计算方法实验报告

蒙亮
1900011006

2022 年 5 月 23 日

1 收敛性证明

使用松弛法求解线性方程组。在实现代码中，取 $\omega = 1$，则为 Guass-Seidal 迭代法，下面对 Guass-Seidal 迭代法收敛性的证明。

由边界条件：

$$P_0 = 1,\ P_n = 0 \tag{1}$$

以及控制方程：

$$-\alpha P_{k-1} + P_k + (\alpha - 1)P_{k+1} = 0 \tag{2}$$

可写出矩阵方程：

$$\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{p} = [P_0,\ P_1,\ ...,\ P_n]^T$，$\boldsymbol{b} = [1,\ 0,\ ...,\ 0]^T$。

$$\boldsymbol{A}_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & \alpha-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

对 $M=(D+L)^{-1}U$，其中 D，L，U 为 A 的对角线、严格下三角、严格上三角矩阵。

$$\boldsymbol{(D+L)^{-1}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

则:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(1-\alpha) & \alpha-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -\alpha(1-\alpha) & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(1-\alpha) \end{bmatrix} \tag{7}$$

M 的特征值为 0 和 $-\alpha(1-\alpha)$，则 $\rho(M)=-\alpha(1-\alpha)<1$，故 Guass-Seidal 迭代法收敛。

2 算法实现

2.1 数据结构

(1) void matrix_assign(double matrix[MAX][MAX], int n, double alpha) 用于初始化以及给矩阵的每个元素 a_{ij} 赋值。

(2) void interation(double matrix[MAX][MAX], double x[MAX], double b[MAX], int n, double omega) 迭代函数 Interation，用于计算每一次的向量迭代，以实现：

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j^k)}{a_{ii}} \tag{8}$$

(3) double L_inf_norm(double a[MAX], double b[MAX], int n) 对两个向量的差求范数。

2.2 时间复杂度

松弛法的每一次迭代的时间复杂度是 $O(n^2)$，对于三对角矩阵 $\boldsymbol{A}$，每一次迭代的时间复杂度是 $O(n)$。