

Tutoriat PS 1 - Exerciții Probabilitati Conditionate

Mihai Duzi, Cristian Lucan, Lumînăraru Ionuț

2025-2026

Exercițiul 1

Enunț: Participi la un turneu de șah unde probabilitatea de a câștiga o partidă este de 30% împotriva unei jumătăți dintre jucători (să îi numim categoria 1), 40% împotriva unui sfert dintre jucători (categoria 2) și 50% împotriva sfertului rămas (categoria 3).

(a) Care este probabilitatea de a câștiga o partidă împotriva unui oponent ales la întâmplare?

(b) Presupunând că ai câștigat, care este probabilitatea să fi jucat cu cineva din categoria 1?

Rezolvare

Notăm:

$$P(C_1) = \frac{1}{2}, \quad P(C_2) = \frac{1}{4}, \quad P(C_3) = \frac{1}{4}.$$

$$P(W | C_1) = 0,30, \quad P(W | C_2) = 0,40, \quad P(W | C_3) = 0,50.$$

a) Probabilitatea totală de câștig

$$P(W) = P(W | C_1)P(C_1) + P(W | C_2)P(C_2) + P(W | C_3)P(C_3).$$

$$P(W) = 0,30 \cdot \frac{1}{2} + 0,40 \cdot \frac{1}{4} + 0,50 \cdot \frac{1}{4} = 0,15 + 0,10 + 0,125 = 0,375.$$

$$\boxed{P(W) = 0,375 \quad \text{sau} \quad 37,5\%}.$$

b) Probabilitatea să fi jucat cu cineva din categoria 1, știind că ai câștigat

$$P(C_1 | W) = \frac{P(W | C_1)P(C_1)}{P(W)} = \frac{0,30 \cdot 0,50}{0,375} = 0,4.$$

$$\boxed{P(C_1 | W) = 0,4 \quad \text{sau} \quad 40\%}.$$

Exercițiul 2

Enunț: Din fiecare 10 mașini Dacia asamblate:

- 7 sunt făcute la uzina din **Tanger (Maroc)**.
- 2 la uzina din **Mioveni (România)**.
- 1 la uzina din **Casablanca (Maroc)**.

Rata problemelor la motor este:

- 19% pentru uzinele marocane (Tanger + Casablanca),
- 6% pentru uzina din Mioveni.

Conducem o Dacie și ni se strică motorul. Care este probabilitatea ca mașina să fi fost asamblată la uzina de la Mioveni?

Rezolvare

Notăm evenimentele:

T = Tanger, M = Mioveni, C = Casablanca, D = defect motor.

$$P(T) = \frac{7}{10}, \quad P(M) = \frac{2}{10}, \quad P(C) = \frac{1}{10}.$$

$$P(D | T) = 0,19, \quad P(D | C) = 0,19, \quad P(D | M) = 0,06.$$

a) Calculăm $P(D)$

$$P(D) = P(D | T)P(T) + P(D | C)P(C) + P(D | M)P(M).$$

$$P(D) = 0,19 \cdot \frac{7}{10} + 0,19 \cdot \frac{1}{10} + 0,06 \cdot \frac{2}{10} = 0,133 + 0,019 + 0,012 = 0,164.$$

$$\boxed{P(D) = 0,164 \quad \text{sau} \quad 16,4\%}.$$

b) Probabilitatea ca mașina să fie din Mioveni, știind că motorul s-a stricat

$$P(M | D) = \frac{P(D | M)P(M)}{P(D)} = \frac{0,06 \cdot 0,2}{0,164} \approx 0,073.$$

$$\boxed{P(M | D) \approx 0,073 \quad \text{sau} \quad 7,3\%}.$$

Observație: Deși doar 20% dintre mașini provin din Mioveni, rata mică a defectelor acolo face ca probabilitatea să fi fost din România, știind că s-a stricat motorul, să fie și mai mică ($\approx 7\%$).

Exercițiul 3

Enunț: Aruncăm două zaruri și considerăm următoarele evenimente:

- A : „Primul zar este ≤ 2 ”
- B : „Suma lor este 7”
- C : „Al doilea zar este par”

Care dintre ele sunt independente?

Rezolvare

Spațiul de evenimente elementare este:

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \quad |\Omega| = 36.$$

Toate rezultatele sunt egal probabile.

- A : Primul zar ≤ 2 $|A| = 2 \times 6 = 12$, $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
- B : Suma este 7 $|B| = 6$, $P(B) = \frac{1}{6}$.
- C : Al doilea zar este par $|C| = 6 \times 3 = 18$, $P(C) = \frac{1}{2}$.

Verificarea Independenței

A și B

$$|A \cap B| = 2, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{18}.$$

$\Rightarrow A$ și B sunt independente.

A și C

$$|A \cap C| = 6, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{6}, \quad P(A)P(C) = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow A$ și C sunt independente.

B și C

$$|B \cap C| = 3, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{12}, \quad P(B)P(C) = \frac{1}{12}.$$

$\Rightarrow B$ și C sunt independente.

Concluzie

Toate perechile de evenimente sunt independente: (A, B) , (A, C) și (B, C) .