Tirocinio

Mombelli Luca

10 novembre 2025

Indice

1 Teorema di Nagumo

Introduciamo il Teorema di Nagumo , secondo la formulazione presentata in [1] , che rappresenta una degli elementi fondamentali per trattare le Control Barrier function

Definizione 1.1. Sia K un sottoinsieme di uno spazio vettoriale finito dimensionale (oppure di uno spazio normato) X . Diciamo che una funzione $x(\cdot) : [0, T] \to X$ è *viable* in K su $[0, T]$ se

$$\forall t \in [0, T] \ , \quad x(t) \in K$$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

con $f : \Omega \subset_{\text{op}} X \to X$

Definizione 1.2. Sia un sottoinsieme di Ω. Diciamo che K è *locally viable* sotto f se per ogni condizione iniziale $x_0 \in K$, esiste un $T > 0$ e una soluzione viable su $[0, T]$ per l'equazione differenziale 1.1 con condizione iniziale x_0
K è (globalmente) viable sotto f se possiamo sempre prendere $T = \infty$

Definizione 1.3 (Cono Tangente di Bouligand)**.** Sia X uno spazio normato , K un sottoinsieme non vuoto di X e sia x un elemento di K . Il cono tangente a K in x è l'insieme

$$T_K(x) = \{v \in X \mid \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}$$

con $d_k(x) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$

Una definizione alternativa utilizza le successioni :
v appartiene a $T_K(x)$ se e solo se esiste una successione $h_n > 0$ $h_n \to 0^+$ e una successione $v_n \in X$, $v_n \to v$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ x + h_n v_n \in K$$

Il cono tangente a K nel punto x si può anche indicare con $T(K, x)$. Osserviamo che se

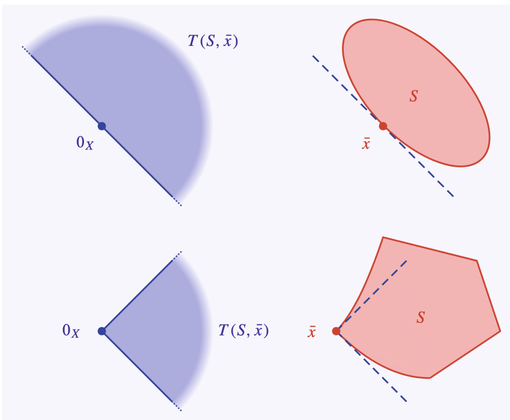

Figura 1: Due esempi di cono tangente ([2])

x è un punto interno dell'insieme K allora $T_K(x) = X$. Quindi se l'insieme K è aperto $(K = K^0)$ allora $\forall x \in K$, $T_k(x) = X$. Saremmo quindi principalmente interessati a definire il cono tangente per punti appartenenti alla frontiera del'insieme K . È importate sottolineare che può succedere che il cono tangente ad un punto di frontiera sia tutto lo spazio .

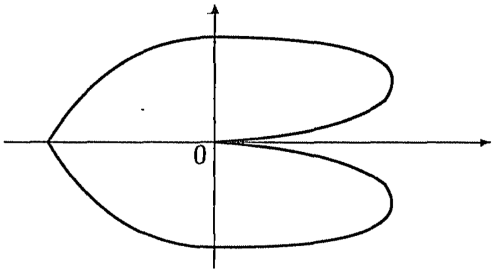

Figura 2: Insieme K tale che $T_k(0) = X$

Lemma 1.1. Sia $x : [0,T] \to K$ una funzione differenziabile e viable , allora

$$\forall t \in [0,T) \quad x'(t) \in T_K(x)$$

Definizione 1.4 (Viability Domain)**.** Sia k un sottoinsieme di Ω. Diciamo che k è un viability domain della mappa $f : \Omega \to X$ se

$$\forall x \in X \quad , \quad f(x) \in T_K(x)$$

Teorema 1.1 – Nagumo

Supponiamo che il sottoinsieme K sia localmente compatto e che la funzione $f : K \to X$ sia continua .
Allora K è *localmente viable* sotto f se e solo K è un *viability domain* della mappa f

Esempio 1.1. Sia $K \subset \mathbb{R}$, $K = [-2, 2]$ e sia $\dot{x}(t) = x(t)$. K è un intervallo chiuso e limitato , quindi compatto , inoltre la funzione x è continua , quindi le ipotesi del teorema sono rispettate . Controlliamo se K è un viability domanin . Sappiamo che se $x \in (2, 2)$ allora $T_K(x) = \mathbb{R}$, analizziamo ora i due punti di frontiera :

- ⋆ Se $x = 2 \to f(x) = 2$. Il cono tangente rappresenta le direzioni in cui posso muovermi senza uscire da K . In questo caso posso unicamente muovermi verso sinistra quindi ottengo $T_K(2) = (-\infty, 0]$
- ⋆ Facendo un ragionamento simile a quello precedente ottengo $T_K(-2) = [0, +\infty)$

Vediamo che per entrambi i punti di frontiera otteniamo $f(x) \notin T_K(x)$ quindi K non è viability domain per f .
Prendiamo , ora l'intervallo $K = (-\infty, 0]$, in questo caso il sottoinsieme non è compatto ma localmente compatto , poichè è un sottoinsieme di un insieme localmente compatto , lo spazio euclideo .
Come prima se prendiamo $x \in (-\infty, 0)$ otteniamo $T_k(x) = \mathbb{R}$. Passiamo ora a studiare il punto $x = 0$ per cui otteniamo $f(0) = 0$, invece il cono tangente nel punto zero è $T_k(0) = (-\infty, 0]$. Possiamo osservare che $f(0) \in T_x(0)$ e quindi in generale K è un viabilty domain e quindi locally viable

Esempio 1.2. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 5 \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) \leq 0\}$ e prendiamo $f(x, y) = (x, y^2)$.K è un sottoinsieme compatto e f è un campo vettoriale continuo . Sappiamo che per $x \in K^0 \to T_K(x) = \mathbb{R}^2$. Occupiamoci ora dei punti $x \in \partial K$, quindi che appartengo alla curva di livello $f^{-1}(5) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\}$. In questo caso la curva è differenziale e possiamo definire il cono tangente attraverso rette tangenti infatti

$$T_k(x_0) = \{v \in X | g(x_0) + \boldsymbol{\nabla} g(x_0) \cdot v \leq 0)\}$$

Oppure possiamo utilizzare il fatto che il gradiente di g sia sempre perpendicolare ad una curva di livello di g e che esso rappresenti la direzione di massima crescita

$$T_k(x_0) = \{v \in X | \boldsymbol{\nabla} g(x_0) \cdot v \leq 0\}$$

. Proviamo a calcolare la condizione di appartenenza al cono tangente

$$\begin{aligned}\nabla g(x) f(x) &= (2x, 2y)(x, y^2)^T \\ &= 2x^2 + 2y^3 \leq 0 \\ y &\leq -x^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

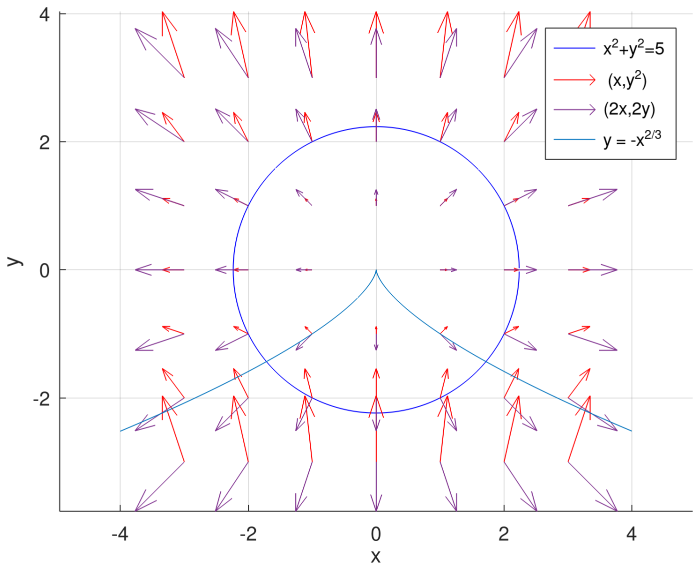

Figura 3: Esempio 1.2(a)

Infatti usando come punto $x_0 = (0-, \sqrt{5})$

$$\begin{aligned}f(x_0) &= (0, 5) \\ g(x_0) &= 0 \\ \nabla g(x_0) &= (0, 2\sqrt{5}) \\ \nabla g(x_0) \cdot f(x_0) &= 10\sqrt{5} > 0 \rightarrow f(x_0) \notin T_k(x_0)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che K non è un viability domain per f , allora k non potrà essere locally viable sotto f .

Proviamo ora a prendere lo stesso insieme K ma il campo vettoriale $f(x, y) = (-x, -y^3)$. Vediamo se questo campo vettoriale rispetto la condizione di appartenenza al Cono tangente

$$\begin{aligned}\nabla g(x) f(x) &= (2x, 2y)(-x, -y^3)^T \\ &= -2x^2 - 2y^4 \leq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $f(x) \in T_k(x) \forall x \in K$, quindi K è un viability domain per f e per il teorema d Nagumo K è locally viable sotto f

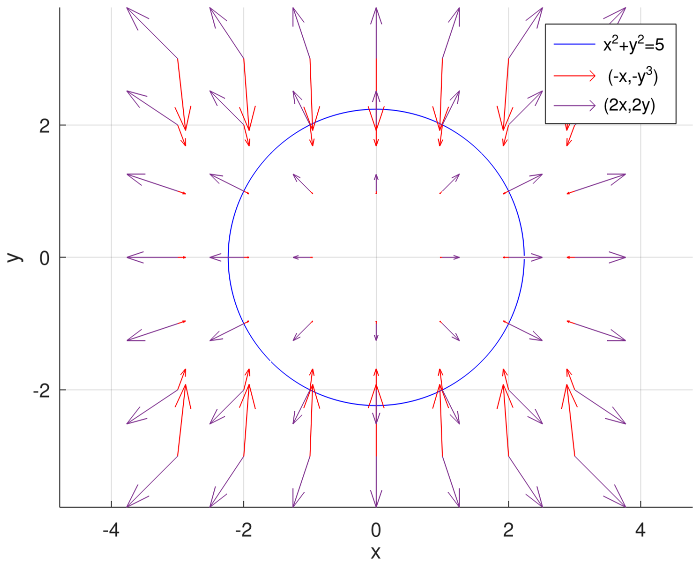

Figura 4: Esempio 1.2 (b)

Teorema 1.2 – Viability

Consideriamo un sottoinsieme K di uno spazio finito dimensionale X e una mappa continua $f : K \to X$.
Se K è un viability domain , allora per ogni condizione iniziale $x_0 \in K$ esiste un T positivo e una soluzione viable su $[0, T]$ per l'equazione differenziale 1.1 con C.I x_0 tale che

$$\begin{cases} T = +\infty \\ T < +\infty \quad e \quad \limsup_{t \to T_-} \|x(t)\| = \infty \end{cases}$$

Se abbiamo a disposizioni ulteriori informazioni sulla funzione f potremmo escludere a priori il caso in cui $\lim_{t \to T^-} \|x(t)\| = \infty$.

Teorema 1.3

Consideriamo un sottoinsieme K di uno spazio vettoriale finito dimensionale X e una mappa $f : K \to X$. Supponiamo che f sia continua , che

$$\exists c > 0 \ t.c \ \forall x \in K \ , \ \|f(x)\| \leq c(\|x\| + 1)$$

e che K sia un viability domani chiuso per f . Allora K è viable sotto f e $T = \infty$

2 Control Barrier Function

Le control barrier function traggono ispirazione dalle control Lyapunov function , che rappresentano l'estensione al controllo delle funzioni di Lyapunov . Allo stesso modo le CBF sono l'estensione al controllo della funzioni di barriera , utilizzate in ottimizzazione. Lo scopo principale delle CBF è definire un sottoinsieme invariante in avanti , ossia un insieme per cui ogni traiettoria che parte da esso rimane al suo interno per ogni tempo futuro . Inoltre sono molto utili nella sintesi di controllori che ci permettono di rimanere nel sottoinsieme.
Consideriamo il sistema dinamico non lineare affine al controllo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $iu \in \mathbb{R}^m$ sono rispettivamente lo stato e l'input del sistema . Le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sono localmente liptschiziane .
Consideriamo il sottoinsieme S , definito come l'insieme di sopralivello di una funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \geq 0\} \tag{2.2}$$
$$S^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) > 0\} \tag{2.3}$$
$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\} \tag{2.4}$$

Definizione 2.1. La funzione $h \in \mathbb{C}^1, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una control barrier function , per il sistema 2.1 , sull'insieme S , definito da 2.2 - 2.4 , se esiste una funzione classe κ_∞ estesa [1]tale che :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^m} [L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x))] \quad \forall x \in S$$
$$\sup_{u\in\mathbb{R}^m} [\nabla h(x)f(x) + \nabla h(x)g(x)u \geq -\alpha(h(x))] \quad \forall x \in S$$

Consideriamo ora l'insieme di tutti i valori di input che rendono il sottoinsieme S invariante :

$$K_{cbf}(u) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x))\}$$

Teorema 2.1

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme di sopralivello di una funzione differenziabile continuità $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se h è una control barrier function su D e $\nabla h(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \partial S$, allora un qualsiasi controllore liptschiziano u tale che $u(x) \in K_{cbf}$ per il sistema 2.1 rende S invariante (in avanti)

Dimostrazione. Per ogni $x \in \partial C$abbiamo che $L_f h(x) + L_g h(x)u \geq -\alpha(h(x)) = 0$. Possiamo allora definire il cono tangente come $T_S(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h(x)v \geq 0\}$. Sappiamo che $\forall x \in S^0 \;\; T_S(x) = \mathbb{R}^n$, proviamo a vedere ora i punti appartenti alla frontiera

$$\nabla h(x)(f(x) + g(x)u) \geq 0$$
$$\nabla h(x)f(x) + \nabla h(x)g(x)u \geq 0$$
$$L_f h(x) + L_g h(x)u \geq 0$$

allora K è viability domain e quindi locally viable sotto f . Ora abbiamo ipotizzato che f , g , u siano localmente liptschiziane soddisfando così il teorema di esistenza e unicità. Sapendo che la soluzione esista ed è unica le due condizioni di viable e invarianza corrispondo , abbiamo cosi dimostrato ch es è invariante □

[1]Per $a \in R^+$, una funzione continua $\alpha : [0, a) \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe κ se è strettamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Una funzione continua $\alpha : (-b, a) \to \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$ è una funzione di classe κ estesa se è strettamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Inoltre , se $a = b = \infty$ e $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \infty$, allora viene chiamata funzione di classe κ_∞ estesa

Inoltre le control barrier function forniscono una condizione necessaria e sufficiente per l'invarianza in avanti se il sottinsieme S è compatto

Teorema 2.2

Sia S un insieme di sopralivello compatto di una funzione $h \in C^1$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\boldsymbol{\nabla} h(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial S$. Se esiste una legge di controllo $u = k(x)$ che rende il sottoinsieme S invariante , allora $h|_S : S \to \mathbb{R}$ è una control barrier function su C

Dimostrazione. Sia $h \in C^1, h|_S : S \to \mathbb{R}$. Per ogni $r \geq 0$ l'insieme $\{x \mid 0 \leq h(x) \leq r\}$ è un sottoinsieme compatto di C. Definiamo una funzione $\alpha : [0, \infty) \to \infty$ con

$$\alpha(r) = - \inf_{\{x \ \mid \ 0 \leq h(x) \leq r\}} L_f h + L_g h \ u$$

Usando la compattezza del sottoinsieme e la continuità di $L_f h + L_g h \ u$, α è una funzione ben definita , crescente che soddisfa

$$L_h f + L_g h \ u \geq -\alpha(h(x))$$

Per il Teorema di Nagumo 1 l'invarianza di C è equivalente a :

$$L_h f + L_g h \ u \geq 0 \qquad \forall x \in \partial S$$

, ciò implica che $\alpha(0) \leq 0$. Possiamo sempre prendere una funzione di classe κ $\hat{\alpha}$ che maggiora α , facendo così abbiamo ottenuto $L_h f + L_g h \ u \geq -\hat{\alpha}(h(x))$. $\square$

A Richiami di Topologia

Definizione A.1 (Spazio topologico)**.** Sia X un insieme , una *topoogia* su X , è una famiglia τ di sottoinsiemi di X (i suoi elementi sono gli aperti di X) che soddisfa le seguenti condizioni.

- $\star$ $\emptyset$ *e* $X \in \tau$
- $\star$ Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto (se $A_\lambda \in \tau$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$)
- $\star$ Intersezione finita di aperti è un sottoinsieme aperto (Se $A_1, \ldots, A_m \in \tau$ allora $A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \tau$0-)

Un insieme dotato di una topologia viene detto **spazio topologico**

Esempio A.1. Su ogni insieme X , $\tau = \{\emptyset, X\}$ è una topologia detta banale od indiscreta. Sull'insieme $\mathbb{R}$

$$\tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\ ]a, +\infty[\ \}$$

è una topologia , topologia inferiore , similmente

$$\tau_\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\ ]-\infty, a[\ \}$$

e1 la topologia superiore di $\mathbb{R}$

Una descrizione esplicita di tutti gli aperti di uno spazio topologico e1 impossibile , la topologia viene in genere descritta assegnando una base per essa

Definizione A.2. Sia τ una topologia su insieme X . una sottofamiglia (un insieme) $B \subset \tau$ si dice una base di τ se ogni aperto $A \in \tau$ può essere scritt ocome unione di elementi d iB

Teorema A.0.1. *Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset P(X)$ una famiglia di suoi sottoinsiemi . Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni*

- $\star$ $X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$
- $\star$ *Per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in X \subset A \cup B$*

A.1 Parte interna , chiusura ed intorni

Definizione A.3. Sia X uno spazio topologico e $B \subseteq X$. Si denota con

- $\star$ B^0 l'unione di tutti gli aperti contenuti in B
- $\star$ $\overline{B}$ l'intersezione di tutti i chiusi contenenti in B
- $\star$ $\partial B = \overline{B} - B^0$

L'insieme B^0 viene detto parte interna di B ed è il più gtande aperto contenuto in B
L'insieme $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso contente B e viene detto chiusura di B
Il sottoinsieme ∂B è l'intersezione dei due chiusi $\overline{B}$ e $X - B^0$ e viene detto **frontiera** di B
Osserviamo che un sottoinsieme B è aperto se e solo se $B = B^0$ e chiuse se $B = \overline{B}$

Definizione A.4. Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice *intorno di x* se x è un punto interno di U , cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V \subset U$

Indichiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x . per definizione se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico , allora $A^0 = \{x \in A | A \in \mathcal{I}(x)\}$

Definizione A.5. Sia x un punto di uno spazio topologico X. Un sottofamiglia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ si dice *base locale* oppure un sistema fondamentale di intorni di x , se per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$ esiste $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subset U$

Esempio A.2. Sia $U \in \mathcal{I}(x)$ un intorno fissato . Allora tutti gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x

A.2 Spazi Metrici

Definizione A.6. Una distanza si di un insieme X è un 'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà :

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e vale $d(x, y) = 0$ se e solo se x=y
2. $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in x$ (Disuguaglianza triangolare)

Esempio A.3. Su un qualsiasi insieme X , la funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è una distanza

Definizione A.7. Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) , dove X è un insieme e d è una distanza su X

Definizione A.8. Sia (X,d) uno spazio metrico. Il sottoinsieme

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

viene detto palla paerta di centro x e raggio r

Definizione A.9 (Topologia indotta da una distanza)**.** Sia (X,d) uno spazio metrico. Nella topologia su X indotta dalla distanza d , un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se per ogni $x \in A$ esiste r > 0 tale che $B(x, r) \subset A$

Definizione A.10. Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici , sia f una funzione $f : X \to Y$. f si dice Liptschiziana se esiste una costante $l \geq 0$ tale che sia 1

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l \ d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

A.3 Ricoprimenti

Definizione A.11. Un **ricoprimento** di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsieme tali che $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. diremo che il ricoprimento è finito se $\mathcal{A}$ è una famiglia finita : numerabile se $\mathcal{A}$ è una famiglia numerabile .
Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimento di X se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora dire che $\mathcal{A}$ è un **sottoricoprimento** di $\mathcal{B}$

Definizione A.12. Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di uno spazio topologico X si dice :

- ⋆ aperto se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto
- ⋆ chiuso se ogni $A \in \mathcal{A}$ è chiuso
- ⋆ localmente finito se per ogni punto $x \in X$ esiste un aperto $V \subset X$ tale che $x \in V$ e $V \cap A \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $A \in \mathcal{A}$

As esempio , ogni base della topologia è un ricoprimento aperto.

Bibliografia

[1] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser Boston, MA, 2009.

[2] Johannes Jahn. “Tangent Cones”. In: *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 79–106. ISBN: 978-3-030-42760-3. DOI: 10.1007/978-3-030-42760-3_4. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-42760-3_4.