Tirocinio

Mombelli Luca

2 novembre 2025

Indice

1 Teorema di Nagumo

Utilizzerò la formulazione del teorema di Nagumo presentata nel libro "Viability Theory"[1]. Diamo ora alcune definizione necessarie

Definizione 1.1. Sia K un sottoinsieme di uno spazio vettoriale finito dimensionale (oppure di uno spazio normato) X . Diciamo che una funzione $x(\cdot) : [0, T] \to X$ è *viable* in K su $[0, T]$ se

$$\forall t \in [0, T] \ , \quad x(t) \in K$$

Consideriamo il seguente problema di cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

con $f : \Omega \subset_{\text{op}} X \to X$

Definizione 1.2. Sia un sottoinsieme di Ω. Diciamo che K è *localmente viable* sotto f se per ogni condizione iniziale $x_0 \in K$, esiste un $T > 0$ e una soluzione viable su $[0, T]$ per l'equazione differenziale 1.1 con condizione iniziale x_0
K è (globalmente) viable sotto f se possiamo sempre prendere $T = \infty$

Definizione 1.3 (Cono Tangente di Bouligand)**.** Sia X uno spazio normato , K un sottoinsieme non vuoto di X e sia x un elemento di K . Il cono tangente a K in x è l'insieme

$$T_K(x) = \{v \in X \mid \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}$$

con $d_k(x) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$

Una definizione alternativa utilizza le successioni :
v appartiene a $T_K(x)$ se e solo se esiste una successione $h_n > 0$ $h_n \to 0^+$ e una successione $v_n \in X$, $v_n \to v$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ x + h_n v_n \in K$$

Il cono tangente a K nel punto x si può anche indicare con $T(K, x)$. Osserviamo che se

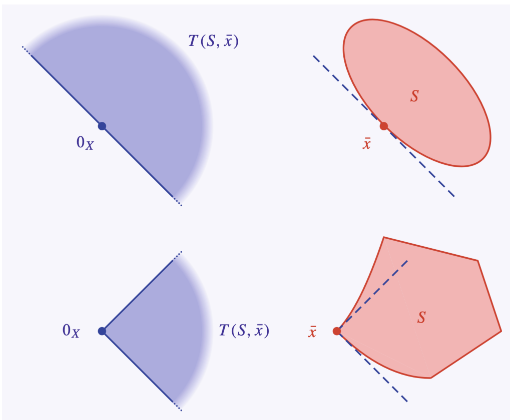

Figura 1: Due esempi di cono tangente

x è un punto interno dell'insieme K allora $T_K(x) = X$. Quindi se l'insieme K è aperto ($K = K^0$) allora $\forall x \in K$, $T_k(x) = X$. Saremmo quindi principalmente interessati a definire il cono tangente per punti apparteneti alla frontiera dell'insieme K . È importate sottolineare che può succedere che il cono tangente ad un punto di frontiera sia tutto lo spazio .

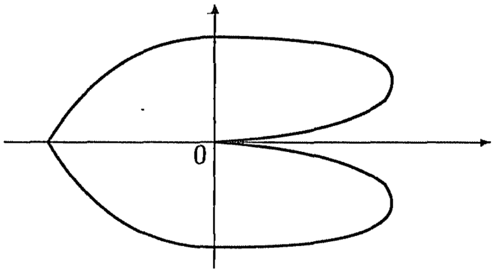

Figura 2: Insieme K tale che $T_k(0) = X$

Lemma 1.1. Sia $x : [0, T] \to K$ una funzione differenziabile e viable , allora

$$\forall t \in [0, T) \quad x'(t) \in T_K(x)$$

Definizione 1.4 (Viability Domain)**.** Sia k un sottoinsieme di Ω. Diciamo che k è un viability domain della mappa $f : \Omega \to X$ se

$$\forall x \in X \quad , \quad f(x) \in T_K(x)$$

Teorema 1.1 – Nagumo

Suppiamo che il sottoinsieme K sia localmente compatto e che la funzione $f : K \to X$ sia continua .
Allora K è *localmente viable* se e solo K è un viability domain

Esempio 1.1. Sia $K \subset \mathbb{R}$, $K = [-2, 2]$ e sia $\dot{x}(t) = x(t)$, con soluzione $x = x_0 e^t$. K è un intervallo chiuso e limitato , quindi compatto , inoltre la funzione x è continua , quindi le ipotesi del teorema sono rispettate . Controlliamo se K è un viability domanin . Sappiamo che se $x \in (2, 2)$ allora $T_K(x) = \mathbb{R}$, analizziamo ora i due punti di frontiera :

- ⋆ Se $x = 2 \to f(x) = 2$. Il cono tangente rappresenta le direzioni in cui posso muovermi senza uscire da K . In questo caso = posso unicamente muovermi verso sinistra quindi ottengo $T_K(2) = (-\infty, 0]$
- ⋆ Facendo un ragionamento simile a quello precedente ottengo $T_K(-2) = [0, +\infty)$

Vediamo che per entrambi i punti di frontiera otteniamo $f(x) \notin T_K(x)$ quindi otteniamo che K non è locally viable , infatti io prendo ad esempio come dato iniziale la

Teorema 1.2 – Viability

Consideriamo un sottoinsieme K di uno spazio finito dimensionale X e una mappa continua $f : K \to X$.
Se K è un viability domain , allora per ogni condizione iniziale $x_0 \in K$ esiste un T positivo e una soluzione viable su $[0, T]$ per l'equazione differenziale 1.1 con C.I x_0 tale che

$$\begin{cases} T = +\infty \\ T < +\infty \qquad e \qquad \limsup_{t \to T_-} \|x(t)\| = \infty \end{cases}$$

A Richiami di Topologia

Definizione A.1 (Spazio topologico)**.** Sia X un insieme , una *topoogia* su X , è una famiglia τ di sottoinsiemi di X (i suoi elementi sono gli aperti di X) che soddisfa le seguenti condizioni.

- ⋆ $\emptyset$ *e* $X \in \tau$
- ⋆ Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto (se $A_\lambda \in \tau$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$)
- ⋆ Intersezione finita di aperti è un sottoinsieme aperto (Se $A_1, \ldots, A_m \in \tau$ allora $A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \tau$0-)

Un insieme dotato di una topologia viene detto **spazio topologico**

Esempio A.1. Su ogni insieme X , $\tau = \{\emptyset, X\}$ è una topologia detta banale od indiscreta. Sull'insieme $\mathbb{R}$

$$\tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\ ]a, +\infty[\ \}$$

è una topologia , topologia inferiore , similmente

$$\tau_\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\ ]-\infty, a[\ \}$$

e1 la topologia superiore di $\mathbb{R}$

Una descrizione esplicita di tutti gli aperti di uno spazio topologico e1 impossibile , la topologia viene in genere descritta assegnando una base per essa

Definizione A.2. Sia τ una topologia su insieme X . una sottofamiglia (un insieme) $B \subset \tau$ si dice una base di τ se ogni aperto $A \in \tau$ può essere scritt ocome unione di elementi d iB

Teorema A.0.1. *Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset P(X)$ una famiglia di suoi sottoinsiemi . Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni*

- ⋆ $X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$
- ⋆ *Per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in X \subset A \cup B$*

A.1 Parte interna , chiusura ed intorni

Definizione A.3. Sia X uno spazio topologico e $B \subseteq X$. Si denota con

- ⋆ B^0 l'unione di tutti gli aperti contenuti in B
- ⋆ $\overline{B}$ l'intersezione di tutti i chiusi contenenti in B
- ⋆ $\partial B = \overline{B} - B^0$

L'insieme B^0 viene detto parte interna di B ed è il più gtande aperto contenuto in B
L'insieme $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso contente B e viene detto chiusura di B
Il sottoinsieme ∂B è l'intersezione dei due chiusi $\overline{B}$ e $X - B^0$ e viene detto **frontiera** di B
Osserviamo che un sottoinsieme B è aperto se e solo se $B = B^0$ e chiuse se $B = \overline{B}$

Definizione A.4. Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice *intorno di x* se x è un punto interno di U , cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V \subset U$

Indichiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x . per definizione se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico , allora $A^0 = \{x \in A | A \in \mathcal{I}(x)\}$

Definizione A.5. Sia x un punto di uno spazio topologico X. Un sottofamiglia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ si dice *base locale* oppure un sistema fondamentale di intorni di x , se per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$ esiste $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subset U$

Esempio A.2. Sia $U \in \mathcal{I}(x)$ un intorno fissato . Allora tutti gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x

A.2 Spazi Metrici

Definizione A.6. Una distanza si di un insieme X è un 'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà :

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e vale $d(x, y) = 0$ se e solo se x=y
2. $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in x$ (Disuguaglianza triangolare)

Esempio A.3. Su un qualsiasi insieme X , la funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è una distanza

Definizione A.7. Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) , dove X è un insieme e d è una distanza su X

Definizione A.8. Sia (X,d) uno spazio metrico. Il sottoinsieme

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

viene detto palla paerta di centro x e raggio r

Definizione A.9 (Topologia indotta da una distanza)**.** Sia (X,d) uno spazio metrico. Nella topologia su X indotta dalla distanza d , un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se per ogni $x \in A$ esiste r > 0 tale che $B(x, r) \subset A$

Definizione A.10. Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici , sia f una funzione $f : X \to Y$. f si dice Liptschiziana se esiste una costante $l \geq 0$ tale che sia 1

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l \ d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

A.3 Ricoprimenti

Definizione A.11. Un **ricoprimento** di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsieme tali che $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. diremo che il ricoprimento è finito se $\mathcal{A}$ è una famiglia finita : numerabile se $\mathcal{A}$ è una famiglia numerabile .
Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimento di X se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora dire che $\mathcal{A}$ è un **sottoricoprimento** di $\mathcal{B}$

Definizione A.12. Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di uno spazio topologico X si dice :

- ⋆ aperto se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto
- ⋆ chiuso se ogni $A \in \mathcal{A}$ è chiuso
- ⋆ localmente finito se per ogni punto $x \in X$ esiste un aperto $V \subset X$ tale che $x \in V$ e $V \cap A \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $A \in \mathcal{A}$

As esempio , ogni base della topologia è un ricoprimento aperto.

Bibliografia

[1] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser Boston, MA, 2009.