

# Tirocinio

Mombelli Luca

2 novembre 2025

## Indice

<b>1</b>	<b>Teorema di Nagumo</b>	<b>2</b>
<b>A</b>	<b>Richiami di Topologia</b>	<b>4</b>
A.1	Parte interna , chiusura ed interni . . . . .	4
A.2	Spazi Metrici . . . . .	5
A.3	Ricoprimenti . . . . .	5
	<b>Bibliografia</b>	<b>6</b>

# 1 Teorema di Nagumo

Utilizzerò la formulazione del teorema di Nagumo presentata nel libro "Viability Theory"[1]. Diamo ora alcune definizioni necessarie

**Definizione 1.1.** Sia  $K$  un sottoinsieme di uno spazio vettoriale finito dimensionale (oppure di uno spazio normato)  $X$ . Diciamo che una funzione  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow X$  è *viable* in  $K$  su  $[0, T]$  se

$$\forall t \in [0, T], \quad x(t) \in K$$

Consideriamo il seguente problema di cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

con  $f : \Omega \subset_{\text{op}} X \rightarrow X$

**Definizione 1.2.** Sia un sottoinsieme di  $\Omega$ . Diciamo che  $K$  è *localmente viable* sotto  $f$  se per ogni condizione iniziale  $x_0 \in K$ , esiste un  $T > 0$  e una soluzione viable su  $[0, T]$  per l'equazione differenziale 1.1 con condizione iniziale  $x_0$

$K$  è (globalmente) viable sotto  $f$  se possiamo sempre prendere  $T = \infty$

**Definizione 1.3** (Cono Tangente di Bouligand). Sia  $X$  uno spazio normato,  $K$  un sottoinsieme non vuoto di  $X$  e sia  $x$  un elemento di  $K$ . Il cono tangente a  $K$  in  $x$  è l'insieme

$$T_K(x) = \{v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}$$

con  $d_K(x) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$

Una definizione alternativa utilizza le successioni :

$v$  appartiene a  $T_K(x)$  se e solo se esiste una successione  $h_n > 0$   $h_n \rightarrow 0^+$  e una successione  $v_n \in X$ ,  $v_n \rightarrow v$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x + h_n v_n \in K$$

Il cono tangente a  $K$  nel punto  $x$  si può anche indicare con  $T(K, x)$ . Osserviamo che se

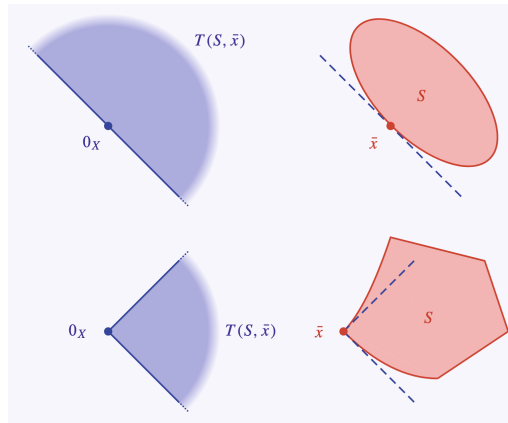


Figura 1: Due esempi di cono tangente

$x$  è un punto interno dell'insieme  $K$  allora  $T_K(x) = X$ . Quindi se l'insieme  $K$  è aperto ( $K = K^0$ ) allora  $\forall x \in K$ ,  $T_K(x) = X$ . Saremmo quindi principalmente interessati a definire il cono tangente per punti appartenenti alla frontiera dell'insieme  $K$ . È importante sottolineare che può succedere che il cono tangente ad un punto di frontiera sia tutto lo spazio.

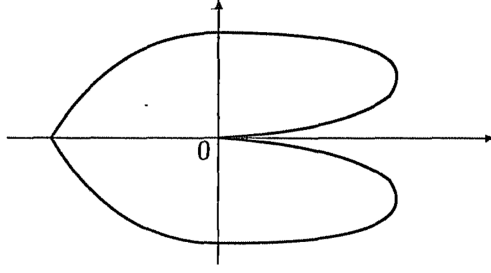


Figura 2: Insieme K tale che  $T_k(0) = X$

**Lemma 1.1.** Sia  $x : [0, T] \rightarrow K$  una funzione differenziabile e viabile , allora

$$\forall t \in [0, T) \quad x'(t) \in T_K(x)$$

**Definizione 1.4** (Viability Domain). Sia  $K$  un sottoinsieme di  $\Omega$ . Diciamo che  $K$  è un viability domain della mappa  $f : \Omega \rightarrow X$  se

$$\forall x \in K \quad , \quad f(x) \in T_K(x)$$

#### Teorema 1.1 – Nagumo

Suppiamo che il sottoinsieme  $K$  sia localmente compatto e che la funzione  $f : K \rightarrow X$  sia continua .

Allora  $K$  è *localmente viable* se e solo  $K$  è un viability domain

**Esempio 1.1.** Sia  $K \subset \mathbb{R}$  ,  $K = [-2, 2]$  e sia  $\dot{x}(t) = x(t)$  , con soluzione  $x = x_0 e^t$  , Sappiamo che  $K$  è localmente compatto perchè è un sottoinsieme di uno spazio localmente compatto , inoltre la funzione  $x$  è continua . Controlliamo se  $K$  è un viability domain . Sappiamo che se  $x \in (2, 2)$  allora  $T_K(x) = \mathbb{R}$  , analizziamo ora i due punti di frontiera :

- ★ Se  $x = 2 \rightarrow f(x) = 2$  . Il cono tangente rappresenta le direzioni in cui posso muovermi senza uscire da  $K$  . In questo caso posso unicamente muovermi verso sinistra quindi ottengo  $T_K(2) = (-\infty, 0]$
- ★ Facendo un ragionamento simile a quello precedente ottengo  $T_K(-2) = [0, +\infty)$

Vediamo che per entrambi i punti di frontiera otteniamo  $f(x) \notin T_K(x)$  quindi otteniamo che  $K$  non è locally viable , infatti io prendo ad esempio come dato iniziale la

#### Teorema 1.2 – Viability

Consideriamo un sottoinsieme  $K$  di uno spazio finito dimensionale  $X$  e una mappa continua  $f : K \rightarrow X$ .

Se  $K$  è un viability domain , allora per ogni condizione iniziale  $x_0 \in K$  esiste un  $T$  positivo e una soluzione viabile su  $[0, T]$  per l'equazione differenziale 1.1 con C.I  $x_0$  tale che

$$\begin{cases} T = +\infty \\ T < +\infty \end{cases} \quad e \quad \limsup_{t \rightarrow T^-} \|x(t)\| = \infty$$

## A Richiami di Topologia

**Definizione A.1** (Spazio topologico). Sia  $X$  un insieme, una *topologia* su  $X$ , è una famiglia  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$  (i suoi elementi sono gli aperti di  $X$ ) che soddisfa le seguenti condizioni.

- ★  $\emptyset$  e  $X \in \tau$
- ★ Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto (se  $A_\lambda \in \tau$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ , allora  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ )
- ★ Intersezione finita di aperti è un sottoinsieme aperto (Se  $A_1, \dots, A_m \in \tau$  allora  $A_1 \cap \dots \cap A_m \in \tau$ )

Un insieme dotato di una topologia viene detto **spazio topologico**

**Esempio A.1.** Su ogni insieme  $X$ ,  $\tau = \{\emptyset, X\}$  è una topologia detta banale od indiscreta. Sull'insieme  $\mathbb{R}$

$$\tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{ ]a, +\infty[ \}$$

è una topologia, topologia inferiore, similmente

$$\tau_\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{ ]-\infty, a[ \}$$

e la topologia superiore di  $\mathbb{R}$

Una descrizione esplicita di tutti gli aperti di uno spazio topologico è impossibile, la topologia viene in genere descritta assegnando una base per essa

**Definizione A.2.** Sia  $\tau$  una topologia su insieme  $X$ . una sottofamiglia (un insieme)  $\mathcal{B} \subset \tau$  si dice una base di  $\tau$  se ogni aperto  $A \in \tau$  può essere scritto come unione di elementi di  $\mathcal{B}$

**Teorema A.0.1.** Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B} \subset P(X)$  una famiglia di suoi sottoinsiemi. Allora esiste una topologia su  $X$  di cui  $\mathcal{B}$  è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni

- ★  $X = \bigcup \{ B \mid B \in \mathcal{B} \}$
- ★ Per ogni coppia  $A, B \in \mathcal{B}$  e per ogni punto  $x \in A \cap B$  esiste  $C \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in C \subset A \cap B$

### A.1 Parte interna, chiusura ed interni

**Definizione A.3.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $B \subseteq X$ . Si denota con

- ★  $B^0$  l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $B$
- ★  $\overline{B}$  l'intersezione di tutti i chiusi contenenti in  $B$
- ★  $\partial B = \overline{B} - B^0$

L'insieme  $B^0$  viene detto parte interna di  $B$  ed è il più grande aperto contenuto in  $B$

L'insieme  $\overline{B}$  è il più piccolo chiuso contenente  $B$  e viene detto chiusura di  $B$

Il sottoinsieme  $\partial B$  è l'intersezione dei due chiusi  $\overline{B}$  e  $X - B^0$  e viene detto **frontiera** di  $B$

Osserviamo che un sottoinsieme  $B$  è aperto se e solo se  $B = B^0$  e chiuso se  $B = \overline{B}$

**Definizione A.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x \in X$ . Un sottoinsieme  $U \subset X$  si dice *intorno di  $x$*  se  $x$  è un punto interno di  $U$ , cioè se esiste un aperto  $V$  tale che  $x \in V$  e  $V \subset U$

Indichiamo con  $\mathcal{I}(x)$  la famiglia di tutti gli intorno di  $x$ . per definizione se  $A$  è un sottoinsieme di uno spazio topologico, allora  $A^0 = \{x \in A \mid A \in \mathcal{I}(x)\}$

**Definizione A.5.** Sia  $x$  un punto di uno spazio topologico  $X$ . Un sottofamiglia  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$  si dice *base locale* oppure un sistema fondamentale di intorno di  $x$ , se per ogni  $U \in \mathcal{I}(x)$  esiste  $A \in \mathcal{J}$  tale che  $A \subset U$

**Esempio A.2.** Sia  $U \in \mathcal{I}(x)$  un intorno fissato. Allora tutti gli intorno di  $x$  contenuti in  $U$  formano un sistema fondamentale di intorno di  $x$

## A.2 Spazi Metrici

**Definizione A.6.** Una distanza su di un insieme  $X$  è un'applicazione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti proprietà :

1.  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$  e vale  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x=y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in X$  (Disuguaglianza triangolare)

**Esempio A.3.** Su un qualsiasi insieme  $X$ , la funzione

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è una distanza

**Definizione A.7.** Uno **spazio metrico** è una coppia  $(X, d)$ , dove  $X$  è un insieme e  $d$  è una distanza su  $X$

**Definizione A.8.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Il sottoinsieme

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

viene detto palla aperta di centro  $x$  e raggio  $r$

**Definizione A.9** (Topologia indotta da una distanza). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Nella topologia su  $X$  indotta dalla distanza  $d$ , un sottoinsieme  $A \subset X$  è aperto se per ogni  $x \in A$  esiste  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subset A$

**Definizione A.10.** Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \rho)$  due spazi metrici, sia  $f$  una funzione  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  si dice Lipschitziana se esiste una costante  $l \geq 0$  tale che sia

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

## A.3 Ricoprimenti

**Definizione A.11.** Un **ricoprimento** di un insieme  $X$  è una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsieme tali che  $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ . diremo che il ricoprimento è finito se  $\mathcal{A}$  è una famiglia finita : numerabile se  $\mathcal{A}$  è una famiglia numerabile.

Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono ricoprimento di  $X$  se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , allora dire che  $\mathcal{A}$  è un **sottoricoprimento** di  $\mathcal{B}$

**Definizione A.12.** Un ricoprimento  $\mathcal{A}$  di uno spazio topologico  $X$  si dice :

- ★ aperto se ogni  $A \in \mathcal{A}$  è aperto
- ★ chiuso se ogni  $A \in \mathcal{A}$  è chiuso
- ★ localmente finito se per ogni punto  $x \in X$  esiste un aperto  $V \subset X$  tale che  $x \in V$  e  $V \cap A \neq \emptyset$  per al più un numero finito di  $A \in \mathcal{A}$

As esempio, ogni base della topologia è un ricoprimento aperto.

## Bibliografia

- [1] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser Boston, MA, 2009.