

Sistemi dinamici

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1	Problemi di Cauchy per ODE del primo ordine in forma normale	2
1.0.1	Dipendenza continua dai dati iniziali	5
2	Risoluzione esplicite di alcune equazioni differenziali	7
2.1	Equazione di riccati	7
2.2	Equazioni differenziali totali	7
3	Sistemi Dinamici	8
3.1	Equazioni del secondo ordine	9
4	Sistemi lineari	10
4.1	Linearizzazione del secondo ordine	10
4.2	Generalità	11
4.3	Decomposizione in sottospazi invarianti di grado 1 e 2	11
4.4	Sistemi lineari diagonalizzabili	14
4.5	Relazione tra sistemi non lineari e i loro linearizzati	14
5	Flusso e coniugazione di campi vettoriali	16
5.1	Flusso	16
5.1.1	Proprietà del flusso	16
5.2	Coniugazione	17
6	Integrali primi	19
7	Stabilità	21
8	Equazioni di Newton	24
8.1	Abbassamento dell'ordine e formula del periodo	24

1 Problemi di Cauchy per ODE del primo ordine in forma normale

Definizione 1.1. Dati: Un aperto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in D$

Problema: Dobbiamo trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione differenziabile (di classe C^1) $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in I$$

Teorema 1.1 – di esistenza e unicità locale

Se f è di classe C^1 allora esiste un certo α tale che il problema di Cauchy possiede una ed una sola soluzione definita nell'intervallo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

Definizione 1.2. (soluzioni distinte)

y_1, y_2 sono due soluzioni distinte se esiste un certo t_0 reale tale che y_1, y_2 sono definite in t_0 però

$$y_1(t_0) \neq y_2(t_0)$$

Corollario. (di unicità locale)

Se f è di classe C^1 e y_1, y_2 sono soluzioni distinte dell'equazione differenziale $y'(t) = f(t, y(t))$ allora i grafici di y_1, y_2 sono disgiunti

Definizione 1.3. (prolungamento di una soluzione)

Sia $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una soluzione del problema di Cauchy, sia $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'altra soluzione del problema di Cauchy definita in un intervallo $I_2 \supseteq I_1$. Si dice prolungamento di y_1 se $y_2(t) = y_1(t) \quad \forall t \in I_1$

Definizione 1.4. (soluzione massimale)

Si dice che una soluzione è massimale se non è ulteriormente prolungabile

Definizione 1.5. Si dice che una soluzione è globale quando è definita su tutto \mathbb{R}

Teorema 1.2 – di fuga dei compatti

Se f è di classe C^1 il problema di Cauchy possiede una ed una sola soluzione massimale $y : (\alpha_-, \alpha_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Inoltre, per ogni insieme compatto K (chiuso e limitato) contenuto in D esiste un intorno U_+ di α_+ tale che

$$(t, y(t)) \notin K \quad \forall t \in U_+$$

Corollario. Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 , se y è una soluzione massimale limitata dell'equazione differenziale allora y è una soluzione globale

Dimostrazione. Sia $y : (\alpha_-, \alpha_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione massimale limitata. Per assurdo suppongo che non sia anche globale quindi $\alpha_+ < +\infty$. Per ipotesi esiste $M > 0$ t.c. $\|y(t)\| \leq M \quad \forall t \in (\alpha_-, \alpha_+)$. Definisco l'insieme

$$K = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t_0 \leq t \leq \alpha_+, \|z\| \leq M\}$$

K è un insieme compatto, inoltre per costruzione

$$(t, y(t)) \in K \quad \forall t \in [t_0, \alpha_+)$$

ma ciò contraddice il teorema di fuga dai compatti, allora $\alpha_+ = +\infty$, allo stesso modo si dimostrerà che $\alpha_- = -\infty$ \square

Teorema 1.3 – dell'asintoto

Sia $u : [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Supponiamo che esistano

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \quad L' = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

se L è finito allora $L'=0$

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $L' \neq 0$. Consideriamo il caso $0 < L' \leq \infty$. Per la definizione di limite esiste $M > 0$ tale che per ogni $s \geq M$

$$u'(s) \geq \frac{L'}{2}$$

Prendo $t \geq M$ e integro membro a membro la disuguaglianza su (M, t)

$$\int_M^t u'(s) ds \geq \int_M^t \frac{L'}{2} ds$$

$$u(t) - u(M) \geq \frac{L'}{2}t - \frac{L'}{2}M$$

$$u(t) \geq u(M) + \frac{L'}{2}t - \frac{L'}{2}M \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

ma ciò è assurdo perchè contraddice l'ipotesi che L sia finito , dunque $L=0$ □

Teorema 1.4 – del confronto

sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siano $y, u : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili , definite sullo stesso intervallo I contenente t_0 , tali che

$$\begin{cases} y'(t) \leq f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora

$$y(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I, t \geq t_0$$

$$y(t) \geq u(t) \quad \forall t \in I, t \leq t_0$$

Un risultato analogo vale anche per le disuguaglianze nel verso opposto :

$$\begin{cases} y'(t) \geq f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora ne dedurremmo che :

$$y(t) \geq u(t) \quad \forall t \in I, t \geq t_0$$

$$y(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I, t \leq t_0$$

Definizione 1.6. (crescita lineare)

Si dice che una funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ha crescita al più lineare nella variabile y se e solo se esistono funzioni continue e non negative $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$|f(t, y)| \leq \phi(t)|y| + \psi(t) \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Se f è di classe C^1 ed è definita su tutto il prodotto cartesiano , per verificare questa condizione basta studiare il comportamento di f quando $|y| \rightarrow +\infty$

Teorema 1.5 – di esistenza globale

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 di crescita al più lineare nella variabile y . Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy (PC) possiede soluzione globale (condizione sufficiente ma non dimostrabile)

Lemma. (di Grönwall)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, siano $\beta, u : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e $\beta \geq 0$, Siano $t_0 \in I, \alpha \in \mathbb{R}$ costanti. Se

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$$

Per ogni $t \in I$, allora

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right)$$

per ogni $t \in I, t \geq t_0$

Dimostrazione. Per $t \in I, t \geq t_0$ definisco

$$R(t) := \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, R è di classe C^1

$$\begin{aligned} R'(t) &= \beta(t)u(t) \leq \beta(t)(\alpha + R(t)) \\ R'(t) - \beta(t)R(t) &\leq \alpha\beta(t) \end{aligned}$$

questa è una disequazione differenziale lineare di primo ordine.

$$B(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)ds$$

Moltiplico entrambi i membri della disuguaglianza per $\exp(-B(t))$

$$\begin{aligned} (R'(t) - \beta(t)R(t))e^{(-B(t))} &\leq \alpha\beta(t)e^{(-B(t))} \\ \frac{d(R(t)e^{-B(t)})}{dt} &\leq -\alpha \frac{d(\alpha e^{-B(t)})}{dt} \end{aligned}$$

Fissiamo ora $t \in I, t \geq t_0$: integrando ambo i membri di questa disuguaglianza sull'intervallo $[t_0, t]$ e osservando che $R(t_0) = B(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} R(t)e^{-B(t)} &\leq \alpha - \alpha e^{-B(t)} \\ R(t) &\leq \alpha e^{B(t)} - \alpha \\ u(t) &\leq \alpha + R(t) \leq \alpha e^{B(t)} \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. del teorema di esistenza globale 1

Sia $y : (\alpha_+, \alpha_-) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale del problema di Cauchy. Dobbiamo dimostrare che $\alpha_- = -\infty, \alpha_+ = +\infty$. Supponiamo per assurdo che $\alpha_+ < +\infty$. Fissiamo un punto $t \in (t_0, y_0)$, per il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza triangolare abbiamo che

$$|y(t)| = \left| y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s)ds \right| \leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^t |y'(s)|ds$$

y è la soluzione dell'equazione differenziale e abbiamo supposto che f sia a crescita al più lineare :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| ds \\ &\leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^t \varphi(s) |y(s)| + \psi(s) ds \\ &\leq |y(t_0)| + \underbrace{\int_{t_0}^{\alpha_+} \psi(s) ds}_{:=\alpha} + \int_{t_0}^t \varphi(s) |y(s)| ds \end{aligned}$$

Possiamo dunque applicare il lemma di Grönwall alla funzione $|y|$ e ne deduciamo che :

$$|y| \leq \alpha \exp \left(\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right) \quad \forall t \in [t_0, \alpha_+)$$

Ne consegue che la funzione y è limitata nell'intervallo , ma questo contraddice il teorema di fuga dai compatti , si ottiene quindi una contraddizione \square

1.0.1 Dipendenza continua dai dati iniziali

Definizione 1.7. (funzione lipschitziana)

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si dice che f è lipschitziana in y (uniformemente rispetto a t) se esiste una costante $L > 0$ tale che , per ogni $t \in \mathbb{R}, y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}$ valga

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (1)$$

Una funzione lipschitziana in y ha necessariamente crescita al più lineare

Lemma. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 tale che la matrice delle derivate parziali $\nabla_y f$, rispetto alla variabile y , sia limitata , vale a dire che esiste $L > 0$ tale che , per ogni $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed ogni indice i, j valga

$$|\nabla_{y_i} f_j| \leq L$$

Allora la funzione è lipschitziana in y . Viceversa se f è di classe C^1 e lipschitziana in y , allora $\nabla_y f$ è limitata

Teorema 1.6 – di dipendenza continua dal dato iniziale

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia lipschitziana nella variabile y (uniformemente rispetto a t e una funzione di classe C^1) . Allora le soluzioni massimali dei due problemi di Cauchy sono globali e soddisfano

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |y_{1,0} - y_{2,0}| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dove L è una costante che soddisfa la disuguaglianza di Lipschitz. (1)

Dimostrazione. Le soluzioni massimali sono globali per il teorema di esistenza globale , questo teorema li posso applicare perchè le funzioni lipschitziane in y hanno crescita al più lineare in y .

Definisco la quantità

$$z(t) = \frac{1}{2} |y_1(t) - y_2(t)|^2$$

per la regola della catena z è differenziabile come funzione di t e la sua derivata è

$$z'(t) = (y_1(t) - y_2(t))(y_1'(t) - y_2'(t))$$

$$z'(t) = (y_1(t) - y_2(t))(f(t, y_1) - f(t, y_2))$$

Applico la disuguaglianza di Cauchy- Schwarz

$$\leq |y_1(t) - y_2(t)| |f(t, y_1) - f(t, y_2)|$$

$$\leq L|y_1(t) - y_2(t)|^2 = 2Lz(t)$$

$$z'(t) \leq 2Lz(t)$$

Per il lemma di Gronwall (in forma differenziale) , supponiamo che

$$z(t) \leq \frac{1}{2} e^{L(t-t_0)} |y_{0,1} - y_{0,2}|^2 \quad \forall t \geq t_0$$

. Moltiplicando per 2 ed estraendo la radice ottengo DA COMPLETARE

□

2 Risoluzione esplicite di alcune equazioni differenziali

2.1 Equazione di riccati

Le equazioni di Riccati sono equazioni differenziali del primo ordine nella forma

$$y'(t) = \alpha(t) + \beta(t)y + \gamma(t)y^2$$

dove α, β, γ sono funzioni continue.

Il primo metodo di risoluzione di questa famiglia di equazioni differenziali è il seguente.

Introduco una variabile u tale che risolva la seguente equazione

$$y(t) = \frac{u'(t)}{\gamma(t)u(t)}$$

sostituendo questo fattore nell'equazione di Riccati ottiene un'equazione lineare del secondo ordine per la variabile u

$$\gamma u'' - (\gamma' + \beta\gamma)u' + \alpha\gamma^2 u = 0$$

Il secondo metodo di risoluzione riduce l'equazione di Riccati ad un'equazione lineare del primo ordine. Richiede di conoscere una soluzione \bar{y} dell'equazione di Riccati.

Cambip di variabile

$$w \text{ tale che } y(t) = \bar{y}(t) + \frac{1}{w(t)}$$

2.2 Equazioni differenziali totali

Le equazioni differenziali totali sono equazioni differenziali nella forma :

$$\alpha(t, y(t)) + \beta(t, y(t))y'(t) = 0$$

dove $\alpha, \beta : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soni funzioni date , di classe $C^1(D)$.

Cerchiamo , se esiste , una **primitiva** dell'equazione , ovvero una funzione differenziabile

$F : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che :

$$\begin{cases} \partial_t F = \alpha \\ \partial_y F = \beta \end{cases}$$

Proposizione. Sia F una primitiva dell'equazione differenziale totale. Allora ogni soluzione y dell'equazione differenziale totale

$$F(t, y(t)) = \text{costante}$$

Viceversa , se $(t_0, y_0) \in D$ è tale che $\partial_y F(t_0, y_0) \neq 0$, allora la curva di livello di F passante per (t_0, y_0) è localmente , in un intorno di (t_0, y_0) , il grafico di una soluzione dell'equazione differenziale totale

Dimostrazione. Sia y una soluzione dell'equazione differenziale totale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t, y(t)) &= \\ &= \partial_t F(t, y(t)) + \partial_y F(t, y(t))y'(t) \\ &= \alpha(y, y(t)) + \beta(t, y(t))y'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la funzione primitiva è costante.

Il viceversa discende dal teorema del Dini

□

Affinchè esista una primitiva F dell'equazione differenziale totoale è **necessario** che

$$\partial_y \alpha - \partial_t \beta = 0$$

su tutto D . Inoltre se il dominio D è semplicemente connesso non è solo condizione necessaria ma anche sufficiente affinchè esista

3 Sistemi Dinamici

Definizione 3.1. (campo vettoriale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Un campo vettoriale è una mappa che

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Una definizione più precisa sarebbe la seguente :

$$\overline{X} : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$$

$$\overline{X} : z \mapsto (z, X(z))$$

Quest'ultima definizione ci è utile se lavoriamo sulle varietà , se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora il prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R}^n$ viene detto fibrato tangente. Noi utilizzeremo la prima definizione di campo vettoriale e inoltre considereremo unicamente campi di vettoriale di classe C^∞

Inoltre definiamo Ω come **Spazio delle fasi**

Definizione 3.2. Una curva integrale di un campo vettoriale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile $z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ intervallo , che risolve l'equazione

$$\dot{z}(t) = X(z(t)) \quad \forall t \in I$$

Il sistema di equazioni differenziali $\dot{z}(t) = X(z(t))$ è autonomo , cioè non dipende esplicitamente dalla variabile t . Segue che se $z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un curva integrale di X allora vale che

$$w(t) = z(t - t_0)$$

con t_0 fissato è una curva integrale.

Di conseguenza basta studiare i problemi di cauchy della seguente forma

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = X(z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Una curva integrale è tangente al campo vettoriale in ogni suo punto. Inoltre non è detto che una curva integrale sia definita su tutto \mathbb{R} (le soluzioni massimale non sono sempre globali)

Definizione 3.3. (Orbita)

Un'orbita del campo vettoriale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'immagine di una delle curve integrali di X , orientata nel verso dei tempi crescenti. L'insieme di tutte le orbite di un campo vettoriale X si chiama ritratto in fase di X

Proposizione. Per ogni punto dello spazio delle fasi Ω passa una ed una sola orbita di X .

Dimostrazione. Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ esiste (almeno localmente) una soluzione di

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

. L'immagine di tale soluzione è un'orbita che passa per z_0 .

Suppongo che due orbite , $O_1 \neq O_2$, si intersechino in un punto $z_0 \in O_1 \cup O_2$. Allora esistono curve integrali $z_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ $z_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ e tempi $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$ tali che

$$z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$$

Considero $w_1(t) = z_1(t - t_1)$, $w_2(t) = z_2(t - t_2)$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni distinte , w_1, w_2 . Assurdo per il teorema di esistenza locale □

Definizione 3.4. (Campo vettoriale completo) Un campo vettoriale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **completo** se e solo se tutte le sue curve integrali massimali sono globali

Tutti i campi vettoriali con crescita al più lineare sono completi, per il teorema di esistenza globale

Proposizione. Per ogni campo vettoriale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste un campo completo che ha le stesse orbite di X (Stesse orbite ma curve integrali diverse)

Definizione 3.5. Dato un campo vettoriale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, una soluzione di equilibrio è una curva integrale costante $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{z} \in \Omega$. Si dice che \bar{z} è un punto di equilibrio di X .

Proposizione. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale e $z : (\alpha, +\infty) \rightarrow \Omega$ una curva integrale. Se esiste $\bar{z} = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$ e se $\bar{z} \in \mathbb{R}$, allora \bar{z} è un equilibrio di X

Dimostrazione. Per definizione di curva integrale

$$\dot{z}(t) = X(z(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X(\bar{z})$$

. (supponendo X continuo). Per il teorema dell'asintoto applicato componente per componente, segue che $X(\bar{z}) = 0$ \square

NB : questa proposizione si applica unicamente a sistemi autonomi

Definizione 3.6. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, sia $\bar{z} \in \Omega$ equilibrio. Diremo che \bar{z} è un equilibrio

★ **Attrattivo:** se e solo se esiste un intorno $V \subseteq \Omega$ di \bar{z} tale che, per ogni curva integrale $z : I \rightarrow \Omega$ di X con $z(0) \in V$ sia ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = \bar{z}$$

★ **Repulsivo:** se e solo se esiste un intorno $V \subseteq \Omega$ di \bar{z} tale che, per ogni curva $z : I \rightarrow \Omega$ di X con $z(0) \in V$ sia ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) = \bar{z}$$

Proposizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e \bar{z} un equilibrio di X

1. Se $X'(\bar{z}) < 0$ l'equilibrio è **attrattivo**
2. Se $X'(\bar{z}) > 0$ l'equilibrio è **repulsivo**

Se $X'(\bar{z}) < 0$ tutto può succedere

3.1 Equazioni del secondo ordine

Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$$

dove $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in X$, $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Possiamo ricondurci ad un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = Y(x, v) = \ddot{x} \end{cases}$$

Il campo vettoriale associato al sistema $X : C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$$

Per il sistema definiamo

- ★ **Spazio delle fasi** : $C \times \mathbb{R}^n$ quindi lo spazio della fasi corrisponde al dominio
- ★ **Spazio delle configurazioni** : C
- ★ **Le orbite** sono le immagini delle curve $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ contenute in $C \times \mathbb{R}^n$. Inoltre le orbite sono a due a due disgiunte
- ★ Le proiezione delle orbite sullo spazio delle configurazioni sono dette **traiettorie**
- ★ Gli equilibri sono i punti che annullano il campo vettoriale , quindi tutti e solo i punti (\bar{x}, \bar{y}) tali che

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \bar{v} = 0 \\ Y(\bar{x}, 0) = 0 \end{cases}$$

Gli equilibri che hanno la forma $(\bar{x}, 0)$ tali che $Y(\bar{x}, 0) = 0$ si chiamano **configurazioni d'equilibrio**

4 Sistemi lineari

Chiamiamo i sistemi lineari quelli della forma

$$\dot{z} = Az \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

quindi il campo vettoriale $X(z) = Az$ è una mappa lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definizione 4.1. Si dice linearizzato di X nell'equilibrio \bar{z} il sistema lineare

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} + u \\ \dot{u} &= Au \quad A = J(X(\bar{z})) \\ \dot{z} &= A(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

dove $J(X)$ è la matrice jacobiana del campo vettoriale

4.1 Linearizzazione del secondo ordine

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto , $Y : C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora

$$\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$$

Sia \bar{x} un equilibrio quindi $Y(\bar{x}, 0) = 0$ Considero il sistema di primo ordine associato

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = Y(x, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$$

Linearizzando nel suo equilibrio \bar{x} ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = JX(\bar{x}, 0) \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ D_x Y(\bar{x}, 0) & D_v Y(\bar{x}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ v \end{pmatrix}$$

Quindi ottengo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = J_x Y(\bar{x}, 0) + J_v Y(\bar{x}, 0) \end{cases}$$

4.2 Generalità

I campi vettoriali lineari sono completi, la curva integrale di $\dot{z} = Az$ con dato iniziale $z_0 \in \mathbb{R}^n$ è

$$z(t) = e^{tA} z_0 \quad \text{con} \quad e^{tA} := \sum_0^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Siano X e Y due matrici complesse di dimensione $n \times n$ e siano a e b due numeri complessi.

$$\star e^0 = I.$$

$$\star e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X}.$$

$$\star \text{ Se } AB = BA, \text{ allora } e^A e^B = e^{A+B}.$$

$$\star \text{ Se } Y \text{ è invertibile, allora}$$

$$e^{YtXY^{-1}} = Y e^{tX} Y^{-1}.$$

$$\star \det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}.$$

$$\star \text{ Se } A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ allora } e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

$$\star \text{ L'esponenziale di una matrice è sempre una matrice invertibile, in analogia con il fatto che l'esponenziale di un numero complesso non è mai nullo.}$$

4.3 Decomposizione in sottospazi invarianti di grado 1 e 2

Definizione 4.2. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale liscio. Un insieme $M \subset \Omega$ si dice invariante (per il flusso di X) se per ogni curva integrale $z : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ tale che $z(0) \in M$ si ha

$$z(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definizione 4.3. (Sottospazio invariante)

Un sottospazio invariante relativo a un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ su uno spazio vettoriale V è un sottospazio $W \subseteq V$ tale che per ogni vettore $w \in W$, l'immagine $T(w)$ appartiene ancora W . Formalmente $T(W) \subseteq W$

Proposizione. Uno sottospazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è invariante per il flusso $\dot{z} = Az$ se e solo se

$$AV = \{Az \mid z \in V\} \subseteq V$$

Dimostrazione. Suppongo $AV \subseteq V$ allora

$$A^2V = A(AV) \subseteq AV \subseteq V$$

, per induzione $A^K V \subseteq V$.

Sia $z_0 \in V$ allora la curva integrale passante per z_0 è :

$$t \mapsto e^{tA} z_0 = \sum_0^{+\infty} \frac{t^k A^k z_0}{k!} \in V$$

quindi V è invariante per il flusso.

Supponiamo invece che V sia invariante per il flusso. Sia $z_0 \in V$, sappiamo che $e^{tA} z_0 \in V \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Per la linearità di V abbiamo che $\frac{1}{t}(e^{tA} z_0 - z_0) \in V \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(e^{tA} z_0 - z_0) &= \\ &= \frac{1}{t} \left(z_0 + tAz_0 + \frac{t^2 A^2 z_0}{2!} + \frac{t^3 A^3 z_0}{3!} + \dots - z_0 \right) \\ &= Az_0 + \frac{tA^2 z_0}{2!} + \frac{t^2 A^3 z_0}{3!} + \dots \end{aligned}$$

quest'ultima serie converge **uniformemente** in t sui compatti di \mathbb{R} , quindi la somma della serie è una funzione continua di t .

Segue che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{tA} z_0 - z_0) = Az_0$$

Ma siccome $\frac{1}{t} (e^{tA} z_0 - z_0) \in V \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ segue dalla chiusura di V (V sottospazio vettoriale) che $Az_0 \in V$ \square

Consideriamo ora $\dot{z} = Az$ con A matrice diagonalizzabile su \mathbb{C} . Allora potremmo scrivere

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow e^{tA} = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1}$$

Ma gli autovalori e la matrice P generalmente sono complessi mentre noi vogliamo studiare il ritratto in fase di \mathbb{R}^n Osservazione :

$$Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Otteniamo quindi :

Autovalori di A	$\overbrace{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k}^{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}, \overbrace{\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n}^{\in \mathbb{R}}$
Basi di autovettori di A	$\overbrace{u_1, \bar{u}_1, \dots, u_k, \bar{u}_k}^{\in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n}, \overbrace{u_{2k+1}, \dots, u_n}^{\in \mathbb{R}^n}$

Proposizione. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice diagonalizzabile su \mathbb{C} allora esiste una decomposizione in spazi invarianti di \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k, w_k \rangle \oplus \langle \mu_{2k+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mu_n \rangle$$

di dimensione 1 o 2 .

Inoltre

- ★ La restrizione di e^{tA} su sottospazi di dimensione 1 è una dilatazione di fattore $e^{\lambda_i t}$ con λ_i autovalore associato
- ★ La restrizione di e^{tA} (del flusso) su sottospazi di dimensione 2 è simile a

$$e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & \sin(\beta_i t) \\ -\sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix}$$

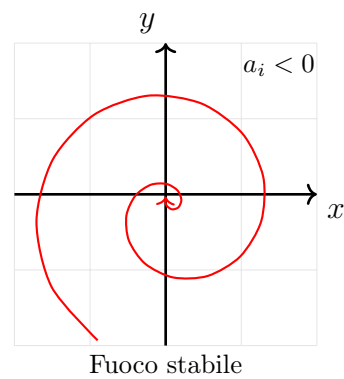
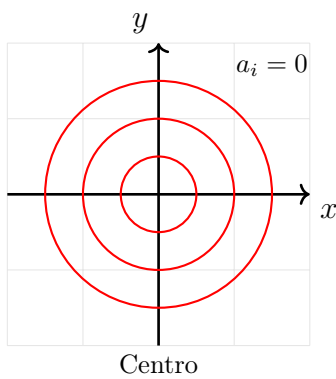
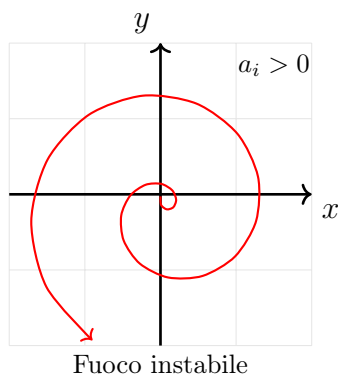
Quindi una composizione di rotazione e dilatazione, dove $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ è l'autovalore associato

Di conseguenza le orbite sui sottospazi di dimensione 1 sono semirette per $\lambda_i \neq 0$

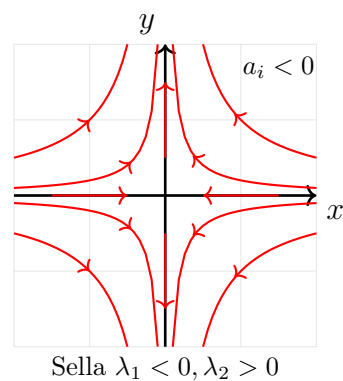
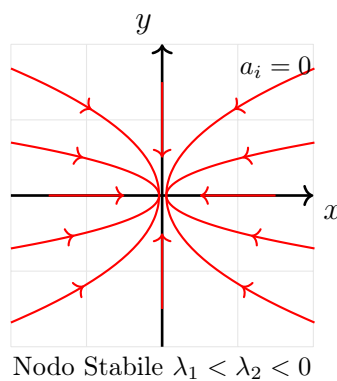
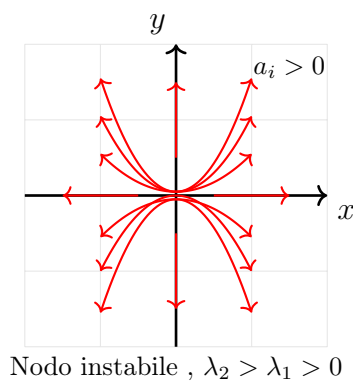
$$\begin{array}{c} \overleftrightarrow{\circ} \quad \lambda_j > 0 \\ \overrightarrow{\bullet} \quad \lambda_j < 0 \end{array}$$

Sia $\dot{z} = Az$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ classifichiamo il sistema a seconda degli autovalori di A che indicheremo con λ_1, λ_2

★ Autovalori complessi coniugati

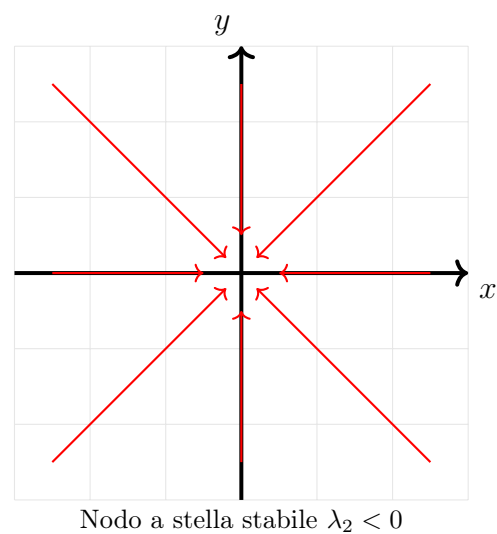
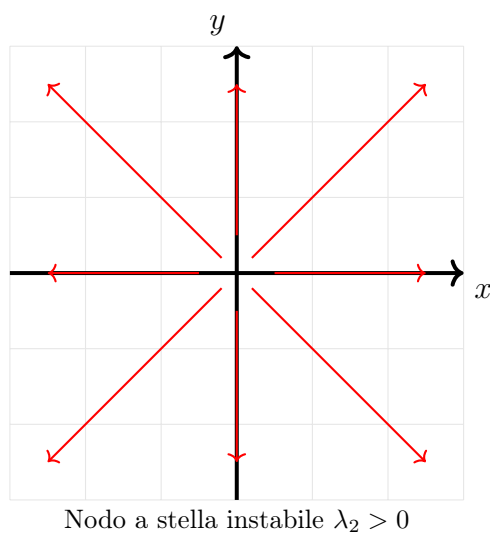


★ Autovalori reali distinti e non nulli

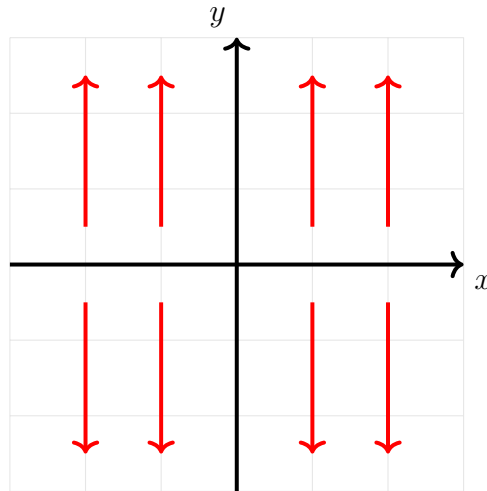


NB : le orbite non toccano mai l'origine poichè essa è un equilibrio

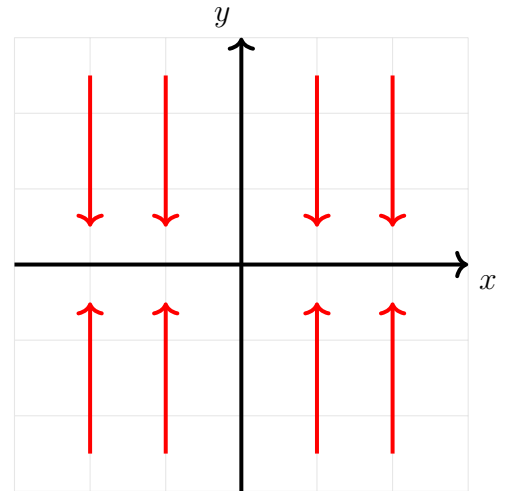
★ Autovalori coincidenti reali : $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$



- ★ Un autovalore nullo e l'altro no : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$



Nodo a pettine instabile $\lambda_2 > 0$



Nodo a pettine stabile $\lambda_2 < 0$

NOTA BENE in tutti questi casi i disegni sono stati tracciati rispetto nella base degli autovettori. e orbite nella base canonica sono trasformate per deformazioni affini

4.4 Sistemi lineari diagonalizzabili

Consideriamo il sistema lineare $\dot{z} = Az$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile in \mathbb{C} . Abbiamo visto una decomposizione in sottospazi invarianti

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\langle v_1, w_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k, w_k \rangle}_{\lambda_1, \bar{\lambda}_1 \dots \lambda_k, \bar{\lambda}_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \oplus \underbrace{\langle u_{2k+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_n \rangle}_{\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}}$$

Ora raggruppiamo i sotto spazi in questa decomposizione secondo il segno di

$$Re(\lambda_i) = E^c \oplus E^s \oplus E^u$$

- ★ E^s := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) < 0$. sottospazio **STABILE**
- ★ E^c := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) = 0$. sottospazio **CENTRALE**
- ★ E^u := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) > 0$. sottospazio **INSTABILE**

Poichè il sistema è lineare , una soluzione qualsiasi si può decomporre come somma di una componente E^s , una componente E^c e una componente E^u (eventualmente nulle)

4.5 Relazione tra sistemi non lineari e i loro linearizzati

Dato $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale liscio , \bar{z} un equilibrio. Si dice che \bar{z} è:

- ★ **Iperbolico** : se tutti gli autovalori di $Jx(\bar{z})$ hanno **parte reale diversa da zero**
- ★ **Ellittico** : se tutti gli autovalori di $Jx(\bar{z})$ hanno **parte reale uguale da zero**

Definizione 4.4. (Omeomorfismo)

Siano $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Una mappa $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ si dice *omeomorfismo* se è continua , invertibile e con inversa continua. Se esiste un omeomorfismo $\Omega \rightarrow \Omega'$ i due insiemi si dicono omeomorfi

Teorema 4.1 – Hartman-Grobman

Se \bar{z} è un *equilibrio iperbolico* di X allora esiste un intorno dell'equilibrio in cui il ritratto di fase di X è omeomorfo al ritratto di fase del sistema linearizzato

$$\dot{z} = Dx(\bar{z})(z - \bar{z})$$

Se vi sono autovalori con parte reale nulla . i termini non lineari giocano un ruolo determinante e il risultato del teorema non vale più.

Un risultato di questo tipo per i sistemi non lineari è il Teorema della varietà stabile . Supponiamo che X sia un campo vettoriale completo , sia

$$t \mapsto z(t; z_0)$$

la soluzione massimale (globale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Data \bar{z} un'equilibrio definisco

$$\varepsilon^s(\bar{z}) = \left\{ z_0 \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t; z_0) = \bar{z} \right\} \quad \text{Varietà } \mathbf{STABILE} \text{ (Arrivano all'equilibrio)}$$

$$\varepsilon^u(\bar{z}) = \left\{ z_0 \in \Omega : \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t; z_0) = \bar{z} \right\} \quad \text{Varietà } \mathbf{INSTABILE} \text{ (Provengono dall'equilibrio)}$$

Questi insieme sono ben definiti ma non disgiunti ($\bar{z} \in \varepsilon^s, \bar{z} \in \varepsilon^u$).

Inoltre $\varepsilon^s, \varepsilon^u$ sono invarianti rispetto al flusso di X poichè sono unioni di orbite

Teorema 4.2 – della varietà iperbolica

Se \bar{z} è un equilibrio iperbolico di un campo vettoriale completo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora $\varepsilon^s(\bar{z}), \varepsilon^u(\bar{z})$ sono sottovarietà immerse di \mathbb{R}^n .

Inoltre lo spazio tangente a $\begin{cases} \varepsilon^s(\bar{z}) \\ \varepsilon^u(\bar{z}) \end{cases}$ in \bar{z} è il sottospazio $\begin{cases} E^s \text{ stabile} \\ E^u \text{ instabile} \end{cases}$ del sistema linearizzato di X in \bar{z}

5 Flusso e coniugazione di campi vettoriali

5.1 Flusso

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale liscio e completo. Dato $z_0 \in \Omega$ indichiamo con $t \mapsto z(t, z_0)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Definizione 5.1. (Flusso di un campo vettoriale)

Il flusso di un campo vettoriale completo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la mappa $\Phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ definita da

$$\Phi^X(t, z_0) := z(t, z_0) \quad \forall (t, z_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

Si chiama mappa al tempo t del flusso di X la mappa $\Phi_t^X : \Omega \rightarrow \Omega$ definita da

$$\Phi_t^X := \Phi^X(t, z_0) := z(t, z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega$$

Il flusso Φ^X esiste poichè la soluzione massimale del problema di Cauchy esiste ed è unica.

Per ogni campo vettoriale X liscio e completo, il flusso di $\Phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ è una mappa liscia. Inoltre anche $\Phi_t^X : \Omega \rightarrow \Omega$ è una mappa liscia $\forall t \in \mathbb{R}$ (deriva dal teorema della dipendenza continua)

5.1.1 Proprietà del flusso

1.

$$\Phi_0^X = Id_\Omega$$

2.

$$\forall t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} \quad \Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$$

3.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_t^X \text{ è invertibile e } (\Phi_t^X)^{-1} = \Phi_{-t}^X$$

4.

$$\Phi_t^X : \Omega \rightarrow \Omega \text{ è un diffeomorfismo } \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. (proprietà del flusso)

1.

$$\Phi_0^X(z_0) = z(0, z_0) = z_0 \quad \forall z_0 \in \Omega$$

2. Dato $z_0 \in \Omega$, considero le due funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \Omega$ date da

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= \Phi_{t+s}^X(z_0) = z(t+s, z_0) \\ c_2(t) &= \Phi_t^X(\Phi_s^X(z_0)) = z(t, z(s, z_0)) \end{aligned}$$

Entrambe sono soluzioni dell'ODE $\dot{z} = X(z)$. Inoltre

$$c_1(0) = z(s, z_0) = c_2(0)$$

Per unicità segue

$$c_1(t) = c_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3. Prendendo la $s = -t$ in 2 si ha che

$$\Phi_t^X \circ \Phi_{-t}^X = \Phi_0^X Id_\Omega$$

□

5.2 Coniugazione

Siano $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi aperti. Siano $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ due campi vettoriali completi e sia $\zeta : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ un diffeomorfismo (in sostanza un cambio di coordinate).

Definizione 5.2. Si dice che i campi $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono coniugati dal diffeomorfismo $\zeta : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ se le curve integrali di \tilde{X} sono tutte e sole le immagini mediante ζ delle curve integrali di X e viceversa

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\zeta} & \tilde{\Omega} \\ \Phi_t^X \downarrow & & \downarrow \Phi_t^{\tilde{X}} \\ \Omega & \xrightarrow{\zeta} & \tilde{\Omega} \end{array}$$

Proposizione 1. Due campi vettoriali completi X, \tilde{X} sono coniugati dal diffeomorfismo ζ se e solo se

$$\tilde{X} = (D(\zeta)X) \circ \zeta^{-1}$$

Si dice che il membro di destra è il **PUSH-FOWARD** di X mediante

$$\zeta_* X = \zeta_{\#} X := (D(\zeta)X) \circ \zeta^{-1}$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) \in \Omega$ una curva integrale di X , I campo X e \tilde{X} sono coniugati se e solo se , per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ di X $t \mapsto \zeta(z(t))$ è una curva integrale di \tilde{X} questo significa che

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\zeta(z(t))) &= \frac{d}{dt} (\zeta(z(t))) \\ &= (D\zeta)(z(t))\dot{z}(t) = (D\zeta)(z(t))X(z(t)) \\ \text{Posto } w &= \zeta(z(t)) \\ \tilde{X}(w) &= (D\zeta)(\zeta^{-1}(w))X(\zeta^{-1}(w)) \end{aligned}$$

□

Proposizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto $X : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale associato ad un sistema del secondo ordine $\left(X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ y(x, v) \end{pmatrix} \right)$. Sia $\zeta : \omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo del tipo

$$\zeta(x, v) = \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x, v) \end{pmatrix}$$

allora $\zeta_{\#} X$ è ancora associato ad un sistema del secondo ordine se e solo se

$$G(x, v) = (DF(x))v$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) \in \Omega$ una curva integrale di X , definiamo $\tilde{x}(t) = F(x(t))$ e $\tilde{v}(t) = G(x(t), v(t))$.

Affinchè \tilde{x}, \tilde{y} risolvano $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{v} \\ \dot{\tilde{v}} = \tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{v}) \end{cases}$ è necessario e sufficiente che $\dot{\tilde{x}} = \tilde{v}$, ma questo

significa che

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(t) &= \frac{d}{dt} F(x(t)) \\
 &= (DF(x(t)))\dot{x}(t) \\
 &= DF(x(t))v(t) \\
 \tilde{v}(t) &= G(x(t), v(t)) \\
 \dot{\tilde{x}} &= \tilde{v} \iff G(x, v) = (DF(x))v
 \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1 – Rettificazione locale

Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, \bar{z} un punto tale che $X(\bar{z}) \neq 0$ (non è punto di equilibrio) allora esiste un diffeomorfismo, definito localmente in un intorno di \bar{z} , tale che il campo sia coniugato a

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

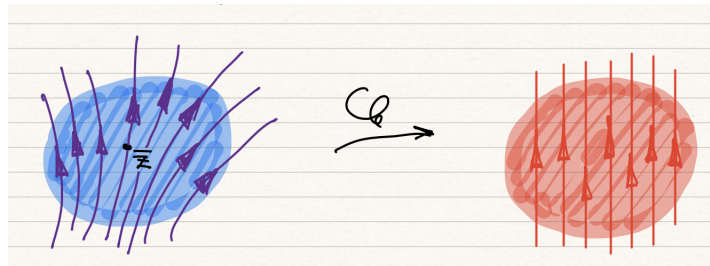


Figura 1: Rettificazione locale

Teorema 5.2 – Riparametrizzazione in tempo

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale, sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, e si $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito come

$$\tilde{X}(z) = f(z)X(z)$$

- ★ Se $f > 0$ allora X e \tilde{X} hanno lo stesso ritratto di fase
- ★ Se $f < 0$ allora X e \tilde{X} hanno lo stesso ritratto di fase, tranne che le orbite sono orientate in versi opposti

6 Integrali primi

Definizione 6.1. (Integrale primo)

una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrale primo di X se tutti gli insiemi di livello di f sono invarianti.

Equivalentemente f è un integrale primo se di X se e solo se è costante lungo le soluzioni (curve integrali) $\dot{z} = X(z)$ cioè se e solo se

$$f \circ \phi_t^X = f \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definizione 6.2. (Derivata di Lie)

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, si definisce **derivata di Lie** di f lungo X

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{L}_X f &= X(z) \cdot \nabla f(z) \\ &= \sum_{j=1}^n X_j(z) \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \end{aligned}$$

Proposizione. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile

1. Per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ di X si ha

$$\frac{df(z(t))}{dt} = \mathcal{L}_X f(z(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\frac{d(f \circ \Phi_t^X)}{dt} = \mathcal{L}_X f \circ \Phi_t^X \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. f è integrale primo di $X \iff \mathcal{L}_X f = 0$

Dimostrazione.

- 1.

$$\frac{df(z(t))}{dt} = \nabla f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = \nabla f(z(t)) \cdot X(z) = \mathcal{L}_X f(z(t))$$

- 2.

$$\begin{aligned} f \text{ è integrale primo} &\iff t \in \mathbb{R} \mapsto f \circ \Phi_t^X \text{ è costante} \\ &\iff (\mathcal{L}_X f) \circ \Phi_t^X = \frac{d(f \circ \Phi_t^X)}{dt} = 0 \end{aligned}$$

□

Definizione 6.3. (Funzionalmente indipendenti)

Si dice che gli integrali primi

$$f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sono *funzionalmente indipendenti* se per ogni $z \in \Omega$ gradienti

$$\nabla f_1(z), \dots, \nabla f_k(z)$$

sono linearmente indipendenti come vettori di \mathbb{R}^n

Proposizione. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, $\bar{x} \in \Omega$ un *equilibrio attrattivo*. Allora ogni integrale primo (continuo) di X è costante in un intorno di \bar{z}

Dimostrazione. Per definizione di equilibrio attrattivo , esiste un intorno V di \bar{z} tale che per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ con $z_0 = z(0) \in V$ valga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \bar{z}$$

Sia f un integrale primo continuo di \bar{z} . Allora $f(z(t)) = \bar{z} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, dunque per continuità

$$f(\bar{z}) = f(\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)) = \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z(0)) = f(z_0)$$

Poichè z_0 può essere preso arbitrariamente in V , segue che f è costante in V □

7 Stabilità

Definizione 7.1. Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale , , $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio. Si dice che \bar{z} è :

★ **Stabile** (secondo lyapunov) :

Per ogni intorno U di \bar{z} esiste un intorno U_0 di \bar{z} tale che

$$\forall t \geq 0, \Phi_t^X(U_0) \subseteq U$$

★ **Stabile per tutti i tempi** :

se per ogni intorno U di \bar{z} esiste un intorno U_0 di \bar{z} tale che

$$\forall t, \Phi_t^X(U_0) \subseteq U$$

★ **Asintoticamente stabile** :

se è stabile e attrattivo

★ **Instabile** :

se non è stabile

Note bene : Esistono equilibri attrattivi non stabili

Teorema 7.1 – Secondo teorema di Lyapunov

Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio , $W \subseteq \Omega$ un intorno di \bar{z} e $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con **minimo stretto in \bar{z}** :

1. Se $\mathcal{L}_X F \leq 0$ in W , allora \bar{z} è **stabile**
2. Se $\mathcal{L}_X F = 0$ in W , allora \bar{z} è **stabile per tutti i tempi**
3. Se $\mathcal{L}_X F < 0$ in $W \setminus \{\bar{z}\}$ in W , allora \bar{z} è **asintoticamente stabile**

W si dice funzione di Lyapunov. L'esistenza di una funzione di Lyapunov è una condizione sufficiente ma non necessaria per la stabilità.

Dimostrazione. A meno di una costante posso supporre $F(\bar{z}) = 0$ poichè per ipotesi la funzione di Lyapunov presenta un minimo stretto in \bar{z} dunque $F > 0 \forall z \in W \setminus \{\bar{z}\}$

1. Devo dimostrare che \bar{z} è stabile , cioè

$$\forall \sigma > 0 \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall t \geq 0 \quad (2)$$

$$\Phi_t^X(B_\sigma(\bar{z})) \subseteq B_\varepsilon(\bar{z}) \quad (3)$$

Fisso $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo da avere $B_\varepsilon \subseteq W$. Per il teorema di Weierstraß esiste

$$\alpha := \min_{z \in \partial B_\varepsilon(\bar{z})} F(z) > 0$$

Inoltre poichè F è continua (quindi per definizione di continuità), esiste $\sigma > 0$ - che possiamo prendere minore di ε - tale che

$$F(z) \leq \frac{\alpha}{2} \quad \forall z \in B_\sigma(\bar{z})$$

Voglio arrivare a dimostrare che questo particolare valore di σ soddisfa (3) $\forall t \geq 0$: Procediamo per assurdo , supponiamo che esista un valore $t_0 \geq 0$ tale che

$$\Phi_{t_0}^X(B_\sigma(\bar{z})) \not\subseteq B_\varepsilon(\bar{z})$$

Ciò significa che esiste $z_0 \in B_\sigma(\bar{z})$ tale che

$$\Phi_{t_0}^X(z_0) \notin B_\varepsilon(\bar{z})$$

La funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) := \Phi_t^X(z_0)$ è una soluzione del sistema $\dot{z} = X(z)$ che parte dal dato iniziale $z_0 \in B_\sigma(\bar{z}) \subseteq B_\varepsilon(\bar{z})$ e, al tempo t_0 assume valore non contenuto in $B_\varepsilon(\bar{z})$. Per continuità esisterà un valore $t_1 \in [0, t_0]$ tale che $t_1 \in \partial B_\varepsilon(\bar{z})$. Avremmo allora

$$F(z(t_1)) \geq \alpha \quad F(z(0)) = F(z_0) \leq \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

Inoltre sappiamo che $\frac{d}{dt}F(z(t)) = \mathcal{L}_X F(z(t)) \leq 0 \quad \forall \{t : z(t) \in W\}$. Ciò contraddice (4)

2. Dimostrazione simile alla precedente

3. Per quanto appena dimostrato l'ipotesi $\mathcal{L}_X F < 0$ in $W \setminus \{\bar{z}\}$ implica che \bar{z} è un punto di equilibrio stabile, occorre dimostrare che \bar{z} è attrattivo. Prendiamo la palla $\bar{B}_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq W$ ed un numero positivo $\sigma > 0$ tale che

$$\Phi_t^X(B_\sigma(\bar{z})) \subseteq \bar{B}_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq W \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

$\sigma > 0$ esiste poichè \bar{z} è stabile. Prendiamo un qualsiasi $z_0 \in B_\sigma(\bar{z})$.

Sia $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_t^X(z_0)$ la soluzione di $\dot{z} = X(z)$ generata dal dato iniziale z_0 . Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = \bar{z}$$

Procediamo per assurdo e supponiamo che la condizione di attrattività non sia soddisfatta. Per definizione di limite, ciò significa che esistono $\eta > 0$ ed una successione di tempi $t_k \rightarrow \infty$ tale che

$$|z(t_k) - \bar{z}| < \eta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Pero la condizione (5) implica che $z(t)$ assume valori nella palla di raggio epsilon, quindi possiamo affermare che $z(t)$ converge ad un limite $z_\infty \in \bar{B}_\varepsilon(\bar{z})$. Vogliamo dire che $z_\infty = \bar{z}$, se dimostriamo quest'ultima condizione avremo ottenuto un assurdo e la dimostrazione sarà completata.

Consideriamo $t \mapsto \Phi_t^X(z_\infty)$, ossia la soluzione generata dal dato iniziale z_∞ . per continuità del flusso e di F abbiamo

$$F(\Phi_t^X(z_\infty)) = F(\Phi_t^X(\lim_{k \rightarrow \infty} z(t_k))) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\Phi_t^X(z(t_k)))$$

e per le proprietà del flusso

$$F(\Phi_t^X(z(t_k))) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\Phi_t^X(\Phi_{t_k}^X(z_0))) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t+t_k}^X(z_0) \quad \forall t \geq 0$$

La funzione $s \mapsto \Phi_s^X(z_0)$ è monotona poichè

$$\frac{d}{ds} F(\Phi_s^X(z_0)) = \mathcal{L}_X F(\Phi_s^X(z_0)) \geq 0$$

dunque ammette limite anche quando $s \rightarrow +\infty$ di conseguenza possiamo dire che

$$F(\Phi_t^X(z_\infty)) = \lim_{s \rightarrow +\infty} F(\Phi_s^X(z_0)) \quad \forall t \geq 0$$

In particolare, F è costante sulla soluzione uscente dal dato iniziale z_∞ . Tuttavia sappiamo che $\mathcal{L}_X F < 0$ in $W \setminus \{\bar{z}\}$, dunque se z_∞ fosse diverso dall'equilibrio \bar{z} allora F sarebbe strettamente decrescente lungo la soluzione uscente da z_∞ , poichè questo non è il caso deve essere $z_\infty = \bar{z}$, cio completa la dimostrazione

□

Teorema 7.2 – Principio di La Salle - Krasovski

Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio, $W \subseteq \Omega$ un intorno di \bar{z} e $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con **minimo stretto in \bar{z}** . Se

★ Se

$$\mathcal{L}_X W \leq 0 \text{ in } W$$

★ Nessun orbita, eccetto \bar{z} è contenuta per intero in $\mathcal{L}_X W = 0$ (Insieme di livello)¹

Teorema 7.3 – Primo teorema di Layapunov

Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio :

1. Se tutti gli autovalori di $DX(\bar{z})$ hanno parte reale negativa, allora \bar{z} è asintoticamente stabile.
2. Se esiste un autovalore di $DX(\bar{z})$ che ha parte reale positiva, allora \bar{z} è instabile

¹Dato una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice insieme di livello di f associato a c l'insieme $f^{-1}(c) = \{x \in A \mid f(x) = c\}$

8 Equazioni di Newton

Data $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia (C^∞), considero

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

vogliamo tracciare il ritratto di fase di fase, nel piano delle fasi (x, \dot{x}) . Poichè l'energia

$$E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \dot{x}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) \quad ^2$$

è integrale primo, ogni orbita è contenuta in un insieme di livello

$$E^{-1}(e) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = e\} \\ = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dot{x} = \pm \sqrt{2(e - V(x))}\}$$

Osservazioni :

- ★ La proiezione di E^{-1} sull'asse x è $\{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq e\}$
- ★ ogni E^{-1} è simmetrico rispetto all'asse x . Le intersezioni di $E^{-1}(e)$ con l'asse delle x avvengono nei punti tali che $V(x) = e$
- ★ Il teorema della funzione implicita ci permette di dimostrare che E^{-1} è una curva regolare, tranne eventualmente quelle che contengono gli equilibri

Ora passiamo ad esaminare dei casi particolari :

- ★ Se $\{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq e\} = [x_-, x_+]$ è un insieme di sottolivello connesso e limitato e non c'è nessun \bar{x} tale che $V'(\bar{x}) = 0$ e $V(\bar{x}) = e$ allora a questo livello corrisponde un'orbita chiusa, inoltre i punti x_-, x_+ sono detti punti di inversione
- ★ Se $\{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq e\} = [x_-, x_+]$ è un insieme di sottolivello connesso e illimitato e non c'è nessun \bar{x} tale che $V'(\bar{x}) = 0$ e $V(\bar{x}) = e$ allora a questo livello corrispondono una o due orbite non chiuse dette orbite aperte
- ★ Se $\{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq e\} = [x_-, x_+]$ è un insieme di sottolivello non connesso passiamo a considerare le sue componenti connesse separatamente
- ★ Orientazione delle orbite :
Nel semipiano $\dot{x} > 0$ le orbite sono percorse sinistra a destra, nel semipiano $\dot{x} < 0$ le orbite sono percorse da destra a sinistra
- ★ I minimi locali stretti di $V(x)$ sono configurazione di equilibrio stabili per tutti i tempi
- ★ I massimi locali stretti di $V(x)$ sono configurazione di equilibrio instabili

8.1 Abbassamento dell'ordine e formula del periodo

L'esistenza di un integrale primo (energia) per l'equazione

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

con $m \in \mathbb{R}_{>0}$ e V funzione liscia, permette di abbassare l'ordine del problema, cioè ricondursi a studiare un'equazione del primo ordine.

²Energia cinetica più energia potenziale

Infatti consideriamo una soluzione dell'equazione di newton con dati iniziali $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 > 0 \end{cases}$
 Sia $[t_-, t_+]$ un intervallo su cui la soluzione soddisfa $\dot{x}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_-, t_+]$, poichè l'energia è un integrale primo, si ha

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = e \quad e \in \mathbb{R}$$

e è una costante determinata univocamente dai dati iniziali $e = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0)$ otteniamo

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(e - V(x))} \quad (ER)$$

Supponiamo che $V(x) < e$ su (t_-, t_+) in modo il membro di destra di (ER) sia strettamente positivo su (t_-, t_+) , allora $\dot{x} > 0$ e la soluzione $t \mapsto x(t)$ è strettamente crescente su (t_-, t_+) . In particolare $t \mapsto x(t)$ è invertibile, l'inversa soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx}(x) &= \frac{1}{\dot{x}(t)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - V(x))}} \\ t(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - V(\xi))}} d\xi \quad (\star) \end{aligned}$$

Cio consente di determinare le soluzioni di equazioni di newton a meno di calcolare un integrale e invertire la funzione.

L'equazione (\star) consente anche di determinare il periodo di una soluzione periodica dell'equazione di newton.

Sia $t \mapsto x(t)$ una soluzione periodica con punti di inversione $(x, 0)$ $(x_+, 0)$ nel piano delle fasi. Il periodo T di tale soluzione dipende dall'energia e della soluzione $T = T(e)$ e si ha

$$T(e) = 2(t(x_+ - t(x_-))) = \sqrt{2m} \int_{x_-(e)}^{x_+(e)} \frac{dx}{\sqrt{e - V(x)}}$$

Il sistema si dice **sincrono** se $T(e)$ è costante al variare di tutte le e , altrimenti si dice **asincrono**