

Metodi matematici

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1	Richiami	2
1.1	Trigonometria	2
1.1.1	Formule di Werner	2
1.2	Esponenziale complesso	2
1.2.1	Formule di Eulero	2
1.2.2	Derivazione	2
1.2.3	Integrazione	2
2	Serie di Fourier	3
2.1	Polinomio di Fourier	3
2.1.1	Energia di un polinomio di Fourier	3
2.2	Traslazione e riscaldamento	5
2.2.1	Traslazione orizzontale	5
2.2.2	Traslazione verticale	5
2.2.3	Riscaldamento	6
3	Trasformata di Fourier	7
3.1	Proprietà della trasformata di Fourier	7
4	Distribuzioni	11
4.1	Derivate	11
4.2	Limiti	11
4.3	Convoluzione	12
4.4	Trasformata di Fourier	12

1 Richiami

1.1 Trigonometria

1.1.1 Formule di Werner

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

1.2 Esponenziale complesso

L'esponenziale complesso è definito come

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

quindi l'esponenziale complesso è una funzione periodica con periodo pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1.2.1 Formule di Eulero

$$\begin{aligned}y &\in \mathbb{C} \\ \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} & (Re(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2}) \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} & (Im(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i})\end{aligned}$$

1.2.2 Derivazione

Considero la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ quindi

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d Re(f(t))}{dt} + i \frac{d Im(f(t))}{dt} = -\omega \sin(\omega t) + i \omega \cos(\omega t) = i \omega e^{i\omega t}$$

1.2.3 Integrazione

se $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b Re(f(t)) dt + i \int_a^b Im(f(t)) dt = \int_a^b e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} [e^{i\omega t}]_a^b = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega}$$

2 Serie di Fourier

Definizione. una funzione $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se

$$x(t+T) = x(t) \text{ vale } \forall t \in \mathbb{R}$$

Si dice *periodo* di x il più piccolo T positivo per cui x è periodica. Se x è periodica di periodo T allora è periodica di periodo kT con $k > 0$.

$$f = \frac{1}{T} \text{ frequenza}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ frequenza angolare}$$

2.1 Polinomio di Fourier

Definizione. Polinomi di Fourier

Diremo polinomi di Fourier una funzione delle forma

$$P_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k\omega t) + \beta_k \sin(k\omega t)) \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$$
$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \gamma_k \in \mathbb{C}$$
$$= \gamma_0 + \sum_{k=1}^n (\gamma_k e^{ik\omega t} + \gamma_{-k} e^{-ik\omega t}) \text{ Supponiamo che } (\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k})$$
$$= \gamma_0 + \sum_{k=1}^n (\gamma_k e^{ik\omega t} + \overline{\gamma_k e^{ik\omega t}})$$
$$= \gamma_0 + \sum_{k=1}^n 2\operatorname{Re}(\gamma_k e^{ik\omega t})$$
$$= \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(\gamma_k) \cos(k\omega t) + \operatorname{Im}(\gamma_k) \sin(k\omega t))$$

Quindi abbia che sussistono le seguenti relazione tra le due rappresentazione della formula di Fourier

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0 \\ \operatorname{Re}(\gamma_k) = \frac{1}{2}\alpha_k \\ \operatorname{Im}(\gamma_k) = -\frac{1}{2}\beta_k \\ \gamma_{-k} = \overline{\gamma_k} \end{cases}$$

2.1.1 Energia di un polinomio di Fourier

Definizione. Energia di un segnale

Dato un segnale periodico $x(t)$ di periodo T . si dice energia di $x(t)$ in $[0, T]$ l'espressione:

$$||x(t)||^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

se invece voglia parlare della norma del segnale abbiamo che

$$||x(t)|| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

Calcoliamo l'energia di un polinomio di Fourier:

$$\begin{aligned}
||P_n(t)||^2 &= \int_0^T |P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \right) \left(\sum_{h=-n}^n \overline{\gamma_h e^{ih\omega t}} \right) dt \\
&= \int_0^T \sum_{h,k=-n}^n \gamma_k \overline{\gamma_h} e^{ik\omega t} e^{-ih\omega t} dt \\
&= \sum_{h,k=-n}^n \gamma_k \overline{\gamma_h} \int_0^T e^{i(k-h)\omega t} dt = \begin{cases} T & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases} \\
&= T \sum_{h,k=-n}^n |\gamma_k|^2
\end{aligned}$$

Ora fissato il segnale periodico $x(t)$ e sia $P_n(t)$ un generico polinomio di Fourier periodico . Cerchiamo il polinomio di Fourier che meglio approssimo il segnale x nel senso dell'energia , cioè il polinomio di Fourier che minimizzi la seguente espressione

$$\begin{aligned}
||x(t) - P_n(t)||^2 &= \int_0^T |x(t) - P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T (x(t) - P_n(t))(\overline{x(t) - P_n(t)}) dt \\
&= \int_0^T |x(t)|^2 + |P_n(t)|^2 - x(t)\overline{P_n(t)} - \overline{x(t)}P_n(t) dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^n |\gamma_k|^2 - \int_0^T x(t) \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} e^{-ik\omega t} dt - \int_0^T \overline{x(t)} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^n |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} T \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt}_{c_k} - \sum_{k=-n}^n \gamma_k T \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{x(t)} e^{ik\omega t} dt}_{\overline{c_k}} \\
&= |x(t)|^2 + T \left(\sum_{h,k=-n}^n |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^n \gamma_k \overline{c_k} \right) \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^n (|\gamma_k|^2 \overline{\gamma_k} c_k - \gamma_k \overline{c_k} + |c_k|^2) - T \sum_{h,k=-n}^n |c_k|^2 \quad ^1 \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^n |\gamma_k - c_k|^2 - T \sum_{h,k=-n}^n |c_k|^2
\end{aligned}$$

Dopo tutti sti cazzo di conti viene fuori che il coefficiente gamma del polinomio di Fourier necessaria a minimizzare l'energia è il seguente

$$\gamma_k = c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \forall k = -n \dots n$$

Questi sono chiamati Coefficienti di Fourier .

¹Ho completato il quadrato con i numeri complessi

Inoltre nelle seguente tabella sono presenti le equivalenze dei coefficienti di Fourier nella forma complessa e nella forma "reale"

$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
$a_k = 2\text{Re}(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt$
$b_k = -2\text{Im}(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt$

Definizione. (Disuguaglianza di Bessel)

$$T \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|x(t)\|^2$$

Teorema 2.1

Sia x è un segnale periodico a energia finita , cioè $\int_0^T x^2(t) dt < +\infty$ allora se P_n è il polinomio di Fourier $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - P_n\|^2 = 0$$

Corollario. (Identità di Parseval)

$$T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|x(t)\|^2$$

2.2 Traslazione e riscaldamento

2.2.1 Traslazione orizzontale

Sia x un segnale di periodo T e di frequenza angolare ω . Fissiamo $a \in \mathbb{R}$ definisco

$$\tilde{x}(t) = x(t - a)$$

Calcolo i coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-ik\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - a) e^{-ik\omega t} dt \quad \begin{cases} s = t - a \\ ds = dt \end{cases} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} x(s) e^{-ik\omega(s+a)} ds \\ &= \frac{1}{T} e^{-ik\omega a} \int_0^T x(s) e^{-ik\omega s} ds \\ &= e^{-ik\omega a} c_k \end{aligned}$$

2.2.2 Traslazione verticale

$$\hat{x}(t) = \alpha + x(t)$$

$$\hat{c}_0 = c_0 + \alpha \quad \hat{c}_k = c_k \quad \forall k \neq 0$$

2.2.3 Riscaldamento

Se $a > 0$

$$y(t) = x(at)$$

Qual è il periodo T_y di y , $T_y = \frac{T}{a}$. Ora calcolo il coefficienti di Fourier del polinomio riscaldato

$$\begin{aligned} c_k^y &= \frac{a}{T} \int_0^{\frac{T}{a}} x(at) e^{-ikawt} \quad \begin{cases} s = at \\ dt = \frac{1}{a} ds \end{cases} \\ &= \frac{a}{T} \int_0^T \frac{1}{a} x(s) e^{-ikws} ds \\ &= c_k \end{aligned}$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ puntualmente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t} = x(t)$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ uniformemente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - P_n(t)|$$

Definizione. (Regolare a tratti)

Una funzione $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ si dica regolare a tratti se valgono le seguenti condizioni: esistono un numero finito di punti t_1, t_2, \dots, t_n in $]0, T[$ tale che

★ se $t \in]0, T[\setminus \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ la funzione x è derivabile in T e la sua derivata è una funzione continua di T (in quei punti x deve appartenere alla classe C^1)

★ esistono i seguenti limiti e sono finiti

$$\begin{array}{ll} \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) & \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) & \lim_{t \rightarrow T^-} x(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_i^-} x'(t) & \lim_{t \rightarrow t_i^+} x'(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x'(t) & \lim_{t \rightarrow T^-} x'(t) \end{array}$$

Teorema 2.2

Sia x un segnale periodico di periodo T regolare a tratti in $[0, T]$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) = x(t) \quad \forall t \neq t_1, t_2, \dots, t_n, 0, T$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t_i) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t)}{2}$$

Teorema 2.3

Sia x un segnale continuo e regolare a tratti (discontinuità della derivata). Allora P_n converge uniformemente a x

3 Trasformata di Fourier

Definizione. Sia $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi è **sommabile** cioè :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

Definizione. (Trasformata di Fourier)

Definiamo la trasformata di fourier di x e denotiamo con $\mathcal{F}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ esiste finite in quanto

3.1 Proprietà della trasformata di Fourier

1. Siano λ e μ due costanti complessi allora

$$\mathcal{F}(\mu x(t) + \lambda y(t))(\omega) = \mu X(\omega) + \lambda Y(\omega)$$

Dimostrazione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mu x(t) + \lambda y(t)] dt = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$

□

2. Traslazione

★ Traslazione nel tempo :

Sia x una funzione sommabile , $t_0 \in \mathbb{R}$ e definiamo $y(t) = x(t - t_0)$ allora :

$$\mathcal{F}[y(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega) e^{-i\omega t_0}$$

Dimostrazione. Effettuo una cambio di variabili $\begin{cases} u = t - t_0 \\ du = dt \end{cases}$

$$\mathcal{F}[y(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du = e^{-i\omega t_0} X(\omega)$$

□

3. Riscaldamento : Sia x una funzione sommabile e sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Dimostrazione. Basta effettuare un cambio di variabili $at = u$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(at)](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\frac{i\omega u}{a}} du & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) e^{-\frac{i\omega u}{a}} du & a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\frac{i\omega u}{a}} du = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

□

4. Derivata

★ Derivata nel tempo :

Sia x un segnale sommabile , derivabile e tale che $x'(t)$ è sommabile

$$\mathcal{F}(x'(t))(\omega) = i\omega X(\omega)$$

Dimostrazione.

$$\hat{x}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-i\omega t} dt = x(t)e^{-i\omega t} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{x}(\omega)$$

□

★ Derivata nella frequenza :

Se x è un segnale sommabile e anche $tx(t)$ è anche sommabile allora

$$\frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = \mathcal{F}(-itx(t))(\omega)$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -itx(t)e^{-i\omega t} dt$$

□

5. Simmetria :

Sia x un segnale sommabile :

- ★ Se x è una segnale reale e pari allora anche la sua trasformata di Fourier è reale e pari
- ★ Se x è una segnale reale e dispari allora la sua trasformata di Fourier è immaginaria puro e dispari

6. Coniugazione :

Sia x un segnale sommabile e denotiamo con $\overline{x(t)}$ il segnale complesso coniugato

$$\mathcal{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \overline{X}(-\omega)$$

Dimostrazione.

$$\mathcal{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)e^{i\omega t}} dt = \overline{X(-\omega)}$$

□

7. Convoluzione :

Definizione. (Convoluzione)

Sia x e t due funzioni sommabili. La convoluzione di x e t è definita da

$$\begin{aligned} (x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s)ds \end{aligned}$$

Se x e y sono segnali sommabili allora

$$\mathcal{F}(x * y(t)) = \mathcal{F}(x(t)) \mathcal{F}(y(t))$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}((x * y)(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x * y)(t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) y(s) e^{-i\omega t} ds dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(s) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt \right]}_{\hat{x}(\omega)} e^{-i\omega s} ds \\
 &= \hat{x}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} y(s) e^{-i\omega s} ds = \hat{x}(\omega) \hat{y}(\omega)
 \end{aligned}$$

□

Definizione. (Antitrasformata di Fourier)

Sia $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Definiamo l'antitrasformata di Fourier di X come :

$$\mathcal{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt$$

Osservazione :

$$\mathcal{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)](-\omega)$$

Teorema 3.1.1. Se x è un segnale sommabile e la sua trasformata di Fourier $\hat{X}(\omega)$ è sommabile allora :

$$x = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(x))$$

in altre parole

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Denotiamo con L^1 l'insieme dei segnali sommabili

$$L^1 = \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty\}$$

Teorema 3.1

Se $x \in L^1$ allora \hat{x} è continuo, limitato e $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{x}(\omega) = 0$

Definiamo con L^2 le funzioni quadrato sommabili (i segnali ad energia finita)

$$L^2 = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Proposizione. Se x è un segnale limitato e $x \in L^2$ allora $x \in L^1$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \in L^1$ e limitato

$$\begin{aligned}
 |x(t)|^2 &= |x(t)| |x(t)| \leq |x(t)| C \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= C \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2

Se $x \in L^2$, segnale ad energia finita allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n x(t) e^{-i\omega t} dt$$

esiste finito tranne al più per un insieme di valori di ω di misura nulla (Secondo Lebesgue) Definiamo allora :

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n x(t) e^{-i\omega t} dt$$

inoltre definendo

$$\mathcal{F}^{-1}[x(t)(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)](-\omega)$$

abbiamo che per ogni $x \in L^2$

$$x = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[x]) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(x)]$$

Infine posto $\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega)$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}(\omega)|^2 d\omega$$

allora $\hat{X} \in L^2$

4 Distribuzioni

Definizione. (spazio delle funzioni test)

Lo spazio delle funzioni test \mathcal{S} è formata dalle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto e tali che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1+t^2)^k D^{(m)}\varphi(t) = 0 \quad \forall k, m \geq 1$$

(φ e le sue derivate vanno più velocemente a zero del reciproco del polinomio)

Definizione. (Convergenza di funzioni test)

Sia $\varphi_n \in \mathcal{S}$ una successione, si dice che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(1+t^2)^k (D^{(m)}\varphi_n(t) - D^{(m)}\varphi(t))| = 0 \quad \forall k, m \geq 0$$

Definizione. (Distribuzione) Si dice **distribuzione** ogni funzionale lineare su \mathcal{D} che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test

4.1 Derivate

Data $T \in \mathcal{S}'$, si dice derivata di T , la distribuzione definita ponendo

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Poniamo

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt$$

allora

$$\begin{aligned} \langle T', \varphi \rangle &= - \langle T, \varphi' \rangle \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) \varphi(t) dt &= \underbrace{x(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

Teorema 4.1.1. Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti \mathbb{R} , la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con derivata ordinaria :

$$T'_x = T_{x'}$$

4.2 Limiti

Sia T_n una successione di distribuzione, sia T una distribuzione.

Diciamo che $T_n \rightarrow T$ nel senso delle distribuzioni se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Se x_n è una successione di segnali scriviamo

$$x_n \rightarrow T \text{ in luogo di } T_{x_n} \rightarrow T$$

Se $T = T_x$ per un segnale x allora scriveremo

$$x_n \rightarrow x \text{ in luogo di } T_{x_n} \rightarrow T_x$$

Teorema 4.1

1. Siano x_n, x due segnali limitati tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ allora è vero anche che $x_n \rightarrow x$ nel senso delle distribuzioni
2. Sia x un segnale a valori maggiori uguale a zero e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1$. Definiamo $x_n(t) = nx(nt)$

4.3 Convoluzione

Definizione. Sia T una distribuzione e $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo

$$T * \varphi(t) = T(\varphi_t)$$

Notiamo che $T * \varphi$ è una funzione infinitamente derivabile

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t * \varphi(t+h) - T * \varphi(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\varphi_t(h)) - T(\varphi_t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} T \left(\frac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h} \right) \\ &= T \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h-s) - \varphi(t-s)}{h} \right) \\ &= \varphi'(t-s) = \varphi'_t(s) \\ &= T(\varphi'_t(s)) \end{aligned}$$

Teorema 4.2

Sia φ_n una successione di funzioni test tali che $\varphi_n \rightarrow \delta_o$ nel senso delle distribuzioni Allora $T * \varphi_n \rightarrow T$ nel senso delle distribuzioni.
Ogni distribuzione è il limite di segnali infinitamente derivabile

4.4 Trasformata di Fourier

Sia x un segnale ad energia finita $\hat{x}(\omega) = v.p \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$ definisco la distribuzione associata alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} T_{\hat{x}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} \varphi(\omega) dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right)}_{\hat{\varphi}(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \hat{\varphi}(t) dt = T_x(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

Questo ha senso in quanto se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Questo motiva la seguente definizione

Definizione. (Trasformata di Fourier per distribuzioni)

Sia T una distribuzione, la sua trasformata di Fourier \hat{T} è la distribuzione definita da

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

Esempio : Calcoliamo la trasformata di Fourier della Delta di Dirac

$$\hat{\delta}_0(\varphi) = \delta_0(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = T_1(\varphi) = 1$$

Possiamo anche definire l'antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[T(\varphi)] = T(\mathcal{F}^{-1}[\varphi])$$

Inoltre vale che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[T(\varphi)] &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}[T(\varphi^r)] & \phi^r(s) &= \varphi(-s) \\ \mathcal{F}[T] &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}[T^r]\end{aligned}$$

Esempio :

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta_0 \rightarrow f[1] = 2\pi\delta_0^r = 2\pi\delta_0$$