(mini) Teoremario/Lemario de álgebra lineal 2C2024

Algunas de las veces en que Mariano Suárez Álvarez escribió teorema/lema/prop y lo demostró.

Luca Martínez

0.1 Aclaración

Faltan muchas demostraciones de teoremas, lemas y props, le di prioridad a los teoremas/lemas que tienen demostraciones que no son fáciles. Intenté agregar los que me parecieran más útiles, si hay alguno no tan importante es porque me pareció que la idea que se usa para probarlo es diferente a las demás. La mayoría de demostraciones son simplemente las que Mariano hizo en las clases teóricas.

1 Cuerpos

(No son difíciles estas demostraciones pero las quería agregar.)

1.1 Lema

Hay un único cero.

Demostración: Supongamos que existen dos ceros: 0 y $0'$ con $0 \neq 0'$

$$0 = 0 + 0'$$

$$0 = 0' \ \square \text{ (absurdo)}$$

1.2 Lema

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $x, y, z \in \mathbb{K}$. Si $x + y = z + y$, entonces $x = z$

Demostración:

$$x + y = z + y$$

$$x + y + (-y) = z + y + (-y)$$

$$x + 0 = z + 0$$

$$x = z \ \square$$

1.3 Lema

El producto de dos elementos no nulos de un cuerpo $\mathbb{K}$ es no nulo ($\mathbb{K}$ es un dominio de integridad).

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Supongamos que $xy = 0$ pero $x \neq 0$, veamos entonces que $y = 0$

$$xy = 0$$

$$x^{-1}xy = 0x^{-1}$$

$$y = 0 \ \square$$

2 Espacios vectoriales

2.1 Lema

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{V}$. Si $\lambda v = 0$, entonces $\lambda = 0$ o $v = 0$

Demostración: Supongamos que $\lambda v = 0$ pero $\lambda \neq 0$. Veamos que entonces $v = 0$

$$\lambda v = 0$$

$$\lambda^{-1}\lambda v = 0\lambda^{-1}$$

$$v = 0$$

2.2 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un e.v, $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{V}$ y $\mathbf{T}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Si $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$, entonces $\langle \mathbf{S} \rangle \subseteq \mathbf{T}$.

Demostración: No es difícil

2.3 Teorema

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ que es finitamente generado posee bases finitas.

Demostración: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial finitamente generado. Sea $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{V}$ finito tal que $\langle \mathbf{G} \rangle = \mathbb{V}$

Sea $\mathcal{X} = \{|\mathbf{H}| : \mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}, \langle \mathbf{H} \rangle = \mathbb{V}\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Sabemos que $\mathcal{X}$ es no vacío porque $\mathbf{G} \in \mathcal{X}$. Entonces existe $m = \min(\mathcal{X})$. Por lo tanto hay un conjunto $\mathfrak{B}$ con m elementos tal que $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathbb{V}$

Veamos que no existe otro conjunto $\mathbf{K} \subseteq \mathfrak{B}$ distinto de $\mathfrak{B}$ tal que $\langle \mathbf{K} \rangle = \mathbb{V}$. Si existiera, entonces $|\mathbf{K}| < |\mathfrak{B}| = m$. Por lo que $m \neq \min(\mathcal{X})$ pues debería ser que $|\mathbf{K}| \in \mathcal{X}$. $\square$

2.4 Lema (Intercambio de Steinitz)

Sea $\mathbb{V}$ un e.v y $\mathfrak{B}$ una base finita de $\mathbb{V}$, entonces:

1. Si $v \in \mathbb{V}$ es no nulo, existe $w \in \mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{B} - \{w\}) \cup \{v\}$ es base de $\mathbb{V}$

2. Si $\mathbf{C} \subseteq \mathfrak{B}$ y $v \in (\mathbb{V} - \mathbf{C})$ tal que $\mathbf{C} \cup \{v\}$ es LI, entonces existe $w \in \mathfrak{B} - \mathbf{C} : (\mathfrak{B} - \{w\}) \cup \{v\}$ es base de $\mathbb{V}$

Demostración (1.): Sea $\mathfrak{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ y $v \in \mathbb{V}$. Si $v \in \mathfrak{B}$, elegimos $w = v$. Supongamos que $v \notin \mathfrak{B}$, como $\mathfrak{B}$ es base, existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$$

Como v es no nulo, alguno de estos coeficientes no es cero, sea λ_j aquel que no lo es, con $j \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, existe λ_j^{-1}.

$$\lambda_j^{-1} v = \lambda_j^{-1}\lambda_1 b_1 + ... + b_j + ... + \lambda_j^{-1}\lambda_n b_n$$

$$\lambda_j^{-1} v - \underbrace{(\lambda_j^{-1}\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_j^{-1}\lambda_n b_n)}_{b_j \text{ no está}} = b_j$$

Por lo tanto, $b_j \in \langle v, b_1, .., b_n \rangle = \langle \mathfrak{B}' \rangle$ (pero b_j no es un generador). Como todos los demás b_i son los mismos, entonces $\mathfrak{B} \subseteq \langle \mathfrak{B}' \rangle$, así que $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathbb{V} \subseteq \langle \mathfrak{B}' \rangle$. Por lo que $\mathfrak{B}'$ genera $\mathbb{V}$. Para probar que los elementos de $\mathfrak{B}'$ son LI basta con recordar que v es combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$ y que λ_j es no nulo. $\square$

2.5 Lema

Sea $\mathbb{V}$ un e.v y $\mathfrak{B}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que $|\mathfrak{B}| = n$. Todo conjunto LI de $\mathbb{V}$ de cardinal n es una base.

Demostración: Sea $\mathfrak{B} = \{b_1, .., b_n\}$ y $\mathcal{T} = \{t_1, ..., t_n\}$ un conjunto LI de $\mathbb{V}$, ambos con cardinal n. Para cada $r \in \{0, ..., n\}$ sea $\mathrm{D_r}$ la afirmación: "Hay un subconjunto D de $\mathfrak{B}$ con $n - r$ elementos tal que $\{t_1, .., t_r\} \cup \mathrm{D}$ es base de $\mathbb{V}$". Sabemos que $\mathrm{D_0}$ es cierta con $\mathrm{D} = \mathfrak{B}$.

Supongamos que la afirmación vale hasta k, queremos ver que entonces vale para $k+1$. Como $\mathrm{D_k}$ es cierta, tenemos que $\mathfrak{B}' = \{t_1, ..., t_k\} \cup \mathrm{D}$ es base de $\mathbb{V}$, con $|\mathrm{D}| = n-k$. Consideremos que $t_{k+1} \in \mathfrak{B}'$, entonces necesariamente t_{k+1} pertenece a D, dado que es LI respecto de $\{t_1, ..., t_k\}$, de esta manera tendriamos que si $\mathrm{D}' = \mathrm{D} - \{t_{k+1}\}$, entonces $\{t_1, ..., t_{k+1}\} \cup \mathrm{D}'$ es base de $\mathbb{V}$, y $|\mathrm{D}'| = n-k-1$, por lo que $\mathrm{D_{k+1}}$ es cierta. Si $t_{k+1} \notin \mathfrak{B}'$, considerando $\mathcal{T}_k = \{t_1, ..., t_k\}$, sabemos que $\mathcal{T}_k \cup \{t_{k+1}\}$ es LI. Entonces, el punto (2.) del lema anterior nos dice que existe $w \in \mathfrak{B}' - \mathcal{T}_k$ tal que $(\mathfrak{B}' - \{w\}) \cup \{t_{k+1}\}$ es base de $\mathbb{V}$. Así que, tomando $\mathrm{D}' = \mathrm{D} - \{w\}$, tenemos que $\{t_1, ..., t_{k+1}\} \cup \mathrm{D}'$ es base de $\mathbb{V}$ con $|\mathrm{D}'| = n-k-1$. $\square$

2.6 Corolario

Si $\mathbb{V}$ es un e.v finitamente generado, todas sus bases son finitas y tienen el mismo cardinal.

3 Transformaciones lineales

3.1 Lema

Sean $f, g \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ con $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v. El conjunto ecualizador de f y g, $\mathcal{K}(f,g) = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = g(x)\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Demostración: Es lo de siempre.

3.2 Propiedad

Sean $f, g \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y sea $\mathfrak{G} \leq \mathbb{V}$ tal que $\langle \mathfrak{G} \rangle = \mathbb{V}$. Son equivalentes:

1. $f = g$

2. $f(x) = g(x) \quad$ para todo $x \in \mathfrak{G}$

Demostración: Que (1.) implica (2.) es obvio. Veamos que (2.) implica (1.):

$$\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{K}(f,g)$$

$$\langle \mathfrak{G} \rangle \subseteq \mathcal{K}(f,g)$$

$$\mathbb{V} = \mathcal{K}(f,g)$$

$$f = g \quad \square$$

3.3 Teorema

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v y $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita si y solo si $\mathrm{im}(f)$ y $\ker(f)$ tienen dimensión finita.

Demostración: Si $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita no es difícil de probar que $\mathrm{im}(f)$ y $\ker(f)$ también tienen dimensión finita.

Supongamos que $\mathrm{im}(f)$ y $\ker(f)$ tienen dimensión finita. Sea $\mathcal{K} = \{x_1, ..., x_k\}$ base de $\ker(f)$, y sea $\mathcal{I} = \{z_1, ..., z_m\}$ base de $\mathrm{im}(f)$. Para cada uno de estos elementos $z_i, i \in \{1, ..., m\}$, existen $y_1, ..., y_m \in \mathbb{V}$ tales que $f(y_i) = z_i$. Veamos que $\{y_1, ..., y_m\}$ es un conjunto LI. Supongamos que existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ que cumplen que:

$$\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_m y_m = 0$$

$$f(\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_m y_m) = f(0)$$

$$\lambda_1 z_1 + ... + \lambda_m z_m = 0$$

Esta es una combinación lineal de elementos de un conjunto LI igual a cero, entonces $\lambda_i = 0$.

Afirmo que $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_m\}$ es base de $\mathbb{V}$. Para verificar esto, en primer lugar veamos que $\mathfrak{B}$ es un conjunto LI. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_{k+m} \in \mathbb{K}$ escalares que satisfacen que:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{k+m} y_m = 0$$

$$f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k}_{\in \ker(f)} + ... + \lambda_{k+m} y_m) = f(0)$$

$$f(\lambda_{k+1}y_1 + ... + \lambda_{k+m}y_m) = 0$$

$$\lambda_{k+1}z_1 + ... + \lambda_{k+m}z_m = 0$$

Tenemos una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{I}$ cuyo resultado es nulo, entonces $\lambda_j = 0, j \in \{k+1, ..., k+m\}$. Como estos escalares son todos nulos, lo que en realidad teníamos era una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{K}$ igual a cero, así que todos los otros escalares también son nulos. Por último, veamos que $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathbb{V}$. Sea $x \in \mathbb{V}$, obviamente, $f(x) \in \text{im}(f)$, por lo que existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que:

$$f(x) = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_m z_m$$

$$f(x) = \alpha_1 f(y_1) + ... + \alpha_m f(y_m)$$

$$f(x) = f(\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m)$$

$$f(x - (\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m)) = 0$$

Así que $x - (\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m) \in \ker(f)$, esto quiere decir que hay escalares $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{K}$ que cumplen que:

$$x - (\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m) = \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k$$

$$x = \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m$$

$\mathfrak{B}$ es una base de $\mathbb{V}$ con $m + k$ elementos, así que la dimensión de $\mathbb{V}$ es, claramente, finita. $\square$

3.4 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión finita y $f \in \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, entonces:

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$$

3.5 Teorema

Toda transformación lineal $f \in \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ queda unívocamente determinada por su definición en una base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{V}$.

Demostración: Sea $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ base de $\mathbb{V}$.

1. Unicidad: Supongamos que existen $f, g \in \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tales que $f(x_i) = g(x_i) = y_i$, con $y_i \in \mathbb{W}$ cualesquiera y para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathbb{V}$, entonces $f = g$ (Propiedad 3.2).

2. Existencia: Sea $x \in \mathbb{V}$, de manera que hay escalares unívocamente determinados (únicos para cada x) $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$$

Sea f una función dada por:

$$f(x) = \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n$$

(no apliqué f aunque parezca que sí, solo mostré una función que cumple que $f(x_i) = y_i$, quedaría ver que es lineal pero eso es fácil). $\square$

3.6 Propiedad

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ son isomorfos (existe $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ isomorfismo) si y solo si $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$

Demostración: (1.) implica (2.): Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v, $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ ($\dim(\mathbb{V}) = n$) base de $\mathbb{V}$ y sea $f \in \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ un isomorfismo. Como f es sobreyectiva y $\langle \mathfrak{B} \rangle = \mathbb{V}$, entonces $\langle f(\mathfrak{B}) \rangle = \mathbb{W}$. Además, como f es inyectiva, $f(\mathfrak{B})$ es LI.

$$f(\mathfrak{B}) = \{f(x_1), ..., f(x_n)\}$$

$$\mathbb{W} = \langle f(\mathfrak{B}) \rangle = \langle f(x_1), ..., f(x_n) \rangle$$

Entonces, $\mathfrak{F} = \{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ es un conjunto LI y genera $\mathbb{W}$, por lo que es una base de dicho espacio, como $|\mathfrak{F}| = n$, se tiene que $\dim(\mathbb{W}) = n = \dim(\mathbb{V})$

(2.) implica (1.): Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v tales que $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$. Sean $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ y $\mathfrak{B}' = \{y_1, ..., y_n\}$ bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente. Sé que existe una función lineal $f \in \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ (Teorema

3.5) tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Afirmo que f es un isomorfismo (biyectiva). Veamos primero que es inyectiva: Sea $x \in \ker(f)$. Como $\mathfrak{B}$ es base de $\mathbb{V}$, hay escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$$

$$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n)$$
$$0 = \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$$
$$0 = \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n$$

Esta es una combinación lineal de elementos de la base $\mathfrak{B}'$ cuyo resultado es nulo, entonces, $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $x = 0$. Veamos ahora que f es sobreyectiva: Sea $x \in \mathbb{W}$, entonces, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x = \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n$$

$$x = \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Así que $x \in \langle f(\mathfrak{B}) \rangle$ y por lo tanto $\mathbb{W} \subseteq \langle f(\mathfrak{B}) \rangle$, luego: $\mathbb{W} = \langle f(\mathfrak{B}) \rangle = \operatorname{im}(f)$ $\square$

3.7 Propiedad

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v de dimensión finita (n y m respectivamente). $\hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tiene dimensión finita y $\dim(\hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})) = \dim(\mathbb{V})\dim(\mathbb{W})$

Demostración: Basta con probar que la función $\Phi : \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dada por $\Phi(f) = |f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$, con $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ base de $\mathbb{V}$ y $\mathfrak{B}' = \{y_1, ..., y_m\}$ base de $\mathbb{W}$, es un isomorfismo. Veamos primero que es lineal: Sean $f, g \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = |\alpha f + \beta g|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$$

$$|\alpha f + \beta g|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [(\alpha f + \beta g)(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [(\alpha f + \beta g)(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ [\alpha f(x_1)]_{\mathfrak{B}'} + [\beta g(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [\alpha f(x_n)]_{\mathfrak{B}'} + [\beta g(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ [\alpha f(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [\alpha f(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} | & & | \\ [\beta g(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [\beta g(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [f(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} | & & | \\ [g(x_1)]_{\mathfrak{B}'} & \dots & [g(x_n)]_{\mathfrak{B}'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$
$$= \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$$

En segundo lugar, verifiquemos que es inyectiva: Sea $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tal que $\Phi(f) = 0$ (la matriz nula). Es decir: $|f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = 0$. Por ende, $[f(x_j)]_{\mathfrak{B}'} = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, luego $f(x_j) = 0$ ($[\ ]_{\mathfrak{B}'}$ es inyectiva), lo que nos dice que $f = 0$.

Por último, veamos que es sobreyectiva: Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Consideremos entonces $f \in \hom(\mathbb{V}, W)$ dada por: $f(x_j) = a_{1j}y_1 + ... + a_{mj}y_m$. Claramente, $|f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = \Phi(f) = A$ (recordar que $y_1, ..., y_m$ son los vectores de la base $\mathfrak{B}'$). $\square$

4 Determinante

4.1 Propiedad

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v. Una funcion $f : \mathbb{V}^d$ $(\underbrace{\mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V}}_{\text{d veces}}) \longrightarrow \mathbb{W}$ multilineal (es decir, lineal respecto de cada argumento) es alternada si y solo si se anula cuando sus vectores son LD. (Recuerdo: Dados $x_1, ..., x_d \in \mathbb{V}$, una función es alternada si y solo si $f(x_1, ..., x_d) = 0$ siempre que dos de los argumentos son iguales).

Demostración: (1.) implica (2.): Sea $\{x_1, ..., x_d\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto LD, de manera que hay escalares $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_d x_d = 0$$

Sea $j \in \{1, ..., d\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$, entonces tenemos que:

$$-(\lambda_j^{-1}\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_j^{-1}\lambda_d x_d) = x_j$$

Así que:

$$f(x_1, ..., x_d) = f(x_1, ..., \underbrace{-(\lambda_j^{-1}\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_j^{-1}\lambda_d x_d)}_{\text{j}}, ..., x_d)$$

$$\underbrace{=}_{\text{multilinealidad}} \sum_{i=1, i\neq j}^{d} -(\lambda_j^{-1}\lambda_i) f(x_1, ..., x_i, ..., x_d) = 0 \text{ (en cada sumando siempre hay dos argumentos repetidos)}$$

(2.) implica (1.): No es difícil de probar, si la función f se anula cuando los argumentos son LD, si hay dos iguales, entonces el conjunto de dichos argumentos es de la forma: $\{x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d\}$ con $x_i = x_j$ para un i y un j entre 1 y d, entonces obviamente ese conjunto es LD. $\square$

4.2 Propiedad

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v, una función multilineal $f : \mathbb{V}^d \longrightarrow \mathbb{W}$ es alternada si y solo si $f(x_1, ..., x_d) = 0$ cada vez que hay un $i \in \{1, ..., d-1\}$ tal que $x_i = x_{i+1}$ (o sea, dos argumentos contiguos iguales).

Demostración: (1.) implica (2.): Es evidente.

(2.) implica (1.): Para cada $r \in \{0, ...d\}$ sea $\mathcal{P}(r)$ la afirmación: "Si existen $i, j \in \{1, ..., d\} : x_i = x_j$ con $0 < j - i \leq r + 1$, entonces $f(x_1, ..., x_d) = 0$". Supongamos entonces que $0 \leq r < d$ y que $\mathcal{P}(r)$ vale, queremos probar que $\mathcal{P}(r+1)$ también vale: Sean $x_1, ..., x_d \in \mathbb{V}$: existen $i, j \in \{1, ..., d\}$ tales que: $0 < j - i = r + 2$ y $x_i = x_j$

$$f(x_1, ..., x_i, ..., \underbrace{x_{j-1} + x_j}_{j-1}, \underbrace{x_{j-1} + x_j}_{j}) = 0 \text{ (porque } \mathcal{P}(0) \text{ es cierta por hipótesis)}$$

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_{j-1} + x_j) + f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, x_{j-1} + x_j)$$

$$0 = \underbrace{f(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_{j-1})}_{0} + f(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_j) + \underbrace{f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, x_j)}_{0} + f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, x_{j-1})$$

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_j) + f(x_1, ..., x_i, ..., \underbrace{x_j}_{j-1}, x_{j-1})$$

Notemos que el segundo sumando es nulo, pues ahora x_i y x_j están a menos de $r + 2$ "lugares", así que mi hipótesis inductiva vale. Luego:

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_j) \ \square$$

(La afirmación que se propone para demostrar por inducción esta propiedad la hace parecer más compleja de lo que en realidad es, la idea es poder "acercar" a x_i y x_j lo suficiente (usando que f es multilineal) para que estén en el rango de tu hipótesis inductiva).

4.3 Propiedad

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos e.v y $f : \mathbb{V}^d \longrightarrow \mathbb{W}$ una función multilineal y alternada, entonces f es antisimétrica. (Recuerdo: $\mathrm{Alt^d}(\mathbb{V}) = \{f : \mathbb{V}^d \longrightarrow \mathbb{K}$ multilineal y alternada$\}$)(Recuerdo: f es antisimétrica si $f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_d)$).

Demostración: Sean $f \in \mathrm{Alt}^d(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $x_1, ..., x_d \in \mathbb{V}$ e $i, j \in \{1, ..., d\}$

$$0 = f(x_1, ..., \underbrace{x_i + x_j}_{i}, ..., \underbrace{x_i + x_j}_{j}, ..., x_d)$$

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_i + x_j, ..., x_d) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_d)$$

$$0 = \underbrace{f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_d)}_{0} + \underbrace{f(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_d)}_{0} + f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_d)$$

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_d)$$

$$-f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_d) \ \square$$

4.4 Lema

Sea $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n y $\mathfrak{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ base de $\mathbb{V}$. La función $\Phi : f \in \mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})$ dada por $\Phi(f) = f(x_1, ..., x_n)$ es lineal e inyectiva

Demostración: Probar que f es lineal es sencillo, veamos que es inyectiva, es decir que: si $\Phi(f) = 0$ entonces $f = 0$, con $f \in \mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})$. Supongamos que existe $f \in \mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})$ tal que $f(x_1, ..., x_n) = 0$. Sean $v_1, ..., v_n \in \mathbb{V}$ cualesquiera, veamos entonces que $f(v_1, ..., v_n) = 0$. Sea $j \in \{1, ..., n\}$, como $\mathfrak{B}$ es base de $\mathbb{V}$, hay escalares $\lambda_{1j}, ..., \lambda_{nj}$ tales que:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i$$

$$f(v_1, ..., v_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1 1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n n} x_{i_n}\right)$$

$$f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1 1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n n} x_{i_n}\right) = \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1 1} ... \lambda_{i_n n} f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$$

Notemos que para todos los términos de la suma en donde existan $j, k \in \{1, ..., n\}$ tales que $i_j = i_k$, f se anula pues tiene dos argumentos iguales.

$$f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1 1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n n} x_{i_n}\right) = \sum_{\substack{i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\} \\ \text{distintos dos a dos}}} \lambda_{i_1 1} ... \lambda_{i_n n} f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$$

Y observemos que si entonces $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$ son distintos dos a dos, $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ tiene como argumentos a $x_1, ..., x_n$ pero permutados, y como f es antisimétrica, $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = 0$. Finalmente, como probamos que $f(v_1, ..., v_n) = 0$ para $v_1, ..., v_n \in \mathbb{V}$ cualesquiera, se tiene que $f = 0$. $\square$

4.5 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un e.v, $\mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})$ es un subespacio de dimensión 1.

Demostración: Como Φ es inyectiva, usando el teorema de la dimensión tenemos que:

$$\dim(\mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})) = \dim(\ker(\Phi)) + \dim(\mathrm{im}(\Phi))$$

Como Φ es inyectiva, sabemos que $\Phi \neq 0$, por lo que existe al menos una función $f \in \mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})$ tal que $\Phi(f) \neq 0$. Por ende, $\dim(\mathrm{im}(\Phi)) = 1 = \dim(\mathbb{K})$ (La inyectividad, en principio, nos dice que la dimensión de la imagen es estrictamente mayor a 0, pero como no puede exceder a la del codominio ($\mathbb{K}$), entonces debe ser necesariamente igual a 1).

$$\dim(\mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})) = \underbrace{\dim(\ker(\Phi))}_{0} + \dim(\mathbb{K})$$

$$\dim(\mathrm{Alt^n}(\mathbb{V})) = 1$$

4.6 Corolario

Φ es un isomorfismo.

Demostración: Se deduce inmediatamente del corolario anterior, pues Φ es inyectiva y las dimensiones de $\mathrm{Alt}^{\mathrm{n}}(\mathbb{V})$ y $\mathbb{K}$ coinciden.

4.7 Teorema

Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Hay una única función $\mathrm{D}_n \in \mathrm{Alt}^{\mathrm{n}}(\mathbb{K}^n)$ que cumple que $\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n) = 1$.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{K}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Definimos $x' = x_1$ y $x'' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Por inducción en n, supongamos que hay una función $\mathrm{D}_{n-1} \in \mathrm{Alt}^{\mathrm{n-1}}(\mathbb{K}^{n-1})$ con $\mathrm{D}_{n-1}(e_1, ..., e_{n-1}) = 1$. Sea D_n dada por:

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., x_n'')$$

Donde $\bar{x}_i''$ denota que ese vector fue eliminado de los argumentos de D_{n-1}. Tomando $n = 1$, la función $\mathrm{D}_1 : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\mathrm{D}_1(x) = x$ es multilineal, alternada (se anula si sus argumentos son LD) y es igual a 1 si se la evalúa en 1. Veamos que $\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n) = 1$

$$\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} e_i' \mathrm{D}_{n-1}(e_1'', ..., \bar{e}_i'', ..., e_n'')$$

Notemos que todos los términos de este sumando son nulos si $i \neq 1$ pues $e_i' = 0$ en esos casos.

$$\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n) = (-1)^2 e_1' \mathrm{D}_{n-1}(e_2'', ..., e_n)$$

$$\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n) = \mathrm{D}_{n-1}(e_2'', ..., e_n'') = 1$$

En segundo lugar, veamos que es alternada. Sea $r \in \{1, ..., n-1\}$ tal que $x_r = x_{r+1}$

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., x_r'', x_{r+1}'', ..., x_n'')$$

De nuevo, casi todos los sumandos son nulos salvo si $i = r, r+1$, ya que en caso contrario hay dos argumentos iguales.

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ...x_n) = (-1)^{r+1} x_r' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_r'', x_{r+1}'', ..., x_n'') + (-1)^{r+2} x_{r+1}' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., x_r'', \bar{x}_{r+1}'', ..., x_n'')$$

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n) = (-1)^{r}(-x_r' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_r'', x_{r+1}'', ..., x_n'') + x_{r+1}' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., x_r'', \bar{x}_{r+1}'', ..., x_n'')) = 0$$

(Recordar que $x_r = x_{r+1}$)

Finalmente, veamos que es multilineal. Sean $x, y \in \mathbb{K}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Vamos a probar que para todo $j \in \{1, ..., n\}$ la función D_n es lineal respecto de la variable j-ésima.

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n'')$$

Sabemos que D_{n-1} sí es multilineal, entonces:

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' (\alpha \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., x, ..., x_n'') + \beta \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., y, ..., x_n''))$$

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \alpha \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., x, ..., x_n'') + (-1)^{i+1} x_i' \beta \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., y, ..., x_n'')$$

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., x, ..., x_n'') + \beta \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i' \mathrm{D}_{n-1}(x_1'', ..., \bar{x}_i'', ..., y, ..., x_n'')$$

$$\mathrm{D}_n(x_1, ..., \alpha x + \beta y, ..., x_n) = \alpha \mathrm{D}_n(x_1, ..., x, ..., x_n) + \beta \mathrm{D}_n(x_1, ..., y, ..., x_n) \quad \square$$

4.8 Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El determinante de A es:

$$\det(A) = \mathrm{D}_n(Ae_1, ..., Ae_n)$$

4.9 Propiedad

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Demostración: Sea $\bar{\mathrm{D}} : (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\bar{\mathrm{D}}_n(x_1, ..., x_n) = \mathrm{D}_n(Ax_1, ..., Ax_n)$. $\bar{\mathrm{D}}_n$ es multilineal, alternada y admite n argumentos. Como ya vimos antes, $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{V})$ tiene dimensión 1, así que, para algún $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\bar{\mathrm{D}}_n(x_1, ..., x_n) = \alpha \mathrm{D}_n(x_1, ..., x_n)$$

Luego,

$$\bar{\mathrm{D}}_n(e_1, ..., e_n) = \alpha \underbrace{\mathrm{D}_n(e_1, ..., e_n)}_{1} = \alpha$$

$$\bar{\mathrm{D}}_n(e_1, ..., e_n) = \mathrm{D}_n(Ae_1, ..., Ae_n) = \det(A)$$

Por lo tanto, $\alpha = \det(A)$.

$$\bar{\mathrm{D}}_n(Be_1, ..., Be_n) = \det(A)\mathrm{D}_n(Be_1, ..., Be_n) = \det(A)\det(B)$$

$$\bar{\mathrm{D}}_n(Be_1, ..., Be_n) = \mathrm{D}_n(ABe_1, ..., ABe_n) = \det(AB)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \square$$

(Lo que sigue ahora (permutaciones) no está explicado muy formalmente.)

4.10 Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$. Una permutación σ de $\{1, ..., n\}$ es una función biyectiva de la forma $\sigma : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$

4.11 Definición

Se le llama grupo simétrico de grado n al conjunto de todas las permutaciones sobre el conjunto $\{1, ..., n\}$, y notamos $\mathcal{S}_n$.

4.12 Definición

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la matriz de permutación de σ es notada por $A(\sigma)$, pertenece a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y es de la forma:

$$A(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Además, definimos como signo de σ ($\mathrm{sgn}(\sigma)$) al determinante de la matriz $A(\sigma)$

4.13 Proposición

Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutación, entonces $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$

Demostración: Basta ver que $A(\sigma)$ es la matriz identidad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con sus columnas permutadas, como el determinante es una función antisimétrica y $\det(I_n) = 1$, entonces permutar solo altera el signo de dicho determinante.

4.14 Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$$

Demostración:

$$\det(A) = \mathrm{D}_n(Ae_1, ..., Ae_n) = \mathrm{D}_n\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right)$$

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \mathrm{D}_n\left(e_{i_1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right)$$

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \mathrm{D}_n(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$$

Notemos que todos los términos en los que $i_k = i_j$ para $k, j \in \{1, ..., n\}$ son nulos pues D_n tiene dos argumentos iguales.

$$\det(A) = \sum_{\substack{i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\} \\ \text{distintos dos a dos}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \mathrm{D}_n(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$$

Observemos que todas las formas de seleccionar números entre 1 y n (con orden) no es más que el grupo simétrico de grado n.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} \underbrace{\mathrm{D}_n(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})}_{\text{sgn}(\sigma)}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n} \ \square$$

5 Espacio dual

5.1 Propiedad

Sean $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n, $x \in \mathbb{V}$, $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ base ordenada de $\mathbb{V}$ y $\mathfrak{B}^* = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ su base dual, entonces:

$$x = \varphi_1(x)x_1 + ... + \varphi_n(x)x_n$$

Demostración: Esta es una igualdad entre vectores, para que se verifique nos es suficiente con que ambos sean la preimagen del mismo elemento al ser evaluados en los elementos de una base de $\mathbb{V}^*$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(\varphi_1(x)x_1 + ... + \varphi_n(x)x_n)$$

$$\varphi_i(\varphi_1(x)x_1 + ... + \varphi_n(x)x_n) = \varphi_1(x)\varphi_i(x_1) + ... + \varphi_n(x)\varphi_i(x_n)$$

Como $\mathfrak{B}^*$ es la base dual de $\mathfrak{B}$, sabemos que $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ (con $j \in \{1, ..., n\}$), luego:

$$\varphi_i(\varphi_1(x)x_1 + ... + \varphi_n(x)x_n) = \varphi_i(x) \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{1} = \varphi_i(x) \ \square$$

5.2 Propiedad

Sean $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n, $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ base ordenada de $\mathbb{V}$ y $\mathfrak{B}^* = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ su base dual. Si $\varphi \in \mathbb{V}^*$, entonces:

$$\varphi = \varphi(x_1)\varphi_1 + ... + \varphi(x_n)\varphi_n$$

Demostración: Esta es una igualdad de funciones, para que se verifique nos es suficiente con que ambas tengan las mismas imagenes al ser evaluadas en los elementos de una base de $\mathbb{V}$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$

$$\varphi(x_i) = \varphi(x_1)\varphi_1(x_i) + ... + \varphi(x_n)\varphi_n(x_i)$$

$$\varphi(x_1)\varphi_1(x_i) + ... + \varphi(x_n)\varphi_n(x_i) = \varphi(x_i) \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{1} = \varphi(x_i) \ \square$$

5.3 Propiedad

Sean $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión $n, \mathfrak{B}_1 = (x_1, ..., x_n), \mathfrak{B}_2 = (y_1, ..., y_n)$ bases ordenadas de $\mathbb{V}$ y $\mathfrak{B}_1^* = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ y $\mathfrak{B}_2^* = (\psi_1, ..., \psi_n)$ sus respectivas bases duales. Entonces:

$$(C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2})^t = C_{\mathfrak{B}_2^*\mathfrak{B}_1^*}$$

Demostración: Sea $j \in \{1, ..., n\}$, sabemos que hay escalares $c_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} y_i$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base $C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ es de la forma:

$$C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $k \in \{1, .., n\}$

$$\psi_k(x_j) = \psi_k\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\psi_k(y_i)$$

Recordando que $\psi_k(y_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\psi_k(y_i) = c_{kj} \text{ (Solo hay un término no nulo)}$$

Sabiendo también que:

$$\psi_k = \psi_k(x_1)\varphi_1 + ... + \psi_k(x_n)\varphi_n \text{ (Propiedad 5.2)}$$
$$\psi_k = c_{k1}\varphi_1 + ... + c_{kn}\varphi_n$$

Hallamos las coordenadas de los elementos de la base $\mathfrak{B}_2^*$ en la base $\mathfrak{B}_1^*$, como $\text{Col}_k(C_{\mathfrak{B}_2^*\mathfrak{B}_1^*}) = [\psi_k]_{\mathfrak{B}_1^*}$, tenemos que:

$$C_{\mathfrak{B}_2^*\mathfrak{B}_1^*} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = (C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2})^t \ \square$$

5.4 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ e.v de dimensión n. Si $\mathbf{S} \leq \mathbb{V}$ entonces $\mathbf{S}$ y $^\circ\mathbf{S}$ tienen dimensión finita y $\dim(\mathbf{S}) + \dim(^\circ\mathbf{S}) = n$

Demostración: Sea $(\varphi_1, ..., \varphi_s)$ base ordenada de $\mathbf{S}$ y sean $\varphi_{s+1}, ..., \varphi_n \in \mathbb{V}^*$ tales que: $\mathfrak{B}^* = (\varphi_1, ..., \varphi_s, \varphi_{s+1}, ..., \varphi_n)$ es base ordenada de $\mathbb{V}^*$. Sabemos entonces que existe una base $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_s, x_{s+1}, ..., x_n)$ de $\mathbb{V}$ tal que $\mathfrak{B}^*$ es su base dual. Notemos que $\{x_{s+1}, ..., x_n\} \subseteq {}^\circ\mathbf{S}$, por lo que $\langle x_{s+1}, ..., x_n\rangle \subseteq {}^\circ\mathbf{S}$. Afirmo que $^\circ\mathbf{S} = \langle x_{s+1}, ..., x_n\rangle$. Sea $x \in {}^\circ\mathbf{S}$, como $\mathfrak{B}$ es base de $\mathbb{V}$, hay escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$$

Sea $i \in \{1, ..., s\}$

$$0 = \varphi_i(x) = \varphi_i(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n)$$
$$0 = \varphi_i(x) = \lambda_1\varphi_i(x_1) + ... + \varphi_i\lambda_n(x_n)$$

Notemos que para todo $s + 1 \leq j \leq n$ tenemos que $\varphi_i(x_j) = 0$ pues estos x_j son elementos de $^\circ\mathbf{S}$, luego:

$$0 = \varphi_i(x) = \lambda_1\varphi_i(x_1) + ... + \lambda_s\varphi_i(x_s) = \lambda_i\varphi_i(x_i) = \lambda_i$$

Así que:

$$x = \lambda_{s+1}x_{s+1} + ... + \lambda_n x_n$$

Esto nos dice que $^\circ\mathbf{S} = \langle x_{s+1}, ..., x_n\rangle$. Este conjunto es LI pues es un subconjunto de una base de $\mathbb{V}$. Entonces, $\dim(^\circ\mathbf{S}) = n - \dim(\mathbf{S})$ $\square$

(Similarmente se puede probar que $\dim(\mathbf{S}) + \dim(\mathbf{S}^\circ) = n$)

5.5 Propiedad

Sea $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, entonces:

$$\ker(f^t) = \operatorname{im}(f)^\circ \quad \operatorname{im}(f^t) = \ker(f)^\circ$$

(Recuerdo: dada $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ la traspuesta de f es $f^t : \mathbb{W}^* \longrightarrow \mathbb{V}^*$ y está dada por $f^t(\varphi) = \varphi \circ f$)

Demostración: (1.): Sea $\varphi \in \mathbb{W}^*$, entonces $\varphi \in \ker(f^t) \longleftrightarrow f^t(\varphi) = 0 \longleftrightarrow \varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{V} \longleftrightarrow \varphi(\operatorname{im}(f)) = 0 \longleftrightarrow \varphi \in \operatorname{im}(f)^\circ$

(2.): Sea $\varphi \in \operatorname{im}(f^t)$, de manera que existe $\psi \in \mathbb{W}^*$ tal que $\varphi = f^t(\psi) = \psi(f(x))$. Veamos que $\varphi \in \ker(f)^\circ$, para que esto sea cierto nos es suficiente con que φ se anule en todos los vectores de $\ker(f)$. Sea $x \in \ker(f)$, entonces:

$$\varphi(x) = \psi(f(x)) = \psi(0) = 0$$

Por lo tanto, $\operatorname{im}(f^t) \subseteq \ker(f)^\circ$

Sea $\varphi \in \ker(f)^\circ$. Si $y \in \operatorname{im}(f)$, hay un $x \in \mathbb{V} : y = f(x)$. Si además existe otro elemento, digámosle $x' : y = f(x')$, notemos que, como $x - x' \in \ker(f)$, entonces $\varphi(x) = \varphi(x')$ (pues $\varphi \in \ker(f)^\circ$). Por lo tanto, la función $\Psi : \operatorname{im}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\Psi(y) = \varphi(x)$, donde x cumple que $f(x) = y$, está bien definida. Veamos que Ψ es lineal, sean $y_1, y_2 \in \operatorname{im}(f)$ con $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ donde $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha\Psi(y_1) + \beta\Psi(y_2) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2)$$

$$\alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2) = \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \Psi(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

Sea $\bar{\Psi} \in \mathbb{W}^* : \bar{\Psi}|_{\operatorname{im}(f)} = \Psi$, entonces:

$$f^t(\bar{\Psi}) = \bar{\Psi}(f(x)) = \Psi(f(x)) = \varphi(x)$$

$$f^t(\bar{\Psi}) = \varphi$$

Así que $\varphi \in \operatorname{im}(f^t)$ $\square$

5.6 Corolario

Sea $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, entonces: Si f es inyectiva, f^t es sobreyectiva, y si f es sobreyectiva, f^t es inyectiva.

6 Diagonalización

6.1 Propiedad

Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$. Si $\{x_1, ..., x_k\}$ son autovectores de f de autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ (respectivamente) distintos dos a dos, entonces el conjunto $\{x_1, ..., x_k\}$ es LI.

Demostración: Sean $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0$$

Si aplicamos f $k - 1$ veces y consideramos todas esas ecuaciones dentro de un sistema, tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0 \\ \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_k f(x_k) = f(0) \\ \vdots \\ \alpha_1 f^{k-1}(x_1) + ... + \alpha_k f^{k-1}(x_k) = f^{k-1}(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + ... + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^{k-1} x_1 + ... + \alpha_k \lambda_k^{k-1} x_k = 0 \end{cases}$$

Y esto es equivalente a busca la solución de la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & ... & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_k x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la izquierda es una matriz de Vandermonde, como los autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son distintos dos a dos, sabemos que el determinante de esta es no nulo, por lo que la única solución que admite la ecuación es la trivial. Como $x_1, ..., x_k$ son autovectores, son no nulos, así que debe ser que $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ $\square$

6.2 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n, entonces toda $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ tiene a lo sumo n autovalores distintos.

6.3 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión finita y $f \in \text{End}(\mathbb{V})$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ son escalares distintos dos a dos, entonces los subespacios $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_k}(f)$ son independientes.

6.4 Lema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), p_A$ (el polinomio característico de A) tiene grado n y es mónico.

Demostración: Sea $B = xI_n - A = b_{ij}$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} ... b_{\sigma(n)n}$$

El único monomio de grado n que está entre los sumandos es el que se corresponde con $\sigma = \text{id}_n$

$$\det(B) = \underbrace{\text{sgn}(\text{id}_n)}_{1} b_{11} ... b_{nn} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma \neq \text{id}_n}} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} ... b_{\sigma(n)n}$$

$$\det(B) = \underbrace{(x - a_{11}) ... (x - a_{nn})}_{\substack{\text{gr}=n \\ \text{mónico}}} + \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma \neq \text{id}_n}} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} ... b_{\sigma(n)n}}_{\text{gr}<n} \quad \square$$

6.5 Propiedad

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces λ es autovalor de A si y solo si $p_A(\lambda) = 0$

Demostración: (1.) implica (2.): Como λ es autovalor de A, existe $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. Por lo tanto, v es un vector no nulo que soluciona la ecuación $(A - \lambda I_n)x = 0$, también sabemos que, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, αv también soluciona dicha ecuación, por lo que tiene infinitas soluciones. Esto nos dice que $\det(A - \lambda I_n) = 0$ y entonces $p_A(\lambda) = 0$.

(2.) implica (1.): Como $p_A(\lambda) = 0$, entonces $\det(A - \lambda I_n) = 0$, es decir que la transformación lineal $f \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ dada por $f(x) = (A - \lambda I_n)x$ no tiene rango n, por ende no es inyectiva, así que existe $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ tal que $f(v) = 0$, o sea que, para ese v, $Av - \lambda v = 0$. Luego, λ es autovalor de A. $\square$

6.6 Propiedad

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ con $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n, entonces:

$$\text{MG}(\lambda, f) \leq \text{MA}(\lambda, f)$$

(Recuerdo: $\text{MG}(\lambda, f) = \dim(E_\lambda(f))$, $\text{MA}(\lambda, f) = \text{mult}(\lambda, p_f)$)

Demostración: Sean $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\mathfrak{E} = \{x_1, ..., x_r\}$ base de $E_\lambda(f)$. Entonces, hay vectores $y_{r+1}, ..., y_n \in \mathbb{V}$ tales que $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_r, y_{r+1}, ..., y_n)$ es base ordenada de $\mathbb{V}$.

$$|f|_{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{matrix}}^{D} & X \\ \hline \mathbf{0} & X' \end{array}\right)$$

Como el polinomio característico es invariante respecto de la semejanza entre matrices, sabemos entonces que $p_f = p_{|f|_{\mathfrak{B}}} = p_D \cdot p_{X'} = (x-\lambda)^r Q(x)$. El polinomio Q podría tener a λ como raíz, luego:

$$r \leq \mathrm{mult}(\lambda, p_f)$$

$$\dim(E_\lambda(f)) \leq \mathrm{mult}(\lambda, p_f) \;\; \square$$

6.7 Teorema

Una transformación lineal $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ es diagonalizable si y solo si para cada autovalor λ de f se tiene que $\mathrm{MA}(\lambda, f) = \mathrm{MG}(\lambda, f)$

Demostración: (1.) implica (2.): Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ diagonalizable, de manera que existe $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ base ordenada de $\mathbb{V}$ cuyos elementos son autovectores de f, cuyos autovalores son $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ (no necesariamente distintos dos a dos), por lo tanto, sabemos que:

$$|f|_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} = a_{ij}$$

Sea $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, notemos que $\mathrm{MA}(\lambda, f) = |\{i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = \lambda\}|$, también sabemos que $\langle x_i : i \in \{1, ..., n\}, a_{ii} = \lambda \rangle \subseteq E_\lambda(f)$. Por lo que $|x_i : i \in \{1, ..., n\}, a_{ii} = \lambda| = |\{i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = \lambda\}| = \mathrm{MA}(\lambda, f) \leq \mathrm{MG}(\lambda, f)$. Por la Propiedad 6.6 sabemos que, simultáneamente, $\mathrm{MG}(\lambda, f) \leq \mathrm{MA}(\lambda, f)$, así que solo puede ser que $\mathrm{MA}(\lambda, f) = \mathrm{MG}(\lambda, f)$.

(2.) implica (1.): Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ tal que, para cada uno de sus autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (de nuevo, no necesariamente distintos dos a dos), tomando $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $\mathrm{MA}(\lambda_i, f) = \mathrm{MG}(\lambda_i, f)$

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MG}(\lambda_i, f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MA}(\lambda_i, f) = n$$

Luego:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f) = \mathbb{V} \;\; \square$$

6.8 Propiedad

Sean $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado y $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Hay una base ordenada $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{V}$ tal que $|f|_{\mathfrak{B}}$ es triangular superior.

Demostración: Supongamos que $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimensión n y sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Por inducción en n: P(1) es evidente (Porque toda matriz de transformación lineal es triangular superior si la dimensión del espacio es 1 y $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$). Sea $f^t \in \mathrm{End}(\mathbb{V}^*)$. Como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, sabemos que f^t tiene autovalores, de manera que, para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, existe $\varphi \in \mathbb{V}^* - \{0\}$ tal que $f^t(\varphi) = \varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x)$. Consideremos $\ker(\varphi) = \mathbf{W}$. Sabemos que su dimensión es $n-1$. Sea $w \in \mathbf{W}$

$$f^t(\varphi)(w) = \varphi(f(w)) = \lambda\varphi(w) = 0$$

Por lo tanto, $f(w) \in \mathbf{W}$, entonces, podemos definir el endomorfismo $g : \substack{\mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{W} \\ w \longrightarrow f(w)}$. Como la dimensión de $\mathbf{W}$ es $n-1$, existe una base $\mathfrak{B} = (w_1, ..., w_{n-1}) \subseteq \mathbb{V}$ de $\mathbf{W}$ tal que $|g|_{\mathfrak{B}}$ es triangular superior. Luego, podemos extenderla a una base de $\mathbb{V}$, teniendo que, para algún $w_n \in \mathbb{V}$, $\mathfrak{B}' = (w_1, ..., w_n)$ es base de $\mathbb{V}$. Por lo tanto:

$$|f|_{\mathfrak{B}'} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{|g|_{\mathfrak{B}}}^{n-1 \times n-1} & X \\ \hline \underbrace{0}_{1 \times n-1} & X \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}}\right\} n \times 1$$

Y esta matriz es triangular superior. $\square$

6.9 Teorema (Cayley-Hamilton)

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ con $\mathbb{V}$ de dimensión n. Entonces $p_f(f) = 0$

Demostración: Sean $v \in \mathbb{V}, f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ y $\mathbf{W} = \langle v, f(v), f^2(v), ... \rangle \subseteq \mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita, hay un entero $d \geq 0$ tal que $\mathfrak{B} = \{v, f(v), ..., f^d(v)\}$ es LI pero $\{v, f(v), ..., f^{d+1}(v)\}$ es LD. Por lo tanto, hay escalares $\alpha_0, ..., \alpha_{d+1} \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_0 v + ... + \alpha_{d+1} f^{d+1}(v) = 0$$

Notemos que α_{d+1} es no nulo, pues de serlo, entonces $\{v, f(v), ..., f^d(v)\}$ sería LD. Sea $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_{d+1}}$, para $i \in \{0, ..., d+1\}$. Si dividimos a ambos lados de la igualdad por α_{d+1} tenemos que:

$$\lambda_0 v + ... + \lambda_d f^d(v) + f^{d+1}(v) = 0$$

Esto nos dice que f anula al polinomio $p = \lambda_0 + ... + \lambda_d x^d + x^{d+1} \in \mathbb{K}_{d+1}[x]$ Afirmo que $\mathbf{W} = \langle v, f(v), ..., f^d(v) \rangle = \langle \mathfrak{B} \rangle$. Sabiendo que

$$-(\lambda_0 v + ... + \lambda_d f^d(v)) = f^{d+1}(v)$$

Esto significa que $f^{d+1}(v) \in \langle \mathfrak{B} \rangle$, aplicando f tenemos que

$$-(\lambda_0 f(v) + ... + \lambda_{d+1} f^d(v)) = f^{d+2}(v)$$

Entonces, $f^{d+2}(v) \in \langle \mathfrak{B} \rangle$ Si continuamos así sucesivamente, tendríamos que $f^i(v) \in \langle \mathfrak{B} \rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Así que $\mathfrak{B} = (v, f(v), ..., f^d(v))$ es base de $\mathbf{W}$. Como $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita, hay vectores $x_1, ..., x_m$ tales que $\mathfrak{B}' = (v, f(v), ..., f^d(v), x_1, ..., x_m)$ es base de $\mathbb{V}$.

$$|f|_{\mathfrak{B}'} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & ... & 0 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & -\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda_d \end{matrix}}^{C(p)} & X \\ \hline 0 & X' \end{array}\right)$$

$$p_f = p_{|f|_{\mathfrak{B}'}} = p_{C(p)} \cdot p_{X'}$$

$C(p)$ es la matriz compañera del polinomio $p = \lambda_0 + ... + \lambda_d x^d + x^{d+1}$, que es al que ya sabemos que f anula.

$$p_f = p \cdot p_{X'}$$

$$p_f(f) = (\underbrace{p(f)}_{0} \circ p_{X'}(f))(v) = 0 \ \square$$

6.10 Teorema

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ con $\mathbb{V}$ de dimensión n. Existe un único polinomio mónico m_f tal que $m_f(f) = 0$ y si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $p(f) = 0$ (o sea que $p \in I_f$ (el anulador de f)), entonces $m_f | p$. Llamamos a este polinomio el polinomio minimal de f. (Recuerdo: $I_f = \{p : \mathbb{K}[x] : p(f) = 0\}$)

Demostración: 1. Existencia: Sea $d = \min\{\text{gr}(p) : p \in I_f - \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Este es un subconjunto de los naturales y el cero que es no vacío ($p_f \in I_f$), por eso afirmamos que d existe. Así que hay un polinomio m_f de grado mínimo (d) que se anula en f (No sabemos si es mónico pero, de no serlo, bastaría con dividirlo por su coeficiente principal). Sea $p \in \mathbb{K}[x] \cap (I_f - \{0\})$. Por el algoritmo de la división sabemos que hay polinomios q, r, con $gr(r) < gr(m_f)$ o $r = 0$, tales que:

$$p = m_f q + r$$

$$p(f) = (m_f q)(f) + r(f)$$

$$0 = \underbrace{m_f(f)}_{0} \circ q(f) + r(f)$$

$$0 = r(f)$$

Pero no puede ser que $r \in I_f$ porque tendría un grado menor al mínimo, por lo tanto $r = 0$ y m_f divide a todos los elementos de I_f.

2. Unicidad: No es difícil, si suponés que hay dos polinomios minimales, ambos están en I_f por lo que se dividen mutuamente. Como son mónicos, entonces son iguales. $\square$

6.11 Lema

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$, con $\mathbb{V} \neq 0$ y de dimensión n. Consideremos d como el menor elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $\{\text{id}_{\mathbb{V}}, f, ..., f^d\}$ es LD. De manera que hay escalares $\lambda_0, ..., \lambda_d$ tales que:

$$\lambda_0 \text{id}_{\mathbb{V}} + ... + \lambda_d f^d = 0$$

Como d es el menor elemento que cumple esto, entonces $\lambda_d \neq 0$, si dividimos a ambos lados de la igualdad por dicho coeficiente y consideramos $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_d}$ con $i \in \{0, ..., d\}$. Tenemos que:

$$\alpha_0 \text{id}_{\mathbb{V}} + ... + \alpha_{d-1} f^{d-1} + f^d = 0$$

Esto quiere decir que f anula al polinomio $q = \alpha_0 + ... + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$. Entonces, $q = m_f$ (q es el polinomio minimal de f).

Demostración: Sabemos que $q \in I_f$ y además es mónico. Si no es el polinomio minimal es porque hay uno de grado $r < d$ que también es mónico y pertenece a I_f, sea p ese polinomio. Entonces:

$$p = \gamma_0 + ... + \gamma_{r-1} x^{r-1} + x^r$$

$$p(f)(v) = \gamma_0 v + ... + \gamma_{r-1} f^{r-1}(v) + f^r(v) = 0$$

Como $p \neq 0$, sus coeficientes no son todos nulos, por lo que el conjunto $\{\text{id}_{\mathbb{V}}, f(v), ..., f^r(v)\}$ es LD, lo cual es absurdo pues habíamos dicho que d era el menor elemento de $\mathbb{N}_0$ que cumplía dicha propiedad, y hallamos uno menor. $\square$

6.12 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un e.v de dimensión n y $f \in \text{End}(\mathbb{V})$. p_f y m_f tienen las mismas raíces en $\mathbb{K}$

Demostración: Sean $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ $\lambda \in \mathbb{K}$ raíz de p_f y $m_f(x) = \alpha_0 + ... + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$ el polinomio minimal de f. Como λ es raíz del polinomio característico, existe $v \in \mathbb{V} - \{0\}$ tal que $f(v) = \lambda v$.

$$m_f(x) = \alpha_0 + ... + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$$

$$0 = m_f(f(v)) = \alpha_0 v + ... + \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) + f^d(v)$$

$$0 = \alpha_0 v + ... + \alpha_{d-1} \lambda^{d-1} v + \lambda^d v$$

$$0 = (\alpha_0 + ... + \alpha_{d-1}\lambda^{d-1} + \lambda^d)v$$
$$0 = m_f(\lambda)v$$

Y como v es no nulo, entonces $m_f(\lambda) = 0$. Ahora, sea λ raíz de $m_f(x)$, como $p_f \in I_f$, tenemos que $m_f(x)|p_f(x)$. es decir, existe un polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

$$p_f(x) = m_f(x)q(x)$$
$$p_f(\lambda) = \underbrace{m_f(\lambda)}_{0}q(\lambda)$$
$$p_f(\lambda) = 0 \ \square$$

6.13 Lema

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejantes, entonces $m_A = m_B$.

Demostración: Sea $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $A = C^{-1}BC$. Para verificar la igualdad del lema bastaría con ver que $m_A(B) = 0$ y $m_B(A) = 0$. Sean $m_A(x) = a_0 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$ y $m_B(x) = b_0 + ... + b_{r-1}x^{r-1} + x^r$

$$m_A(B) = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (CAC^{-1})^i = \sum_{i=0}^{k} a_i CA^iC^{-1} = C\left(\sum_{i=0}^{k} a_i A^i\right)C^{-1} = C\underbrace{m_A(A)}_{0}C^{-1} = 0$$

$$m_B(A) = \sum_{i=0}^{r} b_i A^i = \sum_{i=0}^{r} b_i (C^{-1}BC)^i = \sum_{i=0}^{r} b_i C^{-1}B^iC = C^{-1}\left(\sum_{i=0}^{r} b_i B^i\right)C = C^{-1}\underbrace{m_B(B)}_{0}C = 0$$

Como $m_A(B) = 0, m_A \in I_B$, lo que implica que $m_B|m_A$. A su vez, $m_B(A) = 0$, o sea que $m_B \in I_A$, por lo que $m_A|m_B$. Estos dos polinomios se dividen mutuamente y son mónicos, así que son iguales. $\square$

7 Subespacios invariantes y forma normal de Jordan

7.1 Lema

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ donde $\mathbb{V}$ tiene dimensión n y tal que m_f se descompone (se puede expresar como producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{K}[x]$). Si $\mathbf{W}$ es un subespacio propio de $\mathbb{V}$ y f-invariante entonces existen $v \in \mathbb{V} - \mathbf{W}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de f tales que $(f - \lambda\mathrm{id})(v) \in \mathbf{W}$

Demostración: Sean $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$, $\mathbf{W}$ f-invariante y $m_f = (x-\lambda_1)^{r_1}...(x-\lambda_k)^{r_k}$ con $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distintos dos a dos. Fijemos $v \in \mathbb{V} - \mathbf{W}$ y consideremos el conjunto $\mathcal{I}_v = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(f)(v) \in \mathbf{W}\}$, este es un subespacio y además es un ideal de $\mathbb{K}[x]$, o sea que si $p \in \mathcal{I}_v$ y $q \in \mathbb{K}[x]$, se tiene que $pq \in \mathcal{I}_v$ (no es muy difícil de verificar). $\mathcal{I}_v$ es no vacío pues $p_f \in \mathcal{I}_v$ ($p_f(f)(v) = 0 \in \mathbf{W}$), por lo tanto, podemos afirmar que existe $d = \min\{\mathrm{gr}(p) : p \in \mathcal{I}_v - \{0\}\}$. Sea $c \in \mathcal{I}_v - \{0\}$ ese polinomio de grado d, sea $p \in \mathcal{I}_v$, afirmo que $c|p$. Por el algoritmo de la división sabemos que existen polinomios q, r, con $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(c)$ o $r = 0$ tales que:

$$p = cq + r$$
$$p(f)(v) = (cq)(f)(v) + r(f)(v)$$
$$\underbrace{p(f)(v)}_{\in\mathcal{I}_v} - \underbrace{(cq)(f)(v)}_{\substack{\in\mathcal{I}_v \\ \mathcal{I}_v\text{es un ideal}}} = r(f)(v)$$

Así que $r \in \mathcal{I}_f$ pero tiene grado menor que c lo cual no puede ser pues este era de grado mínimo, entonces $r = 0$. Observemos que $c \neq 1$ pues $1(f)(v) = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}(v) = v \notin \mathbf{W}$, por lo que su grado es como mínimo 1. Sabemos que $m_f \in \mathcal{I}_v$, entonces $c|m_f$, así que c tiene alguna raiz del minimal que también es una del característico, por lo que esta es un autovalor. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ esa raíz y sea $q \in \mathbb{K}[x] : c = (x - \lambda)q$, notemos que $q(f)(v) \notin \mathbf{W}$ pues $\mathrm{gr}(q) < \mathrm{gr}(c)$.

$$(f - \lambda\mathrm{id})(q(f)(v)) = ((x-\lambda)q)(f)(v) = c(f)(v) \in \mathbf{W} \ \square$$

7.2 Teorema

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$. f es triangularizable si y solo si m_f se descompone.

Demostración: (1.) implica (2.): Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ triangularizable, de manera que existe $\mathfrak{B}$ base ordenada de $\mathbb{V}$ tal que $|f|_{\mathfrak{B}}$ es triangular superior. Sea $|f|_{\mathfrak{B}} = (a_{ij})$, entonces tenemos que $p_f = p_{|f|_{\mathfrak{B}}} = (x - a_{11})...(x - a_{nn})$ que evidentemente se descompone, entonces m_f también lo hace.

(2.) implica (1.): Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ tal que m_f se descompone y $n = \dim(\mathbb{V})$, por inducción en n: si $n = 0$ entonces $f = 0$ que es triangularizable. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todos los subespacios $\mathbf{W}$ f-invariantes de $\mathbb{V}$ tales que $f|_{\mathbf{W}}$ es triangularizable. Afirmo que $\mathbb{V} \in \mathcal{W}$ pero supongamos que no es cierto, de manera que $k = \max\{\dim(\mathbf{W}) : \mathbf{W} \in \mathcal{W}\} \leq n - 1$. Sea $\mathbf{W}_k$ ese subespacio de dimensión máxima y $\mathfrak{B}_{\mathbf{W}} = (w_1, ..., w_k)$ la base del mismo tal que $|f|_{\mathbf{W}}|_{\mathfrak{B}_{\mathbf{W}}}$ es triangular superior. Como m_f se descompone y $\mathbf{W}_k$ es un subespacio propio de $\mathbb{V}$, existen entonces $v \in \mathbb{V} - \mathbf{W}_k$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $f(v) - \lambda v = w \in \mathbf{W}_k$. Como este elemento v no pertenece a $\mathbf{W}_k$, sabemos entonces que $\mathbf{W}' = \{w_1, ..., w_k, v\}$ es un conjunto LI, sea $\mathbf{U} = \langle \mathbf{W}' \rangle$, veamos que $\mathbf{U}$ es f-invariante. Es claro que, si $i \in \{1, ..., k\}$, entonces $f(w_i) \in \mathbf{W}_k \subseteq \mathbf{U}$. Por otra parte, sabemos que $f(v) = w + \lambda v$, esta es una suma de elementos de $\mathbf{U}$, así que $f(v) \in \mathbf{U}$. No es difícil ver que $|f|_{\mathbf{U}}|_{\mathbf{W}'}$ es triangular superior, y esto es un absurdo pues la dimensión de $\mathbf{W}_k$ era máxima pero encontramos un subespacio f-invariante de dimensión mayor y que, si a f se la restringe al mismo, la restricción resulta triangularizable. □

7.3 Teorema

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$. f es diagonalizable si y solo si m_f se descompone sin multiplicidad.

Demostración: (1.) implica (2.): Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ de manera que existe $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ base ordenada y de autovectores de $\mathbb{V}$, dado $i \in \{1, ..., n\}$, el vector x_i tiene a $\lambda_i \in \mathbb{K}$ como autovalor. Sea $p = \alpha_0 + ... + \alpha_r x^r \in \mathbb{K}[x]$, entonces:

$$p(f) = 0 \longleftrightarrow p(f)(v) = 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{V} \longleftrightarrow p(f)(x_i) = 0$$

$$p(f)(x_i) = 0 \longleftrightarrow \alpha_0 x_i + ... + \alpha_r f^r(x_i) = 0 \longleftrightarrow \alpha_0 x_i + ... + \alpha_r \lambda_i^r x_i = 0$$

$$\alpha_0 x_i + ... + \alpha_r \lambda_i^r x_i = 0 \longleftrightarrow p(\lambda_i) x_i = 0 \longleftrightarrow p(\lambda_i) = 0$$

Si consideramos ahora $\{\beta_1, ..., \beta_k\}$ el conjunto de todos los autovalores λ_i sin repeticiones, vemos que $p(f) = 0 \longleftrightarrow (x - \beta_1)...(x - \beta_k)|p$ Entonces $m_f = (x - \beta_1)...(x - \beta_k)$ pues es mónico, se anula en f y divide a todos los otros polinomios que también se anulan ahí. Evidentemente, el minimal se descompone sin multiplicidad.

(2.) implica (1.): Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ tal que m_f se descompone sin multiplicidad, de manera que existe un entero positivo k y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ escalares distintos dos a dos tales que $m_f = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ consideremos $E_{\lambda_i}(f)$ el autoespacio asociado a λ_i, sabemos que estos subespacios son f-invariantes y por ende su suma también lo es. Sea $\mathbf{W} = E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_k}(f)$. Supongamos que $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{V}$ pero $\mathbf{W} \neq \mathbb{V}$, el Lema 7.1 nos dice que, entonces, existe un vector $v \in \mathbb{V} - \mathbf{W}$ tal que $(f - \lambda\text{id})(v) = w \in \mathbf{W}$, donde λ es alguna de las raíces de m_f (autovalores de f), así que existe $q \in \mathbb{K}[x]$ tal que: $m_f = (x - \lambda)q$. Ahora, notemos que:

$$0 = m_f(f)(v) = ((x - \lambda\text{id})q)(f)(v) = ((f - \lambda\text{id}) \circ q(f))(v) = f(q(f)(v)) - \lambda q(f)(v)$$

Así que $f(q(f)(v)) = \lambda q(f)(v)$, por lo que $q(f)(v) \in \mathbf{W}$ (específicamente, pertenece a $E_\lambda(f)$).

Consideremos ahora el polinomio $q(x) - q(\lambda)$. Evidentemente, λ es raíz de este, así que existe $p \in \mathbb{K}[x]$: $q(x) - q(\lambda) = p(x - \lambda)$. Luego:

$$q(f)(v) - q(\lambda)v = (q(f) - q(\lambda)\text{id})(v) = (q(x) - q(\lambda))(f)(v) = (p(x - \lambda))(f)(v) = p(f)(f(v) - \lambda\text{id}) = p(f)(w)$$

$$q(\lambda)v = \underbrace{q(f)(v)}_{\in \mathbf{W}} - \underbrace{p(f)(w)}_{\in \mathbf{W}}$$

Pero como $v \notin \mathbf{W}$, debe ser entonces que $q(\lambda) = 0$, de manera que existe un polinomio $r \in \mathbb{K}[x]$ tal que: $q = (x - \lambda)r$. Entonces, $m_f = (x - \lambda)q = (x - \lambda)^2 r$, lo cual es un absurdo pues m_f se descomponía sin multiplicidad. El absurdo proviene de suponer que $\mathbf{W} \neq \mathbb{V}$, entonces, f es diagonalizable. □

7.4 Propiedad

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ con $n = \dim(\mathbb{V})$. Hay subespacios de $\mathbb{V}$ no nulos y f-invariantes $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_k$ tales que

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{U}_i$$

Además, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ la restricción $f|_{\mathbf{U}_i}$ resulta indescomponible.

Demostración: Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las secuencias finitas $(\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_k)$ de subespacios f-invariantes no nulos cuya suma es directa y es igual a $\mathbb{V}$. El conjunto $\mathcal{D}$ es no vacío: Si $\mathbb{V} = 0$, entonces $() \in \mathcal{D}$, y si $\mathbb{V} \neq 0$, $(\mathbb{V}) \in \mathcal{D}$. Sea $(\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_l) \in \mathcal{D}$ de manera que su longitud es máxima. Veamos que, para cada $i \in \{1, ..., l\}$, la restricción $f|_{\mathbf{U}_i}$ es indescomponible. Supongamos que sí es descomponible, por lo que deberían existir $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de $\mathbb{V}$ $f|_{\mathbf{U}_i}$ invariantes (y por ende f-invariantes) tales que $\mathbf{U}_i = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. Pero eso implicaría que $\mathbb{V} = \mathbf{U}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus ... \oplus \mathbf{U}_l$, y esto nos da una secuencia de longitud mayor a la que era máxima. $\square$

7.5 Lema

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ donde p_f se descompone en $\mathbb{K}[x]$. Si f es indescomponible (es decir que $\mathbb{V} \neq 0$ y que no existen subespacios $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ f-invariantes ambos no nulos tales que $\mathbb{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$) entonces existe un número natural k, con $1 \leq k \leq n = \dim(\mathbb{V})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $m_f = (x - \lambda)^k$.

Demostración: Sabemos que p_f se descompone, de manera tal que existe $\lambda \in \mathbb{K} : p_f(\lambda) = 0$. Como el polinomio minimal y el característico tienen las mismas raíces, entoces $m_f(\lambda) = 0$, así que hay un elemento $p \in \mathbb{K}[x]$ y un número natural $m \leq n$ que cumplen que: $m_f = (x - \lambda)^m p$. Si seleccionamos m de manera tal que sea máximo, tenemos entonces que $p(\lambda) \neq 0$, así que los dos factores que conocemos de m_f son coprimos. Por ende, hay polinomios $u, v \in \mathbb{K}[x]$ tales que:

$$u(x - \lambda)^m + vp = 1 \text{ (Propiedad de Álgebra I)}$$

Evaluando en f:

$$u(f) \circ\ (f - \lambda \mathrm{id})^m + v(f) \circ\ p(f) = \mathrm{id}$$

Sean $\pi_1 = u(f) \circ\ (f - \lambda \mathrm{id})^m, \pi_2 = v(f) \circ\ p(f), \mathbf{W}_1 = \ker((f - \lambda \mathrm{id})^m)$ y $\mathbf{W}_2 = \ker(p(f))$. Sabemos que $\pi_1(v) + \pi_2(v) = v$. Afirmo que $\mathbb{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ con $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ f-invariantes. Como f es indescomponible y $\mathbf{W}_1 \neq 0$ (hay algún autovector), entonces $\mathbf{W}_2 = 0$.

Sea $v \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$

$$v = \mathrm{id}(v) = u(f) \circ\ (\underbrace{(f - \lambda \mathrm{id})^m(v)}_{0}) + v(f) \circ\ (\underbrace{p(f)(v)}_{0}) = 0$$

Sea $v \in \mathbf{W}_1$, veamos que $f(v) \in \mathbf{W}_1$

$$(f - \lambda \mathrm{id})^m(f(v)) = (f - \lambda \mathrm{id})^m \circ (f)(v) = ((x - \lambda)^m x)(f)(v)$$

$$((x - \lambda)^m x)(f)(v) = (x(x - \lambda)^m)(f)(v) = f(\underbrace{(f - \lambda \mathrm{id})^m(v)}_{0}) = 0$$

Sea $v \in \mathbf{W}_2$ y $p = \alpha_0 + ... + \alpha_r x^r \in \mathbb{K}[x]$, veamos que $f(v) \in \mathbf{W}_2$

$$p(f)(f(v)) = \alpha_0 f(v) + \alpha_1 f^2(v) + ... + \alpha_r f^{r+1}(v) = f(\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) ... + \alpha_r f^r(v)) = f(\underbrace{p(f)(v)}_{0}) = 0$$

Veamos ahora que $\pi_1 \in \mathbf{W_2}$:

$$p(f)(\pi_1(v)) = p(f)(u(f) \circ ((f - \lambda \mathrm{id})^m(v)) = (pu(x - \lambda)^m)(f)(v) = (um_f)(f)(v) = u(f) \circ (\underbrace{m_f(f)(v)}_{0}) = 0$$

Por último, veamos que $\pi_2 \in \mathbf{W}_1$:

$$(f - \lambda \mathrm{id})^m(\pi_2(v)) = (f - \lambda \mathrm{id})^m(v(f) \circ p(f)(v)) = (pv(x - \lambda)^m)(f)(v) = (vm_f)(f)(v) = v(f) \circ (\underbrace{m_f(f)(v)}_{0}) = 0$$

Por lo tanto, como para todo $v \in \mathbb{V}$ vale que $\pi_1(v) + \pi_2(v) = v$ donde $\pi_1 \in \mathbf{W}_2, \pi_2 \in \mathbf{W}_1$. Tenemos que $\mathbb{V} = \mathbf{W_1}$ ($\mathbf{W}_2$ es necesariamente nulo pues f es indescomponible). Esto nos dice que todo vector pertenece a $\ker((f - \lambda\mathrm{id})^m)$, así que $(f - \lambda\mathrm{id})^m = 0$. Por lo que f anula al polinomio $(x - \lambda)^m$ y como m_f es el polinomio de menor grado que se anula en f y $(x - \lambda)^m$ está entre sus factores, solo puede ser que $m_f = (x - \lambda)^m$ $\square$

7.6 Propiedad

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ indescomponible, con p_f que se descompone y $n = \dim(\mathbb{V})$. Hay una base ordenada $\mathfrak{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que:

$$|f|_{\mathfrak{B}} = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

Demostración: Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ indescomponible. Como $\mathbb{V} \neq 0$ y p_f se descompone, tiene al menos una raíz, de manera que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ que cumple que $p_f(\lambda) = m_f(\lambda) = 0$, además también existe $l \in \{1, ..., n\}$ tal que $m_f = (x - \lambda)^l$. Si consideramos $h = f - \lambda\mathrm{id} \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$, podemos ver que también es indescomponible, y en este caso $m_h = x^l$. Por lo tanto $h^l = 0$ pero $h^{l-1} \neq 0$, por lo que existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $h^{l-1}(v) \neq 0$. Afirmo que $\{x, h(x), ..., h^{l-1}(x)\}$ es un conjunto LI. Supongamos que hay escalares $\alpha_0, ..., \alpha_{l-1} \in \mathbb{K}$ que satisfacen que:

$$\alpha_0 x + ... + \alpha_{l-1} h^{l-1}(x) = 0$$

Aplicando h^{l-1}:

$$h^{l-1}(\alpha_0 x + ... + \alpha_{l-1} h^{l-1}(x)) = 0$$

$$\alpha_0 h^{l-1}(x) = 0$$

Como $h^{l-1}(x)$ es no nulo, entonces $\alpha_0 = 0$. (Ahora habría que aplicar h^{l-2} y así sucesivamente.) Sea $\mathbf{U} = \langle x, h(x), ..., h^{l-1}(x)\rangle$ de dimensión l. Sean $v_1, ..., v_{n-l} \in \mathbb{V}$ tales que $\mathfrak{B} = \{x, h(x), ..., h^{l-1}(x), v_1, ..., v_{n-l}\}$ es base de $\mathbb{V}$. Sea $\Phi \in \mathbb{V}*$ la única función lineal tal que:

$$\Phi(h^i(x)) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1 \leq i \leq l-2 \\ 1 \text{ si } i = l-2 \end{cases} \qquad \Phi(v_i) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, ..., n-l\}$$

Sea $\pi \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ dada por:

$$\pi(v) = \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(h^i(v)) h^{l-1-i}(x)$$

Ahora, sea $\mathbf{W} = \ker(\pi)$, veamos que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ son h-invariantes y además $\mathbb{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Es evidente que $\mathbf{U}$ es h-invariante.

Sea $w \in \mathbf{W}$

$$\pi(h(w)) = \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(h^i(h(w))) h^{l-1-i}(x)$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \Phi(h^{i+1}(w)) h^{l-1-i}(x) = \sum_{i=0}^{l-2} \Phi(h^{i+1}(w)) h^{l-1-i}(x) \text{ (El término con } i = l-1 \text{ es nulo)}$$

Sea $j = i + 1$

$$\sum_{j=1}^{l-1} \Phi(h^j(w)) h^{l-j}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} \Phi(h^j(w)) h^{l-j}(x) \text{ (El sumando con j=0 es nulo)}$$

$$\sum_{j=0}^{l-1} \Phi(h^j(w)) h^{l-j}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} \Phi(h^j(w)) h(h^{l-j-1}(x)) = h(\sum_{j=0}^{l-1} \Phi(h^j(w)) h^{l-j-1}(x)) = h(\pi(w)) = 0$$

Afirmo que $\pi(u) = u$ para todo $u \in \mathbf{U}$. Para esto es suficiente ver que, para $k \in \{0, ..., l-1\}$, $\pi(h^k(x)) = h^k(x)$

$$\pi(h^k(x)) = \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(h^{k+i}(x))h^{l-1-i}(x)$$

Si $i + k \geq l$, el sumando es nulo, y si $i + k < l - 1$, también, por lo que el único término no nulo es el correspondiente a $i = l - 1 - k$

$$\pi(h^k(x)) = \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(h^{k+i}(x))h^{l-1-i}(x) = \Phi(h^{k+(l-1-k)}(x))h^{l-1-(l-1-k)}(x) = \underbrace{\Phi(h^{l-1}(x))}_{1} h^k(x) = h^k(x)$$

Entonces, sabiendo que para todo $v \in \mathbb{V}$ se tiene que $\pi(v) \in \mathbf{U}$ (pues $\pi(v)$ es una combinación lineal de elementos de $\mathbf{U}$), podemos concluir que $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$, es decir que π es un proyector. Esto implica que $\mathbb{V} = \underbrace{\mathbf{U}}_{\mathrm{im}(\pi)} \oplus \underbrace{\mathbf{W}}_{\ker(\pi)}$. Como h es indescomponible, debe ser entonces que $\mathbf{W} = 0$ (Pues claramente $\mathbf{U} \neq 0$), esto nos dice que $\mathbf{U} = \{h^{l-1}(x), h^{l-2}(x), ..., x\}$ es base de $\mathbb{V}$

$$|h|_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = |f|_{\mathbf{U}} - \lambda \mathrm{id}$$

$$|f|_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix} = J(\lambda, n) \ \square$$

7.7 Teorema (Forma normal de Jordan)

Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ con p_f que se descompone y $\mathbb{V}$ de dimensión n. Hay una base ordenada $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{V}$, naturales $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + ... + n_r = n$ y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ que cumplen que:

$$|f|_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, n_2) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_3, n_3) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & J(\lambda_k, n_k) \end{pmatrix} \text{ (Difícil armarla por bloques)}$$

Demostración: Por la Propiedad 7.4 sabemos que existen subespacios $\mathbf{W}_1, ..., \mathbf{W}_k$ f-invariantes tales que su suma es directa y es igual a $\mathbb{V}$ y además se tiene que, dado $i \in \{1, ..., k\}$, la restricción $f_{\mathbf{W}_i}$ resulta indescomponible. Entonces, la Propiedad 7.6 nos dice que para cada $\mathbf{W}_i$ existe una base ordenada $\mathfrak{B}_i$ del respectivo subespacio tal que $|f_{\mathbf{W}_i}|_{\mathfrak{B}_i} = J(\lambda_i, n_i)$, con $n_i = \dim(\mathbf{W}_i)$. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup ... \cup \mathfrak{B}_k$ base de $\mathbb{V}$.

$$|f|_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} |f_{\mathbf{W}_1}|_{\mathfrak{B}_1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & |f_{\mathbf{W}_2}|_{\mathfrak{B}_2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & |f_{\mathbf{W}_3}|_{\mathfrak{B}_3} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & |f_{\mathbf{W}_k}|_{\mathfrak{B}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, n_2) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_3, n_3) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & J(\lambda_k, n_k) \end{pmatrix} \ \square$$

8 Espacios vectoriales con producto interno

8.0.1 Aclaración

A partir de ahora, siempre que se mencione a un cuerpo $\mathbb{K}$ se va a tratar de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8.1 Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno (EVPI), la función:

$$|| \ || : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dada por $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es la norma de x.

8.2 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI, entonces, dados $x, y \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triangular)
4. $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demostración (Cauchy-Schwarz): Sean $x, y \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, supongamos que $y \neq 0$ (si es nulo, la desigualdad obviamente se cumple). Entonces:

$$0 \leq |||x - \lambda y||^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle$$

$$\langle x, x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle$$

$$\langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \bar{\lambda}(\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle)$$

Sea $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

$$\langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \bar{\lambda}(\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle) = \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\underbrace{(\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle)}_{0}$$

$$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle = ||x||^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2} \geq 0$$

Así que se tiene que:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2.||y||^2$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y|| \ \square$$

Demostración (Desigualdad triangular): Sean $x, y \in \mathbb{V}$

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + ||y||^2$$

$$||x||^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + ||y||^2 = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2|\langle x, y\rangle| + ||y||^2$$

$$||x||^2 + 2|\langle x, y\rangle| + ||y||^2 \underbrace{\leq}_{\text{C-S}} ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

Por lo tanto:

$$||x + y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \square$$

8.3 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI, si A es un conjunto ortogonal de $\mathbb{V}$ tal que $0 \notin A$, entonces A es LI.

Demostración: Sea A un conjunto ortogonal y $x_1, ..., x_k \in A$. Supongamos que existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$0 = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$$

Sea $i \in \{1, ..., k\}$

$$\langle 0, x_i \rangle = \langle \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k, x_i \rangle$$

$$\langle 0, x_i \rangle = \alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + ... + \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle + ... + \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle$$

Como A es ortogonal, sabemos que $\langle x_j, x_i \rangle = 0$ si y solo si $j \neq i$. Entonces, solo hay un término de la suma que, en principio, podría ser no nulo.

$$0 = \langle 0, x_i \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle x_i, x_i \rangle}_{\neq 0}$$

Esto nos dice que $\alpha_i = 0$. $\square$

8.4 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI, si $A \subseteq \mathbb{V}$ es ortonormal, entonces es LI.

8.5 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI y $A = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{V}$ ortonormal. Si $x \in \langle A \rangle$, entonces $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, donde para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i = \langle x, x_i \rangle$.

Demostración: Sea $x \in A$, de manera que existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

$$\langle x, x_i \rangle = \langle \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n, x_i \rangle = \alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + ... + \alpha_n \langle x_n, x_i \rangle$$

Con el mismo argumento de antes podemos deducir que el único término que, en principio, podría ser no nulo, es $\alpha_i \langle x_i, x_i \rangle$.

$$\langle x, x_i \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle x_i, x_i \rangle}_{1} = \alpha_i \quad \square$$

8.6 Teorema (Gram-Schmidt)

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI y $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ una secuencia de vectores LI. Existe una secuencia de vectores ortonormales $\mathfrak{B}^\perp = (w_1, ..., w_n)$ tales que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $\langle x_1, ..., x_i \rangle = \langle w_1, ..., w_i \rangle$

Demostración: No

El algoritmo que fabrica dicha secuencia está dado de la siguiente manera: Fijamos $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ un conjunto LI, definimos $v_1 = x_1$, $w_n = \frac{v_n}{||v_n||}$ y los siguientes v así:

$$v_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n, w_i \rangle w_i$$

El conjunto $\mathfrak{B}^\perp = (w_1, ..., w_n)$ resulta ortonormal y satisface que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\langle x_1, ..., x_i \rangle = \langle w_1, ..., w_i \rangle$

8.7 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión n y $\mathbf{S} \leq \mathbb{V}$. Si $\mathfrak{B}_\mathbf{S} = (x_1, ..., x_k)$ es base ortonormal de $\mathbf{S}$ y consideramos

$$x_s = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i$$

Con un $x \in \mathbb{V}$ fijo, entonces:

1. $x - x_s \perp \mathbf{S}$
2. $\mathrm{d}(x, \mathbf{S}) = \mathrm{d}(x, x_s)$ (Recuerdo: Dado A un conjunto cualquiera, $\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\mathrm{d}(x, a) : a \in A\}$)

Demostración: Sea $y \in \mathbf{S}$, por la Propiedad 8.5 sabemos que:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \langle y, x_i \rangle x_i$$

Veamos entonces que $x - x_s \perp \mathbf{S}$

$$\langle x - x_s, y \rangle = \langle x - \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j \rangle x_j \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j \rangle x_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j \rangle x_j \rangle$$

$$\langle x, \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j \rangle x_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j \rangle x_j \rangle = \sum_{j=1}^{k} \overline{\langle y, x_j \rangle} \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle$$

Notemos que el segundo término de la suma resulta nulo siempre que $i \neq j$, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle \overline{\langle y, x_j \rangle}$$

Y entonces, claramente:

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{\langle y, x_j \rangle} \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

Por último, veamos que $\mathrm{d}(x, \mathbf{S}) = \mathrm{d}(x, x_s)$. Sea $y \in \mathbf{S}$

$$\mathrm{d}(x, y)^2 = ||x - y||^2 = ||(x - x_s) + (x_s - y)||^2 = ||x - x_s||^2 + ||x_s - y||^2 \geq ||x - x_s||^2$$

Esto nos dice que:

$$\mathrm{d}(x, y)^2 \geq \mathrm{d}(x, x_s)^2$$
$$\mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(x, x_s)$$

Como esto es cierto para todo $y \in \mathbf{S}$, entonces vale que:

$$\inf\{\mathrm{d}(x, s) : s \in \mathbf{S}\} \geq \mathrm{d}(x, x_s)$$

$$\mathrm{d}(x, \mathbf{S}) \geq \mathrm{d}(x, x_s)$$

Al ser x_s un elemento de $\mathbf{S}$, sabemos que $\mathrm{d}(x, x_s) \in \{\mathrm{d}(x, s) : s \in \mathbf{S}\}$. Este no puede ser estrictamente menor que el ínfimo y aún así pertenecer al conjunto, entonces solo puede ser que $\mathrm{d}(x, \mathbf{S}) = \mathrm{d}(x, x_s)$ $\square$

8.8 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión n y $\mathbf{S} \leq \mathbb{V}$, entonces:

$$\mathbb{V} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{S}^{\perp}$$

Demostración: Veamos primero que $\mathbf{S} \cap \mathbf{S}^{\perp} = 0$. Sea $x \in \mathbf{S} \cap \mathbf{S}^{\perp}$, de manera que pertenece a $\mathbf{S}$ y es ortogonal a todos los elementos de ese mismo conjunto, esto implicaría que $\langle x, x \rangle = 0$, que solo ocurre si $x = 0$. Ahora, veamos que la suma de $\mathbf{S}$ y su complemento ortogonal es igual a $\mathbb{V}$. Sea $x \in \mathbb{V}$ y consideremos el mismo vector $x_s \in \mathbf{S}$ de la propiedad anterior. Habíamos probado que $x - x_s \perp \mathbf{S}$, lo que nos dice que $x - x_s \in \mathbf{S}^{\perp}$. Luego, $x = \underbrace{(x - x_s)}_{\in \mathbf{S}^{\perp}} + \underbrace{x_s}_{\in \mathbf{S}}$ $\square$

8.9 Corolario

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión finita y $\mathbf{S} \leq \mathbb{V}$, entonces:

$$\dim(\mathbf{S}) + \dim(\mathbf{S}^{\perp}) = \dim(\mathbb{V})$$

8.10 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión finita, $\mathbf{S} \leq \mathbb{V}$ y $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ una base ordenada ortonormal de $\mathbf{S}$. La función lineal $p \in \text{End}(\mathbb{V})$ dada por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i$$

Es un proyector ortogonal. En particular, $\text{im}(p) = \mathbf{S}$ y $\ker(p) = \mathbf{S}^{\perp}$

Demostración: Veamos primero que p es proyector

$$p(p(x)) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j, x_i \right\rangle x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j, x_i \right\rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle x_i$$

Como $x_1, ..., x_n$ son elementos de una base ortonormal, $\langle x_j, x_i \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$, por lo que si no consideramos los sumandos nulos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i = p(x)$$

En segundo lugar, veamos que $\text{im}(p) = \mathbf{S}$. Hay una inclusión que es evidente, pues para todo $x \in \mathbb{V}$, $p(x)$ es una combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$. Mostremos que $\mathbf{S} \subseteq \text{im}(p)$, para esto es suficiente ver que, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, tenemos que:

$$p(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_j, x_i \rangle x_i$$

Cada sumando donde $i \neq j$ resulta nulo, luego:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_j, x_i \rangle x_i = \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{1} x_j = x_j$$

Como todo elemento de $\mathbf{S}$ es combinación lineal de $x_1, ..., x_n$ y esos vectores también pertenecen a la imagen de p, entonces $\mathbf{S} \subseteq \text{im}(p)$.

Por último, veamos que $\ker(p) = \mathbf{S}^{\perp}$. Es claro que $\mathbf{S}^{\perp} \subseteq \ker(p)$ porque cuando evalúe algún elemento de ese $\mathbf{S}^{\perp}$ en p, todos los términos de la suma van a ser iguales a 0 pues los productos internos van a ser todos nulos. Sea $x \in \ker(p)$, de manera que:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i = \langle x, x_1 \rangle x_1 + ... + \langle x, x_n \rangle x_n$$

Esta es una combinación lineal de elementos de $\mathfrak{B}$ que es igual a 0, por ende, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $\langle x, x_i \rangle = 0$. Esto implica que x es ortogonal a todos los elementos de $\mathfrak{B}$ que es una base de $\mathbf{S}$, en consecuencia, es ortogonal a todos los elementos de dicho conjunto. Por lo tanto, $x \in \mathbf{S}^{\perp}$ $\square$

8.11 Teorema (Representación de F. Riesz)

Sea para cada $y \in \mathbb{V}$ la función $\varphi_y(x) \in \mathbb{V}^*$ dada por:

$$\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$$

Y sea $\Phi \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}^*)$ dada por:

$$\Phi(y)(x) = \varphi_y(x)$$

Que es una función semi-lineal e inyectiva. Si $\mathbb{V}$ es un EVPI de dimensión finita, entonces para toda $f \in \mathbb{V}^*$ existe un único vector $x_f \in \mathbb{V}$ tal que $f(x) = \Phi(x_f)(x) = \langle x, x_f \rangle$

Demostración: Sea $f \in \mathbb{V}^*$, $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_n)$ base ordenada ortonormal de $\mathbb{V}$, $x \in \mathbb{V}$ y $x_f = \sum_{i=1}^n \overline{f(x_i)} x_i$

$$\Phi(x_f) = \Phi(\sum_{i=1}^n \overline{f(x_i)} x_i) = \langle x, \sum_{i=1}^n \overline{f(x_i)} x_i \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i) \langle x, x_i \rangle$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \langle x, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n f(\langle x, x_i \rangle x_i) = f(\sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i)$$

Por la Propiedad 8.5 sabemos que lo que está en el argumento de f es igual a x, luego:

$$\Phi(x_f) = f(\sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i) = f(x) \ \square$$

8.12 Teorema

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos EVPI, si $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita, entonces toda función lineal $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tiene adjunta.

Demostración: Sea $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $w \in \mathbb{W}$, consideremos la función lineal $\Psi_w \in \mathbb{V}^*$ dada por: $\Psi_w(v) = \langle f(v), w \rangle$. Cada w determina una función lineal distinta, así que por el teorema anterior sabemos que existe un único vector $g(w) \in \mathbb{V}$ tal que $\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle$. Por lo tanto podemos definir $g \in \hom(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ como la función que a cada w le asigna el único vector $g(w)$ que satisface la igualdad anterior. Veamos que g es lineal: Sean $v \in \mathbb{V}$, $w, w' \in \mathbb{W}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle v, \alpha g(w) + \beta g(w') \rangle = \langle v, \alpha g(w) \rangle + \langle v, \beta g(w') \rangle = \bar{\alpha} \langle v, g(w) + \bar{\beta} \langle v, g(w') \rangle$$

$$\bar{\alpha} \langle v, g(w) + \bar{\beta} \langle v, g(w') \rangle = \bar{\alpha} \langle f(v), w \rangle + \bar{\beta} \langle f(v), w' \rangle = \langle f(v), \alpha w + \beta w' \rangle$$

Como $\alpha g(w) + \beta g(w')$ satisface que $\langle v, \alpha g(w) + \beta g(w') \rangle = \langle f(v), \alpha w + \beta w' \rangle$, entonces $\alpha g(w) + \beta g(w') = g(\alpha w + \beta w')$ $\square$

8.13 Propiedad

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos EVPI de dimensión finita, $\mathfrak{B} = (v_1, ..., v_n)$ y $\mathfrak{B}' = (w_1, ..., w_m)$ bases ordenadas ortonormales de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente y $f \in \hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, entonces:

$$|f^*|_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} = \overline{(|f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'})^t}$$

Demostración: Como $\mathfrak{B}'$ es base de $\mathbb{W}$, sabemos que hay escalares $c_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que, para todo $j \in \{1, ..., n\}$:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m c_{ij} w_i$$

Por lo que podemos deducir que $(|f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'})_{ij} = c_{ij}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Por otro lado, como $\mathfrak{B}$ es base de $\mathbb{V}$, hay escalares $d_{ik} \in \mathbb{K}$ tales que, para todo $k \in \{1, ..., m\}$:

$$f^*(w_k) = \sum_{i=1}^n d_{ik} v_i$$

Entonces, en este caso tenemos que $(|f^*|_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}})_{ij} = d_{ij}$ con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$ Observemos ahora que

$$\langle f(v_j), w_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^m c_{ij} w_i, w_k \rangle = c_{kj} \text{ (Todos los términos donde } i \neq k \text{ son nulos)}$$

$$\langle f(v_j), w_k \rangle = \langle v_j, f^*(w_k) = \langle v_j, \sum_{i=1}^n d_{ik} v_i \rangle = \overline{d_{jk}} \text{ (Usando el mismo argumento de antes)}$$

Por lo tanto $c_{kj} = \overline{d_{jk}}$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$ y $k \in \{1, ..., m\}$, es decir:

$$|f^*|_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} = \overline{(|f|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'})^t} \ \square$$

8.14 Propiedad

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ autoadjunta, entonces:

1. Los autovalores de f son reales
2. Si hay vectores $x, y \in \mathbb{V}$ que son autovectores de f de autovalores distintos, entonces $x \perp y$

Demostración (1.): Como f es autoadjunta, para todo $v, v' \in \mathbb{V}$ vale que:

$$\langle f(v), v' \rangle = \langle v, f(v') \rangle$$

Supongamos que f tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, de manera que existe un vector $u \in \mathbb{V} : f(u) = \lambda u$. Sea $u = v = v'$, entonces tenemos que:

$$\langle f(u), u \rangle = \langle u, f(u) \rangle$$
$$\langle \lambda u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle$$
$$\lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$$
$$\lambda = \bar{\lambda} \text{ (u es no nulo pues es un autovector)}$$

Entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2.): Sean $x, y \in \mathbb{V}$ autovectores de f de autovalores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ respectivamente y tales que $\lambda \neq \mu$.

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \mu y \rangle$$
$$\lambda \langle x, y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle$$
$$(\lambda - \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0$$

Como los autovalores son reales y distintos, el factor de la izquierda no puede ser nulo. Por lo tanto, $x \perp y$. □

8.15 Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión n. Si $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ es autoadjunta, entonces tiene autovalores (La propiedad anterior nos dice que si p_f tiene raíces, son reales. Esta se refiere a que p_f tiene raíces).

Demostración: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ no hay nada que probar, supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sean $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ autoadjunta, $\mathfrak{B}$ base ordenada ortonormal de $\mathbb{V}$ y $A = |f|_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Consideremos la función $g \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ dada por $g(x) = Ax$ y sea $\mathfrak{B}'$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Entonces, $|g|_{\mathfrak{B}'} = A$. Si consideramos el producto interno estándar de $\mathbb{C}^n$, resulta ser que $\mathfrak{B}'$ es una base ortonormal, por ende:

$$|g^*|_{\mathfrak{B}'} = \overline{A^t} = A$$

Así que g es autoadjunta. Notemos que $p_g = p_{|g|_{\mathfrak{B}'}} = p_A = p_{|f|_{\mathfrak{B}}} = p_f$. Como estamos en un espacio vectorial complejo, p_g tiene alguna raíz que sabemos que es real. Por lo tanto, p_f también tiene alguna raíz. □

8.16 Teorema

Sea $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión n y $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ autoadjunta, entonces existe una base ordenada y ortonormal de $\mathbb{V}$ cuyos elementos son autovectores de f asociados a autovalores reales.

Demostración: Por inducción en n, si $n = 0$ el enunciado resulta cierto. Supongamos que es cierto para $n - 1$, veamos que lo es para n.

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{V})$ autoadjunta, sabemos que tiene al menos un autovalor y que es real, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ dicho autovalor. Por lo tanto, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Afirmo que el subespacio $\mathbf{W} = \langle v \rangle^\perp$ es f-invariante. Sea $u \in \mathbf{W}$, veamos que $f(u) \in \mathbf{W}$:

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle = 0$$

Como esta afirmación es cierta, sabemos que $f|_{\mathbf{W}}$ es un endomorfismo. Mostremos que $f|_{\mathbf{W}}$ es autoadjunta, sean $w, w' \in \mathbf{W}$

$$\langle w, (f|_{\mathbf{W}})^*(w') \rangle = \langle f|_{\mathbf{W}}(w), w' \rangle = \langle f(w), w' \rangle = \langle w, f^*(w') \rangle$$

Esto nos dice que, si fijamos w, entonces $\langle w, (f|_{\mathbf{W}})^*(w') - f^*(w') \rangle = 0$ Lo cual significa que, para todo $w' \in \mathbf{W}$, vale que $(f|_{\mathbf{W}})^*(w') = f^*(w') = f(w') = f|_{\mathbf{W}}(w')$. Esta última igualdad $(f(w') = f|_{\mathbf{W}}(w'))$ es cierta pues estamos solo considerando elementos de $\mathbf{W}$.

Entonces, $f|_{\mathbf{W}}$ está definida en un subespacio de dimensión $n-1$ y es autoadjunta, por lo tanto, existe una base ordenada y ortonormal de $\mathbf{W}$ cuyos elementos son autovectores de $f|_{\mathbf{W}}$ asociados a autovalores reales. Sea $\mathfrak{B}' = (x_1, ..., x_{n-1})$ dicha base, por la Propiedad 8.8 sabemos que $\mathbb{V} = \underbrace{\mathbf{W}}_{\langle v \rangle^\perp} \oplus \langle v \rangle$, así que $\mathfrak{B}'' = (x_1, ..., x_{n-1}, v)$ es base de $\mathbb{V}$. Notemos que es ortogonal pues los primeros $n-1$ vectores lo son entre sí y el último pertence al complemento ortogonal de los anteriores. Sabemos que $||x_i|| = 1$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, así que $\mathfrak{B} = (x_1, ..., x_{n-1}, \frac{v}{||v||})$ es una base ordenada y ortonormal de $\mathbb{V}$ cuyos elementos son autovectores de f asociados a autovalores reales. $\square$