

Segnali e sistemi

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1	Segnali a tempo continuo	2
1.1	Segnali elementari	2
1.2	Caratterizzazione dei segnali	3
1.2.1	Simmetrie dei segnali	3
1.2.2	Estensione e durata	3
1.2.3	Area e valor medio	3
1.2.4	Energia e potenza	4
1.3	Segnali periodici	4
1.4	Convoluzione	5
1.4.1	Proprietà	5
1.4.2	Convoluzione per segnali periodici	6
1.5	Funzione di Correlazione	6
1.5.1	Proprietà	6
1.5.2	Auto-correlazione	6
1.6	Analisi in Frequenza	7
1.6.1	Filtri ideali	7
2	Sistemi a tempo continuo	8
2.1	Evoluzione libera	9
2.2	Evoluzione forzata	12
3	Trasformata di Laplace	16
3.1	Proprietà	16
4	Diagrammi di Bode	20
4.1	risposta in frequenza	20
4.2	Diagrammi	21
4.3	Forma di Bode della funzione di trasferimento	22
5	Segnale a tempo discreto	24
5.1	Proprietà	25
5.2	Campionamento	26
6	Sistemi a tempo discreto	28

1 Segnali a tempo continuo

1.1 Segnali elementari

★ Finestra rettangolare :

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$A\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right) := \begin{cases} A & t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

★ Finestra triangolare :

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$A\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) := \begin{cases} A - \left(\frac{A}{T}\right)|t-t_0| & t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

★ Impulso ideale unitario (Impulso di Dirac) :

è possibile vedere l'impulso di Dirac come il limite della seguente successione :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{2/n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \right]$$

quindi può essere visualizzato come un segnale il cui punto di applicazione è l'origine , dove assume valore infinito e la cui area complessiva è unitaria. In realtà l'impulso di Dirac è una distribuzione , quindi un concetto esteso di una funzione. Inoltre l'impulso di Dirac gode delle seguenti proprietà

Proprietà. 1. $\delta(0) = +\infty$

2. $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ (la sua area è uno)

4. Proprietà di campionamento dell'impulso:

Data una funzione v e un t_0 in cui la funzione sia continua vale :

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau$$

★ Gradino unitario (Heaviside step function)

$$\delta_{-1}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se pensiamo alla funzione gradino come una distribuzione allora possiamo definirla nel seguente modo

$$\delta(t) = \frac{d \delta_{-1}(t)}{dt}$$

★ Rampa unitaria

$$\delta_{-2}(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre può essere messa in relazione con il gradino e l'impulso di Dirac nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(t) = \frac{d \delta_{-2}(t)}{dt} \quad \delta(t) = \frac{d^2 \delta_{-2}(t)}{d^2 t}$$

1.2 Caratterizzazione dei segnali

1.2.1 Simmetrie dei segnali

$x(t) = \overline{x(t)}$	reale
$x(t) = -\overline{x(t)}$	immaginario
$x(t) = x(-t)$	pari
$x(t) = -x(-t)$	dispari
$x(t) = \overline{x(-t)}$	hermitiano
$x(t) = -\overline{x(-t)}$	antihermitiano

1. Se un segnale è reale e pari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
2. Se un segnale è immaginario e dispari allora è hermitiano (non vale il viceversa).
3. Se un segnale è hermitiano allora $\text{Re}(x(\cdot))$ e $|x(\cdot)|$ sono pari.
4. Se un segnale è antihermitiano allora $\text{Im}(x(\cdot))$ e $\arg(x(\cdot))$ sono dispari.
5. Un segnale è hermitiano se e solo se $\text{Re}(x(\cdot))$ pari ed $\text{Im}(x(\cdot))$ dispari.
6. Un segnale è hermitiano se e solo se $|x(\cdot)|$ pari ed $\arg(x(\cdot))$ dispari.

1.2.2 Estensione e durata

Un segnale che è nullo al di fuori dell'intervallo $[t_s, T_s]$ è detto a durato limitata

- ★ Estensione :
Intervallo in cui il segnale è diverso da zero
- ★ Durata :
Misura dell'estensione

1.2.3 Area e valor medio

- ★ Area di un segnale di $x(t)$ è definita dall'integrale

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

- ★ Valor medio di un segnale $x(t)$ è definito dal limite :

$$m_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

L'area e il valor medio sono entrambe funzione lineari invarianti alle traslazioni e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

- ★ Se l'area ha valore finito allora il valor medio ha valor nullo
- ★ Se il valor medio ha valore finito allora l'area ha valore infinito

1.2.4 Energia e potenza

★ Energia :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

★ Potenza

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

L'energia e la potenza sono entrambi funzioni **non** lineari ma rimangono invarianti alle traslazioni e inoltre assumono unicamente valori reali positivi e inoltre sono in relazione secondo le seguenti proprietà :

- Se l'energia ha valore finito allora la potenza vale zero
- Se la potenza ha valore finito allora l'energia ha valore infinito
- La somma di due o più segnali di energia è un segnale di energia
- La somma di due o più di potenza non è necessariamente un segnale di potenza

I segnali ad energia finita e non nulla su \mathbb{R} vengono chiamati **segnali di energia**

I segnali a potenza finita e non nulla su \mathbb{R} vengono chiamati **segnali di potenza**

★ Energia mutua di due segnali

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Se i segnali x e y sono ad energia finita , esiste finita l'energia mutua ed è interpretabile come un prodotto scalare.

Questo ci permette di esprimere l'energia del segnale come :

$$\begin{cases} z = x + y \\ E_z = E_x + E_y + 2\operatorname{Re}(E_{xy}) \end{cases}$$

★ Potenza mutua di due segnali

$$P_{xy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \overline{y(t)} dt$$

$$\begin{cases} z = x + y \\ P_z = P_x + P_y + 2\operatorname{Re}(P_{xy}) \end{cases}$$

1.3 Segnali periodici

Definizione. (Segnale periodico)

Un segnale $x(t)$ è detto periodico se esiste almeno un numero reale $T > 0$ tale che

$$X(t+T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se T è un periodo di $x(t)$ allora anche $kT, k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ è un periodo.

Definiamo *periodo fondamentale* il minimo valore di T per cui il segnale sia periodico

Per segnali periodici, con periodo T , l'area e l'energia divergono. Quindi i quattro parametri fondamentali vengono calcolati rispetto ai periodi :

Area

$$A_x(T) = \int_0^T x(t)dt$$

Valor medio

$$m_x(T) = \frac{1}{T} \int_0^{0+T} x(t)dt = \frac{A_x}{T}$$

Energia

$$E_x(T) = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Potenza media

$$P_x(T) = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{E_x}{T}$$

Valore efficace

$$V_{eff}(T) = \sqrt{P_x(T)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt} = RMS$$

1.4 Convoluzione

Definizione. (Convoluzione)

Sia x e t due integrabili secondo Lebesgue . Si definisce convoluzione di x e y la funzione definita nel seguente modo :

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)y(\tau)d\tau$$

1.4.1 Proprietà

1. Commutatività :

$$f * g = g * f$$

Dimostrazione. Applico la sostituzione $\begin{cases} u = t - \tau \\ du = -d\tau \end{cases}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(u + \tau)g(u)du = (g * f)(t)$$

□

2. Associatività :

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. Distributività

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

4. Traslazione

5. Elemento neutro :

La convoluzione di un qualsiasi segnale con l'impulso di dirac fornisce il segnale stesso .Quindi l'impulso di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione

$$[x * \delta](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x(t)$$

Inoltre se l'impulso di dirac è traslato di t_0 anche il segnale sarà traslato dello stesso fattore

$$(x * \delta_{t_0})(t) = x(t - t_0)$$

6. Area :

$$s(t) = (x * y)(t)$$

$$A(s) = A(x) A(y)$$

7. Estensione e durata :

Definiamo l'estensione e la durata di x e y (segnali come)

$$e[x] = [t_x, T_x], e[y] = [t_y, T_y]$$

$$D_x, D_y$$

Sia $z(t) = x * y(t)$ allora questo segnale avrà estensione e durata pari a

$$e[z] = e[x * y] = [t_x + t_y, T_x + T_y]$$

$$D_z = D_x + D_y$$

1.4.2 Convoluzione per segnali periodici

- ★ Se solo uno dei due segnali è periodico allora possiamo utilizzare la normale definizione di convoluzione , che ci restituirà un segnale anch'esso periodico
- ★ Se entrambi i segnali sono periodici l'integrale diverge , dobbiamo quindi utilizzare una diversa definizione di convoluzione.

$$x * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$

1.5 Funzione di Correlazione

Definizione. Per due segnali x e y ad energia finita la correlazione incrociata è definita come :

$$x \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\overline{t - \tau})dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Nel caso di *Segnali di potenza* la cross-correlazione viene definita nel seguente modo :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\tau)\overline{y(t - \tau)}dt$$

1.5.1 Proprietà

- ★ La Correlazione **non gode** della proprietà commutativa
- ★ La durata del segnale risultato dalla cross relazione è
- ★ Relazione con l'operazione di convoluzione

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * \overline{y(-\tau)}$$

$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * \overline{x(-\tau)}$$

- ★ Il valore nell'origine coincide con l'energia mutua dei due segnali :

$$R_{xy}(0) = E_{xy}$$

1.5.2 Auto-correlazione

Se i due segnali x e y sono uguali a funzione di cross correlazione restituisce l'auto-correlazione :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x(t - \tau)}dt$$

1.6 Analisi in Frequenza

I concetti di estensione e durata possono essere trasferiti al dominio delle frequenze e diventano **estensione spettrale** $e[S]$ e **larghezza di Banda** B_s , misura dell'estensione spettrale.

Tipicamente si fa riferimento alla banda monolaterale, si considera la banda come metà della misura dell'estensione spettrale, considerando solo le frequenze positive

$$B = \inf\{\bar{f} \in \mathbb{R} : |S(f)| = 0 \quad \forall |f| > \bar{f}\}$$

Banda e durata hanno una relazione inversa (durata infinita \rightarrow banda finita)

1.6.1 Filtri ideali

I **filtri ideali** sono caratterizzati dall'avere :

- ★ Ampiezza della risposta costante
 - Pari a 1 nella banda passante
 - Diversa da zero (normalmente pari a 1) nella banda oscura
- ★ La fase della risposta in frequenza è lineare nella banda passante
- ★ Brusca transizione tra banda passante e banda oscura

In base alle caratteristiche di selettività del filtro, possiamo classificare i filtri in 4 macro categorie :

1. Filtro passa-basso ideale

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = (2f_L A) \text{sinc}(2f_L(t - t_0))$$

Banda passante = $(-f_L, f_L)$

Banda oscura = $(-\infty, -f_L) \cup (f_L, +\infty)$

2. Filtro passa-alto

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_H}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2f_H A) \text{sinc}(2f_H(t - t_0))$$

Banda passante = $(-\infty, -f_H) \cup (f_H, +\infty)$

Banda oscura = $(-f_H, f_H)$

3. Filtro passa banda ideale

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[\Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = (2A\Delta f) \text{sinc}(\Delta f(t - t_0)) \cos(2\pi f_0(t - t_0))$$

Banda passante = $(-f_{c2}, -f_{c1}) \cup (f_{c1}, f_{c2})$

Banda oscura = $(-\infty, -f_{c2}) \cup (-f_{c1}, f_{c1}) \cup (f_{c2}, +\infty)$

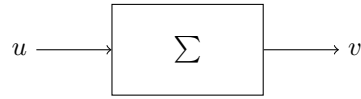
4. Filtro elimina banda

Risposta in frequenza :

$$H(f) = A \left[1 - \Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right) - \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = A\delta(t - t_0) - (2A\Delta f) \text{sinc}(\Delta f(t - t_0)) \cos(2\pi f_0(t - t_0))$$

2 Sistemi a tempo continuo



Un sistema è :

- ★ **algebrico o senza memoria** se la relazione tra l'input e l'output è una funzione algebrica
- ★ **dinamico** se l'output dipende dal valore attuale dell'input e anche dalla sua evoluzione passata
- ★ **autonomo o libero** se non riceve input , dipende unicamente dalle condizioni iniziali
- ★ **forzato** se è influenzato da input esogeni. Gli input manipolabile vengono chiamati segnali di controllo , gli input sconosciuti vengono chiamati disturbi.

Definizione. (Linearità)

Un sistema dinamico Σ è lineare se vale il principio della sovrapposizione degli effetti : per un sistema inizialmente a riposo , se i valori di output v_1, v_2 corrispondenti ai valori di input u_1, u_2 allora l'ingresso $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ corrisponde l'uscita $\alpha v_1 + \beta v_2$ qualunque siano i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Definizione. (Tempo-invarianza)

Un sistema dinamico inizialmente a riposo è tempo invariante se traslazioni nel tempo dei valori assunti dagli ingressi $u(t)$ provocano le stesse traslazioni nel tempo dei valori assunti dalle uscite $v(t)$

Definizione. (Causalità)

Un sistema dinamico inizialmente a riposo è causale se l'output al tempo t ($v(t)$) ,dipende solo dall'input al tempo t ($u(t)$). In altre parole , per determinare il valore dell'uscita ad un certo istante di tempo T , non è necessario conoscere il valore dell'ingresso per istanti di tempo $t > T$

Definizione. (Stabilità esterna o BIBO , bounded-input bounded output)

Un sistema dinamico a tempo continuo, inizialmente a riposo , Σ è BIBO stabile se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_v , tale che per ogni segnale di ingresso $u(t)$ che soddisfa

$$|u(t)| \leq M_u \quad t \geq t_0$$

la corrispondente risposta in uscita $v(t)$ è soddisfatta

$$|v(t)| \leq M_v \quad t \geq t_0$$

Definizione. (Stabilità interna o asintotica)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera $v_l(t)$ converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_l(t) = 0$$

In un Sistema lineare tempo-invariante la funzione h non dipende esplicitamente dal tempo e quindi abbiamo la seguente *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti*

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \in \mathbb{R} \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

- ★ $u(t)$ è il segnale di input *noto*, $v(t)$ è il segno di output che dobbiamo trovare
- ★ I coefficienti a_i, b_j sono assunti noti
- ★ I coefficienti $a_n, b_m \neq 0$
- ★ se $n \geq m$ il sistema è detto **proprio**
- ★ se $n > m$ il sistema è detto **strettamente proprio**

2.1 Evoluzione libera

Modello IO SISO LTI con istante iniziale t_0

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq t_0 \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

Siccome il sistema è tempo-invariante assumiamo $t_0 = 0$.

Le condizioni iniziali del sistema sono :

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

inoltre l'ingresso $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

Dall'analisi matematica sappiamo che l'uscita $v(t)$ dei modelli LTI può essere scritta come la somma di una soluzione particolare e la soluzione dell'equazione omogenea associata.

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

dove :

- ★ $v_f(t)$ è l'evoluzione libera
- ★ $v_l(t)$ è l'evoluzione forzata

Definizione. (Evoluzione libera)

Data l'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera o **risposta libera** del sistema è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

con le stesse condizioni iniziali

Definizione. (Equazione caratteristica)

Data l'equazione differenziali omogenea

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

l'equazione algebrica

$$d(s) := \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

si chiama **equazione caratteristica del sistema**

★ il polinomio si dice monico se $a_n = 1$

★ avendo assunto $a_n \neq 0$, il grado del polinomio è n , cioè $\deg(d(s)) = n$

Definizione. Siano $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ le radici caratteristiche dell'equazione caratteristica:

$$d(s) := \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

con molteplicità $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}$ allora

$$d(s) := \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

Definizione. (Modi del sistema) Le soluzioni elementari dell'equazione omogenea associata

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

sono le funzioni

$$m_{i,j} = \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, r$ (numero di radici disinte)

$\forall j = 0, \dots, \mu_i - 1$ (μ_i = molteplicità della soluzione)

Teorema 2.1.1 – Evoluzione libera

La soluzione $v_l(t)$ dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

può essere scritta come una combinazione lineare dei modi del sistema, ovvero

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} c_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

dove i coefficienti $c_{i,j}$ sono determinati univocamente dalle condizioni iniziali

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

Teorema 2.1.2 – Radici di un polinomio a coefficienti reali

Sia $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ un polinomio a coefficienti reali. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un radice complessa di $d(s)$ di molteplicità μ , allora anche il suo complesso coniugato $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ è un radice complessa di $d(s)$ di molteplicità μ

Definizione. (Carattere dei modi) il modo elementare $m_{i,j}(t)$ è:

★ **Convergente a zero**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m_{i,j}(t)| = 0$$

★ **Limitato :**

$$\exists M < \infty \quad |m_{i,j}(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

★ **illimitato o divergente :** altrimenti

Teorema 2.1.3 – Carattere dei modi

il modo elementare $m_{i,j}(t)$ è:

★ **Convergente a zero** $t \rightarrow \infty$ se e solo se

$$Re(\lambda_i) < 0$$

★ **Limitato :** in $[0, +\infty]$ se e solo se $Re(\lambda_i) \leq 0$ e i modi sono semplici (cioè la molteplicità delle soluzioni è pari a 1)

★ **illimitato o divergente :** altrimenti

Definizione. (Stabilità interna o asintotica)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{d^j t} \quad t \geq 0$$

è **asintoticamente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera $v_l(t)$ converge a zero asintoticamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_l(t) = 0$$

Definizione. (Stabilità semplice)

Il Sistema

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{d^i t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{d^j t} \quad t \geq 0$$

è **semplicemente stabile** se per ogni condizione iniziale

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

l'evoluzione libera $v_l(t)$ è limitata

$$\exists 0 < M < \infty \quad |v_l(t)| < M \quad \forall t \geq 0$$

Teorema 2.1.4 – Stabilità Semplice

Un sistema LTI causale è :

★ stabile se e solo se tutti i modi sono limitati

★ stabile asintoticamente se e solo se tutti i modi convergono a zero per $t \rightarrow \infty$

2.2 Evoluzione forzata

Definizione. (Risposta Impulsiva)

Dato un sistema causale SISO LTI, descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

la risposta all'impulso $h(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali nulle, il sistema è a riposo

$$h(0^-) = 0, \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 0, \left. \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-} = 0, \dots, \left. \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-} = 0$$

Definizione. (Segnale causale)

Un segnale $v(t)$ è causale se il suo supporto è definito $[0, +\infty)$ contenuto...

Teorema 2.2.1 – Risposta Impulsiva

La risposta impulsiva $h(t)$ del sistema SISO LTI tempo continuo causale Σ

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j} \quad t \geq 0$$

ha la forma

$$h(t) = d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

Inoltre $d_0, d_{i,j} \in \mathbb{R}$ e $d_0 = 0$ se $n > m$ ($d_0 \neq 0$ se $n = m$)

Dimostrazione. Per $t > 0$ la delta di Dirac e tutte le sue derivate sono identicamente nulle, quindi $h(t)$ deve soddisfare per $t > 0$ l'equazione omogenea

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = 0 \quad t > 0$$

con tutte le condizioni iniziali nulle. Dallo studio dell'evoluzione libera sappiamo che ha forma che deve essere del tipo

$$h(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t}$$

il comportamento in $t = 0$ dell'equazione precedente, consiste nella combinazione lineare dei termini □

Teorema 2.2.2 – Causalità

il sistema continuo LTI descritto dalla risposta impulsiva $h(t)$ è causale se e solo se $h(t)$ è un segnale causale (è zero per i tempi negativi)

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Teorema 2.2.3 – Evoluzione forzata

La risposta forzata del sistema causale SISO LTI con risposta all'impulso $h(t)$, condizioni iniziali nulle, e input $u(t)$ è data dal prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned}v_f(t) &= h * u(t) \\&= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Se $u(t)$ è un segnale causale allora

$$\begin{aligned}v_f(t) &= h * u(t) \\&= \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-0^-}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

quindi anche la risposta forzata è un segnale causale

Dimostrazione. Consideriamo $u(t)$, $h(t)$ segnali qualsiasi. Sappiamo che partendo da condizioni iniziali nulle abbiamo

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j}$$

Per la **tempo invarianza** abbiamo che

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t-\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \delta(t-\tau)}{dt^j} \quad \tau > 0$$

inoltre per la **linearità**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i c(h(t-\tau))}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j c(\delta(t-\tau))}{dt^j}$$

Al posto di c consideriamo $u(t)d\tau$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \int u(\tau)h(t-\tau)d\tau}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \int u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}{dt^j}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale anche

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i (\sum_k u(\tau_k)h(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \sum_k u(\tau_k)(\delta(t-\tau_k)d\tau_k)}{dt^j}$$

Passando all'integrale

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i (\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)(\delta(t-\tau)d\tau)}{dt^j}$$

Usando infinite la proprietà di riproducibilità dell'impulso della delta di Dirac nel termine di destra

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau \right)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i [h * u](t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$v_f(t) = [h * u](t)$$

□

Teorema 2.2.4 – BIBO stabilità per sistemi LTI a tempo continuo

Il sistema LTI a tempo continuo Σ descritto dalla risposta impulsiva $h(t)$ è BIBO stabile se e solo se $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$, quindi se $h(t)$ è una funzione sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Se il sistema è causale allora

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Dimostrazione. Supponiamo che la risposta impulsiva sia una funzione sommabile che il segnale d'ingresso sia limitato $|u(t)| < M_u \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Vale quindi

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [h * u](t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) u(t-\tau)| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |u(t-\tau)| dt \\ &< M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| dt \\ &< M_u M_h = M_v \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che $h(t)$ non sia un segnale sommabile. Definiamo il segnale di ingresso come

$$u(t) = \text{sgn}(h(-t)) \begin{cases} +1 & h(t-\tau) > 0 \\ -1 & h(t-\tau) < 0 \end{cases}$$

e consideriamo l'uscita al tempo $t = 0$

$$\begin{aligned}
 v_f(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(0-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)u(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(0-\tau)\operatorname{sgn}(h(-\tau)) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|d\tau = +\infty
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.5 – (BIBO stabilità)

Un sistema LTI a tempo continuo causale Σ è BIBO stabile se e solo se i modi elementari che compaiono con coefficiente diverso da zero nell'espressione della risposta impulsiva

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

sono convergenti a zero

Teorema 2.2.6 – Stabilità asintotica

Un sistema LTI a tempo continuo causale Σ è asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi della risposta libera

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} c_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \quad t \geq 0$$

convergono a zero asintoticamente

3 Trasformata di Laplace

Dato un segnale $v(t), t \in \mathbb{R}_+^0$, somma di termini localmente sommabili ($\mathbb{L}_{loc}^1 \in \mathbb{R}_+^0$) e di un insieme finito di segnali impulsivi, la trasformata di Laplace $V(s)$ di $v(t)$ è definita dall'integrale

$$\mathcal{L}[v(t)] = V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + \omega t \in \mathbb{C}$$

3.1 Proprietà

★ **Linearità :**

La trasformata di Laplace è lineare in virtù della linearità dell'integrale

$$\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[v_2(t)]$$

Inoltre l'ascissa di convergenza della trasformata $\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)]$ è minore o uguale alla maggiore delle due ascisse di convergenza

★ **Derivata :**

Se la funzione $v(t)$ è trasformabile secondo Laplace ed esistono finito le condizioni iniziali :

$$v(0^-), \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{i-1} v(t)}{dt^{i-1}} \right|_{t=0^-} \quad i \in \mathbb{N}$$

allora vale

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] = s^i \mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \left. \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right|_{t=0^-} s^{i-1-k}$$

Inoltre l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right]$ è minore o uguale di quella della trasformata di $v(t)$

★ **Moltiplicazione per una funzione polinomiale :**

Se $v(t)$ è dotata di trasformata di Laplace allora esiste

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

★ **Ritardo temporale :**

Sia $v(t)$ una segnale dotato di trasformata di Laplace $V(s)$. definito il segnale ritardato come

$$v(t - \tau) = \begin{cases} v(t - \tau) & t - \tau > 0 \\ 0 & t - \tau < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}v(t - \tau) = e^{-s\tau} V(s)$$

★ **Moltiplicazione per una funzione esponenziale :**

Se $v(t)$ ammette trasformata di Laplace con ascissa di convergenza α allora esiste

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

e tale trasformata converge per $Re(s) > \alpha + Re(\lambda)$

★ **Convulsione :**

Sia $v_1(t), v_2(t)$ sono due funzioni nulle per $t < 0$ e dotate di trasformata di Laplace allora esiste

$$\mathcal{L}[v_1 * v_2(t)] = V_1(s)V_2(s)$$

L'asciussa di convergenza è minore o uguale di $\max\{a_1, a_2\}$

★ **Integrale :**

Se $v(t)$ è dotata di trasformata di Laplace, allora esiste

$$\mathcal{L} \left[\int_{0^-}^{t^+} v(\tau) d\tau \right] = \frac{V(s)}{s}$$

★ **Teorema del valore finale:**

Sia $v(t)$ una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito il limite all'infinito di $v(t)$ allora vale la seguente formula

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s V(s)$$

★ **Teorema del valore iniziale :**

Sia $v(t)$ una funzione dotata di trasformata di Laplace. Se esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t)$ allora vale la seguente formula

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V(s)$$

★ **Cambiamento di scala :**

Sia $v(t)$ una funzione dotata di trasformata di Laplace $V(s)$, con ascissa di convergenza α e sia r una costante reale positiva, allora

$$\mathcal{L}[v(rt)] = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Vogliamo utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere i sistemi causali LTI descritti da

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad n \geq m \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad a_n, b_m \neq 0$$

Se l'ingresso $u(t)$ ha trasformata di Laplace allora anche $v(t)$ ha trasformata di Laplace. Inoltre sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] &= s^i \mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] &= s^j U(s) \quad (\text{poichè è un segnale causale}) \end{aligned}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ogni componente del sistema abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] &= \mathcal{L} \left[\sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] \\ a_0 V(s) + \sum_{i=1}^n a_i s^i V(s) - \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \right) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j U(s) \\ v(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i - \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} s^{i-1-k} \right) &= \sum_{j=0}^m b_j s^j U(s) \\ \text{Definisco} \quad d(s) &:= \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad n(s) := \sum_{j=0}^m b_j s^j \quad p(s) := \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right) \\ d(s)V(s) - p(s) &= n(s)U(s) \\ V(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \quad \forall s \in \mathbb{C} \\ &= V_f(s) + V_i(s) \end{aligned}$$

Definizione. (Funzione di trasferimento) Il rapporto tra i polinomi $n(s)$ e $d(s)$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad s \in \mathbb{C}$$

è detta funzione di trasferimento di Σ

Inoltre abbiamo che la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso

$$H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h(t)] &= H(s) \\ \mathcal{L} \left[d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} d_{i,j} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \right] &= H(s) \\ Usando \quad \mathcal{L}[\delta(t)] &= 1 \quad \mathcal{L}[e^{\sigma t}] = \frac{1}{s - \sigma} \quad \mathbb{L}[t^i f(t)] = (-1)^i \frac{d^i F(s)}{dt^i} \end{aligned}$$

$$H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,j}}{(s - \lambda_i)^{j+1}}$$

Si ha che l'asse di convergenza della funzione di trasferimento vale

$$\max \{ \operatorname{Re}(\lambda_i) | \exists j : d_{i,j} \neq 0 \}$$

Ricordando la formula 3.1 abbiamo che la funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 s^0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s^0}$$

La funzione è una funzione razionale nella variabile s , propria se $n \geq m$, strettamente propria se $n > m$. Inoltre definiamo con $\operatorname{Re}[s]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di s e con $\operatorname{Re}(s)$ lo spazio delle funzioni razionali di s . Inoltre se esplicitiamo le radici dei polinomi otteniamo

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)^{q_1} (s - z_2)^{q_2} \dots (s - z_u)^{q_u}}{(s - p_1)^{\mu_1} (s - p_2)^{\mu_2} \dots (s - p_h)^{\mu_h}} \quad \begin{cases} \sum q_i = m \\ \sum \mu_i = n \\ K = \frac{b_m}{a_n} \end{cases}$$

Definizione. (Zero)

Gli zeri della funzione di trasferimento $H(s)$ sono i valori di s per i quali $H(s)$ tende a zero (Sono quindi le radici del polinomio $n(s)$).

Lo zero $z_i \in \mathbb{C}$ ha molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se il limite

$$\lim_{s \rightarrow z_i} \frac{1}{(s - z_i)^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.

Il punto improprio ∞ è uno zero di molteplicità K se il limite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero.

Definizione. (Polo)

I poli della funzione di trasferimento $H(s)$ sono i valori per i quali $H(s)$ tende a infinito (Sono quindi le radici del polinomio $d(s)$).

Il polo $p_i \in \mathbb{C}$ ha molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se il limite

$$\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^k H(s)$$

esiste finito e diverso da zero .

Il punto improprio ∞ è un polo di molteplicità k se il limite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^k} H(s)$$

esiste finito e diverso da zero

Teorema 3.1.1 – BIBO stabilità e poli di $H(s)$

Dato il sistema causale SISO LTI di funzione di trasferimento $H(s)$ con polinomi $n(s)$ e $d(s)$ coprimi , il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli sono nel semipiano sinistro aperto del piano complesso , ovvero

$$\operatorname{Re}(p_i) < 0, i = 0, \dots, \deg \{d(s)\}$$

4 Diagrammi di Bode

4.1 risposta in frequenza

Definizione. (Risposta in frequenza)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad w \in \mathbb{R}$$

★ Modulo :

$$A(w) = |H(jw)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right| \quad w \in \mathbb{R}$$

★ Fase :

$$\phi(w) = \angle H(jw) = \arg \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right\} \quad w \in \mathbb{R}$$

★

$$\overline{H(jw)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\overline{e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j\omega t} dt = H(-jw)$$

La risposta in frequenza è una funzione hermitiana.

Da questa proprietà deriviamo che

$$A(w) = A(-w) \quad \phi(w) = -\phi(-w)$$

★ Per sistemi BIBO stabili con risposta impulsiva senza componenti impulsiva , la risposta in frequenza $H(jw)$ è una funzione continua in w e vale

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} H(jw) = 0$$

I sistemi causali LTI e BIBO stabili descritti da

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad t \in \mathbb{R}$$

rispondono ad un ingresso $u(t) = e^{j\omega t}$ $t \in \mathbb{R}$ con $v(t) = H(jw)e^{j\omega t}$ $t \in \mathbb{R}$, sostituendo i termini di $u(t)$ e $v(t)$ nel sistema otteniamo

$$\sum_{i=0}^n a_i H(jw)(jw)^i e^{j\omega t} = \sum_{i=0}^n b_i (jw)^i e^{j\omega t} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(jw)e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n a_i (jw)^i = e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n b_i (jw)^i \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H(jw) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i (jw)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (jw)^i}$$

La risposta in frequenza $H(jw)$ non è altro che la **trasforma di Fourier della risposta impulsiva** quando il sistema LTI è BIBO stabile

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

Per sistemi causali

$$H(jw) = \int_{0^-}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

Sempre per i sistemi BiBO stabili vale che

$$H(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

si ha quindi che

$$H(jw) = H(s)|_{s=jw}$$

4.2 Diagrammi di Bode

Definizione. (Diagramma di Bode)

I **Diagrammi di Bode** sono una rappresentazione grafica della risposta in frequenza $H(j\omega)$.

Sfruttando le proprietà di simmetria del modulo e dalla fase della risposta in frequenza $A(\omega) = A(-\omega)$ $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ possiamo graficare $\omega \geq 0$ Inoltre la risposta in frequenza in notazione polare

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$\ln(H(j\omega)) = \ln(A(\omega)) + j\phi(\omega)$$

quindi per graficare il logaritmo della risposta in frequenza dobbiamo graficare

- ★ il logaritmo naturale dell'ampiezza (*Diagramma di bode dell'ampiezza*)
- ★ il modulo della risposta (*Diagramma di bode della fase*)

Inoltre invece di utilizzare il logaritmo naturale del modulo si usa il **decibel(dB)**

$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

Anche nell'asse delle ascisse non utilizzeremo ω ma $\log_{10} \omega$ Data la funzione di trasferimento come rapporto di polinomi

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)^{\mu'_1} (s - z_2)^{\mu'_2} \dots (s - z_u)^{\mu'_u}}{(s - p_1)^{\mu_1} (s - p_2)^{\mu_2} \dots (s - p_r)^{\mu_r}}$$

- ★ $z_i \in \mathbb{R}$ con molteplicità di μ'_i verranno riscritti come

$$(s - z_i) = -z_i(1 + s\tau'_i) \quad \tau'_i = \frac{-1}{z_i}$$

$$(s - z_i)^{\mu'_i} = (-z_i)^{\mu'_i} (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i}$$

- ★ poli reali $p_i \in \mathbb{R}$ di molteplicità μ_i

$$(s - p_i) = -p_i(1 + s\tau_i) \quad \tau_i = \frac{-1}{p_i} \text{ costante di tempo del polo}$$

$$(s - p_i)^{\mu_i} = (-p_i)^{\mu_i} (1 + s\tau_i)^{\mu_i}$$

- ★ zeri complessi coniugati z_i, \bar{z}_i di molteplicità μ'_i

$$(s - z_i)(s - \bar{z}_i) = s^2 - 2\text{Re}(z_i)s + |z_i|^2$$

$$= |z_i|^2 \left(1 + 2 \frac{\text{Re}(z_i)}{|z_i|} \frac{s}{|z_i|} + \frac{s^2}{|z_i|^2} \right)$$

$$= |z_i|^2 \left(1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}} \right) \quad \begin{cases} \zeta'_i = -\frac{\text{Re}(z_i)}{|z_i|} \\ \omega'_{ni} = |z_i| \end{cases}$$

$$(s - z_i)^{\mu'_i} (s - \bar{z}_i)^{\mu'_i} = |z_i|^{2\mu'_i} \left(1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}} \right)^{\mu'_i}$$

- ★ poli complessi coniugati p_i, \bar{p}_i di molteplicità μ_i

$$(s - p_i)(s - \bar{p}_i) = s^2 - 2\text{Re}(p_i)s + |p_i|^2$$

$$= |p_i|^2 \left(1 + 2 \frac{\text{Re}(p_i)}{|p_i|} \frac{s}{|p_i|} + \frac{s^2}{|p_i|^2} \right)$$

$$= |p_i|^2 \left(1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right) \quad \begin{cases} \zeta_i = -\frac{\text{Re}(p_i)}{|p_i|} \\ \omega_{ni} = |p_i| \end{cases}$$

$$(s - p_i)^{\mu_i} (s - \bar{p}_i)^{\mu_i} = |p_i|^{2\mu_i} \left(1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right)^{\mu_i}$$

I parametri $\omega'_{ni}, \omega_{ni}$ vengo detti **pulsazioni naturali**.
 I parametri ζ'_i, ζ_i vengono detti **coefficienti di smorzamento**

4.3 Forma di Bode della funzione di trasferimento

$$H(s) = K_B \frac{\prod_i (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{s}{\omega'_{ni}} - \frac{s^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{s^\nu \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} - \frac{s^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}$$

$$K_B = \frac{b_m \prod_i (\tau_i)^{\mu_i} \prod \left(\frac{1}{\omega^2_{ni}}\right)^{2\mu_i}}{a_n \prod_i (\tau'_i)^{\mu'_i} \prod \left(\frac{1}{\omega'^2_{ni}}\right)^{2\mu'_i}} \quad \text{Guadagno di Bode}$$

Ora sapendo che $H(jw) = H(s) \Big|_{s=jw}$ possiamo ricavare la forme di bode della riposta in frequenza

$$H(jw) = K_B \frac{\prod_i (1 + jw\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta'_i \frac{jw}{\omega'_{ni}} - \frac{w^2}{\omega'^2_{ni}}\right)^{\mu'_i}}{(jw)^\nu \prod_i (1 + jw\tau_i)^{\mu_i} \prod_i \left(1 + 2\zeta_i \frac{jw}{\omega_{ni}} - \frac{w^2}{\omega^2_{ni}}\right)^{\mu_i}}$$

Utilizzando il logaritmo e l'argomento possiamo sfruttare le proprietà che ci semplificano i conti

$$\begin{cases} \arg(ab) = \arg(a) + \arg(b) \\ \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b) \\ \arg(a^k) = k \arg(a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} \left\{ \frac{|K_B| \prod_{i=1} |1 + j\omega\tau'_i|^{\mu'_i} \prod_{i=1} \left|1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'^2_n} \omega - \frac{1}{\omega'^2_n} \omega^2\right|^{\mu'_i}}{|(j\omega)^\nu| \prod_{i=1} |1 + j\omega\tau_i|^{\mu_i} \prod_{i=1} \left|1 + j2\frac{\zeta_i}{\omega^2_n} \omega - \frac{1}{\omega^2_n} \omega^2\right|^{\mu_i}} \right\} \\ &= 20 \log_{10} |K_B| + \quad \text{termine costante} \\ &\quad + \sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10} |1 + j\omega\tau'_i| + \dots \quad \text{zeri reali} \\ &\quad + \sum_{i=1} 20\mu'_i \log_{10} \left|1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'^2_n} \omega - \frac{1}{\omega'^2_n} \omega^2\right| + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati} \\ &\quad - 20\nu \log_{10} |j\omega| - \dots \quad \text{radici nell'origine} \\ &\quad - \sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| - \dots \quad \text{poli reali} \\ &\quad - \sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10} \left|1 + j2\frac{\zeta_i}{\omega^2_n} \omega - \frac{1}{\omega^2_n} \omega^2\right| \quad \text{poli complessi coniugati} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\angle H(j\omega) &= \arg \left\{ K_B \frac{\prod_{i=1} (1 + j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_{i=1} \left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right)^{\mu'_i}}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1} (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right)^{\mu_i}} \right\} \\
&= \arg(K_B) + \text{termine costante} \\
&\quad + \sum_{i=1} \mu'_i \arg(1 + j\omega\tau'_i) + \dots \quad \text{zeri reali} \\
&\quad + \sum_{i=1} \mu'_i \arg\left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right) + \dots \quad \text{zeri complessi coniugati} \\
&\quad - \nu \arg(j\omega) - \dots \quad \text{radici nell'origine} \\
&\quad - \sum_{i=1} \mu_i \arg(1 + j\omega\tau_i) - \dots \quad \text{poli reali} \\
&\quad - \sum_{i=1} \mu_i \arg\left(1 + j2\frac{\zeta'_i}{\omega'_n}\omega - \frac{1}{\omega'^2_n}\omega^2\right) \quad \text{poli complessi coniugati}
\end{aligned}$$

5 Segnale a tempo discreto

1. Impulso di Kronecker :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus 0 \end{cases}$$

Rappresenta , per certi aspetti , l'equivalente a tempo discreto dell'impulso di dirac

2. Gradino unitario discreto :

$$\delta_{-1}(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

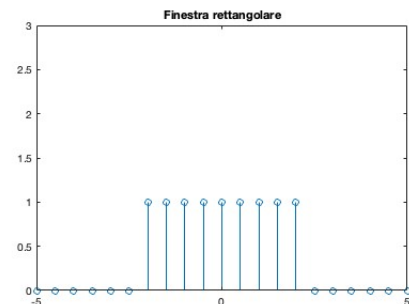
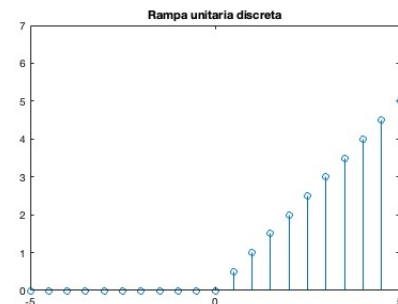
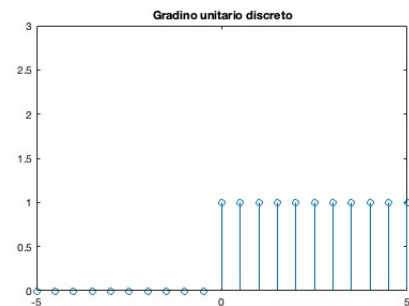
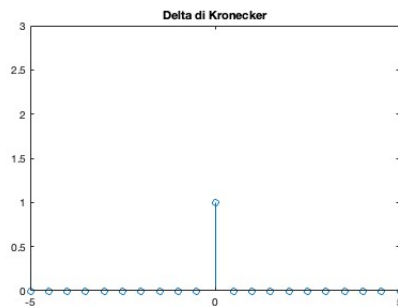
3. Rampa unitaria discreta :

$$\delta_{-2}(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4. Finestra rettangolare :

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La N corrisponde al numero di campioni non nullo , inoltre , rispetto al caso continuo , la finstra rettangolare non ha campioni distribuiti simmetricamente rispetto all'origine. Possiamo creare una finestra rettangolare simmetrica solo se il numero di campioni N è dispari



5. Successione esponenziale discreta :

$$v(n) = Ae^{j\Phi}\lambda^n = Ae^{j\Phi}\rho^n e^{j\theta n} = A(\cos(\theta n + \Phi) + i \sin(\theta n + \Phi)) \quad n \in \mathbb{Z}$$

6. Successione sinusoidale discreta :

$$v(n) = A \cos(\theta n + \Phi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

La versione campionata (campioni equi spaziat) di un segnale periodico non è necessariamente un segnale periodico . Ciò si verifica se e solo se esistono due interi N e K con N non negativo tali che

$$\theta(n + N) + \phi = \theta n + \phi + 2k\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

oppure una condizione equivalente è

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

7. Successione sinusoidale modulata esponenzialmente

$$v(n) = A\rho^n \cos(\theta n + \phi)$$

5.1 Proprietà

★ Cambiamento di Scala e traslazione :

Nel caso discreto è fondamentale l'ordine delle operazioni : prima traslazione poi cambiamento di scala

★ Estensione e durata :

L'estensione di un segnale discreto può essere definita come un insieme di istanti contigui

La Durata invece è data dall' valore dell'istante finale meno il valore dell'istante iniziale più uno

★ Area :

$$A_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$$

★ Valore medio :

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

★ Energia :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

★ Potenza :

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

★ Energia e potenza mutua :

$$E_{x,y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \overline{y(n)}$$

$$P_{x,y} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \overline{y(n)}$$

★ Segnali discreti periodici :

$$A_x(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n)$$

$$m_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n) = \frac{A_x(N)}{N}$$

$$E_x(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x(n)|^2$$

$$P_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x(n)|^2 = \frac{E_x(N)}{N}$$

★ Convoluzione :

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

Valgono tutte le proprietà viste nel tempo continuo

5.2 Campionamento

Definizione. (Replica)

Dato un segnale $x(t)$ e numero reale positivo T , viene indicato con **versione replicata di passo T** del segnale, il segnale periodico di periodo T che è espresso da

$$[rep_t x](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$$

L'operazione di replicazione è definita solo se il segnale ha durata limitata.

Inoltre possiamo anche definire il **treno campionatore ideale** di periodo T come

$$\widetilde{\delta}_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Ora possiamo definire la versione replicata nel seguente modo

$$[rep_T x](t) = [x(t) * \widetilde{\delta}_t]$$

Se passiamo nel dominio della frequenza possiamo calcolare

$$X_{rep}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{K}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Possiamo vedere che la ripetizione nel dominio delle frequenze è una sequenza di valori discreti della trasformata di x in corrispondenza di k/T e scalati di $1/T$; Abbiamo che quindi **una replicazione nel dominio del tempo corrisponde con un campionamento nel dominio della frequenza**

Campionare significa estrarre dal segnale analogico i valori che assumi in determinati istanti temporali. Se il campionamento è uniforme allora gli istanti temporali sono equispaziati di T , detto **periodo di campionamento**, mentre $f_c + \frac{1}{T}$ rappresenta la **frequenza di campionamento**.

Un modo semplice per campionare un segnale è il **campionamento impulsivo**, cioè utilizzando il treno di impulsi.

$$x_p(t) = [samp_T x](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

Se passiamo nel dominio della frequenza ed esiste la trasformata di Fourier del segnale , possiamo calcolare la trasformata di Fourier della versione campionata , allora troviamo che

$$X_p(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} [rep_{\frac{1}{T}} X](f)$$

Quindi In conclusione :

- ★ Campionamento nel dominio del tempo corrisponde ad una replicazione nel dominio della frequenza
- ★ In generale , ad una replicazione in un dominio corrisponde un campionamento nell'altro dominio

Teorema – del campionamento ideale

Un segnale tempo continuo $x(t)$ è rappresentato perfettamente dai suoi campioni presi con passo T ($f_c = \frac{1}{T}$) se :

1. $x(t)$ è un segnale reale rigorosamente limitato in banda , con ciò intendendo che la funzione pari $|X_a(f)|$ ha supporto limitato
2. La frequenza di campionamento f_c è maggiore della **frequenza di Nyquist** $f_n = 2B$ dove B rappresenta la larghezza di banda monolatera del segnale , che è definita come

$$B = \inf\{\bar{f} \in \mathbb{R}_+ : |X_a(f)| = 0 \text{ per } |f| > \bar{f}\}$$

Se le condizioni di questo teorema sono soddisfatte allora il segnale può essere ricostruito a partire dal $[samp_T x](t)$ utilizzando un filtro con risposta in frequenza del tipo

$$H_r(f) = T \prod\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c} \prod\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$

A condizione che $B < f_L < f_c$, normalmente si assume che $f_c = 2f_L$. Quindi il segnale può essere ricostruito attraverso la **formula di interpolazione ideale**

$$\begin{aligned} x_a(t) &= [samp_T x * h_r](t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] \\ &= X_p(f) H_r(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) T \prod\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) \prod\left(\frac{f}{2f_L}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \end{aligned}$$

Nel caso in cui campionassimo un segnale a durata limitata , quindi banda *illimitata* , oppure campionassimo un segnale a Banda limitato con frequenza minore di quella di Nyquist allora avviene il fenomeno dell'**aliasing**

6 Sistemi a tempo discreto

Definizione. (Tempo-invarianza)

Un sistema dinamico inizialmente a riposo è **tempo invariante** se traslazioni nel tempo dei valori assunti dagli ingressi $u(k)$ provocano le stesse traslazioni nel tempo dei valori assunti dalle uscite $v(k)$.

In altre parole se $u(k)$ produce $v(k)$ allora $u(k-d)$ produce $v(k-d)$ con $d \in \mathbb{Z}$ (In realtà $d \in \mathbb{N}$ poichè nella realtà possiamo solo ritardare un segnale e non anticiparlo, non conoscendo il futuro)

Inoltre possiamo definire l'operatore **ritardo** σ come

$$[\sigma^d u](k) = u(k-d)$$

Definizione. (Stabilità esterna o BIBO, bounded-input bounded output)

Un sistema dinamico a tempo discreto Σ è **BIBO stabile** se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_v , tale che per ogni segnale di ingresso $u(k)$ che soddisfa

$$|u(k)| \leq M_u \quad k \in \mathbb{Z}$$

la corrispondente risposta in uscita $v(k)$ soddisfa

$$|v(k)| \leq M_v$$

Un sistema **SISO lineare** può essere espresso nella seguente forma :

$$\sum_{i=0}^n a_i(k)v(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i(k)u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove $a_i(k), b_i(k)$ sono coefficienti valori reali che possono dipendere dal tempo con a_0, b_m, a_n non nulli. Se invece abbiamo un sistema **SISO lineare tempo.invariante** abbiamo che l'equazione alle differenze diventa

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

★ Se $n = 0$ il sistema viene descritto dall'equazione

$$v(k) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{a_0} u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questo modello è chiamato **Modello a media mobile**

★ Se $m = 0$ il sistema viene descritto dall'equazione

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{b_0} v(k-i) = u(k)$$

Questo modello è chiamato **Modello autoregressivo**