Sistemi dinamici

Luca Mombelli

2024-25

Indice

1 Problemi di Cauchy per ODE del primo ordine in forma normale

Definizione 1.1. **Dati:** Un aperto $D \subseteq R \times \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : D \to \mathbb{R}^n, (t_0, y_0) \in \mathbb{D}$
Problema: Dobbiamo trovare un intervallo $I \subseteq D$ e una funzione differenziabile (di classe C^1) $y : I \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \forall t \in I$$

Teorema 1.1: di esistenza e unicità locale

Se f è di classe C^1 allora esiste un certo alpha tale che il problema di Cauchy possiede una ed una sola soluzione definita nell'intervallo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

Definizione 1.2. (soluzioni distinte)
y_1, y_2 sono due soluzione distinte se esiste un certo t_0 reale tale che y_1, y_2 sono definite in t_0 però

$$y_1(t_0) \neq y_2(t_0)$$

Corollario. (di unicità locale)
Se f è di classe C^1 e y_1, y_2 sono soluzioni distinte dell'equazione differenziale $y'(t) = f(t, y(t))$ allora i grafici di y_1, y_2 sono disgiunti

Definizione 1.3. (prolungamento di una soluzione)
Sia $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ una soluzione del problema di Cauchy.sia $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ un'altra soluzione del problema di Cauchy definita in un intervallo $I_2 \supseteq I_1$.Si dice prolungamento di y_1 se $y_2(t) = y_1(t) \ \ \forall t \in I$

Definizione 1.4. (soluzione massimale)
Si dice che una soluzione è massimale se non è ulteriormente prolungabile

Definizione 1.5. Si dice che una soluzione è globale quando è definita su $tutto \mathbb{R}$

Teorema 1.2: di fuga dei compatti

Se f è di classe C^1 il problema di Caucht possiede una ed una sola soluzione massimale $y : (\alpha_-, \alpha_+) \to \mathbb{R}^n$. Inoltre , per ogni insieme compatto K (chiuso e limitato) contenuto in D esiste un intorno U_+ di α_+ tale che

$$(t, y(t)) \notin K \ \ \forall t \in I$$

Corollario. Se $f : R \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$è di classe C^1 , se y è una soluzione massimale limitata dell'equazione differenziale allora y è una soluzione globale

Dimostrazione. Sia $y : (\alpha_-, \alpha_+) \to \mathbb{R}^n$ soluzione massimale limitata. Per assurto suppongo che non sia anche globale quindi $\alpha < +\infty >$ Per ipotesi esiste $M > 0 \ t.c \ ||y(t)|| \leq M \forall t \in (\alpha_-, \alpha_+)$. Definisco l'insieme

$$K = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t_0 \leq t \leq \alpha_+, ||z|| \leq M\}$$

K è un insieme compatto , inoltre per costruzione

$$(t, y(t)) \in K \ \ \forall t \in [t_0, \alpha_+)$$

ma ciò contraddice il teorema di fuga dai compatti , allora $\alpha_+ = +\infty$, allora stesso modo si dimostrerà che $alpha_- = -\infty$ □

Teorema 1.3: dell'asintoto

Sia $u : [\alpha, = \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Supponiamo che esistano

$$L = \lim_{t\to+\infty} u(t) \quad L' = \lim_{t\to+\infty} u'(t)$$

se L è finito allora L'=0

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $L' \neq 0$. Consideriamo il caso $0 < L <= \infty$. Per la definizione di limite esiste $M > 0$ tale che per ogni $s \geq M$

$$u'(s) \geq \frac{L'}{2}$$

Prendo $t \geq M$ e integro membro a membro la disuguaglianza su (M, t)

$$\int_M^t u'(s)\ ds \geq \int_M^t \frac{L}{2}\ ds$$

$$u(t) - u(M) \geq \frac{L'}{2}t - \frac{L'}{2}M$$

$$u(t) \geq u(M)\frac{L'}{2}t - \frac{L'}{2}M \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$$

ma ciò è assurdo perchè contraddice l'ipotesi che L sia finito , dunque L=0 □

Teorema 1.4: del confronto

sia $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Siano $y, u : I \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili , definito sullo stesso intervallo I contente t_0 , tali che

$$\begin{cases} y'(t) \leq f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = u(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora

$$y(t) \leq u(t) \forall t \in I, t \geq t_0$$
$$y(t) \geq u(t) \forall t \in I, t \leq t_0$$

Un risultato analogo vale anche per le disuguaglianze nel verso opposto :

$$\begin{cases} y'(t) \geq f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = u(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora ne dedurremmo che :

$$y(t) \geq u(t) \forall t \in I, t \geq t_0$$
$$y(t) \leq u(t) \forall t \in I, t \leq t_0$$

Definizione 1.6. (crescita lineare)
Si dice che una funzione $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha crescita al più lineare nella variabile y se e solo se esistono funzioni continue e non negative $\phi, \psi\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$|f(t, y)| \leq \phi(t)|y| + \psi(t) \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Se f è di classe C^1 ed è definita su tutto il prodotto cartesiano , per verificare questa condizione basta studiare il comportamento di f quando $|y| \to +\infty$

Teorema 1.5: di esistenza globale

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 di crescita al più lineare nella variabile y. Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy (PC) possiede soluzione globale (condizione sufficiente ma non dimostrabile)

Lemma. (di Grönwall)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo , siano $\beta, u : I \to R$ funzioni continue e $\beta \geq 0$,Siano $t_0 \in I, \alpha \in \mathbb{R}$ costanti . Se

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$$

Per ogni $t \in I$, allora

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right)$$

per ogni $t \in I$, $t \geq t_0$

Dimostrazione. Per $t \in I, t \geq t_0$ definisco

$$R(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$$

Per il teorema fondamentale del calcolo , R è di classe C^1

$$\begin{aligned} R'(t) &= \beta(t)u(t) \leq \beta(t)(\alpha + R(t)) \\ R'(t) &- \beta(t)R(t) \leq \alpha\beta(t) \end{aligned}$$

questa è una disequazione differenziale lineare di primo ordine.

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds$$

Moltiplico entrambi i membri della disuguaglianza per $\exp(-B(t))$

$$\begin{aligned} (R'(t) - \beta(t)R(t))e^{(-B(t))} &\leq \alpha\beta(t)e^{(-B(t))} \\ \frac{d(R(t)e^{-B(t)})}{dt} &\leq -\alpha\frac{d(\alpha e^{-B(t)})}{dt} \end{aligned}$$

Fissiamo ora $t \in I, t \geq t_0$: integrando ambo i membri di questa disuguaglianza sull'intervallo $[t_0, t]$ e osservando che $R(t_0) = B(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} R(t)e^{-B(t)} &\leq \alpha - \alpha e^{-B(t)} \\ R(t) &\leq \alpha e^{B(t)} - \alpha \\ u(t) &\leq \alpha + R(t) \leq \alpha e^{B(t)} \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. del teorema di esistenza globale 1
Sia $y : (\alpha_+, \alpha_-) \to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale del problema di Cauchy. Dobbiamo dimostrare che $\alpha_- = -\infty, \alpha_+ = +\infty$.Supponiamo per assurdo che $\alpha_+ < +\infty$ .Fissiamo un punto $t \in (t_0, y_0)$, per il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza triangolare abbiamo che

$$|y(t)| = \left|y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds\right| \leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |y'(s)|ds$$

y è la soluzione dell'equazione differenziale e abbiamo supposto che f sia a crescita al più lineare :

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))| ds \\
&\leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)|y(s)| + \psi(s) ds \\
&\leq \underbrace{|y(t_0)| + \int_{t_0}^{\alpha_+} \psi(s) ds}_{:=\alpha} + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)|y(s)| ds
\end{aligned}
$$

Possiamo dunque applicare il lemma di Grönwall alla funzione $|y|$ e ne deduciamo che :

$$|y| \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds\right) \qquad \forall t \in [t_0, \alpha_+)$$

Ne consegue che la funzione y è limitata nell'intervallo , ma questo contraddice il teorema di fuga dai compatti , si ottiene quindi una contraddizione □

1.0.1 Dipendenza continua dai dati inziali

Definizione 1.7. (funzione lipschitziana)
Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si dice che f è lipschitziana in y (uniformemente rispetto a t) se esiste una costate $L > 0$ tale che , per ogni $t \in \mathbb{R}, y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}$ valga

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{1}$$

Una funzione lipschitziana in y ha necessariamente crescita al più lineare

Lemma. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 tale che la matrice delle derivate parziali $\nabla_y f$, rispetto alla variabile y , sia limitata , vale a dire che esiste $L > 0$ tale che , per ogni $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed ogni indice i , j valga

$$|\nabla_{y_i} f_i| \leq L$$

Allora la funzione è lipschitziana in y. Viceversa se f è di classe C^1 e lipschitzianain y , allora $\nabla_y f$ è limitata

Teorema 1.6: di dipendenza continua dal dato iniziale

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia lipschitziana nella variabile y (uniformemente rispetto a t e una funzione di classe C^1) . Allora le soluzioni massimali dei due problemi di Cauchy sono globali e soddisfano

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq e^{L|t-t_0|}|y_{1,0} - y_{2,0}| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dove L è una costante che soddisfa la disuguaglianza di Lipschiz. (1)

Dimostrazione. Le soluzione massimali sono globali per il teorema di esistenza globale , questo teorema li posso applicare perchè le funzioni lipschitziana in y hanno crescita al più lineare in y.
Definisco la quantità

$$z(t) = \frac{1}{2}|y_1(t) - y_2(t)|^2$$

per la regola della catena z è differenziabile come funzione di t e la sua derivata è

$$
\begin{aligned}
&z'(t) = (y_1(t) - y_2(t))(y_1'(t) - y_2'(t)) \\
&z'(t) = (y_1(t) - y_2(t))(f(t, y_1) - f(t, y_2)) \\
&\text{Applico la disuguaglianza di Cauchy- Schwarz} \\
&\leq |y_1(t) - y_2(t)| \; |(f(t, y_1) - f(t, y_2))| \\
&\leq L|y_1(t) - y_2(t)|^2 = 2Lz(t) \\
&z'(t) \leq 2Lz(t)
\end{aligned}
$$

Per il lemma di Gronwall (in forma differenziale) , supponiamo che

$$
z(t) \leq \frac{1}{2} e^{L(t-t_0)} |y_{0,1} - y_{0,2}|^2 \quad \forall t \geq t_0
$$

. Moltiplicando per 2 ed estraendo la radice ottengo DA COMPLETARE □

2 Risoluzione esplicite di alcune equazioni differenziali

2.1 Equazione di riccati

Le equazione di Riccati sono equazioni differenziali del primo ordine nella forma

$$y'(t) = \alpha(t) + \beta(t)y + \gamma(t)y^2$$

dove α, β, γ sono funzioni continue.
Il primo metodo di risoluzione di questa famiglia di equazioni differenziali è il seguente.
Introduco una variabile u tale che risolva la seguente equazione

$$y(t) = \frac{u'(t)}{\gamma(t)u(t)}$$

sostituendo questo fattore nell'equazione di Riccati ottiene un'equazione lineare del secondo ordine per la variabile u

$$\gamma u'' - (\gamma' + \beta\gamma)u' + \alpha\gamma^2 u = 0$$

Il secondo metodo di risoluzione riduce l'equazione di Riccati ad un'equazione lineare del primo ordine. Richiede di conoscere una soluzione $\bar{y}$ dell'equazione di Riccati.
Cambip di variabile

$$w \ \ tale\ che \ \ y(t) = \bar{y}(t) + \frac{1}{w(t)}$$

2.2 Equazioni differenziali totali

Le equazioni differenziali totali sono equazioni differenziali nella forma :

$$\alpha(t, y(t)) + \beta(t, y(t))y'(t) = 0$$

dove $\alpha, \beta : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soni funzioni date , di classe $C^1(D)$.
Cerchiamo , se esiste , una **primitiva** dell'equazione , ovvero una funzione differenziabile

$$F : D \to \mathbb{R} \ tale\ che \ :$$

$$\begin{cases} \partial_t F = \alpha \\ \partial_y F = \beta \end{cases}$$

Proposizione. Sia F una primitiva dell'equazione differenziale totale. Allora ogni soluzione y dell'equazione differenziale totale

$$F(t, y(t)) = costante$$

Viceversa , se $(t_0, y_0) \in D$ è tale che $\partial_y F(t_0, y_0) \neq 0$, allora la curva di livello di F passante per (t_0, y_0)è localmente , in un intorno di (t_0, y_0) , il grafico di una soluzione dell'equazione differenziale totale

Dimostrazione. Sia y una soluzione dell'equazione differenziale totale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t, y(t)) = & \\ &= \partial_t F(t, y(t)) + \partial_y F(t, y(t))y'(t) \\ &= \alpha(y, y(t)) + \beta(t, y(t))y'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la funzione primitiva è costante.
Il viceversa discende dal teorema del Dini □

Affinchè esista una primitiva F dell'equazione differenziale totoale è **necessario** che

$$\partial_y \alpha - \partial_t \beta = 0$$

su tutto D. Inoltre se il dominio D è semplicemente connesso non è solo condizione necessaria ma anche sufficiente affinchè esista

3 Sistemi Dinamici

Definizione 3.1. (campo vettoriale)
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Un campo vettoriale è una mappa che

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

Una definizione più precisa sarebbe la seguente :

$$\overline{X} : \Omega \to \Omega \times \mathbb{R}^n$$
$$\overline{X} : z \mapsto (z, X(z))$$

Quest'ultima definizione ci è utile se lavoriamo sulle varietà , se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora il prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R}^n$ viene detto fibrato tangente. Noi utilizzeremo la prima definizione di campo vettoriale e inoltre consideremo unicamente campi di vettoriale di classe C^∞
Inoltre definiamo Ω come **Spazio delle fasi**

Definizione 3.2. Una curva integrale di un campo vettoriale $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile $z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ intervallo , che risolve l'equazione

$$\dot{z}(t) = X(z(t)) \quad \forall t \in I$$

Il sistema di equazioni differenziali $\dot{z}(t) = X(z(t)$ è autonomo , cioè non dipende esplicitamente dalla variabile t . Segue che se $z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un curva integrale integrale di X allora vale che

$$w(t) = z(t - t_0)$$

con t_0 fissato è una curva integrale.
Di conseguenza basta studiare i problemi di cauchy della seguente forma

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = X(z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Una curva integrale è tangente al campo vettoriale in ogni suo punto. Inoltre non è detto che una curva integrale sia definita su tutto $\mathbb{R}$ (le soluzioni massimale non sono sempre globali)

Definizione 3.3. (Orbita)
Un'orbita del campo vettoriale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'immagine di una delle curve integrali di X , orientata nel verso dei tempi crescenti. L'insieme di tutte le orbite di un campo vettoriale X si chiama ritratto in fase di X

Proposizione. Per ogni punto dello spazio delle fasi Ω passa una ed una sola orbita di X.

Dimostrazione. Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ esiste (almeno localmente) una soluzione di

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

. L'immagine di tale soluzione è un'orbita che passa per z_0.
Suppongo che due orbite , $O_1 \neq O_2$, si intersechino in un punto $z_0 \in O_1 \cup O_2$. Allora esistono curve integrali $z_1 : I_1 \to \Omega$ $z_2 : I_2 \to \Omega$ e tempi $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$ tali che

$$z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$$

Considero $w_1(t) = z_1(t - t_1)$, $w_2(t) = z_2(t - t_2)$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni distinte , w_1, w_2. Assurdo per il teorema di esistenza locale $\square$

Definizione 3.4. (Campo vettoriale completo) Un campo vettoriale $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice **completo** se e solo se tutte le sue curve integrali massimali sono globali

Tutti i campi vettoriali con crescita al più lineare sono completi , per il teorema di esistenza globale

Proposizione. Per ogni campo vettoriale $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ esiste una campo completo he ha le stesse orbite di X (Stesse orbite ma curve integrali diverse)

Definizione 3.5. Dato un campo vettoriale $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, una soluzione di equilibrio è una curva integrale costante $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{z} \in \Omega$. Si dice che $\bar{z}$ è un punto di equilibrio di X.

Proposizione. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale e $z : (\alpha, +\infty) \to \Omega$ una curva integrale. Se esiste $\overline{z} = \lim_{t\to+\infty} z(t)$ e se $\overline{z} \in \mathbb{R}$, allora $\overline{z}$ è un equilibrio di X

Dimostrazione. Per definizione di curva integrale

$$\dot{z}(t) = X(z(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} X(\bar{z})$$

. (supponendo X continuo). Per il teorema dell'asintoto applicato componente per componente , segue che $X(\bar{z}) = 0$ □

NB : questa proposizione si applica unicamente a sistemi autonomi

Definizione 3.6. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, sia $\bar{z} \in \Omega$ equilibrio. Diremo che $\bar{z}$ è un equilibrio

- ⋆ Attrattivo: se e solo se esiste un intorno $V \subseteq \Omega$ di $\bar{z}$ tale che , per ogni curva integrale $z : I \to \Omega$ di X con $z(0) \in V$ sia ha

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = \bar{z}$$

- ⋆ Repulsivo: se e solo se esiste un intorno $V \subseteq \Omega$ di $\bar{z}$ tale che , per ogni curva $z : I \to \Omega$ di X con $z(0) \in V$ sia ha

$$\lim_{t\to-\infty} z(t) = \bar{z}$$

Proposizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo , $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\bar{z}$ un equilibrio di X

1. Se $X'(\bar{z}) < 0$ l'equilibrio è **attrattivo**
2. Se $X'(\bar{z}) > 0$ l'equilibrio è **repulsivo**

Se $X'(\bar{z}) < 0$ tutto può succedere

3.1 Equazioni del secondo ordine

Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$$

dove $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto , $x \in X$, $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $Y : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Possiamo ricondurci ad un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = Y(x, v) = \ddot{x} \end{cases}$$

Il campo vettoriale associato al sistema $X : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$$

Per il sistema definiamo

- ⋆ **Spazio delle fasi :** $C \times \mathbb{R}^n$ quindi lo spazio della fasi corrisponde al dominio
- ⋆ **Spazio delle configurazioni :** C
- ⋆ **Le orbite** sono le immagini delle curve $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ contenute in $C \times \mathbb{R}^n$. Inoltre le orbite sono a due a due disgiunte
- ⋆ Le proiezione delle orbite sullo spazio delle configurazioni sono dette **traiettorie**
- ⋆ Gli equilibri sono i punti che annullano il campo vettoriale , quindi tutti e solo i punti $(\bar{x}, \bar{y})$ tali che

  $$X(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \bar{v} = 0 \\ Y(\bar{x}, 0) = 0 \end{cases}$$

  Gli equilibri che hanno la forma $(\bar{x}, 0)$ tali che $Y(\bar{x}, 0) = 0$ si chiamano **configurazioni d'equilibrio**

4 Sistemi lineari

Chiamiamo i sistemi lineari quelli della forma

$$\dot{z} = Az \quad A \in R^{n \times n}$$

quindi il camo vettoriale $X(z) = Az$ è una mappa lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Definizione 4.1. Si dice linearizzato di X nell'equilibrio $\bar{z}$ il sistema lineare

$$\begin{aligned} &z = \bar{z} + u \\ &\dot{u} = Au \quad\quad A = J(X(\bar{z})) \\ &\dot{z} = A(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

dove J(X) è la matrice jacobiana del campo vettoriale

4.1 Linearizzazione del secondo ordine

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto , $Y : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$allora

$$\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$$

Sia $\bar{x}$ un equilibrio quindi $Y(\bar{x}, 0) = 0$ Considero il sistema di primo rodine associato

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = Y(x, v) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$$

Linearizzando nel suo equlibrio $\bar{x}$ ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = JX(\bar{x}, 0) \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ D_x Y(\bar{x}, 0) & D_v Y(\bar{x}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ v \end{pmatrix}$$

Quindi ottengo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = J_x Y(\bar{x}, 0) + J_v Y(\bar{x}, 0) \end{cases}$$

4.2 Generalità

I campi vettoriali lineari sono completi , la curva integrale di $\dot{z} = Az$ con dato iniziale $z_0 \in \mathbb{R}^n$ è

$$z(t) = e^{tA} z_0 \quad con \quad e^{tA} := \sum_{0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Siano X e Y due matrici complesse di dimensione $n \times n$ e siano a e b due numeri complessi.

- ⋆ $e^0 = I$.
- ⋆ $e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X}$.
- ⋆ Se $AB = BA$, allora $e^A e^B = e^{A+B}$.
- ⋆ Se Y è invertibile, allora
$$e^{YtXY^{-1}} = Ye^{tX}Y^{-1}.$$
- ⋆ $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.
- ⋆ Se $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora $e^{tA} = diag(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$
- ⋆ L'esponenziale di una matrice è sempre una matrice invertibile, in analogia con il fatto che l'esponenziale di un numero complesso non è mai nullo.

4.3 Decomposizone in sottospazi invarianti di grado 1 e 2

Definizione 4.2. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale liscio. Un insieme $M \subset \Omega$ si dice invariante (per il flusso di X) se per ogni curva integrale $z : \mathbb{R} \to \Omega$ tale che $z(0) \in M$ si ha

$$z(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definizione 4.3. (Sottospazio invariante)
Un sottospazio invariante relativo a un operatore lineare $T : V \to V$ su uno spazio vettoriale V è un sottospazio $W \subseteq V$ tale che per ogni vettore $w \in W$, l'immagine $T(w)$ appartiene ancora W. Formalmente $T(W) \subseteq w$

Proposizione. Uno sottospazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è invariante per il flusso $\dot{z} = Az$ se e solo se

$$AV = \{Az \mid z \in V\} \subseteq V$$

Dimostrazione. Suppongo $AV \subseteq V$ allora

$$A^2V = A(AV) \subseteq AV \subseteq V$$

, per induzione $A^K V \subseteq V$.
Sia $z_0 \in V$ allora la curva integrale passante per z_0 è :

$$t \mapsto e^{tA} \; z_0 = \sum_{0}^{+\infty} \frac{t^K A^k z_0}{k!} \in V$$

quindi V è invariante per il flusso.
Supponiamo invece che V sia invariante per il flusso . Sia $z_0 \in V$, sappiamo che $e^{tA} z_0 \in V \; \forall t \in \mathbb{R}$. Per la linearità di V abbiamo che $\frac{1}{t}(e^{tA}z_0 - z_0) \in V \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(e^{tA}z_0 - z_0) = \\
&= \frac{1}{t}\left(z_0 + tAz_0 + \frac{t^2A^2z_0}{2!} + \frac{t^3A^3z_0}{3!} + \dots - z_0\right) \\
&= Az_0 + \frac{tA^2z_0}{2!} + \frac{t^2A^3z_0}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

quest'ultima seria converge **uniformemente** in t sui compatti di $\mathbb{R}$, quindi la somma della serie è una funzione continua di t.
Segue che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{tA}z_0 - z_0) = Az_0$$

Ma siccome $\frac{1}{t}(e^{tA}z_0 - z_0) \in V \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ segue dalla chiusura di V (V sottospazio vettoriale) che $Az_0 \in V$ □

Consideriamo ora $\dot{z} = Az$ con A matrice diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. Allora potremmo scrivere

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow e^{tA} = P\ diag(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\ P^{-1}$$

Ma gli autovalori e la matrice P generalmente sono complessi mentre noi vogliamo studiare il ritratto in fase di $\mathbb{R}^n$ Osservazione :

$$Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

Otteniamo quindi :

Autovalori di A	$\overbrace{\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k}^{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}, \overbrace{\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n}^{\in\mathbb{R}}$
Basi di autovettori di A	$\overbrace{u_1, \overline{u}_1, \dots, u_k, \overline{u}_k}^{\in\mathbb{C}^{\ltimes}\setminus\mathbb{R}^n}, \overbrace{u_{2k+1}, \dots, u_n}^{\in\mathbb{R}^n}$

Proposizione. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ allora esiste una decomposizione in spazi invarianti di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n =< v_1, w_1 > \oplus \dots \oplus < v_k, w_k > \oplus < \mu_{2k+1} > \oplus \dots \oplus < \mu_n >$$

di dimensione 1 o 2 .
Inoltre

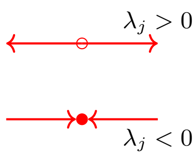
- ⋆ La restrizione di e^{tA} su sottospazi di dimensione 1 è una dilatazione di fattore $e^{\lambda_i t}$ con $\lambda_i$autovalore associato

- ⋆ La restrizione di e^{tA} (del flusso) su sottospazi di dimensione 2 è simile a

$$e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & \sin(\beta_i t) \\ -\sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix}$$

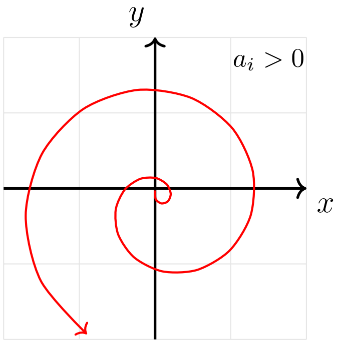
  Quindi una composizione di rotazione e dilatazione , dove $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ è l'autovalore associato

Di conseguenza le orbite sui sottospazi di dimensione 1 sono semirette per $\lambda_i \neq 0$

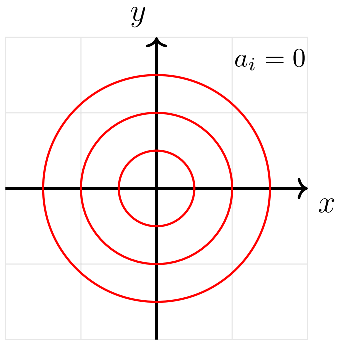


Sia $\dot{z} = Az, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ classifichiamo il sistema a seconda degli autovalori di A che indicheremo con λ_1, λ_2

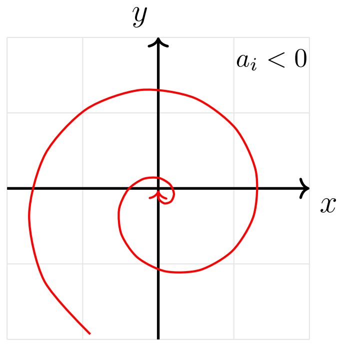
- $\star$ Autovalori complessi coniugati



Fuoco instabile

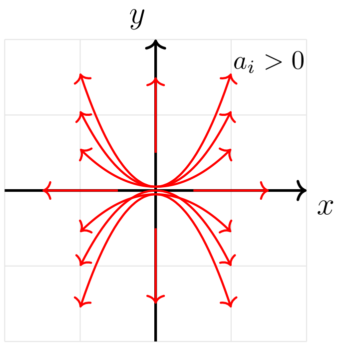


Centro

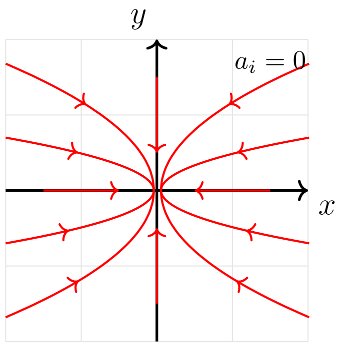


Fuoco stabile

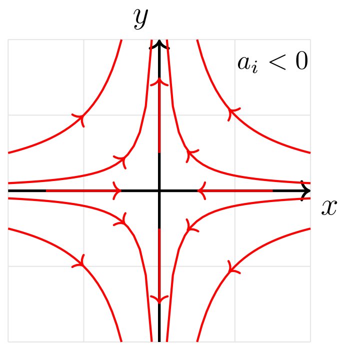
- $\star$ Autovalori reali distinti e non nulli



Nodo instabile , $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



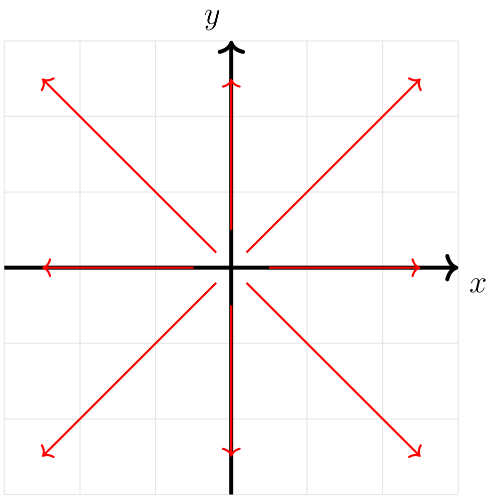
Nodo Stabile $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



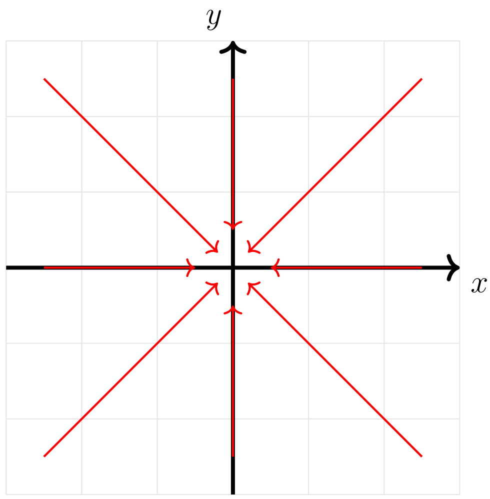
Sella $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

NB : le orbite non toccano mai l'origine poichè essa è un equilibrio

- $\star$ Autovalori coincidenti reali : $\lambda_1 = \lambda_1 \neq 0$

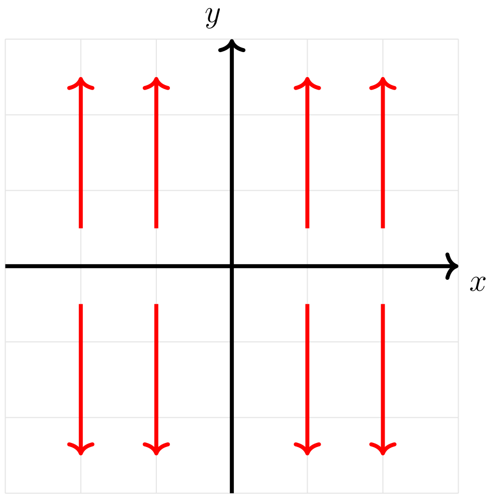


Nodo a stella instabile $\lambda_2 > 0$

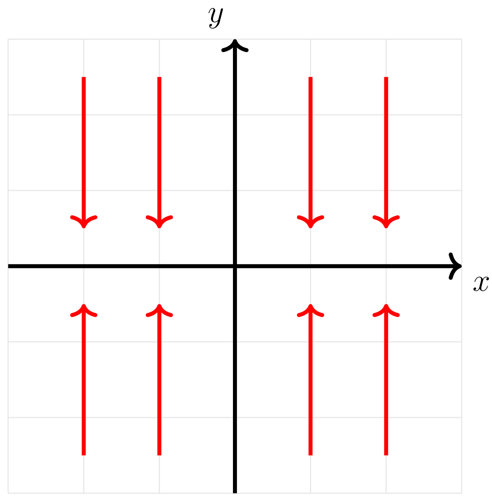


Nodo a stella stabile $\lambda_2 < 0$

- ⋆ Un autovalore nullo e l'altro no : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$



Nodo a pettine instabile $\lambda_2 > 0$



Nodo a pettine stabile $\lambda_2 < 0$

NOTA BENE in tutti questi casi i disegni sono stati tracciati rispetto nella base degli autovettori. e orbite nella base canonica sono trasformate per deformazioni affini

4.4 Sistemi lineari diagonalizzabili

Consideriamo il sistema lineare $\dot{z} = Az \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. Abbiamo visto una decomposizione in sottospazi invarianti

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{< v_1, w_1 > \oplus \cdots \oplus < v_k, w_k >}_{\lambda_1,\overline{\lambda_1} \quad \dots\lambda_k,\overline{\lambda_k}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \oplus \underbrace{< u_{2k+1} > \oplus \cdots \oplus < u_n >}_{\lambda_{2k+1},\dots,\lambda_n \quad \in\mathbb{R}}$$

Ora raggruppiamo i sotto spazi in questa decomposizione secondo il segno di

$$Re(\lambda_i) = E^c \oplus E^s \oplus E^u$$

- ⋆ E^s := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) < 0$. sottospazio **STABILE**
- ⋆ E^c := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) = 0$. sottospazio **CENTRALE**
- ⋆ E^u := somma diretta dei sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2 associato ad autovalori con $Re(\lambda_i) > 0$. sottospazio **INSTABILE**

Poichè il sistema è lineare , una soluzione qualsiasi si può decomporre come somma di una componente E^s , una componente E^c e una componente E^u (eventualmente nulle)

4.5 Relazione tra sistemi non lineari e i loro linearizzati

Dato $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale liscio , $\overline{z}$ un equilibrio. Si dice che $\overline{z}$ è:

- ⋆ **Iperbolico** : se tutti gli autovalori di $Jx(\overline{z})$ hanno **parte reale diversa da zero**
- ⋆ **Ellittico** : se tutti gli autovalori di $Jx(\overline{z})$ hanno **parte reale uguale da zero**

Definizione 4.4. (Omeomorfismo)
Siano $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Una mappa $f : \Omega \to \Omega'$ si dice *omeomorfismo* se è continua , invertibile e con inversa continua. Se esiste un omeomorfismo $\Omega \to \Omega'$ i due insiemi si dicono omeomorfi

Teorema 4.1: Hartman-Grobbman

Se $\overline{z}$ è un *equilibrio iperbolico* di X allora esiste un intorno dell'equilibrio in cui il ritratto di fase di X è omeomorfo al ritratto di fase del sistema linearizzato

$$\dot{z} = Dx(\overline{z})(z - \overline{z})$$

Se vi sono autovalori con parte reale nulla . i termini non lineari giocano un ruolo determinante e il risultato del teorema non vale più.
Un risultato di questo tipo per i sistemi non lineari è il Teorema della varietà stabile .
Supponiamo che X sia un campo vettoriale completo , sia

$$t \mapsto z(t; z_0)$$

la soluzione massimale (globale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Data $\overline{z}$ un'equilibrio definisco

$$\varepsilon^s(\overline{z}) = \left\{ z_0 \in \Omega : \lim_{t \to +\infty} z(t; z_0) = z \right\} \quad \text{Varietà } \textbf{STABILE} \text{ (Arrivano all'equilibrio)}$$

$$\varepsilon^u(\overline{z}) = \left\{ z_0 \in \Omega : \lim_{t \to -\infty} z(t; z_0) = z \right\} \quad \text{Varietà } \textbf{INSTABILE} \text{ (Provengono dall ' equilibrio)}$$

Questi insieme sono ben definiti ma non disgiunti ($\overline{z} \in \varepsilon^s, \overline{z} \in \varepsilon^u$).
Inoltre $\varepsilon^s, \varepsilon^u$ sono invarianti rispetto al flusso di X poichè sono unioni di orbite

Teorema 4.2: della varietà iperbolica

Se $\overline{z}$ è un equilibrio iperbolico di un campo vettoriale completo $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ allota $\varepsilon^s(\overline{z}), \varepsilon^u(\overline{z})$ sono sottovarietà immerse di $\mathbb{R}^n$.
Inoltre lo spazio tangente a $\begin{cases} \varepsilon^s(\overline{z}) \\ \varepsilon^u(\overline{z}) \end{cases}$ in $\overline{z}$ è il sottospazio $\begin{cases} E^s \; stabile \\ E^u \; instabile \end{cases}$ del sistema linearizzato di X in $\overline{z}$

5 Flusso e coniugazione di campi vettoriali

5.1 Flusso

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale liscio e completo. Dato $z_0 \in \Omega$ indichiamo con $t \mapsto z(t, z_0)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Definizione 5.1. (Flusso di una campo vettoriale)
ll flusso di un campo vettoriale completo $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è la mappa $\Phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ definita da

$$\Phi^X(t, z_0) := z(t, z_0) \;\; \forall (t, z_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

Si chiama mappa al tempo t del flusso di X la mappa $\Phi_t^X : \Omega \to \Omega$ definita da

$$\Phi_t^X := \Phi^X(t, z_0) := z(t, z_0) \;\; \forall, z_0 \in \Omega$$

Ill flusso Φ^X esiste poichè la soluzione massimale del problema di Caucht esiste ed è unica.
Per ogni campo vettoriale X liscio e completo , il flusso di $\Phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ è una mappa liscia. Inoltre anche $\Phi_t^X : \Omega \to \Omega$ è una mappa liscia $\forall t \in \mathbb{R}$ (deriva dal teorema delle dipendenza continua)

5.1.1 Proprietà del flusso

1. $$\Phi_0^x = Id_\Omega$$
2. $$\forall t \in R, s \in \mathbb{R} \;\; \Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$$
3. $$\forall t \in R \;\; \Phi_t^X \text{ e' invertibile e } (\Phi_T^X)^{-1} = \Phi_{-t}^X$$
4. $$\Phi_t^X : \Omega \to \Omega \;\; \text{e' un diffeomorfismo } \forall t \in R$$

Dimostrazione. (proprietà del flusso)

1. $$\Phi_0^X(z_0) = z(0, z_0) = z_0 \;\; \forall z_0 \in \Omega$$
2. Dato $z_0 \in \Omega$, considero le due funzioni $\mathbb{R} \to \Omega$ date da
$$c_1(t) := \Phi_{t+s}^x(z_0) = z(t+s, z_0)$$
$$c_2(t) = \Phi_t^X(\Phi_s^X(z_0)) = z(t, z(s, z_0))$$
Entrambe sono soluzioni dell'ODE $\dot{z} = X(z)$. Inoltre
$$c_1(o) = z(s, z_0) = c_2(t)$$
Per unicità segue
$$c_1(t) = c_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
3. Prendendo la $s = -t$ in 2 si ha che
$$\Phi_t^X \circ \Phi_{-t}^x = \Phi_0^X Id_\Omega$$

□

5.2 Coniugazione

Siano $\Omega, \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ due insieme aperti. Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{X} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ due campi vettoriali completi e sia $\zeta : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ un diffeomorfismo (in sostanza un cambio di coordinate).

Definizione 5.2. Si dice che i campi $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{X} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sono coniugati dal diffeomorfismo $\zeta : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ se le curve integrali di $\widetilde{X}$ sono tutte e sole le immagini mediante ζ delle curve integrali di X e viceversa

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\Phi_t^X"'] & \widetilde{\Omega} \arrow[d, "\Phi_t^{\widetilde{X}}"] \\ \Omega \arrow[r, "\zeta"] & \widetilde{\Omega} \end{tikzcd}$$

Proposizione 1. Due campi vettoriali completi $X, \widetilde{X}$ sono coniugati dal diffeomorfismo ζ se e solo se

$$\widetilde{X} = (D(\zeta)X) \circ \zeta^{-1}$$

Si dice che il membro di destra è il **PUSH-FOWARD** di X mediante

$$\zeta_* X = \zeta_\# X := (D(\zeta)X) \circ \zeta^{-1}$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) \in \Omega$ una curva integrale di X, I campo X e $\widetilde{X}$ sono coniugati se e solo se , per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ di X $t \mapsto \zeta(z(t))$ è una curva integrale di $\widetilde{X}$ questo significa che

$$\begin{aligned} &\widetilde{X}(\zeta(z(t))) = \frac{d}{dt}(\zeta(z(t))) \\ &\qquad = (D\zeta)(z(t))\dot{z}(t) = (D\zeta)(z(t)X(z(t)) \\ &\textit{Posto } w = \zeta(z(t)) \\ &\widetilde{X}(w) = (D\zeta)(\zeta^{-1}(w))X(\zeta^{-1}(w)) \end{aligned}$$

□

Proposizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto $X : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$un campo vettoriale associato ad un sistema del secondo ordine $\left(X(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ y(x,v) \end{pmatrix} \right)$. Sia $\zeta : \omega \times \mathbb{R}^n \to \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo del tipo

$$\zeta(x,v) = \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x,v) \end{pmatrix}$$

allora $\zeta_\# X$ è ancora associato ad un sistema del secondo ordine se e solo se

$$G(x,v) = (DF(x))v$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) \in \Omega$ una curva integrale di X , definiamo $\widetilde{x}(t) = F(x(t))$ *e* $\widetilde{v}(t) = G(x(t), v(t))$.

Affinchè $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ risolvano $\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = \widetilde{v} \\ \dot{\widetilde{v}} = \widetilde{y}(\widetilde{x}, \widetilde{v}) \end{cases}$ è necessario e sufficiente che $\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{v}$, ma questo significa che

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}(t) &= \frac{d}{dt}F(x(t)) \\
&= (DF(x(t)))\dot{x}(t) \\
&= DF(x(t))v(t) \\
\widetilde{v}(t) &= G(x(t), v(t)) \\
\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{v} &\iff G(x,v) = (DF(x))v
\end{aligned}
$$

□

Teorema 5.1: Rettificazione locale

Sia $X\Omega \to \mathbb{R}^n$ una campo vettoriale $\bar{z}$ un punto tale che $X(\bar{z}) \neq 0$ (non è punto di equlibrio) allora esiste un diffeomorfismo , definito localmente in un intorno di $\bar{z}$, tale che il campo sia coniugato a

$$
\begin{cases}
\dot{u}_1 = 0 \\
\vdots \\
\dot{u}_{n-1} = 0 \\
\dot{\theta} = 1
\end{cases}
$$

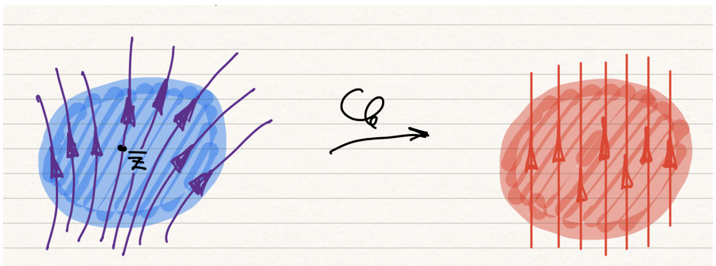


Figura 1: Rettificazione locale

Teorema 5.2: Riparametrizzazione in tempo

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale , sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione liscia tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, e si $\widetilde{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito come

$$
\widetilde{X}(z) = f(z)X(z)
$$

- ⋆ Se $f > 0$ allora X e $\widetilde{X}$ hanno lo stesso ritratto di fase
- ⋆ Se $f < 0$ allora X e $\widetilde{X}$ hanno lo stesso ritratto di fase , tranne che le orbite sono orientate in versi opposti

6 Integrali primi

Definizione 6.1. (Integrale primo)
una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice integrale primo di X se tutti gli insiemi di livello di f sono invarianti.
Equivalentemente f è un integrale primo se di X se e solo se è costante lungo le soluzioni (curve integrali) $\dot{z} = X(z)$ cioè se e solo se

$$f \circ \phi_t^X = f \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definizione 6.2. (Derivata di Lie)
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile , si definisce **derivata di Lie** di f lungo X

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_x f : \Omega \to \Omega \\ &\mathscr{L}_x f = X(z) \cdot \nabla f(z) \\ &\quad\;\; = \sum_{j=0}^{n} X_j(z)\, \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \end{aligned}$$

Proposizione. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile

1. Per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ di X si ha

$$\frac{df(z(t))}{dt} = \mathscr{L}_x f(z(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   ovvero

$$\frac{d(F \circ \Phi_t^x)}{dt} = \mathscr{L}_x f \circ \Phi_t^X \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. F è integrale primo di X $\iff$ $\mathscr{L}_x f = 0$

Dimostrazione.

1.

$$\frac{df(z(t)}{dt} = \nabla f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = \nabla f(z(t)) \cdot X(z) = \mathscr{L}_x f(z(t))$$

2.

$$\begin{aligned} f \text{ è integrale primo } &\iff t \in \mathbb{R} \mapsto f \circ \Phi_t^x \text{ è costante} \\ &\iff (\mathscr{L}_x f) \circ \Phi_t^x = \frac{d(f \circ \Phi_t^x)}{dt} = 0 \end{aligned}$$

□

Definizione 6.3. (Funzionalmente indipendenti)
Si dice che gli integrali primi

$$f_1 : \Omega \to \mathbb{R}, \dots, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$$

sono *funzionalmente indipendenti* se per ogni $z \in \Omega$ gradienti

$$\nabla f_1(z), \dots, \nabla f_k(z)$$

sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^n$

Proposizione. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale , $\bar{x} \in \Omega$ un *equilibrio attrattivo.* Allora ogni integrale primo (continuo) di X è costante in un intorno di $\bar{z}$

Dimostrazione. Per definizione di equilibrio attrattivo , esiste un intorno V di $\bar{z}$ tale che per ogni curva integrale $t \mapsto z(t)$ con $z_0 = z(0) \in V$ valga

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = \bar{z}$$

Sia f un integrale primo continuo di $\bar{z}$. Allora $f(z(t)) = \bar{z} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, dunque per continuità

$$f(\bar{z}) = f(\lim_{t \to \infty} z(t)) = \lim_{z \to +\infty} f(z(0)) = f(z_0)$$

Poichè z_0 può essere preso arbitrariamente in V , segue che f è costante in V $\square$

7 Stabilità

Definizione 7.1. Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale , , $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio. Si dice che $\bar{z}$ è :

- ⋆ **Stabile** (secondo lyapunov) :
  Per ogni intorno U di $\bar{z}$ esiste un intorno U_0 *di* $\bar{z}$ tale che
  $$\forall t \geq 0 \ , \ \Phi_t^X(U_0) \subseteq U$$
- ⋆ **Stabile per tutti i tempi** :
  se per ogni intorno U di $\bar{z}$ esiste un intorno U_0 *di* $\bar{z}$ tale che
  $$\forall t \ , \ \Phi_t^X(U_0) \subseteq U$$
- ⋆ **Asintoticamente stabile** :
  se è stabile e attrattivo
- ⋆ **Instabile** :
  se non è stabile

Note bene : Esistono equilibri attrattivi non stabili

Teorema 7.1: Secondo teorema di Lyapunov

Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio , $W \subseteq \Omega$ un intorno di $\bar{z}$ e $F : W \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con **minimo stretto in** $\bar{z}$:

1. Se $\mathcal{L}_X F \leq 0$ in W , allora $\bar{z}$ è **stabile**
2. Se $\mathcal{L}_X F = 0$ in W , allora $\bar{z}$ è **stabile per tutti i tempi**
3. Se $\mathcal{L}_X F < 0 \ in \ W \setminus \{\bar{z}\}$ in W , allora $\bar{z}$ è **asintoticamente stabile**

$\mathcal{W}$ si dice funzione di Lyapunov. L'esistenza di una funzione di Lyapunov è una condiziona sufficiente ma non necessaria per la stabilità.

Dimostrazione. A meno di una costante posso supporre $F(\bar{z}) = 0$ poichè per ipotesi la funzione di Lyapunov presenta un minimo stretto in $\bar{z}$ dunque $F > 0 \forall z \in W \setminus \{\bar{z}\}$

1. Devo dimostrare che $\bar{z}$ è stabile , cioè
$$\forall \sigma > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ t.c \ \forall t \geq 0 \tag{2}$$
$$\Phi_t^X(B_\sigma(\bar{z})) \subseteq B_\varepsilon(\bar{z}) \tag{3}$$
Fisso $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo da avere $B_\varepsilon \subseteq W$. Per il teorema di Weierstraß esiste
$$\alpha := \min_{z \in \partial B_\varepsilon(\bar{z})} F(z) > 0$$
Inoltre poichè F è continua (quindi per definizione di continuità), esiste $\sigma > 0$ - che possiamo prendere minore di ε - tale che
$$F(z) \leq \frac{\alpha}{2} \quad \forall z \in B_\sigma(\bar{z})$$
Voglio arrivare a dimostrare che questo particolare valore di σ soddisfa (3) $\forall t \geq 0$: Procediamo per assurdo , supponiamo che esista un valore $t_0 \geq 0$ tale che
$$\Phi_t^X(B_\sigma(\bar{z})) \not\subseteq B_\varepsilon(\bar{z})$$

Ciò significa che esiste $z_0 \in B_\sigma(\bar{z})$ tale che

$$\Phi^X_{t_0}(z_0) \notin B_\varepsilon(\bar{z})$$

La funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) := \Phi^X_t(z_0)$ è una soluzione del sistema $\dot{z} = X(z)$ che parte dal dato iniziale $z_0 \in B_\sigma(\bar{z}) \subseteq B_\varepsilon(\bar{z})$ e , al tempo t_0 assume valore non contenuto in $B_\varepsilon(\bar{z})$. Per continuità esistera un valore $t_1 \in [0, t_0]$ tale che $t_1 \in \partial B_\varepsilon(\bar{z})$. Avremmo allora

$$F(z(t_1)) \geq \alpha \quad F(z(0)) = F(z_0) \leq \frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

Inoltre sappiamo che $\frac{d}{dt}F(z(t)) = \mathcal{L}_X F(z(t)) \leq 0 \quad \forall\{t : z(t) \in W\}$. Ciò contraddice (4)

2. Dimostrazione simile alla precedente

3. Per quanto appena dimostrato l'ipotesi $\mathcal{L}_X F < 0 \quad W \setminus \{\bar{z}\}$ implica che $\bar{z}$ è un punto di equilibrio stabile , occorre dimostrare che $\bar{z}$ è attrattivo. Prendiamo la palla $\overline{B}_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq W$ ed un numero postivo $\sigma > 0$ tale che

$$\Phi^X_t(B_\sigma(\bar{z})) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq W \quad \forall t \geq 0 \tag{5}$$

$\sigma > 0$ esiste poichè $\bar{z}$ è stabile. Prendiamo un qualsiasi $z_0 \in B_\sigma(\bar{z})$.
Sia $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^X_t(z_0)$ la soluzione di $\dot{z} = X(z)$ generata dal dato iniziale z_0.Dobbiamo dimostare che

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = \bar{z}$$

Procediamo per assurdo e supponiamo che la condizione di attrattivita non sia soddisfatta. Per definizione di limite , ciò significa che esistono $\eta > 0$ ed una succesione di tempi $t_k \to \infty$ tale che

$$|z(t_k) - \bar{z}| < \eta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Pero la condizione (5) implica che z(t) assumo valori nella palla di raggio epsilon , quindi possiamo affermare che z(t) converge ad un limite $z_\infty \in \overline{B}_\varepsilon(\bar{z})$. Vogliamo dire che $z_\infty = \bar{z}$, se dimostriamo ques'ultima condizione avremo ottenuto un assurdo e la dimostrazione sarà completata.
Consideriamo $t \mapsto \Phi^X_t(z_\infty)$, ossia la soluzione generata dal dato iniziale z_∞. per continuità del flusso e di F abbiamo

$$F(\Phi^X_t(z_\infty)) = F(\Phi^X_t(\lim_{k\to\infty} z(t_k))) = \lim_{k\to\infty} F(\Phi^X_t(z(t_k)))$$

e per le proprietà del flusso

$$F(\Phi^X_t(z(t_k))) = \lim_{k\to\infty} F(\Phi^X_t(\Phi^X_{t_k}(z_0))) = \lim_{k\to\infty} \Phi^X_{t+t_k}(z_0) \quad \forall t \geq 0$$

La funzione $s \mapsto \Phi^X_s(z_0)$ è monotona poichè

$$\frac{d}{ds}F(\Phi^X_s(z_0)) = \mathcal{L}_X F(\Phi^X_s(z_0)) \geq 0$$

dunque ammette limite anche quando $s \to +\infty$ di conseguenza possiamo dire che

$$F(\Phi^X_t(z_\infty)) = \lim_{s\to+\infty} F(\Phi^X_s(z_0)) \quad \forall t \geq 0$$

In particolare , F è costante sulla soluzione uscente dal dato iniziale z_∞. Tuttavia sappiamo che $\mathcal{L}_X F < 0 \ in \ W \setminus \{\bar{z}\}$, dunque se z_∞ fosse diverso dall'equilibrio $\bar{z}$ allora F sarebbe strettamente decrescente lungo la soluzione uscente da z_∞ , poicgè questo non è il caso deve essere $z_\infty = \bar{z}$, cio completa la dimostrazione

□

Teorema 7.2: Principio di La Salle - Krasovski

Sia $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ un equilibrio , $W \subseteq \Omega$ un intorno di $\bar{z}$ e $F : W \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con **minimo stretto in** $\bar{z}$. Se

- ⋆ Se

$$\mathcal{L}_X W \leq 0 \; in \; W$$

- ⋆ Nessun orbita , eccetto $\bar{z}$ è contenuta per intero in $\mathscr{L}_X W = 0$ (Insieme di livello) [1]

[1] Dato una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice insieme di livello di f associato a c l'insieme $f^{-1}(c) = \{x \in A | f(x) = c\}$