

UBA - FCEyN

ANÁLISIS COMPLEJO

Según un estudiante

Luca Martínez

2C 2025

Aclaración

¡Hola! Esto es un apunte de Análisis Complejo que estoy haciendo durante la cursada de la materia en el segundo cuatrimestre de 2025. No va a ser tan completo como la bibliografía sugerida o el cuaderno de un alumno que va a la teórica y copia todo lo que el profesor escribe. La motivación de crear esto que estás leyendo es poder reunir definiciones importantes, propiedades, lemas, teoremas, etc. de manera más compacta y con más detalle en la que, para mí, es la parte más difícil de la teoría: las demostraciones. Entiendo que los contenidos dados pueden variar un poco de acuerdo a los profesores que dan la materia, ¡pero espero que esto le sirva a la mayoría de personas que cursen!

1. Nociones básicas sobre \mathbb{C} y sus propiedades

Lo primero que vamos a hacer es definir algunos conceptos muy elementales sobre los números complejos pero que nos van a servir para la demostración de la primera propiedad relevante.

Definición 1.0

Se define a \mathbb{C} , el conjunto de los números complejos, como:

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Donde i es la *unidad imaginaria* y satisface que $i^2 = -1$

Sean $z = a + bi$, $w = c + di$. Definiendo la suma $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y la multiplicación $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ resulta ser un **cuerpo**.

$x + yi$ es la forma *binómica* de un número complejo.

Se puede notar que la elección de dos números reales arbitrarios determina unívocamente a un número complejo. Es decir, hay una biyección evidente entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(x, y) = x + yi$). Esto, si bien parece una mera observación, realmente se lleva mucho más allá, tanto así que, tal como representamos los elementos de \mathbb{R}^2 en un plano de ejes cartesianos, lo mismo se hace con los números complejos. Por ejemplo, el número complejo $2 + 3i$ se ubica en el plano en el mismo lugar que ubicaríamos a $(2, 3)$

Definición 1.1

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define a x como la *parte real* de z y se denota $\operatorname{Re}(z)$. Por otro lado, se define a y como la *parte imaginaria* de z , y se denota $\operatorname{Im}(z)$

Con estas dos definiciones ya queda claro que \mathbb{R} , el conjunto de los números reales, es un subconjunto de \mathbb{C} . En particular, es el conjunto de todos los números complejos con parte imaginaria nula.

Definición 1.2

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos. $z = w$ si y solo si:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \text{ y } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$$

Definición 1.3

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define el *conjugado* de z , denotado por \bar{z} , como:

$$\bar{z} = x - yi$$

Vale como observación que esto nos da otra forma más de diferenciar a \mathbb{R} dentro de los complejos: los números reales son aquellos números complejos que son iguales a su conjugado. Esto es útil en algunos momentos en los que queremos

verificar si un número es real o no.

Definición 1.4

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define $|z|$, el *módulo* de z , como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bien, ahora ya tenemos una noción del tamaño o magnitud de un número complejo. Como podemos ver, esto se sigue sosteniendo en la idea de representar a los elementos de \mathbb{C} como los de \mathbb{R}^2 , pues $|z|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$ y (x, y) (Teorema de Pitágoras).

Lo siguiente es un cúmulo de algunas propiedades útiles que no voy a demostrar (no es difícil de hacer).

Propiedad 1.0

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

1. $|z| = |\bar{z}|$
2. $|zw| = |z||w|$
3. $|z^n| = |z|^n$ (es un caso particular del anterior)
4. $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$
5. $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$
6. $z\bar{z} = |z|^2$
7. Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (se deduce del anterior)
8. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
9. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
10. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
11. $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

(Por si te interesa probarlas: en la mayoría basta con escribir en forma binómica a cada complejo y desarrollar).

Definición 1.5

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se denomina $\arg(z)$, *argumento* de z , a cualquier número real θ tal que:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \text{ y } \cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

Y recibe el nombre de *argumento principal* aquel valor de θ que se encuentra en el intervalo $[0, 2\pi)$ (y vamos a denotarlo $\operatorname{Arg}(z)$)

Si de nuevo visualizamos a z en el típico plano de \mathbb{R}^2 , el argumento principal no es más que el ángulo que se forma entre el segmento que va del $(0, 0)$ a z y el eje real (que es el nombre que vamos a darle al eje x), mientras que todas las otras formas del argumento son el argumento principal $+ 2k\pi$, siendo k un entero.

Esto induce una nueva forma, equivalente a la representación polar de los elementos de \mathbb{R}^2 , de representar a un número complejo.

Propiedad 1.1

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$ y $\theta = \arg(z)$, entonces:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{isen}(\theta))$$

$|z|(\cos(\theta) + i\operatorname{isen}(\theta))$ es la forma *polar* de un número complejo.

Propiedad 1.2

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z = w$ si y solo si:

$$|z| = |w| \text{ y } \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w)$$

Propiedad 1.3

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi$$

Demostración.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sean $\alpha = \arg(z)$, $\beta = \arg(w)$

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha) + i\operatorname{isen}(\alpha))(\cos(\beta) + i\operatorname{isen}(\beta))$$

$$zw = |zw|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + i\operatorname{isen}(\beta)\cos(\alpha) + i\operatorname{isen}(\alpha)\cos(\beta) + i^2\operatorname{isen}(\alpha)\operatorname{isen}(\beta))$$

$$zw = |zw|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + i(\operatorname{isen}(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{isen}(\alpha)\cos(\beta)))$$

Notemos que la parte real de lo que está adentro del paréntesis es el coseno de la suma entre α y β . Lo mismo ocurre con la parte imaginaria y el seno de la suma.

$$zw = |zw|(\cos(\alpha + \beta) + i\operatorname{isen}(\alpha + \beta)) \quad \square$$

Corolario

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(\cos(\theta) + i\operatorname{isen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{isen}(n\theta)$$

Esta es la *fórmula de De Moivre*.

La forma polar de los números complejos es notablemente más cómoda para trabajar con las potencias, y, en general, es más elegida que la binómica.

Propiedad 1.4 (Fórmula de Euler)

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{isen}(x)$$

Esta es una de las igualdades más célebres de la matemática y más adelante en la materia va a ser demostrada. La misma nos da una tercera forma de escribir un número complejo.

Propiedad 1.5

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $\theta = \arg(z)$, entonces:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$|z|e^{i\theta}$ es la forma *exponencial* de un número complejo.

Teorema 1.0 (Desigualdad triangular)

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Demostración.

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$$

$$(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2$$

$$|z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2$$

$$|z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Por transitividad de $=$ y de \leq :

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \square$$

2. Raíces de números complejos

Esta sección va a ser corta pues solo vamos a exhibir rápidamente cómo se hallarían las raíces de cualquier número complejo, junto a un resultado que puede sernos útil.

Propiedad 2.0

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\arg(z^n) - 2k\pi = n\arg(z)$$

Para algunos enteros k .

Esta propiedad se puede deducir de la fórmula de De Moivre, e implica que, dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, hay n complejos z distintos tales que $z^n = w$. Para hallarlos, basta con igualar $\arg(z^n)$ con $\arg(w)$, y $|z^n|$ con $|w|$.

Ejemplo. Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = 1$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 1$. Procedemos igualando argumentos y módulos

$$\begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \arg(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = 1 \\ 3\arg(z) = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

Solo nos queda hallar todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq \frac{2}{3}k\pi < 2\pi$, dividiendo por $\frac{2}{3}\pi$ en toda la desigualdad llegamos a que $k \in \{0, 1, 2\}$. Así que mis soluciones z_1, z_2, z_3 son:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \quad z_3 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

Propiedad 2.1

Sean $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ raíces n -ésimas de $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces:

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = \begin{cases} nw^k & \text{si } m = kn, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Demostración.

Supongamos que hay k natural tal que $\frac{m}{n} = k$, sea $\phi = \arg(w)$, sabemos entonces que:

$$z_j = |w|^{1/n} e^{i(\phi+2j\pi)/n}$$

Luego:

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = \sum_{j=0}^{n-1} (|w|^{1/n} e^{i(\phi+2j\pi)/n})^m = |w|^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(\phi+2j\pi)m/n}$$

Descomponiendo el exponente, vemos que $e^{i\phi m/n}$ no depende de j .

$$|w|^k e^{i\phi k} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi k} = |w|^k (e^{i\phi})^k \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2j\pi})^k$$

Para cada j , lo que está en la suma siempre es 1 pues $e^{i2k\pi} = 1$ para todo k entero. Por ende

$$|w|^k (e^{i\phi})^k \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2j\pi})^k = n(|w|e^{i\phi})^k = nw^k$$

Si m no es un múltiplo de n , podemos retornar hasta este paso

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = |w|^{m/n} e^{i\phi m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi m/n}$$

Reescribiendo la suma

$$(|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi m/n} = (|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2\pi m/n})^j$$

Tenemos una geométrica, como m/n no es un entero, la base resulta ser distinta de 1, por lo que podemos aplicar el conocido resultado

$$(|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2\pi m/n})^j = (|w|e^{i\phi})^{m/n} \left(\frac{(e^{i2\pi m/n})^n - 1}{e^{i2\pi m/n} - 1} \right) = 0$$

Pues el numerador resulta ser nulo. \square

3. Funciones complejas

Aclaración.

\mathbb{R}^2 y \mathbb{C} serán usados indistintamente a la hora de definir dominios y codominios de funciones y enunciar propiedades y definiciones relacionadas a estas.

3.1. Algunas nociones topológicas

Para hablar de conceptos como límite, continuidad, conexión y otros por el estilo, vamos a reintroducir algunos conceptos de topología. Sobre cada uno de ellos se profundizó en Cálculo Avanzado, por lo que solo vamos a enunciar algunas definiciones y propiedades, pero no vamos a hacer demostraciones.

Definición 3.1.0

Definimos la distancia “usual” entre dos complejos z, w como:

$$d(z, w) = |z - w|$$

Como su nombre sugiere, esta función hace de (\mathbb{C}, d) un espacio métrico.

Esto nos permite definir más conceptos.

Definición 3.1.1

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}$ (r real positivo) y $\mathcal{B}^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < d(z, z_0) < r\}$, entonces:

1. z_0 es punto *interior* de D sii hay $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(z_0) \subseteq D$
2. z_0 es punto *exterior* de D sii hay $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(z_0) \cap D = \emptyset$
3. z_0 es punto *frontera* de D sii para todo $r > 0$ vale que $\mathcal{B}(z_0, r) \cap D \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}(z_0, r) \cap \mathbb{C} - D \neq \emptyset$ simultáneamente
4. z_0 es punto *de acumulación* de D sii para todo $r > 0$ vale que $\mathcal{B}^*(z_0, r) \cap D \neq \emptyset$

Definición 3.1.2

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, definimos D° (*interior* de D) como el conjunto de sus puntos interiores y \overline{D} (*clausura* de D) como $D \cup \{\text{puntos frontera de } D\}$

Además, decimos que D es *abierto* si $D = D^\circ$, y que D es *cerrado* si $D = \overline{D}$.

Definición 3.1.3

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, decimos que D es *disconexo* si hay abiertos disjuntos $V, W \subseteq \mathbb{C}$ tales que:

1. $D \subseteq V \cup W$
2. $D \cap V \neq \emptyset$
3. $D \cap W \neq \emptyset$

((2.) y (3.) ya implican que dichos abiertos disjuntos son no vacíos)

Por el contrario, decimos que D es *conexo* sii no es desconexo.

Definición 3.1.4

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, decimos que D es *arcoconexo* si para todos $v, w \in D$ existe $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$ continua tal que $\gamma(a) = v$ y $\gamma(b) = w$

Propiedad 3.1.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Son equivalentes:

1. D es conexo.
2. D es arcoconexo.

Antes de empezar a hablar de algunos tipos de funciones en particular, vamos a introducir la ya familiar noción de *límite*.

Definición 3.1.5

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(z, z_0) < \delta \rightarrow d(f(z), L) < \varepsilon$$

Con $z \in D$.

3.2. Homografías

Definición 3.2.0

Llamamos *homografía* a cualquier función f de la forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$

Además, damos el nombre de *homografías básicas* a estas funciones:

1. Traslación: $T_a(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}$
2. Homotecia: $H_r(z) = rz$, $r > 0$
3. Rotación: $R_\alpha(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$
4. Inversión: $I(z) = 1/z$

Los valores en los que está definida f y los que puede tomar dependen de si c es nulo o no. En general, su dominio es o bien \mathbb{C} o bien $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ según el caso. Mientras que su imagen es o bien \mathbb{C} o bien $\mathbb{C} - \{a/c\}$.

Propiedad 3.2.0

Sea f una homografía $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $c \neq 0$ y consideremos $i(z) = 1/z$. Hay funciones lineales g, h tales que:

$$f = g \circ i \circ h$$

Demostración.

Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $ad - qc = 0$, o sea $q = \frac{ad}{c}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b+q-q}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b-q}{cz+d}$$

$$f(z) = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz + d} + \frac{b - q}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c})(cz + d)^{-1}$$

Luego, $h(z) = cz + d$ y $g(z) = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c})z$ □

Notemos que esto está muy próximo a ser una demostración de que **toda homografía es composición de las básicas**, que es una propiedad bastante importante a considerar. A continuación, definimos la *proyección estereográfica*. Para esto, consideremos una “extensión” de \mathbb{C}

Definición 3.2.1

Definimos al *plano complejo extendido*, denotado como $\hat{\mathbb{C}}$, como el conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definición 3.2.2

Sean $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ (el “polo norte” de la esfera) y $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$.

La *proyección estereográfica* de P es el punto $z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ (que vamos a asociarlo al complejo $x + yi$) que es la intersección entre el plano xy y la recta que pasa por N y P .

Propiedad 3.2.1

Dado un punto $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, la proyección estereográfica de P es $z = (\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0)$. Por ende, definimos $\Psi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ así:

$$\Psi(a, b, c) = \begin{cases} \frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-c}i & \text{si } (a, b, c) \neq N \\ \infty & \text{si } (a, b, c) = N \end{cases}$$

Demostración.

Sean $N = (0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, consideremos la recta que une ambos puntos:

$$L : (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)$$

Nos interesa hallar la intersección con el plano xy , así que consideramos la siguiente ecuación:

$$(0, 0, 1) + t(a, b, c - 1) = (x, y, 0)$$

Igualando las terceras coordenadas

$$1 + t(c - 1) = 0$$

$$t = \frac{-1}{c - 1}$$

$$t = \frac{1}{1 - c}$$

O sea que para $t = \frac{1}{1-c}$ se obtiene el punto de intersección, reemplazando por dicho valor tenemos que:

$$(0, 0, 1) + \frac{1}{1-c}(a, b, c - 1) = (\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, \frac{c-1}{1-c} + 1) = (\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0) = (x, y, 0)$$

Este elemento $(x, y, 0)$ se asocia al complejo $x + yi$, que coincide con lo definido en Ψ . □

Propiedad 3.2.2

Ψ es biyectiva y su inversa $\Psi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ está dada por:

$$\Psi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2+1}{|z|^2-1} \right) & \text{si } z \neq \infty \\ N & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Con $z = x + yi$.

Demostración.

Sean $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x + yi$. En la demostración anterior vimos que, si z es la proyección estereográfica de P , entonces,

$$\begin{cases} x = \frac{a}{1-c} \\ y = \frac{b}{1-c} \end{cases}$$

Es decir que $a = x(1-c)$ y $b = y(1-c)$. Recordando que P satisface la ecuación $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{(1-c)^2} + \frac{b^2}{(1-c)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(1-c)^2} = \frac{1-c^2}{(1-c)^2} = \frac{1+c}{1-c}$$

Por transitividad, se tiene que

$$|z|^2(1-c) = 1+c$$

$$|z|^2 - 1 = c + |z|^2 c$$

$$c = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Reemplazando en los valores de a, b

$$a = x \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = x \left(\frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{2x}{|z|^2 + 1}$$

Procediendo de la misma manera, resulta ser que

$$b = \frac{2y}{|z|^2 + 1}$$

Los valores a, b, c hallados coinciden con lo definido en Ψ^{-1} . \square

Propiedad 3.2.3

Sean $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x + yi$ no nulo, si $\Psi(a, b, c) = z$, entonces $\Psi(a, -b, -c) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Demostración.

Sean $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x + yi \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $\Psi(P) = z$, o sea que $z = \frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-c}i$, sabiendo que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, entonces,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1-c} - \frac{b}{1-c}i \right) \frac{1}{|z|^2}$$

En la demostración anterior pudimos ver que $|z|^2 = \frac{1+c}{1-c}$, luego,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1-c} - \frac{b}{1-c}i \right) \frac{1-c}{1+c}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1+c} - \frac{b}{1+c}i \right)$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1 - (-c)} + \frac{-b}{1 - (-c)}i \right)$$

Lo que está del lado derecho de la igualdad es la proyección estereográfica del punto $(a, -b, -c)$, así que

$$\Psi(a, -b, -c) = z^{-1} \quad \square$$

Por lo que invertir z equivale (en la esfera) a enviar el punto (a, b, c) al $(a, -b, -c)$, entonces, sabiendo que el punto N se corresponde con ∞ y $S = (0, 0, -1)$ con 0 y que, en la esfera, N y S son uno el inverso del otro, esto nos dice que la noción de asignarle el valor ∞ a $\frac{1}{0}$ y el valor 0 a $\frac{1}{\infty}$ tiene “algo” de sentido en $\hat{\mathbb{C}}$.

Propiedad 3.2.4

La proyección estereográfica envía circunferencias en \mathbb{S}^2 a circunferencias o rectas en \mathbb{C}

Demostración.

Sea Ψ la proyección estereográfica y $C \subseteq \mathbb{S}^2$ una circunferencia. Entonces existe un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Pi : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $C = \Pi \cap \mathbb{S}^2$. Sea $P = (a, b, c) \in C$, esto implica que (a, b, c) soluciona las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

Como Ψ es biyectiva, existe un número complejo $w = u + vi$ tal que $P = \Psi^{-1}(w)$, o sea que

$$\begin{cases} a = \frac{2u}{|w|^2 + 1} \\ b = \frac{2v}{|w|^2 + 1} \\ c = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \end{cases}$$

Reemplazamos estos valores en Π para ver qué forma tiene esto en el plano complejo

$$\alpha_1 \left(\frac{2u}{|w|^2 + 1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{2v}{|w|^2 + 1} \right) + \alpha_3 \left(\frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right) = \alpha_4$$

$$\alpha_1(2u) + \alpha_2(2v) + \alpha_3(|w|^2 - 1) = \alpha_4(|w|^2 + 1)$$

Reagrupando los términos que tienen $|w|^2$, llegamos a

$$(\alpha_3 - \alpha_4)|w|^2 + 2\alpha_1 u + 2\alpha_2 v = \alpha_3 + \alpha_4$$

Y esta ecuación es una circunferencia si $\alpha_3 \neq \alpha_4$, y una recta si ocurre lo contrario (notar que esto depende de si $(0, 0, 1) \in C$ o no). \square

Propiedad 3.2.5

La imagen de cualquier circunferencia o recta por una homografía es una recta o una circunferencia (o sea, no necesariamente la imagen de una circunferencia es una circunferencia, ni la de una recta es una recta).

Demostración.

Basta con probarlo para las homografías básicas. Para traslaciones, homotecias o rotaciones esto es evidente, por lo que vamos a probar que se cumple para las inversiones. Sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ y $z = x + yi \in \mathbb{C} - \{0\}$, la ecuación

$$A|z|^2 + B\operatorname{Re}(z) + C\operatorname{Im}(z) + D = 0$$

Representa una circunferencia si A es no nulo, y una recta en caso contrario. Sea $w = 1/z$, reemplazando

$$\frac{A}{|w|^2} + B \operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \right) + C \operatorname{Im} \left(\frac{1}{w} \right) + D = 0$$

$$\frac{A}{|w|^2} + B \frac{x}{|w|^2} + C \frac{-y}{|w|^2} + D = 0$$

Multiplicando por $|w|^2$

$$D|w|^2 - Cy + Bx + A = 0$$

Esto es una recta si D es nulo, y es una circunferencia en caso contrario. \square

Propiedad 3.2.6

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$. Hay una única homografía f que satisface

$$f(z_1) = 0 \quad f(z_2) = 1 \quad f(z_3) = \infty$$

Demostración.

Sea f una homografía, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Podemos encontrar a, b, c, d planteando estas ecuaciones

$$\begin{cases} f(z_1) = 0 \iff \frac{az_1+b}{cz_1+d} = 0 \iff az_1+b=0 \iff z_1 = -\frac{b}{a} \\ f(z_3) = \infty \iff \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \infty \iff cz_3+d=0 \iff z_3 = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \left(\frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Pedimos $f(z_2) = 1$

$$f(z_2) = \frac{a}{c} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \right) = 1$$

$$\frac{a}{c} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Así que

$$f(z) = \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right) \left(\frac{z - z_1}{z - z_3} \right) \quad \square$$

4. Derivabilidad, holomorfía y transformaciones conformes

En esta sección vamos a tratar la noción de derivada de una función compleja, al principio va a sernos muy familiar con la derivabilidad de funciones reales.

Definición 4.0

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $D \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^\circ$. Decimos que f es *derivable* en z_0 si y solo si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

De existir dicho límite, lo denotamos $f'(z_0)$.

Definición 4.1

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + yi)) \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + yi))$$

Esto implica, naturalmente, que $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$.

Propiedad 4.0

Sean f, g funciones complejas tales que: existe $f \circ g$, f y g son derivables en z_0 punto interior del dominio de ambas funciones, y f es derivable en $g(z_0)$, entonces:

1. $(f(z_0) + g(z_0))' = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $(fg(z_0))' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
3. $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$

(Notar que hay hipótesis que evidentemente no son necesarias para la validez de los 3 enunciados, pero quise agregarlas a todas de una sola vez).

Propiedad 4.1

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $z_0 \in D^\circ$. Son equivalentes:

1. f es derivable en z_0
2. Existe $L \in \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $\mathcal{B}_\delta(z_0) \subseteq D$ que verifica

$$|z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Con $z \in \mathcal{B}_\delta(z_0)$

Para probar (1.) \rightarrow (2.) se puede usar la definición de que f sea derivable en z_0 y luego multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $|z - z_0|$. Para (2.) \rightarrow (1.) se puede aplicar el proceso inverso para recuperar la definición de derivabilidad de f en z_0 .

Corolario

Sea f derivable en z_0 , entonces f es continua en z_0 .

Propiedad 4.2 (Condiciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $z_0 = x_0 + y_0 i \in D^\circ$. Son equivalentes:

1. f es derivable en z_0
2. u, v son diferenciables en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales verifican que

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Demostración.

(1.) \rightarrow (2.): Sea f derivable en $z_0 = x_0 + y_0 i$ con $f'(z_0) = a + bi$ y $\varepsilon > 0$, entonces, hay un real positivo δ tal que, si $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Lo que está del lado izquierdo de la desigualdad es, para cada z , el módulo un número complejo. Por ende, sabemos que es menor o igual que el módulo de su parte real

$$|\operatorname{Re}(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))| \leq |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Antes de seguir, calculamos $f'(z_0)(z - z_0)$

$$f'(z_0)(z - z_0) = (a + bi)((x - x_0) + (y - y_0)i) = a(x - x_0) + (y - y_0)ai + (x - x_0)bi - b(y - y_0)$$

$$f'(z_0)(z - z_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + (a(y - y_0) + b(x - x_0))i$$

Volviendo a la desigualdad, $\operatorname{Re}()$ distribuye respecto de la suma, entonces

$$|\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0)) - \operatorname{Re}(f'(z_0)(z - z_0))| < \varepsilon |z - z_0|$$

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0) - [a(x - x_0) - b(y - y_0)]| < \varepsilon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Esta es la definición de que $u(x, y)$ sea diferenciable en (x_0, y_0) (recordar el límite de diferenciabilidad de Análisis I).

Además, sabemos por ello que $u_x(x_0, y_0) = a$ y $u_y(x_0, y_0) = -b$

Procediendo exactamente igual pero tomando $\operatorname{Im}()$, llegamos a

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0) - [b(x - x_0) + a(y - y_0)]| < \varepsilon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Esto significa que $v(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y que $v_x(x_0, y_0) = b$ y $v_y(x_0, y_0) = a$, como se quería probar.

(2.) \rightarrow (1.): Sean $\Delta x = (x - x_0)$ y $\Delta y = (y - y_0)$. Supongamos las condiciones de (2.). Entonces sabemos que, simultáneamente:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x \Delta x + u_y \Delta y + E_u$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x \Delta x + v_y \Delta y + E_v$$

Con E_u, E_v tales que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{E_u}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{E_v}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Todas las derivadas parciales están evaluadas en (x_0, y_0) pero por comodidad lo vamos a obviar.

$$f(z) - f(z_0) = (u(x, y) - u(x_0, y_0)) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))i = (u_x \Delta x + u_y \Delta y + E_u) + (v_x \Delta x + v_y \Delta y + E_v)i$$

Escribiendo todo en función de u_x y v_x

$$f(z) - f(z_0) \underset{C-R}{=} (u_x \Delta x - v_x \Delta y) + (v_x \Delta x + u_x \Delta y)i + E_u + E_v i$$

$$f(z) - f(z_0) = u_x \Delta x + v_x \Delta x i + u_x \Delta y i - v_x \Delta y + E_u + E_v i$$

Factorizando $(u_x + v_x i)$

$$f(z) - f(z_0) = (u_x + v_x i)(\Delta x + \Delta y i) + E_u + E_v i$$

Dividiendo ambos lados por $z - z_0 = \Delta x + \Delta y i$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x + v_x i + \frac{E_u + E_v i}{(x - x_0) + (y - y_0)i}$$

Tomando límite con $z \rightarrow z_0$ (equivalente a $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ y $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$).

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x + u_y i + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{E_u + E_v i}{(x - x_0) + (y - y_0)i}$$

Afirmo que el límite de la suma de los errores E_u, E_v tiende a 0, para eso basta con que en módulo también lo haga.

$$0 \leq \frac{|E_u + E_v i|}{|(x - x_0) + (y - y_0)i|} \leq \frac{|E_u|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{|E_v i|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$\frac{|E_u|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{|E_v i|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|E_u|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{|E_v|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Y tomando límite vemos que ambos términos de la suma tienden a 0 (por la definición de E_u y E_v). Luego,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i \quad \square$$

Definición 4.2

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^\circ$. Decimos que f es holomorfa en z_0 si hay $r > 0$ tal que f es derivable en $\mathcal{B}_r(z_0) \subseteq D$.
Decimos que f es holomorfa si es holomorfa en todo elemento de D .

Propiedad 4.3

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con D abierto y conexo (llamamos *dominio* a estos conjuntos) y f holomorfa. Si $u(x, y)$ es constante, entonces f es constante

Demostración.

Como f es holomorfa, en particular es derivable, entonces valen las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} u_x(x, y) = 0 = -v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = 0 = v_x(x, y) \end{cases}$$

Al ser D abierto y conexo, puedo integrar cada derivada parcial, y esto me dice que f es constante pues u y v lo son. \square

Propiedad 4.4

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con D dominio. Si $|f|$ es constante, f es constante.

Demostración.

Supongamos que $|f|$ es no nulo, de serlo, el enunciado es trivialmente cierto. Entonces hay un real positivo k tal que $|f| = k$. Luego, $|f|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = k^2$. Derivando respecto de x y de y

$$\begin{cases} 2u(x, y)u_x(x, y) + 2v(x, y)v_x(x, y) = 2u(x, y)u_x(x, y) + 2v(x, y)v_x(x, y) = 0 \\ 2u(x, y)u_y(x, y) + 2v(x, y)v_y(x, y) \stackrel{\text{C-R}}{=} 2u(x, y)(-v_x(x, y)) + 2v(x, y)u_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esto se puede traducir al siguiente sistema matricial (luego de dividir por 2 a ambos lados).

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $|f|^2 = k^2 > 0$, entonces u y v no son ambos nulos, esto implica que la matriz es singular, así que su determinante es 0, es decir,

$$u_x^2 + v_x^2 = 0 \longrightarrow u_x \stackrel{\text{C-R}}{=} v_y = 0, \quad v_x \stackrel{\text{C-R}}{=} -u_y = 0$$

Las derivadas parciales son todas iguales a cero, por lo que u y v son constantes y, en consecuencia, f también. \square

Asumamos a partir de ahora que u, v son indefinidamente diferenciables.

Definición 4.3

Sea $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que u es armónica si $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (laplaciano nulo).

Propiedad 4.5

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ subconjunto simplemente conexo (“sin agujeros”) y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Existe $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ es holomorfa en D . v recibe el nombre de *armónica conjugada*. Si existe \tilde{v} que también cumple entonces $v(x, y) - \tilde{v}(x, y) = w \in \mathbb{C}$.

Demostración. (Idea)

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ subconjunto simplemente conexo y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Queremos hallar $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $\nabla v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x)$. Pedir esto bastaría para que f sea holomorfa pues por C-R sería derivable en todo punto, y también haría que v sea armónica ya que para u vale el teorema de Clairaut (las derivadas cruzadas son iguales). Para que un campo vectorial (en este caso $(-u_y, u_x)$) sea el gradiente de alguna función (la función v que buscamos), es necesario que el rotacional/rotor de dicho campo sea nulo.

$$\text{rot}(-u_y, u_x) = u_{xx} - (-u_{yy}) = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Vemos que la condición se satisface por ser u armónica. Además, esta se vuelve también suficiente si suponemos que D es simplemente conexo.

Ejemplo. Probar que la función $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$ es armónica y hallar su armónica conjugada.

Sea $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces,

$$u_{xx}(x, y) = -\sin(x)\cosh(y) \quad u_{yy}(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$$

Es claro que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Por ende, existe v armónica conjugada. Para que f sea holomorfa basta con que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. Pedimos que valgan las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \cos(x)\cosh(y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = \sin(x)\sinh(y) = -v_x(x, y) \end{cases}$$

$$\int v_y dy = \int \cos(x)\cosh(y) dy = \cos(x)\sinh(y) + g(x)$$

$$\int -v_x dx = - \int \sin(x)\sinh(y) dx = -(-\cos(x))\sinh(y) + h(y) = \cos(x)\sinh(y) + h(y)$$

Derivando respecto de x el resultado de la primera integral e igualando a $-u_y$:

$$-\sin(x)\sinh(y) + g'(x) = -\sin(x)\sinh(y) \rightarrow g'(x) = 0$$

Y derivando respecto de y el resultado de la segunda integral e igualando a u_x

$$\cos(x)\cosh(y) + h'(y) = \cos(x)\cosh(y) \rightarrow h'(y) = 0$$

Ambas funciones son constantes, podemos tomar ambas iguales a 0. Así que:

$$v(x, y) = \cos(x)\sinh(y)$$

Propiedad 4.6

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D abierto conexo de \mathbb{R}^2 tal que su imagen está contenida en una recta. Entonces, f es constante.

Demostración.

Sea $f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$ holomorfa en D , como su imagen está contenida en una recta, hay números reales a, b, c con a y b no ambos nulos, tales que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$au(x, y) + bv(x, y) = c$$

Derivando respecto de x y también respecto de y , tenemos que:

$$\begin{cases} au_x(x, y) + bv_x(x, y) = 0 \\ au_y(x, y) + bv_y(x, y) = 0 \end{cases} \stackrel{C-R}{=} \begin{cases} -av_x(x, y) + bu_x(x, y) = 0 \\ -av_y(x, y) + bu_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esto puede traducirse al siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $-(a^2 + b^2)$ que es no nulo pues sabemos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Así que solo puede ser que $u_x, v_x = 0$ que por C-R son iguales a v_y y $-u_y$ respectivamente. Como todas las derivadas parciales son nulas, u y v son constantes, y por ende f lo es. \square

Definición 4.4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Decimos que f es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva y con inversa diferenciable.

Definición 4.5

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Decimos que f es una *transformación conforme* si, dado un par de curvas $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ de dominio $[a, b] \in \mathbb{R}$ que se intersecan en z_0 formando un ángulo α , la imagen de las mismas por f preserva ese mismo ángulo. Es decir, si notamos como $\theta(v, w)$ al ángulo entre los vectores v y w , y $t_0 \in [a, b]$ es tal que $\sigma(t_0), \gamma(t_0) = z_0$ entonces vale que

$$\alpha = \theta(\sigma'(t_0), \gamma'(t_0)) = \theta((f \circ \sigma)'(t_0), (f \circ \gamma)'(t_0))$$

Con σ, γ diferenciables en t_0 y f diferenciable en z_0 .

Consideramos a las siguientes como las transformaciones conformes elementales de \mathbb{R}^n :

1. $f(x) = \lambda x$, λ escalar no nulo (homotecia)
2. $f(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (traslación)
3. $f(x) = Ux$ con $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal
4. $f(x) = \frac{x}{||x||^2}$, con $x \neq 0$ (En \mathbb{R}^2 esto equivale a la inversión de un número complejo z)

Observación 4.0

Decimos que f es conforme en un punto específico $z_0 \in \mathbb{C}$ si la condición de arriba se cumple para curvas que se intersecan en z_0 .

Definición 4.6

Sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva y $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\sigma \in C^1$ la parametrización de la misma. Definimos la *longitud* de la curva σ como:

$$\text{long}(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)|| dt$$

Definición 4.7

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Decimos que f es una *isometría* si, dada $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ curva, $f(\gamma)$ y γ tienen la misma longitud.

Ahora vamos a concentrarnos brevemente en las transformaciones lineales conformes. Nos van a interesar las $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineales tales que, para todos $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{Tv \cdot Tw}{||Tv|| ||Tw||} = \frac{v \cdot w}{||v|| ||w||}$$

Esto equivale a que el ángulo entre v y w sea igual al que hay entre Tv y Tw , pues \cos^{-1} es biyectivo.

Observación 4.1

Si T es una transformación lineal ortogonal, entonces es conforme.

Las transformaciones lineales ortogonales preservan el producto interno (Para todos $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$) y por ende también la norma.

Definición 4.8

Sea $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, decimos que U es ortogonal si, dada $\{v, w\}$ base ortonormal de \mathbb{R}^2 , $\{Uv, Uw\}$ es también una base ortonormal.

(Tomamos 2×2 pero también es cierto en general para matrices de $n \times n$).

Propiedad 4.7

Sea $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{v \mapsto Tv} \mathbb{R}^2$ transformación lineal, son equivalentes:

1. $T = \lambda U$ con U ortogonal.
2. f es conforme.

Demostración.

(1.) \rightarrow (2.): Se deduce de la observación anterior.

(2.) \rightarrow (1.): Sea $\{v, w\}$ base ortonormal de \mathbb{R}^2 , sabemos que entonces $\{Tv, Tw\}$ son ortogonales. Sea $\alpha = \|Tv\|$ y $\beta = \|Tw\|$.

$$(v + w) \cdot (v - w) = v \cdot v + w \cdot v - w \cdot v - w \cdot w = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 1 - 1 = 0$$

Al ser f conforme, sabemos entonces que

$$f(v + w) \cdot f(v - w) = (Tv + Tw) \cdot (Tv - Tw) = 0$$

$$Tv \cdot Tv + Tv \cdot Tw - Tw \cdot Tv - Tw \cdot Tw = \|Tv\|^2 - \|Tw\|^2 = 0 \iff (\|Tv\| - \|Tw\|)(\|Tv\| + \|Tw\|) = 0$$

Como ambos números son reales positivos, solo puede ser que

$$\|Tv\| = \|Tw\|, \text{ es decir, } \alpha = \beta$$

Definimos $U = \alpha^{-1}T$. $\{Uv, Uw\}$ sigue siendo ortogonal pues U es un múltiplo de T , pero además:

$$\|Uv\| = |\alpha^{-1}| \|Tv\| = |\alpha^{-1}| \alpha = 1 = \|Uw\|$$

Como $\{Uv, Uw\}$ es una base ortonormal, T es ortogonal. \square

Propiedad 4.8

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ con f difeomorfismo y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo. Entonces f es conforme si y solo si f es holomorfa o \bar{f} es holomorfa.

Teorema 4.0 (Teorema de Liouville para transformaciones conformes)

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ conforme. Entonces es composición de algunas de las transformaciones conformes elementales (no más de una de cada una).

Definición 4.9

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es una *extensión al plano complejo* de g si

$$f(x + 0i) = g(x)$$

Y a continuación listamos funciones que extienden al plano complejo a funciones conocidas:

1. $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$
2. $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

$$3. e^z = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$$

$$4. \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$5. \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Notemos que la exponencial compleja no es inyectiva debido a que el seno y el coseno son funciones periódicas. Además de eso, notar que es sobreyectiva salvo por el 0. Veamos qué ocurre si quisiéramos definir un *logaritmo complejo*:

Sea $w \in \mathbb{C}$, entonces $e^z = w$ si y solo si

$$|w| = |e^z| = e^x \implies x = \ln(|w|)$$

$$\arg(w) = \arg(e^z) = y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

El problema es claro: hay infinitos valores posibles para $\arg(e^z)$ de manera que este coincida con el argumento de w . Sin embargo, podemos considerar esta restricción para la exponencial compleja

$$\exp() : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \text{ dada por } \exp(x, y) = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$$

Evidentemente es la misma función, solo que nos restringimos al *argumento principal*. De esta manera conseguimos que e^z sea inyectiva.

Definición 4.10

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z = x + yi$. Definimos con esta función al argumento principal de z , denotado por $\operatorname{Arg}(z)$:

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notar que esta función no es continua en la semirecta de reales negativos (si me acerco a un número real $x_0 < 0$ desde los complejos con parte imaginaria positiva, el valor de su argumento principal tiende a π , pero si me acerco desde los que tienen parte imaginaria negativa, este último tiende a $-\pi$). Sin considerar a todo ese conjunto de discontinuidad, Arg es C^1 .

Definición 4.11

Definimos al logaritmo complejo $\operatorname{Log} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$$

Vía Cauchy-Riemann se puede verificar rápidamente que esta función es derivable en todo su dominio y por ende es holomorfa.

Definición 4.12

Sea D abierto conexo de \mathbb{C} , una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama *raíz n -ésima holomorfa* si es holomorfa y además

$$(f(z))^n = z \quad \text{para todo } z \in D$$

Y recibe el nombre de *rama del logaritmo* si es continua y

$$e^{f(z)} = z \quad \text{para todo } z \in D$$

Propiedad 4.8

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^\circ$. Si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 .

Esto nos otorga una cómoda manera de verificar si una función holomorfa es conforme en un punto.

5. Series de potencias

5.1. Series numéricas y criterios de convergencia

Definición 5.1.0

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sucesión de complejos. Decimos que $\sum a_n$ converge si existe $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j a_n$ y denotamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a dicho límite.

Además, si consideramos $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y resulta ser que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = L < +\infty$, decimos que $\sum a_n$ converge absolutamente.

Propiedad 5.1.0

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$. Si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n$ converge.

Demostración.

Sean m y n naturales o cero tales que $m < n$, $S_n = \sum_{m=0}^n a_n$ y $\sigma_n = \sum_{m=0}^n |a_n|$

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{j=0}^n a_j - \sum_{j=0}^m a_j \right| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |a_j| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

Como la serie converge absolutamente, $|\sigma_n - \sigma_m|$ se puede hacer arbitrariamente cercano a 0. \square

A continuación enlistamos varios criterios útiles para analizar la convergencia de series.

Propiedad 5.1.1 (Comparación de la mayorante)

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones de reales positivos tales que $a_n \leq b_n$, entonces,

1. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Propiedad 5.1.2 (Criterio de la raíz n -ésima de Cauchy)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$, entonces,

1. Si $\alpha < 1$, $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $\alpha > 1$, $\sum a_n$ no converge.
3. Si $\alpha = 1$, el criterio no es concluyente.

Propiedad 5.1.3 (Criterio de D'Alembert)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y sea $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, entonces,

1. Si $\beta < 1$, $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $\beta > 1$, $\sum a_n$ no converge.
3. Si $\beta = 1$, el criterio no es concluyente.

Propiedad 5.1.4 (Criterio de comparación)

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones de reales positivos, entonces,

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum a_n, \sum b_n$ convegen o $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Propiedad 5.1.5 (Criterio de la integral)

Sea $\{a_n\}$ suc. de reales no negativos y $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua y decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\sum a_n$ converge si y solo si $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

Definición 5.1.1

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $a_n = z^n$, la suma

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k$$

Recibe el nombre de *suma geométrica*. Cuando tomamos $n \rightarrow \infty$, recibe el nombre de, naturalmente, *serie geométrica*.

Si $z \neq 1$, vale que

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Y más aún, si $|z| < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ es convergente y converge a $\frac{1}{1-z}$.

Definición 5.1.2

Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos suc. de complejos. Definimos como *producto de Cauchy* a la suma

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$$

Propiedad 5.1.6

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ suc. de complejos tales que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes, entonces $\sum c_k$ (producto de Cauchy) es absolutamente convergente y además

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right)$$

Demostración.

$$|c_0| \leq |a_0 b_0|$$

$$|c_1| \leq |a_0 b_1| + |a_1 b_0|$$

$$|c_2| \leq |a_0 b_2| + |a_1 b_1| + |a_2 b_0|$$

\vdots

$$|c_n| \leq |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \dots + |a_n b_0|$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^{n-j} |a_j| |b_m| = \sum_{j=0}^n |a_j| \left(\sum_{m=0}^{n-j} |b_m| \right) \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right)$$

Tomando $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) \quad \square$$

Propiedad 5.1.7 (Suma por partes)

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ suc. de complejos y $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, entonces,

$$\sum_{n=k}^N a_n b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^N a_n b_n &= \sum_{n=k}^N (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=k}^N A_n b_n - \sum_{n=k}^N A_{n-1} b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k+1}^N A_{n-1} b_n \\ A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k+1}^N A_{n-1} b_n &= A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_{n+1} &= A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) = A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \quad \square \end{aligned}$$

Propiedad 5.1.8 (Criterio de Dirichlet)

Sea $\{a_n\}$ suc. de reales con $a_{n+1} \leq a_n$ y $a_n \rightarrow 0$ y $\{b_n\}$ suc. de complejos tal que $B_n = \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq C$, entonces, $\sum a_n b_n$ es convergente.

Demostración.

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k b_k \right| \leq |B_N a_N| + \sum_{n=0}^{N-1} |B_n| |a_{n+1} - a_n| \leq C |a_N| - C \sum_{n=0}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) = C |a_N| - C a_N + C a_0$$

Tomando $N \rightarrow \infty$ (sabemos que $a_n \rightarrow 0$)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \right| \leq C a_0 \quad \square$$

Observación 5.1.0

Sea $\{a_n\}$ sucesión de reales no negativos decreciente tal que $a_n \rightarrow 0$. Entonces $\sum a_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < 1$, y converge si $|z| = 1$ pero $z \neq 1$.

5.2. Series de funciones

Definición 5.2.0

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ (D subconjunto de los reales o los complejos según el caso). Definimos $S_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

Decimos que $\sum f_n$ converge (puntualmente) si, para todo $z \in D$, $\sum f_n(z)$ converge. Se suele ponerle de nombre $S(z)$ a dicho límite. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y z fijo, hay $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Si $n \geq n_0$.

Si dicha convergencia es absoluta, decimos que $\sum f_n$ converge absolutamente. Análogamente, $\sum f_n$ converge uniformemente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que, para todo $z \in D$

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Si $n \geq n_0$. La idea es que puedo acotar uniformemente la distancia entre S_n y S independientemente del valor en el que se evalúen.

Propiedad 5.2.0

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ es continua. Si $S_n \rightarrow S$ uniformemente en D , entonces S es continua.

Demostración. (Idea)

Sea $z_0 \in D$ fijo, $\varepsilon > 0$ y $z \in D$

$$|S(z) - S(z_0)| = |S(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - S(z_0)|$$

El primer término puede acotarse por $\varepsilon/3$ tomando $n \geq n_0$ (existe por la convergencia uniforme de S_n), por continuidad (S_n es una suma de $n+1$ funciones continuas) se puede lograr lo mismo con el segundo término (existe $\delta > 0$ que permite acotarlo por $\varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$), y lo propio ocurre con el último, tomando $n \geq n_1$, pero esta vez porque $S_n(z_0) \rightarrow S(z_0)$ (convergencia uniforme implica convergencia puntual). Bastaría escribir todo esto un poco mejor y tomar como δ el mismo que funciona para acotar $|S_n(z) - S_n(z_0)|$.

Propiedad 5.2.1 (Criterio de Weierstrass o M-test)

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

1. Para cada n natural existe $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in D$.
2. $\sum M_n$ converge.

Entonces, $\sum f_n$ converge uniformemente.

Definición 5.2.1

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ continuas para todo natural n . Decimos que $\sum f_n$ converge normalmente si, para cualquier $K \subseteq D$ compacto y, definiendo $\|f_n\|_K = \sup_{z \in K} |f_n(z)|$, vale que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < +\infty$$

Definición 5.2.2

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo y $z \in \mathbb{C}$. La serie

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Es una serie de funciones que recibe el nombre de *serie de potencias*.

Por ahora consideramos a las series centradas en 0 ($z_0 = 0$).

Propiedad 5.2.2 (Lema de Abel)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Entonces, $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$ para todo $r < |z_0|$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Luego, $a_n z_0^n \rightarrow 0$ y entonces $|a_n z_0^n| \leq C$. Sea $r < |z_0|$ y $z \in \overline{\mathcal{B}_r(0)}$

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \leq C \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$$

$C \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$ acota superiormente, para cada $n \in \mathbb{N}$, a $|a_n z^n|$. Además, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} C \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$$

es una serie geométrica convergente, pues su razón es menor a 1 ($r < |z_0|$). Por M-test: $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$. \square

Corolario

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $S(z) = \sum a_n z^n$ y $D = \{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ converge}\}$, entonces ocurre alguna de estas cosas:

1. $D = \{0\}$
2. $D = \mathbb{C}$
3. Existe $R > 0$ (que recibe el nombre de *radio de convergencia*) tal que $\mathcal{B}_R(0) \subseteq D \subseteq \overline{\mathcal{B}_R(0)}$

Demostración.

Supongamos que 1. y 2. no ocurren. De manera que hay un $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \cap D$ y otro $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D$. Por el lema de Abel, no hay $z \in D$ tal que $|z| > |z_1|$, porque de ser cierto eso, debería valer que $z_1 \in D$. Luego, existe $R = \sup\{|z| : z \in D\}$. Sea $z \in \mathcal{B}_R(0)$, de manera que $0 \leq |z| < R$. Como $|z|$ es menor que R , que es un supremo, existe $w \in D$ tal que $|z| \leq |w| \leq R$.

Si el supremo se realiza, entonces hay $u \in D$ tal que $|u| = R$ y $|z| < |u|$. Si no se realiza, vale que $|z| < |w| < R$. En cualquier caso, por Abel, $z \in D$. Así que $\mathcal{B}_R(0) \subseteq D$.

Faltaría ver que D está contenido en la clausura de la bola... \square

Ahora vamos a exhibir cómo se halla el radio de convergencia. Por el criterio de la raíz n -ésima de Cauchy (Propiedad 5.1.2), sabemos que, dada $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z \in \mathbb{C}$ fijo, entonces $\sum a_n z^n$ converge si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} |z^n|^{1/n} = |z| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

Es decir,

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} = R$$

Calcular ese límite superior nos permite encontrar el valor del radio de convergencia.

Observación 5.2.0

Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, decimos que el radio de convergencia R es infinito ($R = \infty$) y $\sum a_n z^n$ converge en todo \mathbb{C} .

Teorema 5.2.0

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y $S'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Entonces, S' es la *derivada* de S en $\mathcal{B}_R(0)$.

Demostración.

Veamos primero que los radios de convergencia coinciden. Sea $R' > 0$ el radio de convergencia de S'

$$1/R' = \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(n+1)^{1/n}}_1 |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/n} = 1/R$$

Sean $z, h \in \mathbb{C}$ con $|z| < R$ (no tendría sentido un valor fuera del radio de convergencia) y $|z| + |h| < R$, y $\varepsilon > 0$, quiero ver que existe $\delta > 0$ tal que, si $|h| < \delta$, entonces

$$|S(z+h) - S(z) - S'(z)h| < \varepsilon|h|$$

Antes de continuar vamos a probar una desigualdad que va a ayudarnos. Consideremos

$$\left| \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{k-j} h^j \right| = |h^2| \left| \sum_{j=2}^n \frac{n(n-1)}{j(j-1)} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right|$$

j es un número natural, como la suma empieza en $j = 2$, podemos considerar la cota $\frac{1}{j(j-1)} \leq \frac{1}{2}$. Así que

$$|h^2| \left| \sum_{j=2}^n \frac{n(n-1)}{j(j-1)} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right| \leq |h^2| \left| \sum_{j=2}^n \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right| = |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \left| \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right|$$

Cambiando el índice con $k = j - 2$,

$$\left| \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{k-j} h^j \right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} z^{n-k-2} h^k \right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |z|^{n-k-2} |h|^k = |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} (|z| + |h|)^{n-2}$$

En conclusión,

$$\left| \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{k-j} h^j \right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} (|z| + |h|)^{n-2}$$

Recordando este resultado, probemos lo enunciado

$$\begin{aligned} S(z+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[z^k + k z^{k-1} h + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j \right] \\ S(z+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) z^k h + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j = S(z) + S'(z)h + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(z+h) - S(z) - S'(z)h &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j \\ \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j \right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j \right| \leq |h|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \frac{k(k-1)}{2} (|z| + |h|)^{k-2} \\ |h|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \frac{k(k-1)}{2} (|z| + |h|)^{k-2} &= |h|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j+2}| \frac{j(j-1)}{2} (|z| + |h|)^j \end{aligned}$$

Observar que el término cuadrático $\frac{j(j-1)}{2}$ no altera el radio de convergencia de la serie, que es convergente pues $|z| + |h| < R$ (podemos elegir h para que así sea), finalmente,

$$|S(z+h) - S(z) - S'(z)h| \leq |h|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j+2}| \frac{j(j-1)}{2} (|z| + |h|)^j = C|h|^2 < \varepsilon|h|$$

Por lo que podemos pedir $h \in \mathbb{C}$ tal que

$$|h| < \min\{R - |z|, \frac{\varepsilon}{C}\} \quad \square$$

Corolario

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ y convergente en $\mathcal{B}_R(z_0)$, entonces, $S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$ es la *deriva p-ésima* de $S(z)$ centrada en z_0 y tiene el mismo radio de convergencia.

Definición 5.2.3

Sea D abierto conexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. f se dice *analítica* en $z_0 \in D$ si existe $\{a_n\}$ suc. de complejos tal que la serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ resulta convergente en $\mathcal{B}_R(z_0) \subseteq D$ y además $f(z) = S(z)$ en dicha bola.

Observación 5.2.1

Una función f se dice *analítica* si es analítica en cada punto de su dominio.

Propiedad 5.2.3

Sea D un abierto conexo de \mathbb{C} , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en z_0 , $R > 0$ y $\{a_n\}$ suc. de complejos tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{B}_R(z_0)$, entonces,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Demostración. Sabemos que $f^{(n)}(z) = S^{(n)}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} (z - z_0)^n$. Si evaluamos en z_0 , todos los términos son nulos salvo el correspondiente a $n = 0$ (a esta altura no sé si es necesario aclararlo, pero en algunas áreas del análisis, en particular en esta, se asume por convención que $0^0 = 1$). Luego,

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \square$$

Ejemplo. Hallar la serie de potencias de $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ centrada en $z_0 = 0$ y calcular su radio de convergencia.

Es claro que esta función es C^∞ y, como no tiene una expresión muy complicada, seguramente sea relativamente sencillo hallar el valor de $f^{(n)}(0)$. Pero eso sería muy aburrido, procedamos de esta manera:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \stackrel{\text{f.s.}}{=} \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{i(\frac{z}{i}+1)} - \frac{1}{(-i)(\frac{z}{-i}+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{i}+1} + \frac{1}{\frac{z}{-i}+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{i})} + \frac{1}{1-\frac{z}{i}} \right)$$

Ambos sumandos son el valor al que convergen dos series geométricas. Tomemos $|\frac{z}{i}| < 1$, o sea $|z| < 1$, entonces,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^{2n}$$

(Notar que cuando n es impar, la suma de ambos términos es 0 pues uno es el opuesto del otro, mientras que cuando n es par, la suma da como resultado $2 \left(\frac{z}{i} \right)^n$) Finalmente, para $|z| < 1$ (O sea que su radio de convergencia es 1), se tiene que

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Propiedad 5.2.4

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto y conexo. Entonces, f es indefinidamente holomorfa (o sea, todas sus derivadas existen y son funciones holomorfas).

Propiedad 5.2.5

Sean f, g dos funciones analíticas con dominios abiertos conexos. Si $f = g$ en $U \subseteq \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ abierto conexo, entonces $f = g$ en $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Demostración.

Sea $h = f - g$ definida en $G = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Claramente, $h = 0$ en U . Sea, para cada k natural o cero, el siguiente conjunto:

$$A_k = \{z \in G : h^{(k)} \neq 0\}$$

A_k es la preimagen de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, que es abierto, por $h^{(k)}$, que es continua. Luego, A_k es abierto para cada k . Más aún, el conjunto

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Es abierto.

Consideremos ahora el conjunto

$$B = G \setminus A = \{z \in G : h^{(k)} = 0, k \geq 0\}$$

Sea $z_0 \in B$. Como h es analítica, hay $r > 0$ tal que, para todo $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}}{n!} (z - z_0)^n = 0$$

Por ende, $\mathcal{B}_r(z_0) \subseteq B$. Así que B es abierto.

Claramente, $G = A \sqcup B$. Como G es conexo, debe ser que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. $U \subseteq B$ (si $f = g$ en U , como ambas son analíticas, $f^{(n)} = g^{(n)}$ en U). Luego, A es vacío. Por ende, $G = B$ y entonces $h^{(k)} = 0$ en G y para todo $k \geq 0$. \square

Observación 5.2.2

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto conexo. Si $f \neq 0$, el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : f^{(k)}(z) = 0, k \geq 0\}$ es vacío.

Propiedad 5.2.6

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto conexo. Si $f \neq 0$, el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ es discreto.

Demostración.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$, como f es analítica, hay $r > 0$ que satisface

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} (z - z_0)^n$$

Para todo $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$.

Sea $m = \min_{n \geq 0} \{n : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Por la observación anterior este conjunto es no vacío y por eso el mínimo existe.

Luego,

$$f(z) = \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!} (z - z_0)^{m+1} + \dots \right) = (z - z_0)^m \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!} (z - z_0) + \dots \right)$$

Sea $g(z)$ dada por

$$g(z) = \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!} (z - z_0) + \dots \right)$$

Esta función es continua. Como $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$, hay $r' > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{B}_{r'}(z_0) \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$.

Entonces, dado que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $f(z) \neq 0$ si $z \in \mathcal{B}_{r'}(z_0) \setminus \{z_0\}$. \square

6. Integración en \mathbb{C}

Definición 6.0

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua. Decimos que γ es regular si existen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tales que, si $1 \leq j \leq n$, $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es C^1 y además $\gamma'(t) \neq 0$ con $t \in [t_{j-1}, t_j]$.

Definición 6.1

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular, definimos la *longitud* de γ como

$$\text{Long}(\gamma) := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt$$

Definición 6.2

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en la imagen de γ , definimos la *integral de f sobre γ* así

$$\int_{\gamma} f := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Observación 6.0

El valor de $\int_{\gamma} f$ es invariante por parametrización.

Definición 6.3

Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizaciones de curvas. Si existe $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva, creciente, C^1 a trozos, con $h'(t) > 0$ y tal que $\gamma = \sigma \circ h$, decimos que γ es una *reparametrización* de σ .

Definición 6.4

Sean $\gamma, \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ curvas regulares tales que $\gamma(1) = \sigma(0)$. Definimos la "suma" entre γ y σ (de hecho, es una concatenación), como

$$(\gamma + \sigma)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observación 6.1

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en la imagen de $\gamma + \sigma$, entonces,

$$\int_{\gamma + \sigma} f = \int_{\gamma} f + \int_{\sigma} f$$

Definición 6.5

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Definimos $\gamma^-(t) := \gamma((b+a)-t)$. γ^- es la misma curva pero recorrida en la otra dirección.

Definición 6.6

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 6.7

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es simple si todo par de reales $t, t' \in [a, b]$ verifican que

$$\gamma(t) = \gamma(t') \implies t = t' \text{ o } \{t, t'\} = \{a, b\}$$

Gráficamente esto se puede interpretar como que la curva no se cruza a sí misma, salvo quizás en los extremos.

Definición 6.8

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es de Jordan si es simple y cerrada.

Teorema 6.0 (Teorema de Jordan)

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva de Jordan. Entonces existen $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abiertos conexos, uno acotado y el otro no, tales que $\mathbb{C} = A \cup B \cup \text{Im}(\gamma)$.

Propiedad 6.0

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en la imagen de γ . Entonces,

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \text{Long}(\gamma)$$

Demostración.

Sean $\rho > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que

$$\int_{\gamma} f = \rho e^{i\theta}$$

Sea $g(z) = e^{-i\theta} f(z)$, luego, $\int_{\gamma} g = e^{-i\theta} \int_{\gamma} f = \rho$.

$$\rho = \int_{\gamma} g = \text{Re} \left(\int_{\gamma} g \right) = \text{Re} \left(\int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right) = \int_a^b \text{Re}(g(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \leq \int_a^b |g(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

$$\int_a^b |g(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \max_{t \in [a, b]} |g(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \max_{t \in [a, b]} |g(\gamma(t))| \text{Long}(\gamma) \quad \square$$

Propiedad 6.1

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfa en D y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ curva regular y de Jordan. Si consideramos $U \subseteq D$ la región encerrada por γ y $u, v \in C^1(\overline{U})$, entonces,

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Demostración.

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(x(t), y(t)) x' - v(x(t), y(t)) y' + i(v(x(t), y(t)) x' + u(x(t), y(t)) y') dt$$

Luego,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

Sea $U \subseteq D$ la región encerrada por γ . Como $u, v \in C^1(\overline{U})$, por Green,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \iint_U -v_x - u_y dA - \iint_U u_x - v_y dA$$

Como f es holomorfa, vale Cauchy-Riemann, así que cada integrando resulta nulo. Por ende,

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad \square$$

A continuación un interesante corolario.

Corolario

Sea $P \in \mathbb{C}[z]$ no constante. Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Este es el *teorema fundamental del álgebra*.

Demostración.

Supongamos que el enunciado no es cierto, de manera que existe $P \in \mathbb{C}[z]$ tal que $P(z) \neq 0$ para todo z complejo. Luego, la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

Es holomorfa en todo \mathbb{C} , pues es un cociente entre polinomios y el denominador nunca es nulo. Sea $n \in \mathbb{N}$ el grado de P . Como es un polinomio, entonces está unívocamente determinado por sus coeficientes, es decir, hay $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ tales que

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Consideremos la siguiente reescritura de P :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = z(a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1) + a_0$$

Sea $Q(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$. Luego,

$$P(z) = zQ(z) + a_0$$

Sea $M > 0$ un número real, como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$, existe R real positivo tal que

$$|P(z)| \geq M$$

Si $|z| \geq R$.

Luego,

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{z} \right| = \left| \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{zP(z)} \right| = \left| \int_{|z|=R} \frac{zQ(z) + a_0}{zP(z)} \right| = \left| \int_{|z|=R} \frac{Q(z)}{P(z)} + \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)} \right| \leq \left| \int_{|z|=R} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| + \left| \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)} \right|$$

La función $\frac{Q(z)}{P(z)}$ es holomorfa en todo \mathbb{C} y con derivada continua, por lo que, de acuerdo a la propiedad interior, su integral sobre la región $|z| = R$ es nula. Entonces,

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{z} \right| = |2\pi i| = 2\pi \leq |a_0| \left| \int_{|z|=R} \frac{1}{zP(z)} \right| \leq |a_0| \int_{|z|=R} \frac{1}{|z||P(z)|}$$

Como $|z| = R$, sabemos que $|P(z)| \geq M$, y entonces es claro que $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{M}$, así que

$$2\pi \leq |a_0| \int_{|z|=R} \frac{1}{|z||P(z)|} \leq \frac{|a_0|}{RM} \int_{|z|=R} 1$$

Notar que la integral de $|dz|$ sobre la región $|z| = R$ es una forma de notar la integral de longitud de curva, así que es igual a $2\pi R$. Finalmente,

$$2\pi \leq \frac{|a_0|}{RM} 2\pi R$$

Es decir,

$$M \leq |a_0|$$

O sea que $|a_0|$ es mayor que cualquier número real positivo M , pues este es arbitrario. Es claro que esto es absurdo. \square

Definición 6.9

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$R(z_0, a, b) = \{z_0 + sa + tbi : s, t \in [0, 1]\}$$

Es un rectángulo con vértices en z_0 , $z_0 + a$, $z_0 + bi$ y $z_0 + (a + bi)$. Además,

$$\text{Diam}(R) = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Long}(\partial R) = 2(a + b)$$

A partir de ahora, para ahorrarnos cosas como parametrizar curvas, se van a adjuntar algunos dibujos para dar a entender qué es lo que se está haciendo. La razón de esto es que no vamos a considerar curvas particularmente difíciles de parametrizar, y ni siquiera nos es útil saber bien cómo se hace.

Propiedad 6.2

Sea D un abierto conexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $R \subseteq D$ es un rectángulo, entonces

$$\int_{\partial R} f = 0$$

Demostración.

Sea D un abierto conexo de \mathbb{C} , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D y $R \subseteq D$ un rectángulo. Sea α el número real tal que

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right|$$

Es claro que $\alpha \geq 0$. Consideremos R partido en 4 rectángulos (R_1, R_2, R_3 y R_4) de la siguiente forma:

[dibujo]

Luego,

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R_i} f \right|$$

Por esto, necesariamente existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R_i} f \right| \geq \frac{\alpha}{4}$$

Si repetimos este proceso, podemos conseguir un conjunto de rectángulos $R^{(0)}, R^{(1)}, \dots, R^{(n)}, \dots$ (con $R^{(0)} = R, R^{(1)} = R_i$) tales que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$R^{(k+1)} \subseteq R^{(k)}, \quad \left| \int_{\partial R^{(k)}} f \right| \geq \frac{\alpha}{4^k}, \quad \text{Diam}(R^{(k)}) = \frac{\text{Diam}(R)}{2^k}, \quad \text{Long}(\partial R^{(k)}) = \frac{\text{Long}(\partial R)}{2^k}$$

Entonces, tenemos un conjunto de cerrados encajados con un diámetro que tiende a 0. Por ende, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\{w\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R^{(k)}$$

Sea $N : D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$N(w, z) = f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$$

Como f es derivable en w , dado $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que

$$|N(w, z)| < \varepsilon |w - z|$$

Si $|w - z| < \delta$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Diam}(R^{(m)}) < \delta$, m seguro existe pues la sucesión de los diámetros de los $R^{(k)}$ tiende a 0 si k tiende a infinito. Notar que

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + N(w, z)$$

Y $f(w) + f'(w)(z - w)$ es una función holomorfa con derivada continua (es una función afín), así que su integral sobre una curva de Jordan es nula. Luego,

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \left| \int_{\partial R^{(m)}} f \right| = \left| \int_{\partial R^{(m)}} f(w) + f'(w)(w - z) + N(w, z) \right| \leq \underbrace{\left| \int_{\partial R^{(m)}} f(w) + f'(w)(w - z) \right|}_0 + \left| \int_{\partial R^{(m)}} N(w, z) \right|$$

Así que

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \left| \int_{\partial R^{(m)}} N(w, z) \right| \leq \int_{\partial R^{(m)}} |N(w, z)| \leq \varepsilon |z - w| \int_{\partial R^{(m)}} 1$$

Esta última cota superior es verdadera pues si $\text{Diam}(R^{(m)}) < \delta$, como $w \in R^{(m)}$, seguro que $|z - w| < \delta$ para cada $z \in R^{(m)}$. Sabiendo eso, puedo acotar $|N(w, z)|$ gracias a la antes mencionada derivabilidad de f en w . Notar también que $|z - w| \leq \text{Diam}(R^{(m)})$. Entonces,

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \varepsilon |z - w| \int_{\partial R^{(m)}} |dz| \leq \varepsilon \text{Diam}(R^{(m)}) \text{Long}(\partial R^{(m)}) = \varepsilon \frac{\text{Diam}(R) \text{Long}(\partial R)}{2^m 2^m}$$

Es decir,

$$\alpha \leq \varepsilon \text{Diam}(R) \text{Long}(\partial R)$$

Como α es menor o igual a cualquier número positivo ($\varepsilon \text{Diam}(R) \text{Long}(R)$ es un número positivo arbitrariamente cercano a 0 pues el diámetro y la longitud de R y su borde, respectivamente, son constantes), entonces

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right| = 0$$

Luego,

$$\int_{\partial R} f = 0 \quad \square$$

Corolario

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $R \subseteq D$ es un rectángulo, entonces

$$\int_{\partial R} f = 0$$

Propiedad 6.3

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f es continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Son equivalentes:

1. Existe F holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$ tal que $F' = f$.
2. Si γ es una curva de Jordan (regular, cerrada y simple), entonces

$$\int_{\gamma} f = 0$$

3. Si $R \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ es un rectángulo, entonces

$$\int_{\partial R} f = 0$$

A continuación probamos un lema auxiliar.

Lema

Sea $u(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t) dt = u(x)$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos esta reescritura de u

$$u(x) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x) dt$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t) dt - u(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t) - u(x) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u(x+t) - u(x)| dt$$

Por continuidad, hay $\delta > 0$ tal que, si $t \in [0, h]$, podemos acotar por ε el integrando.

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t) dt - u(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u(x+t) - u(x)| dt < \frac{1}{h} \varepsilon \int_0^h dt = \varepsilon \quad \square$$

Ahora probamos la propiedad anteriormente enunciada. **Demostración.**

(1.) \longrightarrow (2.) Sea $F = U(x, y) + iV(x, y)$ holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$, por lo que $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ y $F' = f = u(x, y) + iv(x, y)$ con f continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Sea $\gamma \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ una curva de Jordan.

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

Por un lado,

$$F' = U_x - iU_y = u + iv$$

$$U_x = u \quad U_y = -v$$

Así que $U(x, y)$ es un potencial del campo $(u(x, y), -v(x, y))$. También,

$$F' = V_y + iV_x = u + iv$$

$$V_x = v \quad V_y = u$$

Entonces $V(x, y)$ es un potencial del campo $(v(x, y), u(x, y))$. Luego, $(u(x, y), -v(x, y))$ y $(v(x, y), u(x, y))$ son ambos campos conservativos. Por ende,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = 0 + i0 = 0$$

(2.) \longrightarrow (3.) es claro.

(3.) \longrightarrow (1.) Sea f continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$ y $R \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ un rectángulo. Consideremos las siguientes curvas γ y σ , donde cada una recorre cierta región de R desde $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo hasta un punto $z \in \mathbb{C}$ (no fijo)

[dibujo]

Sea $F(z)$ dada por

$$F(z) = \int_{\sigma} f = \int_{\gamma} f$$

Notemos que esta igualdad entre integrales vale porque, si cambiamos la orientación de alguna de las dos curvas, nuestra región de integración es todo ∂R , y la integral resulta nula.

Sea $h \in \mathbb{R}$, vamos a analizar los siguientes límites, con $z = x + iy$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F((x+h) + iy) - F(x + iy)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + i(y+h)) - F(x + iy)}{h}$$

Y vamos a considerar las siguientes curvas $\tilde{\sigma}, \tilde{\gamma}$:

[dibujo]

$$\tilde{\sigma}(t) = z + t \quad \tilde{\gamma}(t) = z + it$$

Con $t \in [0, h]$. Notar que $\tilde{\sigma}'(t) = 1, \tilde{\gamma}'(t) = i$.

$$F(z+h) = F(z) + \int_{\tilde{\sigma}} f$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\sigma}} f = \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t, y) + iv(x+t, y) dt$$

Tomando $h \rightarrow 0$, y de acuerdo al lema anterior,

$$F_x = U_x + iV_x = u + iv$$

Luego,

$$U_x = u, V_x = v$$

Procediendo de igual manera con el otro límite

$$\frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\gamma}} f = \frac{1}{h} \int_0^h [u(x, y+t) + iv(x, y+t)] i dt = \frac{1}{h} \int_0^h -v(x, y+t) + iu(x, y+t) dt$$

Con $h \rightarrow 0$,

$$F_y = U_y + iV_y = -v + iu$$

Así que,

$$U_y = -v, V_y = u$$

Y no es difícil notar que F satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, así que es holomorfa. \square

Teorema 6.1 (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Si $0 < \rho < r$ y $z \in \mathcal{B}_r(\rho)$, considerando la curva $C_0 : w(t) = z_0 + \rho e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y recorrida positivamente, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Demostración.

Sea $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$, $\varepsilon > 0$ y $C_\varepsilon : r(t) = z + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Consideremos las siguientes curvas $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$

[dibujo]

Notemos que

$$\int_{\tilde{\gamma}} f + \int_{\tilde{\sigma}} f = \int_{C_0} f - \int_{C_\varepsilon} f \tag{1}$$

Ambas integrales de la izquierda son nulas, pues f es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Sea $g(t) : \mathcal{B}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} & \text{si } t \neq z \\ f'(z) & \text{si } t = z \end{cases}$$

g es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z\}$ y continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Por el corolario de Cauchy-Goursat, su integral sobre un rectángulo va a ser nula, y por las equivalencias de la Propiedad 6.3, como C_0 es una curva de Jordan, entonces

$$\begin{aligned} \int_{C_0} g &= 0 \\ \int_{C_0} g &= \int_{C_0} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} dt = \int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) \int_{C_0} \frac{1}{t-z} dt = 0 \end{aligned}$$

Así que,

$$\int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z) \int_{C_0} \frac{1}{t-z} dt$$

Veamos que $\int_{C_0} \frac{1}{t-z} dt = 2\pi i$. Como la función del integrando es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z\}$, su integral sobre una curva cerrada contenida ahí va a ser nula. En particular, vale la igualdad de (1.) y los dos sumandos de la izquierda son 0. Entonces,

$$0 = \int_{C_0} \frac{1}{t-z} dt - \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{t-z} dt$$

Nos basta con que la integral sobre C_ε sea igual a $2\pi i$.

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{t-z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{r'(t)}{r(t)-z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(z) \int_{C_0} \frac{1}{t-z} dt &= \int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z} dt \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \square \end{aligned}$$

Propiedad 6.4

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $f_n(z)$ dada por

$$f_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Donde, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$, C_0 parametriza la frontera de $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ y ϕ es continua en C_0 .

Entonces, f_n es holomorfa y $f'_n = f_{n+1}$.

Antes de comenzar con la demostración, enunciamos un lema auxiliar.

Lema

Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Existe $\delta \in (0, 1)$ tal que, si $\zeta \in \mathcal{B}_\delta(0) \subseteq \mathbb{C}$, entonces

$$\left| \frac{1}{(1-\zeta)^n} - 1 - n\zeta \right| < \varepsilon |\zeta|$$

Esto no es otra cosa que la diferenciación en $\zeta = 0$ de la función $\frac{1}{(1-\zeta)^n}$.

Continuamos ahora con la demostración de la propiedad.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, quiero hallar $\delta' > 0$ tal que, si $|h| < \delta'$, entonces

$$|f_n(z+h) - f_n(z) - f_{n+1}(z)h| < \varepsilon|h|$$

Para cada $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$. De verificarse esto, entonces $f'_n = f_{n+1}$.

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \\ f_n(z+h) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z-h)^{n+1}} dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1} \left(1 - \frac{h}{w-z}\right)^{n+1}} dw \\ f_{n+1}(z)h &= h \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+2}} dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \frac{(n+1)h}{w-z} dw \end{aligned}$$

Luego,

$$|f_n(z+h) - f_n(z) - f_{n+1}(z)h| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{h}{w-z}\right)^{n+1}} - 1 - \frac{(n+1)h}{w-z} \right] dw \right|$$

Sea $\zeta = \frac{h}{w-z}$, notemos que

$$|w-z| = |w-z_0+z_0-z| = |(w-z_0) - (z-z_0)| \geq |w-z_0| - |z-z_0| = \rho - |z-z_0|$$

Entonces,

$$|\zeta| = \frac{|h|}{|w-z|} \leq \frac{|h|}{\rho - |z-z_0|} < 1 \text{ tomando } |h| < \rho - |z-z_0|$$

Por el lema anterior, sabemos que hay $\delta > 0$ tal que se satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{1}{(1-\zeta)^{n+1}} - 1 - (n+1)\zeta \right| < \varepsilon |\zeta| \leq \varepsilon \frac{|h|}{\rho - |z-z_0|} < \varepsilon$$

Si $|\zeta| < \delta$. En consecuencia, esto nos pide también que $|h| < \delta(\rho - |z-z_0|) = \delta'$. De esta manera, acotamos uno de los dos factores del integrando. Por otro lado,

$$\left| \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \right| \leq \frac{\max_{w \in C_0} |\phi(w)|}{(\rho - |z-z_0|)^{n+1}}$$

Y ese máximo existe pues ϕ es continua y C_0 es compacto. Agrupando todo, tenemos que

$$\left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{h}{w-z}\right)^{n+1}} - 1 - \frac{(n+1)h}{w-z} \right] dw \right| \leq \varepsilon \frac{n!}{2\pi} \frac{\max_{w \in C_0} |\phi(w)|}{(\rho - |z-z_0|)^{n+1}} \int_{C_0} |dw|$$

Todos los términos son constantes, salvo ε . \square

Corolario

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D , entonces f es indefinidamente holomorfa. Es decir, es infinitamente derivable y todas sus derivadas son funciones holomorfas.

Corolario

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D , $z_0 \in D$ y $r > 0$ tal que $B = \mathcal{B}_r(z_0) \subseteq D$. Si γ es una curva recorrida positivamente cuya imagen es la frontera de dicha bola y $z \in B$, entonces, si $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Cauchy generalizada*.

Esto se deduce de la propiedad anterior y de la fórmula integral de Cauchy. Tomando a $f(w)$ como $\phi(w)$, vamos a tener que $f_0(z) = f(z)$.

Teorema 6.2 (Teorema de Morera)

Sean $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $B = \mathcal{B}_r(z_0)$. Si $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que verifica que, para toda curva de Jordan γ contenida en B y con el área que encierra también ahí,

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Entonces f es holomorfa en B .

Demostración.

Para probar esto solo necesitamos basarnos en varias de las propiedades ya probadas anteriormente. Si f satisface lo dicho en el enunciado, sabemos por la Propiedad 6.3 que tiene una primitiva F holomorfa. Por otro lado, el primer corolario de la Propiedad 6.4 nos dice que la holomorfía de una función se preserva por derivación. Luego, f es holomorfa. \square

A continuación, uno de los resultados más interesantes de la materia.

Teorema 6.3 (Teorema de Liouville)

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Entonces, f es constante.

Esto es una muestra de lo fuerte que es la fórmula integral de Cauchy.

Demostración.

Sea $R > 0$, $z \in \mathcal{B}_{R/2}(0)$ y $C_0 : w(t) = Re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Claramente $\frac{|z|}{R} < \frac{1}{2}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|w|=R} \left| \frac{f(w)}{w-z|^2} \right| \int_{C_0} |dw| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\overbrace{\max_{w \in \mathbb{C}} |f(w)|}^M}{|R-z|^2} 2\pi R \leq \frac{M}{(|R|-|z|)^2} R \leq \frac{M}{R^2 \left(1 - \frac{|z|}{R}\right)^2} R \leq \frac{M}{R \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4M}{R}$$

Como R es arbitrario y M es una constante, $|f'(z)|$ es arbitrariamente cercano a 0. Luego,

$$f'(z) = 0$$

Por lo que f es constante, como se quería probar. \square

El teorema fundamental del álgebra también es corolario de este teorema. No veo necesario adjuntar esa demostración, que no es muy difícil, porque acá ya hicimos otra que, en mi opinión, es aun menos complicada.

Definición 6.10

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regular cerrada. Para $z \in \mathbb{C} - \gamma([a, b])$, definimos el *índice* de γ en z como

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

Propiedad 6.5

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva regular y de Jordan, $I(\gamma, z)$ con $z \notin \gamma([a, b])$ es un número entero.

Demostración. Para $s \in [a, b]$, definimos

$$J(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

Notar que $J(b) = I(\gamma, z)2\pi i$. Sea $\Theta(s)$ dada por

$$\Theta(s) = e^{-J(s)}(\gamma(s) - z)$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$J'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$$

Luego,

$$\Theta'(s) = -\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} e^{-J(s)}(\gamma(s) - z) + e^{-J(s)}\gamma'(s) = 0$$

Así que Θ es una función constante. En particular, $\Theta(a) = \Theta(b)$, es decir,

$$e^{-J(a)}(\gamma(a) - z) = e^{-J(b)}(\gamma(b) - z)$$

La curva γ es cerrada, por lo que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Además, $z \notin \gamma([a, b])$. Por ende, $(\gamma(a) - z) = (\gamma(b) - z) \neq 0$, entonces

$$e^{-J(a)} = e^{-J(b)}$$

$J(a) = 0$ y $J(b) = I(\gamma, z)2\pi i$, por lo que

$$e^{-I(\gamma, z)2\pi i} = 1$$

Así que $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ \square

Propiedad 6.6

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva regular y de Jordan, $I(\gamma, z)$ con $z \notin \gamma([a, b])$ es una función continua.

Demostración.

Sea $z \in \mathbb{C} - \gamma([a, b])$, $\delta = \min_{t \in [a, b]} |\gamma(t) - z|$ y $h > 0$ con $|h| < \frac{\delta}{2}$. Sabemos entonces que $z + h \notin \gamma([a, b])$

$$|I(\gamma, z+h) - I(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{1}{w - z - h} - \frac{1}{w - z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{h}{(w - z - h)(w - z)} \right| dw$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{h}{(w-z-h)(w-z)} \right| dw \leq \max_{t \in [a,b]} \frac{|h|}{|\gamma(t)-z-h||\gamma(t)-z|} \int_{\gamma} |dw|$$

Notemos que, si $|h| < \frac{\delta}{2}$,

$$|\gamma(t)-z-h| \geq |\gamma(t)-z| - |h| > \frac{\delta}{2}$$

Luego,

$$\max_{t \in [a,b]} \frac{|h|}{|\gamma(t)-z-h||\gamma(t)-z|} \int_{\gamma} |dw| \leq \frac{2}{\delta^2} \text{Long}(\gamma) |h| \quad \square$$