UBA - FCEyN

ANÁLISIS COMPLEJO

Según un estudiante

Luca Martínez

2C 2025

Aclaración

¡Hola! Esto es un apunte de Análisis Complejo que estoy haciendo durante la cursada de la materia en el segundo cuatrimestre de 2025. No va a ser tan completo como la bibliografía sugerida o el cuaderno de un alumno que va a la teórica y copia todo lo que el profesor escribe. La motivación de crear esto que estás leyendo es poder reunir definiciones importantes, proposiciones, lemas, teoremas, etc. de manera más compacta y con más detalle en la que, para mí, es la parte más difícil de la teoría: las demostraciones. Entiendo que los contenidos dados pueden variar un poco de acuerdo a los profesores que dan la materia, ¡pero espero que esto le sirva a la mayoría de personas que cursen!

Índice

1. Nociones básicas sobre $\mathbb{C}$ y sus propiedades **3**

2. Raíces de números complejos **7**

3. Funciones complejas **9**

3.1. Algunas nociones topológicas 9

3.2. Homografías 11

4. Derivabilidad, holomorfía y transformaciones conformes **18**

5. Series de potencias **26**

5.1. Series numéricas y criterios de convergencia 26

5.2. Series de funciones 29

6. Integración en $\mathbb{C}$ **35**

6.1. Integración sobre curvas regulares 35

6.2. Integración sobre curvas continuas 52

7. Homotopías **54**

8. Series de Laurent, singularidades y residuos **58**

8.1. Anillos en $\mathbb{C}$ y series de Laurent 58

8.2. Singularidades 61

8.3. Residuos 67

9. Espacios de funciones complejas **73**

9.1. Los espacios $C(D)$ y $\mathcal{H}(D)$ 73

9.2. Familias/sucesiones de funciones holomorfas 77

9.3. Series y productos de funciones holomorfas y meromorfas 81

10. Aplicaciones conformes **86**

1. Nociones básicas sobre $\mathbb{C}$ y sus propiedades

Lo primero que vamos a hacer es definir algunos conceptos muy elementales sobre los números complejos pero que nos van a servir para la demostración de la primera proposición relevante.

Definición 1.0

Se define a $\mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos, como

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Donde i es la *unidad imaginaria* y satisface que $i^2 = -1$

Sean $z = a + bi$, $w = c + di$. Definiendo la suma $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y la multiplicación $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$z + w = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

$$z.w = (a + bi).(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ resulta ser un **cuerpo**.

$x + yi$ es la forma *binómica* de un número complejo.

Se puede notar que la elección de dos números reales arbitrarios determina unívocamente a un número complejo. Es decir, hay una biyección evidente entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ ($f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f(x, y) = x + yi$). Esto, si bien parece una mera observación, realmente se lleva mucho más allá, tanto así que, tal como representamos los elementos de $\mathbb{R}^2$ en un plano de ejes cartesianos, lo mismo se hace con los números complejos. Por ejemplo, el número complejo $2 + 3i$ se ubica en el plano en el mismo lugar que ubicaríamos a $(2, 3)$

Definición 1.1

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define a x como la *parte real* de z y se denota $\mathrm{Re}(z)$. Por otro lado, se define a y como la *parte imaginaria* de z, y se denota $\mathrm{Im}(z)$

Con estas dos definiciones ya queda claro que $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, es un subconjunto de $\mathbb{C}$. En particular, es el conjunto de todos los números complejos con parte imaginaria nula.

Definición 1.2

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos. $z = w$ si y solo si

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ y } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

Definición 1.3

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define el *conjugado* de z, denotado por $\overline{z}$, como

$$\overline{z} = x - yi$$

Vale como observación que esto nos da otra forma más de diferenciar a $\mathbb{R}$ dentro de los complejos: los números reales son aquellos números complejos que son iguales a su conjugado. Esto es útil en algunos momentos en los que queremos verificar si un número es real o no.

Definición 1.4

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se define $|z|$, el *módulo* de z, como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bien, ahora ya tenemos una noción del tamaño o magnitud de un número complejo. Como podemos ver, esto se sigue sosteniendo en la idea de representar a los elementos de $\mathbb{C}$ como los de $\mathbb{R}^2$, pues $|z|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$ y (x, y) (Teórema de Pitágoras).

Lo siguiente es un cúmulo de algunas proposiciones útiles que no voy a demostrar (no es difícil de hacer).

Proposición 1.0

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $|zw| = |z||w|$
3. $|z^n| = |z|^n$ (es un caso particular del anterior)
4. $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$
5. $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
6. $z\overline{z} = |z|^2$
7. Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ (se deduce del anterior)
8. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
9. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
10. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
11. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$

(Por si te interesa probarlas: en la mayoría basta con escribir en forma binómica a cada complejo y desarrollar).

Definición 1.5

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se denomina $\arg(z)$, *argumento* de z, a cualquier número real θ tal que

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \text{ y } \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$$

Y recibe el nombre de *argumento principal* aquel valor de θ que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$ (y vamos a denotarlo $\mathrm{Arg}(z)$)

Si de nuevo visualizamos a z en el típico plano de $\mathbb{R}^2$, el argumento principal no es más que el ángulo que se forma entre el segmento que va del $(0, 0)$ a z y el eje real (que es el nombre que vamos a darle al eje x), mientras que todas las otras formas del argumento son el argumento principal + $2k\pi$, siendo k un entero.

Esto induce una nueva forma, equivalente a la representación polar de los elementos de $\mathbb{R}^2$, de representar a un número complejo.

Proposición 1.1

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$ y $\theta = \arg(z)$, entonces

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$|z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ es la forma *polar* de un número complejo.

Proposición 1.2

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z = w$ si y solo si

$$|z| = |w| \text{ y } \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w)$$

Proposición 1.3

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi$$

Demostración.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sean $\alpha = \arg(z)$, $\beta = \arg(w)$

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta))$$

$$zw = |zw|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + i^2\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta))$$

$$zw = |zw|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) + i(\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)))$$

Notemos que la parte real de lo que está adentro del paréntesis es el coseno de la suma entre α y β. Lo mismo ocurre con la parte imaginaria y el seno de la suma.

$$zw = |zw|(\cos(\alpha + \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta)) \quad \square$$

Corolario

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

Esta es la *fórmula de De Moivre*.

La forma polar de los números complejos es notablemente más cómoda para trabajar con las potencias, y, en general, es más elegida que la binómica.

Proposición 1.4 (Fórmula de Euler)

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

Esta es una de las igualdades más célebres de la matemática, la misma nos da una tercera forma de describir un número complejo.

Proposición 1.5

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $\theta = \arg(z)$, entonces

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$|z|e^{i\theta}$ es la forma *exponencial* de un número complejo.

Teorema 1.0 (Desigualdad triangular)

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Demostración.

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w})$$

$$(z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$$

$$|z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2$$

$$|z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Por transitividad de = y de $\leq$:

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \square$$

2. Raíces de números complejos

Esta sección va a ser corta pues solo vamos a exhibir rápidamente cómo se hallarían las raíces de cualquier número complejo, junto a un resultado que puede sernos útil.

Proposición 2.0

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\arg(z^n) - 2k\pi = n\arg(z)$$

Para algunos enteros k.

Esta proposición se puede deducir de la fórmula de De Moivre, e implica que, dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, hay n complejos z distintos tales que $z^n = w$. Para hallarlos, basta con igualar $\arg(z^n)$ con $\arg(w)$, y $|z^n|$ con $|w|$.

Ejemplo. Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = 1$.

Solución. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 1$. Procedemos igualando argumentos y módulos

$$\begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \arg(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = 1 \\ 3\arg(z) = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

Solo nos queda hallar todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq \frac{2}{3}k\pi < 2\pi$, diviendo por $\frac{2}{3}\pi$ en toda la desigualdad llegamos a que $k \in \{0, 1, 2\}$. Así que mis soluciones z_1, z_2, z_3 son:

$$z_1 = 1,\ z_2 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right),\ z_3 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

Proposición 2.1

Sean $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ raíces n-ésimas de $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = \begin{cases} nw^k \text{ si } m = kn, k \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Demostración.

Supongamos que hay k natural tal que $\frac{m}{n} = k$, sea $\phi = \arg(w)$, sabemos entonces que:

$$z_j = |w|^{1/n} e^{i(\phi + 2j\pi)/n}$$

Luego:

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = \sum_{j=0}^{n-1} (|w|^{1/n} e^{i(\phi+2j\pi)/n})^m = |w|^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(\phi+2j\pi)m/n}$$

Descomponiendo el exponente, vemos que $e^{i\phi m/n}$ no depende de j.

$$|w|^k e^{i\phi k} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi k} = |w|^k (e^{i\phi})^k \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2j\pi})^k$$

Para cada j, lo que está en la suma siempre es 1 pues $e^{i2k\pi} = 1$ para todo k entero. Por ende

$$|w|^k (e^{i\phi})^k \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2j\pi})^k = n(|w| e^{i\phi})^k = nw^k$$

Si m no es un múltiplo de n, podemos retornar hasta este paso

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^m = |w|^{m/n} e^{i\phi m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi m/n}$$

Reescribiendo la suma

$$(|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2j\pi m/n} = (|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2\pi m/n})^j$$

Tenemos una geométrica, como m/n no es un entero, la base resulta ser distinta de 1, por lo que podemos aplicar el conocido resultado

$$(|w|e^{i\phi})^{m/n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i2\pi m/n})^j = (|w|e^{i\phi})^{m/n} \left(\frac{(e^{i2\pi m/n})^n - 1}{e^{i2\pi m/n} - 1} \right) = 0$$

Pues el numerador resulta ser nulo. $\square$

3. Funciones complejas

Aclaración.

$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ serán usados indistintamente a la hora de definir dominios y codominios de funciones y enunciar proposiciones y definiciones relacionadas a estas.

3.1. Algunas nociones topológicas

Para hablar de conceptos como límite, continuidad, conexión y otros por el estilo, vamos a reintroducir algunos conceptos de topología. Sobre cada uno de ellos se profundizó en Cálculo Avanzado, por lo que solo vamos a enunciar algunas definiciones y proposiciones, pero no vamos a hacer demostraciones.

Definición 3.1.0

Definimos la distancia "usual" entre dos complejos z, w como

$$d(z, w) = |z - w|$$

Como su nombre sugiere, esta función hace de $(\mathbb{C}, d)$ un espacio métrico.

Esto nos permite definir más conceptos.

Definición 3.1.1

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, sabiendo que $\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}$ (r real positivo) es el nombre que recibe la bola de centro z_0 y radio r y $\mathcal{B}^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < d(z, z_0) < r\}$ el que recibe la misma bola pero sin su centro, entonces

1. z_0 es punto *interior* de D sii hay $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(z_0) \subseteq D$
2. z_0 es punto *exterior* de D sii hay $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(z_0) \cap D = \emptyset$
3. z_0 es punto *frontera* de D sii para todo $r > 0$ vale que $\mathcal{B}(z_0, r) \cap D \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}(z_0, r) \cap \mathbb{C} - D \neq \emptyset$ simultáneamente
4. z_0 es *punto de acumulación* de D sii para todo $r > 0$ vale que $\mathcal{B}^*(z_0, r) \cap D \neq \emptyset$

Definición 3.1.2

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, definimos D^o (*interior* de D) como el conjunto de sus puntos interiores y $\overline{D}$ (*clausura* de D) como $D \cup \{\text{puntos frontera de } D\}$

Además, decimos que D es *abierto* si $D = D^o$, y que D es *cerrado* si $D = \overline{D}$.

Definición 3.1.3

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, decimos que D es *disconexo* si hay abiertos disjuntos $V, W \subseteq \mathbb{C}$ tales que

1. $D \subseteq V \cup W$
2. $D \cap V \neq \emptyset$
3. $D \cap W \neq \emptyset$

((2.) y (3.) ya implican que dichos abiertos disjuntos son no vacíos)

Por el contrario, decimos que D es *conexo* sii no es disconexo.

Definición 3.1.4

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, decimos que D es *arcoconexo* si para todos $v, w \in D$ existe $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$ continua tal que $\gamma(a) = v$ y $\gamma(b) = w$

Proposición 3.1.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Son equivalentes

1. D es conexo.
2. D es arcoconexo.

Demostración. (Idea)

(1.)$\longrightarrow$(2.): Para probar esto, nos es útil demostrar antes que, para todo $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, es $\mathcal{B}_r(z)$ un conjunto convexo (o sea, dado cualquier par de elementos de este conjunto, el segmento que los une también está contenido en él.). Una vez hecho esto, la idea de la demostración sería fijar un elemento $u \in D$, considerar el conjunto

$$P = \{z \in D : \text{existe una poligonal que une } z \text{ y } u\}$$

y probar que este es abierto y su complemento también lo es. De esta manera, como D es conexo y P es un subconjunto abierto y cerrado de D, solo puede ser que $P = D$. Entonces, dados $x, y \in D$, podemos concatenar la poligonal que va de x a u con la que va de u a y; así, D resulta arcoconexo. (De hecho, es un poco más que eso: es *poligonalmente arcoconexo*).

(2.)$\longrightarrow$ (1.): Se puede suponer que D es arcoconexo pero no conexo, considerar una separacion (U, V) de D y unir mediante una función continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$ un punto de U y uno de V. Luego, se va a llegar a un absurdo pues $[0, 1]$ es conexo pero $\gamma([0, 1])$ no va a serlo. □

Antes de empezar a hablar de algunos tipos de funciones en particular, vamos a introducir la ya familiar noción de *límite*.

Definición 3.1.5

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ sii para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z, z_0) < \delta \longrightarrow d(f(z), L) < \varepsilon$$

Con $z \in D$.

3.2. Homografías

Definición 3.2.0

Llamamos *homografía* a cualquier función f de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$

Además, estas funciones reciben el nombre de *homografías básicas*:

1. Traslación: $T_a(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}$
2. Homotecia: $H_r(z) = rz$, $r > 0$
3. Rotación: $R_\alpha(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$
4. Inversión: $I(z) = 1/z$

Los valores en los que está definida f y los que puede tomar dependen de si c es nulo o no. En general, su dominio es o bien $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ según el caso. Mientras que su imagen es o bien $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{C} - \{a/c\}$.

Proposición 3.2.0

Sea $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ una homografía con $c \neq 0$ y consideremos $i(z) = 1/z$. Hay funciones lineales g, h tales que

$$f = g \circ i \circ h$$

Demostración.

Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $ad - qc = 0$, o sea $q = \dfrac{ad}{c}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b+q-q}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b-q}{cz+d}$$

$$f(z) = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b-q}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{z+\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c})(cz+d)^{-1}$$

Luego, $h(z) = cz + d$ y $g(z) = \dfrac{a}{c} + (b - \dfrac{ad}{c})z$ □

Notemos que esto está muy próximo a ser una demostración de que **toda homografía es composición de las básicas**, que es una proposición cierta e importante. A continuación, definimos la *proyección estereográfica*. Para esto, consideremos una "extensión" de $\mathbb{C}$

Definición 3.2.1

Definimos al *plano complejo extendido*, denotado como $\hat{\mathbb{C}}$, como el conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definición 3.2.2

Sean $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ (el "polo norte" de $\mathbb{S}^2$) y $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$. La *proyección estereográfica* de P es el punto $z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ (que vamos a asociarlo al complejo $x + yi$) que es la intersección entre el plano xy y la recta que pasa por N y P.

Proposición 3.2.1

Dado un punto $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, la proyección estereográfica de P es $z = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0\right)$. Por ende, definimos $\Psi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ así:

$$\Psi(a, b, c) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-c} + \dfrac{b}{1-c} i & \text{si } (a, b, c) \neq N \\ \infty \text{ si } (a, b, c) = N \end{cases}$$

Demostración.

Sean $N = (0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, consideremos la recta que une ambos puntos:

$$L : (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)$$

Nos interesa hallar la intersección con el plano xy, así que consideramos la siguiente ecuación:

$$(0, 0, 1) + t(a, b, c - 1) = (x, y, 0)$$

Igualando las terceras coordenadas

$$\begin{aligned} 1 + t(c - 1) &= 0 \\ t &= \frac{-1}{c - 1} \\ t &= \frac{1}{1 - c} \end{aligned}$$

O sea que para $t = \frac{1}{1-c}$ se obtiene el punto de intersección, reemplazando por dicho valor tenemos que:

$$(0, 0, 1) + \frac{1}{1-c}(a, b, c - 1) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, \frac{c-1}{1-c} + 1\right) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0\right) = (x, y, 0)$$

Este elemento $(x, y, 0)$ se asocia al complejo $x + yi$, que coincide con lo definido en Ψ. $\square$

Proposición 3.2.2

Ψ es biyectiva y su inversa $\Psi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ está dada por:

$$\Psi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2x}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2y}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 + 1}{|z|^2 - 1}\right) & \text{si } z \neq \infty \\ N \text{ si } z = \infty \end{cases}$$

Con $z = x + yi$.

Demostración.

Sean $P = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x + yi$. En la demostración anterior vimos que, si z es la proyección estereográfica de P, entonces,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{1-c} \\ y = \dfrac{b}{1-c} \end{cases}$$

Es decir que $a = x(1-c)$ y $b = y(1-c)$. Recordando que P satisface la ecuación $a^2+b^2+c^2=1$

$$|z|^2 = x^2+y^2 = \frac{a^2}{(1-c)^2} + \frac{b^2}{(1-c)^2} = \frac{a^2+b^2}{(1-c)^2} = \frac{1-c^2}{(1-c)^2} = \frac{1+c}{1-c}$$

Por transitividad, se tiene que

$$|z|^2(1-c) = 1+c$$

$$|z|^2 - 1 = c + |z|^2 c$$

$$c = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

Reemplazando en los valores de a, b

$$a = x\left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = x\left(\frac{|z|^2+1}{|z|^2+1} - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \frac{2x}{|z|^2+1}$$

Procediendo de la misma manera, resulta ser que

$$b = \frac{2y}{|z|^2+1}$$

Los valores a, b, c hallados coinciden con lo definido en Ψ^{-1}. $\square$

Proposición 3.2.3

Sean $P = (a,b,c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x+yi$ no nulo, si $\Psi(a,b,c) = z$, entonces $\Psi(a,-b,-c) = \dfrac{1}{z}$.

Demostración.

Sean $P = (a,b,c) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $z = x+yi \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $\Psi(P) = z$, o sea que $z = \frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-c}i$, sabiendo que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, entonces,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1-c} - \frac{b}{1-c}i\right)\frac{1}{|z|^2}$$

En la demostración anterior pudimos ver que $|z|^2 = \frac{1+c}{1-c}$, luego,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1-c} - \frac{b}{1-c}i\right)\frac{1-c}{1+c}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1+c} - \frac{b}{1+c}i\right)$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{1-(-c)} + \frac{-b}{1-(-c)}i\right)$$

Lo que está del lado derecho de la igualdad es la proyección estereográfica del punto $(a,-b,-c)$, así que

$$\Psi(a,-b,-c) = z^{-1} \quad \square$$

Por lo que invertir z equivale (en la esfera) a enviar el punto (a,b,c) al $(a,-b,-c)$, entonces, sabiendo que el punto N se corresponde con ∞ y $S = (0,0,-1)$ con 0 y que, en la esfera, N y S son uno el inverso del otro, esto nos dice que la noción de asignarle el valor ∞ a $\frac{1}{0}$ y el valor 0 a $\frac{1}{\infty}$ tiene "algo" de sentido en $\hat{\mathbb{C}}$.

Proposición 3.2.4

La proyección estereográfica envía circunferencias en $\mathbb{S}^2$ a circunferencias o rectas en $\mathbb{C}$

Demostración.

Sea Ψ la proyección estereográfica y $C \subseteq \mathbb{S}^2$ una circunferencia. Entonces existe un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Pi : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $C = \Pi \cap \mathbb{S}^2$. Sea $P = (a, b, c) \in C$, esto implica que (a, b, c) soluciona las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

Como Ψ es biyectiva, existe un número complejo $w = u + vi$ tal que $P = \Psi^{-1}(w)$, o sea que

$$\begin{cases} a = \dfrac{2u}{|w|^2 + 1} \\ b = \dfrac{2v}{|w|^2 + 1} \\ c = \dfrac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \end{cases}$$

Reemplazamos estos valores en Π para ver qué forma tiene esto en el plano complejo

$$\alpha_1 \left(\frac{2u}{|w|^2 + 1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{2v}{|w|^2 + 1} \right) + \alpha_3 \left(\frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right) = \alpha_4$$

$$\alpha_1(2u) + \alpha_2(2v) + \alpha_3(|w|^2 - 1) = \alpha_4(|w|^2 + 1)$$

Reagrupando los términos que tienen $|w|^2$, llegamos a

$$(\alpha_3 - \alpha_4)|w|^2 + 2\alpha_1 u + 2\alpha_2 v = \alpha_3 + \alpha_4$$

Y esta ecuación es una circunferencia si $\alpha_3 \neq \alpha_4$, y una recta si ocurre lo contrario (notar que esto depende de si $(0, 0, 1) \in C$ o no). □

Proposición 3.2.5

La imagen de cualquier circunferencia o recta por una homografía es una recta o una circunferencia (o sea, no necesariamente la imagen de una circunferencia es una circunferencia, ni la de una recta es una recta).

Demostración.

Basta con probarlo para las homografías básicas. Para traslaciones, homotecias o rotaciones esto es evidente, por lo que vamos a probar que se cumple para las inversiones. Sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ y $z = x + yi \in \mathbb{C} - \{0\}$, la ecuación

$$A|z|^2 + B\mathrm{Re}(z) + C\mathrm{Im}(z) + D = 0$$

Representa una circunferencia si A es no nulo, y una recta en caso contrario. Sea $w = 1/z$, reemplazando

$$\frac{A}{|w|^2} + B\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) + C\mathrm{Im}\left(\frac{1}{w}\right) + D = 0$$

$$\frac{A}{|w|^2} + B\frac{x}{|w|^2} + C\frac{-y}{|w|^2} + D = 0$$

Multiplicando por $|w|^2$

$$D|w|^2 - Cy + Bx + A = 0$$

Esto es una recta si D es nulo, y es una circunferencia en caso contrario. □

Ejemplo. Determinar la imagen de la región

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0,\ |z| \leq 1\}$$

por la homografía $g(z) = \dfrac{z-1}{1+iz}$.

Solución. Dado que $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y las homografías son inyectivas, sabemos que $g(\mathcal{S}) = g(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}) \cap g(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\})$ (esta igualdad es cierta para cualquier función inyectiva entre dos conjuntos *cualesquiera*), y esto hace las cosas más fáciles.

Analicemos $g(\mathrm{Im}(z) = 0)$: esta es la imagen de una recta por una homografía, así que será o bien una recta o bien una circunferencia. Evaluando en tres puntos del eje real vemos que $g(0) = -1$, $g(1) = 0$ y $g(-1) = -\dfrac{2}{1-i} = -1-i$. No es posible que el infinito esté en la imagen del eje real por g pues el denominador se anula cuando $z = i$ y ese punto no tiene parte imaginaria nula. Es entonces $g(\mathrm{Im}(z) = 0)$ una circunferencia, específicamente, es la que pasa por los puntos -1, 0 y $-1-i$. Para hallar la ecuación que la describe, cosa que nos permitirá encontrar su centro y radio, consideramos la expresión de una circunferencia cualquiera

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Donde $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$. Sustituimos por los puntos que sabemos que pertenecen a ella, y por lo tanto satisfacen la ecuación, y tenemos que

$$\begin{cases} 0^2 + 0^2 + 0A + 0B + C = 0 \Longleftrightarrow C = 0 \\ (-1)^2 + 0^2 - A + 0B + C = 0 \Longleftrightarrow 1 - A + C = 0 \\ (-1)^2 + (-1^2) - A - B + C = 0 \Longleftrightarrow 2 - A - B + C = 0 \end{cases}$$

Luego, $A = B = 1$ y $C = 0$. Por ende, la ecuación que describe esta circunferencia es

$$x^2 + y^2 + x + y = 0$$

Sumando $1/2$ a ambos lados

$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

O sea, $g(\mathrm{Im}(z) = 0)$ es la circunferencia C de radio $1/\sqrt{2}$ y centro $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Sabemos que $g(i) = \infty$, o sea que un punto con parte imaginaria positiva tiene su imagen fuera de C, entonces, concluimos que $g(\mathrm{Im}(z) \geq 0)$ es el borde de C y su exterior.

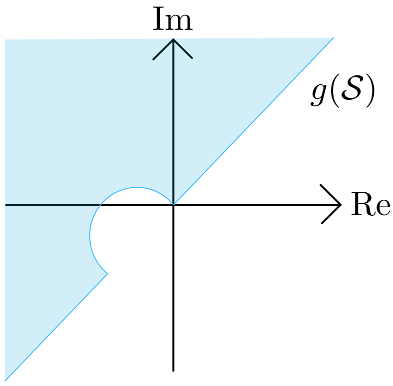
Analicemos $g(|z| = 1)$: esto es la imagen de una circunferencia por g, así que va a ser o bien una recta o bien una circunferencia, como ya dijimos. Evaluando en puntos cualesquiera vemos que $g(1) = 0$, $g(-i) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ y $g(i) = \infty$; esto último nos dice que $g(|z| = 1)$ es una recta. En este caso, dado que 0 y $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ pertenecen a la recta, es fácil notar que esta es la dada por

$$x = y$$

O sea, $g(|z| = 1)$ es la recta de puntos con misma parte real e imaginaria (si no fuera tan sencillo de ver, se podría plantear la ecuación usual de una recta y hallar los coeficientes).

Ya constatamos que $g(0) = -1$, o sea que un punto con módulo menor a 1 tiene como imagen a uno que tiene su parte real menor o a su parte imaginaria. Es decir, $g(|z| < 1) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$.

Finalmente, $g(\mathcal{S})$ es el conjunto dado por todos los puntos del borde de C y de su exterior que tienen parte real menor o igual a su parte imaginaria.



Proposición 3.2.6

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$. Hay una única homografía f que satisface

$$f(z_1) = 0 \qquad f(z_2) = 1 \qquad f(z_3) = \infty$$

Demostración.

Sea $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ una homografía. Podemos encontrar a, b, c, d planteando estas ecuaciones

$$\begin{cases} f(z_1) = 0 \longleftrightarrow \dfrac{az_1+b}{cz_1+d} = 0 \longleftrightarrow az_1 + b = 0 \longleftrightarrow z_1 = -\dfrac{b}{a} \\ f(z_3) = \infty \longleftrightarrow \dfrac{az_3+b}{cz_3+d} = \infty \longleftrightarrow cz_3 + d = 0 \longleftrightarrow z_3 = -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\frac{z-z_1}{z-z_3}$$

Pedimos $f(z_2) = 1$

$$f(z_2) = \frac{a}{c}\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\right) = 1$$

$$\frac{a}{c} = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

Así que

$$f(z) = \left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right)\left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right) \qquad \square$$

Ejemplo. Hallar una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$f(1) = 2 \qquad f(4) = 3 \qquad f(-1) = \infty$$

Solución. Podemos primero intentar hallar una función que satisfaga unas condiciones distintas y luego ajustarlas para que cumplan lo requerido. La proposición anterior nos dice que existe una homografía g tal que

$$g(1) = 0 \qquad g(4) = 1 \qquad g(-1) = \infty$$

Y de hecho, es

$$g(z) = \left(\frac{4-(-1)}{4-1}\right)\left(\frac{z-1}{z-(-1)}\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Y ahora basta con encontrar una función que nos sirva para conseguir lo que queremos. Lo mejor que podemos hacer es algo con el espíritu del polinomio interpolador de Lagrange, y sumar funciones cuyos términos se anulan en todos los puntos indicados excepto en uno. Una función h que podría servirnos es

$$h(z) = -2\left(\frac{(z-4)(z+1)}{6} - \frac{(z-1)(z+1)}{15}\right)$$

Notar que $h(1) = 2$ y $h(4) = 2$. Luego, una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que cumple lo pedido es

$$f(z) = \frac{5}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2\left(\frac{(z-4)(z+1)}{6} - \frac{(z-1)(z+1)}{15}\right)$$

4. Derivabilidad, holomorfía y transformaciones conformes

En esta sección vamos a tratar la noción de derivada de una función compleja, al principio va a sernos muy familiar con la derivabilidad de funciones reales.

Definición 4.0

Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $D \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^o$. Decimos que f es *derivable* en z_0 si y solo si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

De existir dicho límite, lo denotamos $f'(z_0)$.

Definición 4.1

Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + yi)) \qquad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + yi))$$

Esto implica, naturalmente, que $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$.

Proposición 4.0

Sean f, g funciones complejas tales que: existe $f \circ g$, f y g son derivables en z_0 punto interior del dominio de ambas funciones, y f es derivable en $g(z_0)$, entonces:

1. $(f(z_0) + g(z_0))' = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $(fg(z_0))' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
3. $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$

(Notar que hay hipótesis que evidentemente no son necesarias para la validez de los 3 enunciados, pero quise agregarlas a todas de una sola vez).

Proposición 4.1

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $z_0 \in D^o$. Son equivalentes:

1. f es derivable en z_0
2. Existe $L \in \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $\mathcal{B}_\delta(z_0) \subseteq D$ que verifica

$$|z - z_0| < \delta \longrightarrow |f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Con $z \in \mathcal{B}_\delta(z_0)$

Demostración. (Idea)

Para probar $(1.) \rightarrow (2.)$ se puede usar la definición de que f sea derivable en z_0 y luego multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $|z - z_0|$. Para $(2.) \rightarrow (1.)$ se puede aplicar el proceso inverso para recuperar la definición de derivabilidad de f en z_0. $\square$

Corolario

Sea f derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.

Proposición 4.2 (Condiciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $z_0 = x_0 + iy_0 \in D^o$. Son equivalentes:

1. f es derivable en z_0
2. u, v son diferenciables en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales verifican que

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Demostración.

(1.)→(2.): Sea f derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ con $f'(z_0) = a + ib$ y $\varepsilon > 0$, entonces, hay un real positivo δ tal que, si $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$$

Lo que está del lado izquierdo de la desigualdad es, para cada z, el módulo un número complejo. Por ende, sabemos que es menor o igual que el módulo de su parte real

$$|\mathrm{Re}(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))| \leq |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$$

Antes de seguir, calculamos $f'(z_0)(z - z_0)$

$$f'(z_0)(z - z_0) = (a + bi)((x - x_0) + (y - y_0)i) = a(x - x_0) + (y - y_0)ai + (x - x_0)bi - b(y - y_0)$$

$$f'(z_0)(z - z_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + (a(y - y_0) + b(x - x_0))i$$

Volviendo a la desigualdad, Re() distribuye respecto de la suma, entonces

$$|\mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(z_0)) - \mathrm{Re}(f'(z_0)(z - z_0))| < \varepsilon|z - z_0|$$

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0) - [a(x - x_0) - b(y - y_0)]| < \varepsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Esta es la definición de que $u(x, y)$ sea diferenciable en (x_0, y_0) (recordar el límite de diferenciabilidad de Análisis I). Además, sabemos por ello que $u_x(x_0, y_0) = a$ y $u_y(x_0, y_0) = -b$

Procediendo exactamente igual pero tomando Im(), llegamos a

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0) - [b(x - x_0) + a(y - y_0)]| < \varepsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Esto significa que $v(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y que $v_x(x_0, y_0) = b$ y $v_y(x_0, y_0) = a$, como se quería probar.

(2.)→(1.): (Gracias Manu) Sean $z_0 = x_0 + iy_0$, $a = u_x(x_0, y_0)$ y $b = v_x(x_0, y_0)$; supongamos que se satisface (2.), veamos que $f'(z_0) = a + bi$.

$$|f(z) - f(z_0) - (a+bi)(z - z_0)| = |u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) - (a(x - x_0) - b(y - y_0) + i(b(x - x_0) + a(y - y_0)))|$$

$$|f(z) - f(z_0) - (a+bi)(z - z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0) - (a(x - x_0) - b(y - y_0))| + |v(x, y) - v(x_0, y_0) - (b(x - x_0) + a(y - y_0))|$$

Diviendo a ambos lados por $|z - z_0|$ y recordando que u y v son diferenciables (tomando $b = -u_y(x_0, y_0)$ para el primer término y $a = v_y(x_0, y_0)$ en el segundo), sabemos que cada término de la suma tiende a 0 cuando z se acerca a z_0 (equivalente a que x tienda a x_0 e y a y_0). Por ende,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + bi) \right|$$

es arbitrariamente cercano a 0. Luego, $f'(z_0) = a + bi$ □

Definición 4.2

Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^o$. Decimos que f es holomorfa en z_0 si hay $r > 0$ tal que f es derivable en $\mathcal{B}_r(z_0) \subseteq D$. Decimos que f es holomorfa si es holomorfa en todo elemento de D.

Proposición 4.3

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con D abierto y conexo (llamamos *dominio* a estos conjuntos). Si $u(x, y)$ es constante, entonces f es constante

Demostración.

Como f es holomorfa, en particular es derivable, entonces valen las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} u_x(x, y) = 0 = -v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = 0 = v_x(x, y) \end{cases}$$

Al ser D abierto y conexo, puedo integrar cada derivada parcial, y esto me dice que f es constante pues u y v lo son. □

Proposición 4.4

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con D dominio. Si $|f|$ es constante, f es constante.

Demostración.

Supongamos que $|f|$ es no nulo, de serlo, el enunciado es trivialmente cierto. Entonces hay un real positivo k tal que $|f| = k$. Luego, $|f|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = k^2$. Derivando respecto de x y de y

$$\begin{cases} 2u(x, y)u_x(x, y) + 2v(x, y)v_x(x, y) = 2u(x, y)u_x(x, y) + 2v(x, y)v_x(x, y) = 0 \\ 2u(x, y)u_y(x, y) + 2v(x, y)v_y(x, y) \underset{\text{C-R}}{=} 2u(x, y)(-v_x(x, y)) + 2v(x, y)u_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esto se puede traducir al siguiente sistema matricial (luego de dividir por 2 a ambos lados).

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $|f|^2 = k^2 > 0$, entonces u y v no son ambos nulos, esto implica que la matriz es singular, así que su determinante es 0, es decir,

$$u_x^2 + v_x^2 = 0 \longrightarrow u_x \underset{\text{C-R}}{=} v_y = 0, \; v_x \underset{\text{C-R}}{=} -u_y = 0$$

Las derivadas parciales son todas iguales a cero, por lo que u y v son constantes y, en consecuencia, f también. □

Asumamos a partir de ahora que u, v son indefinidamente diferenciables.

Definición 4.3

Sea $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que u es armónica si $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (laplaciano nulo).

Proposición 4.5

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ subconjunto g ("sin agujeros") y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Existe $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ es holomorfa en D. v recibe el nombre de *armónica conjugada*. Si existe $\tilde{v}$ que también cumple entonces $v(x, y) - \tilde{v}(x, y) = w \in \mathbb{C}$.

Demostración. (Idea)

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ subconjunto simplemente conexo y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Queremos hallar $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $\nabla v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x)$. Pedir esto bastaría para que f sea holomorfa pues por C-R sería derivable en todo punto, y también haría que v sea armónica ya que para u vale el teorema de Clairaut (las derivadas cruzadas son iguales). Para que un campo vectorial (en este caso $(-u_y, u_x)$) sea el gradiente de alguna función (la función v que buscamos), es necesario que el rotacional/rotor de dicho campo sea nulo.

$$\operatorname{rot}(-u_y, u_x) = u_{xx} - (-u_{yy}) = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Vemos que la condición se satisface por ser u armónica. Además, esta se vuelve también suficiente si suponemos que D es simplemente conexo. □

Ejemplo. Probar que la función $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ es armónica y hallar su armónica conjugada.

Solución. Sea $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces,

$$u_{xx}(x, y) = -\operatorname{sen}(x)\cosh(y) \qquad u_{yy}(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$$

Es claro que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Por ende, existe v armónica conjugada. Para que f sea holomorfa basta con que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. Pedimos que valgan las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \cos(x)\cosh(y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) = -v_x(x, y) \end{cases}$$

$$\int v_y dy = \int \cos(x)\cosh(y)dy = \cos(x)\operatorname{senh}(y) + g(x)$$

$$\int -v_x dx = -\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)dx = -(-\cos(x))\operatorname{senh}(y) + h(y) = \cos(x)\operatorname{senh}(y) + h(y)$$

Derivando respecto de x el resultado de la primera integral e igualando a $-u_y$:

$$-\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) + g'(x) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) \longrightarrow g'(x) = 0$$

Y derivando respecto de y el resultado de la segunda integral e igualando a u_x

$$\cos(x)\cosh(y) + h'(y) = \cos(x)\cosh(y) \longrightarrow h'(y) = 0$$

Ambas funciones son constantes, podemos tomar ambas iguales a 0. Así que

$$v(x, y) = \cos(x)\operatorname{senh}(y)$$

es la armónica conjugada de u.

Proposición 4.6

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ tal que su imagen está contenida en una recta. Entonces, f es constante.

Demostración.

Sea $f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$ holomorfa en D, como su imagen está contenida en una recta, hay números reales a, b, c con a y b no ambos nulos, tales que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$au(x, y) + bv(x, y) = c$$

Derivando respecto de x y también respecto de y, tenemos que:

$$\begin{cases} au_x(x, y) + bv_x(x, y) = 0 \\ au_y(x, y) + bv_y(x, y) = 0 \underset{C-R}{=} -av_x(x, y) + bu_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esto puede traducirse al siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $-(a^2 + b^2)$ que es no nulo pues sabemos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Así que solo puede ser que $u_x, v_x = 0$ que por C-R son iguales a v_y y $-u_y$ respectivamente. Como todas las derivadas parciales son nulas, u y v son constantes, y por ende f lo es. $\square$

Definición 4.4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Decimos que f es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva y con inversa diferenciable.

Definición 4.5

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Decimos que f es una *transformación conforme* si, dado un par de curvas $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ de dominio $[a, b] \in \mathbb{R}$ que se intersecan en z_0 formando un ángulo α, la imagen de las mismas por f preserva ese mismo ángulo. Es decir, si notamos como $\theta(v, w)$ al ángulo entre los vectores v y w, y $t_0 \in [a, b]$ es tal que $\sigma(t_0), \gamma(t_0) = z_0$ entonces vale que

$$\alpha = \theta(\sigma'(t_0), \gamma'(t_0)) = \theta((f \circ \sigma)'(t_0), (f \circ \gamma)'(t_0)))$$

Con σ, γ diferenciables en t_0 y f diferenciable en z_0.

Consideramos a las siguientes como las transformaciones conformes elementales de $\mathbb{R}^n$:

1. $f(x) = \lambda x$, λ escalar no nulo (homotecia)
2. $f(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (traslación)
3. $f(x) = Ux$ con $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal
4. $f(x) = \frac{x}{||x||^2}$, con $x \neq 0$ (En $\mathbb{R}^2$ esto equivale a la inversión de un número complejo z)

Observación 4.0

Decimos que f es conforme en un punto específico $z_0 \in \mathbb{C}$ si la condición de arriba se cumple para curvas que se intersecan en z_0.

Definición 4.6

Sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva y $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\sigma \in C^1$ la parametrización de la misma. Definimos la *longitud* de la curva σ como:

$$\text{Long}(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||dt$$

Definición 4.7

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Decimos que f es una *isometria* si, dada $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ curva, $f(\gamma)$ y γ tienen la misma longitud.

Ahora vamos a concentrarnos brevemente en las transformaciones lineales conformes. Nos van a interesar las $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineales tales que, para todos $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{Tv \cdot Tw}{||Tv||\ ||Tw||} = \frac{v \cdot w}{||v||\ ||w||}$$

Esto equivale a que el ángulo entre v y w sea igual al que hay entre Tv y Tw, pues $\cos^{-1}$ es biyectivo.

Observación 4.1

Si T es una transformación lineal ortogonal, entonces es conforme.

Las transformaciones lineales ortogonales preservan el producto interno (Para todos $v, w \in \mathbb{R}^2$,$\langle v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle$) y por ende también la norma.

Definición 4.8

Sea $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, decimos que U es ortogonal si, dada $\{v, w\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, $\{Uv, Uw\}$ es también una base ortonormal.

(Tomamos 2×2 pero también es cierto en general para matrices de $n \times n$).

Proposición 4.7

Sea $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $f : \mathbb{R}^2 \underset{v \longrightarrow Tv}{\longrightarrow} \mathbb{R}^2$ transformación lineal, son equivalentes:

1. $T = \lambda U$ con U ortogonal.
2. f es conforme.

Demostración.

(1.)$\rightarrow$(2.): Se deduce de la observación anterior.

(2.)$\rightarrow$(1.): Sea $\{v, w\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, sabemos que entonces $\{Tv, Tw\}$ son ortogonales. Sea $\alpha = ||Tv||$ y $\beta = ||Tw||$.

$$(v + w) \cdot (v - w) = v \cdot v + w \cdot v - w \cdot v - w \cdot w = ||v||^2 - ||w||^2 = 1 - 1 = 0$$

Al ser f conforme, sabemos entonces que

$$f(v + w) \cdot f(v - w) = (Tv + Tw) \cdot (Tv - Tw) = 0$$

$$Tv \cdot Tv + Tv \cdot Tw - Tv \cdot Tw - Tw \cdot Tw = ||Tv||^2 - ||Tw||^2 = 0 \longleftrightarrow (||Tv|| - ||Tw||)(||Tv|| + ||Tw||) = 0$$

Como ambos números son reales positivos, solo puede ser que

$$||Tv|| = ||Tw||, \text{ es decir, } \alpha = \beta$$

Definimos $U = \alpha^{-1}T$. $\{Uv, Uw\}$ sigue siendo ortogonal pues U es un múltiplo de T, pero además:

$$||Uv|| = |\alpha^{-1}|\ ||Tv|| = |\alpha^{-1}|\alpha = 1 = ||Uw||$$

Como $\{Uv, Uw\}$ es una base ortonormal, T es ortogonal. $\square$

Proposición 4.8

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con f difeomorfismo y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo. Entonces f es conforme si y solo si f es holomorfa o $\overline{f}$ es holomorfa.

Teorema 4.0 (Teorema de Liouville para transformaciones conformes)

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ conforme. Entonces es composición de algunas de las transformaciones conformes elementales (no más de una de cada una).

Definición 4.9

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es una *extensión al plano complejo* de g si

$$f(x + 0i) = g(x)$$

Y a continuación listamos funciones que extienden al plano complejo a funciones conocidas:

1. $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\text{sen}(x)\text{senh}(y)$
2. $\text{sen}(z) = \text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\text{senh}(y)$
3. $e^z = e^x(\cos(y) + i\,\text{sen}(y))$
4. $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
5. $\text{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

Notemos que la exponencial compleja no es inyectiva debido a que el seno y el coseno son funciones periódicas. Además de eso, notar que es sobreyectiva salvo por el 0. Veamos qué ocurre si quisiéramos definir un *logaritmo complejo*:

Sea $w \in \mathbb{C}$, entonces $e^z = w$ si y solo si

$$|w| = |e^z| = e^x \Longrightarrow x = \ln(|w|)$$

$$\arg(w) = \arg(e^z) = y + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

El problema es claro: hay infinitos valores posibles para $\arg(e^z)$ de manera que este coincida con el argumento de w. Sin embargo, podemos considerar esta restricción para la exponencial compleja

$$\exp() : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \text{ dada por } \exp(x, y) = e^x(\cos(y) + i\,\text{sen}(y))$$

Evidentemente es la misma función, solo que nos restringimos al *argumento principal*. De esta manera conseguimos que e^z sea inyectiva.

Definición 4.10

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z = x + yi$. Definimos con esta función al argumento principal de z, denotado por $\mathrm{Arg}(z)$:

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notar que esta función no es continua en la semirecta de reales negativos (si me acerco a un número real $x_0 < 0$ desde los complejos con parte imaginaria positiva, el valor de su argumento principal tiende a π, pero si me acerco desde los que tienen parte imaginaria negativa, este último tiende a $-\pi$). Sin considerar a todo ese conjunto de discontinuidad, Arg es C^1.

Definición 4.11

Definimos al logaritmo complejo $\mathrm{Log} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$$

Vía Cauchy-Riemann se puede verificar rápidamente que esta función es derivable en todo su dominio y por ende es holomorfa.

Definición 4.12

Sea D abierto conexo de $\mathbb{C}$, una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama *raíz n-ésima holomorfa* si es holomorfa y además

$$(f(z))^n = z \quad \text{para todo } z \in D$$

Y recibe el nombre de *rama del logaritmo* si es continua y

$$e^{f(z)} = z \quad \text{para todo } z \in D$$

Proposición 4.8

Sean $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^o$. Si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_o) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.

Esto nos otorga una cómoda manera de verificar si una función holomorfa es conforme en un punto.

5. Series de potencias

5.1. Series numéricas y criterios de convergencia

Definición 5.1.0

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sucesion de complejos. Decimos que $\sum a_n$ *converge* si existe $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{j} a_n$ y denotamos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a dicho límite.

Además, si consideramos $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y resulta ser que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = L < +\infty$, decimos que $\sum a_n$ *converge absolutamente*.

Proposición 5.1.0

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$. Si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n$ converge.

Demostración.

Sean m y n naturales o cero tales que $m < n$, $S_n = \sum\limits_{m=0}^{n} a_n$ y $\sigma_n = \sum\limits_{m=0}^{n} |a_n|$

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{m} a_j\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

Como la serie converge absolutamente, $|\sigma_n - \sigma_m|$ se puede hacer arbitrariamente cercano a 0. $\square$

A continuación enlistamos varios criterios útiles para analizar la convergencia de series.

Proposición 5.1.1 (Criterio de la mayorante)

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de reales positivos tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

1. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Proposición 5.1.2 (Criterio de la raíz n-ésima de Cauchy)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, entonces,

1. Si $\alpha < 1$, $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $\alpha > 1$, $\sum a_n$ no converge.
3. Si $\alpha = 1$, el criterio no es concluyente.

Proposición 5.1.3 (Criterio de D'Alembert)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y sea $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, entonces,

1. Si $\beta < 1$, $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $\beta > 1$, $\sum a_n$ no converge.
3. Si $\beta = 1$, el criterio no es concluyente.

Proposición 5.1.4 (Criterio de comparación)

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones de reales positivos, entonces,

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum a_n, \sum b_n$ convegen o $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también.
3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Proposición 5.1.5 (Criterio de la integral)

Sea $\{a_n\}$ suc. de reales no negativos y $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ continua y decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\sum a_n$ converge si y solo si $\int\limits_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

Definición 5.1.1

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $a_n = z^n$, la suma

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

Recibe el nombre de *suma geométrica*. Cuando tomamos $n \to \infty$, recibe el nombre de, naturalmente, *serie geométrica*.

Si $z \neq 1$, vale que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Y más aún, si $|z| < 1$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ es convergente y converge a $\frac{1}{1-z}$.

Definición 5.1.2

Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos suc. de complejos. Definimos como *producto de Cauchy* a la suma

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

Proposición 5.1.6

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ suc. de complejos tales que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes, entonces $\sum c_k$ (producto de Cauchy) es absolutamente convergente y además

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right)$$

Demostración.

$$|c_0| \leq |a_0 b_0|$$

$$|c_1| \leq |a_0 b_1| + |a_1 b_0|$$

$$|c_2| \leq |a_0 b_2| + |a_1 b_1| + |a_2 b_0|$$

$$\vdots$$

$$|c_n| \leq |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \ldots + |a_n b_0|$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-j} |a_j||b_m| = \sum_{j=0}^{n} |a_j| \left(\sum_{m=0}^{n-j} |b_m| \right) \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right)$$

Tomando $n \longrightarrow \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) \quad \square$$

Proposición 5.1.7 (Suma por partes)

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ suc. de complejos y $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n$, entonces,

$$\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

Demostración.

$$\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = \sum_{n=k}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=k}^{N} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N} A_{n-1} b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k+1}^{N} A_{n-1} b_n$$

$$A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k+1}^{N} A_{n-1} b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_{n+1}$$

$$A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_{n+1} = A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) = A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \quad \square$$

Proposición 5.1.8 (Criterio de Dirichlet)

Sea $\{a_n\}$ suc. de reales con $a_{n+1} \leq a_n$ y $a_n \longrightarrow 0$ y $\{b_n\}$ suc. de complejos tal que $B_n = \left| \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \right| \leq C$, entonces, $\sum a_n b_n$ es convergente.

Demostración.

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k b_k \right| \leq |B_N a_N| + \sum_{n=0}^{N-1} |B_n||a_{n+1} - a_n| \leq C|a_N| - C \sum_{n=0}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) = C|a_N| - C a_N + C a_0$$

Tomando $N \longrightarrow \infty$ (sabemos que $a_n \longrightarrow 0$)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \right| \leq C a_0 \quad \square$$

Observación 5.1.0

Sea $\{a_n\}$ sucesión de reales no negativos decreciente tal que $a_n \longrightarrow 0$. Entonces $\sum a_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < 1$, y converge si $|z| = 1$ pero $z \neq 1$.

5.2. Series de funciones

Definición 5.2.0

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ (D subconjunto de los reales o los complejos según el caso). Definimos $S_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

Decimos que $\sum f_n$ *converge* (puntualmente) si, para todo $z \in D$, $\sum f_n(z)$ converge. Se suele ponerle de nombre $S(z)$ a dicho límite. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y z fijo, hay $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Si $n \geq n_0$.

Si dicha convergencia es absoluta, decimos que $\sum f_n$ *converge absolutamente*. Análogamente, $\sum f_n$ *converge uniformemente* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que, para todo $z \in D$

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Si $n \geq n_0$. La idea es que puedo acotar uniformemente la distancia entre S_n y S independientemente del valor en el que se evalúen.

Proposición 5.2.0

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua. Si $S_n \to S$ uniformemente en D, entonces S es continua.

Demostración. (Idea)

Sea $z_0 \in D$ fijo, $\varepsilon > 0$ y $z \in D$

$$|S(z) - S(z_0)| = |S(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0) + |S_n(z_0) - S(z_0)|$$

El primer término puede acotarse por $\varepsilon/3$ tomando $n \geq n_0$ (existe por la convergencia uniforme de S_n), por continuidad (S_n es una suma de $n+1$ funciones continuas) se puede lograr lo mismo con el segundo término (existe $\delta > 0$ que permite acotarlo por $\varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$), y lo propio ocurre con el último, tomando $n \geq n_1$, pero esta vez porque $S_n(z_0) \to S(z_0)$ (convergencia uniforme implica convergencia puntual). Bastaría escribir todo esto un poco mejor y tomar como δ el mismo que funciona para acotar $|S_n(z) - S_n(z_0)|$. $\square$

Proposición 5.2.1 (Criterio de Weierstrass o M-test)

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

1. Para cada n natural existe $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in D$.
2. $\sum M_n$ converge.

Entonces, $\sum f_n$ converge uniformemente.

Definición 5.2.1

Sea $\{f_n\}$ suc. de funciones con $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas para todo natural n. Decimos que $\sum f_n$ *converge normalmente* si, para cualquier $K \subseteq D$ compacto y, definiendo $||f_n||_K = \sup_{z\in K} |f_n(z)|$, vale que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_K < +\infty$$

Definición 5.2.2

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo y $z \in \mathbb{C}$. La serie

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Es una serie de funciones que recibe el nombre de *serie de potencias*.

Por ahora consideramos a las series centradas en 0 ($z_0 = 0$).

Proposición 5.2.2 (Lema de Abel)

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Entonces, $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$ para todo $r < |z_0|$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Luego, $a_n z_0^n \to 0$ y entonces $|a_n z_0^n| \leq C$. Sea $r < |z_0|$ y $z \in \overline{\mathcal{B}_r(0)}$

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n||z_0|^n \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq C\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$$

$C\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ acota superiormente, para cada $n \in \mathbb{N}$, a $|a_n z^n|$. Además, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$$

es una serie geométrica convergente, pues su razón es menor a 1 ($r < |z_0|$). Por M-test: $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$. □

Corolario

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $S(z) = \sum a_n z^n$ y $D = \{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ converge}\}$, entonces ocurre alguna de estas cosas:

1. $D = \{0\}$
2. $D = \mathbb{C}$
3. Existe $R > 0$ (que recibe el nombre de *radio de convergencia*) tal que $\mathcal{B}_R(0) \subseteq D \subseteq \overline{\mathcal{B}_R(0)}$

Demostración.

Supongamos que 1. y 2. no ocurren. De manera que hay un $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \cap D$ y otro $z_1 \in \mathbb{C}\backslash D$. Por el lema de Abel, no hay $z \in D$ tal que $|z| > |z_1|$, porque de ser cierto eso, debería valer que $z_1 \in D$. Luego, existe $R = \sup\{|z| : z \in D\}$. Sea $z \in \mathcal{B}_R(0)$, de manera que $0 \leq |z| < R$. Como $|z|$ es menor que R, que es un supremo, existe $w \in D$ tal que $|z| \leq |w| \leq R$.

Si el supremo se realiza, entonces hay $u \in D$ tal que $|u| = R$ y $|z| < |u|$. Si no se realiza, vale que $|z| < |w| < R$. En cualquier caso, por Abel, $z \in D$. Así que $\mathcal{B}_R(0) \subseteq D$.

Faltaría ver que D está contenido en la clausura de la bola... $\square$

Ahora vamos a exhibir cómo se halla el radio de convergencia. Por el criterio de la raíz n-ésima de Cauchy (Proposición 5.1.2), sabemos que, dada $\{a_n\}$ suc. de complejos y $z \in \mathbb{C}$ fijo, entonces $\sum a_n z^n$ converge si

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z^n|^{1/n} = |z| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

Es decir,

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = R$$

Calcular ese límite superior nos permite encontrar el valor del radio de convergencia.

Observación 5.2.0

Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, decimos que el radio de convergencia R es infinito ($R = \infty$) y $\sum a_n z^n$ converge en todo $\mathbb{C}$.

Teorema 5.2.0

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y $S'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Entonces, S' es la *derivada* de S en $\mathcal{B}_R(0)$.

Demostración.

Veamos primero que los radios de convergencia coinciden. Sea $R' > 0$ el radio de convergencia de S'

$$1/R' = \limsup_{n\to\infty}(\underbrace{|n+1|^{1/n}}_{1} |a_{n+1}|^{1/n}) = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = 1/R$$

Sean $z, h \in \mathbb{C}$ con $|z| < R$ (no tendría sentido un valor fuera del radio de convergencia) y $|z| + |h| < R$, y $\varepsilon > 0$, quiero ver que existe $\delta > 0$ tal que, si $|h| < \delta$, entonces

$$|S(z+h) - S(z) - S'(z)h| < \varepsilon |h|$$

Antes de continuar vamos a probar una desigualdad que va a ayudarnos. Consideremos

$$\left| \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{k-j} h^j \right| = |h^2| \left| \sum_{j=2}^{n} \frac{n(n-1)}{j(j-1)} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right|$$

j es un número natural, como la suma empieza en $j = 2$, podemos considerar la cota $\frac{1}{j(j-1)} \leq \frac{1}{2}$. Así que

$$|h^2| \left| \sum_{j=2}^{n} \frac{n(n-1)}{j(j-1)} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right| \leq |h^2| \left| \sum_{j=2}^{n} \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right| = |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \left| \sum_{j=2}^{n} \binom{n-2}{j-2} z^{n-j} h^{j-2} \right|$$

Cambiando el índice con $k = j - 2$,

$$\left| \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{k-j} h^j \right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} z^{n-k-2} h^k \right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |z|^{n-k-2} |h|^k = |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} (|z|+|h|)^{n-2}$$

En conclusión,

$$\left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}z^{k-j}h^{j}\right| \leq |h|^{2}\frac{n(n-1)}{2}(|z|+|h|)^{n-2}$$

Recordando este resultado, probemos lo enunciado

$$S(z+h)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z+h)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[z^k+kz^{k-1}h+\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j\right]$$

$$S(z+h)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)z^kh+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j=S(z)+S'(z)h+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j$$

Por lo tanto,

$$S(z+h)-S(z)-S'(z)h=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j=\sum_{k=2}^{\infty}a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j$$

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j\right|\leq\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\left|\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^j\right|\leq|h|^2\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}(|z|+|h|)^{k-2}$$

$$|h|^2\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}(|z|+|h|)^{k-2}=|h|^2\sum_{j=0}^{\infty}|a_{j+2}|\frac{j(j-1)}{2}(|z|+|h|)^{j}$$

Observar que el término cuadrático $\frac{j(j-1)}{2}$ no altera el radio de convergencia de la serie, que es convergente pues $|z|+|h|<R$ (podemos elegir h para que así sea), finalmente,

$$|S(z+h)-S(z)-S'(z)h|\leq|h|^2\sum_{j=0}^{\infty}|a_{j+2}|\frac{j(j-1)}{2}(|z|+|h|)^{j}=C|h|^2<\varepsilon|h|$$

Por lo que podemos pedir $h\in\mathbb{C}$ tal que

$$|h|<\text{mín}\{R-|z|,\frac{\varepsilon}{C}\}\quad\square$$

Corolario

Sea $\{a_n\}$ suc. de complejos y $S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R>0$ y convergente en $\mathcal{B}_R(z_0)$, entonces, $S^{(p)}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}z^n$ es la *deriva p-ésima* de $S(z)$ centrada en z_0 y tiene el mismo radio de convergencia.

Definición 5.2.3

Sea D abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$. f se dice analítica en $z_0\in D$ si existe $\{a_n\}$ suc. de complejos tal que la serie de potencias $S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ resulta convergente en $\mathcal{B}_R(z_0)\subseteq D$ y además $f(z)=S(z)$ en dicha bola.

Observación 5.2.1

Una función f se dice *analítica* si es analítica en cada punto de su dominio.

Proposición 5.2.3

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ analítica en z_0, $R>0$ y $\{a_n\}$ suc. de complejos tal que $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ en $\mathcal{B}_R(z_0)$, entonces,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Demostración.

Sabemos que $f^{(n)}(z) = S^{(n)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}(z-z_0)^n$. Si evaluamos en z_0, todos los términos son nulos salvo el correspondiente a $n = 0$ (a esta altura no sé si es necesario aclararlo, pero en algunas áreas del análisis, en particular en esta, se asume por convención que $0^0 = 1$). Luego,

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \square$$

Ejemplo. Hallar la serie de potencias de $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ centrada en $z_0 = 0$ y calcular su radio de convergencia.

Solución. Es claro que todas las derivadas en $z = 0$ de esta función existen y, como no tiene una expresión muy complicada, seguramente sea relativamente sencillo hallarlas. Pero eso sería muy aburrido, procedamos de esta manera:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \underset{\text{f.s}}{=} \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{i(\frac{z}{i}+1)} - \frac{1}{(-i)(\frac{z}{-i}+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{i}+1} + \frac{1}{\frac{z}{-i}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{i})} + \frac{1}{1-\frac{z}{i}}\right)$$

Ambos sumandos son el valor al que convergen dos series geométricas. Tomemos $|\frac{z}{i}| < 1$, o sea $|z| < 1$, entonces,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^{2n}$$

(Notar que cuando n es impar, la suma de ambos términos es 0 pues uno es el opuesto del otro, mientras que cuando n es par, la suma da como resultado $2\left(\frac{z}{i}\right)^n$) Finalmente, para $|z| < 1$ (O sea que su radio de convergencia es 1), se tiene que

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

Proposición 5.2.4

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto y conexo. Entonces, f es indefinidamente holomorfa (o sea, todas sus derivadas existen y son funciones holomorfas).

Proposición 5.2.5

Sean f, g dos funciones analíticas con dominios abiertos conexos. Si $f = g$ en $U \subseteq \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ abierto conexo, entonces $f = g$ en $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Demostración.

Sea $h = f - g$ definida en $G = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Claramente, $h = 0$ en U. Sea, para cada k natural o cero, el siguiente conjunto:

$$A_k = \{z \in G : h^{(k)}(z) \neq 0\}$$

A_k es la preimagen de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, que es abierto, por $h^{(k)}$, que es continua. Luego, A_k es abierto para cada k. Más aún, el conjunto

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

Es abierto.

Consideremos ahora el conjunto

$$B = G \backslash A = \{z \in G : h^{(k)} = 0, \, k \geq 0\}$$

Sea $z_0 \in B$. Como h es analítica, hay $r > 0$ tal que, para todo $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0$$

Por ende, $\mathcal{B}_r(z_0) \subseteq B$. Así que B es abierto.

Claramente, $G = A \sqcup B$. Como G es conexo, debe ser que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. $U \subseteq B$ (si $f = g$ en U, como ambas son analíticas, $f^{(n)} = g^{(n)}$ en U). Luego, A es vacío. Por ende, $G = B$ y entonces $h^{(k)} = 0$ en G y para todo $k \geq 0$. $\square$

Observación 5.2.2

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto conexo. Si $f \neq 0$, el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : f^{(k)}(z) = 0, \, k \geq 0\}$ es vacío.

Proposición 5.2.6

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con D abierto conexo. Si $f \neq 0$, el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ es discreto.

Demostración.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$, como f es analítica, hay $r > 0$ que satisface

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z - z_0)^n$$

Para todo $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$.

Sea $m = \min\limits_{n \geq 0}\{n : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Por la observación anterior este conjunto es no vacío y por eso el mínimo existe. Luego,

$$f(z) = \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!}(z - z_0)^{m+1} + \dots \right) = (z - z_0)^m \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!}(z - z_0) + \dots \right)$$

Sea $g(z)$ dada por

$$g(z) \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{m+1!}(z - z_0) + \dots \right)$$

Esta función es continua. Como $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$, hay $r' > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{B}_{r'}(z_0) \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$. Entonces, dado que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $f(z) \neq 0$ si $z \in \mathcal{B}_{r'}(z_0) \backslash \{z_0\}$. $\square$

6. Integración en $\mathbb{C}$

6.1. Integración sobre curvas regulares

Definición 6.0

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva continua. Decimos que γ es regular si existen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tales que, si $1 \leq j \leq n$, $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ es C^1 y además $\gamma'(t) \neq 0$ con $t \in [t_{j-1}, t_j]$.

Definición 6.1

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular, definimos la *longitud* de γ como

$$\operatorname{Long}(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt$$

Definición 6.2

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en la imagen de γ, definimos la *integral de f sobre γ* así

$$\int_{\gamma} f := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Observación 6.0

El valor de $\int_{\gamma} f$ es invariante por parametrización.

Definición 6.3

Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ parametrizaciones de curvas. Si existe $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ biyectiva, creciente, C^1 a trozos, con $h'(t) > 0$ y tal que $\gamma = \sigma \circ h$, decimos que γ es una *reparametrización* de σ.

Definición 6.4

Sean $\gamma, \sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ curvas regulares tales que $\gamma(1) = \sigma(0)$. Definimos la "suma" entre γ y σ (de hecho, es una concatenación), como

$$(\gamma + \sigma)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \sigma(2t-1) \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Observación 6.1

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en la imagen de $\gamma + \sigma$, entonces,

$$\int_{\gamma+\sigma} f = \int_{\gamma} f + \int_{\sigma} f$$

Definición 6.5

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. Definimos $\gamma^-(t) := \gamma((b+a)-t)$. γ^- es la misma curva pero recorrida en la otra dirección.

Definición 6.6

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 6.7

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es simple si todo par de reales $t, t' \in [a,b]$ verifican que

$$\gamma(t) = \gamma(t') \Longrightarrow t = t' \text{ o } \{t,t'\} = \{a,b\}$$

Gráficamente esto se puede interpretar como que la curva no se cruza a sí misma, salvo quizás en los extremos.

Definición 6.8

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. Decimos que γ es de Jordan si es simple y cerrada.

Teorema 6.0 (Teorema de Jordan)

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de Jordan. Entonces existen $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abiertos conexos, uno acotado y el otro no, tales que $\mathbb{C} = A \cup B \cup \operatorname{Im}(\gamma)$.

Proposición 6.0

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en la imagen de γ. Entonces,

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \operatorname{Long}(\gamma)$$

Demostración.

Sean $\rho > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que

$$\int_\gamma f = \rho e^{i\theta}$$

Sea $g(z) = e^{-i\theta} f(z)$, luego, $\int_\gamma g = e^{-i\theta} \int_\gamma f = \rho$.

$$\rho = \int_\gamma g = \operatorname{Re}\left(\int_\gamma g \right) = \operatorname{Re}\left(\int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(g(\gamma(t))\gamma'(t))dt \leq \int_a^b |g(\gamma(t))\gamma'(t))dt|$$

$$\int_a^b |g(\gamma(t))\gamma'(t))dt| \leq \max_{t\in[a,b]} g(\gamma(t)) \int_a^b \gamma'(t)dt = \max_{t\in[a,b]} g(\gamma(t)) \operatorname{Long}(\gamma) \quad \square$$

Proposición 6.1

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa en D y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ curva regular y de Jordan. Si consideramos $U \subsetneq D$ la región encerrada por γ y $u, v \in C^1(\overline{U})$, entonces,

$$\int_\gamma f = 0$$

Demostración.

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(x(t),y(t))x' - v(x(t),y(t))y' + i(v(x(t),y(t))x' + u(x(t),y(t))y')dt$$

Luego,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy$$

Sea $U \subsetneq D$ la región encerrada por γ. Como $u, v \in C^1(\overline{U})$, por Green,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy = \iint_U -v_x - u_y \, dA - \iint_U u_x - v_y \, dA$$

Como f es holomorfa, vale Cauchy-Riemann, así que cada integrando resulta nulo. Por ende,

$$\int_\gamma f = 0 \quad \square$$

A continuación un interesante corolario.

Corolario

Sea $P \in \mathbb{C}[z]$ no constante. Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Este es el *teorema fundamental del álgebra*.

Demostración.

Supongamos que el enunciado no es cierto, de manera que existe $P \in \mathbb{C}[z]$ tal que $P(z) \neq 0$ para todo z complejo. Luego, la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

Es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, pues es un cociente entre polinomios y el denominador nunca es nulo. Sea $n \in \mathbb{N}$ el grado de P. Como es un polinomio, entonces está unívocamente determinado por sus coeficientes, es decir, hay $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ tales que

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Consideremos la siguiente reescritura de P:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = z(a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0$$

Sea $Q(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1$. Luego,

$$P(z) = zQ(z) + a_0$$

Sea $M > 0$ un número real, como $\lim\limits_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$, existe R real positivo tal que

$$|P(z)| \geq M$$

Si $|z| \geq R$.

Luego,

$$\left|\int\limits_{|z|=R} \frac{1}{z}\right| = \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{P(z)}{zP(z)}\right| = \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{zQ(z)+a_0}{zP(z)}\right| = \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{Q(z)}{P(z)} + \int\limits_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\right| \leq \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{Q(z)}{P(z)}\right| + \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\right|$$

La función $\frac{Q(z)}{P(z)}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y con derivada continua, por lo que, de acuerdo a la proposición interior, su integral sobre la región $|z| = R$ es nula. Entonces,

$$\left|\int\limits_{|z|=R} \frac{1}{z}\right| = |2\pi i| = 2\pi \leq |a_0| \left|\int\limits_{|z|=R} \frac{1}{zP(z)}\right| \leq |a_0| \int\limits_{|z|=R} \frac{1}{|z||P(z)|}$$

Como $|z| = R$, sabemos que $|P(z)| \geq M$, y entonces es claro que $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{M}$, así que

$$2\pi \leq |a_0| \int\limits_{|z|=R} \frac{1}{|z||P(z)|} \leq \frac{|a_0|}{RM} \int\limits_{|z|=R} |dz|$$

Notar que la integral de $|dz|$ sobre la región $|z| = R$ es una forma de notar la integral de longitud de curva, así que es igual a $2\pi R$. Finalmente,

$$2\pi \leq \frac{|a_0|}{RM} 2\pi R$$

Es decir,

$$M \leq |a_0|$$

O sea que $|a_0|$ es mayor que cualquier número real positivo M, pues este es arbitrario. Es claro que esto es absurdo. □

Definición 6.9

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$R(z_0, a, b) = \{z_0 + sa + tbi : s, t \in [0, 1]\}$$

Es un rectángulo con vértices en z_0, $z_0 + a$, $z_0 + bi$ y $z_0 + (a + bi)$. Además,

$$\text{Diam}(R) = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{Long}(\partial R) = 2(a + b)$$

A partir de ahora, para ahorrarnos cosas como parametrizar curvas, se van a adjuntar algunos dibujos para dar a entender qué es lo que se está haciendo. La razón de esto es que no vamos a considerar curvas particularmente difíciles de parametrizar, y ni siquiera nos es útil saber bien cómo se hace.

Proposición 6.2 (Cauchy-Goursat en rectángulos)

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $R \subseteq D$ es un rectángulo, entonces

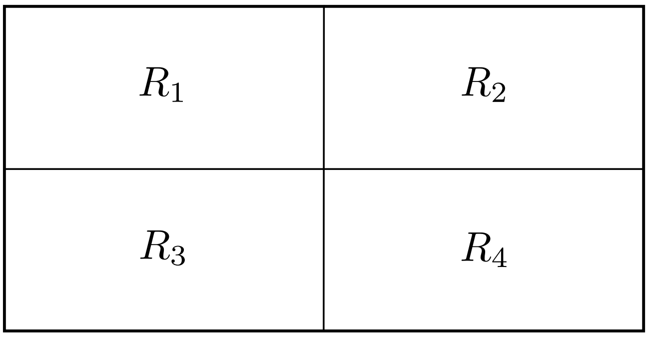
$$\int\limits_{\partial R} f = 0$$

Demostración.

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D y $R \subseteq D$ un rectángulo. Sea α el número real tal que

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right|$$

Es claro que $\alpha \geq 0$. Consideremos R partido en 4 rectángulos (R_1, R_2, R_3 y R_4) de la siguiente forma (esto es meramente ilustrativo, puede realizarse cualquier partición que resulte conveniente):



Luego,

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\partial R_i} f \right|$$

Por esto, necesariamente existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R_i} f \right| \geq \frac{\alpha}{4}$$

Si repetimos este proceso, podemos conseguir un conjunto de rectángulos $R^{(0)}$, $R^{(1)}, \ldots, R^{(n)}$, $\ldots$ (con $R^{(0)} = R$, $R^{(1)} = R_i$) tales que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$R^{(k+1)} \subseteq R^{(k)}, \quad \left| \int_{\partial R^{(k)}} f \right| \geq \frac{\alpha}{4^k}, \quad \mathrm{Diam}(R^{(k)}) = \frac{\mathrm{Diam}(R)}{2^k}, \quad \mathrm{Long}(\partial R^{(k)}) = \frac{\mathrm{Long}(\partial R)}{2^k}$$

Entonces, tenemos un conjunto de cerrados encajados con un diámetro que tiende a 0. Por ende, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\{w\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R^{(k)}$$

Sea $N : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$N(w, z) = f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$$

Como f es derivable en w, dado $\varepsilon > 0$, hay $\delta > 0$ tal que

$$|N(w, z)| < \varepsilon |w - z|$$

Si $|w - z| < \delta$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Diam}(R^{(m)}) < \delta$, m seguro existe pues la sucesión de los diámetros de los $R^{(k)}$ tiende a 0 si k tiende a infinito. Notar que

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + N(w, z)$$

Y $f(w)+f'(w)(z-w)$ es una función holomorfa con derivada continua (es una función afín), así que su integral sobre una curva de Jordan es nula. Luego,

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \left| \int_{\partial R^{(m)}} f \right| = \left| \int_{\partial R^{(m)}} f(w)+f'(w)(w-z)+N(w,z) \right| \leq \underbrace{\left| \int_{\partial R^{(m)}} f(w)+f'(w)(w-z) + \right|}_{0} + \left| \int_{\partial R^{(m)}} N(w,z) \right|$$

Así que

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \left| \int_{\partial R^{(m)}} N(w,z) \right| \leq \int_{\partial R^{(m)}} |N(w,z)| \leq \varepsilon|z-w| \int_{\partial R^{(m)}} |dz|$$

Esta última cota superior es verdadera pues si $\text{Diam}(R^{(m)}) < \delta$, como $w \in R^{(m)}$, seguro que $|z-w| < \delta$ para cada $z \in R^{(m)}$. Sabiendo eso, puedo acotar $|N(w,z)|$ gracias a la antes mencionada derivabilidad de f en w. Notar también que $|z-w| \leq \text{Diam}(R^{(m)})$. Entonces,

$$\frac{\alpha}{4^m} \leq \varepsilon|z-w| \int_{\partial R^{(m)}} |dz| \leq \varepsilon \text{Diam}(R^{(m)}) \text{Long}(\partial R^{(m)}) = \varepsilon \frac{\text{Diam}(R)\text{Long}(\partial R)}{2^m 2^m}$$

Es decir,

$$\alpha \leq \varepsilon \text{Diam}(R)\text{Long}(\partial R)$$

Como α es menor o igual a cualquier número positivo ($\varepsilon\text{Diam}(R)\text{Long}(R)$ es un número positivo arbitrariamente cercano a 0 pues el diámetro y la longitud de R y su borde, respectivamente, son constantes), entonces

$$\alpha = \left| \int_{\partial R} f \right| = 0$$

Luego,

$$\int_{\partial R} f = 0 \quad \square$$

Corolario

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $R \subseteq D$ es un rectángulo, entonces

$$\int_{\partial R} f = 0$$

A continuación probamos un lema auxiliar para la siguiente demostración

Lema

Sea $u(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t)dt = u(x)$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos esta reescritura de u

$$u(x) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x)dt$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t)dt - u(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t) - u(x)dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u(x+t) - u(x)|dt$$

Por continuidad, hay $\delta > 0$ tal que, si $t \in [0, h]$, podemos acotar por ε el integrando.

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h u(x+t)dt - u(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u(x+t) - u(x)|dt < \frac{1}{h}\varepsilon \int_0^h dt = \varepsilon \quad \square$$

Proposición 6.3

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f es continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Son equivalentes:

1. Existe F holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$ tal que $F' = f$.
2. Si γ es una curva de Jordan (regular, cerrada y simple), entonces
$$\int_\gamma f = 0$$
3. Si $R \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ es un rectángulo, entonces
$$\int_{\partial R} f = 0$$

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$ (2.) Sea $F = U(x, y) + iV(x, y)$ holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$, por lo que $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ y $F' = f = u(x, y) + iv(x, y)$ con f continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Sea $\gamma \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ una curva de Jordan.

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy$$

Por un lado,

$$F' = U_x - iU_y = u + iv$$

$$U_x = u \quad U_y = -v$$

Así que $U(x, y)$ es un potencial del campo $(u(x, y), -v(x, y))$. También,

$$F' = V_y + iV_x = u + iv$$

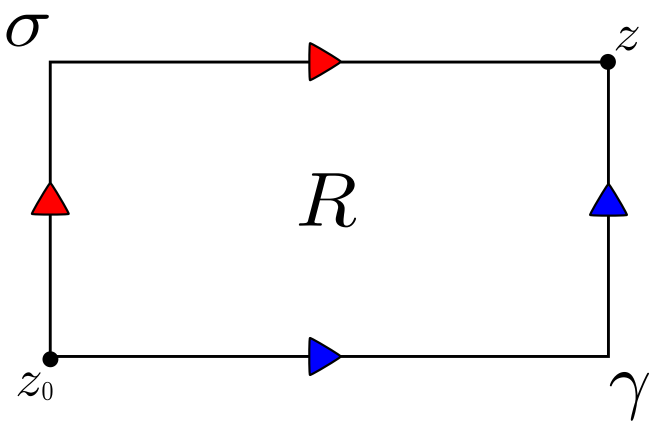
$$V_x = v \quad V_y = u$$

Entonces $V(x, y)$ es un potencial del campo $(v(x, y), u(x, y))$ Luego, $(u(x, y), -v(x, y))$ y $(v(x, y), u(x, y))$ son ambos campos conservativos. Por ende,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy = 0 + i0 = 0$$

(2.)$\longrightarrow$(3.) Es un caso particular.

(3.)$\longrightarrow$(1.) Sea f continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$ y $R \subseteq \mathcal{B}_r(z_0)$ un rectángulo. Consideremos las siguientes curvas γ y σ, donde cada una recorre cierta región de R desde $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo hasta un punto $z \in \mathbb{C}$ (no fijo)



Sea $F(z)$ dada por

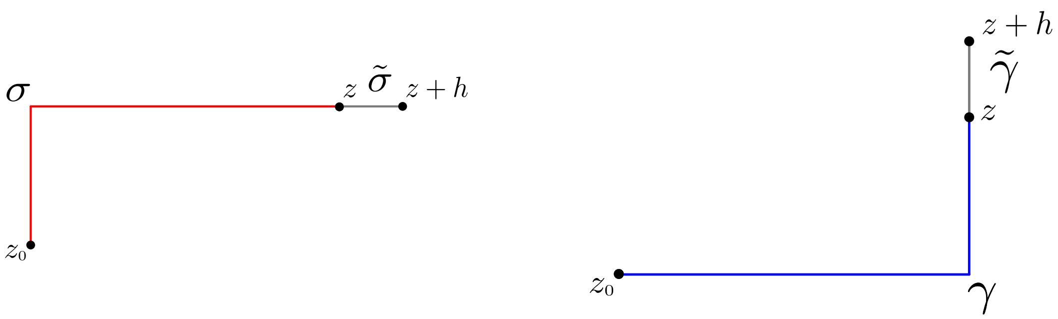
$$F(z) = \int_{\sigma} f = \int_{\gamma} f$$

Notemos que esta igualdad entre integrales vale porque, si cambiamos la orientación de alguna de las dos curvas, nuestra región de integración es todo ∂R, y la integral resulta nula.

Sea $h \in \mathbb{R}$, vamos a analizar los siguientes límites, con $z = x + iy$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F((x+h)+iy) - F(x+iy)}{h} \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(x+i(y+h)) - F(x+iy)}{h}$$

Y vamos a considerar las siguientes curvas $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\gamma}$:



$$\tilde{\sigma}(t) = z + t \quad \tilde{\gamma}(t) = z + it$$

Con $t \in [0, h]$. Notar que $\tilde{\sigma}'(t) = 1, \tilde{\gamma}'(t) = i$.

$$F(z+h) = F(z) + \int_{\tilde{\sigma}} f$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\sigma}} f = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} u(x+t, y) + iv(x+t, y) dt$$

Tomando $h \longrightarrow 0$, y de acuerdo al lema anterior,

$$F_x = U_x + iV_x = u + iv$$

Luego,

$$U_x = u, V_x = v$$

Procediendo de igual manera con el otro límite

$$\frac{F(z+ih)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\tilde{\gamma}} f = \frac{1}{h}\int_0^h [u(x,y+t)+iv(x,y+t)]idt = \frac{1}{h}\int_0^h -v(x,y+t)+iu(x,y+t)dt$$

Con $h \longrightarrow 0$,

$$F_y = U_y + iV_y = -v + iu$$

Así que,

$$U_y = -v, V_y = u$$

Y no es difícil notar que F satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, así que es holomorfa. $\square$

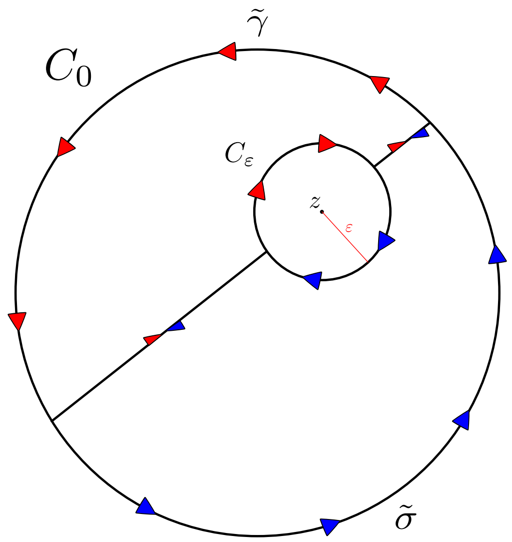
Teorema 6.1 (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Si $0 < \rho < r$ y $z \in \mathcal{B}_r(\rho)$, considerando la curva $C_0 : w(t) = z_0 + \rho e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y recorrida positivamente, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Demostración.

Sea $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$, $\varepsilon > 0$ y $C_\varepsilon : r(t) = z + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Consideremos las siguientes curvas $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$



Notemos que

$$\int_{\tilde{\gamma}} f + \int_{\tilde{\sigma}} f = \int_{C_0} f - \int_{C_\varepsilon} f \tag{1}$$

Ambas integrales de la izquierda son nulas, pues f es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Sea $g(t) : \mathcal{B}_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(z)}{t-z} \text{ si } t \neq z \\ f'(z) \text{ si } t = z \end{cases}$$

g es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)\backslash\{z\}$ y continua en $\mathcal{B}_r(z_0)$. Por el corolario de Cauchy-Goursat, su integral sobre un rectángulo va a ser nula, y por las equivalencias de la Proposición 6.3, como C_0 es una curva de Jordan, entonces

$$\int_{C_0} g = 0$$

$$\int_{C_0} g = \int_{C_0} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}dt = \int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z}dt - f(z)\int_{C_0} \frac{1}{t-z}dt = 0$$

Así que,

$$\int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z}dt = f(z)\int_{C_0} \frac{1}{t-z}dt$$

Veamos que $\int_{C_0} \frac{1}{t-z}dt = 2\pi i$. Como la función del integrando es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0)\backslash\{z\}$, su integral sobre una curva cerrada contenida ahí va a ser nula. En particular, vale la igualdad de (1.) y los dos sumandos de la izquierda son 0. Entonces,

$$0 = \int_{C_0} \frac{1}{t-z}dt - \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{t-z}dt$$

Nos basta con que la integral sobre C_ε sea igual a $2\pi i$.

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{t-z}dt = \int_0^{2\pi} \frac{r'(t)}{r(t)-z}dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}dt} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Luego,

$$f(z)\int_{C_0} \frac{1}{t-z}dt = \int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z}dt$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \square$$

Observación 6.2

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $C_r : w(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y f holomorfa en un abierto D que contiene a $\mathcal{B}_r(z_0)$. Entonces,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

Este es el *teorema del valor medio* (uno más de tantos). Lo que nos dice es que el valor de una función holomorfa f en z_0 es tomar el promedio alrededor de algún círculo de radio $r > 0$ centrado en z_0.

Lo siguiente es un lema que nos va a ser de utilidad para la próxima demostración.

Lema

Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Existe $\delta \in (0, 1)$ tal que, si $\zeta \in \mathcal{B}_\delta(0) \subseteq \mathbb{C}$, entonces

$$\left|\frac{1}{(1-\zeta)^n} - 1 - n\zeta\right| < \varepsilon|\zeta|$$

Esto no es otra cosa que la diferenciación en $\zeta = 0$ de la función $\frac{1}{(1-\zeta)^n}$.

Proposición 6.4

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $f_n(z)$ dada por

$$f_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

Donde, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$, C_0 parametriza la frontera de $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ y además ϕ es continua en C_0.

Entonces, f_n es holomorfa en $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ y $f_n' = f_{n+1}$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, quiero hallar $\delta' > 0$ tal que, si $|h| < \delta'$, entonces

$$|f_n(z+h) - f_n(z) - f_{n+1}(z)h| < \varepsilon |h|$$

Para cada $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$. De verificarse esto, entonces $f_n' = f_{n+1}$.

$$f_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

$$f_n(z+h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z-h)^{n+1}}\, dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}(1-\frac{h}{w-z})^{n+1}}\, dw$$

$$f_{n+1}(z)h = h\frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \frac{(n+1)h}{w-z}\, dw$$

Luego,

$$|f_n(z+h) - f_n(z) - f_{n+1}(z)h| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \left| \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{h}{w-z}\right)^{n+1}} - 1 - \frac{(n+1)h}{w-z} \right] dw \right|$$

Sea $\zeta = \frac{h}{w-z}$, notemos que

$$|w-z| = |w - z_o + z_0 - z| = |(w-z_0) - (z-z_0)| \geq |w-z_0| - |z-z_0| = \rho - |z-z_0|$$

Entonces,

$$|\zeta| = \frac{|h|}{|w-z|} \leq \frac{|h|}{\rho - |z-z_0|} < 1 \text{ tomando } |h| < \rho - |z-z_0|$$

Por el lema anterior, sabemos que hay $\delta > 0$ tal que se satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{1}{(1-\zeta)^{n+1}} - 1 - (n+1)\zeta \right| < \varepsilon|\zeta| \leq \varepsilon \frac{|h|}{\rho - |z-z_0|} < \varepsilon$$

Si $|\zeta| < \delta$. En consecuencia, esto nos pide también que $|h| < \delta(\rho - |z-z_0|) = \delta'$ De esta manera, acotamos uno de los dos factores del integrando. Por otro lado,

$$\left| \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \right| \leq \frac{\max_{w \in C_0} |\phi(w)|}{(\rho - |z-z_0|)^{n+1}}$$

Y ese máximo existe pues ϕ es continua y C_0 es compacto. Agrupando todo, tenemos que

$$\left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \left| \int_{C_0} \frac{\phi(w)}{(w-z)^{n+1}} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{h}{w-z}\right)^{n+1}} - 1 - \frac{(n+1)h}{w-z} \right] dw \right| \leq \varepsilon \frac{n!}{2\pi} \frac{\max_{w \in C_0} |\phi(w)|}{(\rho - |z-z_0|)^{n+1}} \int_{C_0} |dw|$$

Todos los términos son constantes, salvo ε. □

Corolario

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D, entonces f es indefinidamente holomorfa. Es decir, es infinitamente derivable y todas sus derivadas son funciones holomorfas.

Corolario

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D, $z_0 \in D$ y $r > 0$ tal que $B = \mathcal{B}_r(z_0) \subseteq D$. Si γ es una curva recorrida positivamente cuya imagen es la frontera de dicha bola y $z \in B$, entonces, si $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Cauchy generalizada*.

Esto se deduce de la proposición anterior y de la fórmula integral de Cauchy. Tomando a $f(w)$ como $\phi(w)$, vamos a tener que $f_0(z) = f(z)$.

Ejemplo. Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Calcular

$$\int_\gamma \frac{z+1}{\cos(z)-1}\, dz$$

Solución. Queremos reescribir de alguna forma el integrando para poder usar la FIC o su forma generalizada. Recordando la serie de potencias del coseno, convergente en todo $\mathbb{C}$ y dada por

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Vemos entonces que

$$\int_\gamma \frac{z+1}{\cos(z)-1}\, dz = \int_\gamma \frac{z+1}{(1-\frac{z^2}{2!}+\ldots)-1}\, dz = \int_\gamma \frac{z+1}{z^2(-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\ldots)}\, dz = \int_\gamma \frac{z+1}{(-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\ldots)} \frac{1}{z^2}\, dz$$

Sea f la función dada por

$$f(z) = \frac{z+1}{(-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\ldots)}$$

Notemos que la expresión a integrar es igual a

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^2}\, dz$$

Nos gustaría entonces aplicar la fórmula de Cauchy generalizada. El punto $z_0 = 0$ está en el interior del área que encierra γ, que está recorrida en sentido positivo (antihorario). Además, f es holomorfa en una región que contiene a la imagen de dicha curva (observar que el denominador se anula cuando $\cos(z) = 1$ pero z es distinto de cero (reemplazando se ve con facilidad que el resultado es $-1/2$ en ese caso), para ello, $z = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, así que puedo tomar la bola de centro 0 y radio π y f es holomorfa ahí). Por FICG, es

$$\int_\gamma \frac{z+1}{\cos(z)-1}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i f'(0)$$

Escribiendo el denominador en forma de serie y derivando (recordar que podemos hacerlo término a término), se tiene que $f'(0) = -2$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{z+1}{\cos(z)-1}\, dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i$$

Teorema 6.2 (Teorema de Morera)

Sean $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $B = \mathcal{B}_r(z_0)$. Si $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que verifica que, para toda curva de Jordan γ contenida en B y con el área que encierra también ahí,

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Entonces f es holomorfa en B.

Demostración.

Para probar esto solo necesitamos basarnos en varias de las proposiciones ya probadas anteriormente. Si f satisface lo dicho en el enunciado, sabemos por la Proposición 6.3 que tiene una primitiva F holomorfa. Por otro lado, el primer corolario de la Proposición 6.4 nos dice que la holomorfía de una función se preserva por derivación. Luego, f es holomorfa. $\square$

A continuación, uno de los resultados más interesantes de la materia.

Teorema 6.3 (Teorema de Liouville)

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Entonces, f es constante.

Esto es una muestra de lo fuerte que es la fórmula integral de Cauchy.

Demostración.

Sea $R > 0$, $z \in \mathcal{B}_{R/2}(0)$ y $C_0 : w(t) = Re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Claramente $\frac{|z|}{R} < \frac{1}{2}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|w|=R} \left| \frac{f(w)}{|w-z|^2} \right| \left| \int_{C_0} |dw| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\overbrace{\max_{w \in \mathbb{C}} |f(w)|}^{M}}{|R-z|^2} 2\pi R \leq \frac{M}{(|R|-|z|)^2} R \leq \frac{M}{R^2\left(1-\frac{|z|}{R}\right)^2} R \leq \frac{M}{R\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4M}{R}$$

Como R es arbitrario y M es una constante, $|f'(z)|$ es arbitrariamente cercano a 0. Luego,

$$f'(z) = 0$$

Por lo que f es constante, como se quería probar. $\square$

El teorema fundamental del álgebra también es corolario de este teorema. No veo necesario adjuntar esa demostración, que no es muy difícil, porque acá ya hicimos otra que, en mi opinión, es aun menos complicada.

Definición 6.10

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular cerrada. Para $z \in \mathbb{C} - \gamma([a, b])$, definimos el *índice* de γ en z como

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z}\, dw$$

Proposición 6.5

Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva regular y de Jordan, $I(\gamma, z)$ con $z \notin \gamma([a, b])$ es un número entero.

Demostración.

Para $s \in [a,b]$, definimos

$$J(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$$

Notar que $J(b) = I(\gamma,z)2\pi i$. Sea $\Theta(s)$ dada por

$$\Theta(s) = e^{-J(s)}(\gamma(s)-z)$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$J'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$$

Luego,

$$\Theta'(s) = -\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}e^{-J(s)}(\gamma(s)-z) + e^{-J(s)}\gamma'(s) = 0$$

Así que Θ es una función constante. En particular, $\Theta(a) = \Theta(b)$, es decir,

$$e^{-J(a)}(\gamma(a)-z) = e^{-J(b)}(\gamma(b)-z)$$

La curva γ es cerrada, por lo que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Además, $z \notin \gamma([a,b])$. Por ende, $(\gamma(a)-z) = (\gamma(b)-z) \neq 0$, entonces

$$e^{-J(a)} = e^{-J(b)}$$

$J(a) = 0$ y $J(b) = I(\gamma,z)2\pi i$, por lo que

$$e^{-I(\gamma,z)2\pi i} = 1$$

Así que $I(\gamma,z) \in \mathbb{Z}$ $\square$

Proposición 6.6

Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva regular y de Jordan, $I(\gamma,z)$ con $z \notin \gamma([a,b])$ es una función continua.

Demostración.

Sea $z \in \mathbb{C} - \gamma([a,b])$, $\delta = \min\limits_{t\in[a,b]} |\gamma(t)-z|$ y $h > 0$ con $|h| < \frac{\delta}{2}$. Sabemos entonces que $z+h \notin \gamma([a,b])$

$$|I(\gamma,z+h) - I(\gamma,z)| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{h}{(w-z-h)(w-z)}\right| dw$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{h}{(w-z-h)(w-z)}\right| dw \leq \max_{t\in[a,b]} \frac{|h|}{|\gamma(t)-z-h||\gamma(t)-z|}\int_\gamma |dw|$$

Notemos que, si $|h| < \frac{\delta}{2}$,

$$|\gamma(t)-z-h| \geq |\gamma(t)-z| - |h| > \frac{\delta}{2}$$

Luego,

$$\max_{t\in[a,b]} \frac{|h|}{|\gamma(t)-z-h||\gamma(t)-z|}\int_\gamma |dw| \leq \frac{2}{\delta^2}\text{Long}(\gamma)|h| \quad \square$$

Antes de ir con el siguiente teorema, tengamos a mano este lema.

Lema

Sean $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$ distintos. Entonces,

$$\frac{1}{\zeta - \xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\xi^k}{\zeta^{k+1}} = \frac{1}{\zeta - \xi} \left(\frac{\xi}{\zeta} \right)^{n+1}$$

Teorema 6.5

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tal que $\mathcal{B}_R(z_0) \subseteq D$ con f holomorfa en D, y en particular en z_0. Entonces, f es analítica en z_0.

Demostración.

Sea $C_r : w(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por la fórmula integral de Cauchy y su generalización, conocemos estas igualdades sobre $f(z)$ y $f^{(k)}(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)}\, dw$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{Cr} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}$$

Consideremos la sucesión de sumas parciales dada por

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Reemplazando $f^{(k)}(z_0)$, tenemos que

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z - z_0)^k}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{Cr} f(w) \sum_{k=0}^{n} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$

No hay problema para intercambiar suma e integral pues estamos sumando finitos términos. Luego,

$$f(z) - S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(w) \left[\frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right] dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^{n+1} dw$$

La última igualdad es cierta debido al lema enunciado anteriormente. Así que tenemos que

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^{n+1} dw$$

Notemos que

$$|w - z| = |(w - z_0) - (z - z_0)| \geq |w - z_0| - |z - z_0| = r - |z - z_0|$$

Por ende,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^{n+1} dw \leq \frac{1}{2\pi} \int_{Cr} \frac{\max\limits_{w \in C_r} |f(w)|}{r - |z - z_0|} \frac{|z - z_0|^{n+1}}{r^{n+1}}\, dw \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max\limits_{w \in C_r} |f(w)|}{r - |z - z_0|} \frac{|z - z_0|^{n+1}}{r^{n+1}} 2\pi r$$

Finalmente,

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \frac{\max\limits_{w \in C_r} |f(w)|}{r - |z - z_0|} \frac{|z - z_0|^{n+1}}{r^n}$$

Esta diferencia tiende a 0 para n grande, pues $\left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$ es menor a 1. $\square$

Proposición 6.7 (Principio de módulo máximo)

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y D abierto conexo. Si hay $z_0 \in D$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Demostración.

Sea $M = |f(z_0)|$, $A = \{z \in D : |f(z)| = M\}$, $B = \{z \in D : |f(z)| < M\}$. Notemos que estos dos conjuntos son disjuntos, que B es abierto y A no vacío. Si este último también fuera abierto, entonces B debería ser vacío pues D es conexo. ($D = A \sqcup B$)

Sea $z_1 \in A$, quiero ver que hay $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(z_1) \subseteq A$. Supongamos que esto no ocurre y sea $r > 0$, entonces hay $w \in \mathcal{B}_r(z_1) \subseteq D$ tal que $w \notin A$, o sea que $|f(w)| < M$. Sea $\rho = |w - z_1|$, entonces $w = z_1 + \rho e^{it_0}$ para algún $t_0 \in [0, 2\pi]$. Por el teorema de valor medio sabemos que

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 + \rho e^{it}) dt$$

Como $|f(w)| = |f(z_1 + \rho e^{it_0})| < M$, por continuidad, hay $\delta > 0$ tal que, si $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 2\pi] = I$, entonces

$$|f(z_1 + \rho e^{it})| < M$$

Sea $J = [0, 2\pi] - I$, entonces

$$|f(z_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_1 + \rho e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_I |f(z_1 + \rho e^{it})| dt + \int_J |f(z_1 + \rho e^{it})| dt \right) < \frac{1}{2\pi}(M|I| + M|J|) = \frac{1}{2\pi} M 2\pi = M$$

(El integrando sobre I se puede acotar estrictamente por M, y el otro por menor o igual a M, así que queda $<$)

Entonces, $|f(z_1)| < M$. Esto es absurdo pues z_1 pertenece a A. $\square$

Corolario

Si D es un abierto conexo y acotado y f es una función no constante, holomorfa en D y continua en $\overline{D}$, entonces el máximo de f se alcanza en $\partial \overline{D}$.

Proposición 6.8 (Principio de módulo mínimo)

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D abierto conexo y tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en D. Si existe $z_0 \in D$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Demostración.

Como f no se anula nunca y es holomorfa, entonces $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ es holomorfa en D y $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ para todo $z \in D$. Por la proposición anterior, g es constante y entonces f también. $\square$

Corolario

Sea D un abierto conexo y f una función no constante y holomorfa en D. Si f no se anula, entonces $|f|$ no alcanza un mínimo en D.

Proposición 6.9 (Teorema de la aplicación abierta)

Sea D abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(D)$ (el conjunto de funciones holomorfas en D). Si f no es constante, entonces $f(D)$ es un abierto.

Demostración.

Sea $w_0 \in f(D)$, entonces hay $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = w_0$. Sea $g(z) = f(z) - w_0$. g se anula en z_0 y es analítica. Entonces, hay $R > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para $z \in \mathcal{B}_R^*(z_0)$. Luego, $f(z) \neq w_0$ en $\mathcal{B}_R^*(z_0)$.

Sea $r > 0$ y menor a R, y $\varepsilon = \min\limits_{\substack{|z-z_0|=r \\ z \neq z_0}} |f(z) - w_0|$. Afirmo que $\mathcal{B}_{\varepsilon/2}(w_0) \subseteq f(D)$

Sea $w_1 \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}(w_0)$, entonces $|w_0 - w_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Notemos que, si $|z - z_0| = r$,

$$|f(z) - w_1| = |(f(z) - w_0) - (w_1 - w_0)| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w_1| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\tilde{\varepsilon} = \min\limits_{z \in \overline{\mathcal{B}_r(z_0)}} |f(z) - w_1|$. Por Weierstrass, hay $z_1 \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}(z_0)$ tal que $\tilde{\varepsilon} = |f(z_1) - w_1|$. Observemos que

$$\tilde{\varepsilon} = |f(z_1) - w_1| \leq |f(z_0) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(Este mínimo se alcanza en el interior porque vimos que $|f(z) - w_1| > \frac{\varepsilon}{2}$ si $|z - z_0| = r$).

Si $|f(z_1) - w_1| > 0$ entonces hay $r' > 0$ tal que $f(z) - w_1 \neq 0$ en $\mathcal{B}_{r'}(z_1)$, y esto implicaría que f es constante. Como no lo es, entonces $|f(z_1) - w_1| = 0$, es decir,

$$f(z_1) = w_1 \quad \square$$

Proposición 6.10

Sea f una función entera y no constante. Entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Demostración.

Supongamos que esto no ocurre, de manera que hay $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{B}_r(z_0) \cap \mathbb{C} = \emptyset$, o sea que $|f(z) - z_0| > r$ para todo z complejo. Luego, la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - z_0}$ es entera y está acotada en módulo por $\frac{1}{r}$. Por Liouville, g es constante y entonces f también, y esto es absurdo pues se supuso lo contrario. $\square$

Proposición 6.11 (Principio de identidad)

Sea D un abierto conexo y $f, g \in \mathcal{H}(D)$ tales que el conjunto

$$Ec(f, g) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$$

Tiene un punto de acumulación en D. Entonces, $f = g$ en D.

Demostración.

Sean $f, g \in \mathcal{H}(D)$ y consideremos el punto de acumulación $z_0 \in D$ de $\mathrm{Ec}(f, g)$, que es igual al conjunto de ceros de la función $f - g$. Como este elemento es un punto de acumulación, todo entorno alrededor de él tiene algún otro elemento de $\mathrm{Ec}(f, g)$, o sea, otro cero. Sabemos que todos los puntos donde una función analítica se anula son aislados; como este no es el caso, debe ser que $f = g$ en D. $\square$

Proposición 6.12 (Lema de Schwarz)

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ en el disco unitario y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si $|f'(0)| = 1$ o si hay $z_0 \in \mathcal{B}_1^*(0)$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $\lambda : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que satisface que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración.

Podemos factorizar el cero de orden $m \geq 1$ de f así:

$$f(z) = zg(z)$$

Donde g es una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Sea $r \in (0,1)$, entonces

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = r \max_{|z|=r} |g(z)|$$

Luego, $r^{-1} \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)|$. Dado que $|f(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$, se deduce

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq r^{-1}$$

Por principio de módulo máximo, como $\max_{|z|=r} |g(z)| \leq r^{-1}$, entonces, para todo $z \in \mathcal{B}_r(0)$, es

$$|g(z)| \leq r^{-1}$$

Tomando $r \longrightarrow 1^-$, se tiene que

$$|g(z)| \leq 1$$

en $\mathbb{D}$, y esto, de nuevo, implica que $|f(z)| \leq |z|$. Resulta sencillo ver que $|f'(0)| \leq 1$, pues

$$|f'(z)| = |g(z) + zg'(z)|$$

Evaluando en $z = 0$

$$|f'(0)| = |g(0)|$$

Y la desigualdad se verifica porque $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Supongamos que hay $z_0 \in \mathbb{D}$ no nulo tal que $|f(z_0)| = |z_0 g(z_0)| = |z_0|$. Entonces, $|g(z_0)| = 1$, por lo que g alcanza un máximo interior en $\mathcal{B}_1^*(0)$, región en donde es holomorfa, por principio de módulo máximo, g es una función constante y como $|g(z_0)| = 1$, es, para todo $z \in \mathbb{D}$, $g(z) = \lambda$ para algún λ complejo con $|\lambda| = 1$. Luego, $f(z) = \lambda z$.

Ahora, supongamos que $|f'(0)| = 1$. De lo probado anteriormente ($|f'(0)| = |g(0)|$), se deduce que $|g(0)| = 1$ y otra vez g alcanza un máximo interior en $\mathbb{D}$, por ende, g es constante y, como antes, se llega a la igualdad que se quería probar. □

6.2. Integración sobre curvas continuas

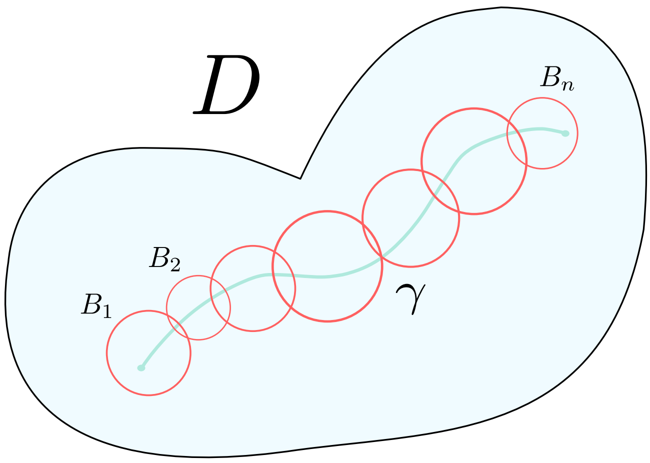
Este apartado no va a introducir definiciones nuevas ni nada por el estilo, solo busca hablar un poco de cómo podemos generalizar algunos resultados a curvas solamente continuas. Consideremos primero la siguiente observación

Observación

Sea D un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(D)$. Si $z_0 \in D$ y r un número real positivo son tales que $\mathcal{B}_r(z_0) \subseteq D$, entonces existe $F : \mathcal{B}_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ primitiva holomorfa de f (o sea que cumple que $F' = f$).

La justificación tiene que ver con que las bolas son conjuntos simplemente conexos y ahí toda función holomorfa tiene primitiva. Esto será probado más adelante, pero, por más que sea confuso introducir una observación sobre algo que no probamos, va a ser útil saberlo de entrada.

Consideremos $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ una curva continua. Sabemos entonces que su imagen, $\gamma([a,b])$, que vamos a bautizar como K, es un compacto (es la imagen de un compacto por una función continua). Entonces, dado un cubrimiento $\{B_i\}_{i\in I}$ de K conformado por bolas contenidas en D, por compacidad, existe un subcubrimiento finito $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subseteq D$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$, existe $F_k \in \mathcal{H}(B_k)$ primitiva de f en B_k.



Si consideramos ε el número de Lebesgue del cubrimiento $\mathfrak{B}$, sabemos que, dados $z, w \in K$ tales que $|z - w| < \varepsilon$, hay $k \in \{1,\ldots,n\}$ que satisface que $z, w \in B_k$. Debido a que γ es uniformemente continua (continua definida en un compacto), para cualquier par de elementos $t, t' \in [a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$, entonces $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \varepsilon$

Consideremos ahora una partición $\{t_0, \ldots, t_m\} \subseteq [a,b]$ con $t_0 = a$ y $t_m = b$ lo suficientemente fina como para que, dado cualquier $j \in \{1,\ldots,m\}$, valga que $|t_{j-1} - t_j| < \delta$. De esta manera, sus imágenes van a distar a menos de ε y, más aún, esto va a ser cierto para todo punto intermedio $t \in [t_{j-1}, t_j]$, entonces se va a tener que existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq B_k$.

Procediendo de esta manera, podemos partir la curva en tramos en los que la primitiva es la misma en todo el intervalo, y esto incentiva la siguiente definición:

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{m} F_{k,j}(\gamma(t_j)) - F_{k,j}(\gamma(t_{j-1}))$$

Donde $F_{k,j}$ es la primitiva en la bola a la que pertencen simultáneamente $\gamma(t_j)$ y $\gamma(t_{j-1})$.

Hilando bastante más fino (Recomiendo revisar todo esto en el apunte de Tico), se puede comprobar la buena definición de esta integral.

7. Homotopías

Esta parte de la teoría la vimos justo antes del primer parcial y entonces quedaron cosas sin demostrar (es el típico tema que ves justo antes y no entra). Voy a enunciar todas las proposiciones importantes porque de hecho hay algunas muy útiles.

Definición 7.0

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$ continuas con D un abierto conexo. Decimos que γ_0 y γ_1 son homotópicas si existe una función $H : [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow D$ continua tal que $H(0, t) = \gamma_0(t)$ y $H(1, t) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [a, b]$. De cumplir esto, H recibe el nombre de homotopía.

Esto básicamente significa que puedo deformar continuamente una de las curvas hasta çonvertirla.[en] la otra.

Ejemplo. Sea $D = \mathcal{B}_2(0)$. Decidir si $\gamma_0(t) = e^{it}$ y $\gamma_1(t) = 0$, definidas ambas para $t \in [a, b]$, son homotópicas.

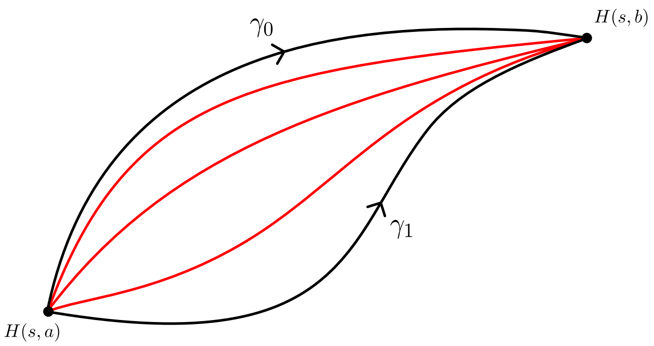
Solución. Intuitivamente, uno piensa en reducir el radio del círculo hasta convertirlo en un punto. Esta idea va a funcionar porque haciendo esto nunca salimos de nuestro dominio. La homotopía de γ_0 a γ_1 es $H(s, t) = (1 - s)e^{it}$. Claramente es continua y verifica que $H(0, t) = \gamma_0(t) = e^{it}$ y $H(1, t) = \gamma_1(t) = 0$.

Observación 7.0

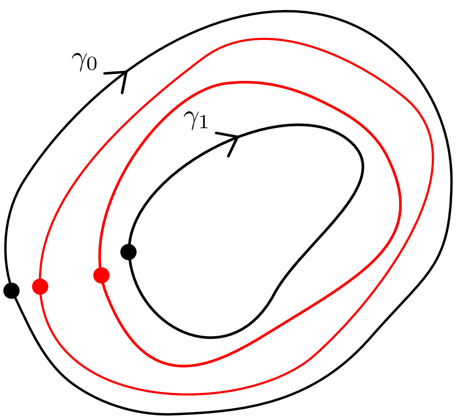
"Ser homotópica a" es una relación de equivalencia.

Algunos casos particulares de homotopías ilustrados

1. Extremos fijos: $H(s, a)$ es constante y $H(s, b)$ también.



2. Curvas cerradas: para cada s fijo, $H(s, t)$ es una curva cerrada.



Proposición 7.0

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ continua con D abierto conexo. Existe $\delta > 0$ tal que toda curva continua $\sigma : [a, b] \longrightarrow D$ que verifica

$$\max_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - \sigma(t)| < \delta$$

es homotópica a γ.

Demostración. (Idea)

Lo que uno puede proponer, a grosso modo, es que δ sea la distancia de la imagen de la curva a $\mathbb{C}\backslash D$. De esta manera, cualquier curva σ cuya imagen esté completamente contenida en esa δ-vecindad va a ser homotópica vía la homotopía $H : [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow D$ dada por $H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\sigma(t)$. Esta es la homotopía que, dado un t_0 fijo, forma el segmento que une $\gamma(t_0)$ con $\sigma(t_0)$. Notar que

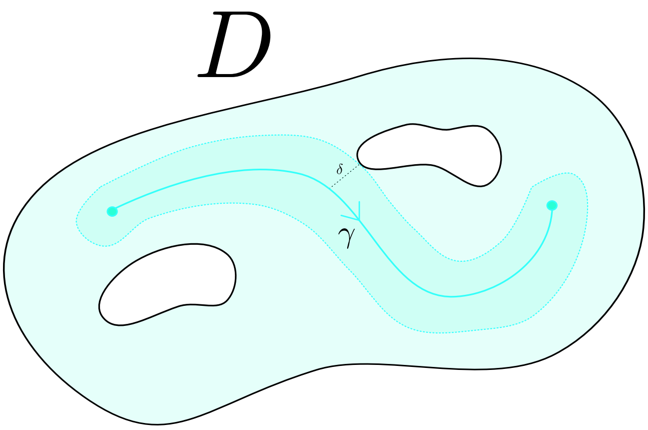
$$H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\sigma(t) = \gamma(t) - s\gamma(t) + s\sigma(t)$$

Entonces,

$$H(s, t) - \gamma(t) = s(-\gamma(t) + \sigma(t))$$

$$|H(s, t) - \gamma(t)| = |s(-\gamma(t) + \sigma(t))| < s \max_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - \sigma(t)| < s\delta < \delta$$

Con esto terminamos de comprobar que H está bien definida: es continua, satisface que $H(0, t) = \gamma(t)$ y $H(1, t) = \sigma(t)$; y su imagen está siempre dentro de D (más aún, está en la δ-vecindad de γ). $\square$



Proposición 7.1

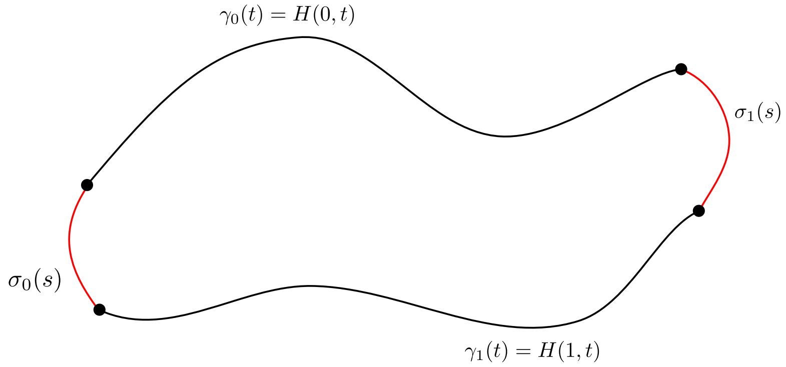
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f \in \mathcal{H}(D)$ y D abierto conexo, sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$ dos curvas continuas homotópicas con $H : [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow D$ la homotopía entre ellas, si consideramos

$$\gamma_0(t) = H(0, t) \qquad \gamma_1(t) = H(1, t) \qquad \sigma_0(s) = H(s, a) \qquad \sigma_1(s) = H(s, b)$$

entonces,

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f = \int_{\sigma_1} f - \int_{\sigma_0} f$$

Estas son las curvas de las que estamos hablando



Esta proposición es realmente muy importante, pero no la probamos, lo cual es gracioso. Entiendo que quedó flotando entre clase y parcial y después de este empezamos con otro tema. En el apunte de Tico está. □

Corolario

Si γ_0, γ_1 son dos curvas homotópicas con extremos fijos (tienen los mismos extremos y existe H una homotopía entre ellas tal que $H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ y $H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ para todo $s \in [0,1]$), entonces,

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Corolario

Si γ_0,γ_1 son dos curvas cerradas homotópicas vía curvas cerradas (existe H una homotopía entre ellas tal que $H(s,a) = H(s,b)$ para todo $s \in [0,1]$. O sea, toda curva intermedia es también cerrada), entonces,

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Definición 7.1

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$. D se dice *simplemente conexo* si toda curva cerrada γ con imagen en D es homotópica vía curvas cerradas a una curva constante.

Teorema 7.0 (Teorema de Cauchy generalizado)

Sea D un abierto simplemente conexo y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f \in \mathcal{H}(D)$, si $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ es una curva continua y cerrada, entonces,

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Demostración.

Como D es simplemente conexo, toda curva cerrada es homotópica a una curva constante $k \in D$ vía curvas cerradas. De acuerdo al corolario anterior, ambas integrales van a coincidir. Como la integral sobre una curva constante es claramente nula,

$$\int_{\gamma} f = \int_{k} f = 0 \quad \square$$

Corolario

Sea D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(D)$. Existe $F \in \mathcal{H}(D)$ primitiva de f.

Se deduce del teorema anterior y de la Proposición 6.3 ((2.) implica (1.)).

8. Series de Laurent, singularidades y residuos

8.1. Anillos en $\mathbb{C}$ y series de Laurent

Definición 8.1.0

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r, R \in \mathbb{R}$ (aunque también podemos considerar $R = \infty$) tales que $0 \leq r < R$. Definimos

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

Geométricamente, $A_{r,R}(z_0)$ es un anillo alrededor de z_0, y no sé si hay un nombre estandarizado para también hacer mención a sus “radios”.

Algunos casos especiales son:

- Si $r = 0$, $A_{r,R}(z_0) = \mathcal{B}^*_R(z_0)$
- Si $R = \infty$, $A_{r,R}(z_0) = \mathbb{C} \backslash \mathcal{B}_r[z_0]$
- Si $r = 0$ y $R = \infty$, $A_{r,R}(z_0) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$

Si consideramos una función g holomorfa en $\mathcal{B}_R(0)$ y una h holomorfa en $\mathcal{B}_{1/r}(0)$ donde $r < R$. Definamos una función f de la siguiente manera

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

Notemos que, si $|z - z_0| < R$, entonces $g(z - z_0)$ es holomorfa. Por otro lado, si $|z - z_0| > r$, es $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r}$, así que $h\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ es holomorfa.

Esto implica que f es holomorfa cuando ambas lo son simultáneamente, es decir, en $A_{r,R}(z_0)$. Si consideramos la expansión en serie de potencias de g y h

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Para $|z - z_0| < R$ y $|z - z_0| < \frac{1}{r}$, respectivamente. Entonces, resulta estar bien definida si $r < |z - z_0| < R$ la expansión para f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{-n} (z - z_0)^n$$

Y podríamos considerar los “coeficientes” a_n de la expansión de f así

$$a_n = \begin{cases} b_n \text{ si } n \geq 0 \\ c_n \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

Nos gustaría poder decir que toda función holomorfa en un anillo admite un desarrollo de este estilo, o también con finitos coeficientes de índice negativo.

Teorema 8.1.0 (Fórmula integral de Cauchy en anillos)

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, r y R números reales tales que $0 \leq r < R$ y $f \in \mathcal{H}(A_{r,R}(z_0))$. Para cada $z \in A_{r,R}(z_0)$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < r$, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Donde $C_r(z) = \partial \mathcal{B}_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}$

Demostración.

Sea $z \in \operatorname{int}(A_{r,R}(z_0))$, entonces hay $\rho > 0$ tal que $B_\rho(z) \subseteq A_{r,R}(z_0)$. Por la FIC sabemos que

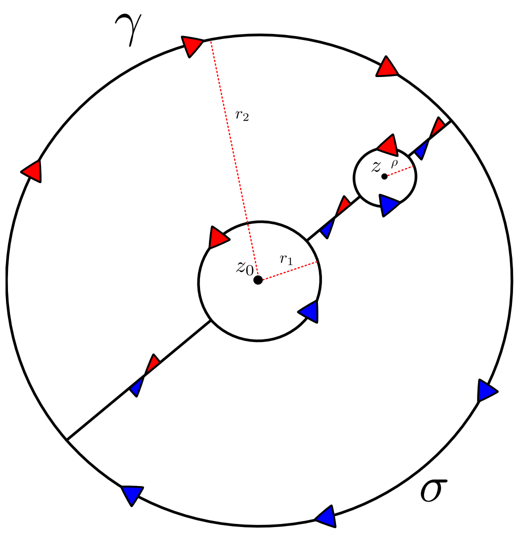
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Entonces nos alcanza con probar que la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Es cierta.

Consideremos las siguientes curvas γ y σ



La función $\dfrac{f(w)}{w - z}$ es holomorfa en $A_{r,R}(z_0) - \{z\}$. Además, γ y σ son cada una homotópicas vía curvas cerradas a alguna constante (no necesariamente a la misma). Luego,

$$\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int\limits_\sigma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 0$$

Entonces,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\sigma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw}_{f(z)\ \text{(FIC)}}$$

Es decir,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \square$$

Teorema 8.1.1

Sean r, ρ, R reales con $0 < r < \rho < R$, $z_0 \in \mathbb{C}$, f una función holomorfa en $A_{r,R}(z_0)$ y $S_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k (z-z_0)^k$ donde $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw$ con $C : w(t) = z_0 + \rho e^{it}$ siendo $r < \rho < R$ y $t \in [0, 2\pi]$ Entonces, si $K \subseteq A_{r,R}(z_0)$ es compacto, $S_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en K.

Demostración.

Sean $K \subseteq A_{r,R}$ compacto, $z \in K$, $r_1, r_2 \in (r, R)$ tales que $r_1 < \rho_1 = \min_{z \in K} \leq |z - z_0| \leq \rho_2 = \max_{z\in K} |z - z_0| < r_2$, para $j \in \{1, 2\}$, $C_j : w_j(t) = z_o + r_j e^{it}$ y finalmente $C : w(t) = z_0 + \rho e^{it}$ con $r < \rho < R$ y $t \in [0, 2\pi]$. Sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Nuestro objetivo va a ser conseguir una cota para la diferencia entre el primer término y $\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$ y otra para la correspondiente entre el segundo y $\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw\, (z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} f(w) \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} f(w) \left[\frac{1}{w-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \right] dw$$

La resta que está encerrada entre los corchetes, de acuerdo al lema que se encuentra inmediatamente después del Teorema 6.5, es igual a $\frac{1}{w-z} \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(w-z_0)^{n+1}}$.Luego,

$$I = \left| \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r_2 \max_{|w-z_0|=r_2} \left| \frac{f(w)}{w-z} \right| \max_{|w-z_0|=r_2} \frac{|z-z_0|^{n+1}}{|w-z_0|^{n+1}}$$

$$I \leq r_2 \frac{\overbrace{\max_{|w-z_0|=r_2} |f(w)|}^{M}}{r_2 - |z-z_0|} \frac{|z-z_0|^{n+1}}{r_2^{n+1}} \leq M \frac{r_2}{r_2 - \rho_2} \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^{n+1}$$

Y esa última cota tiende a 0 si n tiende a infinito. Ahora, procedemos de manera muy similar con el otro término

$$-\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-w}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} f(w) \sum_{k=-n}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw$$

Así que

$$-\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} f(w) \left[\frac{1}{z-w} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(w-z_0)^j}{(z-z_0)^{j+1}} \right] dw \overbrace{=}^{\text{Lema}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-w} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\, dw$$

Y desde ahí se puede acotar de, prácticamente, el mismo modo. $\square$

La representación $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ recibe el nombre de *serie de Laurent* (incluso si hay solo finitos coeficientes no nulos de índice negativo). La serie con los coeficientes de índice positivo recibe el nombre de *parte holomorfa*, y la otra el de *parte principal*.

Ejemplo. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z-z^2}$ en $A_{1,2}(2)$.

Solución. En primer lugar, dicho desarrollo existe pues f es holomorfa en ese anillo (los puntos de no holomorfía están en la frontera). Sabiendo que

$$\frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

Podemos hallar el desarrollo de cada término

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{z-2}{2}\right)\right)}$$

Como $|z-2| < 2$, claramente se tiene que $\dfrac{|z-2|}{2} < 1$. Entonces la serie geométrica resulta convergente. Luego,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{(z-2)+1} = -\frac{1}{(z-2)\left(1+\frac{1}{z-2}\right)}$$

Dado que $1 < |z-2|$, claramente $\dfrac{1}{|z-2|} < 1$. Por geométrica, otra vez,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n$$

Finalmente,

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n$$

Para todo $z \in A_{1,2}(2)$.

Observación 8.1.0

Una serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en un anillo $A_{r,R}(z_0)$ donde

$$r = \limsup_{n\to-\infty} \sqrt[|n|]{|a_n|} \qquad R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Entonces, si f es una función holomorfa en $A_{r,R}(z_0)$, su serie de Laurent va a converger en todo el anillo.

8.2. Singularidades

A continuación, una definición inventada, pero que creo que tiene sentido.

Definición 8.2.0

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $z_0 \in A$ y f una función holomorfa en $A - \{z_0\}$, si f no está definida en z_0, decimos que f tiene una *singularidad* en dicho punto.

Definición 8.2.1

Una singularidad z_0 de una función f definida en $A - \{z_0\} \subseteq \mathbb{C}$ se dice *aislada* si existe $r > 0$ tal que no hay otra singularidad de f en $\mathcal{B}_r^*(z_0) \cap A$.

Clasificación de singularidades aisladas

Definición 8.2.2

Sea f una función holomorfa en $\mathcal{B}_R^*(z_0) = A_{0,R}(z_0)$ y

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

su desarrollo en serie de Laurent centrado en z_0. Entonces,

- z_0 es una singularidad evitable sii $a_n = 0$ para todo $n < 0$ (entonces f solo tiene parte holomorfa, así que $f \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_R^*(z_0))$)
- z_0 es un polo de orden $m \in \mathbb{N}$ sii $a_{-m} \neq 0$ y $a_{-n} = 0$ para todo $n > m$ (o sea, a_{-m} es el último coeficiente de índice negativo que es no nulo)
- z_0 es una singularidad esencial si $a_n \neq 0$ para infinitos enteros negativos.

Es importante notar que toda singularidad es de *uno y solo uno* de estos tipos.

Ejemplo. Determinar qué tipo de singularidad tiene la función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en el punto $z_0 = 0$.

Solución. Es relativamente sencillo verificar esto, pues conocemos el desarrollo de la exponencial compleja en serie de potencias; este es

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

Luego, si $w = \dfrac{1}{z}$,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Es decir, hay infinitos coeficientes no nulos de índice negativo pues hay infinitas potencias negativas de z. Así que el punto $z_0 = 0$ es una singularidad *esencial*.

Proposición 8.2.0

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_R^*(z_0))$. Son equivalentes

1. z_0 es una singularidad evitable de f
2. Existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (o f está acotada en un entorno de z_0)

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$(2.): Como z_0 es singularidad evitable, f es holomorfa en $\mathcal{B}_R(z_0)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Luego,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0$$

(2.)$\longrightarrow$(1.): Sea $\rho < R$, n un entero negativo y $C : w(t) = z_0 + \rho e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|w-z_0|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} 2\pi\rho = \max_{|w-z_0|=\rho} |f(w)|\rho^{-n}$$

$-n$ es un número positivo y $\max\limits_{|w-z_0|=\rho} |f(w)|$ está acotado cuando ρ tiende a 0 debido a que el límite existe. Así que esa cota se hace arbitrariamente cercana a 0 si ρ se hace chico. □

Proposición 8.2.1

Sea f una función holomorfa en $\mathcal{B}_R^*(z_0)$ y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes

1. z_0 es un polo de orden m de f
2. $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe y es no nulo
3. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$(2.): Sea z_0 un polo de orden m de f, entonces,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Con $a_{-m} \neq 0$ y $a_{-n} = 0$ si $n > m$.

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m}$$

Así que

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} = a_{-m} \neq 0$$

(2.)$\longrightarrow$(3.): Probemos esto vía contrarrecíproco: Si (3.) no ocurre, quiere decir que existe un número $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se tiene que hay un elemento $z \in \mathcal{B}_\delta^*(z_0)$ para el cual $|f(z)| \leq M$. Tomamos para cada número natural n un radio $\delta_n = \frac{1}{n}$ y un valor z_n que satisface la condición previamente enunciada. Notar que z_n converge a z_0. Entonces,

$$0 \leq |z_n - z_0|^m |f(z_n)| \leq M|z_n - z_0|^m$$

Tomando límite con $n \to \infty$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0|^m |f(z_n)| \leq M \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0|^m = 0$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0|^m |f(z_n)| = 0$, por lo que hallamos una trayectoria para la cual ese límite es nulo. Entonces solo pueden ocurrir dos cosas: todos los límites de todas las subsucesiones coinciden con este y entonces el límite es nulo, que implica que (2.) es falso; o algún límite de alguna subsucesión es distinto a 0 en módulo y entonces el límite no existe, que concluye lo mismo que antes sobre (2.).

(3.)$\longrightarrow$(1.): De ser necesario, tomamos r un real tal que $0 < r < R$ y $f(z) \neq 0$ en $\mathcal{B}_r^*(z_0) = B^*$ (existe por (3.)). Luego, la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en B^*. Más aún, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. O sea que z_0 es una singularidad evitable de g, que entonces es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z_0) = B$. Por ende, existe un natural m y una función $h \in \mathcal{H}(B)$ tal que $h(z) \neq 0$ en B y $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$. Es decir,

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Y $\dfrac{1}{h(z)}$ es holomorfa en B pues h lo es y no se anula ahí; luego,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

El coeficiente a_0 se corresponde con $\dfrac{1}{h(z_0)}$ que es no nulo. Entonces f tiene a a_{-m} (es a_0 en el desarrollo de h) como último coeficiente no nulo de índice negativo, o sea, z_0 es un polo de orden m de f. □

Teorema 8.2.0 (Teorema de Casorati-Weierstrass)

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y f una función holomorfa en $\mathcal{B}_R^*(z_0)$. Son equivalentes

1. Para todo $\delta \in (0, R)$, es $f(\mathcal{B}_\delta^*(z_0))$ es un abierto denso en $\mathbb{C}$
2. z_0 es una singularidad esencial

Demostración.

(1.)⟶(2.): Sabemos que, dado cualquier $\delta \in (0, R)$, $f(\mathcal{B}_\delta^*(z_0))$ va a ser un conjunto denso en $\mathbb{C}$. Supongamos que no es cierto que z_0 es una singularidad esencial de f, entonces, ocurre necesariamente una de estas dos cosas:

$\lim\limits_{z\to z_0} f(w) = a \in \mathbb{C}$: de acuerdo con la definición de límite, existe un real $\delta_1 > 0$ tal que $f(\mathcal{B}_{\delta_1}^*(z_0)) \subseteq \mathcal{B}_1(a)$, entonces, la imagen no puede ser densa en los complejos pues está contenida en un conjunto que claramente no lo es.

$\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$: con el mismo argumento de antes, existe un real $\delta_2 > 0$ que satisface que $f(\mathcal{B}_{\delta_2}^*(z_0)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Por el mismo motivo de antes, no es posible que la imagen sea densa. □

(Si δ_1 o δ_2 no son menores que R, tomo alguna bola de radio menor contenida en cada una de ellas y la contención enunciada sigue siendo cierta en ambos casos.)

(2.)⟶(1.): Sabemos que la imagen va a ser abierta pues $\mathcal{B}_\delta^*(z_0)$ es un abierto conexo y f es holomorfa ahí (Proposición 6.9), probemos que es densa vía contrarrecíproco: supongamos que no lo es, de manera que hay un número real $\delta' > 0$ tal que $f(\mathcal{B}_{\delta'}^*(z_0))$ no es denso en $\mathbb{C}$, por lo que existe un complejo $w \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \mathcal{B}_{\delta'}^*(z_0) = B^*$. Luego, la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$ es holomorfa en B^*, además, notemos que

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z) - w}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Entonces g está acotada en un entorno de z_0. De acuerdo a la Proposición 8.2.0 podemos concluir que z_0 es una singularidad evitable de g que resulta ser holomorfa en $\mathcal{B}_{\delta'}(z_0) = B$. Si $g(z_0) = 0$, entonces hay una función $h \in \mathcal{H}(B)$ tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in B$ y además $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$. Así que

$$f(z) - w = \frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{h(z)}$$

Y entonces z_0 es un polo de orden m. Si $g(z_0) \neq 0$, tenemos que

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

Por lo que z_0 es una singularidad evitable. Luego, no puede ser esencial. □

Singularidades en ∞

Definición 8.2.3

Si f es una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún R real positivo, decimos que f tiene una singularidad evitable/polo/singularidad esencial en infinito sii $z = 0$ es singularidad evitable/polo/singularidad esencial de $g(z) = f(1/z)$.

Esta definición tiene sentido porque si f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, entonces $g(z) = f(1/z)$ va a serlo en $\mathcal{B}^*_{1/R}(0)$.

Proposición 8.2.2

Sea f una función entera. Son equivalentes

1. f tiene una singularidad evitable en ∞.
2. f es constante.

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$ (2.): Sea f una función entera con una singularidad evitable en ∞, esto quiere decir que existe $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = z_0$. Sea $g(z) = f(z) - z_0$, claramente g es entera y $\lim\limits_{z \to \infty} g(z) = 0$. Por ende, existe $r > 0$ tal que $|g(z)| < 1$ si $|z| > r$. Entonces, $|g(z)|$ está acotada superiormente por 1 si $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Por otro lado, el subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ es compacto, así que existe $M = \max\limits_{|z| \leq r} ||g(z)$. Luego,

$$|g(z)| \leq \max\{1, M\}$$

Para todo z complejo. Por Liouville, g es constante. Es decir, hay $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = f(z) - z_0 = w_0$$

Como $\lim\limits_{z \to \infty} g(z) = 0$, es $w_0 = 0$. Entonces,

$$f(z) = z_0$$

Para todo número complejo z. $\square$

(2.)$\longrightarrow$(1.): Sea f una función constante, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z_0$ en $\mathbb{C}$. Luego,

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} z_0 = z_0 \quad \square$$

Proposición 8.2.3

Sea f una función entera. Son equivalentes

1. f tiene un polo de orden m en ∞.
2. f es un polinomio de grado m.

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$(2.): Sea f una función entera con un polo de orden m en ∞, consideremos su expansión en serie de potencias centrada en $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Entonces,

$$f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

Es el desarrollo en serie de Laurent centrado en $z = 0$ de la función $f(1/z)$. Como 0 es polo de orden m, entonces $a_m \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > m$. Por lo tanto,

$$f(1/z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^{-n}$$

Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^{n}$$

Como $a_m \neq 0$, f es un polinomio de grado m.

(2.)⟶(1.): Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$, y consideremos el polinomio de grado n determinado por esos coeficientes y evaluado en $1/z$

$$P(1/z) = a_n z^{-n} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0$$

$$P(1/z) = z^{-n}(a_n + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n) = \frac{1}{z^n} \underbrace{(a_n + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n)}_{Q(z)}$$

$Q(z)$ es una función holomorfa en un entorno de 0 y es $Q(0) \neq 0$. Luego, $z = 0$ es un polo de orden n de $P(1/z)$, por ende, ∞ es lo propio para $P(z)$. □

Observación 8.2.0

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \backslash S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ donde $S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ es el conjunto de todas sus singularidades. Si S es discreto (todas las singularidades son aisladas), entonces es finito.

$\hat{\mathbb{C}}$ es un conjunto compacto, si S fuera infinito, entonces debería tener un punto de acumulación s_0 en $\hat{\mathbb{C}}$ (o sea, en todo entorno de s_0 hay infinitos elementos de S). Esto no puede ocurrir pues S es discreto.

Proposición 8.2.4

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} :\longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Son equivalentes

1. Todas las singularidades de f son aisladas y las correspondientes a $z \neq \infty$ son polos, mientras que en infinito puede haber un polo o una singularidad evitable.
2. f es una función racional.

Demostración.

(1.)⟶(2.): Sea f que satisface (1.), consideremos $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ sus polos. Para $j \in \{1, \dots, n\}$, sea q_j el orden del polo z_j. Entonces, la función

$$h(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{q_j} f(z)$$

Es entera. Luego,

$$h(1/z) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - z_j\right)^{q_j} f(1/z) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - z z_j}{z}\right)^{q_j} f(1/z) = \frac{\prod_{j=0}^{n} (1 - z z_j)^{q_j}}{\prod_{j=0}^{n} z^{q_j}} f(1/z) = z^{-\sum_{j=0}^{n} q_j} \prod_{j=0}^{n} (1 - z z_j)^{q_j} f(1/z)$$

Sea $w_0 = \sum_{j=0}^{n} q_j$, entonces,

$$h(1/z) = z^{-w_0} \prod_{j=0}^{n} (1 - z z_j)^{q_j} f(1/z)$$

Como $f(1/z)$ tiene una singularidad evitable o un polo en $z = 0$, ocurre lo mismo con $h(1/z)$. En el primer caso, h es constante (Proposición 8.2.2); en el segundo, h es un polinomio (Proposición 8.2.3). Independientemente de ello, eso implica que f es una función racional.

(2.)⟶(1.): Sea $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con P, Q dos polinomios y $n = \mathrm{gr}(P)$, $m = \mathrm{gr}(Q)$. Sea $R_Q \subseteq \mathbb{C}$ el conjunto de las raíces de Q y $R_P \subseteq \mathbb{C}$ el de las de P. Si R_Q y R_P son disjuntos, entonces las singularidades de f son todas las raíces de Q. Las mismas son aisladas (ceros de Q, que es una función analítica) y son polos, porque

$$f(z) = \frac{1}{\prod_{w \in R_Q} (z - w)} P(z)$$

Con P entera y no nula en R_Q. El orden de cada polo $w \in R_Q$ es su multiplicidad como raíz de Q.

Si la intersección entre R_Q y R_P no es vacía, todos los elementos de $R_Q \backslash R_P$ son polos de f y el orden está dado por el mismo criterio de antes, mientras que los que son raíces de ambos son polos si y solo si su multiplicidad como raíz de Q es estrictamente mayor que su multiplicidad como raíz de P. En ese caso, si p es un elemento de $R_Q \cap R_P$ que satisface dicha condición, su orden como polo es $\mathrm{mult}(p, Q) - \mathrm{mult}(p, R)$. Por otro lado, no es difícil verificar que va a haber un polo en infinito si $n > m$, y una singularidad evitable en caso contrario (se procede de manera similar a cómo se hizo en la Proposición 8.2.3 para probar que la segunda afirmación implica la primera). □

8.3. Residuos

Consideremos una función $f \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_R^*(z_0))$ con una singularidad en z_0. Sabemos que puede desarrollarse vía serie de Laurent centrada en z_0, sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n (z - z_0)^n$$

dicho desarrollo. Sea γ una curva simple, cerrada y C^1 a trozos. Entonces,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, dz + \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z - z_0} \, dz + \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n (z - z_0)^n \, dz$$

La primera serie define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, por lo que su integral sobre γ es nula; ocurre lo mismo con la otra, pues tiene una primitiva holomorfa en todo $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$. Por lo que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = 2\pi i \, \mathrm{I}(\gamma, z_0) a_{-1}$$

Donde $\mathrm{I}(\gamma, z_0)$ es el índice de γ en z_0. Ese coeficiente que determina el valor de la integral recibe el nombre de *residuo*. Esto puede generalizarse si f tiene más de una singularidad.

Definición 8.3.0

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D, salvo quizás en un conjunto discreto de singularidades. Si $z_0 \in D$,definimos el *residuo* de f en z_0, denotado por $\mathrm{Res}(f, z_0)$ al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent centrada en z_0.

Observación 8.3.0

El residuo de una función f en un punto z_0 en el que es holomorfa (tiene una singularidad evitable) es 0.

Esto es fácil de verificar pues el desarrollo de f centrado en z_0 va a tener a todos sus coeficientes de índices negativos nulos, en particular, $a_{-1} = 0$.

Definición 8.3.1

Una función f se dice *meromorfa* en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si es holomorfa en dicho subconjunto excepto en un conjunto de puntos aislados, todos ellos polos.

Proposición 8.3.0

Sea f una función meromorfa, z_0 un polo de orden m de f y $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ Entonces,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z)$$

Tomar límite realmente no es necesario pues $(z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, entonces puede extenderse de manera holomorfa en dicho punto. De todas formas, vamos a dejarlo así.

Demostración.

Sea f meromorfa y z_0 un polo de orden m de f. Sabemos entonces que, en un entorno U de z_0, se tiene que, para $z \in U \backslash \{z_0\}$,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Sea $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, su desarrollo en serie de Laurent centrado en z_0 es

$$g(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

Esta función resulta holomorfa en, al menos, U. Por ende,

$$a_{n-m} = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} g^{(n)}(z)$$

Para hallar el residuo, necesitamos que $n - m = -1$, es decir, n debe ser igual a $m - 1$. Finalmente,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z) \quad \square$$

Definición 8.3.2

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con D dominio. Definimos el residuo de f en el infinito, denotado por $\operatorname{Res}(f, \infty)$, como

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right)$$

Se puede verificar que esta definición es consistente si integramos una función f holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$ sobre una curva γ simple, cerrada y C^1 a trozos cuyo interior es $|z| > R$, y haciendo un cambio de variable $z = \dfrac{1}{w}$.

Ejemplo. Calcular el residuo de $f(z) = z^5 \cos(1/z)$ en el infinito.

Solución. Sabemos que $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right)$. Luego,

$$-\frac{1}{z^2} f(1/z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{z^5} \cos(z) = -\frac{\cos(z)}{z^7}$$

$\cos(z)$ no se anula en 0, entonces tenemos un polo de orden 7 en $z = 0$. De acuerdo a la Proposición 8.3.0, tenemos que

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{\cos(z)}{z^7}, 0\right) = \frac{1}{6!} \lim_{z\to 0} \frac{d^6}{dz^6}\left[-\frac{z^7\cos(z)}{z^7}\right] = \lim_{z\to 0} -\frac{1}{6!}\frac{d^6}{dz^6}[\cos(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{6!}\cos(z) = \frac{1}{720}$$

Proposición 8.3.1

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$, si $S \subseteq \mathbb{C}$ es finito ($S = \{z_1, \ldots, z_m\}$) y f es holomorfa en $D \backslash S$, entonces exissten funciones $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $H : \mathbb{C}\backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tales que

$$f(z) = g(z) + H'(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{Res}(f, z_j)}{z - z_j}$$

Demostración.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Consideremos

$$g_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n \qquad h_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n (z - z_j)^n$$

Que son, respectivamente, la parte holomorfa y principal (salvo el término del residuo) del desarrollo de f centrado en z_j. g está definida en $\mathcal{B}_{r_j}(z_j)$ para algún $r_j > 0$, mientras que h lo está en $|z - z_j| > 0$ (O sea, $\mathbb{C}\backslash\{z_j\}$). Sabemos que, en $\mathcal{B}_{r_j}(z_j)$,

$$f(z) = g_j(z) + \frac{a_{-1}}{z - z_j} + h_j(z)$$

Sea $H_j : \mathbb{C}\backslash\{z_j\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{a_n}{n+1}(z - z_j)^{n+1}$$

Es $H_j' = h_j$. Defino $H : \mathbb{C}\backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$H(z) = \sum_{j=1}^{m} H_j(z)$$

Por otro lado, afirmo que la función

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{j=1}^{m} h_j(z) + \frac{\operatorname{Res}(f, z_j)}{z - z_j}\right)$$

Es holomorfa en D. Claramente es holomorfa al menos en $D\backslash S$ porque cada término lo es.

Dado $i \in \{1, \ldots, m\}$, si realizamos el desarrollo de g alrededor de z_i, la parte principal de f es, naturalmente, $h_i + \dfrac{\operatorname{Res}(f, z_i)}{z - z_i}$. Por otro lado, la parte principal de la suma es exactamente la misma (van a cancelarse); pues h_j y $\dfrac{\operatorname{Res}(f, z_j)}{z - z_j}$ son holomorfas en z_i para $i \neq j$ (y entonces solo tienen parte holomorfa). O sea, g no tiene parte principal en los desarrollos alrededor de cada z_j, es decir, es holomorfa en D. Finalmente,

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} h_j(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{Res}(f, z_j)}{z - z_j}$$

Como $H'(z) = \sum_{j=1}^{m} h_j(z)$, es

$$f(z) = g(z) + H'(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{Res}(f, z_j)}{z - z_j} \quad \square$$

Corolario

Si $S, D \subseteq \mathbb{C}$ con S finito y D un dominio; $f : D \backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma : [0,1] \longrightarrow D \backslash S$ es una curva cerrada y regular, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz + 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_i)\mathrm{I}(\gamma, z_i)$$

(g es la función holomorfa en D de la proposición anterior)

(Esto es cierto pues H' tiene primitiva holomorfa. Recordar que $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz$)

Teorema 8.3.0 (Teorema de los residuos)

Si S, D son subconjuntos de $\mathbb{C}$ con S finito y D abierto simplemente conexo; $f : D \backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma : [0,1] \longrightarrow D \backslash S$ es una curva cerrada y regular, es

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_i)\mathrm{I}(\gamma, z_i)$$

Si γ es una curva de Jordan recorrida en sentido antihorario y U es el área encerrada por esta, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j \in U} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

(En un abierto simplemente conexo, g va a tener una primitiva holomorfa y su integral sobre una curva cerrada y regular va a ser nula.)

Teorema 8.3.1

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $S \subseteq \mathbb{C}$ finito, $f \in \mathcal{H}(D \backslash S)$ y $\Omega \subseteq D$ un abierto tal que $\overline{\Omega} \subseteq D$. Si $\partial\Omega = \Gamma$ se puede parametrizar mediante varias curvas de Jordan $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ con $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow D \backslash S$ recorrida en sentido "positivo" respecto de Ω (o sea, de modo que al "pararme" sobre la curva tengo al conjunto Ω a mi izquierda). Entonces,

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j)\mathrm{I}(z_j)$$

Donde $I(z_j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{I}(\gamma_i, z_j)$. Notar que $\mathrm{I}(z_j) = 1$ si $z_j \in \Omega$ y 0 si no. O sea que

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \Omega} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Demostración.

Consideremos la función $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ que existe según la Proposición 8.3.1.

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} g(z)\,dz + 2\pi i \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} \mathrm{I}(\gamma_i, z_j)\operatorname{Res}(f, z_j) = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} g(z)\,dz + 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j) \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \mathrm{I}(\gamma_i, z_j)}_{\mathrm{I}(z_j)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} udx - vdy + i \int_{\gamma_i} vdx + udy + 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)\mathrm{I}(z_j)$$

La función g es holomorfa en D, por lo que $u, v \in C^\infty(D)$. Luego, como la suma de las γ_i es $\Gamma = \partial\Omega$, por Green:

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} udx - vdy + i \int_{\gamma_i} vdx + udy = \int_{\Omega} \underbrace{-v_x - u_y}_{0 \text{ (C-R)}}\,dxdy + i \int_{\Omega} \underbrace{u_x - v_y}_{0 \text{ (C-R)}}\,dxdy$$

Entonces,

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)\mathrm{I}(z_j) \quad \square$$

Definición 8.3.3

Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa salvo en S donde tiene polos, D simplemente conexo y $Z = \{z \in D \backslash S : f(z) = 0\} = \{z_1, \ldots, z_m\}$. Definimos $\phi : D - (S \cup Z) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa como

$$\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Y ϕ recibe el nombre de *derivada logarítmica* de f.

Proposición 8.3.2

Sea f una función meromorfa y $\phi = f'/f$. Entonces,

1. Si z_0 es un cero de orden m de f, z_0 es un polo simple de ϕ y es $\mathrm{Res}(\phi, z_0) = m$.
2. Si z_0 es un polo de orden m de f, z_0 es un polo simple de ϕ y es $\mathrm{Res}(\phi, z_0) = -m$.

Proposición 8.3.3

Sea f como en la Definición 8.3.3 y $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D - (S \cup Z)$ una curva cerrada y regular. Si, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ es el orden de z_j como cero de f y, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, es $\beta_k \in \mathbb{N}$ el orden de s_k como polo de f, entonces

$$\int_{\gamma} \phi(z)\,dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathrm{I}(\gamma, z_j) - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{I}(\gamma, s_k)$$

Si γ es una curva de Jordan recorrida positivamente y U es el área encerrada por esta, se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \left(\sum_{z_j \in U} \alpha_j - \sum_{s_k \in U} \beta_k \right)$$

Esto se demuestra vía teorema de los residuos y la proposición enunciada antes, que es un ejercicio de la guía.

Teorema 8.3.2 (Teorema de Rouché)

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f, g \in \mathcal{H}(D)$ y $\Omega \subseteq D$ un abierto acotado tal que

1. $\overline{\Omega} \subseteq D$
2. $\partial\Omega$ es unión de finitas curvas de Jordan
3. $|f(z)| > |g(z)|$ para $z \in \partial\Omega$

Entonces, el número de ceros de f y de $f + g$ coincide en Ω.

Demostración.

Definimos para $t : [0,1]$ la función $h(z) = f(z) + tg(z) \in \mathcal{H}(D)$. Luego,

$$|f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

Por lo tanto, es $f + tg \neq 0$ en $\partial\Omega$. Notar que

$$A = \{z \in \Omega : f(z) + tg(z) = 0\} = \{z \in \overline{\Omega} : f(z) + tg(z) = 0\} = B$$

Porque si hubiera $z \in B - A$, entonces z debería ser un elemento de $\overline{\Omega} - \Omega = \overline{\Omega} - \Omega^\circ = \partial\Omega$, y sabemos que esto no ocurre.

Además, A es finito pues, si no lo fuera, entonces B tampoco lo sería y como $\overline{\Omega}$ es un compacto ($\mathbb{C}$ tiene la propiedad de Heine-Borel), debería haber un punto de acumulación en dicho conjunto, lo cual no es posible pues los ceros de una función holomorfa son aisladas. Así que existe un natural n tal que $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Consideremos ahora una parametrización orientada positivamente de $\partial\Omega$ con finitas (m) curvas de Jordan $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow D$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $\eta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\, dz$$

Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\alpha_i \in \mathbb{N}$ el orden de z_i como cero de $f + tg$. De acuerdo a la proposición anterior, como $f + tg$ no tiene polos, es

$$\eta(t) = \sum_{z_i \in \Omega} \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

(O sea, para cada $t_0 \in [0,1]$, es $\eta(t_0)$ la suma de los órdenes de los ceros de $f + t_0 g$).

Sea $H(z,t) = \dfrac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}$ y $t_0 \in [0,1]$, veamos que η es continua en dicho punto.

$$|\eta(t) - \eta(t_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \max_{z \in \partial\Omega} |H(z,t) - H(z,t_0)| \mathrm{Long}(\gamma_j)$$

H es continua en ambas variables, entonces puedo hacer que ese máximo sea arbitrariamente cercano a 0 si t y t_0 distan poco uno del otro. Como η es una función continua que toma valores enteros, es entonces constante. Luego, $\eta(0) = \eta(1)$, como se quería probar. $\square$

9. Espacios de funciones complejas

9.1. Los espacios $C(D)$ y $\mathcal{H}(D)$

Definición 9.1.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio (no hace falta que lo sea, pero prácticamente siempre vamos a tratar con este tipo de conjuntos), definimos

$$C(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\} \quad \mathcal{H}(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\} \quad \mathcal{D}(D) = \{f' : f \in \mathcal{H}(D)\}$$

Notar que todos estos son espacios vectoriales y $\mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{H}(D)$. Además, si Ω es simplemente conexo, dichos conjuntos son iguales.

Definición 9.1.1

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(D)$ una sucesión de funciones. Decimos que f_n converge a $f \in C(D)$ si para cada $K \subseteq D$ compacto, se tiene que $f_n|_K$ converge uniformemente a $f|_K$.

Esta es la *convergencia uniforme sobre compactos*. Si bien no existe una norma $|| \ ||$ en $C(D)$ cuya convergencia sea equivalente a la definida anteriormente, sí hay una distancia $d : C(D) \times C(D) \longrightarrow [0, +\infty)$ para la cual dicha condición se satisface. Vamos a construirla.

Proposición 9.1.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo. Entonces D admite una *exhaución por compactos*, es decir, existe $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente ($K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$) de subconjuntos compactos de D tal que

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

Además, para todo $S \subseteq D$ compacto existe un natural n_0 para el cual $S \subseteq K_n$ si $n \geq n_0$.

Demostración.

Como $\mathbb{C}$ tiene la propiedad de Heine-Borel, un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Luego, claramente,

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{B}}_n(0)$$

Y esto es una *exhaución por compactos*. Si vemos a D como un subespacio métrico de $\mathbb{C}$, es $D \cap \overline{\mathcal{B}}_n(0)$ un compacto de D para cada natural n. Sea $k = \min\{n \in \mathbb{N} : D \cap \overline{\mathcal{B}}_n(0) \neq \emptyset\}$. Este mínimo existe, pues este conjunto es no vacío (suponiendo $D \neq \emptyset$). Luego, si $K_n = D \cap \overline{\mathcal{B}}_n(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que esta sucesión es creciente y, además,

$$D = \bigcup_{n\geq k} K_n$$

Por otro lado, si $S \subseteq D$ es compacto, entonces es acotado. Por ende, existe un número real $r > 0$ tal que $S \subseteq D \cap \overline{\mathcal{B}}_r(0)$. Sea m un número natural mayor que r, entonces, $S \subseteq D \cap \overline{\mathcal{B}}_m(0)$ $\square$

Definición 9.1.2

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una exhaución por compactos de K_n y $f, g \in C(D)$. Definimos la función $[\ ]_n : C(D) \times C(D) \longrightarrow [0, +\infty)$ como

$$[f]_n = \max_{z\in K_n} |f(z)|$$

Para cada natural n.

Notar que la "norma" heredada por esta función no es una norma, pues no es cierto que si $[f]_n = 0$ entonces $f = 0$ (La función podría ser no nula en algún compacto más grande). Las funciones que satisfacen todas las otras condiciones para ser norma pero no esta se llaman *seminormas*.

Proposición 9.1.1

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ una función tal que

1. $\varphi(0) = 0$
2. $\varphi(t) > 0$ si $t > 0$
3. φ es creciente y cóncava

Entonces, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

Demostración.

Como φ es cóncava, si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, para todo $t \in [0, 1]$,

$$(1 - t)\varphi(x) + t\varphi(y) \leq \varphi((1 - t)x + ty)$$

(O sea, el segmento que une los dos elementos de la imagen está siempre por debajo de la imagen del segmento que une los puntos)

Sean $s, t \in (0, +\infty)$ (si ambos son nulos, la desigualdad es claramente cierta).

$$s = \frac{t}{s+t}0 + \frac{s}{s+t}(s + t)$$

Sea $\lambda = \dfrac{s}{s+t} \in [0, 1]$, es $1 - \lambda = \dfrac{t}{s+t}$. Luego,

$$s = (1 - \lambda)0 + \lambda(s + t)$$

$$\varphi(s) = \varphi((1 - \lambda)0 + \lambda(s + t))$$

Por concavidad

$$\varphi(s) = \varphi((1 - \lambda)0 + \lambda(s + t)) \geq (1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(s + t) = \lambda\varphi(s + t)$$

$$\varphi(s) \geq \lambda\varphi(s + t)$$

Por el otro lado,

$$t = (1 - \lambda)(s + t) + 0\lambda$$

$$\varphi(t) = \varphi((1 - \lambda)(s + t) + 0\lambda)$$

De nuevo,

$$\varphi(t) = \varphi((1 - \lambda)(s + t) + 0\lambda) \geq (1 - \lambda)\varphi(s + t) + \lambda\varphi(0) = (1 - \lambda)\varphi(s + t)$$

$$\varphi(t) \geq (1-\lambda)\varphi(s+t)$$

Sumando ambas desigualdades, se tiene que

$$\varphi(s) + \varphi(t) \geq \varphi(s+t) \quad \square$$

Definición 9.1.3

Sea $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1)$ con $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$. Definimos $d : C(D) \times C(D) \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi([f-g]_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|}{1 + \max\limits_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|}$$

Proposición 9.1.2

La función d está bien definida y es una distancia.

La proposición anterior a esta es útil para probar la desigualdad triangular.

Proposición 9.1.3

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(D)$ una sucesión de funciones. Se verifica

1. f_n converge a f si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.
2. $(C(D), d)$ es un espacio métrico completo.

Demostración.

(1.): Supongamos que f_n converge a f en $C(D)$ (o sea, uniformemente sobre cada compacto). Sea $(K_n)_{n\geq 1}$ una exhaución por compactos de D, $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ para $t \geq 0$ y $\varepsilon > 0$. Hay un número natural n_0 tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$$

(Es la cola de una serie convergente). Dado que φ es continua en 0, existe un número positivo δ tal que

$$|\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sum\limits_{n=1}^{n_0} 2^{-n}}$$

si $|t| < \delta$.

Consideremos ahora al compacto K_{n_0}, dado que f_n converge uniformemente a f sobre compactos, existe otro número $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$[f_k - f]_{n_0} = \max_{z \in K_{n_0}} |f_k(z) - f(z)| < \delta$$

para todo $k \geq k_0$. Ahora, sea $k \geq k_0$,

$$d(f_k, f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi([f_k - f]_n) = \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}\varphi([f_k - f]_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \underbrace{\varphi([f_k - f]_n)}_{<1}$$

Como los compactos de la exhaución están encajados y φ es creciente, es, para todo $n \leq n_0$

$$\varphi([f_k - f]_n) \leq \varphi([f_k - f]_{n_0})$$

Acotando con eso la primera suma, tenemos que

$$d(f_k, f) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}\varphi([f_k - f]_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}$$

Dado que $[f_k - f]_{n_0} < \delta$, se satisface la condición relacionada a la continuidad de φ en 0, entonces

$$d(f_k, f) < \frac{\varepsilon}{2\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}} \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así que $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

Ahora, supongamos que $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y $K \subseteq D$ compacto, existe un natural n_0 tal que $K \subseteq K_{n_0}$, y otro j_0 tal que

$$d(f_j, f) < 2^{-n_0}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

para todo $j \geq j_0$. Como $d(f_j, f)$ es una serie de términos positivos, en particular, la desigualdad vale para el término correspondiente al compacto K_{n_0}, o sea,

$$2^{-n_0}\varphi([f_j - f]_{n_0}) < 2^{-n_0}\underbrace{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}_{\varphi(\varepsilon)}$$

Como φ es creciente y K está contenido en K_{n_0}, se tiene que

$$\max_{z\in K} |f_j - f| \leq [f_j - f]_{n_0} < \varepsilon$$

si $j \geq j_0$. Entonces, f_n converge a f uniformemente sobre el compacto K, que era arbitrario.

(2.): Sea $(f_k)_{k\geq 1} \subseteq C(D)$ una sucesión de Cauchy. Para cada natural n, la sucesión $(f_k|_{K_n})_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $C(K_n)$. Este espacio métrico es *completo* (Las acotadas con codominio completo ($\mathbb{C}$) son un espacio métrico completo), entonces, cada restricción a K_n converge en $C(K_n)$ a una función $F_n \in C(K_n)$. Dado que los compactos de la exhaución están encajados, está bien definida la función $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = F_n(z)$$

Donde n es algún natural tal que $z \in K_n$.

Sea $K \subseteq D$ un compacto, existe un número natural n_0 tal que $K \subseteq K_{n_0}$, como $f_k|_{K_{n_0}}$ converge a F_{n_0} uniformemente sobre compactos de K_{n_0}, en particular, lo hace en K_{n_0} (es compacto). Entonces,

$$\max_{z\in K} |f_k(z) - F(z)| \leq \max_{z\in K_{n_0}} |f_k(z) - F(z)| = \max_{z\in K_{n_0}} |f_k|_{K_{n_0}} - F_{n_0}(z)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \square$$

Proposición 9.1.4

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. $\mathcal{H}(D)$ es cerrado en $C(D)$. O sea que si $(f_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(D)$ converge en $C(D)$ a f, entonces $f \in \mathcal{H}(D)$. Más aún, $f_j^{(n)}$ converge a $f^{(n)}$ en $C(D)$.

Demostración.

Queremos ver que f es holomorfa en D. Sea $z \in D$ y $r > 0$ tal que $\overline{\mathcal{B}}_r(z) \subseteq D$. Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{B}_r(z)$ curva cerrada. Entonces, dado que f_j es holomorfa en $\mathcal{B}_r(z)$, se tiene que

$$\int_\gamma f_j(z)\, dz = 0$$

La convergencia uniforme sobre compactos permite tomar límite en j e intercambiarlo con el signo integral. Así que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Por Morera, f es holomorfa en, para cada $z \in D$, algún disco de centro z. En particular, es holomorfa en cada punto de D, así que $f \in \mathcal{H}(D)$.

Sea $K \subseteq D$ compacto, supongamos que $D \neq \mathbb{C}$. Sea $\delta = \text{dist}(K, \mathbb{C}\backslash D)$ y $r \in (0, \delta)$. El conjunto

$$K_r = \{z \in D : d(z, K) \leq r\}$$

Es un compacto contenido en D. Además, si $z \in K$, es $\mathcal{B}_r(z) \subseteq K_r$. Por FIC, si $C = \{w \in K_r : |w - z| = r\}$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw \qquad f_j^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_j(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw$$

Luego,

$$|f^{(k)}(z) - f_j^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi}\max_{w\in K_r}|f(w) - f_j(w)|\frac{2\pi r}{r^{k+1}} = \frac{k!}{r^k}\max_{w\in K_r}|f(w) - f_j(w)|$$

Como esto vale para cada $z \in K$, tenemos que

$$||f^{(k)} - f_j^{(k)}||_K \leq \frac{k!}{2\pi}||f - f_j||_{K_r}$$

Y $||f - f_j||_{K_r}$ tiende a 0 cuando $j \to \infty$. Luego, $f_j^{(k)} \to f^{(k)}$ en $C(D)$ porque lo hace uniformemente sobre cada subconjunto compacto de D. □

Corolario

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. $\mathcal{H}(D)$ es un espacio métrico completo con la métrica heredada por $C(D)$.

(Es un cerrado contenido en un completo).

9.2. Familias/sucesiones de funciones holomorfas

Definición 9.2.0

Una familia $\mathcal{F} \subseteq C(D)$ es *uniformemente acotada* (sobre compactos) si para todo $K \subseteq D$ compacto existe $M(K) > 0$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}||f||_K < M(K)$$

Definición 9.2.1

Una familia $\mathcal{F} \subseteq C(D)$ es *normal* (totalmente acotada) si para todo $\varepsilon > 0$ existen $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^q \mathcal{B}_\varepsilon(f_i)$$

Antes de probar el siguiente toerema, enunciamos un lema sencillo.

Lema

Sea $q \in \mathbb{R}$ tal que $|q| < 1$ y $k \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$$

Demostración.

Por inducción en k: sabemos que vale para $k = 0$ pues es un resultado ya conocido. Supongamos que la igualdad es cierta para $k = m \in \mathbb{N}$, veamos que lo es para $m + 1$.

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} q^n = \sum_{n=m}^{\infty} q^n - q^m = \frac{q^m}{1-q} - q^m = \frac{q^m - (1-q)q^m}{1-q} = \frac{q^{m+1}}{1-q} \quad \square$$

Este es el lema menos útil que va a aparecer en este apunte, van a ver que solo sirve para acotar algo más fácilmente.

Teorema 9.2.0 (Teorema de Montel)

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$. Son equivalentes

1. $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.
2. $\mathcal{F}$ es normal.

Demostración.

(1.)$\longrightarrow$(2.): Dado $K \subseteq D$ compacto, vamos a querer usar Ascoli-Arzelà en $C(K)$ sabiendo que $||f||_K \leq M(K)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Veamos que $||f'||_K \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$, que implicaría que esa familia es uniformemente equicontinua (sobre cada compacto). Sea $z \in K$, existe un real $r_z > 0$ tal que $\overline{\mathcal{B}}_{2r_z}(z) \subseteq D$. Como K es compacto, existen $z_1, \ldots, z_k \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \overline{\mathcal{B}}_{r_{z_j}}(z_j)$$

Definimos

$$K_r = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{\mathcal{B}}_{2r_{z_j}}(z_j)$$

Este conjunto es un compacto contenido en D (unión de finitos compactos que están en D). Entonces, existe $M > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{F}$

$$||f||_{K_r} < M$$

Sea $z \in K$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $z \in \mathcal{B}_{r_{z_j}}(z_j)$. Definamos, para $1 \leq j \leq k$, $C_j = \{w \in K_r : |w - z_j| = 2r_{z_j}\}$ y $r = \text{mín}\{r_{z_1}, \ldots, r_{z_k}\}$. Por FIC,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{f(w)}{(w - z_j)^2}\, dw$$

Luego,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{||f||_{K_r}}{4r_{z_j}^2} 4\pi r_{z_j} \leq \frac{M}{2r_{z_j}} \leq \frac{M}{2r}$$

Ahora queremos ver que, dado $\varepsilon > 0$, si $z, z' \in K$ son tales que $|z - z'|$, entonces $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

Tomando $\delta > 0$ y menor a un número de Lebesgue η del cubrimiento $\{\mathcal{B}_{\nabla_{\ddagger|}}\}_{1\leq j\leq k}$, hay $j \in \{1,\ldots,k\}$ tal que $z, z' \in \mathcal{B}_{r_{z_j}}(z_j)$ Por teorema de valor medio, tenemos que

$$|f(z) - f(z')| \leq \max_{w\in\overline{\mathcal{B}}_{r_{z_j}}(z_j)} |f(w)|\,|z - z'| < \frac{M}{2r}\delta$$

Tomamos $\delta = \min\{\frac{r}{M}\varepsilon, \eta\}$, de esta manaera, $\mathcal{F}_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$ resulta uniformemente equicontinua.

Por Ascoli-Arzelà, sabemos que $\overline{\mathcal{F}_K}$ es un compacto de $\mathcal{H}(D)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen $f_1,\ldots,f_q \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F}_K \subseteq \bigcup_{j=1}^{q}\{f \in C(K) : ||f - f_j||_K < \varepsilon/2\}$$

(de hecho, las $f_1,\ldots,f_q$ estarían en la clausura de $\mathcal{F}$, pero puedo manipular los centros de las bolas y aumentar los radios para centrarlas en elementos de $\mathcal{F}$ y que la inclusión siga siendo cierta).

Sea $(K_n)_{n\geq1}$ una exhaución por compactos de D, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon/2$ y elegimos $K = K_{n_0}$. Dada $f \in \mathcal{F}$, existe $j \in \{1,\ldots,q\}$ tal que $||f - f_j||_{K_{n_0}} < \varepsilon/2$. Luego, si $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ para $t \geq 0$,

$$d(f, f_j) = \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}\varphi([f - f_j]_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}\varphi([f - f_j]_n)$$

Notemos que φ es creciente, $\varphi(t) \leq 1$, $\varphi(t) \leq t$ y que $[f - f_j]_n \leq [f - f_j]_{n_0}$ si $n \leq n_0$ (recordar que cada compacto está contenido en el siguiente). Entonces,

$$\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}\varphi([f - f_j]_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}\varphi([f - f_j]_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}\varphi([f - f_j]_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}[f - f_j]_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}$$

En este caso, la serie de 2^{-n} desde $n_0 + 1$ converge a 2^{-n_0} de acuerdo al lema anterior, y la suma desde 1 hasta n_0 está acotada por la serie completa, que sabemos que converge a 1. Por ende,

$$d(f, f_j) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}[f - f_j]_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n_0} < \varepsilon$$

Luego, es $\mathcal{F}$ totalmente acotada.

(2.)$\longrightarrow$(1.): Sean $(K_n)_{n\geq1}$ una exhaución por compactos de D, $K \subseteq D$ un compacto y $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ con $t \geq 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$. Sea $f \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon = 2^{-n_0-1}$, hay un subconjunto finito $F = \{f_1,\ldots,f_q\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{B}_\varepsilon(f_i)$$

Por lo tanto, existe $i \in \{1,\ldots,q\}$ tal que $d(f, f_i) < \varepsilon$. En particular,

$$2^{-n_0}\varphi([f - f_i]_{n_0}) < d(f, f_i) < \varepsilon = 2^{-n_0-1}$$

Es cierta la primera desigualdad porque estoy comparando una serie de términos positivos con uno de sus términos. Así que

$$\varphi([f - f_j]_{n_0}) < \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

$$[f - f_j]_{n_0} = ||f - f_j||_{K_{n_0}} < 1$$

Entonces,

$$||f||_K \leq ||f||_{K_{n_0}} \leq ||f_i||_{K_{n_0}} + \underbrace{||f - f_i||_{K_{n_0}}}_{<1}$$

Es decir que, para toda $f \in \mathcal{F}$,

$$||f||_K \leq \max_{1\leq i\leq q} \{||f_i||_{K_{n_0}} + 1\}$$

Así que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada. $\square$

Teorema 9.2.1 (Teorema de Vitali)

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(D)$ uniformemente acotada en compactos tal que existe $A \subseteq D$ con un punto de acumulación en D y para el cual $f_n(z)$ converge para todo $z \in A$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(D)$ tal que f_n converge a f en $C(D)$.

Demostración.

Por Montel, existe $f \in \mathcal{H}(D)$ y $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ subsucesión de f_n tal que f_{n_k} converge a f. Supongamos que f_n no converge a f en $C(D)$, de manera que existe $\varepsilon > 0$ y $(f_{n_j})_{j\geq 1}$ subsucesión de f_n tal que

$$d(f_{n_j}, f) \geq \varepsilon$$

De nuevo, por Montel, existe $(f_{n_{j_i}})_i \geq 1$ subsucesión de f_{n_j} que converge a una función g, en particular, es

$$d(g, f) \geq \varepsilon > 0$$

Luego, para todo $z \in A$, como $f_n(z)$ converge, cualquier subsucesión evaluada en z converge a lo mismo. Es decir,

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{i\to\infty} f_{n_{j_i}} = g(z)$$

Así que $f = g$ en A que tiene un punto de acumulación en D. Por principio de identidad, se tiene que $f = g$ en D, que es absurdo pues distaban a más de ε. $\square$

Proposición 9.2.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(D)$ una sucesión que converge a una función f holomorfa en D y tal que $f_n(z) \neq 0$ en D. Entonces, $f = 0$ en D o f no se anula en ningún punto de D.

Demostración.

Asumamos que se satisface lo enunciado pero que f no es idénticamente nula en D, veamos que no se anula en ningún punto.

Supongamos que sí lo hace, de manera que existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$. Como f es holomorfa, existe un real positivo r tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$. Sea $\rho \in (0, r)$ y $C = \{w \in D : |w - z_0| = \rho\}$, notar que es compacto. Sabemos que, para todo natural n,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}\,dw = 0$$

Esto es cierto porque la Proposición 8.3.3 nos dice que el valor de esta integral coincide con la diferencia entre el número de ceros contados con multiplicidad de f_n en el interior de C (cero) y el número de polos contados con multiplicidad para la misma función y en la misma región (cero). Dado que C es un compacto, f_n converge uniformemente a f en C; y esto nos permite tomar límite en n e intercambiarlo con el signo integral. Luego,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_n'(w)}{g_n(w)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lim_{n\to\infty} \frac{g_n'(w)}{g_n(w)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

Como f no tiene polos, entonces tiene cero raíces en el interior de C, que contradice que se anulaba en z_0. $\square$

9.3. Series y productos de funciones holomorfas y meromorfas

Series de funciones holomorfas.

Definición 9.3.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(D)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{H}(D)$ (suma de finitas funciones holomorfas). Decimos que S_n *converge normalmente* si para cada $K \subseteq D$ compacto existe $M_K > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_K = M_K$$

Proposición 9.3.0

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(D)$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ que converge normalmente. Entonces S_n converge uniforme y absolutamente en $C(D)$.

Demostración.

Sea $K \subseteq D$ compacto, $z \in K$ y $\varepsilon > 0$. Como S_n converge normalmente, existe un natural n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} ||f_k||_K < \varepsilon$$

Luego, dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n_0 \leq n \leq m$,

$$|S_m(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_K \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_K < \varepsilon \quad \square$$

Así que, dado $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, la convergencia normal de una serie $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, con f_k holomorfa en D para cada natural k, es suficiente para garantizar que existe una función $F \in \mathcal{H}(D)$ a la cual S_n converge en $C(D)$.

Consideremos $(K_n)_{n\geq 1}$ una exhaución por compactos de D y supongamos que S_n converge normalmente. Entonces sabemos que, en K_m, S_n converge uniformemente a F_m, con $F_m \in \mathcal{H}(K_m)$. Observemos que, si m_1, m_2 son dos números naturales tales que $m_1 \leq m_2$, y $F_{m_1} \in \mathcal{H}(K_{m_1})$ y $F_{m_2} \in \mathcal{H}(K_{m_2})$ son las funciones a las que S_n converge en cada uno de los respectivos compactos, es $F_{m_2}|_{K_{m_1}} = F_{m_1}$ pues $K_{m_1} \subseteq K_{m_2}$. Entonces, si definimos $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ como $F(z) = F_m(z)$ donde m es un número natural tal que $z \in K_m$, esta función está bien definida. Además, S_n converge uniformemente sobre compactos a F. En consecuencia de esto, es $F \in \mathcal{H}(D)$.

Series de funciones meromorfas.

Proposición 9.3.1

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ y $(S_n)_{n\geq 1} \subseteq D$ una familia de subconjuntos discretos de D tales que para todo compacto $K \subseteq D$ existe un natural n_0 tal que, si $n \geq n_0$, se tiene que $K \cap S_n = \emptyset$. Entonces, el conjunto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

es discreto.

Demostración.

Probémoslo por contradicción: supongamos que dicha unión no es un conjunto discreto, de manera que tiene un punto de acumulación en D. Luego, existen una sucesión $(x_k)_{k\geq 1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ y un punto $x_0 \in D$ tales que x_k converge a x_0. El conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es compacto, así que hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \cap S_n = \emptyset$$

siempre que $n \geq n_0$. Entonces, es claro que deben haber infinitos términos de la sucesión en algún S_j con j un natural tal que $1 \leq j \leq n_0 - 1$ (tengo finitos conjuntos e infinitas etiquetas). Por ende, existe una subsucesión de x_k, que va a converger a x_0, completamente contenida en S_j, que entonces tiene un punto de acumulación en D, contradiciendo el hecho de que era discreto. □

(Es importante notar que da igual si la sucesión es a la larga constante o no, hay que pensar en el conjunto A como literalmente $\{x_0, x_1, \dots\}$, o sea, los valores con su respectiva enumeración. De esa manera, dicho conjunto siempre va a ser infinito, no como el de los valores que toma la sucesión, que puede ser finito).

Proposición 9.3.2

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de funciones meromorfas. Sea, para cada natural $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \subseteq D$ el conjunto de las singularidades de f_n (recordar que cada Z_n es discreto). Si para todo $K \subseteq D$ compacto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M_K > 0$ tal que

1. $K \cap Z_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$
2. $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} ||f_n||_K = M_K$

Entonces, la sucesión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

Converge uniforme y absolutamente a una función meromorfa F.

Demostración.

Sea $K \subseteq D$ compacto y $z \in K$, sabemos que existe un número natural n_0 que satisface las dos condiciones del enunciado. Luego, si $n \geq n_0$, es

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \sum_{k=1}^{n_0-1} f_k(z) + \sum_{k=n_0}^{n} f_k(z)$$

La suma desde 1 hasta $n_0 - 1$ ya está "fija" y es una función holomorfa en $D \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0-1} Z_n$, o sea, es meromorfa (la unión finita de discretos es un conjunto discreto). Por otro lado, (1.) implica que la suma desde n_0 hasta n es siempre una función holomorfa en K y (2.) que dicha sucesión converge normalmente. De acuerdo a la Proposición 9.3.0, se concluye que

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k$$

converge uniforme y absolutamente en $C(D)$. De la misma manera que antes, se puede construir una función F holomorfa en $D \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, o sea, meromorfa (la proposición anterior nos dice que dicha unión es un conjunto discreto), tal que S_n converge uniformemente sobre compactos a F. □

Productos de funciones meromorfas.

Productos infinitos de números.

Proposición 9.3.3

Sea $(w_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$. Si la sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ de números complejos dada por

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} w_k$$

converge a un complejo $\rho \neq 0$, entonces w_k converge a 1.

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$w_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{X_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\rho}{\rho} = 1 \quad \square$$

Proposición 9.3.4

Sea $(w_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de complejos y $(z_k)_{k\geq 1}$ dada por $z_k = w_k - 1$ tal que $S_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ es convergente. Entonces, la sucesión $(X_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$, donde

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} w_k$$

es convergente.

Demostración.

Como S_n es convergente, entonces $|z_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particular, dado $r \in (0, 1)$ existe un natural k_0 tal que

$$|z_k| = |w_k - 1| \leq r < 1$$

para todo $k \geq k_0$. Si $\mathrm{Log}(z)$ es la rama principal del logaritmo (la que tiene el argumento en $[-\pi, \pi)$), entonces $\mathrm{Log}(1 + z)$ está bien definida y es continua en un entorno de cada z_k con $k \geq k_0$. Por lo tanto, si $n \geq k_0$ y $S_n(k_0) = \sum_{k=k_0}^{n} \mathrm{Log}(1 + z_k)$, entonces

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} w_k = \prod_{k=1}^{k_0-1} w_k \prod_{k=k_0}^{n} w_k = \prod_{k=1}^{k_0-1} w_k \prod_{k=k_0}^{n} e^{\mathrm{Log}(1+z_k)} = e^{S_n(k_0)} \prod_{k=1}^{k_0-1} w_k$$

Notar que nuestro problema de ver si X_n converge se reduce a ver si $S_n(k_0)$ lo hace. Como $\mathrm{Log}(1 + z)$ tiene a $z = 0$ como raíz y es holomorfa en $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$, puede factorizarse localmente. Es decir, existe un real $r' > 0$ función $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathcal{B}}_{r'}(0))$ y no nula en su dominio de holomorfía tal que

$$\mathrm{Log}(1 + z) = zg(z)$$

para cualquier $z \in \overline{\mathcal{B}}_{r'}(0)$. (Acá hay un tema de consistencia en la demostración: el r que fijé al comienzo tiene que ser menor a este r', si no lo es, no pasa nada, puedo cambiarlo y listo. Sin embargo, eso seguramente modifique el valor del k_0 pero insisto en que no hay problema. Por comodidad, vamos a asumir que yo elegí un r menor a r'). Así que

$$|\mathrm{Log}(1 + z)| \leq |z||g(z)| \leq \underbrace{\max_{|z|\leq r'} |g(z)|}_{M} |z| = M|z|$$

En particular, si $k \geq k_0$, es

$$|\mathrm{Log}(1 + z_k)| \leq M|z_k|$$

Y entonces

$$\sum_{k=k_0}^{n} |\mathrm{Log}(1+z_k)| \leq M \sum_{k=k_0}^{n} |z_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

Tomando límite en n vemos que $S_n(k_0)$ converge absolutamente, luego, converge a algún $w \in \mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} S_n(k_0)} \prod_{k=1}^{k_0-1} w_k = e^{w} \prod_{k=1}^{k_0-1} w_k \quad \square$$

Productos infinitos de funciones holomorfas.

Proposición 9.3.5

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $(f_k)_{k\geq 1} \subseteq C(D)$ y $X_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ tal que la sucesión $(S_n)_{n\geq 1} \subseteq C(D)$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (f_k - 1)$$

converge normalmente. Entonces X_n converge en $C(D)$ (uniformemente sobre compactos) a una función F. Si además $f_k \in \mathcal{H}(D)$ para cada natural k, es F es holomorfa en D.

La demostración es muy similar a la anterior.

Proposición 9.3.6

Sea D un dominio, $(f_j)_{k\geq 1}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} (f_j - 1)$ converge normalmente, $F(z) \in C(D)$ la función a la que $\prod_{j=1}^{n} f_j$ converge uniformemente sobre compactos y $Z_j = \{z \in D : f_j(z) = 0\}$ para cada natural $j \in \mathbb{N}$. Entonces, $F(z) = 0$ si y solo si $z \in Z = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z_j$.

Demostración.

Sea $z_0 \in D \backslash Z$, veamos que $F(z_0) \neq 0$. Sea $r \in (0,1)$ tal que $B = \overline{\mathcal{B}}_r(z_0) \subseteq D$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $||f_j||_B \leq \delta < 1$ si $j \geq j_0$. Por la proposición anterior sabemos entonces que la sucesión

$$S_n(j_0)(z_0) = \sum_{j=j_0}^{n} \mathrm{Log}(f_j(z_0))$$

Converge a un punto $w_0 \in \mathbb{C}$ (pues converge absolutamente). Entonces,

$$\prod_{j=j_0}^{\infty} (f_j(z_0)) = e^{w_0} \neq 0$$

Por otra parte, si analizamos los términos restantes, es claro que

$$\prod_{j=1}^{j_0-1} (f_j(z_0))$$

es no nulo, porque como z no es un elemento del conjunto Z, en particular no está en $Z_1, \ldots, Z_{j_0-1}$ (en el caso finito podemos usar este argumento). Luego, $F(z)$ es el producto entre estos dos últimos factores mencionados, así que es no nulo.

Sea $z_0 \in Z$, de manera que existe un natural n_0 tal que $z_0 \in Z_{n_0}$, y entonces $f_{n_0}(z_0) = 0$. Por lo tanto, la sucesión

$$X_n(z_0) = \prod_{j=1}^{n} f_j(z_0)$$

es tal que $X_n(z_0) = 0$ si $n \geq n_0$ (porque uno de los factores es $f_{n_0}(z_0)$). Luego,

$$F(z_0) = \lim_{n\to\infty} X_n(z_0) = 0 \quad \square$$

Ejemplo. Sea $(f_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dada por $f_j(z) = 1 - \dfrac{z^2}{j^2}$. Determinar si la sucesión

$$X_n = \prod_{j=1}^{n} f_j$$

converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Solución. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $g_j(z) = f_j(z) - 1 = \dfrac{z^2}{j^2}$ y $M_K = \max_{z\in K} |z|$. Luego,

$$|g_j(z)| = \left|\frac{z^2}{j^2}\right| \leq \frac{M_K}{j^2}$$

Entonces $||g_j||_K \leq \dfrac{M}{j^2}$ para cada natural j. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} ||g_j||_K \leq M \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = M\frac{\pi^2}{6}$$

Tomando límite en n se ve que $g_j = f_j - 1$ converge normalmente. Por medio de la Proposición 9.3.5, se concluye que X_n converge a una función entera F dada por, evidentemente

$$F(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$$

(Aunque se puede conseguir una expresión donde es más fácil calcular los valores en cada punto, pero no va a ser necesario).

10. Aplicaciones conformes

Definición 10.0

Sean $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ (o en $\hat{\mathbb{C}}$) dos dominios. Una función $f : D \longrightarrow \tilde{D}$ se dice *conforme* (o *biholomorfa*) si es biyectiva y holomorfa.

Observación 10.0

Si f es biholomorfa, entonces f^{-1} es biholomorfa.

(Esto **no** es evidente, y de hecho se podría argumentar que no tiene sentido ponerle la etiqueta de "observación").

Es claro que la inversa también va a ser biyectiva, mientras que la holomorfía se puede probar sabiendo que la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula en su dominio de holomorfía y después aplicando el teorema de la función inversa.

Observación 10.1

La composición de funciones biholomorfas es una función biholomorfa.

Esta es más sencilla: se deduce de que la composición entre funciones holomorfas es una función holomorfa; y de que la composición entre funciones biyectivas es una función biyectiva.

Definición 10.1

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, definimos al conjunto de *automorfismos* de D como

$$\mathrm{Aut}(D) = \{f : D \longrightarrow D : f \text{ es conforme}\}$$

"Estrategia" para hallar funciones conformes entre dominios distintos.

Sean $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ dos dominios distintos. Supongamos que queremos hallar todas las aplicaciones conformes entre D y $\tilde{D}$ y que conocemos completamente $\mathrm{Aut}(D)$. Si hallamos una función $f : D \longrightarrow \tilde{D}$ conforme, entonces el conjunto

$$C = \{f \circ h : h \in \mathrm{Aut}(D)\}$$

está compuesto de funciones conformes entre D y $\tilde{D}$. Más aún, en C están todas. Si $g : D \longrightarrow \tilde{D}$ es conforme, tenemos que $f^{-1} \circ g$ es un automorfismo de D. Como $f \circ f^{-1} \circ g = g$, es $g \in C$.

"Estrategia" para hallar automorfismos de dominios.

Sean $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ dos dominios distintos, supongamos que conozco completamente $\mathrm{Aut}(\tilde{D})$ y una función $f : \tilde{D} \longrightarrow D$ conforme, entonces, el conjunto

$$C = \{f \circ \varphi \circ f^{-1} : \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{D})\}$$

está compuesto de automorfismos de D. Más aún, $C = \mathrm{Aut}(D)$. Si $g \in \mathrm{Aut}(D)$, entonces $f^{-1} \circ g \circ f$ es un automorfismo de $\tilde{D}$, entonces $f \circ f^{-1} \circ g \circ f \circ f^{-1} = g \in C$.

Proposición 10.0

Si $f \in \operatorname{Aut}(\mathcal{B}_1(0))$ es tal que $f(0) = 0$. entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in \mathcal{B}_1(0)$.

Demostración.

Las hipótesis permiten que podamos aplicar el lema de Schwarz, entonces $|f(z)| \leq |z|$. Como $f \in \operatorname{Aut}(\mathcal{B}_1(0))$, notemos que podemos aplicar este mismo lema para f^{-1}. Luego,

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z|$$

Por ende, $|f(z)| = |z|$. Sea $g : \mathcal{B}_1^*(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(z)/z$, notemos que puede extenderse de manera holomorfa a 0 (porque f se anula ahí). Entonces, $g \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_1(0))$ y tiene módulo constante, por lo que g es constante. Dado que $|f(z)| = |z|$, existe un número complejo λ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$. □

Corolario

Los automorfismos de $\mathbb{D} = \mathcal{B}_1(0)$ son homografías.

Demostración.

Ya vimos que esto vale si $f \in \operatorname{Aut}(\mathcal{B}_1(0))$ es tal que $f(0) = 0$. Supongamos que esto no ocurre, por lo que existe $w \in \mathcal{B}_1^*(0)$ para el cual $f(0) = w$. La función

$$h(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}$$

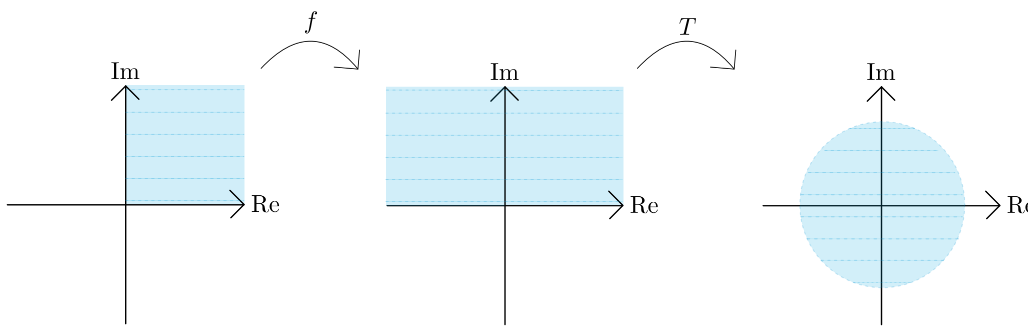
es un automorfismo de $\mathcal{B}_1(0)$ (es un *factor de Blaschke*); por lo tanto, $g(z) = h(f(z))$ también lo es. Como $g(0) = 0$, existe un número complejo α de módulo 1 tal que $g(z) = \alpha z$. Claramente, g y h son homografías, por lo que $h^{-1} \circ g = f$ también lo es.

Si se es más preciso y se escribe explícitamente a f, es $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \lambda \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} : |\lambda| = 1,\ \alpha \in \mathbb{D} \right\}$ □

Ejemplo. Sea $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0,\ \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hallar $\operatorname{Aut}(\mathcal{R})$.

Solución. Notar que, considerando $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, esta región es la correspondiente a los complejos con argumento en $(0, \pi/2)$. La función $f(z) = z^2$ es biyectiva y holomorfa en $\mathcal{R}$, y duplica el argumento de cualquier número al que se le aplique la función. Entonces, $f(\mathcal{R}) = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, porque estos son los complejos con argumento en $(0, \pi)$. Conocemos una función conforme entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$, y esto nos es útil pues conocemos los automorfismos de este último conjunto. La función $T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por $T(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ es conocida como *transformada de Cayley* y es conforme. Por lo tanto, la función $g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{D}$, donde $g(z) = T(f(z)) = \dfrac{z^2 - i}{z^2 + i}$ resulta biholomorfa. Finalmente, es

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{R}) = \{g^{-1} \circ \varphi \circ g : \varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})\}$$



Proposición 10.1

Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ tales que $f(z) = az + b$.

Demostración.

Sea $g(z) = f(1/z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. Si $z = 0$ fuera una singularidad evitable de g, entonces f estaría acotada (porque $\lim_{|z|\to\infty} f(z)$ existiría) y, por Liouville, debería ser constante, que no puede ocurrir pues es biyectiva.

Supongamos que $z = 0$ es una singularidad esencial de g, por Casorati-Weierstrass, eligiendo δ un real positivo cualquiera, $g(\mathcal{B}^*_\delta(0))$ es un abierto denso. Sea $z_0 \in \mathcal{B}^*_{1/\delta}(0)$ y $w_0 = f(z_0)$. Como $f(\mathcal{B}^*{}_{1/\delta}(0))$ es un abierto, existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(w_0) \subseteq f(\mathcal{B}^*_{1/\delta}(0))$. Dado que $g(\mathcal{B}^*_\delta(0))$ es denso, hay un elemento $z_1 \in \mathcal{B}^*_\delta(0)$ tal que $g(z_1) \in \mathcal{B}_r(w_0)$. En particular, $g(z_1) \in f(\mathcal{B}^*_{1/\delta}(0))$. Por lo tanto, existe $z_2 \in \mathcal{B}^*_{1/\delta}(0)$ tal que

$$g(z_1) = f(1/z_1) = f(z_2)$$

Notemos que $1/z_1$ y z_2 tienen módulo distinto, por lo que no son iguales, pero su imagen por f coincide. Esto contradice que f sea inyectiva.

Así que solo puede ser que $z = 0$ sea un polo de g (o sea que f tiene un polo en el infinito). Si n es el orden de 0 como polo de g, la Proposición 8.2.3 nos dice que f es un polinomio de grado n. Si n fuera mayor a 1, f no sería inyectiva. Luego, es $n = 1$, por lo que existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ tales que $f(z) = az + b$. $\square$

La siguiente proposición va a sernos útil para la demostración del próximo teorema.

Proposición 10.2

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones inyectivas y continuas en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que f_n converge en $C(D)$ a f. Entonces, f es o bien constante o inyectiva, y también $f_n' \underset{C(D)}{\longrightarrow} f'$.

Demostración.

Que el límite de las derivadas va a converger a la derivada de f es ya sabido por la Proposición 9.1.4, acá solo está enunciado para que funcione como un recordatorio.

Supongamos que se satisface lo dicho en el enunciado pero que f no es constante ni inyectiva, y veamos que esto lleva a una contradicción.

Si f no es inyectiva, existen z_1,$z_2 \in D$ distintos tales que $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Como f no es constante, la función

$$g(z) = f(z) - w_0$$

Se anula en z_1 y z_2 pero no es idénticamente nula. Dado que f es holomorfa, existe un real positivo r tal que $g(z) \neq 0$ para todo z en $\mathcal{B}^*_r(z_1) \subseteq D$ y en $\mathcal{B}_r(z_2) \subseteq D$. Puedo elegir r de manera que ambas bolas sean disjuntas (por ejemplo, $r < |z_1 - z_2|/3$). Sean $C_1, C_2 \subseteq D$ los bordes de la primera y la segunda bola, respectivamente. Dado que g no se anula en C_1 ni tampoco en C_2, que son compactos, existen $m_1, m_2 > 0$ tales que

$$m_1 = \min_{z\in C_1} |g(z)| \quad \text{y} \quad m_2 = \min_{z\in C_2} |g(z)|$$

Sea $m = \min\{m_1, m_2\}$. Como f_n converge en $C(D)$ a f, en particular, lo hace uniformemente en C_1, así que existe un natural n_0 tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} < |f(z) - w_0|$$

Para todo $z \in C_1$ y $n \geq n_0$

De la misma manera, hay otro natural k_0 que satisface que

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} < |f(z) - w_0|$$

Para todo $z \in C_2$ y $n \geq k_0$. Si $N = \max\{n_0, k_0\}$, por Rouché, tenemos que $f_n(z) - f(z) + f(z) - w_0 = f_n(z) - w_0$ y $f(z) - w_0$ tienen el mismo número de ceros contados con multiplicidad en el interior de C_1 y C_2 para todo $n \geq N$. Dado que armamos los compactos de manera que ellos y sus interiores sean disjuntos entre sí, se concluye que, para n lo suficientemente grande, $f_n(z) - w_0$ tiene al menos dos raíces, lo que contradice la inyectividad de los elementos de la sucesión. $\square$

Teorema 10.0 (Teorema de representación conforme de Riemann)

Sea $D \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo con $D \neq \mathbb{C}$. Existe una función $F : D \longrightarrow \mathcal{B}_1(0)$ conforme.

Esto es lo último que vamos a probar. Debido a que la demostración es un poco extensa, vamos a hacerla en tres pasos.

Demostración.

Sea $D \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo tal que $D \neq \mathbb{C}$.

Paso 1. Hallar una función holomorfa e inyectiva entre D y $\tilde{D} \subsetneq \mathcal{B}_1(0)$ dominio acotado con $0 \in \tilde{D}$.

Como $D \neq \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C} \backslash D$. La función

$$f(z) = \frac{1}{z - w}$$

es holomorfa en D, que es simplemente conexo, por lo que existe $F \in \mathcal{H}(D)$ tal que $F' = f$. Además, podemos elegirla de manera que exista $z_0 \in D$ tal que $F(z_0) = 0$. Notemos que

$$\frac{d}{dz}[e^{-F(z)}(z - w)] = -e^{-F(z)}F'(z)(z - w) + e^{-F(z)} = -e^{-F(z)}\left(\frac{z - w}{z - w}\right) + e^{-F(z)} = 0$$

Por ende, la función $p(z) = e^{-F(z)}(z - w)$ es constante. Sean $z_1, z_2 \in D$ tales que $F(z_1) = F(z_2)$. En particular, como p es constante,

$$e^{-F(z_1)}(z_1 - w) = e^{-F(z_2)}(z_2 - w)$$

Entonces,

$$z_1 - w = z_2 - w$$

$$z_1 = z_2$$

y F resulta inyectiva. Además, $e^{-F(z)}$ (planteando $e^{-F(z_1)} = e^{-F(z_2)}$ y usando a p otra vez) es también inyectiva: sabiendo que $F(z_0) = 0$, evaluando p en z_0, podemos deducir que $p(z) = z_0 - w$ para todo z en D Como $F(z_0) = 0$, 0 es un elemento de $F(D)$, que es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ porque F es holomorfa, entonces existe un número positivo $r < \pi/2$ tal que $\mathcal{B}_r(0) \subsetneq F(D)$. Con esta elección de r, los conjuntos $\mathcal{B}_r(0)$ y $\mathcal{B}_r(2\pi i)$ son disjuntos. Notar que $F(D) \cap \mathcal{B}_r(2\pi i) = \emptyset$. Para probar esto rápidamente, supongamos que no es cierto, de manera que existen complejos $z \in \mathcal{B}_r(2\pi i)$ y $w \in D$ tales que $F(w) = z$. Existe un complejo $v \in \mathcal{B}_r(0)$ tal que $z = 2\pi i + v$. Por lo tanto,

$$F(w) = 2\pi i + v$$

Dado que $\mathcal{B}_r(0) \subseteq F(D)$, existe $u \in D$ tal que $F(u) = v$. O sea,

$$-F(w) = -2\pi i - F(u)$$

$$e^{-F(w)} = e^{-2\pi i - F(u)} = e^{-F(u)}$$

Luego, es $u = w$, pero $F(u) \in \mathcal{B}_r(0)$ y $F(w) \in \mathcal{B}_r(2\pi i)$, esto es absurdo por cómo elegí r.

Por ende, la función

$$\varphi(z) = \frac{1}{F(z) - 2\pi i}$$

es holomorfa e inyectiva en D, además

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{1}{F(z) - 2\pi i}\right| < \frac{1}{r}$$

Con esto, podemos considerar una función lineal $l(z) = az + b$ apropiada que haga que $\Phi(z) = l(\varphi(z))$ sea una función inyectiva y holomorfa en D tal que $|\Phi(z)| < 1$ y $0 \in \Phi(D) = \tilde{D}$.

Paso 2. Considerar el conjunto

$$\mathfrak{R} = \{f : \tilde{D} \longrightarrow \mathcal{B}_1(0) : f \text{ es holomorfa, inyectiva y } f(0) = 0\}$$

y probar que si existe $f \in \mathfrak{R}$ tal que, para toda $g \in \mathfrak{R}$, es $|f'(0)| \geq |g'(0)|$, entonces $f(\tilde{D}) = \mathcal{B}_1(0)$.

Notar primero que $\mathfrak{R}$ no es vacío pues la función identidad (en realidad es la inclusión) pertence a $\mathfrak{R}$. Vayamos por contradicción: supongamos que se satisface la primera condición mencionada pero existe $w \in \mathcal{B}_1(0) \backslash f(\tilde{D})$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que λw es un real negativo. Sean $-\rho = \lambda w \in (-1, 0)$ y $f_\lambda(z) = \lambda f(z) \in \mathfrak{R}$, notar que $|f'(z)| = |f_\lambda'(z)|$ y además $-\rho \notin f_\lambda(\tilde{D})$. (Si existiera $v \in \tilde{D}$ tal que $f_\lambda(v) = -\rho$, entonces $-\rho = \lambda w = f_\lambda(v) = \lambda f(v)$, o sea que $f(v) = w$, que no puede ocurrir).

A partir de ahora trabajamos con $f_\lambda(z)$. Sea $h : \tilde{D} \longrightarrow \mathcal{B}_1(0)$ dada por

$$h(z) = \frac{f_\lambda(z) + \rho}{1 + \rho f_\lambda(z)}$$

En efecto, $|h(z)| < 1$, porque es una composición entre f_λ y un factor de Blaschke (específicamente, $\dfrac{z + \rho}{1 + \bar{\rho} z}$), y también es inyectiva. Notar que $h(z) \neq 0$ en $\tilde{D}$, de ocurrir en algún punto $v \in \tilde{D}$, entonces $f_\lambda(v) = -\rho$ que ya vimos que no puede pasar.

Sea $H : D \longrightarrow \mathbb{C}$ primitiva de h'/h tal que $H(0) = \ln(\rho) < 0$, que existe pues h no se anula en su dominio y $\tilde{D}$ es simplemente conexo (la función Φ es conforme si consideramos como codominio su propia imagen, y la simple conexidad es invariante por homeomorfismos, luego, como D es simplemente conexo, $\Phi(D) = \tilde{D}$ también). Notar que $e^{H(z)} = h(z)$ (se puede verificar derivando el cociente $e^{H(z)}/h(z)$ y evaluando en 0). Como $|h(z)| < 1$, entonces $\text{Re}(H(z)) < 0$.

Definimos $g \in \mathcal{H}(D)$ como

$$g(z) = \frac{H(z) - \ln(\rho)}{H(z) + \ln(\rho)}$$

El denominador de g no puede anularse porque, para que eso pase, debería haber $u \in \tilde{D}$ tal que

$$H(u) = -\ln(\rho)$$

En particular,

$$\text{Re}(H(u)) = -\ln(\rho) > 0$$

Cosa que no ocurre.

Afirmo que $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$ en $\tilde{D}$, g es inyectiva y $|g'(0)| > |f'(0)|$ (esto es lo que lleva a un absurdo). La primera afirmación se puede verificar inmediatamente pues sabemos que $H(0) = \ln(\rho)$, veamos que $|g(z)| < 1$: por un lado,

$$A = |H(z) - \ln(\rho)|^2 = |H(z)|^2 - 2\mathrm{Re}(\ln(\rho)H(z)) + \ln^2(\rho)$$

Por el otro,

$$B = |H(z) + \ln(\rho)|^2 = |H(z)|^2 + 2\mathrm{Re}(H(z)\ln(\rho)) + \ln^2(\rho)$$

Así que

$$A - B = -4\mathrm{Re}(H(z)\ln(\rho)) = -4\underbrace{\ln(\rho)\mathrm{Re}(H(z))}_{>0} < 0$$

Entonces $A - B < 0$, así que $A/B < 1$ y aplicando raíz cuadrada a ambos lados conseguimos el resultado deseado.

g es inyectiva pues es una composición entre H (inyectiva: si $H(z_1) = H(z_2)$ entonces aplicamos exponencial a ambos lados y tenemos que $h(z_1) = h(z_2)$, de donde se deduce $z_1 = z_2$, pues que h es inyectiva es algo ya sabido).

Mediante varias cuentas que no voy a hacer, se llega a que

$$g'(0) = \frac{1 - \rho^2}{2\rho\ln(\rho)} f'(0)$$

Afirmo que $\left|\dfrac{1 - \rho^2}{2\rho\ln(\rho)}\right| > 1$, para eso veamos que $1 - \rho^2 - 2\rho\ln(\rho) > 0$, dado que $2\rho\ln(\rho) < 0$, esto va a probar lo que enunciamos.

Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2 + 2x\ln(x)$. Analicemos su comportamiento en el intervalo $(0, 1)$: por un lado, $f(1) = 0$, además

$$f'(x) = 2 - 2x + 2\ln(x) = 2(1 - x + \ln(x))$$

f' se anula en $x = 1$, como $f''(x) = -2 + 2/x > 0$ en el intervalo $(0, 1)$, tenemos que f' es creciente ahí, entonces $f'(x) < f'(1) = 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Esto prueba lo que queremos porque, como $f'(x)$ es negativa en $(0, 1)$, se tiene que $f(x) < f(1) = 0$ en ese mismo intervalo.

Hallamos una función en $\mathfrak{R}$ cuya derivada en 0 es mayor en módulo a la de f y, dado que asumimos como cierto lo contrario, esto es un absurdo. Finalmente, $f(\tilde{D}) = \mathcal{B}_1(0)$.

Paso 3. Ver que

$$s = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathfrak{R}\}$$

existe y, más aún, hay una función en $\mathfrak{R}$ que realiza dicho supremo.

Necesitamos ver que dicho conjunto está acotado superiormente para afirmar que el supremo existe. La inclusión $i : \tilde{D} \longrightarrow \mathcal{B}_1(0)$ dada por $i(z) = z$ pertenece a $\mathfrak{R}$ y su derivada es constantemente 1, por lo que $1 \leq s$. Por otro lado, si $f \in \mathfrak{R}$, y dado $r > 0$ tal que $\overline{\mathcal{B}}_r(0) \subseteq \tilde{D}$, tenemos que

$$|f'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r} \frac{\overbrace{f(w)}^{<1}}{w^2}\,dw\right| < \frac{1}{2\pi r^2}2\pi r = \frac{1}{r}$$

Por lo que s existe. Además, podemos considerar

$$\mathfrak{R}_1 = \{f \in \mathfrak{R} : |f'(0)| \geq 1\}$$

Y claramente va a ser cierto que

$$s = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathfrak{R}_1\}$$

Veamos que $\mathfrak{R}_1$ es compacto: dado que toda función de $\mathfrak{R}$ está acotada en todo su dominio por 1, tenemos que $\mathfrak{R}_1$ es uniformemente acotado sobre compactos. Por Montel, es también totalmente acotado. Nos queda ver que $\mathfrak{R}_1$ es un cerrado: sea $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{R}_1$ tal que f_n converge a f en $C(\tilde{D})$. Sabemos ya que f es holomorfa en $\tilde{D}$ y que $f(0) = 0$ porque $f_n(0) = 0$ para todo natural n, además, para cada uno de ellos, es

$$|f_n(z)| < 1$$

Tomando límite en n, se llega a que

$$|f(z)| \leq 1$$

La proposición anterior nos permite deducir que f va a ser inyectiva: de no serlo, entonces f sería constante y, como $f(0) = 0$, sería idénticamente nula; en particular, $f'(0) = 0$. A su vez, debido también a la proposición, se tendría que

$$0 = |f'(0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| \geq 1$$

(El módulo es una función continua y entonces intercambia su lugar con el límite).

Y esto no puede ocurrir (0 no puede ser el límite de cosas todas mayores a 1).

En consecuencia de esto, y por principio de módulo máximo, la cota superior no puede realizarse en $\tilde{D}$ porque sino f sería constante. Por ende, la desigualdad ($|f(z)| \leq 1$) resulta estricta y $f \in \mathfrak{R}$. De la misma forma se ve que la desigualdad para las derivadas también se preserva tomando límites; luego $f \in \mathfrak{R}_1$ y esto hace de $\mathfrak{R}_1$ un conjunto compacto.

Como s es un supremo, existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{R}_1$ tal que $|f_n'(0)|$ converge a s. Luego, existe $(f_{n_j})_{j\geq 1}$ subsucesión de f_n que converge uniformemente sobre compactos de $\tilde{D}$ a una función $f \in \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. Dado que $|f'(0)| = s$, esta función satisface lo enunciado en el paso 2, así que $f(\tilde{D}) = \mathcal{B}_1(0)$ y en consecuencia f es sobreyectiva, además de inyectiva y holomorfa. Por último, la función $F : D \longrightarrow \mathcal{B}_1(0)$ dada por

$$F(z) = f(\Phi(z))$$

es conforme. □