

# Segnali e sistemi

Luca Mombelli

2024-25

## Indice

<b>1</b>	<b>Segnali a tempo continuo</b>	<b>2</b>
1.1	Segnali elementari . . . . .	2
1.2	Caratterizzazione dei segnali . . . . .	3
1.2.1	Simmetrie dei segnali . . . . .	3
1.2.2	Estensione e durata . . . . .	3
1.2.3	Area e valor medio . . . . .	3
1.2.4	Energia e potenza . . . . .	4
1.3	Segnali periodici . . . . .	4
1.4	Convoluzione . . . . .	5
1.4.1	Proprietà . . . . .	5
1.4.2	Convoluzione per segnali periodici . . . . .	6
1.5	Funzione di Correlazione . . . . .	6
1.5.1	Proprietà . . . . .	6
1.5.2	Auto-correlazione . . . . .	6
1.6	Analisi in Frequenza . . . . .	7
1.6.1	Filtri ideali . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Sistemi a tempo continuo</b>	<b>8</b>
2.1	Evoluzione libera . . . . .	9
2.2	Evoluzione forzata . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>16</b>
3.1	Proprietà . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Diagrammi di Bode</b>	<b>20</b>
4.1	risposta in frequenza . . . . .	20
4.2	Diagrammi . . . . .	21
4.3	Forma di Bode della funzione di trasferimento . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Segnale a tempo discreto</b>	<b>24</b>

# 1 Segnali a tempo continuo

## 1.1 Segnali elementari

★ Finestra rettangolare :

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$A\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right) := \begin{cases} A & t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

★ Finestra triangolare :

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$A\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) := \begin{cases} A - \left(\frac{A}{T}\right)|t-t_0| & t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

★ Impulso ideale unitario (Impulso di Dirac) :

è possibile vedere l'impulso di Dirac come il limite della seguente successione :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{2/n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \right]$$

quindi può essere visualizzato come un segnale il cui punto di applicazione è l'origine , dove assume valore infinito e la cui area complessiva è unitaria. In realtà l'impulso di Dirac è una distribuzione , quindi un concetto esteso di una funzione. Inoltre l'impulso di Dirac gode delle seguenti proprietà

**Proprietà.** 1.  $\delta(0) = +\infty$

2.  $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$

3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$  ( la sua area è uno )

4. Proprietà di campionamento dell'impulso:

Data una funzione  $v$  e un  $t_0$  in cui la funzione sia continua vale :

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau$$

★ Gradino unitario (Heaviside step function)

$$\delta_{-1}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se pensiamo alla funzione gradino come una distribuzione allora possiamo definirla nel seguente modo

$$\delta(t) = \frac{d \delta_{-1}(t)}{dt}$$

★ Rampa unitaria

$$\delta_{-2}(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre può essere messa in relazione con il gradino e l'impulso di Dirac nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(t) = \frac{d \delta_{-2}(t)}{dt} \quad \delta(t) = \frac{d^2 \delta_{-2}(t)}{d^2 t}$$

## 1.2 Caratterizzazione dei segnali

### 1.2.1 Simmetrie dei segnali

$x(t) = \overline{x(t)}$	reale
$x(t) = -\overline{x(t)}$	immaginario
$x(t) = x(-t)$	pari
$x(t) = -x(-t)$	dispari
$x(t) = \overline{x(-t)}$	hermitiano
$x(t) = -\overline{x(-t)}$	antihermitiano

1. Se un segnale è reale e pari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
2. Se un segnale è immaginario e dispari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
3. Se un segnale è hermitiano allora  $\text{Re}(x(\cdot))$  e  $|x(\cdot)|$  sono pari.
4. Se un segnale è antihermitiano allora  $\text{Im}(x(\cdot))$  e  $\arg(x(\cdot))$  sono dispari.
5. Un segnale è hermitiano se e solo se  $\text{Re}(x(\cdot))$  pari ed  $\text{Im}(x(\cdot))$  dispari.
6. Un segnale è hermitiano se e solo se  $|x(\cdot)|$  pari ed  $\arg(x(\cdot))$  dispari.

### 1.2.2 Estensione e durata

Un segnale che è nullo al di fuori dell'intervallo  $[t_s, T_s]$  è detto a durato limitata

- ★ Estensione :  
Intervallo in cui il segnale è diverso da zero
- ★ Durata :  
Misura dell'estensione

### 1.2.3 Area e valor medio

- ★ Area di un segnale di  $x(t)$  è definita dall'integrale

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

- ★ Valor medio di un segnale  $x(t)$  è definito dal limite :

$$m_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

L'area e il valor medio sono entrambe funzione lineari invarianti alle traslazioni e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

- ★ Se l'area ha valore finito allora il valor medio ha valor nullo
- ★ Se il valor medio ha valore finito allora l'area ha valore infinito

### 1.2.4 Energia e potenza

★ Energia :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

★ Potenza

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

L'energia e la potenza sono entrambi funzioni **non** lineari ma rimangono invarianti alle traslazioni e inoltre assumono unicamente valori reali positivi e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

- Se l'energia ha valore finito allora la potenza a valore finito
- Se la potenza ha valore finito allora l'energia ha valore infinito
- La somma di due o più segnali di energia è un segnale di energia
- La somma di due o più di potenza non è necessariamente un segnale di potenza

I segnali ad energia finita e non nulla su  $\mathbb{R}$  vengono chiamati **segnali di energia**

I segnali a potenza finita e non nulla su  $\mathbb{R}$  vengono chiamati **segnali di potenza**

★ Energia mutua di due segnali

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Se i segnali  $x$  e  $y$  sono ad energia finita , esiste finita l'energia mutua ed è interpretabile come un prodotto scalare.

Questo ci permette di esprimere l'energia del segnale come :

$$\begin{cases} z = x + y \\ E_z = E_x + E_y + 2\operatorname{Re}(E_{xy}) \end{cases}$$

★ Potenza mutua di due segnali

$$P_{xy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \overline{y(t)} dt$$

$$\begin{cases} z = x + y \\ P_z = P_x + P_y + 2\operatorname{Re}(P_{xy}) \end{cases}$$

## 1.3 Segnali periodici

**Definizione.** (Segnale periodico)

Un segnale  $x(t)$  è detto periodico se esiste almeno un numero reale  $T > 0$  tale che

$$X(t+T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se  $T$  è un periodo di  $x(t)$  allora anche  $kT, k \in \mathbb{Z} \setminus 0$  è un periodo.

Definiamo *periodo fondamentale* il minimo valore di  $T$  per cui il segnale sia periodico

Per segnali periodici, con periodo  $T$  , l'area e l'energia divergono. Quindi i quattro parametri fondamentali vengono calcolati rispetto ai periodi :

**Area**

$$A_x(T) = \int_0^T x(t)dt$$

**Valor medio**

$$m_x(T) = \frac{1}{T} \int_0^{0+T} x(t)dt = \frac{A_x}{T}$$

**Energia**

$$E_x(T) = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

**Potenza media**

$$P_x(T) = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{E_x}{T}$$

**Valore efficace**

$$V_{eff}(T) = \sqrt{P_x(T)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt} = RMS$$

## 1.4 Convoluzione

**Definizione.** (Convoluzione)

Sia  $x$  e  $t$  due integrabili secondo Lebesgue . Si definisce convoluzione di  $x$  e  $y$  la funzione definita nel seguente modo :

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)y(\tau)d\tau$$

### 1.4.1 Proprietà

1. Commutatività :

$$f * g = g * f$$

*Dimostrazione.* Applico la sostituzione  $\begin{cases} u = t - \tau \\ du = -d\tau \end{cases}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(u + \tau)g(u)du = (g * f)(t)$$

□

2. Associatività :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. Distributività

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

4. Traslazione

5. Elemento neutro :

La convoluzione di un qualsiasi segnale con l'impulso di dirac fornisce il segnale stesso .Quindi l'impulso di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione

$$[x * \delta](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x(t)$$

Inoltre se l'impulso di dirac è traslato di  $t_0$  anche il segnale sarà traslato dello stesso fattore

$$(x * \delta_{t_0})(t) = x(t - t_0)$$

6. Area :

$$s(t) = (x * y)(t)$$

$$A(s) = A(x) A(y)$$

7. Estensione e durata Definiamo l'estensione e la durata di x e y (segnali come)

$$e[x] = [t_x, T_x], e[y] = [t_y, T_y]$$

$$D_x, D_y$$

Sia  $z(t) = x * y(t)$  allora questo segnale avrà estensione e durata pari a

$$e[z] = e[x * y] = [t_x + t_y, T_x + T_y]$$

$$D_z = D_x + D_y$$

#### 1.4.2 Convoluzione per segnali periodici

- ★ Se solo uno dei due segnali è periodico allora possiamo utilizzare la normale definizione di convoluzione , che ci restituirà un segnale anch'esso periodico
- ★ Se entrambi i segnali sono periodici l'integrale diverge , dobbiamo quindi utilizzare una diversa definizione di convoluzione.

$$x * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$

### 1.5 Funzione di Correlazione

**Definizione.** Per due segnali x e y ad energia finita la correlazione incrociata è definita come :

$$x \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t - \tau)dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Nel caso di *Segnali di potenza* la cross-correlazione viene definita nel seguente modo :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\tau)\overline{y(t - \tau)}dt$$

#### 1.5.1 Proprietà

- ★ La Correlazione **non gode** della proprietà commutativa
- ★ La durata del segnale risultato dalla cross relazione è
- ★ Relazione con l'operazione di convoluzione

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * \overline{y(-\tau)}$$

$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * \overline{x(-\tau)}$$

- ★ Il valore nell'origine coincide con l'energia mutua dei due segnali :

$$R_{xy}(0) = E_{xy}$$

#### 1.5.2 Auto-correlazione

Se i due segnali x e y sono uguali a funzione di cross correlazione restituisce l'auto-correlazione :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x(t - \tau)}dt$$

## 1.6 Analisi in Frequenza

I concetti di estensione e durata possono essere trasferiti al dominio delle frequenze e diventano **estensione spettrale**  $e[S]$  e **larghezza di Banda**  $B_s$ , misura dell'estensione spettrale.

Tipicamente si fa riferimento alla banda monolaterale, si considera la banda come metà della misura dell'estensione spettrale, considerando solo le frequenze positive

$$B = \inf\{\bar{f} \in \mathbb{R} : |S(f)| = 0 \quad \forall |f| > \bar{f}\}$$

Banda e durata hanno una relazione inversa (durata infinita  $\rightarrow$  banda finita)

### 1.6.1 Filtri ideali

I **filtri ideali** sono caratterizzati dall'avere :

- ★ Ampiezza della risposta costante
  - Pari a 1 nella banda passante
  - Diversa da zero (normalmente pari a 1) nella banda oscura
- ★ La fase della risposta in frequenza è lineare nella banda passante
- ★ Brusca transizione tra banda passante e banda oscura

In base alle caratteristiche di selettività del filtro, possiamo classificare i filtri in 4 macro categorie :

#### 1. Filtro passa-basso ideale

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = (2f_L A) \text{sinc}(2f_L(t - t_0))$$

Banda passante =  $(-f_L, f_L)$

Banda oscura =  $(-\infty, -f_L) \cup (f_L, +\infty)$

#### 2. Filtro passa-alto

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[ 1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_H}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2f_H A) \text{sinc}(2f_H(t - t_0))$$

Banda passante =  $(-\infty, -f_H) \cup (f_H, +\infty)$

Banda oscura =  $(-f_H, f_H)$

#### 3. Filtro passa banda ideale

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[ \Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = (2A\Delta f) \text{sinc}(\Delta f(t - t_0)) \cos(2\pi f_0(t - t_0))$$

Banda passante =  $(-f_{c2}, -f_{c1}) \cup (f_{c1}, f_{c2})$

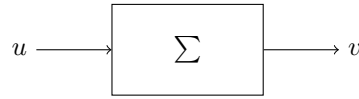
Banda oscura =  $(-\infty, -f_{c2}) \cup (-f_{c1}, f_{c1}) \cup (f_{c2}, +\infty)$

#### 4. Filtro elimina banda

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[ 1 - \Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) - \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2A\Delta f) \text{sinc}(\Delta f(t - t_0)) \cos(2\pi f_0(t - t_0))$$

## 2 Sistemi a tempo continuo



Un sistema è :

- ★ **algebrico o senza memoria** se la relazione tra l'input e l'output è una funzione algebrica
- ★ **dinamico** se l'output dipende dal valore attuale dell'input e anche dalla sua evoluzione passata
- ★ **autonomo o libero** se non riceve input , dipende unicamente dalle condizioni iniziali
- ★ **forzato** se è influenzato da input esogeni. Gli input manipolabile vengono chiamati segnali di controllo , gli input sconosciuti vengono chiamati disturbi.

**Definizione.** (Linearità)

Un sistema dinamico  $\Sigma$  è lineare se vale il principio della sovrapposizione degli effetti : per un sistema inizialmente a riposo , se i valori di output  $v_1, v_2$  corrispondenti ai valori di input  $u_1, u_2$  allora l'ingresso  $u = \alpha u_1 + \beta u_2$  corrisponde l'uscita  $\alpha v_1 + \beta v_2$  qualunque siano i valori dei parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Definizione.** (Tempo-invarianza)

Un sistema dinamico inizialmente a riposo è tempo invariante se traslazioni nel tempo dei valori assunti dagli ingressi  $u(t)$  provocano le stesse traslazioni nel tempo dei valori assunti dalle uscite  $v(t)$

**Definizione.** (Causalità) Un sistema dinamico inizialmente a riposo è causale se l'output al tempo  $t$  ( $v(t)$ ) ,dipende solo dall'input al tempo  $t$  ( $u(t)$ ). In altre parole , per determinare il valore dell'uscita ad un certo istante di tempo  $T$  , non è necessario conoscere il valore dell'ingresso per istanti di tempo  $t > T$

**Definizione.** (Stabilità esterna o BIBO , bounded-input bounded output)

Un sistema dinamico a tempo continuo, inizialmente a riposo ,  $\Sigma$  è BIBO stabile se per ogni costante positiva  $M_u$  esiste una costante positiva  $M_v$  , tale che per ogni segnale di ingresso  $u(t)$  che soddisfa

$$|u(t)| \leq M_u \quad t \geq t_0 \quad \forall M_u \in \mathbb{R}^+$$

la corrispondente risposta in uscita  $v(t)$  è soddisfatta

$$|v(t)| \leq M_v \quad t \geq t_0 \quad \forall M_v \in \mathbb{R}^+$$

**Definizione.** (Stabilità interna o asintotica)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera  $v_l(t)$  converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_l(t) = 0$$



In un Sistema lineare tempo-invariante la funzione  $h$  non dipende esplicitamente dal tempo e quindi abbiamo la seguente *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti*

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \in \mathbb{R} \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

- ★  $u(t)$  è il segnale di input *noto*,  $v(t)$  è il segno di output che dobbiamo trovare
- ★ I coefficienti  $a_i, b_j$  sono assunti noti
- ★ I coefficienti  $a_n, b_m \neq 0$
- ★ se  $n \geq m$  il sistema è detto **proprio**
- ★ se  $n > m$  il sistema è detto **strettamente proprio**

## 2.1 Evoluzione libera

Modello IO SISO LTI con istante iniziale  $t_0$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq t_0 \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

Siccome il sistema è tempo-invariante assumiamo  $t_0 = 0$ .

Le condizioni iniziali del sistema sono :

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

inoltre l'ingresso  $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$ .

Dall'analisi matematica sappiamo che l'uscita  $v(t)$  dei modelli LTI può essere scritta come la somma di una soluzione particolare e la soluzione dell'equazione omogenea associata.

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

dove :

- ★  $v_f(t)$  è l'evoluzione libera
- ★  $v_l(t)$  è l'evoluzione forzata

**Definizione.** (Evoluzione libera)

Data l'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

**l'evoluzione libera** o **risposta libera** del sistema è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

con le stesse condizioni iniziali

**Definizione.** (Equazione caratteristica)

Data l'equazione differenziali omogenea

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

l'equazione algebrica

$$d(s) := \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

si chiama **equazione caratteristica del sistema**

★ il polinomio si dice monico se  $a_n = 1$

★ avendo assunto  $a_n \neq 0$ , il grado del polinomio è  $n$ , cioè  $\deg(d(s)) = n$

**Definizione.** Siano  $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  le radici caratteristiche dell'equazione caratteristica:

$$d(s) := \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

con molteplicità  $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}$  allora

$$d(s) := \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

**Definizione.** (Modi del sistema) Le soluzioni elementari dell'equazione omogenea associata

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

sono le funzioni

$$m_{i,j} = \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, r$  (numero di radici disinte)

$\forall j = 0, \dots, \mu_i - 1$  ( $\mu_i$  = molteplicità della soluzione)

#### Teorema 2.1.1 – Evoluzione libera

La soluzione  $v_l(t)$  dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

può essere scritta come una combinazione lineare dei modi del sistema, ovvero

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} c_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

dove i coefficienti  $c_{i,j}$  sono determinati univocamente dalle condizioni iniziali

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

#### Teorema 2.1.2 – Radici di un polinomio a coefficienti reali

Sia  $d(s) \in \mathbb{R}[s]$  un polinomio a coefficienti reali. Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  è un radice complessa di  $d(s)$  di molteplicità  $\mu$ , allora anche il suo complesso coniugato  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  è un radice complessa di  $d(s)$  di molteplicità  $\mu$

**Definizione.** (Carattere dei modi) il modo elementare  $m_{i,j}(t)$  è:

★ **Convergente a zero**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m_{i,j}(t)| = 0$$

★ **Limitato :**

$$\exists M < \infty \quad |m_{i,j}(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

★ **illimitato o divergente :** altrimenti

#### Teorema 2.1.3 – Carattere dei modi

il modo elementare  $m_{i,j}(t)$  è:

★ **Convergente a zero**  $t \rightarrow \infty$  se e solo se

$$Re(\lambda_i) < 0$$

★ **Limitato :** in  $[0, +\infty]$  se e solo se  $Re(\lambda_i) \leq 0$  e i modi sono semplici ( cioè la molteplicità delle soluzioni è pari a 1 )

★ **illimitato o divergente :** altrimenti

**Definizione.** (Stabilità interna o asintotica)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{d^j t} \quad t \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera  $v_l(t)$  converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \rightarrow * \infty} v_l(t) = 0$$

**Definizione.** (Stabilità semplice)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{d^j t} \quad t \geq 0$$

è **semplicemente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera  $v_l(t)$  è limitata

$$\exists 0 < M < \infty \quad |v_l(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

#### Teorema 2.1.4 – Stabilità Semplice

Un sistema LTI causale è :

★ stabile se e solo se tutti i modi sono limitati

★ stabile asintoticamente se e solo se tutti i modi convergono a zero per  $t \rightarrow \infty$

## 2.2 Evoluzione forzata

**Definizione.** (Risposta Impulsiva)

Dato un sistema causale SISO LTI, descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

la risposta all'impulso  $h(t)$  è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali nulle, il sistema è a riposo

$$h(0^-) = 0, \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 0, \left. \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-} = 0, \dots, \left. \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-} = 0$$

**Definizione.** (Segnale causale)

Un segnale  $v(t)$  è causale se il suo supporto è definito  $[0, +\infty)$  contenuto...

### Teorema 2.2.1 – Risposta Impulsiva

La risposta impulsiva  $h(t)$  del sistema SISO LTI tempo continuo causale  $\Sigma$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

ha la forma

$$h(t) = d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

Inoltre  $d_0, d_{i,j} \in \mathbb{R}$  e  $d_0 = 0$  se  $n > m$  ( $d_0 \neq 0$  se  $n = m$ )

*Dimostrazione.* Per  $t > 0$  la delta di Dirac e tutte le sue derivate sono identicamente nulle, quindi  $h(t)$  deve soddisfare per  $t > 0$  l'equazione omogenea

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = 0 \quad t > 0$$

con tutte le condizioni iniziali nulle. Dallo studio dell'evoluzione libera sappiamo che ha forma che deve essere del tipo

$$h(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

il comportamento in  $t = 0$  dell'equazione precedente, consiste nella combinazione lineare dei termini □

### Teorema 2.2.2 – Causalità

il sistema continuo LTI descritto dalla risposta impulsiva  $h(t)$  è causale se e solo se  $h(t)$  è un segnale causale (è zero per i tempi negativi)

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

### Teorema 2.2.3 – Evoluzione forzata

La risposta forzata del sistema causale SISO LTI con risposta all'impulso  $h(t)$ , condizioni iniziali nulle, e input  $u(t)$  è data dal prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned}v_f(t) &= h * u(t) \\&= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Se  $u(t)$  è un segnale causale allora

$$\begin{aligned}v_f(t) &= h * u(t) \\&= \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-0^-}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

quindi anche la risposta forzata è un segnale causale

*Dimostrazione.* Consideriamo  $u(t)$ ,  $h(t)$  segnali qualsiasi. Sappiamo che partendo da condizioni iniziali nulle abbiamo

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j}$$

Per la **tempo invarianza** abbiamo che

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t-\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t-\tau)}{dt^j} \quad \tau > 0$$

inoltre per la **linearità**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i c(h(t-\tau))}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j c(\delta(t-\tau))}{dt^j}$$

Al posto di  $c$  consideriamo  $u(t)d\tau$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i u(t)d\tau(h(t-\tau))}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)d\tau(\delta(t-\tau))}{dt^j}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale anche

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i (\sum_k u(\tau_k)h(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \sum_k u(\tau_k)(\delta(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^j}$$

Passando all'integrale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i (\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)(\delta(t-\tau)d\tau)}{dt^j}$$

Usando infinite la proprietà di riproducibilità dell'impulso della delta di Dirac nel termine di destra

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau \right)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i [h * u](t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$v_f(t) = [h * u](t)$$

□

#### Teorema 2.2.4 – BIBO stabilità per sistemi LTI a tempo continuo

Il sistema LTI a tempo continuo  $\Sigma$  descritto dalla risposta impulsiva  $h(t)$  è BIBO stabile se e solo se  $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ , quindi se  $h(t)$  è una funzione sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Se il sistema è causale allora

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che la risposta impulsiva sia una funzione sommabile che il segnale d'ingresso sia limitato  $|u(t)| < M_u \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Vale quindi

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [h * u](t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) u(t-\tau)| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |u(t-\tau)| dt \\ &< M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| dt \\ &< M_u M_h = M_v \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che  $h(t)$  non sia un segnale sommabile. Definiamo il segnale di ingresso come

$$u(t) = \text{sgn}(h(-t)) \begin{cases} +1 & h(t-\tau) > 0 \\ -1 & h(t-\tau) < 0 \end{cases}$$

e consideriamo l'uscita al tempo  $t = 0$

$$\begin{aligned}
 v_f(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(0-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)u(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)\operatorname{sgn}(h(-\tau)) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|d\tau = +\infty
 \end{aligned}$$

□

#### Teorema 2.2.5 – (BIBO stabilità)

Un sistema LTI a tempo continuo causale  $\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se i modi elementari che compaiono con coefficiente diverso da zero nell'espressione della risposta impulsiva

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

sono convergenti a zero

#### Teorema 2.2.6 – Stabilità asintotica

Un sistema LTI a tempo continuo causale  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi della risposta libera

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} c_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \quad t \geq 0$$

convergono a zero asintoticamente

### 3 Trasformata di Laplace

Dato un segnale  $v(t), t \in \mathbb{R}_+^0$ , somma di termini localmente sommabili ( $\mathbb{L}_{loc}^1 \in \mathbb{R}_+^0$ ) e di un insieme finito di segnali impulsivi, la trasformata di Laplace  $V(s)$  di  $v(t)$  è definita dall'integrale

$$\mathcal{L}[v(t)] = V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + \omega t \in \mathbb{C}$$

#### 3.1 Proprietà

★ **Linearità :**

La trasformata di Laplace è lineare in virtù della linearità dell'integrale

$$\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[v_2(t)]$$

Inoltre l'ascissa di convergenza della trasformata  $\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)]$  è minore o uguale alla maggiore delle due ascisse di convergenza

★ **Derivata :**

Se la funzione  $v(t)$  è trasformabile secondo Laplace ed esistono finito le condizioni iniziali :

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{i-1} v(t)}{dt^{i-1}} \right|_{t=0^-} \quad i \in \mathbb{N}$$

allora vale

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] = s^i \mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \left. \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right|_{t=0^-} s^{i-1-k}$$

Inoltre l'ascissa di convergenza di  $\mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right]$  è minore o uguale di quella della trasformata di  $v(t)$

★ **Moltiplicazione per una funzione polinomiale :**

Se  $v(t)$  è dotata di trasformata di Laplace allora esiste

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

★ **Ritardo temporale :**

Sia  $v(t)$  una segnale dotato di trasformata di Laplace  $V(s)$ . definito il segnale ritardato come

$$v(t - \tau) = \begin{cases} v(t - \tau) & t - \tau > 0 \\ 0 & t - \tau < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}v(t - \tau) = e^{-s\tau} V(s)$$

★ **Moltiplicazione per una funzione esponenziale :**

Se  $v(t)$  ammette trasformata di Laplace con ascissa di convergenza  $\alpha$  allora esiste

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

e tale trasformata converge per  $\operatorname{Re}(s) > \alpha + \operatorname{Re}(\lambda)$

★ **Convulsione :**

Sia  $v_1(t), v_2(t)$  sono due funzioni nulle per  $t < 0$  e dotate di trasformata di Laplace allora esiste

$$\mathcal{L}[v_1 * v_2(t)] = V_1(s)V_2(s)$$

L'asciussa di convergenza è minore o uguale di  $\max\{a_1, a_2\}$



★ **Integrale :**

Se  $v(t)$  è dotata di trasformata di Laplace, allora esiste

$$\mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^{t^+} v(\tau) d\tau \right] = \frac{V(s)}{s}$$

★ **Teorema del valore finale:**

Sia  $v(t)$  una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito il limite all'infinito di  $v(t)$  allora vale la seguente formula

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s V(s)$$

★ **Teorema del valore iniziale :**

Sia  $v(t)$  una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito il limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t)$  allora vale la seguente formula

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V(s)$$

★ **Cambiamento di scala :**

Sia  $v(t)$  una funzione dotata di trasformata di Laplace  $V(s)$ , con ascissa di convergenza  $\alpha$  e sia  $r$  una costante reale positiva, allora

$$\mathcal{L}[v(rt)] = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Vogliamo utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere i sistemi causali LTI descritti da

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad n \geq m \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad a_n, b_m \neq 0$$

Se l'ingresso  $u(t)$  ha trasformata di Laplace allora anche  $v(t)$  ha trasformata di Laplace. Inoltre sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] &= s^i \mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \\ \mathcal{L} \left[ \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] &= s^j U(s) \quad (\text{poichè è un segnale causale}) \end{aligned}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ogni componente del sistema abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] &= \mathcal{L} \left[ \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] \\ a_0 V(s) + \sum_{i=1}^n a_i s^i V(s) - \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \right) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j U(s) \\ v(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i - \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \right) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j U(s) \\ \text{Definisco} \quad d(s) &:= \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad n(s) := \sum_{j=0}^m b_j s^j \quad p(s) := \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \right) \\ d(s)V(s) - p(s) &= n(s)U(s) \\ V(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \quad \forall s \in \mathbb{C} \\ &= V_f(s) + V_i(s) \end{aligned}$$

**Definizione.** (Funzione di trasferimento) Il rapporto tra i polinomi  $n(s)$  e  $d(s)$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad s \in \mathbb{C}$$

è detta funzione di trasferimento di  $\Sigma$

Inoltre abbiamo che la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso

$$H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h(t)] &= H(s) \\ \mathcal{L} \left[ d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \right] &= H(s) \\ Usando \quad \mathcal{L}[\delta(t)] &= 1 \quad \mathcal{L}[e^{\sigma t}] = \frac{1}{s - \sigma} \quad \mathbb{L}[t^i f(t)] = (-1)^i \frac{d^i F(s)}{dt^i} \end{aligned}$$

$$H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,j}}{(s - \lambda_i)^{j+1}}$$

Si ha che l'asse di convergenza della funzione di trasferimento vale

$$\max \{ \operatorname{Re}(\lambda_i) | \exists j : d_{i,j} \neq 0 \}$$

Ricordando la formula 3.1 abbiamo che la funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 s^0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s^0}$$

La funzione è una funzione razionale nella variabile  $s$ , propria se  $n \geq m$ , strettamente propria se  $n > m$ . Inoltre definiamo con  $\operatorname{Re}[s]$  lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di  $s$  e con  $\operatorname{Re}(s)$  lo spazio delle funzioni razionali di  $s$ . Inoltre se esplicitiamo le radici dei polinomi otteniamo

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)^{q_1} (s - z_2)^{q_2} \dots (s - z_u)^{q_u}}{(s - p_1)^{\mu_1} (s - p_2)^{\mu_2} \dots (s - p_h)^{\mu_h}} \quad \begin{cases} \sum q_i = m \\ \sum \mu_i = n \\ K = \frac{b_m}{a_n} \end{cases}$$

**Definizione.** (Zero)

Gli zeri della funzione di trasferimento  $H(s)$  sono i valori di  $s$  per i quali  $H(s)$  tende a zero (Sono quindi le radici del polinomio  $n(s)$ ).

Lo zero  $z_i \in \mathbb{C}$  ha molteplicità  $k \in \mathbb{N}$  se il limite

$$\lim_{s \rightarrow z_i} \frac{1}{(s - z_i)^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.

Il punto improprio  $\infty$  è uno zero di molteplicità  $K$  se il limite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.

**Definizione.** (Polo)

I poli della funzione di trasferimento  $H(s)$  sono i valori per i quali  $H(s)$  tende a infinito (Sono quindi le radici del polinomio  $d(s)$ ).

Il polo  $p_i \in \mathbb{C}$  ha molteplicità  $k \in \mathbb{N}$  se il limite

$$\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero .

Il punto improprio  $\infty$  è un polo di molteplicità  $k$  se il limite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero

**Teorema 3.1.1 – BIBO stabilità e poli di  $H(s)$**

Dato il sistema causale SISO LTI di funzione di trasferimento  $H(s)$  con polinomi  $n(s)$  e  $d(s)$  coprimi , il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli sono nel semipiano sinistro aperto del piano complesso , ovvero

$$\operatorname{Re}(p_i) < 0, i = 0, \dots, \deg \{d(s)\}$$

## 4 Diagrammi di Bode

### 4.1 risposta in frequenza

**Definizione.** (Risposta in frequenza)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad w \in \mathbb{R}$$

★ Modulo :

$$A(w) = |H(jw)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right| \quad w \in \mathbb{R}$$

★ Fase :

$$\phi(w) = \angle H(jw) = \arg \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right\} \quad w \in \mathbb{R}$$

★

$$\overline{H(jw)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\overline{e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j\omega t} dt = H(-jw)$$

La risposta in frequenza è una funzione hermitiana.

Da questa proprietà deriviamo che

$$A(w) = A(-w) \quad \phi(w) = -\phi(-w)$$

★ Per sistemi BIBO stabili con risposta impulsiva senza componenti impulsiva, la risposta in frequenza  $H(j\omega)$  è una funzione continua in  $\omega$  e vale

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} H(j\omega) = 0$$

I sistemi causali LTI e BIBO stabili descritti da

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \in \mathbb{R}$$

rispondono ad un ingresso  $u(t) = e^{j\omega t}$   $t \in \mathbb{R}$  con  $v(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$   $t \in \mathbb{R}$ , sostituendo i termini di  $u(t)$  e  $v(t)$  nel sistema otteniamo

$$\sum_{i=0}^n a_i H(j\omega) (j\omega)^i e^{j\omega t} = \sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^i e^{j\omega t} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(j\omega)e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^i \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}$$

La risposta in frequenza  $H(j\omega)$  non è altro che la **trasforma di Fourier della risposta impulsiva** quando il sistema LTI è BIBO stabile

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

Per sistemi causali

$$H(j\omega) = \int_{0^-}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

Sempre per i sistemi BiBO stabili vale che

$$H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

si ha quindi che

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

## 4.2 Diagrammi di Bode

**Definizione.** (Diagramma di Bode)

I **Diagrammi di Bode** sono una rappresentazione grafica della risposta in frequenza  $H(jw)$ .

Sfruttando le proprietà di simmetria del modulo e dalla fase della risposta in frequenza  $A(w) = A(-w)$   $\phi(w) = -\phi(-w)$  possiamo graficare  $w \geq 0$  Inoltre la risposta in frequenza in notazione polare

$$H(jw) = A(w)e^{j\phi(w)}$$

$$\ln(H(jw)) = \ln(A(w)) + j\phi(w)$$

quindi per graficare il logaritmo della risposta in frequenza dobbiamo graficare

- ★ il logaritmo naturale dell'ampiezza ( *Diagramma di bode dell'ampiezza* )
- ★ il modulo della risposta ( *Diagramma di bode della fase* )

Inoltre invece di utilizzare il logaritmo naturale del modulo si usa il **decibel(dB)**

$$|H(jw)|_{db} = 20 \log_{10} |H(jw)|$$

Anche nell'asse delle ascisse non utilizzeremo  $w$  ma  $\log_{10} w$  Data la funzione di trasferimento come rapporto di polinomi

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)^{\mu'_1} (s - z_2)^{\mu'_2} \dots (s - z_u)^{\mu'_u}}{(s - p_1)^{\mu_1} (s - p_2)^{\mu_2} \dots (s - p_r)^{\mu_r}}$$

- ★  $z_i \in \mathbb{R}$  con molteplicità di  $\mu'_i$  verranno riscritti come

$$(s - z_i) = -z_i(1 + s\tau'_i) \quad \tau'_i = \frac{-1}{z_i}$$

$$(s - z_i)^{\mu'_i} = (-z_i)^{\mu'_i} (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i}$$

- ★ poli reali  $p_i \in \mathbb{R}$  di molteplicità  $\mu_i$

$$(s - p_i) = -p_i(1 + s\tau_i) \quad \tau_i = \frac{-1}{p_i} \text{ costante di tempo del polo}$$

$$(s - p_i)^{\mu_i} = (-p_i)^{\mu_i} (1 + s\tau_i)^{\mu_i}$$

- ★ zeri complessi coniugati  $z_i, \bar{z}_i$  di molteplicità  $\mu'_i$

$$(s - z_i)(s - \bar{z}_i) = s^2 - 2\text{Re}(z_i)s + |z_i|^2$$

$$= |z_i|^2 \left( 1 + 2 \frac{\text{Re}(z_i)}{|z_i|} \frac{s}{|z_i|} + \frac{s^2}{|z_i|^2} \right)$$

$$= |z_i|^2 \left( 1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}} \right) \quad \begin{cases} \zeta'_i = -\frac{\text{Re}(z_i)}{|z_i|} \\ \omega'_{ni} = |z_i| \end{cases}$$

$$(s - z_i)^{\mu'_i} (s - \bar{z}_i)^{\mu'_i} = |z_i|^{2\mu'_i} \left( 1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}} \right)^{\mu'_i}$$

- ★ poli complessi coniugati  $p_i, \bar{p}_i$  di molteplicità  $\mu_i$

$$(s - p_i)(s - \bar{p}_i) = s^2 - 2\text{Re}(p_i)s + |p_i|^2$$

$$= |p_i|^2 \left( 1 + 2 \frac{\text{Re}(p_i)}{|p_i|} \frac{s}{|p_i|} + \frac{s^2}{|p_i|^2} \right)$$

$$= |p_i|^2 \left( 1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right) \quad \begin{cases} \zeta_i = -\frac{\text{Re}(p_i)}{|p_i|} \\ \omega_{ni} = |p_i| \end{cases}$$

$$(s - p_i)^{\mu_i} (s - \bar{p}_i)^{\mu_i} = |p_i|^{2\mu_i} \left( 1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right)^{\mu_i}$$

I parametri  $\omega'_{ni}, \omega_{ni}$  vengo detti **pulsazioni naturali**.  
 I parametri  $\zeta'_i, \zeta_i$  vengono detti **coefficienti di smorzamento**

### 4.3 Forma di Bode della funzione di trasferimento

$$H(s) = K_B \frac{\prod_i (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} - \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{s^\nu \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} - \frac{s^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}$$

$$K_B = \frac{b_m \prod_i (\tau_i)^{\mu_i} \prod \left(\frac{1}{\omega^2_{ni}}\right)^{2\mu_i}}{a_n \prod_i (\tau'_i)^{\mu'_i} \prod \left(\frac{1}{\omega'^2_{ni}}\right)^{2\mu'_i}} \quad \text{Guadagno di Bode}$$

Ora sapendo che  $H(jw) = H(s) \Big|_{s=jw}$  possiamo ricavare la forme di bode della riposta in frequenza

$$H(jw) = K_B \frac{\prod_i (1 + jw\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{jw}{\omega'_{ni}} - \frac{w^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{(jw)^\nu \prod_i (1 + jw\tau_i)^{\mu_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{jw}{\omega_{ni}} - \frac{w^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}$$

Utilizzando il logaritmo e l'argomento possiamo sfruttare le proprietà che ci semplificano i conti

$$\begin{cases} \arg(ab) = \arg(a) + \arg(b) \\ \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b) \\ \arg(a^k) = k \arg(a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |H(jw)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} \left\{ \frac{|K_B| \prod_{i=1} |1 + jw\tau'_i|^{\mu'_i} \prod_{i=1} \left|1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'^2_n} \omega - \frac{1}{\omega'^2_n} \omega^2\right|^{\mu'_i}}{|(jw)^\nu| \prod_{i=1} |1 + jw\tau_i|^{\mu_i} \prod_{i=1} \left|1 + j2\frac{\zeta_i}{\omega^2_n} \omega - \frac{1}{\omega^2_n} \omega^2\right|^{\mu_i}} \right\} \\ &= 20 \log_{10} |K_B| + \quad \text{termine costante} \\ &\quad + \sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10} |1 + jw\tau'_i| + \dots \quad \text{zeri reali} \\ &\quad + \sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10} \left|1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'^2_n} \omega - \frac{1}{\omega'^2_n} \omega^2\right| + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati} \\ &\quad - 20\nu \log_{10} |jw| - \dots \quad \text{radici nell'origine} \\ &\quad - \sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10} |1 + jw\tau_i| - \dots \quad \text{poli reali} \\ &\quad - \sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10} \left|1 + j2\frac{\zeta_i}{\omega^2_n} \omega - \frac{1}{\omega^2_n} \omega^2\right| \quad \text{poli complessi coniugati} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\angle H(j\omega) &= \arg \left\{ K_B \frac{\prod_{i=1} (1 + j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_{i=1} \left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right)^{\mu'_i}}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1} (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right)^{\mu_i}} \right\} \\
&= \arg(K_B) + \text{termine costante} \\
&\quad + \sum_{i=1} \mu'_i \arg(1 + j\omega\tau'_i) + \dots \quad \text{zeri reali} \\
&\quad + \sum_{i=1} \mu'_i \arg\left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right) + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati} \\
&\quad - \nu \arg(j\omega) - \dots \quad \text{radici nell'origine} \\
&\quad - \sum_{i=1} \mu_i \arg(1 + j\omega\tau_i) - \dots \quad \text{poli reali} \\
&\quad - \sum_{i=1} \mu_i \arg\left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right) \quad \text{poli complessi coniugati}
\end{aligned}$$

## 5 Segnale a tempo discreto