Facciamo riferimento alla formulazione alle differenze finite dell'equazione del calore per una mesh N-dimensionale:

$$D\Delta_h u = \partial_t^\tau u$$

Sia $dir(x)$ l'insieme delle direzioni su cui posso muovermi partendo dal nodo x, espresse come permutazioni distanti $1-swap$ dall'identitá
Esplicito il laplaciano discreto

$$D\sum_{d_i \in dir(x)} \partial^2_{h_{d_i}} u = \partial_t^\tau u$$

Esplicito le differenze finite

$$D\sum_{d_i \in dir(x)} \frac{u^t_{x+d_i} - 2u^t_x + u^t_{x+(-d_i)}}{h^2} = \frac{u^{t+1}_x - u^t_x}{\tau}$$

Semplifico

$$D\frac{\tau}{h^2}\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i} - 2u^t_x + u^t_{x+(-d_i)}\right) = u^{t+1}_x - u^t_x$$

$$D\frac{\tau}{h^2}\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i} - 2u^t_x + u^t_{x+(-d_i)}\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Sfrutto la linearitá dell'operatore sommatoria

$$D\frac{\tau}{h^2}\left(\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - \sum_{d_i \in dir(x)} \left(2u^t_x\right) + \sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+(-d_i)}\right)\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Esprimo la terza sommatoria in maniera differente :
per l'associativitá dell'operazione di somma nel semigruppo delle permutazioni , posso dire che $x-d = x+(-d) = y$ tale che $y+d = x$

$$D\frac{\tau}{h^2}\left(\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - \sum_{d_i \in dir(x)} \left(2u^t_x\right) + \sum_{\{y:y+d_i=x\}_i} \left(u^t_{y_i}\right)\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Ma l'insieme dei nodi a cui posso arrivare con $1-swap$ da x é anche l'insieme dei nodi con cui posso arrivare a x con $1-swap$

$$D\frac{\tau}{h^2}\left(2\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - 2\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_x\right)\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Semplifico

$$2D\frac{\tau}{h^2}\left(\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - \sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_x\right)\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

La seconda sommatoria é indipendente dal termine della sommatoria, quindi semplifico

$$2D\frac{\tau}{h^2}\left(\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - Nu^t_x\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Divido e moltiplico per N

$$2D\frac{N\tau}{h^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{d_i \in dir(x)} \left(u^t_{x+d_i}\right) - \frac{1}{N}Nu^t_x\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Semplifico e esplicito la media come valore atteso dello scalare $u_{x+d^{(1)}}$ dove $d^{(1)}$ é estratto da una distribuzione uniforme sulle permutazioni distanti uno swap

$$2D\frac{N\tau}{h^2}\left(\mathbb{E}_{d^{(1)}}\left[u^t_{x+d^{(1)}}\right] - u^t_x\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

Sia $\alpha = 2D\frac{N\tau}{h^2}$

$$\alpha\left(\mathbb{E}_{d^{(1)}}\left[u^t_{x+d^{(1)}}\right] - u^t_x\right) + u^t_x = u^{t+1}_x$$

$$\alpha\left(\mathbb{E}_{d^{(1)}}\left[u^t_{x+d^{(1)}}\right]\right) - \alpha u^t_x + u^t_x = u^{t+1}_x$$

$$\alpha\left(\mathbb{E}_{d^{(1)}}\left[u^t_{x+d^{(1)}}\right]\right) + (1-\alpha)u^t_x = u^{t+1}_x$$

Sia $\alpha = 1$

$$u^{t+1}_x = \mathbb{E}_{d^{(1)}}\left[u^t_{x+d^{(1)}}\right]$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
& u_x^{t+2} \\
& = \mathbb{E}_{d^{(1)}} \left[u_{x+d^{(1)}}^{t+1} \right] \\
& = \mathbb{E}_{d^{(1)}} \left[\mathbb{E}_{d^{(2)}} \left[u_{x+d^{(1)}+d^{(2)}}^{t} \right] \right] \\
& = \mathbb{E}_{(d^{(1)},d^{(2)})} \left[u_{x+d^{(1)}+d^{(2)}}^{t} \right] \\
& = \mathbb{E}_{p:dist(I,p)=2} \left[u_{x+p}^{t} \right]
\end{aligned}
$$

Da cui , induttivamente

$$u_x^T = \mathbb{E}_{p:dist(I,p)=T} \left[u_{x+p}^0 \right]$$

In [ ]: