Metodi matematici

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1 Richiami

1.1 Trigonometria

1.1.1 Formule di Werner

$$\sin\alpha \ \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

1.2 Esponenziale complesso

L'esponenziale complesso è definito come

$$e^{i\omega t} = cos(\omega t) + isen(\omega t)$$

quindi l'esponenziale complesso è una funzione periodica con periodo pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1.2.1 Formule di Eulero

$$y \in \mathbb{C}$$
$$cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad (Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2})$$
$$siny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad (Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i})$$

1.2.2 Derivazione

Considero la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{i\omega t} = cos(\omega t) + isen(\omega t)$ quindi

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\ Re(f(t))}{dt} + \frac{d\ Im(f(t))}{dt} = -\omega sin(\omega t) + i\omega cos(\omega t) = i\omega e^{i\omega t}$$

1.2.3 Integrazione

se $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t) = \int_a^b Re(f(t))dt + i\int_a^b Im(f(t))dt = \int_a^b e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}[e^{i\omega t}]_a^b = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega}$$

2 Serie di Fourier

Definizione. una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se

$$x(t+T) = x(t) \ vale \ \forall t \in R$$

Si dice *periodo* di x il più piccolo T positivo per cui x è periodica. Se x è periodica di periodo T allora è periodica di periodo kT con $k > 0$.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{frequenza}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{frequenza angolare}$$

2.1 Polinomio di Fourier

Definizione. Polinomi di Fourier
Diremo polinomi di Fourier una funzione delle forma

$$P_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k cos(k\omega t) + \beta_k sin(k\omega t)) \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \gamma_k \in \mathbb{C} \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k e^{ik\omega t} + \gamma_{-k}e^{-ik\omega t}) \text{ Supponiamo che } (\gamma_{-k} = \bar{\gamma_k}) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k e^{ik\omega t} + \overline{\gamma_k e^{ik\omega t}}) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} 2Re(\gamma_k e^{ik\omega t}) \\
&= \gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(Re(\gamma_k)cos(k\omega t) + Im(\gamma_k)sin(k\omega t))
\end{aligned}$$

Quindi abbia che sussistono le seguenti relazione tra le due rappresentazione della formula di Fourier

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0 \\ Re(\gamma_k) = \frac{1}{2}\alpha_k \\ Im(\gamma_k) = -\frac{1}{2}\beta_k \\ \gamma_{-k} = \overline{\gamma_k} \end{cases}$$

2.1.1 Energia di un polinomio di Fourier

Definizione. Energia di un segnale
Dato un segnale periodico $x(t)$ di periodo T . si dice energia di $x(t)$ in $[0, T]$ l'espressione:

$$||x(t)||^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

se invece voglia parlare della norma del segnale abbiamo che

$$||x(t)|| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

Calcoliamo l'energia di un polinomio di Fourier:

$$
\begin{aligned}
||Pn(t)||^2 &= \int_0^T |P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \right) \overline{\left(\sum_{h=-n}^{n} \gamma_h e^{ih\omega t} \right)} dt \\
&= \int_0^T \sum_{h,k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_h} e^{ik\omega t} e^{ih\omega t} dt \\
&= \sum_{h,k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_h} \int_0^T e^{i(k-h)\omega t} = \begin{cases} T & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases} \\
&= T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2
\end{aligned}
$$

Ora fissato il segnale periodco $x(t)$ e sia $P_n(t)$ un generico polinomio di Fourier periodico . Cerchiamo il polinomio di Fourier che meglio approssimo il segnale x nel senso dell'energia , cioè il polinomio di Fourier che minimizzi la seguente espressione

$$
\begin{aligned}
||x(t) - P_n(t)||^2 &= \int_0^T |x(t) - P_n(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T (x(t) - P_n(t))(\overline{x(t)} - \overline{P_n(t)})\ dt \\
&= \int_0^T |x(t)|^2 + |P_n(t)|^2 - x(t)\overline{P_n}(t) - \overline{x}(t)P_n(t)\ dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \int_0^T x(t) \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k} e^{-ik\omega t} dt - \int_0^T \overline{x}(t) \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} dt \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k}\ T\ \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt}_{c_k} - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k\ T\ \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{x}(t) e^{ik\omega t} dt}_{\overline{c_k}} \\
&= |x(t)|^2 + T \left(\sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \bar{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{c_k} \right) \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} \left(|\gamma_k|^2 \bar{\gamma_k} c_k - \gamma_k \overline{c_k} + |c_k|^2 \right) - T \sum_{h,k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad {}^{1} \\
&= |x(t)|^2 + T \sum_{h,k=-n}^{n} |\gamma_k - c_k|^2 - T \sum_{h,k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

Dopo tutti sti cazzo di conti viene fuori che il coefficiente gamma del polinomio di Fourier necessaria a minimizzare l'energia è il seguente

$$
\gamma_k = c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \forall k = -n \dots n
$$

Questi sono chiamati Coefficienti di Fourier .

[1] Ho completato il quadrato con i numeri complessi

Inoltre nelle seguente tabella sono presenti le equivalenze dei coeffcienti di Fourier nella forma complessa e nella forma "reale"

$a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$
$a_k = 2Re(c_k) = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos(k\omega t)dt$
$b_k = -2Im(c_k) = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sin(k\omega t)d$

Definizione. (Disuguaglianza di Bessel)

$$T\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \leq ||x(t)||^2$$

Teorema 2.1

Sia x è un segnale periodico a energia finita , cioé $\int_0^T x^2(t)dt < +\infty$ allora se P_n è il polinomio di Fourier $P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} ||x - P_n||^2 = 0$$

Corollario. (Identità di Parseval)

$$T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 = ||x(t)||^2$$

2.2 Traslazione e riscalamento

2.2.1 Traslazione orizzontale

Sia x un segnale di periodo T e di frequenza angolare ω . Fissiamo $a \in \mathbb{R}$ definisco

$$\tilde{x}(t) = x(t-a)$$

Calcolo i coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned}
\tilde{c_k} &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t)e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}x(t-a)e^{-ik\omega t}dt \qquad \begin{cases} s = t-a \\ ds = dt \end{cases} \\
&= \frac{1}{T}\int_{-a}^{T-a} x(s)e^{-ik\omega(s+a)}ds \\
&= \frac{1}{T}e^{-ik\omega a}\int_0^T x(s)e^{-ik\omega s}ds \\
&= e^{-ik\omega a}c_k
\end{aligned}$$

2.2.2 Traslazione verticale

$$x\hat{(t)} = \alpha + x(t)$$

$$\hat{c_0} = c_0 + \alpha \quad \hat{c_k} = c_k \qquad \forall k \neq 0$$

2.2.3 Riscalamento

Se $a > 0$

$$y(t) = x(at)$$

Qual è il periodo T_y di y , $T_y = \frac{T}{a}$. Ora calcolo il coefficienti di Fourier del polinomio riscalato

$$\begin{aligned} c_k^y &= \frac{a}{T}\int_0^{\frac{T}{a}} x(at)e^{-ika\omega t} \qquad \begin{cases} s = at \\ dt = \frac{1}{a}ds \end{cases} \\ &= \frac{a}{T}\int_0^{T} \frac{1}{a}\, x(s)e^{-ik\omega s}ds \\ &= c_k \end{aligned}$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ puntualmente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\sum_{+\infty}^{-\infty} c_k e^{ik\omega t} = x(t)$$

Definizione. Diciamo che $P_n(t)$ converge a $x(t)$ uniformemente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che :

$$\lim_{n\to\mathbb{R}} sup_{t\in\mathbb{R}}\ |x(t) - P_n(t)|$$

Definizione. (Regolare a tratti)
Una funzione $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ si dica regolare a tratti se valgono le seguenti condizioni: esistono un numero finito di punti $t_1, t_2, \ldots, t_n 1in\,]0, T[$ tale che

- ⋆ se $t \in\,]0, T[\setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ la funzione x è derivabile in T e la sua derivata è una funzione continua di T (in quei punti x deve appartenere alla classe C^1)
- ⋆ esistono i seguenti limiti e sono finiti

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_i^-} x(t) && \lim_{t\to t_i^+} x(t) \\ &\lim_{t\to 0^+} x(t) && \lim_{t\to T^-} x(t) \\ &\lim_{t\to t_i^-} x'(t) && \lim_{t\to t_i^+} x'(t) \\ &\lim_{t\to 0^+} x'(t) && \lim_{t\to T^-} x'(t) \end{aligned}$$

Teorema 2.2

Sia x un segnale periodico di periodo T regolare a tratti in $[0, T]$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(t) = x(t) \quad \forall t \neq t_1, t_2, \ldots, t_n, 0, T$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(t_i) = \frac{\lim_{t\to t_i^-} x(t) + \lim_{t\to t_i^+} x(t)}{2}$$

Teorema 2.3

Sia x un segnale continuo e regolare a tratti (discontinuità della derivata).
Allora P_n converge uniformemente a x

3 Trasformata di Fourier

Definizione. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi è **sommabile** cioè :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

Definizione. (Trasformata di Fourier)
Definiamo la trasformata di fourier di x e denotiamo con $\mathscr{F}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathscr{F}(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t dt}$$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t dt}$ esiste finite in quanto

3.1 Proprietà della trasformata di Fourier

1. Siano λ e μ due costanti complessi allora

$$\mathscr{F}(\mu x(t) + \lambda y(t))(\omega) = \mu X(\omega) + \lambda Y(\omega)$$

Dimostrazione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mu x(t) + \lambda y(t)]\, dt = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt$$

☺

2. Traslazione

   ⋆ Traslazione nel tempo :
   Sia x una funzione sommabile , $t_0 \in \mathbb{R}$ e definiamo $y(t) = x(t - t_0)$ allora :

$$\mathscr{F}\left[y(t)\right](\omega)) = \mathscr{F}\left[x(t)\right](\omega)\ e^{-i\omega t_0}$$

Dimostrazione. Effettuo una cambio di variabili $\begin{cases} u = t - t_0 \\ du = dt \end{cases}$

$$\mathscr{F}\left[y(t)\right](\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-i\omega(u+t_0)}du = e^{-i\omega t_0}X(\omega)$$

☺

3. Riscalamento : Sia x una funzione sommabile e sia $a \in R \setminus \{0\}$

$$\mathscr{F}\left[x(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$$

Dimostrazione. Basta effettuare un cambio di variabili $at = u$

$$\mathscr{F}\left[x(at)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{\frac{-i\omega u}{a}}du & a > 0 \\ \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{\frac{-i\omega u}{a}}du & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{\frac{-i\omega u}{a}}du = \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$$

☺

4. Derivata

    - ⋆ Derivata nel tempo :
    Sia x un segnale sommabile , derivabile e tale che $x'(t)$ è sommabile

    $$\mathscr{F}(x'(t))(\omega) = i\omega X(\omega)$$

    Dimostrazione.

    $$\hat{x}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-i\omega t} = x(t)e^{-i\omega t} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} = i\omega\hat{x}(\omega)$$

    ☺

    - ⋆ Derivata nella frequenza :
    Se x è un segnale sommabile e anche $tx(t)$ è anche sommabile allora

    $$\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = \mathscr{F}(-itx(t))(\omega)$$

    Dimostrazione.

    $$\frac{d}{d\omega}\widehat{x}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega}x(t)e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} -itx(t)e^{-i\omega t}$$

    ☺

5. Simmetria :
Sia x un segnale sommabile :

    - ⋆ Se x è una segnale reale e pari allora anche la sua trasformata di Fourier è reale e pari
    - ⋆ Se x è una segnale reale e dispari allora la sua trasformata di Fourier è immaginaria puro e dispari

6. Coniugazione :
Sia x un segnale sommabile e denotiamo con $\overline{x(t)}$ il segnale complesso coniugato

$$\mathscr{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \overline{X}(-\omega)$$

Dimostrazione.

$$\mathscr{F}(\overline{x(t)})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)e^{i\omega t}} = \overline{X(-\omega)}$$

☺

7. Convoluzione :

Definizione. (Convoluzione)
Sia x e t due funzioni sommabili. La convoluzione di x e t è definita da

$$\begin{aligned}(x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s)ds\end{aligned}$$

Se x e y sono segnali sommabili allora

$$\mathscr{F}(x * y(t)) = \mathscr{F}(x(t))\ \mathscr{F}(y(t))$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}((x*y)(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x*y)(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)e^{-i\omega t}dsdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y(s)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)e^{-i\omega(t-s)}dt\right]}_{\widehat{x}(\omega)} e^{-i\omega s}ds \\
&= \widehat{x}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} y(s)e^{-i\omega s}ds = \widehat{x}(\omega)\ \widehat{y}(\omega)
\end{aligned}$$

☺

Definizione. (Antitrasformata di Fourier)
Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Definiamo l'antitrasformata di Fourier di X come :

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}dt$$

Osservazione :

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[x(t)](-\omega)$$

Teorema 3.1.1. *Se x è un segnale sommabile e la sua trasformata di Fourier $\widehat{X}(\omega)$ è sommabile allora :*

$$x = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(x)) = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(x))$$

in altre parole

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega t}$$

Denotiamo con L^1 l'insieme dei segnali sommabili

$$L^1 = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty\}$$

Teorema 3.1

Se $x \in L^1$ allora $\widehat{x}$ è continuo , limitato e $\lim_{\omega\to\pm\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$

Definiamo con L^2 le funzioni quadrato sommabili (i segnali ad energia finita)

$$L^2 = \left\{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)^2 < \infty\right\}$$

Proposizione. Se x è una segnale limitato e $x \in L^2$ allora $x \in L^2$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \in L^1$ e limitato

$$|x(t)|^2 = |x(t)|\ |x(t)| \leq |x(t)|\ C$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = C\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty$$

☺

Teorema 3.2

Se $x \in L^2$, segnale ad energia finita allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

esiste finito tranne al più per un insieme di valori di ω di misura nulla (Secondo Lebesgue) Definiamo allora :

$$\mathscr{F}[x(t)](\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

inoltre definendo

$$\mathscr{F}^{-1}[x(t)(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[x(t)](-\omega)$$

abbiamo che per ogni $x \in L^2$

$$x = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}[x])) = \mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}(x)]$$

Infine posto $\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}[x(t)](\omega)$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(\omega)|^2$$

allora $\widehat{X} \in L^2$

4 Distribuzioni

Definizione. (spazio delle funzioni test)
Lo spazio delle funzioni test $\mathscr{S}$ è formata dalle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto e tali che

$$\lim_{t\to\pm\infty}(1+t^2)^k D^{(m)}\varphi(t) = 0 \quad \forall k, m \geq 1$$

(φ e le sue derivate vanno più velocente a zero del reciproco del polinomio)

Definizione. (Convergenza di funzioni test)
Sia $\varphi_n \in \mathscr{S}$ una successione , si dice che $\varphi_n \to \varphi$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$\lim_{n\to\infty}|(1+t^2)^k(D^{(m)}\varphi_n(t) - D^{(m)}\varphi(t))| = 0 \quad \forall k, m \geq 0$$

Definizione. (Distribuzione) Si dice **distribuzione** ogni funzionale lineare su $\mathscr{D}$ che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test

4.1 Derivate

Data $T \in \mathscr{S}'$, si dice derivata di T , la distribuzione definita ponendo

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' > \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}$$

Poniamo

$$< T_x, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t)dt$$

allora

$$< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\varphi(t)dt = \underbrace{x(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi'(t)dt$$

Teorema 4.1.1. *Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti $\mathbb{R}$, la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con derivta ordinaria :*

$$T'_x = T_{x'}$$

4.2 Limiti

Sia T_n una successione di distribuzione , sia T una distribuzione.
Diciamo che $T_n \to T$ nel senso delle distribuzioni se

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}$$

Se x_n è una successione di segnali scriviamo

$$x_n \to T \text{ in luogo di } T_{x_n} \to T$$

Se $T = T_x$ per un segnale x allora scriveremo

$$x_n \to x \text{ in luogo di } T_{x_n} \to T_x$$

Teorema 4.1

1. Siano x_n, x due segnali limitati tali che $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ allora è vero anche che $x_n \to x$ nel senso delle distribuzioni
2. Sia x un segnale a valori maggiori uguale a zero e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) = 1$. Definiamo $x_n(t) = nx(nt)$

4.3 Convoluzione

Definizione. Sia T una distribuzione e $\varphi \in \mathscr{D}$ definiamo

$$T * \varphi(t) = T(\varphi_t)$$

Notiamo che $T * \varphi$ è una funzione infinitamente derivabile

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{t * \varphi(t+h) - T * \varphi(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{T(\varphi_t(h)) - T(\varphi_t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} T\left(\frac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h}\right) \\
&= T\left(\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h-s) - \varphi(t-s)}{h}\right) \\
&= \varphi'(t-s) = \varphi'_t(s) \\
&= T(\varphi'_t(s))
\end{aligned}$$

Teorema 4.2

Sia φ_n una successione di funzioni test tali che $\varphi_n \to \delta_o$ nel senso delle distribuzioni Allora $T * \varphi_n \to T$ nel senso delle distribuzioni.
Ogni distribuzione è il limite di segnali infinitamente derivabile

4.4 Trasformata di Fourier

Sia x un segnale ad energia finita $\widehat{x}(\omega) = v.p \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$ definisco la distribuzione associata alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
T_{\widehat{x}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\varphi(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\varphi(\omega)dtd\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega)d\omega\right)}_{\widehat{\varphi}(t)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\widehat{\varphi}(t)dt = T_x(\widehat{\varphi})
\end{aligned}$$

Questo ha senso in quanto se $\varphi \in \mathscr{S}$ all ora $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$. Questo motiva la seguente definizione

Definizione. (Trasformata di Fourier per distribuzioni)
Sia T una distribuzione , la sua trasformata di Fourier $\widehat{T}$ è la distribuzione definita da

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$$

Esempio : Calcoliamo la trasformata di Fourier della Delta di Dirac

$$\widehat{\delta_0}(\varphi) = \delta_0(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = T_1(\varphi) = 1$$

Possiamo anche definire l'antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[T(\varphi)] = T(\mathcal{F}^{-1}[\varphi])$$

Inoltre vale che

$$\mathscr{F}[T(\varphi)] = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[T(\varphi^r)] \qquad \phi^r(s) = \varphi(-s)$$
$$\mathscr{F}[T] = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[T^r]$$

Esempio :

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta_0 \to f[1] = 2\pi\delta_0^r = 2\pi\delta_0$$

5 Funzione di una variabile complessa

Una funzione complessa di variabile complessa è una funzione del tipo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Definiamo gli operatori

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$
$$\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Lemma. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è differenziabile in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esistano $c, d \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + cw + d\overline{w} + o(|w|)$$
$$c = \partial_z f(z_0) \quad d = \partial_{\overline{z}} f(z_0)$$

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$, nell'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è differenziabile in $z_0 = (x_0, y_0)$ SSE lo sono le sue componenti u,v

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + \partial_x u(x_0, y_0) \cdot h + \partial_x u(x_0.y_0) \cdot k + o(|(h, k)|)$$
$$v(_0{+}h, y_0 + k) = v(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0) \cdot h + \partial_x v(x_0.y_0) \cdot k + o(|(h, k)|)$$
$$(h, k) \to 0$$

Ponendo $w = (h, k) = h + ik$ sommando otteniamo la differenziabilità di f notando che

$$h = \frac{\omega + \overline{w}}{2} \qquad h = \frac{\omega - \overline{w}}{2}$$

☺

Definizione. Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in \Omega$. Se esiste il limite di funzioni in due variabili

$$f'(z_0) = \lim_{w \to 0 \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$$

questo si dice derivata in senso complesso di f in z_0

Proposizione. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è *derivabile in senso complesso* in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che :

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + cw + o(|w|) \ per \ w \to 0$$

e in tal caso $c = f'(z_0)$

Proposizione. $f : \Omega \in \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** nell'insieme Ω se è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω e se f' è continua .
Se $\Omega = \mathbb{C}$ la funzione si dice *intera*

Proposizione. La funzione $f : \Omega \in \mathbb{C}$ è olomorfa SSE è di classe C^1 e vale la condizione di **Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial f}{\partial_{\overline{z}}} = 0$$

Osservazione : scritta $f = u + iv$ si ha :

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}[\partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv)] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)\right] \\ &= \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione : Prendiamo $F(z) = a(x,y) + iv(x,y)$ olomorfa con u,v due volte derivabili dalle condizione di Cauchy-Riemann in forma reali $\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ -\partial_x v = \partial_y u \end{cases}$.
Ora deriviamo queste condizioni rispetto a x e somma membro a membro

$$\partial_{x^2} u - \partial_{xy} v + \partial_{xy} u + \partial_{x^2} v = 0$$

Derivata rispetto a y e diiferenza membro a membro

$$\partial_{xy} u - \partial_{y^2} v - \partial_{y^2} u - \partial_{xy} v = 0$$

Ora facciamo (1) - (2)

$$\partial_{x^2} u + \partial_{y^2} u + \partial_{x^2} v + \partial_{y^2} v = 0$$

$$(\partial_{x^2} + \partial_{y^2} u) = 0 \quad \partial_{x^2} v + \partial_{y^2} v = 0$$

$$\Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$$

Le componenti di f sono funzioni armoniche , cioè funzione che risolvono l'equazioni di Laplace

$$\Delta g = \nabla^2 g = 0$$

5.1 Formula di Cauchy

Definizione. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω aperto con $\partial\Omega = \Gamma$ curva regolare è detto olomorfa su $\Omega \cup \Phi$ se esiste $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ aperto contente $\Omega \cup \Phi$ su cui f è olomorfa

Teorema 5.1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e limitato con $\partial\Omega = \Gamma$ unione di curva regolari $\Gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ e sia f olomorfa su $\Omega \cup \Gamma$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 5.2: (Fomula di cauchy del cerchio)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e limitato con $\partial\Omega = \Gamma$ unione di curva regolari $\Gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$,infine sia f olomorfa su in $\Omega \cup \Gamma$.
Se $z_0 \in \Omega$ allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Se fè oleomorfa e nota sul bordo Γ allora conosciamo f su tutto Ω

Dimostrazione. sia $\delta > 0$ tale che

$$B(z_0, \delta) \in \Omega$$

Per il teorema (5.1) abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cup \gamma_{-\delta}} \frac{f(z)}{z - z0} = 0$$

poichè la funzione è olomorfa in $\Omega \cup \Gamma \setminus z_0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0}$$

Il bordo $\gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \delta\}$ è parametrizzato da $\theta \mapsto z_0 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Risulta allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(z)}{z - z0} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}}\delta i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta\end{aligned}$$

Osservando che il primo membro è indipendente dalla delta ed utilizzando la conntinuità di f , si ottiene infine :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z - z0} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta \\ &= f(z_0) \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z - z0} &= f(z_0)\end{aligned}$$

☺

Proposizione. Una funzione f olomorfa in Ω ammette derivate complesse di ogni ordine , anch'esse olomorfe. Se D è un dominio semplice con $z_o \in D$ e $\overline{D} \subset \Omega$ vale

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz$$

5.2 Serie di potenze

Teorema 5.3

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n \qquad \forall z \in D$$

Dimostrazione. Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa su $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n \qquad \forall z \in D$$

Sia $0 < r < R$ e poniamo $D_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, dalla formula di Cauchy abbiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad su \quad d_k$$

Per $\xi \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
\frac{f(\xi)}{\xi - z} &= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - z + z_0} \\
&\vdots \\
&= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} \\
&= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\
f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^n(z_0)}{n!} \right) (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

☺

Il fatto che una funzione con infinite derivate sia localmente rappresentabile in serie di potenze è **falso** se la funzione in questione non è derivabile in senso complesso
Esempio :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 00 \quad x = 0 \end{cases}$$

f(x) ammette infinite derivate e $f(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione nulla , tuttavia $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

Definizione. (Funzione analitica)
Una funzione f $\Omega \to \mathbb{C}$ di dice **analitica in** Ω se è localmente rappresentabile come serie di potenze

Cioè se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono $r > 0$ e una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ con raggio di convergenza r tale che $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ per ogni $z \in \Omega : |z - z_0| < r$

5.3 Zeri e singolarità di funzioni complesse

Definizione. Se $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, z_0 si dice zero di molteplicità/ordine infinito per f .
z_0 si dice zero di molteplicità ordine m se $f^{(n)}(z_0) = 0$ se n< m e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Proposizione. Sia f olomorfa in Ω , $z_0 \in \Omega$ è zero di ordine m se e solo se esiste un funzione g olomorfa in Ω con $g(z_0) \neq 0$ tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

In particolare uno zero di **molteplicità finita è isolato** , ossia esiste un introno U di $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\}$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ uno zero di f di molteplicità e sia $R = dist(z_o, \partial\Omega)$, per gli $|z - z_0| < R$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^{n-m}$$

l'ultima uguaglianza segue da $f^n = 0 \quad n < m$. Basta allora porre

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^{-m} f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m} |z-z_0| < R \end{cases}$$

Per l'inverso supponiamo che g sia funzione olomorfa , che quindi ammette sviluppo di Taylor centro in $z_0, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ inoltre abbiamo che f si può scrivere come

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$$

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+m} \qquad k = n+m \qquad n = k-m$$

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} c_{k-m} (z-z_0)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{k=m}^{+\infty} c_{k-m} (z-z_0)^k$$

allora dall'unicità dei coefficienti della serie di Fourier segue che $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad n < m$ ☺

Proposizione. Sia f olomorfa in Ω. Un punto $z_0 \in \Omega$ è uno zero di molteplicità infinita se e solo se è identicamente nulla nella componente connessa di $z_0 \in \Omega$

Teorema 5.4: (Unicità del prolungamento)

Siano f e g funzioni olomorfe in Ω con $\Omega \subseteq_{ap} \mathbb{C}$ connesso. Allora se una delle seguenti ipotesi è verificata $f = g$

1. f e g hanno lo stesso sviluppo in serie di Taylor in un punto di Ω
2. l'insieme $\{z : f(z) = g(z)\}$ ha un punto non isolato

Dimostrazione. 1. Entrambe le funzioni sono olomorfe quindi possono essere espresse come serie di funzioni , imponiamo che esse siano uguali in $z_0 \in \Omega$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} g^{(n)}(z_0)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0) - \sum_{n=0}^{+\infty} g^{(n)}(z_0) = 0$$

quindi la funzione $f - g$ ha in z_0 una zero di molteplicità infinita quindi per la proposizione precedente f-g è identicamente nulla in tutto Ω quindi $f = g$

2. L'insieme $\{z \; : \; f(z) = g(z)\} \to \{z \; : \; f(z) - g(z) = 0\}$ ha un punto non isolato questo vuol dire che la f-g presenta uno zero di molteplicità infinita in quel punto e quindi f-g è identicamente su tutto il connesso di z_0 quindi in tutto Ω

☺

5.4 Serie di Laurent

Definizione. La Serie di Laurent di una funzione complessa in un punto z_0 è da ta da :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Teorema 5.5: (dello sviluppo di Laurent)

Sia f una funzione olomorfa in $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Inoltre dato $|z-z_0| < r < R \quad r \in \mathbb{R}$ e posto $D = \{z : |z-z_0| \leq r\}$ risutla

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

e tali coefficienti sono unici

Definizione. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0^n)$ cioè sviluppabile in serie di Laurent

- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **eliminabile** se $c_n = 0 \quad \forall n < 0$
- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **essenziale** se $c_n \neq 0$ per infiniti n
- ⋆ f(z) ha in z_0 una singolarità **polare di ordine** $m \geq 1$ se $c_n = 0$ per ogni $n < -m$ e z_0 è detto polo di ordine/molteplicità m

5.5 Residui

Definizione. (Residuo)
Sia f olomorfa in intorno (disco) di z_0 tranne che in z_0 stesso . Si dice **residuo** di f in z_0 il coefficiente di $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent di f centrato in z_0

$$Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f(z)dz$$

5.5.1 Calcolo dei residui

Proposizione. Sia f olomorfa in un intorno di z_0 , tranne che in z_0 stesso. Allora z_0 è un polo di f di ordine m se esiste una funzione olomorfa g , con $g(z_0) \neq 0$ tale che

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^m}$$

Proposizione.
se z_0 è un polo di ordine m di f (olomorfa in $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$) allora :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \quad \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m \ f(z)\right]$$

Corollario. Siano g e h funzioni olomorfe in z_0 e sia $f = \frac{h}{g}$.
Se z_0 è uno zero di ordine m di h e di ordine m+1 di g allora

$$Res(f, z_0) = (m+1) \frac{h^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)(z_0)}}$$

In particolare se z_0 è un zero di ordine 1 per g , allora

$$Res(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Teorema 5.6: (dei Residui)

Sia f olomorfa sulla chiusura di Ω tranne che in un insieme di finito di punti $\{z_1, \dots, z_k\}$ tutti contenuti in Ω. Allora :

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$$

Dimostrazione. Dato che ci sono un numero finito di singolarità dentro la chiusura di Omega , esiste un $r > 0$ tale che i le palle di $B(z_j, r) \subseteq \Omega \quad B(z_j, r) \cap B(z_h, r) = \emptyset \ \ \forall\, j, h =, \dots, k$.
Inoltre definiamo $\gamma_j = \partial B(z_j, r)$ allora f è olomorfa su $\Omega \setminus \bigcup_j B(z_j, r)$, quindi per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)dz - \oint_{\gamma_1, \cup \cdots \cup \gamma_k} f(z)dz &= 0 \\
\oint_\Gamma f(z)dz &= \oint_{\gamma_1, \cup \cdots \cup \gamma_k} f(z)dz \\
&= \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_k} f(z)dz \\
Ora \quad Res(f, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f(z)dz \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)
\end{aligned}$$

☺