Segnali e sistemi

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1 Segnali a tempo continuo

1.1 Segnali elementari

- ⋆ Finestra rettangolare :

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A\Pi(\frac{t-t_0}{T}) := \begin{cases} A & t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ⋆ Finestra triangolare :

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1-|t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altirimenti} \end{cases}$$

$$A\ \Lambda(\frac{t-t_0}{T}) := \begin{cases} A - (\frac{A}{T})|t-t_0| & t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0 & \text{altirimenti} \end{cases}$$

- ⋆ Impulso ideale unitario (Impulso di dirac) :
è possibile vedere l'impulso di Dirac come il limite della seguente successione :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{2}\Pi\left(\frac{t}{2/n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 \end{cases} \right]$$

quindi può essere visualizzato come un segnale il cui punto di applicazione è l'origine , dove assume valore infinito e la cui area complessiva è unitaria. In realtà l'impulso di Dirac è una distribuzione , quindi un concetto esteso di una funzione
Inoltre l'impulso di Dirac gode delle seguente proprietà

Proprietà. 1. $\delta(0) = +\infty$
2. $\delta(t) = 0\ \forall t \neq 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$ (la sua area è uno)
4. Proprietà di campionamento dell'impulso:
Data una funzione v e un t_0 in cui la funziona sia continua vale :

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\delta(t_0 - \tau)d\tau$$

- ⋆ Gradino unitario (Heaviside step function)

$$\delta_{-1}(t); := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se pensiamo alla funzione gradino come una distribuzione alla possiamo definirla nel seguente modo

$$\delta(t) = \frac{d\ \delta_{-1}(t)}{dt}$$

- ⋆ Rampa unitaria

$$\delta_{-2}(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre può essere messe in relazione con il gradino e l'impulso di dirac nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(t) = \frac{d\ \delta_{-2}(t)}{dt} \qquad \delta(t) = \frac{d^2\ \delta_{-2}(t)}{d^2 t}$$

1.2 Caratterizzazione dei segnali

1.2.1 Simmetrie dei segnali

$x(t) = \overline{x(t)}$	reale
$x(t) = -\overline{x(t)}$	immaginario
$x(t) + x(-t)$	pari
$x(t) = -x(-t)$	dispari
$x(t) = \overline{x(-t)}$	hermitiano
$x(t) = -\overline{x(-t)}$	antihermitiano

1. Se un segnale è reale e pari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
2. Se un segnale è immaginario e dispari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
3. Se un segnale è hermitiano allora $\text{Re}(x(\cdot))$ e $|x(\cdot)|$ sono pari.
4. Se un segnale è antihermitiano allora $\text{Im}(x(\cdot))$ e $\arg(x(\cdot))$ sono dispari.
5. Un segnale è hermitiano se e solo se $\text{Re}(x(\cdot))$ pari ed $\text{Im}(x(\cdot))$ dispari.
6. Un segnale è hermitiano se e solo se $|x(\cdot)|$ pari ed $\arg(x(\cdot))$ dispari.

1.2.2 Estensione e durata

Un segnale che è nullo al di fuori dell'intervallo $[t_s, T_s]$ è detto a durato limitata

- ⋆ Estensione :
  Intervallo in cui il segnale è diverso da zero
- ⋆ Durata :
  Misura dell'estensione

1.2.3 Area e valor medio

- ⋆ Area di un segnale di $x(t)$ è definita dall'integrale

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

- ⋆ Valor medio di un segnale x(t) è definito dal limite :

$$m_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

L'area e il valor medio sono entrambe funzione lineari invarianti alle traslazioni e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

- ⋆ Se l'area ha valore finito allora il valor medio ha valor nullo
- ⋆ Se il valor medio ha valore finito allora l'area ha valore infinito

1.2.4 Energia e potenza

- ⋆ Energia :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)^2| dt$$

- ⋆ Potenza

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

L'energia e la potenza sono entrambi funzioni **non** lineari ma rimangono invarianti alle traslazioni e inoltre assumono unicamente valori reali positivi e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

  - Se l'energia ha valore finito allora la potenza vale zero
  - Se la potenza ha valore finito allora l'energia ha valore infinito
  - La somma di due o più segnali di energia è un segnale di energia
  - La somma di due o più di potenza non è necessariamente un segnale di potenza

I segnali ad energia finita e non nulla su $\mathbb{R}$ vengono chiamati **segnali di energia**
I segnali a potenza finita e non nulla su $\mathbb{R}$ vengono chiamanti **segnali di potenza**

- ⋆ Energia mutua di due segnali

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)} dt$$

Se i segnali x e y sono ad energia finita , esiste finita l'energia mutua ed è interpretabile come un prodotto scalare.
Questo ci permette di esprimere l'energia del segnale come :

$$\begin{cases} z = x + y \\ E_z = E_x + E_y + 2Re(E_{xy}) \end{cases}$$

- ⋆ Potenza mutua di due segnali

$$P_{xy} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)} dt$$

$$\begin{cases} z = x + y \\ P_z = P_x + P_y + 2Re(P_{xy}) \end{cases}$$

1.3 Segnali periodici

Definizione. (Segnale periodico)
Un segnale $x(t)$ è detto periodico se esiste almeno un numero reale $T > 0$ tale che

$$X(t + T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se T è un periodo di $x(t)$ allora anche $kT, k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ è un periodo.
Definiamo *periodo fondamentale* il minimo valore di T per cui il segnale sia periodico

Per segnali periodici, con periodo T , l'area e l'energia divergono. Quindi i quattro parametri fondamentali vengono calcolati rispetto ai periodi :

Area

$$A_x(T) = \int_0^T x(t)dt$$

Valor medio

$$m_x(T) = \frac{1}{T}\int_0^{0+T} x(t)dt = \frac{A_x}{T}$$

Energia

$$E_x(T) = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Potenza media

$$P_x(T) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{E_x}{T}$$

Valore efficace

$$V_{eff}(T) = \sqrt{P_x(T)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt} = RMS$$

1.4 Convoluzione

Definizione. (Convoluzione)
Sia x e t due integrabili secondo Lebesgue . Si definisce convoluzione di x e y la funzione definita nel seguente modo :

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

1.4.1 Proprietà

1. Commutatività :

$$f * g = g * f$$

Dimostrazione. Applico la sostituzione $\begin{cases} u = t - \tau \\ du = -d\tau \end{cases}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(u+\tau)g(u)du = (g * f)(t)$$

□

2. Associatività :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. Distributività

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

4. Traslazione
5. Elemento neutro :
La convoluzione di un qualsiasi segnale con l'impulso di dirac fornisce il segnale stesso .Quindi l'impulso di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione

$$[x * \delta](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x(t)$$

Inoltre se l'impluso di dirac è traslato di t_0 anche il segnale sarà traslato dello stesso fattore

$$(x * \delta_{t_0})(t) = x(t - t_0)$$

6. Area :

$$s(t) = (x * y)(t)$$
$$A(s) = A(x)\ A(y)$$

7. Estensione e durata :
   Definiamo l'estensione e la duratoa di x e y (segnali come)

$$e\left[x\right] = \left[t_x, T_x\right], e\left[y\right] = \left[t_y, T_y\right]$$

$$D_x, D_y$$

   Sia $z(t) = x * y(t)$ allora questo segnale avrà estensione e durata pari a

$$e\left[z\right] = e[x * y] = \left[t_x + t_y, T_x + T_y\right]$$
$$D_z = D_x + D_y$$

1.4.2 Convoluzione per segnali periodici

- Se solo uno dei due segnali è periodico allora possiamo utilizzare la normale definizione di convoluzione , che ci resituirà un segnale anch'esso periodico
- Se entrambi i segnali sono periodici l'integrale diverge , dobbiamo quindi utilizzare una diversa definizione di convoluzione.

$$x * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)y(t-\tau)\ d\tau$$

1.5 Funzione di Correlazione

Definizione. Per due segnali x e y ad energia finita la correlazione incrociata è definita come :

$$x \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt \quad \forall\tau \in \mathbb{R}$$

Nel caso di *Segnali di potenza* la cross-correlazione viene definita nel seguente modo :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau)\overline{y(t-\tau)}dt$$

1.5.1 Proprietà

- La Correlazione **non gode** della proprietà commutativa
- La durata del segnale risultato dalla cross relazione è
- Relazione con l'operazione di convoluzione

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * \overline{y(-\tau)}$$
$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * \overline{x(-\tau)}$$

- Il valore nell'origine coincide con l'energia mutua dei due segnali :

$$R_{xy}(0) = E_{xy}$$

1.5.2 Auto-correlazione

Se i due segnali x e y sono uguali a funzione di cross correlazione restituisce l'autocorrelazione :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$$

1.6 Analisi in Frequenza

I concetti di estensione e durata possono essere trasferiti al dominio delle frequenze e diventano **estensione spettrale** $e[S]$ e **larghezza di Banda** B_s , misura dell'estensione spettrale .
Tipicamente si fa riferimento alla banda monolatera , si considera la banda come metà della misura dell'estensione spettrale , considerando solo le frequenze positive

$$B = inf\{\overline{f} \in \mathbb{R} : |S(f)| = 0 \quad \forall |f| > \overline{f}\}$$

Banda e durata hanno una relazione inversa (durata infinita-> banda finita)

1.6.1 Filtri ideali

I **filtri ideali** sono caratterizzati dall'avere :

- ⋆ Ampiezze della riposta costante
  - Pari a 0 nella banda oscura
  - Diversa da zero (normalmente pari a 1) nella banda passante
- ⋆ La fase della riposta in frequenza è lineare nella banda passante
- ⋆ Brusca transizione tra banda passante e banda oscura 6

In base alla caratteristiche di selettività del fitto , possiamo classificare i filtri in 4 macro categorie :

1. **Filtro passa-basso ideale**
   Risposta in frequenza :
   $$H(f) = A\ \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) e^{-j2\pi f t_0}$$
   $$h(t) = (2f_L A)\ sinc(2f_L(t - t_0))$$
   Banda passante $= (-f_L, f_L)$
   Banda oscura $(-\infty, -f_L) \cup (f_L, +\infty)$
2. **Filtro passa-altro** Risposta in frequenza :
   $$H(f) = A\left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_H}\right)\right] e^{-j2\pi f t_0}$$
   $$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2f_H A)\ sinc(2f_H(t - t_0))6$$
   Banda passante $= (-\infty, -f_H) \cup (f_H, +\infty)$
   Banda oscura $(-f_H, f_H)$
3. **Filtro passa basso ideale** Risposta in frequenza :
   $$H(f) = A\left[\Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right)\right] e^{-j2\pi f t_0}$$
   $$h(t) = (2A\Delta f)\ sinc(\Delta f(t - t_0))\ cos(2\pi f_0(t - t_0))$$
   Banda passante $= (-f_{c2}, -f_{c1}) \cup (f_{c1}, f_{c2})$
   Banda oscura $= (-\infty, -f_{c2}) \cup (-f_{c1}, f_{c1}) \cup (f_{c2}, +\infty)$
4. **Filtro elimina banda**
   Risposta in frequenza :
   $$H(f) = A\left[1 - \Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) - \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right)\right] e^{-j2\pi f t_0}$$
   $$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2A\Delta f)\ sinc(\Delta f(t - t_0))\ cos(2\pi f_0(t - t_0))$$

2 Sistemi a tempo continuo

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow v$$

Un sistema è :

- ⋆ **algebrico o senza memoria** se la relazione tra l'input e l'output è una funzione algebrica
- ⋆ **dinamico** se l'output dipende dal valore attuale dell'input e anche dalla sua evoluzione passata
- ⋆ **autonomo o libero** se non riceve input , dipende unicamente dalle condizioni iniziali
- ⋆ **forzato** se è influenzato da input esogeni. Gli input manipolabile vengono chiamati segnali di controllo , gli input sconosciuti vengono chiamati disturbi.

Definizione. (Linearità)
Un sistema dinamico Σ è lineare se vale il principio della sovrapposizione degli effetti : per un sistema inizialmente a riposo , se i valori di output v_1, v_2 corrispondenti ai valori di input u_1, u_2 allora l'ingresso $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ corrisponde l'uscita $\alpha v_1 + \beta v_2$ qualuque siano i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Definizione. (Tempo-invarianza)
Un sistema dinamico inizialmente a riposo è tempo invariante se traslazioni nel tempo dei valori assunti dagli ingressi $u(t)$ provocano le stesse traslazioni nel tempo dei valori assunti dalle uscite $v(t)$

Definizione. (Causalità)
Un sistema dinamico inizialmente a riposo è causale se l'output al tempo t $(v(t))$,dipende solo dall'input al tempo t $(u(t))$. In altre parole , per determinare il valore dell'uscita ad un certo istante di tempo T , mon è necessario conoscere il valore dell'ingresso per istanti di tempo $t > T$

Definizione. (Stabilità esterna o BIBO , bounded-input bounded output)
Un sistema dinamico a tempo continuo, inizialmente a riposo , Σ è BIBO stabile se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_v , tale che per ogni segnale di ingresso u(t) che soddisfa

$$|u(t)| \leq M_u \quad t \geq t_0$$

la corrispondente risposta in uscita v(t) è soddisfatta

$$|v(t)| \leq M_v \quad t \geq t_0$$

Definizione. (Stabilità interna o asintotica)
Il Sistema

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{d^i t} \qquad t \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera $v_l(t)$ converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \to *\infty} v_l(t) = 0$$

In un Sistema lineare tempo-invariante la funzione h non dipende esplicitamente dal tempo e quindi abbiamo la seguente *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{d^i t} \qquad t \in \mathbb{R} \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

- ⋆ $u(t)$ è il segnale di input *noto* , $v(t$ è il segno di output che dobbiamo trovare
- ⋆ I coefficienti a_i, b_j sono assunti noti
- ⋆ I coefficienti $a_n, b_m \neq 0$
- ⋆ se $n \geq m$ il sistema è detto **proprio**
- ⋆ se $n > m$ il sistema è detto **strettamente proprio**

2.1 Evoluzione libera

Modello IO SISO LTI con istante inizale t_0

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{d^i t} \qquad t \geq t_0 \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

Siccome il sistema è tempo-invariante assumiamo $t_0 = 0$.
Le condizioni iniziali del sistema sono :

$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

inoltre l'ingresso $u(t) = 0 \; \forall t < 0$.
Dall'analisi matematica sappiamo che l'uscita v(t) dei modelli LTI può essere scritta come la somma di una soluzione particolare e la soluzione dell'equazione omogenea associata.

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

dove :

- ⋆ $v_f(t)$ è l'evoluzione libera
- ⋆ $v_f(t)$ è l'evoluzione forzata

Definizione. (Evoluzione libera)
Data l'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera o **risposta libera** del sistema è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = 0$$

con le stesse condizioni iniziali

Definizione. (Equazione caratteristica)
Data l'equazione differenziali omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = 0$$

l'equazione algebrica

$$d(s) := \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

si chiama **equazione caratteristica del sistema**

- ⋆ iI polinomio si dice monico se $a_n = 1$
- ⋆ avendo assunto $a_n \neq 0$, il grado del polinomio è n , cioè $deg(d(s)) = n$

Definizione. Siano $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ le radici caratteristiche dell'equazione caratteristica:

$$d(s) := \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

con molteplicità $\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{N}$ allora

$$d(s) := \prod_{i=1}^{r} (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

Definizione. (Modi del sistema) Le soluzioni elementari dell'equazione omogenea associata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = 0$$

sono le funzioni

$$m_{i,j} = \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, r$ (numero di radici disitnte)
$\forall j = 0, \ldots, \mu_i - 1$ (μ_i = molteplicità della soluzione)

Teorema 2.1.1 – Evoluzione libera

La soluzione $v_l(t)$ dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = 0$$

può essere scritta come una combinazione lineare dei modi del sistema , ovvero

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} c_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

dove i coefficienti c_i, j sono determinati univocamente dalle condizoni iniziali

$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

Teorema 2.1.2 – Radici di un polinomio a coefficienti reali

Sia $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ un polinomio a coefficienti reali. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un radice complessa di d(s) di molteplicità μ , allora anche il suo complesso coniugato $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ è un radice complessa di d(s) di molteplicità μ

Definizione. (Carattere dei modi) il modo elementare $m_{i,j}(t)$ è:

- ⋆ **Convergente a zero**
$$\lim_{t\to\infty} |m_{i,j}(t)| = 0$$

- ⋆ **Limitato** :
$$\exists M < \infty \quad |m_{i,j}(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

- ⋆ **illimitato o divergente** : altrimenti

Teorema 2.1.3 – Carattere dei modi

il modo elementare $m_{i,j}(t)$ è:

- ⋆ **Convergente a zero** $t \to \infty$ se e solo se
$$Re(\lambda_i) < 0$$

- ⋆ **Limitato** : in $[0, +\infty]$ se e solo se $Re(\lambda_i) \leq 0$ e i modi sono semplici (cioè la molteplicità delle soluzioni è pari a 1)

- ⋆ **illimitato o divergente** : altrimenti

Definizione. (Stabilità interna o asintotica)
Il Sistema
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{d^i t} \qquad t \geq 0$$
è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale
$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$
l'evoluzione libera $v_l(t)$ converge a zero asintoticamente
$$\lim_{t\to *\infty} v_l(t) = 0$$

Definizione. (Stabilità semplice)
Il Sistema
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{d^i t} \qquad t \geq 0$$
è **semplicemente stabile** se per ogni condizione iniziale
$$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$
l'evoluzione libera $v_l(t)$ è limitata
$$\exists 0 < M < \infty \quad |v_l(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

Teorema 2.1.4 – Stabilità Semplice

Un sistema LTI causale è :

- ⋆ stabile se e solo se tutti i modi sono limitati
- ⋆ stabile asintoticamente se e solo se tutti i modi convergono a zero per $t \to \infty$

2.2 Evoluzione forzata

Definizione. (Risposta Implusiva)
Dato un sistema causale SISO LTi , descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad t \geq 0$$

la riposta all'impulso $h(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \delta(t)}{dt^i} \qquad t \geq 0$$

con condizioni iniziali nulle , il sistema è a riposo

$$h\left(0^-\right) = 0 \ , \ \left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = 0 \ , \ \left.\frac{d^2h(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = 0 \ , \ \ldots \ , \ \left.\frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-} = 0$$

Definizione. (Segnale causale)
Un segnale v(t) è causale se il suo supporto è definito $[0, +\infty)$ contenuto...

Teorema 2.2.1 – Risposta Impulsiva

La risposta impulsiva h(t) del sistema SISO LTI tempo continuo causale Σ

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \delta(t)}{dt^i} \qquad t \geq 0$$

ha la forma

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

Inoltre $d_0, d_{i,j} \in \mathbb{R} \ e \ d_0 = 0 \ se \ n > m \ (d_0 \neq 0 \ se \ n = m)$

Dimostrazione. Per $t > 0$ la delta di Dirac e tutte le sue derivate sono identicamente nulle , quindi h(t) deve soddisfare per $t > 0$ l'equazione omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = 0 \quad t > 0$$

con tutte le condizioni iniziali nulle. Dallo studio dell'evelouzione libera sappiamo che ha forma che deve essere del tipo

$$h(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

il comportamento in $t = 0$ dell'equazione precedente , consiste nella combinazione lineare dei termini $\square$

Teorema 2.2.2 – Causalità

il sistema continuo LTI descritto dalla risposta implusiva h(t) è causale se e solo se h(t) è un segnale causale (è zero per i tempi negativi)

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Teorema 2.2.3 – Evoluzione forzata

La risposta forzata del sistema causale SISO LTI con risposta all'impulso h(t) , condizioni iniziali nulle , e input $u(t)$ è data dal prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} v_f(t) &= h * u(t) \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Se u(t) è un segnale causale allora

$$\begin{aligned} v_f(t) &= h * u(t) \\ &= \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-0^-}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

quindi anche la risposta forza è una segnale causale

Dimostrazione. Consideriamo u(t) , h(t) segnali qualsiasi.
Sappiamo che partendo da condizioni inizali nulle abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \delta(t)}{dt^i}$$

Per la **tempo invarianza** abbiamo che

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t-\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \delta(t-\tau)}{dt^i} \quad \tau > 0$$

inoltre per la **linearità**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \ c(h(t-\tau))}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \ c(\delta(t-\tau))}{dt^i}$$

Al posto di c consideriamo $u(t)d\tau$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \ u(t)d\tau(h(t-\tau))}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \ u(t)d\tau(\delta(t-\tau))}{dt^i}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale anche

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \ (\sum_k u(\tau_k)h(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \ \sum_k u(\tau_k)(\delta(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^i}$$

Passando all'integrale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \ (\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i \ \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau(\delta(t-\tau)d\tau)}{dt^i}$$

Usando infinite la proprietà di riproducibilità dell'impulso della delta di Dirac nel termine di destra

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \; (\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i \; [h * u](t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$v_f(t) = [h * u](t)$$

□

Teorema 2.2.4 – BIBO stabilità per sistemi LTI a tempo continuo

l sistema LTI a tempo continuo Σ descritto dalla risposta implusiva $h(t)$ è BIBO stabile se e solo se $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$, quindi se h(t) è una funzione sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

Se il sistema è causale allora

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

Dimostrazione. Supponiamo che la risposta impulsiva sia una funzione sommabile che il segnale d'ingresso sia limitato $|u(t)| < M_u \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Vale quindi

$$\begin{aligned}
|v(t)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} [h * u](t)dt| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)u(t-\tau)|dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \; |u(t-\tau)|dt \\
&< M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|dt \\
&< M_u \; M_h = M_v
\end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che $h(t)$ non sia un segnale sommabile . Definiamo il segnale di ingresso come

$$u(t) = sgn(h(-t)) \begin{cases} +1 & h(t-\tau) > 0 \\ -1 & h(t-\tau) < 0 \end{cases}$$

e consideriamo l'uscita al tempo $t = 0$

$$\begin{aligned} v_f(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(0-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)sgn(h(-\tau)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|d\tau = +\infty \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.5 – (BIBO stabilità)

Un sistema LTI a tempo continuo causale Σ è BIBO stabile se e solo se i modi elementari che compaiono con coefficiente diverso da zero nell'espressione della risposta implulsiva

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

sono convergenti a zero

Teorema 2.2.6 – Stabilità asintotica

Un sistema LTI a tempo continuo causale Σ è asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi della risposta libera

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} c_{i,j}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t} \qquad t \geq 0$$

convergono a zero asintoticamente

3 Trasformata di Laplace

Dato un segnale $v(t), t \in \mathbb{R}^0_+$, somma di termini localmente sommabili ($\mathbb{L}^1_{loc} \in \mathbb{R}^0_+$) e di un insieme finito di segnali impulsivi , la trasformata di Laplace $V(s)$ di v(t) è definita dall'integrale

$$\mathcal{L}[v(t)] = V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}dt \qquad s = \sigma + \omega t \in \mathbb{C}$$

3.1 Proprietà

- ⋆ **Linearità** :
  La traformata di Laplace è lineare in virtù della linearità dell'integrale

  $$\mathcal{L}[a_1v_1(t) + a_2v_2(t)] = a_1\mathcal{L}[v_1(t)] + a_2\mathcal{L}[v_2(t)]$$

  Inoltre l'ascissa di convergenza della trasformata $\mathcal{L}[a_1v_1(t) + a_2v_2(t)]$ è minore o uguale alla maggiore delle due ascisse di convergenza

- ⋆ **Derivata** :
  Se la funzione $v(t)$ è traformabile secondo Laplace ed esistono finito le condizioni iniziali :

  $$v\left(0^-\right), \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}, \left.\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}, \ldots, \left.\frac{d^{ni-1}v(t)}{dt^{i-1}}\right|_{t=0^-} \qquad i \in \mathbb{N}$$

  allora vale

  $$\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt^i}\right] = s^i\mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^kv(t)}{dt^k}\Big|_{t=0^-} s^{i-1-k}$$

  Inoltre l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt^i}\right]$ è minore o uguale di quella della trasformata di v(t)

- ⋆ **Moltiplicazione per una funzione polinomiale** :
  Se v(t) è dotata di trasformata di Laplace allora esiste

  $$\mathcal{L}[t^iv(t)] = (-1)^i\ \frac{d^iV(s)}{dt^i}$$

- ⋆ **Ritardo temporale** :
  Sia v(t) una segnale dotato di trasformata di Laplace V(s). definito il segnale ritardato come

  $$v(t-\tau) = \begin{cases} v(t-\tau) & t-\tau > 0 \\ 0 & t-\tau < 0 \end{cases}$$

  $$\mathcal{L}v(t-\tau) = e^{-s\tau}V(s)$$

- ⋆ **Moltiplicazione per una funzione esponenziale** :
  Se v(t) ammette trasformata di Laplace con ascissa di convergenza α allora esiste

  $$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)] = V(s-\lambda)$$

  e tale trasformata converge per $Re(s) > a + Re(\lambda)$

- ⋆ **Convoluzione** :
  Sia $v_1(t), v_2(t)$ sono due funzioni nulle per $t < 0$ e dotate di trasformata di Laplace allora esiste

  $$\mathcal{L}[v_1 * v_2(t)] = V_1(s)V_2(s)$$

  L'asciussa di convergenza è minore o uguale di $max\{a_1, a_2\}$

- ⋆ **Integrale** :
  Se v(t) è dotata di trasformata di Laplace, allora esiste

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t^+} v(\tau)d\tau\right] = \frac{V(s)}{s}$$

- ⋆ **Teorema del valore finale:**
  Sia v(t) una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito li limite all'infinito di v(t) allora vale la seguente formula

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s\ V(s)$$

- ⋆ **Teorema del valore iniziale :**
  Sia v(t) una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito li limite $\lim_{t\to 0^+} v(t)$ allora vale la seguente formula

$$\lim_{t\to 0^+} v(t) = \lim_{s\to\infty} s\ V(s)$$

- ⋆ **Cambiamento di scala :**
  Sia v(t) una funzione dotata di trasformata di Laplace V(s) , con ascissa di convergenza α e sia r una costante reale positiva , allora

$$\mathcal{L}\left[v(rt)\right] = \frac{1}{2}V(\frac{s}{r})$$

Vogliamo utilizzare la trasfromata di Laplace per risolvere i sistemi causali LTI descritta da

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dit^i} \quad n \geq m \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad a_n, b_n \neq 0$$

Se l'ingresso u(t) ha trasformata di Laplace allora anche v(t) ha trasformata di Laplace. Inoltre sfruttando le proprietà della trasformata di Fuorier abbiamo che

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = s^i \mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0^-} s^{i-1-k}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right] = s^i U(s) \quad \text{(poichè è una segnale causale)}$$

Applicando la trasformata di laplace ad ogni componente del sistema abbiamo che

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right]$$

$$a_0 V(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i s^i V(s) - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0^-} s^{i-1-k}\right) = \sum_{j=0}^{m} b_j s^i U(s)$$

$$v(s)\sum_{i=0}^{n} a_i s^i - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0^-} s^{i-1-k}\right) = \sum_{j=0}^{m} b_j s^i U(s)$$

$$Definisco \quad d(s) := \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \quad n(s) := \sum_{j=0}^{m} b_j s^i \quad p(s) := \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\right)$$

$$d(s)V(s) - p(s) = n(s)U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$$= V_f(s) + V_l(s)$$

Definizione. (Funzione di trasferimento) Il rapporto tra i polinomi $n(s)$ *e* $d(s)$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad s \in \mathbb{C}$$

è detta funzione di traferimento di Σ

Inoltre abbiamo che la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso

$$\boxed{H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}}$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$$

$$\mathcal{L}\left[d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t)\right] = H(s)$$

$$Usando \ \ \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \ \ \mathcal{L}[e^{\sigma t}] = \frac{1}{s-\sigma} \ \ \mathbb{L}[t^i f(t)] = (-1)^i \frac{d^i F(s)}{dt^i}$$

$$\boxed{H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,j}}{(s-\lambda_i)^{j+1}}}$$

Si ha che l'asse di convergenza della funzione di trasferimento vale

$$max\,\{Re(\lambda_i)|\exists j : d_{i,j} \neq 0\}$$

Ricordando la formula 3.1 abbiamo che la funzione di trasferimento puo essere riscritta come

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b^{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0 s^0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 s^0}$$

La funzione è una funziona razionale nella variabile s , propria se $n \geq m$, strettamente propria se $n > m$. Inoltre definiamo con $Re[s]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di s e con $Re(s)$ lo spazio della funzioni razionali di s . Inoltre se esplicitiamo le radici dei polinomi otteniamo

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)^{q_1}\ (s-z_2)^{q_2}\ \ldots\ (s-z_u)^{q_u}}{(s-p_1)^{\mu_1}\ (s-p_2)^{\mu_2}\ \ldots\ (s-p_h)^{\mu_h}} \qquad \begin{cases} \sum q_i = m \\ \sum \mu_i = n \\ K = \frac{b_m}{a_n} \end{cases}$$

Definizione. (Zero)
Gli zeri della funzione di trasferimento H(s) sono i valori di s per i quali H(s) tende a zero (Sono quindi le radici del polinomio n(s)).
Lo zero $z_i \in \mathbb{C}$ ha molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se il limite

$$\lim_{s \to z_i} \frac{1}{(s-z_i)^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.
Il punto improprio ∞ è uno zero di molteplicità K se il limite

$$\lim_{s \to \infty} s^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.

Definizione. (Polo)
I poli della funzione di trasferimento H(s) sono i valori per i quali H(s) tende a infinito (Sono quindi le radici del polinomio d(s)).
Il polo $p_i \in \mathbb{C}$ ha molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se il limite

$$\lim_{s \to p_i} (s - p_i)^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero .
Il punto improprio ∞ è un polo di molteplicità k se il limite

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero

Teorema 3.1.1 – BIBO stabilità e poli di H(s)

Dato il sistema causale SISO LTI di funzione di trasferimento H(s) con polinomi n(s) e d(s) coprimi , il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli sono nel semipiano sinistro aperto del piano complesso , ovvero

$$Re(p_i) < 0, i = 0, \ldots, deg\{d(s)\}$$

4 Diagrammi di Bode

4.1 risposta in frequenza

Definizione. (Risposta in frequenza)

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt \quad w \in \mathbb{R}$$

- ⋆ Modulo :
$$A(w) = |H(jw)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt \right| \quad w \in \mathbb{R}$$

- ⋆ Fase :
$$\phi(w) =< H(jw) = arg\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt \right\} \quad w \in \mathbb{R}$$

- ⋆
$$\overline{H(jw)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{-jwt}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\overline{e^{-jwt}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{jwt} = H(-jw)$$
La risposta in frequenza è una funzione hermitiana.
Da questa proprietà deriviamo che
$$A(w) = A(-w) \qquad phi(w) = -\phi(-w)$$

- ⋆ Per sistemi BIBO stabili con risposta impulsiva senza componenti impulsiva , la riposta in frequenza H(jw) è una funzione continua in w e vale
$$\lim_{w \to \pm\infty} H(jw) = 0$$

I sistemi causali LTI e BIBO stabili descritti da

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dit^i} \quad t \in \mathbb{R}$$

rispondono ad un ingresso $u(t) = e^{jwt}$ $t \in \mathbb{R}$ con $v(t) = H(jw)e^{jwt}$ $t \in \mathbb{R}$, sostituendo i termini di u(t) e v(t) nel sistema otteniamo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i H(jw)(jw)^i e^{jwt} = \sum_{i=0}^{n} b_i (jw)^i e^{jwt} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$H(jw)e^{jwt} \sum_{i=0}^{n} a_i (jw)^i = e^{jwt} \sum_{i=0}^{n} b_i (jw)^i \quad t \in \mathbb{R}$$
$$H(jw) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i (jw)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (jw)^i}$$

La riposta in frequenza H(jw) non è altro che la **trasforma di Fourier della risposta impulsiva** quando il sistema LTI è BIBO stabile

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt$$

Per sistemi causali

$$H(jw) = \int_{0^-}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt$$

Sempre per i sistemi BiBO stabili vale che

$$H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}$$

si ha quindi che

$$H(jw) = H(s)\big|_{s=jw}$$

4.2 Diagrammi di Bode

Definizione. (Diagramma di Bode)
I **Diagrammi di Bode** sono una rappresentazione grafica della riposta in frequenza H(jw).

Sfruttando le proprietà di simmetria del modulo e dalla fase della risposta in frequenza $A(w) = A(-w) \quad \phi(w) = -\phi(-w)$ possiamo graficare $w \geq 0$ Inoltre la riposa in frequenza in notazione polare

$$H(jw) = A(w)e^{j\phi(w)}$$
$$ln(H(jw)) = ln(A(w)) + j\phi(w)$$

quindi per graficare il logaritmo della riposta in frequenza dobbiamo graficare

- ⋆ il logaritmo naturale dell'ampiezza (*Diagramma di bode dell'ampiezza*)
- ⋆ il modulo della riposta (*Diagramma di bode della fase*)

Inoltre invece di utilizzare il logaritmo naturale del modulo si usa il **decibel(dB)**

$$|H(jw)|_{db} = 20\ \log_{10}|H(jw)|$$

Anche nell'asse delle ascisse non utilizzeremo w ma $\log_{10} w$ Data la funzione di trasferimento come rapporto di polinomi

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)^{\mu_1'}\ (s-z_2)^{\mu_2'}\ \ldots\ (s-z_u)^{\mu_u'}}{(s-p_1)^{\mu_1}\ (s-p_2)^{\mu_2}\ \ldots\ (s-p_r)^{\mu_r}}$$

- ⋆ $z_i \in \mathbb{R}$ con molteplicità di μ_i' veranno riscritti come

$$(s-z_i) = -z_i(1+s\tau_i') \qquad \tau_i' = \frac{-1}{z_i}$$
$$(s-z_i)^{\mu_i'} = (-z_i)^{\mu_i'}(1+s\tau_i')^{\mu_i'}$$

- ⋆ poli reali $p_i \in \mathbb{R}$ di molteplicità μ_i

$$(s-p_i = -z_i(1+s\tau_i) \qquad \tau_i = \frac{-1}{p_i} \text{ costante di tempo del polo}$$
$$(s-p_i)^{\mu_i} = (-p_i)^{\mu_i}(1+s\tau_i)^{\mu_i}$$

- ⋆ zeri complessi coniugati $z_i, \overline{z_i}$ di molplicità μ_i'

$$\begin{aligned}(s-z_i)(s-\overline{z_i}) &= s^2 - 2Re(z_i) + |z_i|^2\\ &= |z_i|^2\left(1+2\ \frac{Re(z_i)}{|z_i|}\ \frac{s}{|z_i|} + \frac{s^2}{|z_i|^2}\right)\\ &= |z_i|^2\left(1+2\zeta_i'\frac{s}{\omega_i'} + \frac{s^2}{\omega_i'^2}\right) \quad \begin{cases}\zeta_i' = -\frac{Re(z_i)}{|z_i|}\\ \omega_{ni}' = |z_i|\end{cases}\end{aligned}$$
$$(s-z_i)^{\mu_i'}(s-\overline{z_i})^{\mu_i'} = |z_i|^{2\mu_i'}\left(1+2\zeta_i'\frac{s}{\omega_{ni}'} + \frac{s^2}{\omega_{ni}'^2}\right)^{\mu_i'}$$

- ⋆ poli complessi coniugati $p_i, \overline{z_i}$ di molteplicità μ_i

$$\begin{aligned}(s-p_i)(s-\overline{p_i}) &= s^2 - 2Re(p_i) + |p_i|^2\\ &= |p_i|^2\left(1+2\ \frac{Re(p_i)}{|p_i|}\ \frac{s}{|p_i|} + \frac{s^2}{|p_i|^2}\right)\\ &= |p_i|^2\left(1+2\zeta_i'\frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right) \quad \begin{cases}\zeta_i = -\frac{Re(p_i)}{|p_i|}\\ \omega_{ni} = |p_i|\end{cases}\end{aligned}$$
$$(s-p_i)^{\mu_i}(s-\overline{p_i})^{\mu_i} = |p_i|^{2\mu_i}\left(1+2\zeta_i\frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)^{\mu_i}$$

I parametri $\omega'_{ni}, \omega_{ni}$ vengo detti **pulsazioni naturali**.
I parametri ζ'_i, ζ_i vengono detti **coefficienti di smorzamento**

4.3 Forma di Bode della funzione di trasferimento

$$H(s) = K_B \frac{\prod_i (1+s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} - \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{s^v \prod_i (1+s\tau_i)^{\mu_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} - \frac{s^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}$$

$$K_B = \frac{b_m \prod_i (\tau_i)^{\mu_i} \prod \left(\frac{1}{\omega^2_{ni}}\right)^{2\mu_i}}{a_n \prod_i (\tau'_i)^{\mu'_i} \prod \left(\frac{1}{\omega'^2_{ni}}\right)^{2\mu'_i}} \quad \textbf{Guadagno di Bode}$$

Ora sapendo che $H(jw) = H(s)\Big|_{s=jw}$ possiamo ricavare la forme di bode della riposta in frequenza

$$\boxed{H(jw) = K_B \frac{\prod_i (1+jw\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{jw}{\omega'_{ni}} - \frac{w^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{(jw)^v \prod_i (1+jw\tau_i)^{\mu}_i \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{jw}{\omega_{ni}} - \frac{w^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}}$$

Utilizzando il logaritmo e l'argomento possiamo sfruttare le proprietà che ci semplificano i conti

$$\begin{cases} ar(ab) = arg(a) + arg(b) \\ arg(\frac{a}{b}) = arg(a) - arg(b) \\ arg(a^k) = k\ arg(a) \end{cases}$$

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\left\{\frac{|K_B|\prod_{i=1}|1+j\omega\tau'_i|^{\mu'_i}\prod_{i=1}\left|1+j2\frac{\zeta'_i}{\omega_n^2}\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right|^{\mu'_i}}{|(j\omega)^\nu|\prod_{i=1}|1+j\omega\tau_i|^{\mu_i}\prod_{i=1}\left|1+j2\frac{\zeta_i}{\omega_n^2}\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right|^{\mu_i}}\right\}$$

$$= 20\log_{10}|K_B| + \quad \text{termine costante}$$

$$+\sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10}|1+j\omega\tau'_i| + \dots \quad \text{zeri reali}$$

$$+\sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10}\left|1+j2\frac{\zeta'_i}{\omega_n^2}\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right| + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati}$$

$$-20\nu\log_{10}|j\omega| - \dots \quad \text{radici nell'origine}$$

$$-\sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10}|1+j\omega\tau_i| - \dots \quad \text{poli reali}$$

$$-\sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10}\left|1+j2\frac{\zeta_i}{\omega_n^2}\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right| \quad \text{poli complessi coniugati}$$

$$
\begin{aligned}
\angle H(j\omega) = \arg &\left\{ K_B \frac{\prod_{i=1}(1+j\omega\tau_i')^{\mu_i'} \prod_{i=1}\left(1+j2\frac{\zeta_i'}{\omega_n'}\omega - \frac{1}{\omega_n'^2}\omega^2\right)^{\mu_i'}}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1}(1+j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1}\left(1+j2\frac{\zeta_i'}{\omega_n'}\omega - \frac{1}{\omega_n'^2}\omega^2\right)^{\mu_i}} \right\} \\
= &\arg(K_B) + \quad \text{termine costante} \\
&+ \sum_{i=1} \mu_i' \arg(1+j\omega\tau_i') + \dots \quad \text{zeri reali} \\
&+ \sum_{i=1} \mu_i' \arg\left(1+j2\frac{\zeta_i'}{\omega_n'}\omega - \frac{1}{\omega_n'^2}\omega^2\right) + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati} \\
&- \nu \arg(j\omega) - \dots \quad \text{radici nell'origine} \\
&- \sum_{i=1} \mu_i \arg(1+j\omega\tau_i) - \dots \quad \text{poli reali} \\
&- \sum_{i=1} \mu_i \arg\left(1+j2\frac{\zeta_i'}{\omega_n'}\omega - \frac{1}{\omega_n'^2}\omega^2\right) \quad \text{poli complessi coniugati}
\end{aligned}
$$

5 Segnale a tempo discreto

1. Impulso di Kronecker :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ o & n \in \mathbb{Z} \setminus 0 \end{cases}$$

   Rappresenta , per certi aspetti , l'equivalente a tempo discreto dell'impulso di dirac

2. Gradino unitario discreto :

$$\delta_{-1}(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

3. Rampa unitaria discreta :

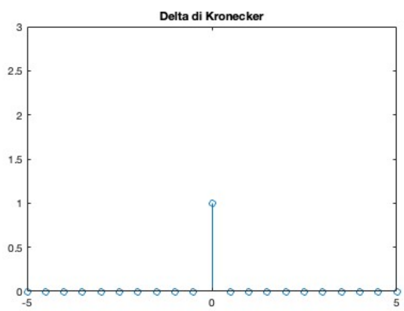
$$\delta_{-2}(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

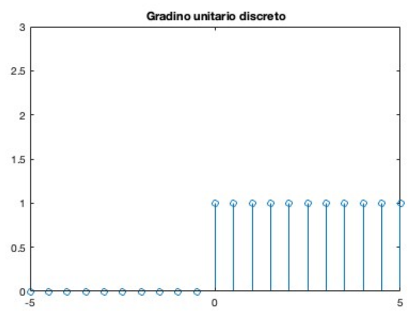
4. Finestra rettangolare :

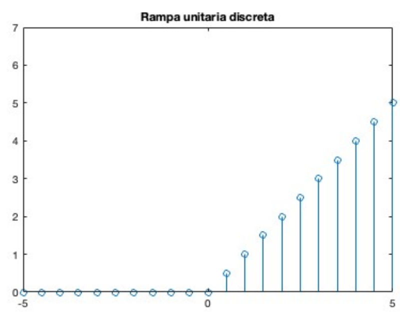
$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

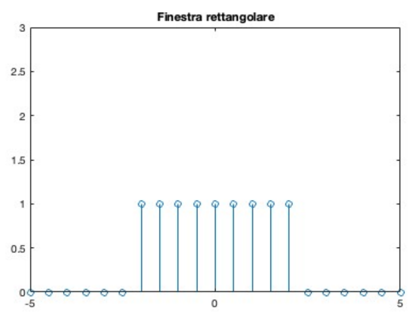
   La N corrisponde al numero di campioni non nullo , inoltre , rispetto al caso continuo , la finstra rettangolare non ha campioni distribuiti simmetricamente rispetto all'origine. Possiamo creare una finestra rettangolare simmetrica solo se il numero di campioni N è dispari

$$R_{2M+1}(n+M) = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$









5. Successione esponenziale discreta :

$$v(n) = Ae^{j\Phi}\lambda^n = Ae^{j\Phi}\rho^n e^{j\theta n} = A(\cos(\theta n + \Phi) + i\sin(\theta n + \Phi)) \quad n \in \mathbb{Z}$$

6. Successione sinusoidale discreta :

$$v(n) = A\cos(\theta n + \Phi) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

La versione campionata (campioni equi spaziati) di un segnale periodico non è necessariamente un segnale periodico . Ciò si erifica se e solo se esistono due interi N e K con N non negativo tali che

$$\theta(n + N) + \phi = \theta n + \phi + 2k\pi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

oppure una condizione equivalente è

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

7. Successione sinusoidale modulata esponenzialmente

$$v(n) = A\rho^n \cos(\theta n + \phi)$$

5.1 Proprietà

- ⋆ Cambiamento di Scala e traslazione :
  Nel caso discreto è fondamentale6 l'ordine delle operazione : prima traslazione poi cambiamento di scala

- ⋆ Estensione e durata :
  L'estensione di un segnale discreto può essere definita come un insieme di instanti contigui
  La Durata invece è data dall' valore dell'instante finale meno il valore dell'instante iniziale più uno

- ⋆ Area :

$$A_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$$

- ⋆ Valore medio :

$$m_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

- ⋆ Energia :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- ⋆ Potenza :

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

- ⋆ Energia e potenza mutua :

$$E_{x,y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)}$$

$$P_{x,y} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)\overline{y(n)}$$

⋆ Segnali discreti periodici :

$$A_x(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n)$$

$$m_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n) = \frac{A_x(N)}{N}$$

$$E_x(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x(n)|^2$$

$$P_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x(n)|^2 = \frac{E_x(N)}{N}$$

⋆ Convoluzione :

$$z(n) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

Valgono tutte le proprietà viste nel tempo continuo

5.2 Campionamento

Definizione. (Replica)
Dato un segnale $x(t)$ e numero reale positivo T , viene indicato con **versione replicata di passo T** del segnale , il segnale periodico di periodo T che è espresso da

$$[rep_t x](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT)$$

L'operazione di replicazione è definita solo se il segnale ha durata limitata.
Inoltre possiamo anche definire il **treno campionatore ideale** di periodo T come

$$\widetilde{\delta_T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Ora possiamo definire la versione replicata nel seguente modo

$$[rep_T x](t) = [x(t) * \widetilde{\delta_t}]$$

Se passiamo nel dominio della frequenza possiamo calcolare

$$X_{rep}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{K}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Possiamo vedere che la ripetizione nel dominio delle frequenze è una sequenza di valori discreti della trasformata di x in corrispondenza di k/T e scalati di $1/T$; Abbiamo che quindi una replicazione nel dominio del tempo corrisponde con un campionamento nel dominio della frequenza

Campionare significa estrarre dal segnale analogico i valori che assumi in determinati istanti temporali.Se il campionamento è uniforme allora gli istanti temporali sono equispaziati di T , detto **periodo di campionamento** , mentre $f_c + \frac{1}{T}$ rappresenta la **frequenza di campionamento**.
Un modo semplice per campionare un segnale è ill **campionamento impulsivo** , ciuoe utilizzando il treno di impulsi.

$$x_p(t) = [samp_T x](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

Se passiamo nel dominio della frequenza ed esiste la trasformata di Fourier del segnale , possiamo calcolare la trasformata di Fourier della versione campionata , allora troviamo che

$$X_p(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T}[rep_{\frac{1}{T}} X](f)$$

Quindi In conclusione :

- ⋆ Campionamento nel dominio del tempo corrisponde ad una replicazione nel dominio della frequenza
- ⋆ In generale , ad una replicazione in un dominio corrisponde un campionamento nell'altro dominio

Teorema – del campionamento ideale

Un segnale tempo continuo x(t) è rappresentato perfettamente dai suoi campioni presi con passo T ($f_c = \frac{1}{T}$) se :

1. $x(t)$ è un segnale reale rigorisamente limitato in banda , con ciò intendendo che la funzione pari $|X_a(f)|$ ha supporto limitato
2. La frequenza di campionamento f_c è maggiore della frequenza di Nyquist $f_n = 2B$ dove B rappresenta la larghezza di banda monolatera del segnale , che è definita come

$$B = inf\{\overline{f} \in \mathbb{R}_+ : |X_a(f)| = 0 \;\; per \;\; |f| > \overline{f}\}$$

Se le condizioni del questo teorema sono soddisfatte allora il segnale può essere ricostruito a partire dal $[samp_T x](t)$ utilizzando un filtro con risposta in frequenza del tipo

$$H_r(f) = T\prod\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c}\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$

$$h_r(t) = F^{-1}[H_r(f)](t) = (2f_L T)sinc(2f_L t) \quad \xrightarrow{f_L = f_c/2} sinc\left(\frac{t}{T}\right)$$

A condizione che $B < f_L < f_c$, normalmente si assume che $f_c = 2f_L$. Quindi il segnale può essere ricostruito attraverso la **formula di interpolazione ideale**

$$x_a(t) = [samp_T x * h_r](t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h_r\right](t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * sinc\left(\frac{t}{T}\right)\right](t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

Nel caso in cui campionassimo un segnale a durata limita , quindi banda *illimitata* , oppure campionassimo un segnale a Banda limitato con frequenza minore di quella di Nyquist , le repliche risultano sovrapposte una all'altra , questo fenomeno prende il nome di **aliasing**.In presenza di aliasing non è possibile ricostruite il segnale di partenza.
Però e possibile utilizzare filtri **anti-alising** , cioè filtri di tipo passa-basso con risposta in frequenza costante e non nulla nell'intervallo [-B,B] e nulla al di fuori dell'intervallo e campionare l'uscita con frequenza maggiore di quella di Nyquist. Questo è fatto per preservare le frequenza che ci interessano per una specifica applicazione.

5.3 Serie di Fourier

Nel caso di un segnale x(n) a tempo discreto e periodico , $x(n+N) = x(n)$ dove N è il più piccolo intero che soddisfa la relazione $\theta = \frac{2\pi}{N}$ $(v_0 = \frac{1}{N})$. [1]. Allora possiamo scrivere la DFS del segnale

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N_1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad \text{Equazione di sintesi}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad \text{Equazione di analisi}$$

Ci serve solo N esponenziali complessi per rappresentare un segnale discreto periodico con periodo N poichè

$$e^{j(k+N)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} e^{jN\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} e^{2\pi ni} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

Inoltre anche i coefficienti a_k sono periodici di periodo N
Inoltre essendo una serie a coefficienti finiti , non vi sono problemi di convergenza e quindi ogni segnale periodico ammette una serie di Fourier (discreta)

5.3.1 Proprietà DFS

Sia $x[n]$ un segnale periodico con periodo N e $X[k]$ la sua DFS. Valgono le seguenti proprietà:

1. **Linearità**:
$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX[k] + bY[k]$$
2. **Simmetria per segnali reali**:
$$x[n] \text{ reale} \Rightarrow X[-k] = X[k]^*$$
3. **Traslazione nel tempo**:
$$x[n-m] \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$$
4. **Traslazione in frequenza (Modulazione)**:
$$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} x[n] \leftrightarrow X[k-k_0]$$
5. **Convoluzione periodica**:
$$(x * y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m] \leftrightarrow X[k] \cdot Y[k]$$
6. **Prodotto nel tempo**:
$$x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow \frac{1}{N}(X * Y)[k]$$
dove $*$ è la convoluzione periodica in frequenza.
7. **Teorema di Parseval**:
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$
8. **Periodicità**:
$$X[k+N] = X[k], \quad x[n+N] = x[n]$$
9. **Simmetria circolare**:
$$x[-n] \leftrightarrow X[-k] = X[N-k]$$

[1] nel tempo discreto un fasore o segnale sinusoidale sono periodico solo se v_0 è razionale

5.4 Trasformata di Fourier

5.4.1 DTFT

Data una sequenza discreta $x[n]$ la DTFT mappa il segnale dal dominioo del tempo discreto a una funzione **funziona continua e periodica** nel dominio delle frequenze

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad \text{Equazione di Analisi}$$

Ora possiamo anche definire l'antitrasformata di Fourier

$$x(n) = \int_1 X(v)e^{j2\pi vn}dv \qquad \text{Equazione di sintesi}$$

Il periodo è uno 1 , poichè seguiamo il periodo dell'esponenziale complesso che sarebbe 2π ma definendo $v = \frac{1}{N} = \frac{\theta}{2\pi}$ quindi il periodo diventa uno quindi $X(v+1) = X(v)$. Quindi , dato il periodo di 1 , l'intervallo di integrazione può essere un qualsiasi intervallo di ampiezza unitario.
A differenza della DTFS , esistono alcune condizione che garantiscono la convergenza della trasformata :

- ⋆ La serie converge se la sequenza è sommabile :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < +\infty$$

  Inoltre la sommabilità della sequenza la serie nell'equazione di analisi converge uniformemente ad una funzione continua

- ⋆ La serie è ad energia finita :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty$$

5.4.2 DFT

Per la dualità tempo-frequenza se eseguiamo un campionamento nel dominio della frequenza , quindi della DTFT , considerando campioni equi spaziati a multipli interi di $1/N$, questo porta ad una replicazione nel tempo (compie ogni N punti).
Questi campioni equispaziati possono essere visti come coefficienti DFS delle sequenza periodica $\tilde{x}(n)$ che si ottiene dalla replicazione nel tempo di $x(n)$

$$X(v) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi vkn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi vn}$$

6 Sistemi a tempo discreto

Definizione. (Tempo-invarianza)
Un sistema dinamico inizialmente a riposo è **tempo invariante** se traslazioni nel tempo dei valori assunti dagli ingressi $u(k)$ provocano le stesse traslazioni nel tempo dei valori assunti dalle uscite $v(k)$.
In altre parole se u(k) produce v(k) allora $u(k-d)$ produce $v(k-d)$ con $d \in \mathbb{Z}$ (In realtà $d \in \mathbb{N}$ poichè nella realtà possiamo solo ritardare un segnale e non anticiparlo , non conoscendo il futuro)
Inoltre possiamo definire l'operatore **ritardo** σ come

$$[\sigma^d u](k) = u(k-d)$$

Definizione. (Stabilità esterna o BIBO , bounded-input bounded output)
Un sistema dinamico a tempo discreto Σ è **BIBO stabile** se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_v , tale che per ogni segnale di ingresso u(k) che soddisfa

$$|u(k)| \leq M_u \quad k \in \mathbb{Z}$$

la corrispondente risposta in uscita v(k) soddisfa

$$|v(k)| \leq M_v$$

Un sistema **SISO lineare** può essere espresso nella seguente forma :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(k)v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i(k)u(k-i) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

dove $a_i(k), b_i(k)$ sono coefficienti valori reali che possono dipendere dla tempo con a_0, b_m, a_n non nulli Se invece abbiamo un sistema **SISO lineare tempo.invariante** abbiamo che l'equazione alle differenza diventa

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

- ⋆ Se $n = 0$ il sistema viene descritto dall'equazione

$$v(k) = \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{a_0} u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

  Questo modello è chiamato **Modello a media mobile (MA)**

- ⋆ Se $m = 0$ il sistema viene descritto dall'equazione

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_0} v(k-i) = u(k)$$

  Questo modello è chiamato **Modello autoregressivo (AR)**

Inoltre ogni sistema descritto dall'equazione (1) può sempre essere pensato come la serie del modello MA

$$z(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

e del modello AR

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = z(k)$$

Per questo i modelli descritti descritti da (1) sono noti come **modelli autoregressivi a parametri mobile (ARMA)**

6.1 Evoluzione Libera

Definizione. (Evoluzione libera)
Data l'equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(-1), v(-2), \ldots, v(-n)$$

l'evoluzione libera $v_l(k) \quad k \geq 0$ del sistema è la soluzione ell'equazione alle differenza omogenea associata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = 0$$

Definizione. (Equazione caratteristica)
Data l'equazione alle differenze omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = 0$$

l'equazione algebrica

$$d(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-1} z^i = 0$$

si chiama equazione caratteristica del sistema.
Avendo assunto $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ avrò un polinomio di grado n , inoltre il polinomio si dice *monico* se $a_0 = 1$

Definizione. (radici del sistema) Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ con $(r \leq n)$ le radice caratteristiche dell'equazione caratteristica sono

$$d(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-1} z^i = 0$$

con molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{N}$ allora

$$d(z) = \prod_{i=1}^{r} (z - \lambda_i)^{\mu_i}$$

Definizione. (Modi del sistema)
Le soluzioni elementari dell'equazione alle differenze omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = 0 \qquad k \geq 0$$

sono le successioni

$$m_{i,j} = \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

per $i = 1, \ldots, r$ $j = 0, \ldots, \mu_i - 1$ so chiamata **modi elementari del sistema**

Teorema 6.1.1 – Evoluzione della radice

La soluzione $v_l(k)$ dell'equazione alle differenze omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = 0 \qquad k \geq 0$$

può essere scritta come la combinazione lineare dei modi del sistema

$$v_l(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} c_{i,j} \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k$$

dove i coefficienti $c_{i,j}$ sono determinati univocamente alle condizioni iniziali

$$v(-1), v(-2), \ldots, v(-n)$$

La combinazione lineare di radici complesse coniugate può essere scritta nei seguenti modi

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} M_{i,j} \frac{k^j}{j} \rho_i^k \cos(\theta_i k + \varphi)$$
$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} \left(a_{i,j} \frac{k^j}{j} \rho_i^k \cos(\theta_i k) + b_{i,j} \frac{k^j}{j} \rho_i^k \sin(\theta_i k) \right)$$

per una coppia di radici complesse coniugate $\lambda_i, \overline{\lambda}_i \in \mathbb{C}$ con molteplicità μ_i

Definizione. (Carattere dei modi)
il modo elementare $m_{i,j}(k)$ è:

- ⋆ **Convergente a zero**
$$\lim_{t \to \infty} |m_{i,j}(k)| = 0$$
- ⋆ **Limitato** :
$$\exists M < \infty \quad |m_{i,j}(k)| < M \quad \forall k \geq 0$$
- ⋆ **illimitato o divergente** : altrimenti

Teorema 6.1.2 – Carattere dei modi

il modo elementare

$$m_{i,j}(k) = \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k \qquad k \in \mathbb{Z}_+ \ , \ j \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_i \in \mathbb{C}$$

- ⋆ **Convergente a zero** : per $k \to \infty$ se e solo se $|\lambda_i| < 1$
- ⋆ **Limitato** : in $[0, +\infty]$ se e solo se $|\lambda_i| \leq 1$ e questi modi sono *semplice* (molteplicità uguale ad uno)
- ⋆ **Divergente** : per $k \to \infty$

Definizione. (Stabilità interna o asintotica)
Il Sistema

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(-1), v(-2), \dots, v(-n)$$

l'evoluzione libera $v_l(k)$ converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \to +\infty} v_l(k) = 0$$

Definizione. (Stabilità semplice)
Il Sistema

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \geq 0$$

è **semplicemente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(-1), v(-2), \dots, v(-n)$$

l'evoluzione libera $v_l(k)$ è limitata

$$\exists\ 0 < M < \infty \quad |v_l(k)| < M \quad \forall k \geq 0$$

Teorema 6.1.3 – Stabilità

n sistema LTI causale Σ è

- ⋆ **Stabile** :
  se e solo se tutti i modi sono limitati
- ⋆ **Asintoticamente stabile** :
  se e solo se tutti i modi convergono a zero per $k \to +\infty$
- ⋆ **Instabile** :
  se esiste *almeno* un modo divergente , ovvero esiste almeno una radice λ_i tale che $\lambda_i > 1$ oppure $|\lambda_i| = 1$ e la radice **non è semplice**

6.2 Evoluzione forzata

Definizione. (Risposta Implusiva)
Dato un sistema causale SISO LTI , descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \geq 0$$

la riposta all'impulso $h(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i \delta(k-i) \qquad k \geq 0$$

con condizioni iniziali nulle , il sistema è a riposo

$$h(-1) = , h(-2) = 0, \dots, h(-n) = 0$$

Per i sistemi a tempo discreto abbiamo le seguenti espressioni generali per la risposta impulsiva

- $\star$ se $n = 0$ (modello MA)

$$h(k) = \frac{1}{\bar{a}_0} \sum_{i=0}^{m} b_i \delta(k-i)$$

- $\star$ se $n \geq 1$ e $n > m$

$$h(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} d_{i,j} \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k \delta_{-1}(k)$$

- $\star$ se $n \geq 1$ e $n \leq m$

$$h(k) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \delta(k-i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} d_{i,j} \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k \delta_{-1}(k-m+n-1)$$

Definizione. (Convoluzione discreta) Il prodotto di convoluzione discreto tra due successioni $v_1(k)$ e $v_2(k)$, con $k \in \mathbb{Z}$, è dato dalla successione $[v_1 * v_2](k)$ definita dalla sommatoria

$$\begin{aligned}[v_1 * v_2](k) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_1(i) v_2(k-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_1(k-i) v_2(i)\end{aligned}$$

se esiste.

Teorema 6.2.1 – Evoluzione forzata

La risposta forzata di un sistema SISO LTI con risposta all'impulso $h(k)$ con condizioni iniziali nulle e input $u(k)$ è data dal prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} v_f(k) &= [h * u](k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)u(k-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{k} h(k-i)u(i) \end{aligned}$$

Inoltre se $u(k) = 0 \quad \forall k < 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned} v_f(k) &= [h * u](k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} h(i)u(k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} h(k-i)u(i) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sappiamo che partendo dalle condizioni iniziali nulle vale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i \delta(k-i) \qquad k \geq 0$$

per la tempo-invarianza possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h(k-i-j) = \sum_{i=0}^{n} b_i \delta(k-i-j) \qquad k \geq 0$$

e per la linearità (j non è legato all'indice delle sommatorie)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u(j) h(k-i-j) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(j) \delta(k-i-j) \qquad k \geq 0$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale anche

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j} u(j) h(k-i-j) = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j} u(j) \delta(k-i-j) \qquad k \geq 0$$

Da cui segue

$$\sum_{i=0}^{n} a_i [u * h](k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i [u * \delta](k-i) \qquad k \geq 0$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} a_i [u * h](k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \qquad k \geq 0$$

Segue quindi che $[u * k](k)$ è la soluzione dell'equazione alle differenze con ingresso u(k) e condizioni iniziali nulle $\square$

Definizione. Il sistema

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i), \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

inizialmente a riposo (i.e., condizioni iniziali nulle) è **BIBO stabile** se per ogni ingresso limitato

$$|u(k)| < M_u, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

esiste M_v tale che anche l'uscita è un segnale limitato

$$|v(k)| < M_v, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorema 6.2.2 – (BIBO stabilità per sistemi LTI a tempo continuo)

Il sistema LTI a tempo discreto Σ, descritto dalla risposta impulsiva $h(k)$, è BIBO stabile se e solo se $h(k)$ è una successione sommabile (i.e., assolutamente integrabile), i.e.

$$h(k) \in \ell_1(\mathbb{R})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty.$$

Se il sistema è causale ($h(k) = 0, \forall k < 0$), l'espressione precedente diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < +\infty.$$

Lemma. Dall'espressione della risposta impulsiva

$$h(k) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \delta(k-i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} d_{i,j} \frac{k^j}{j!} \lambda_i^k \delta_{-1}(k-m+n-1)$$

segue che il sistema è BIBO stabile se tutti i modi che compaiono con coefficiente non nullo in $h(k)$ sono asintoticamente stabili (convergenti a zero, $|\lambda_i| < 1$).

Lemma. La stabilità asintotica implica la BIBO stabilità ma non è vero il viceversa.

7 Trasformata zeta

Definizione. (Trasformazione Zeta) Data una successione v(k) , $k \in \mathbb{Z}$, la trasformata Zeta di v(k) è data dalla serie

$$\mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C}$$

se converge.
Se v(k) assume valori nulli solo per $k \in \mathbb{N}$, la trasformata Zeta vale

$$\mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k)z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C}$$

I punti del piano complesso $\mathbb{C}$ dove la serie converge definiscono la regione di convergenza.
Se la regione di convergenza non è l'insieme vuoto , allora contiene il complemento nel piano complesso do un cerchio chiuso nell'origine

$$ROC := \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| > r^{ROC}\}$$

Proprietà	**Dominio del tempo**	**Dominio Z**
Linearità	$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$
Ritardo temporale	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z) + \sum_{i=-k}^{-1} f(i)z^{-k-i}$
Anticipo temporale	$x[n+k]$	$z^{k}X(z) - \sum_{i=0}^{k-1} x[i]z^{k-i}$
Scalamento in frequenza	$a^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
Convoluzione	$x[n] * y[n]$	$X(z) \cdot Y(z)$
Derivata in Z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$
Valore iniziale	$x[0]$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
Valore finale	$\lim_{n\to\infty} x[n]$	$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$
Inversione temporale	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
Prodotto nel tempo	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi j}\oint X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$

Note:

- ⋆ $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$
- ⋆ Il teorema del valore finale vale solo se tutti i poli di $(z-1)X(z)$ sono interni al cerchio unitario.

7.1 Analisi dei sistemi discreti con la trasformata Zeta

Consideriamo l'equazione alle differenze di un sistema SISO LTI:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i), \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, e con condizioni iniziali $v(-1), v(-2), \ldots, v(-n)$. Se $n \geq m$, possiamo riscrivere l'equazione come:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assumiamo che l'ingresso sia una successione causale.
Se $u(k)$ ammette trasformata Zeta $U(z)$, allora anche $v(k)$ ammette trasformata Zeta $V(z)$, per ogni condizione iniziale. Calcolando la trasformata Zeta di entrambi i membri:

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i)\right]$$

e sfruttando le proprietà di linearità e ritardo temporale:

$$a_0 V(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z^{-i} V(z) + \sum_{p=-i}^{-1} v(p) z^{-i-p} \right) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i} U(z).$$

Raggruppando i termini:

$$\begin{aligned} a_0 V(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i} V(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{p=-i}^{-1} v(p) z^{-i-p} &= \sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i} U(z) \\ \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} V(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{p=-i}^{-1} v(p) z^{-i-p} &= \sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i} U(z). \end{aligned}$$

Moltiplicando entrambi i membri per z^n:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} V(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{p=-i}^{-1} v(p) z^{n-i-p} = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i} U(z).$$

Definendo i polinomi:

$$\begin{aligned} d(z) &:= \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}, \\ p(z) &:= -\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{p=-i}^{-1} v(p) z^{n-i-p}, \\ n(z) &:= \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$d(z)V(z) - p(z) = n(z)U(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

- ⋆ $d(z)$ coincide con l'equazione caratteristica dell'evoluzione libera.
- ⋆ $p(z)$ è un polinomio di grado $\leq n$ che contiene le condizioni iniziali.

8 Funzione di trasferimento

Dividendo per $d(z)$:

$$V(z) = \frac{p(z)}{d(z)} + \frac{n(z)}{d(z)} U(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

dove:

- ⋆ $\frac{p(z)}{d(z)} = V_l(z)$: trasformata dell'evoluzione libera
- ⋆ $\frac{n(z)}{d(z)} U(z) = V_f(z)$: trasformata dell'evoluzione forzata

La **funzione di trasferimento** è definita come:

$$H(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}.$$

Proprietà fondamentali:

- ⋆ $H(z)$ è la trasformata Zeta della risposta impulsiva $h(k)$:

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$$

- ⋆ Esiste corrispondenza biunivoca tra $h(k)$ (causale) e $H(z)$
- ⋆ Radici di $n(z)$: **zeri** della funzione di trasferimento
- ⋆ Radici di $d(z)$: **poli** della funzione di trasferimento

Teorema 8.0.1 – BIBO stabilità

Un sistema SISO LTI causale a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z)$ (rapporto di polinomi coprimi) è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di H(z) sono contenuti all'interno del cerchio unitario el piano complesso :

$$z_i \in \mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}, \quad i = 1, \ldots, \deg d(z).$$

Condizioni equivalenti:

1. La regione di convergenza di $H(z)$ contiene il cerchio unitario $\partial\mathbb{D}$
2. $H(z)$ è analitica in $\{z \mid |z| \geq 1\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$:

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} |H(z)| < \infty$$

3. La risposta impulsiva è sommabile: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

8.1 Dalla trasformata Zeta alla successione

Per $V(z) = \dfrac{n(z)}{d(z)}$ razionale propria ($\deg n(z) \leq \deg d(z)$), con decomposizione:

$$V(z) = \frac{n(z)}{z^\nu (z - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (z - \lambda_r)^{\mu_r}}, \quad \nu \geq 0$$

(ROC: $|z| > \max |\lambda_i|$). Procedura di antitrasformazione:

1. Calcolare $V_1(z) = \dfrac{V(z)}{z}$ (funzione strettamente propria)
2. Decomporre in fratti semplici:

$$V_1(z) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{A_i}{z^{i+1}} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} \frac{C_{i,j}}{(z - \lambda_i)^{j+1}}$$

3. Determinare i coefficienti A_i, $C_{i,j}$ tramite identità polinomiale
4. Riscrivere $V(z) = zV_1(z)$:

$$V(z) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{A_i}{z^i} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} C_{i,j} \frac{z}{(z - \lambda_i)^{j+1}}$$

5. Applicare le antitrasformate note:
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^l}\right\} = \delta(k-l)$$
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-\lambda_i)^{j+1}}\right\} = \binom{k}{j}\lambda_i^{k-j} \quad \text{(causale)}$$
ottenendo:
$$v(k) = \sum_{i=0}^{\nu} A_i \delta(k-i) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} C_{i,j}\binom{k}{j}\lambda_i^{k-j}$$

Osservazioni:

- ⋆ Per poli semplici ($\mu_i = 1$):
$$C_{i,0} = \lim_{z\to\lambda_i}(z-\lambda_i)V_1(z)$$
- ⋆ Applicabile a evoluzione libera ($V(z) = p(z)/d(z)$) e forzata ($V(z) = H(z)U(z)$)