PERCHÉ LA DISTRIBUZIONE FISSA?

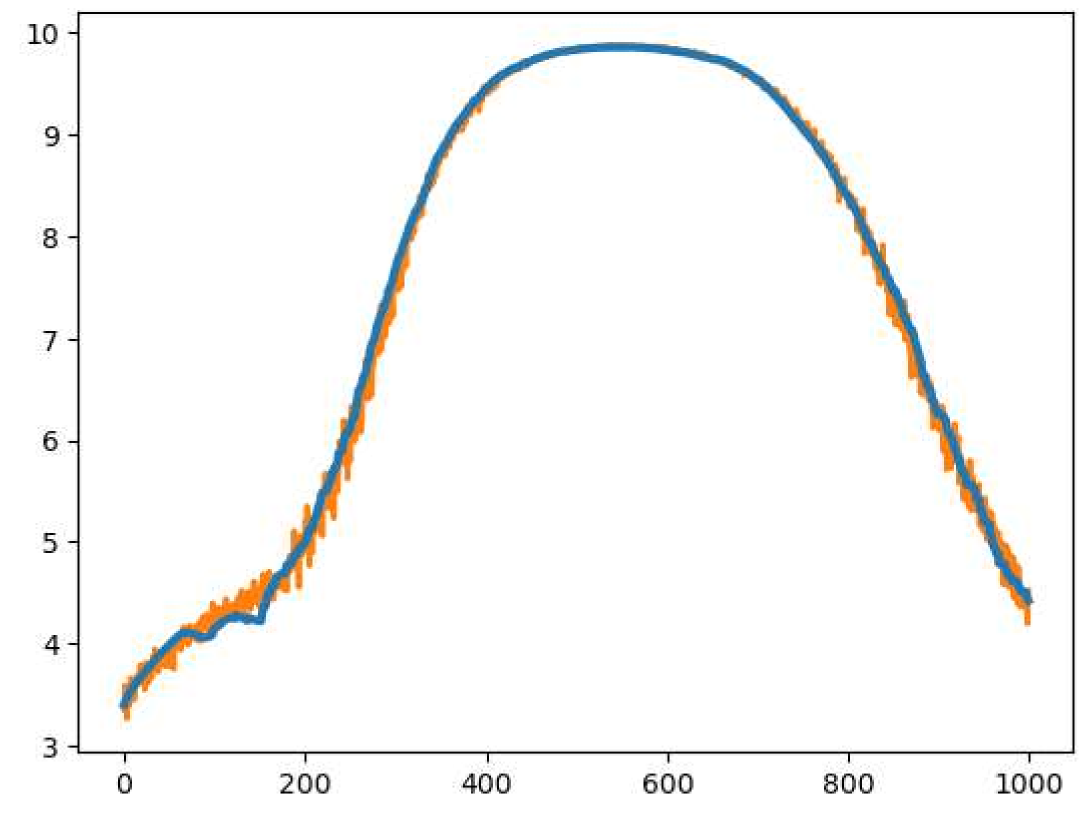
Supponiamo di voler considerare una distruzione normale standard $Z = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$
Sappiamo che l'obiettivo della nostra approssimazione é ottenere
$\mathbb{E}[f(\mathbf{x}+\mathbf{m})|\mathbf{m} \sim Z] \approx \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} f(\mathbf{x}+\mathbf{m^A}_i)$
dove definiamo $M^C = \{\mathbf{m}_1^C, \mathbf{m}_2^C, \ldots, \mathbf{m}_{n^C}^C\}$ l'insieme dei sample raccolti con un processo di campionamento C dalla distribuzione Z

Abbiamo diversi vantaggi da questo approccio

1. Sia $\phi : Q \to \{\hat{\tilde{f}} : \Omega \to \mathbb{R}\}$ la funzione che,dato in ingresso un istante di esecuzione q restituisce lo stimatore della funzione rilassata. Se il campionamento é fissato allora $M^q \perp q$ (il campionamento all'istante q non varia in funzione di q, essendo costante).
   Da cui $\phi(q_1) = \phi(q_2) \ \ \forall (q_1, q_2) \in Q \times Q$
2. $\hat{\tilde{f}}$ é continua.
   Supponiamo $f \in C^1$ (la funzione di reward differenziabile con continuitá)
   $\hat{\tilde{f}} = \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} f(\mathbf{x}+\mathbf{m^A}_i)$
   Per dimostrarne la continuitá mostriamo che
   $lim_{h\to 0} \ \ | \ \hat{\tilde{f}}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \hat{\tilde{f}}(\mathbf{x}) \ \ | = 0$
   Infatti
   $lim_{h\to 0} \ \ | \ \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}+\mathbf{m^A}_i) - \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} f(\mathbf{x}+\mathbf{m^A}_i) \ \ |$
   $= lim_{h\to 0} \ \ | \ \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} \{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}+\mathbf{m^A}_i) - f(\mathbf{x}+\mathbf{m^A}_i)\} \ \ |$
   $= lim_{h\to 0} \ \ | \ \frac{1}{|M^A|} \sum_{\mathbf{m^A}_i \in M^A} \{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}+\mathbf{m^A}_i) - f(\mathbf{x}+\mathbf{m^A}_i)\} \ \ |$
   $= 0$ // dalla continuitá di f
3. Possibilitá di sviluppare un M^* , ovvero un campionamento gaussiano ideale per il problema di ricerca (ad esempio un campionamento in cui tutti i sample sono distribuiti omogeneamente)

Il secondo motivo dell'introduzione della distribuzione fissa é la propagazione dell'errore nella procedura di ottimizzazione
Sia $\partial_x \hat{\tilde{f}}(x) = \partial_x \tilde{f}(x) + \epsilon$
Sia α piccolo
$x_{new} = x + \alpha \partial_x \hat{\tilde{f}}(x) = x + \alpha \partial_x \tilde{f}(x) + \alpha\epsilon$

$x_{next} = x_{new} + \alpha \partial_x \hat{\tilde{f}}(x_{new})$
$= x_{new} + \alpha \partial_x \tilde{f}(x_{new}) + \alpha\epsilon$
$= (x + \alpha \partial_x \tilde{f}(x) + \alpha\epsilon) + \alpha \partial_x \tilde{f}(x + \alpha \partial_x \tilde{f}(x) + \alpha\epsilon) + \alpha\epsilon$
... In breve : **Mantenendo la distribuzione variabile , vicino allo 0 , le derivate si comportano "male" dal momento che c'é incertezza sul segno. All'aumentare del rilassamento ovviamente la derivata si avvicina a 0 e dunque le derivate iniziano a comportarsi globalmente in modo sbagliato. Utilizzando una distribuzione fissa, l'errore varia con continuitá ; questo comporta che vicino allo 0 potremmo avere delle regioni di dominio in cui la derivata ha segno sbagliato , ma dal momento che l'errore varia in maniera continua possiamo superarle usando euristiche come il momentum (cosa che non potremmo fare se l'errore é totalmente un rumore)**



Il rumore agisce come una **Moquette** , che rallenta il moto della x. Inoltre , in prossimitá di punti di ottimo, questa moquette diventa abbastanza spessa da far rimbalzare via la x