.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando i limiti $x \ll R$ e $x \gg R$.
3. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse di un disco avente lo stesso raggio e densità di carica superficiale $\sigma =$ costante.
4. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando il limite $R \rightarrow \infty$ (piano infinito).

SOLUZIONE:

1. La soluzione è identica al problema del filo sottile carico: chiamando x l'asse della spira, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$. Considerando che $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ e $\mathbf{r}' = (0, y', z')$, il calcolo diventa:

$$\begin{aligned}
 E_x &= k_e \lambda \int_l \frac{dl(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{k_e \lambda x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_l dl \\
 &= \frac{k_e \lambda x l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \boxed{\frac{k_e \lambda x 2\pi R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

2. Se $x \ll 1$, $E \rightarrow 0$. Se $x \gg R$, abbiamo invece

$$E \sim \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 x^2}$$

Se Q è la carica del filo, $Q = \lambda 2\pi R$, quindi

$$E \sim \boxed{\frac{k_e Q}{x^2}}$$

Il risultato ci dice che, da lontano, la spira è assimilabile ad una carica puntiforme!

3. Per calcolare il campo generato da un disco, conviene prima calcolare il campo dE_x generato da un anello sottile, di spessore infinitesimo dr' . La superficie infinitesima dell'anello sarà dunque $dS = dr' dl$ ¹. Abbiamo:

$$\begin{aligned} dE_x &= k_e \int_S \frac{\sigma dS (x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_l \frac{\sigma dr' dl x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \int_l dl = \frac{k_e \sigma dr' x l}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x 2\pi r'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ora, basta integrare su tutta la lunghezza del raggio:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r' dr'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{(-2)}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \Big|_0^R \\ &= \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)} \end{aligned}$$

4. Per $x \ll R$, dal caso precedente segue immediatamente che:

$$\boxed{E \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

A distanza ravvicinata dal disco, \mathbf{E} si comporta come un campo costante!

■

Problema 3. Calcolare \mathbf{E} in un generico punto del piano in Figura 2, dove le distribuzioni superficiali di carica schematizzate sono da considerare di lunghezza e larghezza infinite.

SOLUZIONE: Da considerazioni di natura geometrica, si vede chiaramente che il campo assume i valori riportati in Figura 3.

¹ Equivalentemente, è possibile definire $dS = 2\pi r' dr'$, cioè prendere una corona circolare infinitesima, e integrare direttamente.



Figura 2: Distribuzioni di carica parallele



Figura 3: Distribuzioni di carica parallele

■

Problema 4. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da un piano infinito carico elettricamente, considerandolo come successione infinita di fili di lunghezza a loro volta infinita. Il piano ha una densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Iniziamo con delle considerazioni di natura geometrica. Prendiamo il piano di cariche in modo tale che sia coincidente col piano xz e dividiamolo in tanti fili paralleli all'asse z , ognuno di spessore infinitesimo dx . Dalla condizione $\sigma = \text{costante}$, otteniamo subito che la densità lineare di carica dei fili $\lambda = \sigma dx = \text{costante}$.

Siano ora x' la distanza di un filo generico dall'asse z e y la distanza di un punto generico P dal piano di cariche. Per semplicità, possiamo prendere $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ e $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, in modo tale che P abbia coordinate $(0, y, 0)$ e $dx = dx'$. Il campo nel punto P generato dal filo in posizione \mathbf{r}' non sarà, in generale, parallelo all'asse y . Avrà una componente E_x diretta lungo l'asse x e una componente E_y diretta lungo l'asse y . Ma se prendiamo il filo in posizione $-\mathbf{r}'$, quest'ultimo indurrà in P un campo che avrà componenti $-E_x$ e E_y ! Quindi il campo totale generato dai due fili sarà diretto lungo l'asse y e avrà modulo²

$$E_{2 \text{ fili}} = 2E_y = \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)}$$

Ora, per avere il campo generato da tutti i fili, basta usare il principio di sovrapposizione e integrare $E_{2 \text{ fili}}$ da 0 a $+\infty$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{+\infty} E_{2 \text{ fili}} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma dx' y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} = \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)} \\ &= \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{y^2 \left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx'}{y}}{\left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \arctan \left(\frac{x'}{y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}} \end{aligned}$$

coerentemente con quanto trovato nel caso del disco a raggio infinito.

■

Problema 5. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da una lamina di spessore $2a$, che abbia le restanti due dimensioni infinite. La lamina ha una densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Per risolvere il problema, basta dividere la lamina metallica in tante “sfoglie” sottili, di spessore infinitesimo ds e di superficie infinita. La densità di carica superficiale delle “sfoglie”

² Per il campo generato da un filo infinitamente lungo, riguardare il relativo esercizio.

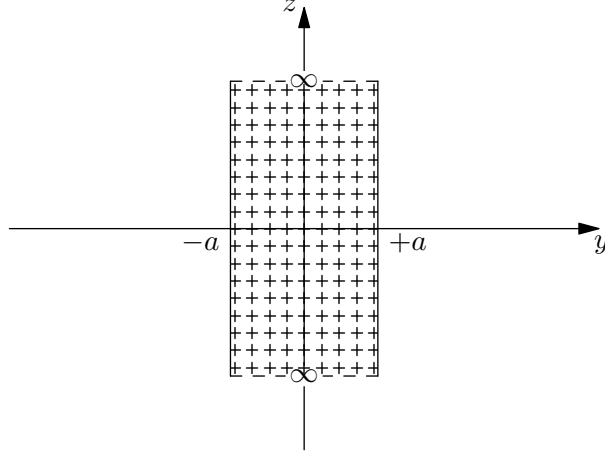


Figura 4: Lamina di spessore $2a$

sarà dunque $\sigma = \rho ds = \text{costante}$, e il campo generato dalla singola sfoglia in un punto generico sarà semplicemente:

$$E_{\text{sfoglia}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0}$$

Per comodità, possiamo posizionare il sistema di riferimento in modo tale che lo spessore della lamina sia parallelo al piano yz e il piano xz divida la lamina esattamente a metà (vedi Figura 4). Con questa configurazione $ds = dy$, e utilizzando il principio di sovrapposizione è possibile calcolare il campo totale all'esterno della lamina integrando il campo della singola sfoglia da $-a$ ad a :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \int_{-a}^a E_{\text{sfoglia}} = \int_{-a}^a \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_{-a}^a dy \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} 2a = \boxed{\frac{\rho a}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Il campo avrà segno positivo nel verso positivo dell'asse y , negativo nel verso negativo dell'asse y .

Per calcolare il campo all'interno della lamina si segue la stessa procedura, cambiando però gli estremi di integrazione. In un punto generico in posizione y rispetto al piano xz , si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= - \int_y^a E_{\text{sfoglia}} + \int_{-a}^y E_{\text{sfoglia}} \\ &= - \int_y^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} + \int_{-a}^y \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(- \int_y^a dy + \int_{-a}^y dy \right) \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (-a + y + y + a) = \boxed{\frac{\rho y}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

■

Problema 6. Sia data una sfera cava di raggio R , carica elettricamente con densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Sfruttando la simmetria del problema, possiamo ridurre le dimensioni da 3 a 1 per semplificare i calcoli. Distinguiamo due casi.

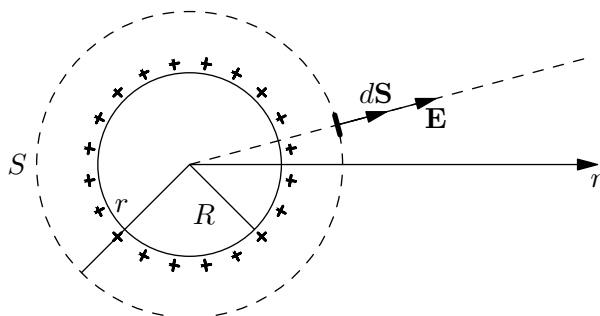


Figura 5: Sfera cava

- $r \geq R$

Vogliamo sfruttare il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A tale scopo, consideriamo una superficie sferica S di raggio $r \geq R$: per la natura del campo, \mathbf{E} sarà sempre perpendicolare a tale superficie. Inoltre, poiché \mathbf{E} dipende solo dalla distanza dal centro (una volta fissata la carica generatrice), il modulo di \mathbf{E} sarà costante in ogni punto della superficie che stiamo considerando (vedi Figura 5).

Possiamo quindi scrivere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

Indicando poi con S_f la superficie della sfera, dalla definizione si ottiene immediatamente che:

$$Q = \int \sigma dS_f = \sigma \int dS_f = \sigma 4\pi R^2$$

Applicando il Teorema di Gauss, segue che:

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ossia

$$\boxed{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

come nel caso di una carica puntiforme! In particolare per $r = R$, sfruttando il fatto che $Q = \sigma 4\pi R^2$,

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- $r < R$

Dal Teorema di Gauss segue banalmente che

$$E = 0$$

■

Problema 7. Sia data una sfera di raggio R , carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- $r \geq R$

È come nel caso della sfera cava, basta sfruttare il principio di sovrapposizione! Quindi, se $Q = \int_{\tau} \rho(\tau) d\tau$ è la carica contenuta nella sfera, si ha semplicemente che

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

- $r < R$

Sfruttiamo il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Valgono:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Eguagliando le due relazioni sopra, troviamo che

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

■

Problema 8. Considerare di nuovo il problema della lamina infinita di spessore $2a$, carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Trovare \mathbf{E} usando il Teorema di Gauss.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- All'esterno della lamina

Consideriamo un cilindro di altezza $h \geq 2a$ e raggio di base r , posizionato in modo che abbia le due basi parallele alle facce della lamina. Calcoliamo il flusso:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{sup. later.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, perché $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$. D'altra parte, attraverso le due basi, $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ e quindi $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Il calcolo si semplifica notevolmente:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{\text{base}} E dS = 2E\pi r^2$$

D'altra parte, la carica contenuta all'interno del cilindro è $Q = \rho\pi r^2 2a$, quindi applicando il Teorema di Gauss si ottiene:

$$E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

- All'interno della lamina

Il calcolo è del tutto analogo a quello del caso precedente. Il cilindro, questa volta, avrà un'altezza $h = 2y < 2a$, e la carica contenuta all'interno sarà $Q = \rho\pi r^2 2y$. Applicando il Teorema di Gauss,

$$E = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$$

■

Problema 9. Due cariche q puntiformi e della stessa grandezza sono disposte a distanza a lungo l'asse in posizione simmetrica rispetto al piano $y = 0$ (Figura 6). Si calcoli il campo elettrico in ciascun punto del piano nei seguenti casi:

1. Le cariche siano dello stesso segno.
2. Le cariche abbiano polarità opposta.

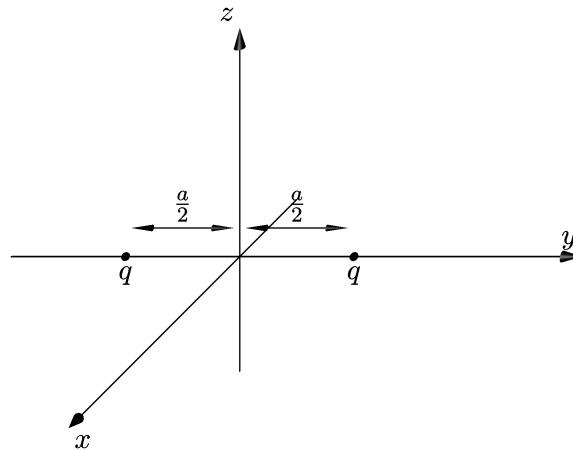


Figura 6: Cariche puntiformi in tre dimensioni

SOLUZIONE: Iniziamo col notare che il piano $y = 0$ corrisponde all'“asse” (bidimensionale) del segmento che congiunge le due cariche; inoltre, la forza elettrica è una forza centrale, quindi possiamo ridurre il problema da 3 a 2 dimensioni. Detto in altro modo, si tratta di studiare l'andamento del campo sull'asse del segmento che congiunge due cariche puntiformi.

Per comodità, scegliamo come asse proprio l'asse x ; il generico punto $(x, 0, 0)$ avrà dunque distanza $\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ da ognuna delle due cariche. Il modulo del campo \mathbf{E} nel punto preso in considerazione sarà chiaramente

$$E = k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

e la direzione di \mathbf{E} formerà con l'asse x un angolo ϑ tale che:

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}; \quad \sin \vartheta = \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Fatte queste premesse, possiamo ora distinguere i due casi.

1. Cariche dello stesso segno

Supponiamo, per semplicità, che le due cariche siano positive (se fossero entrambe negative il campo elettrico differirebbe solo per il verso). La situazione è schematizzata in Figura 7.



Figura 7: Due cariche positive

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= 2E \cos \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2k_e q x}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{q x}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}} \end{aligned}$$

2. Cariche di segno opposto

Supponiamo, per semplicità, che la carica di sinistra in Figura 8 sia positiva e quella a destra negativa (se fosse al contrario il campo elettrico differirebbe solo per il verso).

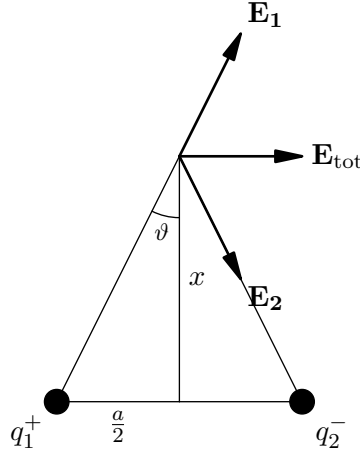


Figura 8: Due cariche di segno opposto

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}} &= 2E \sin \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\
 &= \frac{k_e qa}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

■

Problema 10. *Un cilindro di raggio R e lunghezza $2L$ è disposto verticalmente con il proprio asse coincidente con l'asse z ed è centrato rispetto al piano $z = 0$. Sulla parete sottile del cilindro è distribuita uniformemente una carica di densità superficiale σ .*

1. *Si calcoli il campo elettrostatico lungo l'asse del cilindro.*
2. *Si valuti il campo per $L \rightarrow 0$ e per $L \rightarrow \infty$.*

SOLUZIONE: Considerando h come la distanza fra il piano identificato da $z = 0$ e il punto generico $(0, 0, z)$ sulla quale calcoliamo il campo elettrico, ho che ogni superficie dS dà un contributo pari a:

$$|d\mathbf{E}| = k_e \frac{\sigma(z-h)dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

dove $dS = 2\pi R dh$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + (z-h)^2}$.

Integrando fra $-L$ e L ottengo:

$$|\mathbf{E}| = \int_{-L}^L k_e \frac{\sigma(z-h)dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_{-L}^L \frac{\sigma(z-h)2\pi R}{\left(\sqrt{R^2 + (z-h)^2}\right)^3} dh$$

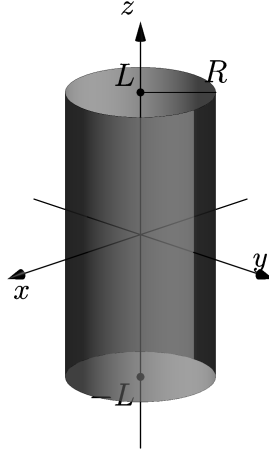


Figura 9: Cilindro cavo verticale

Posso risolvere l'integrale effettuando la sostituzione $s = z - h$ ($ds = -dh$); l'integrale si riduce a:

$$|\mathbf{E}| = -2k_e\sigma\pi R \int \frac{s}{(\sqrt{R^2 + s^2})^3} ds = 2k_e\sigma\pi R \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-h)^2}} \right]_{-L}^L$$

da cui il risultato:

$$|\mathbf{E}| = 2k_e\sigma\pi R \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} \right]$$

Per $L \rightarrow 0$, il campo elettrico è 0, così come per $L \rightarrow \infty$.

■

Problema 11. Una carica di densità volumica è distribuita uniformemente in un volume cilindrico di raggio R e lunghezza infinita. Si calcoli il campo elettrostatico ovunque nello spazio.

SOLUZIONE: Per comodità pongo il generico punto in cui voglio calcolare il campo elettrico sull'asse y . Per simmetria (dato che ogni elemento infinitesimo di volume ha un corrispettivo simmetricamente opposto sul cilindro) le componenti diverse da quelle sull'asse delle y si annullano: il campo va dunque calcolato sull'asse y .

Il contributo infinitesimo di ogni coppia di volumi infinitesimi è dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2k_e \frac{\rho dV y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Con considerazioni geometriche sul disegno (pongo y la distanza fra il volume infinitesimo e il punto su cui voglio calcolare il campo, ed h la distanza fra il piano $z = 0$ e il volume infinitesimo) ottengo le seguenti relazioni: $h = y \tan \vartheta$ e $\cos \vartheta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = y$, da cui ricavo $dh = y \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$. Sostituendo:

$$|d\mathbf{E}| = k_e \frac{2\rho\pi R^2 y^2 \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta}{\frac{y^3}{\cos^3 \vartheta}} = k_e \frac{2\rho R^2 \cos \vartheta}{y} d\vartheta$$

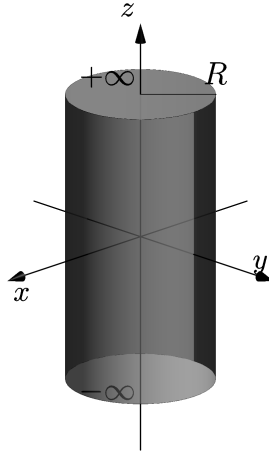


Figura 10: Volume cilindrico di lunghezza infinita

Integrando fra 0 e $\pi/2$ ottengo il risultato:

$$E_y = k_e \frac{2\rho\pi R^2}{y} = \boxed{\frac{\rho R^2}{2y\epsilon_0}} \quad (1)$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto sfruttando il teorema di Gauss e considerando come superficie un cilindro di raggio y con l'asse coincidente a quella del nostro cilindro. Dato che il campo elettrico è diretto verso l'asse y per le considerazioni di cui sopra, si può considerare solo la superficie esterna del cilindro. Vale dunque (se consideriamo i cilindri della stessa lunghezza L):

$$E2\pi yL = \frac{\pi R^2 L \rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Il campo elettrico non dipende dunque da L ed ottengo lo stesso risultato (1).

Con il teorema di Gauss è possibile calcolare facilmente anche il campo elettrico nel caso in cui $y < R$, sostituendo y a R (per il teorema di Gauss consideriamo solo le cariche interne), ottenendo:

$$\boxed{E_y = \frac{\rho y}{2\epsilon_0}}$$

■

Problema 12. Una linea di trasmissione è costituita da un cavo sottile rettilineo ed infinitamente lungo su cui è distribuita uniformemente una carica di densità $\lambda = 10^{-7}$ C/m. La linea è disposta parallelamente al suolo ad una distanza $D = 10$ m. Trascurando l'influenza del terreno si calcoli:

1. Il campo elettrico ovunque nello spazio.
2. La grandezza del campo elettrico sul terreno giusto al disotto della linea.

Sotto la prima linea ne viene aggiunta, parallelamente ad essa, una seconda a distanza $d = 2$ m su cui è distribuita uniformemente una carica di densità lineare uguale ed opposta, pari cioè a -10^{-7} C/m. Si calcoli:

3. Il campo elettrico in un generico punto dello spazio.

4. Il campo elettrico al livello del suolo immediatamente al disotto delle linee.

SOLUZIONE:

1. Avevamo già calcolato il campo generato da un filo infinito. Ricordiamo che, a distanza x dall'asse del filo, il campo è perpendicolare al filo stesso e in vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{\mathbf{x}}$$

2. Basta porre $x = D$ nella formula precedente per ottenere:

$$\mathbf{E}_D = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} \hat{\mathbf{x}} \simeq \boxed{179.95 \text{ N/C}}$$

3. Preso un generico punto P, indichiamo con x^+ la sua distanza dall'asse del filo con densità di carica λ^+ positiva, e con x^- la sua distanza dall'asse del filo con densità di carica λ^- negativa. Poniamo inoltre $\lambda = |\lambda^+| = |\lambda^-|$.

Dal principio di sovrapposizione e utilizzando la formula al primo punto, otteniamo:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x^+} \hat{\mathbf{x}}^+ - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x^-} \hat{\mathbf{x}}^- = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^+}{x^+} - \frac{\hat{\mathbf{x}}^-}{x^-} \right)}$$

Il segno del campo può essere (arbitrariamente) riferito al filo positivo, per cui un segno “+” nel risultato indicherà un campo *uscende* dal filo positivo, mentre un “-” un campo *entrante*.

4. Basta sostituire $x^+ = D$, $x^- = D - d$ e $\hat{\mathbf{x}}^+ = \hat{\mathbf{x}}^-$ nella formula precedente per ottenere:

$$\mathbf{E}_D = -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 D(D-d)} \hat{\mathbf{x}}^+ \simeq \boxed{-44.94 \text{ N/C}}$$

dove il segno “-” indica che il campo è diretto verso il filo di densità di carica positiva.

■

Problema 13. Una carica è distribuita su un filo sottile infinitamente lungo ripiegato su se stesso come in Figura 11. I tratti rettilinei sono paralleli tra loro. La densità di carica lineare è uguale a λ ; il raggio di curvatura del filo è R .

Calcolare il campo elettrico lungo l'asse z passante per il centro della circonferenza di raggio R .

SOLUZIONE: ³ Per il principio di sovrapposizione posso considerare il campo elettrico come la somma di tre contributi: due dati dai fili infiniti paralleli e uno dato dalla semicirconferenza.

Calcoliamo il contributo al campo elettrico dato dalla semicirconferenza. Si nota che la componente sull'asse x del campo è nulla per simmetria. Calcoliamo dunque il campo sugli assi y e z . Vale:

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

³ La soluzione qui proposta non calcola il campo lungo l'asse z , ma in ogni punto dell'asse z , ed è quindi più generale rispetto a quanto richiesto dal problema.

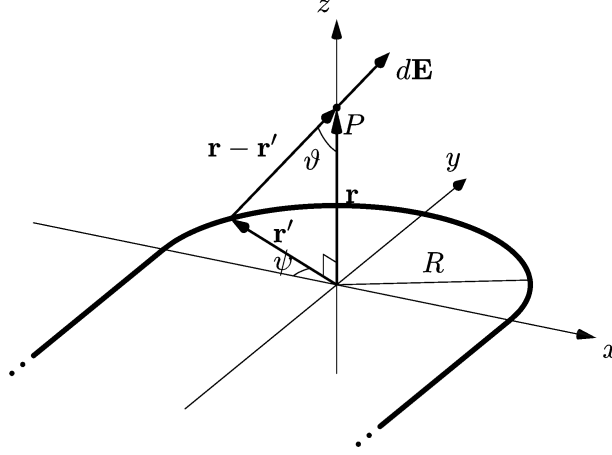


Figura 11: Filo carico ricurvo

Consideriamo i vettori posizione $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ (vettore che identifica il generico punto dell'asse z nel quale sto calcolando il campo) e $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$, R il raggio della semicirconferenza e $\psi \in [0, \pi]$ l'angolo sul piano $z = 0$ compreso fra il vettore \mathbf{r}' e l'asse x . Il contributo infinitesimo al campo elettrico sull'asse y è dato da:

$$d\mathbf{E}_y = k_e \frac{\lambda(-R \sin \psi) dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} = k_e \frac{\lambda(-R \sin \psi) R d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}},$$

da cui ho:

$$\mathbf{E}_y = k_e \int_0^\pi \frac{\lambda(-R \sin \psi) R d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} = -2k_e \frac{\lambda R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Il contributo al campo elettrico sull'asse z è invece dato da (considerando ϑ l'angolo costante fra l'asse z e il vettore $d\mathbf{E}$):

$$d\mathbf{E}_z = k_e \frac{\lambda R d\psi \cos \vartheta}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R \psi \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R z d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

e integrando lungo tutta la semicirconferenza:

$$\mathbf{E}_z = k_e \int_0^\pi \frac{\lambda R z d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R z \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Il filo di lunghezza infinitesima contribuisce al campo, per le stesse considerazioni di simmetria di cui sopra, sull'asse y e z . Per semplificare possiamo trattare il problema come se si svolgesse su un unico piano senza mancare di generalità: infatti, il campo elettrico generato da un filo disposto su una semiretta di lunghezza infinita, sui punti disposti lungo la retta perpendicolare al filo passante per la sua estremità, dipende solo dalla distanza. Consideriamo tale distanza $\sqrt{R^2 + z^2}$, abbiamo che (si veda esercizio I.22 [Mencuccini], pag. 72: le formule utilizzate in seguito sono state ricavate facendo tendere ad infinito la lunghezza del filo) la componente z (componente y sull'esercizio del [Mencuccini] moltiplicata per $\cos \vartheta$) è:

$$\mathbf{E}_z = 2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}} = 2k_e \frac{\lambda z}{R^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

La componente y è invece:

$$\mathbf{E}_y = 2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{y}}$$

La soluzione è dunque:

$$\mathbf{E} = \left(2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2k_e \frac{\lambda R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(k_e \frac{\lambda R z \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + 2k_e \frac{\lambda z}{R^2 + z^2} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Per completezza, riportiamo come ottenere il campo generato dai due fili per integrazione diretta. Usando la simmetria del sistema, il campo totale generato dai due fili sarà il doppio di quello generato da un filo. Detta $l \in [0, +\infty]$ la distanza lungo il filo a partire dall'asse x , la componente lungo z del campo è

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_z &= 2k_e \frac{\lambda dl}{l^2 + R^2 + z^2} \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}} \\ &= 2k_e \frac{\lambda dl}{l^2 + R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{l^2 + R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} = 2k_e \frac{\lambda z dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Integrando su tutta la lunghezza,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= \int_0^{+\infty} d\mathbf{E}_z \\ &= \int_0^{+\infty} 2k_e \frac{\lambda z dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= 2k_e \lambda z \int_0^{+\infty} \frac{dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

L'integrale può essere risolto con la sostituzione $l = \sqrt{z^2 + R^2} \tan u$, $dl = \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{\cos^2 u} du$, $\frac{1}{1 + \tan^2 u} = \cos^2 u$, con la quale il calcolo si semplifica in:

$$\mathbf{E}_z = 2k_e \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)} \int_0^{\pi/2} \cos u du \hat{\mathbf{z}} = \boxed{2k_e \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}}}.$$

Similmente per l'altra componente. ■

Problema 14. Una carica è distribuita uniformemente lungo un filo sottile di lunghezza L con densità uniforme λ . Inizialmente il filo è disposto a distanza d da una superficie piana infinitamente grande, carica uniformemente con densità di carica σ . Calcolare il lavoro richiesto per ruotare il filo di 90° come in Figura 12.

SOLUZIONE: Iniziamo col dire che il lavoro *richiesto* è pari al lavoro delle forze del campo cambiato di segno. Nel nostro caso,

$$W_R = -W_E$$

dove W_R indica il lavoro richiesto e W_E il lavoro fatto dalla forza elettrica.

Consideriamo ora un pezzettino di lunghezza infinitesima dl sul filo, a distanza l dall'estremo di rotazione, e indichiamo con dh lo spostamento infinitesimo lungo la direzione di \mathbf{E} . Poiché \mathbf{E} è

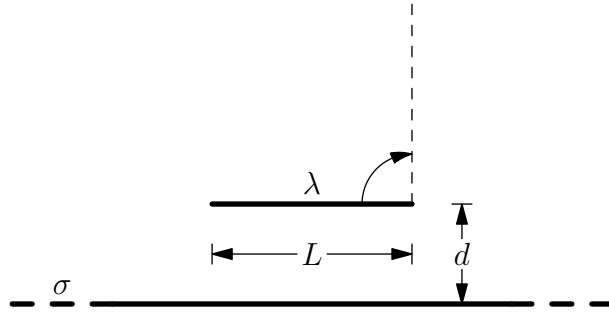


Figura 12: Spostamento di un filo carico

conservativo, possiamo pensare di sostituire l'arco di circonferenza compiuto dal pezzettino con una spezzata che procede in direzione di \mathbf{E} per il primo tratto, e poi continua orizzontalmente fino al punto di arrivo. Il lavoro compiuto nel tratto orizzontale è nullo, perché $\mathbf{E} \perp d\mathbf{s}$; quindi il lavoro richiesto per ruotare il suddetto pezzettino di un angolo pari a $\pi/2$ sarà:

$$dW_R = - \int (\lambda dl) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^l (\lambda dl) E dh = -\lambda dl E \int_0^l dh = -\lambda dl El$$

dove nel calcolo abbiamo usato il fatto che, per un piano infinito, E è costante e non dipende dalla distanza.

Per trovare il lavoro totale, basta ora integrare su tutta la lunghezza L del filo:

$$W_R = \int dW_R = \int_0^L -\lambda E l dl = -\lambda E \int_0^L l dl = -\lambda E \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^L = -\lambda E \frac{L^2}{2}$$

Dal Teorema di Gauss, sappiamo che per una piastra infinita carica uniformemente vale:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Sostituendo l'espressione di E in quella di W_R , otteniamo infine:

$$W_R = -\frac{\lambda\sigma L^2}{4\varepsilon_0}$$

Il segno “−” nel risultato è indicativo del fatto che il sistema non ha bisogno di un lavoro esterno per posizionare il filo in quella posizione; essendo infatti le due distribuzioni con lo stesso segno, la piastra e il filo tendono a respingersi, e il filo si posiziona spontaneamente in verticale.

Soluzione alternativa. Il lavoro richiesto può essere anche pensato come il lavoro necessario a spostare il “centro di carica” nella posizione desiderata. La carica del centro di carica è, per definizione, $Q = \lambda L$, mentre la sua posizione è pari a

$$\frac{1}{\lambda L} \int_0^L \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl = \frac{L}{2}.$$

Per quanto detto prima, il lavoro necessario a spostare il centro di carica è pari al lavoro necessario per spostarlo di un tratto verticale di lunghezza $L/2$, cioè:

$$W_R = -QE \frac{L}{2} = -\lambda L E \frac{L}{2} = -\lambda E \frac{L^2}{2} = \boxed{W_R = -\frac{\lambda\sigma L^2}{4\varepsilon_0}}.$$

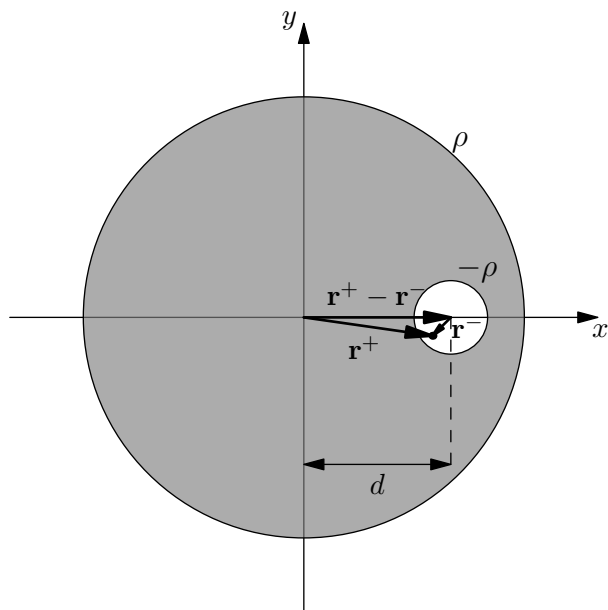


Figura 13: Cilindro forato

■

Problema 15. In un cilindro infinitamente lungo di raggio R , uniformemente carico con densità di carica ρ , è praticato, fuori asse, un foro di raggio a il cui centro è distante d dal centro del cilindro.

Calcolare il campo elettrico all'interno del foro.

SOLUZIONE: Considerata la geometria del sistema, possiamo:

1. ridurre il problema a due dimensioni, e rappresentare il cilindro – visto dall'alto – come un cerchio al cui interno è presente un altro cerchio più piccolo, fuori asse;
2. supporre che $\rho > 0$;
3. supporre che i centri dei due cerchi siano entrambi sull'asse x ,

senza perdere di generalità. La situazione è schematizzata in Figura 13. Il nostro sistema può essere ora immaginato come la sovrapposizione di due cilindri: uno di raggio R e densità di carica ρ , e uno di raggio a e densità di carica $-\rho$. Sappiamo che il campo all'interno di un cilindro carico uniformemente è

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{r}, \quad (3)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione di un generico punto all'interno del cilindro rispetto all'asse, ed è perpendicolare a quest'ultimo. Indichiamo poi con

$$\mathbf{E}^+ = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{r}^+$$

il campo generato dal cilindro grande, e con

$$\mathbf{E}^- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{r}^-$$

il campo generato da quello piccolo; dal principio di sovrapposizione il campo totale sarà quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-) = \boxed{\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\hat{\mathbf{x}}}$$

■

Problema 16. Date tre cariche q_1, q_2, q_3 disposte casualmente nello spazio, trovare in un dato punto P i potenziali V_1, V_2, V_3 che generano.

Si sostituiscano ora q_1, q_2, q_3 con altre tre cariche q'_1, q'_2, q'_3 e si ricalcolino i nuovi potenziali V'_1, V'_2, V'_3 .

1. Si dimostri che

$$q_1 V'_1 + q_2 V'_2 + q_3 V'_3 = q'_1 V_1 + q'_2 V_2 + q'_3 V_3.$$

In generale, per N cariche, vale che

$$\sum_{i=1}^N (q_i V'_i - q'_i V_i) = 0$$

(Teorema della reciprocità di Green).

2. Estendere il teorema al caso di un conduttore perfetto su cui è depositata una carica Q e al potenziale del conduttore.

SOLUZIONE:

1. Fissiamo un sistema di riferimento e indichiamo con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ i vettori posizione – rispettivamente – di q_1, q_2, q_3 (che coincidono anche con quelli di q'_1, q'_2, q'_3). Detto \mathbf{r}_P il vettore posizione del generico punto P , valgono:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1\|}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_2\|}, \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_3}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_3\|}, \quad (4)$$

$$V'_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_1}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1\|}, \quad V'_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_2}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_2\|}, \quad V'_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_3}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_3\|}, \quad (5)$$

Dalle equazioni scritte sopra, notiamo

$$q_i V'_i = q'_i V_i \quad (6)$$

$\forall i = 1, 2, 3$, ossia

$$\sum_{i=1}^3 (q_i V'_i - q'_i V_i) = 0 \quad (7)$$

che prova la tesi. L'estensione al caso di N cariche è immediata.

2. Basta generalizzare l'equazione (7) (per N cariche puntiformi) a due configurazioni con distribuzione superficiale di carica,⁴ chiamiamole σ_1 e σ_2 , sostituendo \sum con \int e q_i con dq .

⁴In questo caso, si tratta dello stesso conduttore caricato in due modi diversi. Per la generalizzazione a due corpi diversi con distribuzioni di carica generiche, si veda più avanti.

Abbiamo dunque:

$$\int_{S_1} \sigma_1 V_2 dS_1 = \int_{S_2} \sigma_2 V_1 dS_2$$

che, poiché i potenziali sono costanti e $\int_S \sigma dS = Q$, si riduce a:

$$Q_1 V_2 = Q_2 V_1.$$

Definendo

$$C \doteq \frac{Q}{V},$$

possiamo riscrivere il risultato come:

$$\boxed{C_1 = C_2.}$$

Il risultato ci dice che la quantità C non dipende da *come* carichiamo un dato conduttore, ma è una *proprietà specifica* del conduttore stesso che rimane costante. Tale proprietà si chiama *capacità elettrica*.

■

Problema 17. Generalizzare l'equazione (7) a due distribuzioni di carica qualsiasi⁵ (si veda anche Problema 3.50 [Griffiths]).

SOLUZIONE: Dobbiamo provare che, data una distribuzione di carica $\rho_1(\mathbf{r})$ che genera un potenziale V_1 , e una distribuzione di carica $\rho_2(\mathbf{r})$ che genera un potenziale V_2 , vale la relazione:⁶

$$\int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \quad (8)$$

Partiamo dall'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (9)$$

e applichamola con $f \mathbf{A} = V_1(\nabla V_2)$, ottenendo:

$$\nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) = V_1 \nabla \cdot \nabla V_2 + \nabla V_1 \cdot \nabla V_2$$

Ora, usando il fatto che $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$, $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}_2 = \rho_2/\varepsilon_0$, otteniamo:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) + V_1 \frac{\rho_2}{\varepsilon_0} \quad (10)$$

⁵ Il problema proposto in precedenza fa riferimento a due distribuzioni di carica con la *stessa* geometria, ed in particolare due distribuzioni superficiali. Qui si stanno invece considerando due distribuzioni volumetriche di forma qualsiasi, anche molto diversa fra loro. Lo scopo è di dimostrare l'uguaglianza nel caso più generale di due corpi generici, non necessariamente per uno stesso conduttore caricato in due modi differenti.

⁶ \int_{spazio} indica l'integrale su tutto lo spazio.

Integrando su tutto lo spazio e usando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau &= \int_{\text{spazio}} \nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \\ &= \int_{\text{spazio}} V_1 \nabla V_2 \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \end{aligned}$$

0

dove il primo integrale è nullo perché è un integrale di superficie su tutto lo spazio. Rimane quindi:

$$\int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \quad (11)$$

Analogamente, applicando (9) con $f\mathbf{A} = V_2(\nabla V_1)$, otteniamo:

$$\int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau \quad (12)$$

Confrontando (11) e (12), otteniamo infine

$$\int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau,$$

che prova la tesi. ■

Problema 18. Una carica $q > 0$ è posta in un punto P di fronte ad un conduttore collegato a terra.

1. Calcolare la carica q_{in} indotta sul conduttore dalla carica q applicando il Teorema di reciprocità, e supponendo che lo stesso conduttore, carico ad un potenziale V_C , generi nel punto P il potenziale V_P in assenza di carica.
2. Se il generico conduttore è sostituito da una sfera conduttrice di raggio R il cui centro è distante D dal punto P , si determini q_{in} in funzione di q , R e D alle stesse condizioni del punto precedente.

SOLUZIONE:

1. Applicando il Teorema di reciprocità, abbiamo:

$$|V_C q_{\text{in}}| = |V_P q|$$

da cui:

$$q_{\text{in}} = - \left| \frac{V_P}{V_C} \right| q.$$

2. La sfera conduttrice è carica ad un potenziale

$$V_C = k_e \frac{q_{\text{in}}}{R},$$

mentre il potenziale nel punto P è pari a

$$V_C = k_e \frac{q_{\text{in}}}{D}$$

(immaginando q_{in} come puntiforme, al centro della sfera). Applicando la relazione trovata al punto precedente, abbiamo:

$$q_{\text{in}} = - \left| \frac{V_P}{V_C} \right| q = \boxed{-\frac{R}{D} q}.$$

■

Problema 19. Sia

$$\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$$

un campo vettoriale.

1. Calcolare l'equazione delle linee di campo di \mathbf{A} sul piano xy .
2. Calcolare il rotore di \mathbf{A} .
3. Calcolare la circuitazione di \mathbf{A} lungo la linea chiusa di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
4. Dimostrare la validità del Teorema di Stokes applicata alla superficie piana delimitata dalla curva $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUZIONE:

1. Partiamo dalla relazione

$$\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}.$$

Vale che:

$$\|\mathbf{A}\|^2 = (-y)^2 + (x)^2 = x^2 + y^2.$$

Definendo $\|\mathbf{A}\|^2 \doteq R$, l'equazione delle linee di campo è chiaramente l'equazione di una circonferenza di raggio R :

$$\boxed{x^2 + y^2 = R},$$

con $R \in [0, +\infty)$.

2. Dalla definizione,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = -\overset{0}{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}}\hat{\mathbf{i}} - \overset{0}{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}}\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} = \boxed{2\hat{\mathbf{k}}}.$$

3. Notiamo che \mathbf{A} è tangente in ogni punto alla linea lungo la quale stiamo calcolando la circuitazione. Inoltre, possiamo pensare di percorrere la curva $x^2 + y^2 = 1$ in senso antiorario (come da convenzione), mentre \mathbf{A} percorre la stessa curva ma in senso orario. Quindi:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_l (-ydx + xdy) \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin\vartheta(-\sin\vartheta d\vartheta) + \cos\vartheta(\cos\vartheta d\vartheta)] \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta = \boxed{2\pi}.\end{aligned}$$

4. Vogliamo verificare la validità del Teorema di Stokes, ossia:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Calcoliamo quindi il primo termine dell'uguaglianza:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \int_S d\mathbf{S} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S} = \boxed{2\pi}.$$

Il Teorema di Stokes è dunque verificato in questo caso.

■

Problema 20. *Dati i campi:*

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (x+y)\hat{\mathbf{i}} + (-x+y)\hat{\mathbf{j}} - 2z\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= 2y\hat{\mathbf{i}} + (2x+3z)\hat{\mathbf{j}} + 3y\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{C} &= (x^2 - z^2)\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2xz\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

calcolare per ciascuno di essi

1. *la divergenza;*
2. *il rotore.*

Uno solo di questi campi è un campo elettrostatico. Si determini la sua funzione potenziale $V = V(x, y, z)$ e si verifichi che il suo gradiente cambiato di segno coincide con il suddetto campo.

SOLUZIONE:

- 1.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-x+y)}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} \\ &= 1 + 1 - 2 = \boxed{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial 2y}{\partial x} + \frac{\partial(2x+3z)}{\partial y} + \frac{\partial 3y}{\partial z} \\ &= 0 + 0 + 0 = \boxed{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{C} &= \frac{\partial(x^2 - z^2)}{\partial x} + \frac{\partial 2}{\partial y} + \frac{\partial 2xz}{\partial z} \\ &= 2x + 0 + 2x = \boxed{4x}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y) & (-x+y) & -2z \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(-1-1) = \boxed{-2\hat{\mathbf{k}}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & (2x+3z) & 3y \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(3-3) - \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(2-2) = \boxed{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{C} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 - z^2) & 2 & 2xz \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(2z+2z) + \hat{\mathbf{k}}(0-0) = \boxed{-4z\hat{\mathbf{j}}}.\end{aligned}$$

Il campo elettrostatico è chiaramente \mathbf{B} , perché è l'unico ad avere rotore nullo. La relazione che intercorre fra il campo elettrico \mathbf{B} e il suo potenziale V è

$$\mathbf{B} = -\nabla V,$$

quindi per ottenere V bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -2y \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -2x - 3z \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -3y \end{cases}$$

Integrando,

$$\begin{cases} V = -2xy + c_1(y, z) \\ V = -2xy - 3yz + c_2(x, z) \\ V = -3yz + c_3(x, y) \end{cases}$$

Usando – ad esempio – le prime due equazioni, otteniamo la condizione

$$c_1(y, z) = -3yz + c_2(x, z).$$

Ora, poiché c_1 è funzione di y e z e c_2 è funzione di x e z , l'unico modo di soddisfare la condizione è richiedere che c_2 sia nulla rispetto a x , o in altri termini che c_2 sia funzione solo di z e non di x . Usando questo fatto e la terza equazione del sistema, otteniamo poi

$$c_3(x, y) = -2xy + c_2(z).$$

Di nuovo, per soddisfare la condizione, bisogna richiedere che c_2 sia nulla rispetto a z , ossia $c_2 = 0$. Riassumendo,

$$\begin{cases} c_1(y, z) = -3yz \\ c_2(x, z) = 0 \\ c_3(x, y) = -2xy \end{cases} \implies \boxed{V = -2xy - 3yz}.$$

La relazione $\mathbf{B} = -\nabla V$ è facile da verificare. Vale:

$$-\nabla V = \nabla(-V) = \nabla(2xy + 3yz) = (2y, 2x + 3z, 3y) \equiv \mathbf{B}.$$

Soluzione alternativa. È possibile ottenere V usando la relazione

$$V(P) = \int_{l \text{ } V=0}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

dove l è un cammino arbitrario dal punto in cui poniamo $V = 0$ fino al punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ in cui vogliamo calcolare il potenziale. Esprimendo $d\mathbf{l}$ come (dx, dy, dz) e scegliendo come punto iniziale $(0, 0, 0)$ abbiamo:

$$V(P) = \int_{l \text{ } O}^P [2ydx + (2x + 3z)dy + 3ydz].$$

Scegliamo – ad esempio – il cammino riportato in Figura 14.

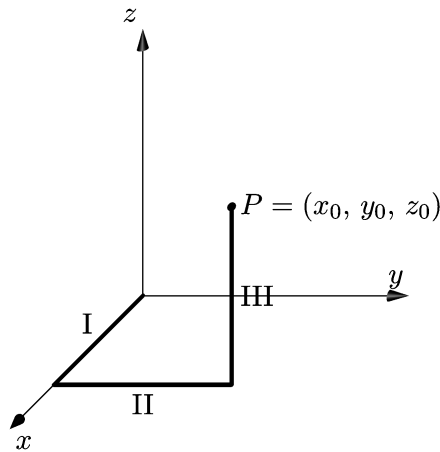


Figura 14: Cammino arbitrario tra 0 e P

Mettendo un segno “−” davanti al dy nel tratto II, e davanti al dz nel tratto III, perché gli spostamenti sono in verso opposto agli assi, si ha:

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \int_{\substack{l \\ V=0}}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{II} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{III} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_{(0,0,0)}^{(x_0,0,0)} [2 \cdot 0 \cdot dx + (2x + 3 \cdot 0) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0] + \\
 &\quad + \int_{(x_0,0,0)}^{(x_0,y_0,0)} [2y \cdot 0 - (2x + 3 \cdot 0) \cdot dy + 3y \cdot 0] + \\
 &\quad + \int_{(x_0,y_0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} [2y \cdot 0 + (2x + 3y) \cdot 0 - 3y dz] \\
 &= -2xy \Big|_{(x_0,0,0)}^{(x_0,y_0,0)} - 3yz \Big|_{(x_0,y_0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} = -2x_0y_0 - 3y_0z_0,
 \end{aligned}$$

ossia

$$V(x, y, z) = -2xy - 3yz.$$

■

Problema 21. Si calcolino:

1. il campo elettrico fra due cilindri coassiali infinitamente lunghi aventi raggi a e b (Figura 15), sapendo che la carica per unità di lunghezza sul cilindro interno è $+\lambda$ mentre quella sul cilindro esterno è $-\lambda$;
2. la differenza di potenziale $V_A - V_B$ fra i due cilindri.

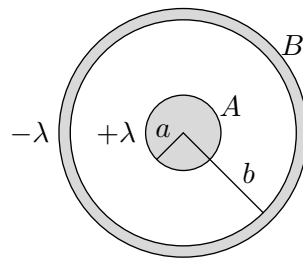


Figura 15: Cilindri coassiali infiniti

SOLUZIONE:

1. Per ragioni di simmetria, sappiamo che fra i due cilindri il campo elettrico \mathbf{E} è radiale, ed è diretto dal cilindro interno verso quello esterno. Possiamo quindi calcolarne facilmente il modulo usando il Teorema di Gauss. A tale scopo, consideriamo una superficie gaussiana

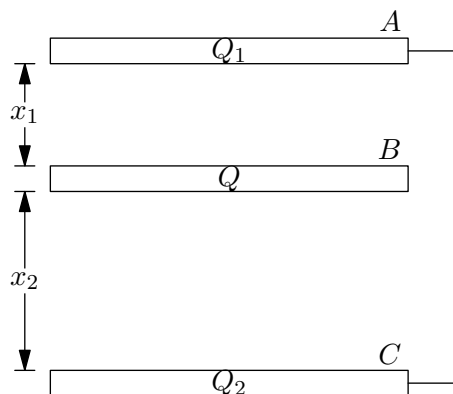


Figura 16: Tre lastre conduttrici parallele

di forma cilindrica, con raggio $a < r < b$ e altezza h , da cui:

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = E(r)S = E(r)2\pi rh \\ \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \end{cases} \implies \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}}$$

2. La relazione generale che lega \mathbf{E} e V è $\mathbf{E} = -\nabla V$. In questo caso, però, \mathbf{E} è solo funzione della distanza dall'asse, quindi possiamo scrivere che

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

Integrando,

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r)|_a^b = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Quindi

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

■

Problema 22. Tre lastre conduttrici piane sono disposte parallelamente tra loro come in Figura 16. Le piastre hanno area A e le distanze x_1 e x_2 sono infinitesime rispetto a \sqrt{A} . La piastra superiore è connessa a quella inferiore tramite un filo conduttore. Sulla piastra centrale è depositata uniformemente una carica Q .

Determinare le cariche indotte Q_1 e Q_2 rispettivamente sulla piastra superiore e su quella inferiore, note le distanze x_1 e x_2 e trascurando gli effetti del campo ai bordi delle piastre.

SOLUZIONE: Il calcolo delle cariche indotte Q_1 e Q_2 equivale al calcolo delle distribuzioni superficiali di carica σ_1 e σ_2 , che d'ora in poi saranno le nostre incognite.

Usando il Principio di sovrapposizione, il Teorema degli elementi corrispondenti e il fatto che il potenziale su A e C deve essere lo stesso perché sono collegate da un filo (il potenziale sulla superficie di un conduttore è costante), possiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \\ E_1 x_1 = E_2 x_2 \\ Q_1 + Q_2 = -Q \end{cases}$$

È un sistema di 4 equazioni in 4 incognite ($E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2$), perché le σ_i sono legate alle Q_i dalla relazione

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{A}.$$

Risolvendo, abbiamo:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x_2}{x_1 + x_2} \\ E_2 = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ \sigma_1 = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2} \sigma \\ \sigma_2 = \frac{x_2 - 2x_1}{x_1 + x_2} \sigma \end{cases}$$

■

Problema 23. *Lo strato sottile semisferico illustrato in Figura 17 ha raggio R ed è uniformemente carico. Nota la carica Q distribuita su di esso, si calcolino:*

1. *il potenziale lungo tutto l'asse z ($z > R$ e $z < R$);*
2. *il campo elettrico lungo tutto l'asse z .*

SOLUZIONE:

1. Utilizzando gli angoli illustrati in Figura 17, abbiamo:

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}; \quad dS = [(R \sin \vartheta) d\psi] (R d\vartheta) = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

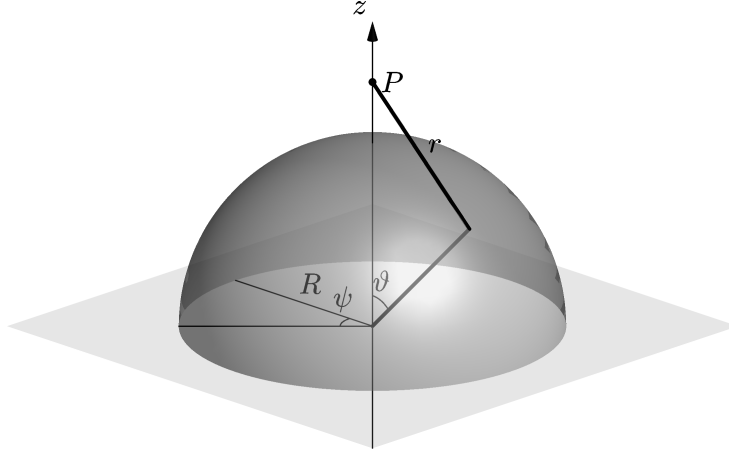


Figura 17: Emisfero carico

Definita $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi R^2}$, possiamo quindi calcolare il potenziale V direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned}
 V &= k_e \int_S \frac{1}{r} \sigma dS \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma R^2 \sin \vartheta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} d\vartheta d\psi \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma R^2}{2zR} \frac{2zR \sin \vartheta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} d\vartheta \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \left[\frac{\sigma R^2}{2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= k_e \frac{\sigma R^2}{zR} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z - R| \right) \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \\
 &= -k_e \frac{Q}{2\pi R^2} \frac{R^2}{zR} \left(|z - R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right) 2\pi \\
 &= \boxed{-k_e \frac{Q}{zR} \left(|z - R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right)}.
 \end{aligned}$$

Notiamo che

$$V \sim_{\pm\infty} \pm k_e \frac{Q}{z},$$

cioè, a grandi distanze dalla distribuzione, il potenziale va come quello di una carica puntiforme Q .

2.

$$\begin{aligned}
 E &= -|\nabla V| = -\frac{\partial V}{\partial z} \\
 &= \left[k_e \frac{Q}{zR} \left(|z-R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right) \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{|z-R|}{zR} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{z \cdot \text{sgn}(z-R) - R \cdot \text{sgn}(z-R)}{zR} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{\text{sgn}(z-R)}{R} - \frac{\text{sgn}(z-R)}{z} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left(0 + \frac{\text{sgn}(z-R)}{z^2} - \frac{1}{R} \frac{\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \cdot z - \sqrt{z^2 + R^2} \cdot 1}{z^2} \right) \\
 &= k_e Q \left(\text{sgn}(z-R) - \frac{1}{R} \frac{z^2 - z^2 - R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\
 &= \boxed{k_e \frac{Q}{z^2} \left(\text{sgn}(z-R) + \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Notiamo che, come nel caso del potenziale,

$$E \sim_{\pm\infty} \pm k_e \frac{Q}{z^2},$$

cioè, a grandi distanze dalla distribuzione, il campo elettrico va come quello di una carica puntiforme Q . ■

Problema 24. Un campo elettrico \mathbf{E} è descritto – in coordinate cilindriche – dal potenziale

$$V(r, \varphi, z) = 80\varphi [V].$$

Calcolare:

1. l'energia immagazzinata nella regione

$$r \in [2, 4] \text{ cm}; \quad \varphi \in [0, 0.2\pi]; \quad z \in [0, 1] \text{ m};$$

2. il valore massimo della densità di energia u nella regione specificata;

3. la differenza di potenziale V_{AB} tra i punti $A = (r = 3 \text{ cm}, \varphi = 0, z = 0)$ e $B = (3 \text{ cm}, 0.2\pi, 1 \text{ m})$.

SOLUZIONE:

$$1. \mathbf{E} = -\nabla V = -80\hat{\varphi} \frac{C}{m}.$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (-80)^2 = 320\varepsilon_0 \frac{J}{m^3}.$$

$$W = u\tau = 320\varepsilon_0 \cdot 2 \times 10^{-1} \pi \cdot (4 - 2) \times 10^{-2} \cdot 1 \text{ J} = 320\varepsilon_0 4\pi \times 10^{-3} \text{ J} = \boxed{\frac{320}{k_e} \text{ J}}.$$

2. Poiché u è costante, il suo massimo nella regione considerata coincide con il valore calcolato precedentemente.

$$3. V_B - V_A = 80(0.2\pi - 0) \text{ V} = \boxed{16\pi \text{ V}}.$$

■

Problema 25. Una carica di densità σ è distribuita uniformemente sul triangolo in Figura 18; il lato BC ha lunghezza b pari al doppio dell'altezza relativa AH , di lunghezza a . Si calcoli il potenziale sul vertice A .

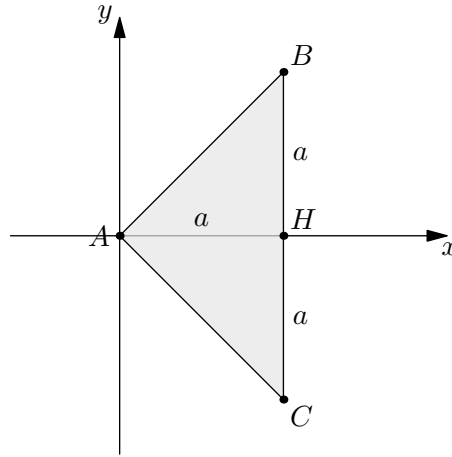


Figura 18: Distribuzione di carica uniforme su un triangolo

SOLUZIONE: Per calcolare il potenziale in A utilizziamo l'equazione:

$$V = \int k_e \frac{\sigma}{r} dS, \quad (13)$$

dove r è la distanza del vertice A da un fazzoletto infinitesimo di superficie del triangolo considerato. Osserviamo che $dS = dx dy$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre $b = 2a$. Facendo riferimento alla Figura 18 e sostituendo nell'equazione (13) otteniamo:

$$\begin{aligned} V(A) &= k_e \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \\ &= k_e \sigma \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{1/x}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} dy \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\int_{-x}^x \frac{1/x}{\sqrt{1+(y/x)^2}} dy &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{y=-x}^x \\ &= 2 \operatorname{arsinh}(1) \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Sostituendo ancora:

$$\begin{aligned}V(A) &= 2k_e \sigma \int_0^a \ln(1 + \sqrt{2}) dx \\ &= 2k_e \sigma \ln(1 + \sqrt{2}) \int_0^a dx \\ &= \boxed{2k_e \sigma \ln(1 + \sqrt{2}) a}\end{aligned}$$

Soluzione alternativa. Il triangolo può essere visto come una successione di fili verticali, ognuno di densità lineare di carica $\lambda = \sigma dx$ e lunghezza $2x$, dove x è la posizione del filo che andiamo a considerare. La posizione di un elemento infinitesimo dl del filo è $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e $dl \equiv dy$. Ogni filo dà quindi un contributo al potenziale

$$dV = \int_l \frac{1}{r} \lambda dl = \int_{y=-x}^x \frac{1}{r} (\sigma dx) dy.$$

Sommando tutti i contributi al potenziale otteniamo:

$$V(A) = \int dV = \int_{x=0}^a \int_{y=-x}^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma dx dy,$$

come già ottenuto in precedenza.

■

Riferimenti bibliografici

[Griffiths] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Addison-Wesley, 4th edition, 2012. ISBN-13 978-0-321-85656-2.

[Mencuccini] Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini, *Fisica II: Elettromagnetismo – Ottica*. Liguori Editore, Napoli, 1988. ISBN 88-207-1633-X.