

# Tirocinio

Mombelli Luca

5 gennaio 2026

## Indice

<b>1 Teorema di Nagumo</b>	<b>2</b>
<b>2 Control Barrier Function</b>	<b>6</b>
<b>A Richiami di Topologia</b>	<b>8</b>
A.1 Parte interna , chiusura ed intorni . . . . .	8
A.2 Spazi Metrici . . . . .	9
A.3 Ricoprimenti . . . . .	9
<b>Bibliografia</b>	<b>10</b>

# 1 Teorema di Nagumo

Introduciamo il Teorema di Nagumo , secondo la formulazione presentata in [1] , che rappresenta una degli elementi fondamentali per trattare le Control Barrier function

**Definizione 1.1.** Sia K un sottoinsieme di uno spazio vettoriale finito dimensionale (oppure di uno spazio normato) X . Diciamo che una funzione  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow X$  è *viable* in K su  $[0, T]$  se

$$\forall t \in [0, T] , \quad x(t) \in K$$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

con  $f : \Omega \subset_{\text{op}} X \rightarrow X$

**Definizione 1.2.** Sia un sottoinsieme di  $\Omega$ . Diciamo che K è *locally viable* sotto f se per ogni condizione iniziale  $x_0 \in K$  , esiste un  $T > 0$  e una soluzione viable su  $[0, T]$  per l'equazione differenziale 1.1 con condizione iniziale  $x_0$

K è (globalmente) viable sotto f se possiamo sempre prendere  $T = \infty$

**Definizione 1.3** (Cono Tangente di Bouligand). Sia X uno spazio normato , K un sottoinsieme non vuoto di X e sia x un elemento di K . Il cono tangente a K in x è l'insieme

$$T_K(x) = \{v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}$$

con  $d_k(x) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$

Una definizione alternativa utilizza le successioni :

v appartiene a  $T_K(x)$  se e solo se esiste una successione  $h_n > 0$   $h_n \rightarrow 0^+$  e una successione  $v_n \in X$  ,  $v_n \rightarrow v$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad x + h_n v_n \in K$$

Il cono tangente a K nel punto x si può anche indicare con  $T(K, x)$ . Osserviamo che se

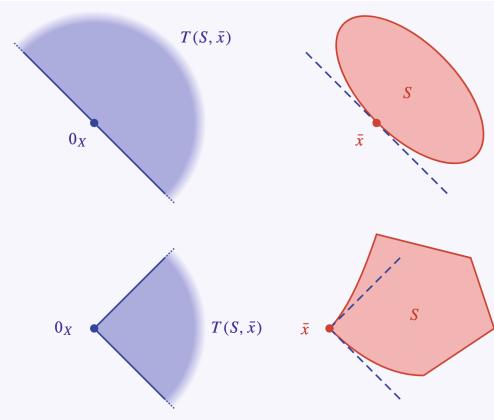


Figura 1: Due esempi di cono tangente ([2])

x è un punto interno dell'insieme K allora  $T_K(x) = X$ . Quindi se l'insieme K è aperto ( $K = K^0$ ) allora  $\forall x \in K , \quad T_k(x) = X$  . Saremmo quindi principalmente interessati a definire il cono tangente per punti appartenenti alla frontiera del'insieme K . È importante sottolineare che può succedere che il cono tangente ad un punto di frontiera sia tutto lo spazio .

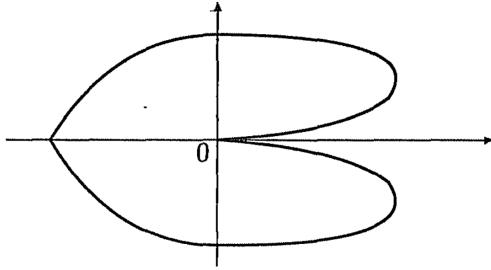


Figura 2: Insieme  $K$  tale che  $T_k(0) = X$

**Lemma 1.1.** Sia  $x : [0, T] \rightarrow K$  una funzione differenziabile e viable , allora

$$\forall t \in [0, T] \quad x'(t) \in T_K(x)$$

**Definizione 1.4** (Viability Domain). Sia  $k$  un sottoinsieme di  $\Omega$ . Diciamo che  $k$  è un viability domain della mappa  $f : \Omega \rightarrow X$  se

$$\forall x \in X \quad f(x) \in T_K(x)$$

### Teorema 1.1 – Nagumo

Supponiamo che il sottoinsieme  $K$  sia localmente compatto e che la funzione  $f : K \rightarrow X$  sia continua .

Allora  $K$  è *localmente viable* sotto  $f$  se e solo  $K$  è un *viability domain* della mappa  $f$

**Esempio 1.1.** Sia  $K \subset \mathbb{R}$  ,  $K = [-2, 2]$  e sia  $\dot{x}(t) = x(t)$ .  $K$  è un intervallo chiuso e limitato , quindi compatto , inoltre la funzione  $x$  è continua , quindi le ipotesi del teorema sono rispettate . Controlliamo se  $K$  è un viability domain . Sappiamo che se  $x \in (2, 2)$  allora  $T_K(x) = \mathbb{R}$  , analizziamo ora i due punti di frontiera :

- \* Se  $x = 2 \rightarrow f(x) = 2$  . Il cono tangente rappresenta le direzioni in cui posso muovermi senza uscire da  $K$  . In questo caso posso unicamente muovermi verso sinistra quindi ottengo  $T_K(2) = (-\infty, 0]$

- \* Facendo un ragionamento simile a quello precedente ottengo  $T_K(-2) = [0, +\infty)$

Vediamo che per entrambi i punti di frontiera otteniamo  $f(x) \notin T_K(x)$  quindi  $K$  non è viability domain per  $f$  .

Prendiamo , ora l'intervallo  $K = (-\infty, 0]$  , in questo caso il sottoinsieme non è compatto ma localmente compatto , poichè è un sottoinsieme di un insieme localmente compatto , lo spazio euclideo .

Come prima se prendiamo  $x \in (-\infty, 0)$  otteniamo  $T_k(x) = \mathbb{R}$  . Passiamo ora a studiare il punto  $x = 0$  per cui otteniamo  $f(0) = 0$  , invece il cono tangente nel punto zero è  $T_k(0) = (-\infty, 0]$  . Possiamo osservare che  $f(0) \in T_x(0)$  e quindi in generale  $K$  è un viability domain e quindi locally viable

**Esempio 1.2.** Sia  $K \subset \mathbb{R}^2$  ,  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 5 \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) \leq 0\}$  e prendiamo  $f(x, y) = (x, y^2)$ .  $K$  è un sottoinsieme compatto e  $f$  è un campo vettoriale continuo . Sappiamo che per  $x \in K^0 \rightarrow T_K(x) = \mathbb{R}^2$  . Occupiamoci ora dei punti  $x \in \partial K$  , quindi che appartengono alla curva di livello  $f^{-1}(5) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 5\}$ . In questo caso la curva è differenziale e possiamo definire il cono tangente attraverso rette tangentи infatti

$$T_k(x_0) = \{v \in X | g(x_0) + \nabla g(x_0) \cdot v \leq 0\}$$

Oppure possiamo utilizzare il fatto che il gradiente di  $g$  sia sempre perpendicolare ad una curva di livello di  $g$  e che esso rappresenti la direzione di massima crescita

$$T_k(x_0) = \{v \in X | \nabla g(x_0) \cdot v \leq 0\}$$

. Proviamo a calcolare la condizione di appartenenza al cono tangente

$$\begin{aligned}\nabla g(x)f(x) &= (2x, 2y)(x, y^2)^T \\ &= 2x^2 + 2y^3 \leq 0 \\ y &\leq -x^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

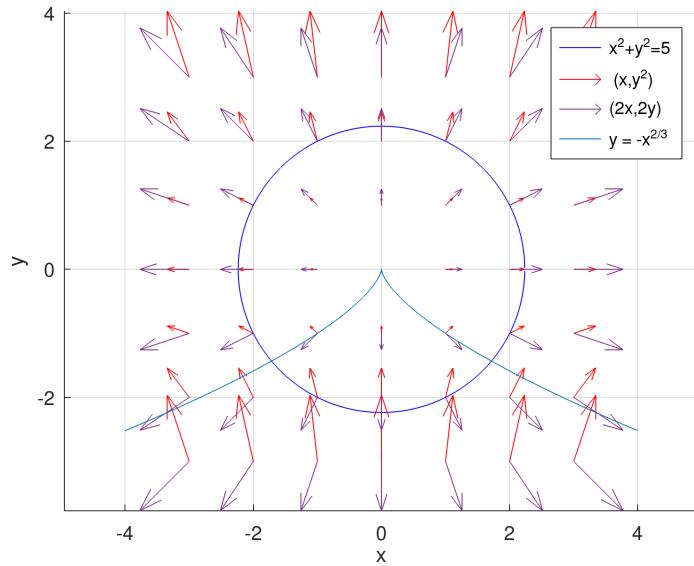


Figura 3: Esempio 1.2(a)

Infatti usando come punto  $x_0 = (0, -\sqrt{5})$

$$\begin{aligned}f(x_0) &= (0, 5) \\ g(x_0) &= 0 \\ \nabla g(x_0) &= (0, 2\sqrt{5}) \\ \nabla g(x_0) \cdot f(x_0) &= 10\sqrt{5} > 0 \rightarrow f(x_0) \notin T_k(x_0)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $K$  non è un viability domain per  $f$ , allora  $K$  non potrà essere locally viable sotto  $f$ .

Proviamo ora a prendere lo stesso insieme  $K$  ma il campo vettoriale  $f(x, y) = (-x, -y^3)$ . Vediamo se questo campo vettoriale rispetta la condizione di appartenenza al Cono tangente

$$\begin{aligned}\nabla g(x)f(x) &= (2x, 2y)(-x, -y^3)^T \\ &= -2x^2 - 2y^4 \leq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $f(x) \in T_k(x) \forall x \in K$ , quindi  $K$  è un viability domain per  $f$  e per il teorema d Nagumo  $K$  è locally viable sotto  $f$

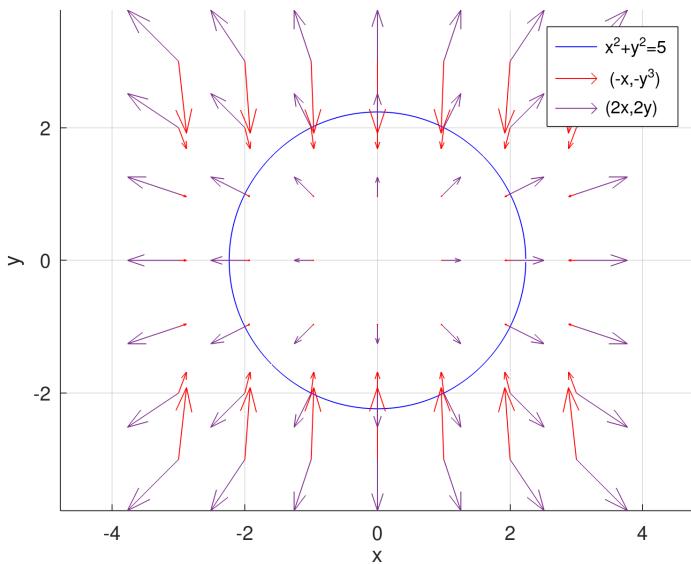


Figura 4: Esempio 1.2 (b)

### Teorema 1.2 – Viability

Consideriamo un sottoinsieme  $K$  di uno spazio finito dimensionale  $X$  e una mappa continua  $f : K \rightarrow X$ .

Se  $K$  è un viability domain , allora per ogni condizione iniziale  $x_0 \in K$  esiste un  $T$  positivo e una soluzione viable su  $[0, T]$  per l'equazione differenziale 1.1 con C.I  $x_0$  tale che

$$\begin{cases} T = +\infty \\ T < +\infty \quad e \quad \limsup_{t \rightarrow T^-} \|x(t)\| = \infty \end{cases}$$

Se abbiamo a disposizione ulteriori informazioni sulla funzione  $f$  potremmo escludere a priori il caso in cui  $\lim_{t \rightarrow T^-} \|x(t)\| = \infty$ .

### Teorema 1.3

Consideriamo un sottoinsieme  $K$  di uno spazio vettoriale finito dimensionale  $X$  e una mappa  $f : K \rightarrow X$ . Supponiamo che  $f$  sia continua , che

$$\exists c > 0 \ t.c \ \forall x \in K , \|f(x)\| \leq c(\|x\| + 1)$$

e che  $K$  sia un viability domani chiuso per  $f$  . Allora  $K$  è viable sotto  $f$  e  $T = \infty$

## 2 Control Barrier Function

Le control barrier function traggono ispirazione dalle control Lyapunov function , che rappresentano l'estensione al controllo delle funzioni di Lyapunov . Allo stesso modo le CBF sono l'estensione al controllo della funzioni di barriera , utilizzate in ottimizzazione. Lo scopo principale delle CBF è definire un sottoinsieme invariante in avanti , ossia un insieme per cui ogni traiettoria che parte da esso rimane al suo interno per ogni tempo futuro . Inoltre sono molto utili nella sintesi di controllori che ci permettono di rimanere nel sottoinsieme.

Consideriamo il sistema dinamico non lineare affine al controllo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.1)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$  ,  $iu \in \mathbb{R}^m$  sono rispettivamente lo stato e l'input del sistema . Le funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  sono localmente lipschiziane .

Consideriamo il sottoinsieme  $S$  , definito come l'insieme di sopralivello di una funzione  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \geq 0\} \quad (2.2)$$

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) > 0\} \quad (2.3)$$

$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0\} \quad (2.4)$$

**Definizione 2.1.** La funzione  $h \in \mathbb{C}^1$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una control barrier function , per il sistema 2.1 , sull'insieme S , definito da 2.2 - 2.4 , se esiste una funzione classe  $\kappa_\infty$  estesa <sup>1</sup> tale che :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathbb{R}^m} [L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x))] \quad &\forall x \in S \\ \sup_{u \in \mathbb{R}^m} [\nabla h(x)^T f(x) + \nabla h(x)^T g(x)u \geq -\alpha(h(x))] \quad &\forall x \in S \end{aligned} \quad (2.5)$$

Consideriamo ora l'insieme di tutti i valori di input che rendono il sottoinsieme S invariante :

$$K_{cbf}(u) = \{u \in \mathbb{R}^m | L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x))\}$$

### Teorema 2.1

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  l'insieme di sopralivello di una funzione differenziabile continua  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  , se h è una control barrier function su D e  $\nabla h(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial S$  , allora un qualsiasi controllore lipschiziano u tale che  $u(x) \in K_{cbf}$  per il sistema 2.1 rende S invariante (in avanti)

*Dimostrazione.* Per ogni  $x \in \partial S$ abbiamo che  $L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x)) = 0$ . Possiamo allora definire il cono tangente come  $T_S(x) = \{v \in \mathbb{R}^n | \nabla h(x)v \geq 0\}$ . Sappiamo che  $\forall x \in S^0 \quad T_S(x) = \mathbb{R}^n$  , proviamo a vedere ora i punti appartenti alla frontiera

$$\begin{aligned} \nabla h(x)(f(x) + g(x)u) &\geq 0 \\ \nabla h(x)f(x) + \nabla h(x)g(x)u &\geq 0 \\ L_f h(x) + L_g h(x)u &\geq 0 \end{aligned}$$

allora K è viability domain e quindi locally viable sotto f . Ora abbiamo ipotizzato che f , g , u siano localmente lipschiziane soddisfando così il teorema di esistenza e unicità. Sapendo che la soluzione esista ed è unica le due condizioni di viable e invarianza corrispondono , abbiamo così dimostrato ch es è invariante  $\square$

<sup>1</sup>Per  $a \in R^+$  , una funzione continua  $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $\kappa$  se è strettamente crescente e  $\alpha(0) = 0$ . Una funzione continua  $\alpha : (-b, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in R^+$  è una funzione di classe  $\kappa$  estesa se è strettamente crescente e  $\alpha(0) = 0$ . Inoltre , se  $a = b = \infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$  , allora viene chiamata funzione di classe  $\kappa_\infty$  estesa

Inoltre le control barrier function forniscono una condizione necessaria e sufficiente per l'invarianza in avanti se il sottinsieme  $S$  è compatto

### Teorema 2.2

Sia  $S$  un insieme di sopralivello compatto di una funzione  $h \in C^1$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\nabla h(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial S$ . Se esiste una legge di controllo  $u = k(x)$  che rende il sottoinsieme  $S$  invariante, allora  $h|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$  è una control barrier function su  $C$

*Dimostrazione.* Sia  $h \in C^1$ ,  $h|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Per ogni  $r \geq 0$  l'insieme  $\{x \mid 0 \leq h(x) \leq r\}$  è un sottoinsieme compatto di  $C$ . Definiamo una funzione  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \infty$  con

$$\alpha(r) = - \inf_{\{x \mid 0 \leq h(x) \leq r\}} L_f h + L_g h u$$

Usando la compattezza del sottoinsieme e la continuità di  $L_f h + L_g h u$ ,  $\alpha$  è una funzione ben definita, crescente che soddisfa

$$L_h f + L_g h u \geq -\alpha(h(x))$$

Per il Teorema di Nagumo 1 l'invarianza di  $C$  è equivalente a :

$$L_h f + L_g h u \geq 0 \quad \forall x \in \partial S$$

, ciò implica che  $\alpha(0) \leq 0$ . Possiamo sempre prendere una funzione di classe  $\kappa \hat{\alpha}$  che maggiora  $\alpha$ , facendo così abbiam ottenuto  $L_h f + L_g h u \geq -\hat{\alpha}(h(x))$ .  $\square$

Ora che sappiamo che le CBF forniscono delle condizioni per la sicurezza di un insieme vogliamo trovare un metodo per creare i controlli.

Supponiamo di avere un controllo  $u$  per il sistema dinamico 2.1 e vogliamo che esso garantisca l'invarianza (sicurezza). Supponiamo che  $u \notin K_{cbf}$  per alcune  $x \in R^n$ . Vogliamo modificare questo controllo per assicurare l'invarianza, iniziamo notando che la condizione 2.5 è affine in  $u$ , possiamo allora considerare il seguente problema quadratico

$$\begin{aligned} u(x) &= \underset{u \in U \subseteq \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|u - k(x)\|_2^2 \\ &\text{s.t. } [L_f h(x) + L_g h(x)u] \geq -\alpha(h(x)) \end{aligned}$$

Per questo problema esiste una soluzione  $u^*$  in forma chiusa :

$$u^* = u_{safe} + u_{des}$$

dove

$$u_{safe} = \begin{cases} \frac{\Phi(x, t, u_{des})}{L_g h(x) L_g h(x)^T} L_g h(x)^T & \Phi < 0 \\ 0 & \Phi \geq 0 \end{cases}$$

con

$$\Phi(x, t, u_{des}) \triangleq \nabla h(x)^T f(x) + \nabla h(x)^T g(x)u + \alpha(h(x))$$

Presentiamo ora un esempio di applicazione delle CBF :

**Esempio 2.1.** Vogliamo che un punto materiale si sposti da una posizione iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  fino ad un obiettivo con posizione  $x_g \in \mathbb{R}^2$ , evitando un ostacolo ostacolo, modellizzato tramite una circonferenza di centro  $x_{obs}$  e raggio  $r_{obs}$ .

Iniziamo introducendo la CBF :

$$h(x) = \|x - x_g\| - r_{obs}$$

## A Richiami di Topologia

**Definizione A.1** (Spazio topologico). Sia  $X$  un insieme , una *topoogia* su  $X$  , è una famiglia  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$  (i suoi elementi sono gli aperti di  $X$  ) che soddisfa le seguenti condizioni.

- ★  $\emptyset$  e  $X \in \tau$
- ★ Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto (se  $A_\lambda \in \tau$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$  , allora  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ )
- ★ Intersezione finita di aperti è un sottoinsieme aperto (Se  $A_1, \dots, A_m \in \tau$  allora  $A_1 \cap \dots \cap A_m \in \tau$ )

Un insieme dotato di una topologia viene detto **spazio topologico**

**Esempio A.1.** Su ogni insieme  $X$  ,  $\tau = \{\emptyset, X\}$  è una topologia detta banale od indiscreta. Sull'insieme  $\mathbb{R}$

$$\tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{ ]a, +\infty[ \}$$

è una topologia , topologia inferiore , similmente

$$\tau_\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{ ]-\infty, a[ \}$$

e1 la topologia superiore di  $\mathbb{R}$

Una descrizione esplicita di tutti gli aperti di uno spazio topologico e1 impossibile , la topologia viene in genere descritta assegnando una base per essa

**Definizione A.2.** Sia  $\tau$  una topologia su insieme  $X$  . una sottofamiglia (un insieme )  $B \subset \tau$  si dice una base di  $\tau$  se ogni aperto  $A \in \tau$  può essere scritt ocome unione di elementi d iB

**Teorema A.0.1.** *Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B} \subset P(X)$  una famiglia di suoi sottoinsiemi . Allora esiste una topologia su  $X$  di cui  $\mathcal{B}$  è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni*

- ★  $X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$
- ★ Per ogni coppia  $A, B \in \mathcal{B}$  e per ogni punto  $x \in A \cap B$  esiste  $C \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in C \subset A \cup B$

### A.1 Parte interna , chiusura ed intorni

**Definizione A.3.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $B \subseteq X$ . Si denota con

- ★  $B^0$  l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $B$
- ★  $\overline{B}$  l'intersezione di tutti i chiusi contenenti in  $B$
- ★  $\partial B = \overline{B} - B^0$

L'insieme  $B^0$  viene detto parte interna di  $B$  ed è il più grande aperto contenuto in  $B$  L'insieme  $\overline{B}$  è il più piccolo chiuso contenente  $B$  e viene detto chiusura di  $B$  Il sottoinsieme  $\partial B$  è l'intersezione dei due chiusi  $\overline{B}$  e  $X - B^0$  e viene detto **frontiera** di  $B$   
Osserviamo che un sottoinsieme  $B$  è aperto se e solo se  $B = B^0$  e chiuse se  $B = \overline{B}$

**Definizione A.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x \in X$ . Un sottoinsieme  $U \subset X$  si dice *intorno di  $x$*  se  $x$  è un punto interno di  $U$  , cioè se esiste un aperto  $V$  tale che  $x \in V$  e  $V \subset U$

Indichiamo con  $\mathcal{I}(x)$  la famiglia di tutti gli intorni di  $x$ . per definizione se  $A$  è un sottoinsieme di uno spazio topologico , allora  $A^0 = \{x \in A | A \in \mathcal{I}(x)\}$

**Definizione A.5.** Sia  $x$  un punto di uno spazio topologico  $X$ . Un sottofamiglia  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$  si dice *base locale* oppure un sistema fondamentale di intorni di  $x$  , se per ogni  $U \in \mathcal{I}(x)$  esiste  $A \in \mathcal{J}$  tale che  $A \subset U$

**Esempio A.2.** Sia  $U \in \mathcal{I}(x)$  un intorno fissato . Allora tutti gli intorni di  $x$  contenuti in  $U$  formano un sistema fondamentale di intorni di  $x$

## A.2 Spazi Metrici

**Definizione A.6.** Una distanza si di un insieme  $X$  è un 'applicazione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti proprietà :

1.  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$  e vale  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x=y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in X$  (Disuguaglianza triangolare)

**Esempio A.3.** Su un qualsiasi insieme  $X$  , la funzione

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è una distanza

**Definizione A.7.** Uno **spazio metrico** è una coppia  $(X, d)$  , dove  $X$  è un insieme e  $d$  è una distanza su  $X$

**Definizione A.8.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Il sottoinsieme

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

viene detto palla aperta di centro  $x$  e raggio  $r$

**Definizione A.9** (Topologia indotta da una distanza). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Nella topologia su  $X$  indotta dalla distanza  $d$  , un sottoinsieme  $A \subset X$  è aperto se per ogni  $x \in A$  esiste  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subset A$

**Definizione A.10.** Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \rho)$  due spazi metrici , sia  $f$  una funzione  $f : X \rightarrow Y$  .  $f$  si dice Liptschiziana se esiste una costante  $l \geq 0$  tale che sia 1

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

## A.3 Ricoprimenti

**Definizione A.11.** Un **ricoprimento** di un insieme  $X$  è una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsieme tali che  $X = \cup\{A | A \in \mathcal{A}\}$ . diremo che il ricoprimento è finito se  $\mathcal{A}$  è una famiglia finita : numerabile se  $\mathcal{A}$  è una famiglia numerabile .

Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono ricoprimento di  $X$  se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  , allora dire che  $\mathcal{A}$  è un **sottoricoprimento** di  $\mathcal{B}$

**Definizione A.12.** Un ricoprimento  $\mathcal{A}$  di uno spazio topologico  $X$  si dice :

- ★ aperto se ogni  $A \in \mathcal{A}$  è aperto
- ★ chiuso se ogni  $A \in \mathcal{A}$  è chiuso
- ★ localmente finito se per ogni punto  $x \in X$  esiste un aperto  $V \subset X$  tale che  $x \in V$  e  $V \cap A \neq \emptyset$  per al più un numero finito di  $A \in \mathcal{A}$

As esempio , ogni base della topologia è un ricoprimento aperto.

## Bibliografia

- [1] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser Boston, MA, 2009.
- [2] Johannes Jahn. “Tangent Cones”. In: *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 79–106. ISBN: 978-3-030-42760-3. DOI: [10.1007/978-3-030-42760-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42760-3_4). URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-42760-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42760-3_4).