Metodi matematici

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1 Richiami

1.1 Trigonometria

1.1.1 Formule di Werner

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \ \sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\
\cos\alpha \ \cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\
\sin\alpha \ \cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

1.2 Esponenziale complesso

L'esponenziale complesso è definito come

$$e^{i\omega t} = cos(\omega t) + isen(\omega t)$$

quindi l'esponenziale complesso è una funzione periodica con periodo pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1.2.1 Formule di Eulero

$$\begin{aligned}
&y \in \mathbb{C} \\
cosy &= \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \qquad (Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}) \\
siny &= \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad (Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i})
\end{aligned}$$

1.2.2 Derivazione

Considero la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{i\omega t} = cos(\omega t) + isen(\omega t)$ quindi

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\ Re(f(t))}{dt} + \frac{d\ Im(f(t))}{dt} = -\omega sin(\omega t) + i\omega cos(\omega t) = i\omega e^{i\omega t}$$

1.2.3 Integrazione

se $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t) = \int_a^b Re(f(t))dt + i\int_a^b Im(f(t))dt = \int_a^b e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}[e^{i\omega t}]_a^b = \frac{e^{i\omega b}-e^{i\omega a}}{i\omega}$$

2 Serie di Fourier

Definizione. una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se

$$x(t+T) = x(t) \ vale \ \forall t \in R$$

Si dice *periodo* di x il più piccolo T positivo per cui x è periodica. Se x è periodica di periodo T allora è periodica di periodo kT con $k > 0$.

$$f = \frac{1}{T} \text{ frequenza}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ frequenza angolare}$$

2.1 Polinomio di Fourier

Definizione. Polinomi di Fourier
Diremo polinomi di Fourier una funzione delle forma

$$P_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k cos(k\omega t) + \beta_k sin(k\omega t)) \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \gamma_k \in \mathbb{C} \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k e^{ik\omega t} + \gamma_{-k}e^{-ik\omega t}) \text{ Supponiamo che } (\gamma_{-k} = \bar{\gamma_k}) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k e^{ik\omega t} + \overline{\gamma_k e^{ik\omega t}}) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} 2Re(\gamma_k e^{ik\omega t}) \\
&= \gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(Re(\gamma_k)cos(k\omega t) + Im(\gamma_k)sin(k\omega t))
\end{aligned}$$

Quindi abbia che sussistono le seguenti relazione tra le due rappresentazione della formula di Fourier

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0 \\ Re(\gamma_k) = \frac{1}{2}\alpha_k \\ Im(\gamma_k) = -\frac{1}{2}\beta_k \\ \gamma_{-k} = \overline{\gamma_k} \end{cases}$$

2.1.1 Energia di un polinomio di Fourier

Definizione. Energia di un segnale
Dato un segnale periodico $x(t)$ di periodo T . si dice energia di $x(t)$ in $[0, T]$ l'espressione:

$$||x(t)||^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

se invece voglia parlare della norma del segnale abbiamo che

$$||x(t)|| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

Calcoliamo l'energia di un polinomio di Fourier:

$$\begin{aligned}
||Pn(t)||^2 &= \int_0^T |P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \right) \left(\overline{\sum_{h=-n}^{n} \gamma_h e^{ih\omega t}} \right) dt \\
&= \int_0^T \sum_{h,k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_h} e^{ik\omega t} e^{ih\omega t} dt \\
&= \sum_{h,k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_h} \int_0^T e^{i(k-h)\omega t} = \begin{cases} T & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases} \\
&= T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2
\end{aligned}$$

Ora fissato il segnale periodico $x(t)$ e sia $P_n(t)$ un generico polinomio di Fourier periodico . Cerchiamo il polinomio di Fourier che meglio approssimo il segnale x nel senso dell'energia , cioè il polinomio di Fourier che minimizzi la seguente espressione

$$\begin{aligned}
||x(t) - P_n(t)||^2 &= \int_0^T |x(t) - P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T (x(t) - P_n(t))(\overline{x(t)} - \overline{P_n(t)})\ dt \\
&= \int_0^T |x(t)|^2 + |P_n(t)|^2 - x(t)\overline{P_n}(t) - \overline{x}(t) P_n(t)\ dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \int_0^T x(t) \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k} e^{-ik\omega t} dt - \int_0^T \overline{x}(t) \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k}\ T\ \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt}_{c_k} - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k\ T\ \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{x}(t) e^{ik\omega t} dt}_{\overline{c_k}} \\
&= |x(t)|^2 + T \left(\sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{c_k} \right) \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} \left(|\gamma_k|^2 \bar{\gamma_k} c_k - \gamma_k \overline{c_k} + |c_k|^2 \right) - T \sum_{h,k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad {}^{1} \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k - c_k|^2 - T \sum_{h,k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}$$

Dopo tutti sti cazzo di conti viene fuori che il coefficiente gamma del polinomio di Fourier necessaria a minimizzare l'energia è il seguente

$$\gamma_k = c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \forall k = -n \dots n$$

Questi sono chiamati Coefficienti di Fourier .

[1] Ho completato il quadrato con i numeri complessi

Inoltre nelle seguente tabella sono presenti le equivalenze dei coefficienti di Fourier nella forma complessa e nella forma "reale"

$a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$
$a_k = 2Re(c_k) = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos(k\omega t)dt$
$b_k = -2Im(c_k) = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sin(k\omega t)d$

Definizione. (Disuguaglianza di Bessel)

$$T\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq ||x(t)||^2$$

Teorema 2.1

Sia x è un segnale periodico a energia finita , cioé $\int_0^T x^2(t)dt < +\infty$ allora se P_n è il polinomio di Fourier $P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} ||x - P_n||^2 = 0$$

Corollario. (Identità di Parseval)

$$T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = ||x(t)||^2$$

2.2 Traslazione e riscalamento

2.2.1 Traslazione orizzontale

Sia x un segnale di periodo T e di frequenza angolare ω . Fissiamo $a \in \mathbb{R}$ definisco

$$\tilde{x}(t) = x(t-a)$$

Calcolo i coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned}
\tilde{c_k} &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t)e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}x(t-a)e^{-ik\omega t}dt \qquad \begin{cases} s = t-a \\ ds = dt \end{cases} \\
&= \frac{1}{T}\int_{-a}^{T-a} x(s)e^{-ik\omega(s+a)}ds \\
&= \frac{1}{T}e^{-ik\omega a}\int_0^T x(s)e^{-ik\omega s}ds \\
&= e^{-ik\omega a}c_k
\end{aligned}$$

2.2.2 Traslazione verticale

$$\hat{x(t)} = \alpha + x(t)$$

$$\hat{c_0} = c_0 + \alpha \quad \hat{c_k} = c_k \qquad \forall k \neq 0$$

2.2.3 Riscalamento

Se $a > 0$

$$y(t) = x(at)$$

Qual è il periodo T_y di y , $T_y = \frac{T}{a}$. Ora calcolo il coefficienti di Fourier del polinomio riscalato

$$\begin{aligned} c_k^y &= \frac{a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} x(at)e^{-ika\omega t} \qquad \begin{cases} s = at \\ dt = \frac{1}{a}ds \end{cases} \\ &= \frac{a}{T}\int_0^{T} \frac{1}{a}\, x(s)e^{-ik\omega s}ds \\ &= c_k \end{aligned}$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ puntualmente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\sum_{+\infty}^{-\infty} c_k e^{ik\omega t} = x(t)$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ uniformemente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\lim_{n\to\mathbb{R}} sup_{t\in\mathbb{R}}\ |x(t) - P_n(t)|$$

Definizione. (Regolare a tratti)
Una funzione $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ si dica regolare a tratti se valgono le seguenti condizioni: esistono un numero finito di punti $t_1, t_2, \ldots, t_n 1in]0, T[$ tale che

- ⋆ se $t \in]0, T[\setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ la funzione x è derivabile in T e la sua derivata è una funzione continua di T (in quei punti x deve appartenere alla classe C^1)
- ⋆ esistono i seguenti limiti e sono finiti

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_i^-} x(t) &&\lim_{t\to t_i^+} x(t) \\ &\lim_{t\to 0^+} x(t) &&\lim_{t\to T^-} x(t) \\ &\lim_{t\to t_i^-} x'(t) &&\lim_{t\to t_i^+} x'(t) \\ &\lim_{t\to 0^+} x'(t) &&\lim_{t\to T^-} x'(t) \end{aligned}$$

Teorema 2.2

Sia x un segnale periodico di periodo T regolare a tratti in $[0, T]$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(t) = x(t) \quad \forall t \neq t_1, t_2, \ldots, t_n, 0, T$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(t_i) = \frac{\lim_{t\to t_i^-} x(t) + \lim_{t\to t_i^+} x(t)}{2}$$

Teorema 2.3

Sia x un segnale continuo e regolare a tratti (discontinuità della derivata).
Allora P_n converge uniformemente a x

3 Trasformata di Fourier

Definizione. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi è **sommabile** cioè :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

Definizione. (Trasformata di Fourier)
Definiamo la trasformata di fourier di x e denotiamo con $\mathscr{F}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathscr{F}(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t dt}$$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t dt}$ esiste finite in quanto

3.1 Proprietà della trasformata di Fourier

1. Siano λ e μ due costanti complessi allora

$$\mathscr{F}(\mu x(t) + \lambda y(t))(\omega) = \mu X(\omega) + \lambda Y(\omega)$$

Dimostrazione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mu x(t) + \lambda y(t)]\, dt = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$

☺

2. Traslazione

   ⋆ Traslazione nel tempo :
   Sia x una funzione sommabile , $t_0 \in \mathbb{R}$ e definiamo $y(t) = x(t - t_0)$ allora :

$$\mathscr{F}\left[y(t)\right](\omega)) = \mathscr{F}\left[x(t)\right](\omega)\ e^{-i\omega t_0}$$

Dimostrazione. Effettuo una cambio di variabili $\begin{cases} u = t - t_0 \\ du = dt \end{cases}$

$$\mathscr{F}\left[y(t)\right](\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du = e^{-i\omega t_0} X(\omega)$$

☺

3. Riscalamento : Sia x una funzione sommabile e sia $a \in R \setminus \{0\}$

$$\mathscr{F}\left[x(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$$

Dimostrazione. Basta effettuare un cambio di variabili $at = u$

$$\mathscr{F}\left[x(at)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{\frac{-i\omega u}{a}} du & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) e^{\frac{-i\omega u}{a}} du & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{\frac{-i\omega u}{a}} du = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$$

☺

4. Derivata

   ⋆ Derivata nel tempo :
   Sia x un segnale sommabile , derivabile e tale che $x'(t)$ è sommabile

   $$\mathscr{F}(x'(t))(\omega) = i\omega X(\omega)$$

   Dimostrazione.

   $$\hat{x}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-i\omega t} = x(t)e^{-i\omega t} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} = i\omega\hat{x}(\omega)$$

   ☺

   ⋆ Derivata nella frequenza :
   Se x è un segnale sommabile e anche $tx(t)$ è anche sommabile allora

   $$\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = \mathscr{F}(-itx(t))(\omega)$$

   Dimostrazione.

   $$\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega}x(t)e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} -itx(t)e^{-i\omega t}$$

   ☺

5. Simmetria :
   Sia x un segnale sommabile :

   ⋆ Se x è una segnale reale e pari allora anche la sua trasformata di Fourier è reale e pari

   ⋆ Se x è una segnale reale e dispari allora la sua trasformata di Fourier è immaginaria puro e dispari

6. Coniugazione :
   Sia x un segnale sommabile e denotiamo con $\overline{x(t)}$ il segnale complesso coniugato

   $$\mathscr{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \overline{X}(-\omega)$$

   Dimostrazione.

   $$\mathscr{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)e^{i\omega t}} = \overline{X(-\omega)}$$

   ☺

7. Convoluzione :

   Definizione. (Convoluzione)
   Sia x e t due funzioni sommabili. La convoluzione di x e t è definita da

   $$\begin{aligned}(x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s)ds\end{aligned}$$

   Se x e y sono segnali sommabili allora

   $$\mathscr{F}(x * y(t)) = \mathscr{F}(x(t))\ \mathscr{F}(y(t))$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}((x*y)(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x*y)(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)e^{-i\omega t}dsdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y(s) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)e^{-i\omega(t-s)}dt\right]}_{\widehat{x}(\omega)} e^{-i\omega s}ds \\
&= \widehat{x}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} y(s)e^{-i\omega s}ds = \widehat{x}(\omega)\ \widehat{y}(\omega)
\end{aligned}$$

☺

Definizione. (Antitrasformata di Fourier)
Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Definiamo l'antitrasformata di Fourier di X come :

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}dt$$

Osservazione :

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[x(t)](-\omega)$$

Teorema 3.1.1. *Se x è un segnale sommabile e la sua trasformata di Fourier $\widehat{X}(\omega)$ è sommabile allora :*

$$x = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(x)) = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(x))$$

in altre parole

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega t}$$

Denotiamo con L^1 l'insieme dei segnali sommabili

$$L^1 = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty\}$$

Teorema 3.1

Se $x \in L^1$ allora $\widehat{x}$ è continuo , limitato e $\lim_{\omega\to\pm\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$

Definiamo con L^2 le funzioni quadrato sommabili (i segnali ad energia finita)

$$L^2 = \left\{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)^2 < \infty\right\}$$

Proposizione. Se x è una segnale limitato e $x \in L^2$ allora $x \in L^2$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \in L^1$ e limitato

$$|x(t)|^2 = |x(t)|\ |x(t)| \leq |x(t)|\ C$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = C\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty$$

☺

Teorema 3.2

Se $x \in L^2$, segnale ad energia finita allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

esiste finito tranne al più per un insieme di valori di ω di misura nulla (Secondo Lebesgue) Definiamo allora :

$$\mathscr{F}[x(t)](\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

inoltre definendo

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[x(t)](-\omega)$$

abbiamo che per ogni $x \in L^2$

$$x = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}[x])) = \mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}(x)]$$

Infine posto $\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}[x(t)](\omega)$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(\omega)|^2$$

allora $\widehat{X} \in L^2$

4 Distribuzioni

Definizione. (spazio delle funzioni test)
Lo spazio delle funzioni test $\mathscr{S}$ è formata dalle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto e tali che

$$\lim_{t\to\pm\infty}(1+t^2)^k D^{(m)}\varphi(t) = 0 \quad \forall k, m \geq 1$$

(φ e le sue derivate vanno più velocente a zero del reciproco del polinomio)

Definizione. (Convergenza di funzioni test)
Sia $\varphi_n \in \mathscr{S}$ una successione , si dice che $\varphi_n \to \varphi$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$\lim_{n\to\infty}|(1+t^2)^k(D^{(m)}\varphi_n(t) - D^{(m)}\varphi(t))| = 0 \quad \forall k, m \geq 0$$

Definizione. (Distribuzione) Si dice **distribuzione** ogni funzionale lineare su $\mathscr{D}$ che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test

4.1 Derivate

Data $T \in \mathscr{S}'$, si dice derivata di T , la distribuzione definita ponendo

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' > \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

Poniamo

$$< T_x, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t)dt$$

allora

$$< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\varphi(t)dt = \underbrace{x(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi'(t)dt$$

Teorema 4.1.1. *Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti $\mathbb{R}$, la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con derivta ordinaria :*

$$T'_x = T_{x'}$$

4.2 Limiti

Sia T_n una successione di distribuzione , sia T una distribuzione.
Diciamo che $T_n \to T$ nel senso delle distribuzioni se

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

Se x_n è una successione di segnali scriviamo

$$x_n \to T \text{ in luogo di } T_{x_n} \to T$$

Se $T = T_x$ per un segnale x allora scriveremo

$$x_n \to x \text{ in luogo di } T_{x_n} \to T_x$$

Teorema 4.1

1. Siano x_n, x due segnali limitati tali che $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ allora è vero anche che $x_n \to x$ nel senso delle distribuzioni
2. Sia x un segnale a valori maggiori uguale a zero e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) = 1$. Definiamo $x_n(t) = nx(nt)$

4.3 Convoluzione

Definizione. Sia T una distribuzione e $\varphi \in \mathscr{D}$ definiamo

$$T * \varphi(t) = T(\varphi_t)$$

Notiamo che $T * \varphi$ è una funzione infinitamente derivabile

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{t * \varphi(t+h) - T * \varphi(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{T(\varphi_t(h)) - T(\varphi_t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} T\left(\frac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h}\right) \\
&= T\left(\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h-s) - \varphi(t-s)}{h}\right) \\
&= \varphi'(t-s) = \varphi'_t(s) \\
&= T(\varphi'_t(s))
\end{aligned}$$

Teorema 4.2

Sia φ_n una successione di funzioni test tali che $\varphi_n \to \delta_o$ nel senso delle distribuzioni Allora $T * \varphi_n \to T$ nel senso delle distribuzioni.
Ogni distribuzione è il limite di segnali infinitamente derivabile

4.4 Trasformata di Fourier

Sia x un segnale ad energia finita $\widehat{x}(\omega) = v.p \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$ definisco la distribuzione associata alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
T_{\widehat{x}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\varphi(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\varphi(\omega)dtd\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega)d\omega\right) dt}_{\widehat{\varphi}(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\widehat{\varphi}(t)dt = T_x(\widehat{\varphi})
\end{aligned}$$

Questo ha senso in quanto se $\varphi \in \mathscr{S}$ all ora $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$. Questo motiva la seguente definizione

Definizione. (Trasformata di Fourier per distribuzioni)
Sia T una distribuzione , la sua trasformata di Fourier $\widehat{T}$ è la distribuzione definita da

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$$

Esempio : Calcoliamo la trasformata di Fourier della Delta di Dirac

$$\widehat{\delta_0}(\varphi) = \delta_0(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = T_1(\varphi) = 1$$

Possiamo anche definire l'antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[T(\varphi)] = T(\mathcal{F}^{-1}[\varphi])$$

Inoltre vale che

$$\mathscr{F}[T(\varphi)] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[T(\varphi^r)] \qquad \phi^r(s) = \varphi(-s)$$
$$\mathscr{F}[T] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[T^r]$$

Esempio :

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta_0 \to f[1] = 2\pi\delta_0^r = 2\pi\delta_0$$

5 Funzione di una variabile complessa

Una funzione complessa di variabile complessa è una funzione del tipo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Definiamo gli operatori

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$
$$\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Lemma. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è differenziabile in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esistano $c, d \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + cw + d\overline{w} + o(|w|)$$
$$c = \partial_z f(z_0) \quad d = \partial_{\overline{z}} f(z_0)$$

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$, nell'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è differenziabile in $z_0 = (x_0, y_0)$ SSE lo sono le sue componenti u,v

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + \partial_x u(x_0, y_0) \cdot h + \partial_x u(x_0 . y_0) \cdot k + o(|(h, k)|)$$
$$v(x_0 + h, y_0 + k) = v(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0) \cdot h + \partial_x v(x_0 . y_0) \cdot k + o(|(h, k)|)$$
$$(h, k) \to 0$$

Ponendo $w = (h, k) = h + ik$ sommando otteniamo la differenziabilità di f notando che

$$h = \frac{\omega + \overline{w}}{2} \qquad k = \frac{\omega - \overline{w}}{2}$$

☺

Definizione. Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in \Omega$. Se esiste il limite di funzioni in due variabili

$$f'(z_0) = \lim_{w \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$$

questo si dice derivata in senso complesso di f in z_0

f è derivabile in senso complesso esiste esiste la derivata in sesnso complesso $\forall z_0 \in \Omega$

Proposizione. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è *derivabile in senso complesso* in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che :

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + cw + o(|w|) \ per \ w \to 0$$

e in tal caso $c = f'(z_0)$

Proposizione. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** nell'insieme Ω se è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω e se f' è continua .
Se $\Omega = \mathbb{C}$ la funzione si dice *intera*

Proposizione. La funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa SSE è di classe C^1 e vale la condizione di **Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

Osservazione : scritta $f = u + iv$ si ha :

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}[\partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv)] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)\right] \\ &= \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione : Prendiamo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olomorfa con u,v due volte derivabili dalle condizione di Cauchy-Riemann in forma reali

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

Ora deriviamo queste condizioni rispetto a x e somma membro a membro

$$\partial_{x^2} u - \partial_{xy} v + \partial_{xy} u + \partial_{x^2} v = 0$$

Derivata rispetto a y e diiferenza membro a membro

$$\partial_{xy} u - \partial_{y^2} v - \partial_{y^2} u - \partial_{xy} v = 0$$

Ora facciamo (1) - (2)

$$\partial_{x^2} u + \partial_{y^2} u + \partial_{x^2} v + \partial_{y^2} v = 0$$

$$(\partial_{x^2} u + \partial_{y^2} u) = 0 \quad \partial_{x^2} v + \partial_{y^2} v = 0$$

$$\Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$$

Le componenti di f sono funzioni armoniche , cioè funzione che risolvono l'equazioni di Laplace

$$\Delta g = \nabla^2 g = 0$$

5.1 Formula di Cauchy

Definizione. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω aperto con $\partial\Omega = \Gamma$ curva regolare è detto olomorfa su $\Omega \cup \Gamma$ se esiste $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ aperto contente $\Omega \cup \Gamma$ su cui f è olomorfa

Teorema 5.1: (Teorema Integrale di Cauchy)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e limitato con $\partial\Omega = \Gamma$ unione di curva regolari $\Gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ e sia f olomorfa su $\Omega \cup \Gamma$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 5.2: (Fomula di Cauchy del circolo)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e limitato con $\partial\Omega = \Gamma$ unione di curva regolari $\Gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$,infine sia f olomorfa su in $\Omega \cup \Gamma$.
Se $z_0 \in \Omega$ allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Se f è oleomorfa e nota sul bordo Γ allora conosciamo f su tutto Ω

Dimostrazione. sia $\delta > 0$ tale che

$$B(z_0, \delta) \in \Omega$$

Per il teorema (5.1) abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cup \gamma_{-\delta}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

poichè la funzione $\frac{f(z)}{z-z0}$ è olomorfa in $\Omega \cup \Gamma \setminus z_0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Il bordo $\gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \delta\}$ allora γ_δ è $z = z_0 + \delta e^{i\theta} \Rightarrow dz = i\delta e^{i\theta} d\theta$.
Risulta allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}}\delta i e^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\delta e^{i\theta})d\theta\end{aligned}$$

Osservando che il primo membro è indipendente dalla delta ed utilizzando la continuità di f , si ottiene infine :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\delta e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta \\ &= f(z_0) \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z0} &= f(z_0)\end{aligned}$$

☺

Proposizione. Una funzione f olomorfa in Ω ammette derivate complesse di ogni ordine , anch'esse olomorfe. Se D è un dominio semplice con $z_o \in D$ e $\overline{D} \subset \Omega$ vale

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz$$

5.2 Serie di potenze

Teorema 5.3: (Espansione in serie di Taylor)

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z \in D$$

Dimostrazione. Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa su $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z \in D$$

Sia $0 < r < R$ e poniamo $D_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, dalla formula de; circolo di Cauchy abbiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \quad su \quad D_r$$

Per $\xi \in \Gamma(D_r)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(\xi)}{\xi - z} &= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - z + z_0} \\
&= \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} \\
&= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} \\
&= \frac{z - z_0}{\xi - z_0} = \frac{z - z_0}{R} < 1 \quad \xi \in \Gamma(D_r) \quad z_0 \in D_r \\
&= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \\
f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right)}_{\text{F.di Cauchy per le derivate di f}} (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^n(z_0)}{n!}\right)(z - z_0)^n
\end{aligned}$$

☺

Il fatto che una funzione con infinite derivate sia localmente rappresentabile in serie di potenze è **falso** se la funzione in questione non è derivabile in senso complesso
Esempio :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f(x) ammette infinite derivate e $f(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione nulla , tuttavia $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

Definizione. (Funzione analitica)
Una funzione f $\Omega \to \mathbb{C}$ di dice **analitica in** Ω se è localmente rappresentabile come serie di potenze

Cioè se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono $r > 0$ e una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ con raggio di convergenza r tale che $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ per ogni $z \in \Omega : |z - z_0| < r$

5.3 Zeri e singolarità di funzioni complesse

Definizione. Se $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, z_0 si dice zero di molteplicità/ordine infinito per f .
z_0 si dice zero di molteplicità ordine m se $f^{(n)}(z_0) = 0$ se n< m e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Proposizione. Sia f olomorfa in Ω , $z_0 \in \Omega$ è zero di ordine m se e solo se esiste un funzione g olomorfa in Ω con $g(z_0) \neq 0$ tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

In particolare uno zero di **molteplicità finita è isolato** , ossia esiste un intorno U di $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\}$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ uno zero di f di molteplicità e sia $R = dist(z_o, \partial\Omega)$, per gli $|z - z_0| < R$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^{n-m}$$

l'ultima uguaglianza segue da $f^n = 0 \quad n < m$. Basta allora porre

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z) & \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^{n-m} |z - z_0| < R \end{cases}$$

Per l'inverso supponiamo che g sia funzione olomorfa , che quindi ammette sviluppo di Taylor centro in z_0, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ inoltre abbiamo che f si può scrivere come

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} \qquad k = n + m \qquad n = k - m$$

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{k=m}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k$$

allora dall'unicità dei coefficienti della serie di Fourier segue che $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad n < m$ ☺

Proposizione. Sia f olomorfa in Ω. Un punto $z_0 \in \Omega$ è uno zero di molteplicità infinita se e solo se è identicamente nulla nella componente connessa di $z_0 \in \Omega$

Teorema 5.4: (Unicità del prolungamento)

Siano f e g funzioni olomorfe in Ω con $\Omega \subseteq_{ap} \mathbb{C}$ connesso. Allora se una delle seguenti ipotesi è verificata $f = g$

1. f e g hanno lo stesso sviluppo in serie di Taylor in un punto di Ω
2. l'insieme $\{z : f(z) = g(z)\}$ ha un punto non isolato

Dimostrazione. 1. Entrambe le funzioni sono olomorfe quindi possono essere espresse come serie di funzioni , imponiamo che esse siano uguali in $z_0 \in \Omega$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} g^{(n)}(z_0)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0) - \sum_{n=0}^{+\infty} g^{(n)}(z_0) = 0$$

quindi la funzione $f - g$ ha in z_0 una zero di molteplicità infinita quindi per la proposizione precedente f-g è identicamente nulla in tutto Ω quindi $f = g$

2. L'insieme $\{z \ : \ f(z) = g(z)\} \to \{z \ : \ f(z) - g(z) = 0\}$ ha un punto non isolato questo vuol dire che la f-g presenta uno zero di molteplicità infinita in quel punto e quindi f-g è identicamente su tutto il connesso di z_0 quindi in tutto Ω

☺

5.4 Serie di Laurent

Definizione. La Serie di Laurent di una funzione complessa in un punto z_0 è da ta da :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Teorema 5.5: (dello sviluppo di Laurent)

Sia f una funzione olomorfa in $B(z_0,R) \setminus \{z_0\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Inoltre dato $|z-z_0| < r < R \quad r \in \mathbb{R}$ e posto $D = \{z : |z-z_0| \leq r\}$ risutla

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

e tali coefficienti sono unici .
Inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{è detta } \textbf{parte regolare}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} \quad \text{è detta } \textbf{parte principale}$$

Definizione. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0^n)$ cioè sviluppabile in serie di Laurent

- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **eliminabile** se $c_n = 0 \quad \forall n < 0$
- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **essenziale** se $c_n \neq 0$ per infiniti n
- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **polare di ordine** $m \geq 1$ se $c_n = 0$ per ogni $n < -m$ e z_0 è detto polo di ordine/molteplicità m

Definizione. (singolarità isolata)
Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, z_0 si dice **singolarità isolata** di f se esiste una palla/disco di centro z_0 tale che f è *olomorfa* in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

Una funzione complessa che ha una singolarità eliminabile può essere espressa in serie di Laurent nella palla . Si può dimostrare che la serie di Laurent converge totalmente nella corna circolare $\varepsilon < |z-z_0| < R \quad 0 < \varepsilon < R$

5.5 Residui

Definizione. (Residuo)
Sia f olomorfa in intorno (disco) di z_0 tranne che in z_0 stesso . Si dice **residuo** di f in z_0 il coefficiente di $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent di f centrato in z_0

$$Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f(z) dz$$

5.5.1 Calcolo dei residui

Proposizione. Sia f olomorfa in un intorno di z_0 , tranne che in z_0 stesso. Allora z_0 è un polo di f di ordine m se esiste una funzione olomorfa g , con $g(z_0) \neq 0$ tale che

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \\
g(z) &= (z-z_0)^m f(z) \\
\lim_{z->z_0} g(z) &= g(z_0) = (z-z_0)^m f(z) \neq 0
\end{aligned}
$$

Proposizione.
se z_0 è un polo di ordine m di f (olomorfa in $B(z_0,R) \setminus \{z_0\}$) allora :

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m \ f(z)\right]$$

Corollario. Siano g e h funzioni olomorfe in z_0 e sia $f = \frac{h}{g}$.
Se z_0 è uno zero di ordine m di h e di ordine m+1 di g allora

$$Res(f,z_0) = (m+1)\frac{h^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)(z_0)}}$$

In particolare se z_0 è un zero di ordine 1 per g , allora

$$Res(f,z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Teorema 5.6: (dei Residui)

Sia f olomorfa sulla chiusura di Ω tranne che in un insieme di finito di punti $\{z_1,\ldots,z_k\}$ tutti contenuti in Ω. Allora :

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f,z_j)$$

Dimostrazione. Dato che ci sono un numero finito di singolarità dentro la chiusura di Omega , esiste un $r > 0$ tale che i le palle di $B(z_j,r) \subseteq \Omega \quad B(z_j,r) \cap B(z_h,r) = \emptyset \ \ \forall\, j,h =,\ldots,k$.
Inoltre definiamo $\gamma_j = \partial B(z_j,r)$ allora f è olomorfa su $\Omega \setminus \bigcup_j B(z_j,r)$, quindi per la formula integrale di Cauchy

$$
\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} f(z)dz - \oint_{\gamma_1,\cup\cdots\cup\gamma_k} f(z)dz &= 0 \\
\oint_{\Gamma} f(z)dz &= \oint_{\gamma_1,\cup\cdots\cup\gamma_k} f(z)dz \\
&= \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_k} f(z)dz \\
Ora \ \ Res(f,z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} f(z)dz \\
\oint_{\gamma_1} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f,z_j)
\end{aligned}
$$

☺

5.6 Integrali del primo tipo

Vogliamo Calcolare integrali del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} R(cos\theta, sin\theta)$$

in cui $R(x, y)$ è una funzione razionale a coefficienti reali o complessi , definita sulla circonferenza unitaria.
Si parametrizza la circonferena unitaria con la funzione $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ a questo punto conviene porre $z = e^{i\theta}$ da cui

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{e^{i\theta + e^{-i\theta}}}{2} & sin\theta &= \frac{e^{i\theta - e^{-i\theta}}}{2i} \\ &= \frac{z + 1/z}{2} & &= \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \\ dz &= ie^{i\theta}d\theta & d\theta &= \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

Quindi l'integrale diventa

$$I = \int_0^1 \frac{R(\frac{z+1/z}{2}, \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))}{iz} dz$$

5.7 Integrali del terzo tipo o di Fourier

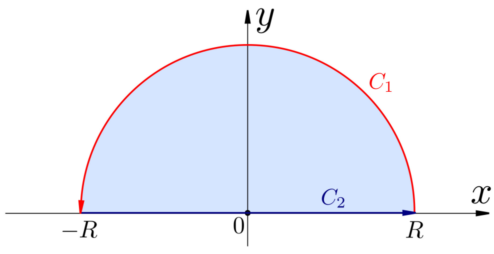
Vogliamo calcolare integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t} \qquad \alpha > 0$$

con f olomorfa nel **semipiano positivo** eccetto al più un numero finito di singolarità isolate appartenenti al semipiano positivo.
Nota bene se $\alpha < 0$ ci si localizza sul **semipiano negativo**
Possiamo riscrivere l'integrale come un integrale improprio

$$I_2 = \lim_{r \to +\infty} \int_{+r}^{-r} f(x)e^{i\alpha x}$$

L'idea ora è calcolare l'integrale della funzione complessa $f(z)$ sul seguente dominio Quinid scriviamo questo integrale come



$$\left[\int_{-r}^{r} f(z)e^{i\alpha z} + \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\right] = 2\pi i Res(f, z_j) \quad z_j \in [-r, r] \cup \gamma_r$$

dove come possiamo vedere γ_r è la semi conferenza di raggio r e centro (0,0)

Lemma. (di Jordan)
Sia $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ e si consideri l'angolo

$$A(0, [\theta_1, \theta_2]) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \theta_1 \leq arg(z) \leq \theta_2\}$$

Sia $f : A(0, [\theta_1, \theta_2]) \to \mathbb{C}$ una funzione continua , per $r > 0$ sia $\gamma_r(\theta) = ee^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

1. Se $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A(0,[\theta_1,\theta_2])}} f(z) = 0$ e $\alpha > 0$ allora

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} = 0$$

2. Se $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A(0,[\theta_1,\theta_2])}} zf(z) = 0$ e $\alpha \geq 0$ allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} = 0$$

Passiamo al limite , quindi scriviamo l'integrale come

$$\lim_{r\to\infty} \left[\int_{-r}^{r} f(z)e^{i\alpha z} + \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}\right] = 2\pi i Res(f, z_j) \quad z_j \in [-r, r] \cup \gamma_r$$

, ora se soddisfiamo le ipotesi del lemma di jordan quindi $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A(0,[\theta_1,\theta_2])}} f(z) = 0$ e $\alpha > 0$ allora sappiamo che $\lim_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} = 0$ quindi l'integrale diventa

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(z)e^{i\alpha z} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{i\alpha z} = 2\pi i Res(f, z_j) \qquad z_i \in H_+$$

5.7.1 Integrali del secondo tipo

Uno caso particolare degli integrali di Fourier sono gli integrali del tipo :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

quindi integrali dove $\alpha = 0$, l'idea risolutiva è la stessa solo che per applicare il teorema di Jordan la funzione f deve soddisfare la seguente condizione $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A(0,[\theta_1,\theta_2])}} zf(z) = 0$, però abbiamo anche abbiamo la seguente condizione che ci semoplificaq un po' la vita

Se f(z) è una funzione razione con P e q polinomi con $degD \geq degN + 2$, è assicurato che la funzione soddisfi l'ipotesi del lemma di jordan

Poi la strategia risolutiva rimane identica a quella spiegato per gli integrali del terzo tipo

5.8 Valori Principali

Definizione. (Valori Principali)
Sia [a,b] un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $c \in]a,b[$ c è una singolarità per f continua su $I \setminus \{c\}$.
si definisce valore principale di un integrale la quantità

$$\begin{aligned} v_p \int_a^b f(x) &:= \lim_{r \to 0} \left[\int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^b f(x)dx \right] \\ &:= \lim_{r \to 0} \int_{[a,b] \setminus B(c,r)} f(x)dx \end{aligned}$$

se tale limite esiste finito.

In questo contesto si considera la retta reale come munita di un unico punto all'infinito che sia sempre una possibili singolarità. In tal caso possiamo considerare il valore principale delle integrale $\mathbb{R} \setminus [a,b]$

$$vp \int_{\mathbb{R} \setminus [a,b]} f(x)dx = \lim_{r \to \infty} \left[\int_{-r}^a f(x)d(x) + \int_b^r f(x)dx \right]$$

Osservazione: Le proprietà di linearità dell'integrale si estendono al valore principale :

$$vp \int_I \lambda f \mu g = \lambda \in_I tf + \mu \int_i g$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\int_I f$ e $\int_I g$ esistono.
Inoltre se f è complessa

$$vp \int_I f = vp \int Re(f) + i\ vp \int_I Im(f)$$

Lemma. (del cerchio piccolo)
Sia $z_0 \in \Omega$, f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ con z_0 polo di ordine 1 per f. Se $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 < \theta_2$, posto $\gamma_\rho(\theta) = z_0 + e^{i\theta}$ $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = i(\theta 2 - \theta_2) Res(f, z_0)$$

6 Trasformata di Laplace

Definizione. Una funzione $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ si dice trasformabile secondo Laplace o L-trasformabile se esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che

$$e^{-st} f$$

è una funzione assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$

Se f è L-trasformabile l'insieme

$$S(f) = \{s \in \mathbb{C} \mid e^{-st} f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$$

è detto insieme di convergenza della Trasformata Di Laplace di f ed è un semipiano del tipo

$$S(f) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ Res(s) > p(f)\} \ oppure \ \{s \in \mathbb{C} : Res(s) \geq p(f)\}$$

in cui

$$p(f) = \{p \in \mathbb{R} : t \mapsto e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$$

ascissa di convergenza assoluta lla Trasformata di Laplace di f 9

Proprietà	**Dominio** t	**Dominio** s	**ROC**
Linearità	$a\,f(t) + b\,g(t)$	$a\,F(s) + b\,G(s)$	Intersezione delle ROC di $F(s)$ e $G(s)$
Traslazione nel tempo	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$	Stessa ROC di $F(s)$ (i poli non cambiano, cambia solo la moltiplicazione esponenziale)
Modulazione (in frequenza)	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	ROC traslata: $\{s : s - a \in \mathrm{ROC}_F\}$
Scaling nel tempo	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|} F\big(\frac{s}{a}\big)$	ROC scalata: $\{s : \frac{s}{a} \in \mathrm{ROC}_F\}$
Derivata in t	$\frac{d}{dt} f(t)$	$s\,F(s) - f(0^-)$	Stessa ROC di $F(s)$
Convoluzione	$(f * g)(t)$	$F(s)\,G(s)$	Intersezione delle ROC di $F(s)$ e $G(s)$
Coniugazione	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(\overline{s})}$	ROC: $s \in \mathrm{ROC}_F \Rightarrow \overline{s} \in \mathrm{ROC}_{\overline{f}}$
Proprietà iniziale	$f(0^+)$	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	
Proprietà finale	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	

Tabella 1: Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace con relativa regione di convergenza (ROC)

Dimostrazione. (Scaling nel tempo)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(at))(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(at)e^{-\frac{as}{a}t}d(at) \\
\xi &= at \\
&= \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(\xi)e^{\frac{-s}{a}\xi}d\xi}_{F(\frac{s}{a})}
\end{aligned}$$

☺

Definizione. (Formula di Inversione)
Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ assolutamente L-trasformabile. Se il numero reale $\rho_0 \in S(f)$ e se la funzione $\omega \mapsto \mathscr{L}f(\rho_0 + i\omega)$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ allora f è continua su $\mathbb{R}$ e

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}f(p_o + i\omega)e^{(\rho_0+i\omega)t}dt$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ (con $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$)

Proposizione. Ogni funzione razionale è trasformata di Laplace id una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Se $c \in C$ e $p \in \mathbb{Z}$ l'antitrasformata di $s \mapsto \frac{1}{(s-c)^p}$ è

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-c)^p}\right)(t) = Y(t)e^{ct}\frac{t^{p-1}}{(p-1!)}$$

Inoltre la funzione $s \mapsto frace^{-as}(s-c)^p \quad c \in ¸, \ a \in \mathbb{C} \ , \ p \in \mathbb{Z}$ è trasformata di Laplace di una $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \iff a \in R_+$ e

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{(s-c)^p}\right)(t) = Y(t-a)e^{c(t-a)}\frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1!)}$$