Exercițiul 8

Fie E, F și G trei evenimente. Să se descrie evenimentele:

(a) Numai E

Răspuns: $E \cap \overline{F} \cap \overline{G}$

(b) E și G dar nu F

Răspuns: $E \cap \overline{F} \cap G$

(c) Cel puțin unul din evenimentele E, F, G

Răspuns: $E \cup F \cup G$

(d) Cel puțin două din evenimentele E, F, G

Răspuns: $(E \cap F \cap \overline{G}) \cup (E \cap \overline{F} \cap G) \cup (\overline{E} \cap F \cap G) \cup (E \cap F \cap G)$

Sau mai compact: $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$

(e) Toate trei evenimentele E, F, G

Răspuns: $E \cap F \cap G$

(f) Nici unul din evenimentele E, F, G

Răspuns: $\overline{E} \cap \overline{F} \cap \overline{G} = \overline{E \cup F \cup G}$

(g) Cel mult unul din evenimentele E, F, G

Răspuns: $(E \cap \overline{F} \cap \overline{G}) \cup (\overline{E} \cap F \cap \overline{G}) \cup (\overline{E} \cap \overline{F} \cap G) \cup (\overline{E} \cap \overline{F} \cap \overline{G})$

Sau: $\overline{(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)}$

(h) Cel mult două din evenimentele E, F, G

Răspuns: $\overline{E \cap F \cap G}$

(i) Exact două din evenimentele E, F, G

Răspuns: $(E \cap F \cap \overline{G}) \cup (E \cap \overline{F} \cap G) \cup (\overline{E} \cap F \cap G)$

(j) Cel mult trei din evenimentele E, F, G

Răspuns: Ω (evenimentul sigur, deoarece nu putem avea mai mult de 3 evenimente din 3)

Exercițiul din Problema Newton-Laplace

Enunț: Care dintre urmatoarele probabilitati este mai mare?

(a) Cel putin un 6 apare atunci cand aruncam 6 zaruri perfecte?

(b) Cel putin 2 valori de 6 apar atunci cand aruncam 12 zaruri?

(c) Cel putin 3 valori de 6 apar atunci cand aruncam 18 zaruri?

Rezolvare

Considerăm o schemă Bernoulli cu n probe independente și probabilitatea de succes p.

Datele problemei

Pentru fiecare caz, spațiul de bază este:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n \quad \text{cu} \quad |\Omega| = 6^n$$

Probabilitatea de a obține o anumită valoare (de exemplu, valoarea 6) la o singură probă este $p = \frac{1}{6}$.

a) Cel puțin o valoare 6 din 6 apariții

Folosim complementul. Probabilitatea să NU apară valoarea 6 în 6 probe este:

$$\mathbb{P}(\text{nu apare 6}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

Deci probabilitatea să apară cel puțin o valoare 6 este:

$$\mathbb{P}(\text{cel puțin un 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{15625}{46656} \approx 0.665$$

b) Cel puțin 2 valori de 6 din 12 probe

Probabilitatea complementară (nici o valoare 6 sau exact o valoare 6):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{0 sau 1 șase din 12}) &= \binom{12}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\end{aligned}$$

Deci:

$$\mathbb{P}(\text{cel puțin 2 șase din 12}) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right] \approx 0.619$$

c) Cel puțin 3 valori de 6 din 18 probe

Similar, calculăm probabilitatea complementară pentru 0, 1 sau 2 apariții ale valorii 6:

$$\mathbb{P}(0,\ 1 \text{ sau } 2 \text{ șase din } 18)$$
$$= \binom{18}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} + \binom{18}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{17} + \binom{18}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$$

Deci:

$$\mathbb{P}(\text{cel puțin 3 șase din 18}) = 1 - \sum_{k=0}^{2}\binom{18}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{18-k} \approx 0.597$$

Exercițiul 9

Să se simplifice expresiile:

(a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$

Rezolvare:

Aplicăm distribuția intersecției față de reuniune: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Punem $A = E$, $B = F$, $C = (E \cup F^c)$:

$$(E \cup F) \cap (E \cup F^c) = (E \cap (E \cup F^c)) \cup (F \cap (E \cup F^c))$$

Simplificăm:

- $E \cap (E \cup F^c) = E$
- $F \cap (E \cup F^c) = (F \cap E) \cup (F \cap F^c) = F \cap E$ (deoarece $F \cap F^c = \emptyset$)

Deci:

$$E \cup (E \cap F) = E$$

Rezultat final: $\boxed{E}$

(b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$

Rezolvare:

Simplificăm mai întâi primele două expresii: $(E \cup F) \cap (E^c \cup F)$

Distribuim:

$$\begin{aligned}(E \cup F) \cap (E^c \cup F) &= (E \cap (E^c \cup F)) \cup (F \cap (E^c \cup F)) \\ &= ((E \cap E^c) \cup (E \cap F)) \cup ((F \cap E^c) \cup (F \cap F)) \\ &= (\emptyset \cup (E \cap F)) \cup ((F \cap E^c) \cup F) \\ &= (E \cap F) \cup F \\ &= F\end{aligned}$$

Apoi calculăm:

$$F \cap (E \cup F^c) = (F \cap E) \cup (F \cap F^c) = E \cap F$$

Rezultat final: $\boxed{E \cap F}$

(c) $(E \cup F) \cap (F \cup G)$

Rezolvare:

Aplicăm distribuția:

$$(E \cup F) \cap (F \cup G) = (E \cap (F \cup G)) \cup (F \cap (F \cup G))$$

Simplificăm:

- $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
- $F \cap (F \cup G) = F$

Deci:

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup F = F \cup (E \cap G)$$

(deoarece $(E \cap F) \cup F = F$)

Rezultat final: $\boxed{F \cup (E \cap G)}$

Exercițiul 10 - Problemă cu șosete

Într-un sertar se află șosete roșii și negre. Atunci când două șosete sunt scoase la întâmplare, probabilitatea ca ambele să fie de culoare roșie este $\frac{1}{2}$.

(a) Care este numărul minim de șosete din sertar astfel ca proprietatea din ipoteză să fie îndeplinită?

(b) Care este numărul minim de șosete din sertar dacă numărul de șosete negre este par?

Rezolvare

Notăm cu r numărul de șosete roșii și cu n numărul de șosete negre. Total șosete: $t = r + n$.

Condiția inițială

Probabilitatea ca ambele șosete scoase la întâmplare să fie roșii este:

$$\mathbb{P}(\text{ambele roșii}) = \frac{C_r^2}{C_t^2} = \frac{\frac{r(r-1)}{2}}{\frac{t(t-1)}{2}} = \frac{r(r-1)}{t(t-1)} = \frac{1}{2}$$

Deci:

$$2r(r-1) = t(t-1)$$

Cum $t = r + n$:

$$2r(r-1) = (r+n)(r+n-1)$$

Expandând:

$$2r^2 - 2r = r^2 + rn + nr + n^2 - r - n$$

$$2r^2 - 2r = r^2 + 2rn + n^2 - r - n$$

$$r^2 - r = 2rn + n^2 - n$$

$$r^2 - r - 2rn - n^2 + n = 0$$

$$r^2 - (2n+1)r + n - n^2 = 0$$

Reorganizând:

$$r^2 - (2n+1)r + n(1-n) = 0$$

a) Numărul minim de șosete

Folosim formula ecuației de gradul 2:

$$r = \frac{(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 - 4n(1-n)}}{2}$$

Calculăm discriminantul:

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4n(1-n) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n + 4n^2 = 8n^2 + 1$$

Pentru ca r să fie întreg, trebuie ca $\Delta = 8n^2 + 1$ să fie pătrat perfect.
Testăm valori mici ale lui n:

- $n = 0$: $\Delta = 1 = 1^2 \Rightarrow r = \frac{1\pm1}{2} \in \{0, 1\}$ (nevalid, trebuie $r \geq 2$)
- $n = 1$: $\Delta = 9 = 3^2 \Rightarrow r = \frac{3\pm3}{2} \in \{0, 3\}$
  Pentru $r = 3, n = 1$: $t = 4$ și $\mathbb{P} = \frac{3\cdot2}{4\cdot3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
- $n = 2$: $\Delta = 33$ (nu e pătrat perfect)
- $n = 3$: $\Delta = 73$ (nu e pătrat perfect)

Răspuns (a): Numărul minim de șosete este $\boxed{t = 4}$ (3 roșii și 1 neagră)

b) Numărul minim cu condiția că n este par

Testăm valori pare ale lui n:

- $n = 2$: $\Delta = 33$ (nu e pătrat perfect)
- $n = 4$: $\Delta = 129$ (nu e pătrat perfect)
- $n = 6$: $\Delta = 289 = 17^2$
  $r = \frac{13\pm17}{2} \in \{-2, 15\}$
  Pentru $r = 15, n = 6$: $t = 21$ și $\mathbb{P} = \frac{15\cdot14}{21\cdot20} = \frac{210}{420} = \frac{1}{2}$

Răspuns (b): Numărul minim de șosete cu n par este $\boxed{t = 21}$ (15 roșii și 6 negre)

Exercițiul 1

Notăm cu $(\Omega, \mathcal{K}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate.

Un om de afaceri a investit în trei societăți comerciale. S-a stabilit că o investiție făcută la prima societate devine rentabilă după un an de activitate cu o probabilitate de 0.4, o investiție la a doua cu o probabilitate de 0.8 și la ultima cu o probabilitate de 0.5. Știind că activitățile celor trei societăți sunt independente, se cere probabilitatea ca după un an de activitate:

1. să devină rentabile investițiile la toate cele trei societăți;
2. cel puțin una dintre investii să devină rentabilă;
3. să devină rentabile fix două dintre investiții.

Demonstrație

a) Toate trei investiții rentabile

Notăm cu A_i evenimentul că investiția $i \in \{1, 2, 3\}$ să fie profitabilă. Atunci:

$$\begin{aligned} A &= \text{probabilitatea ca toate să fie rentabile} \\ &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \end{aligned}$$

Avem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \quad \text{(independență)} \\ &= 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

b) Cel puțin una dintre investii rentabilă

Notăm cu B evenimentul că cel puțin una dintre investiții să devină rentabilă.

Metoda 1 (Folosind principiul includerii-excluderii):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0.4 + 0.8 + 0.5 - 0.4 \cdot 0.8 - 0.4 \cdot 0.5 - 0.8 \cdot 0.5 + 0.16 \\ &= 1.7 - 0.32 - 0.2 - 0.4 + 0.16 \\ &= 0.94 \end{aligned}$$

Metoda 2 (Folosind complementul):

Considerăm probabilitatea să nu fie rentabilă nicio investiție, și luăm complementul:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \\
&= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.8)(1 - 0.5) \\
&= 1 - 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \\
&= 1 - 0.06 \\
&= 0.94
\end{aligned}$$

c) Fix două investiții rentabile

Notăm cu C evenimentul că fix două investiții să devină rentabile. Aceasta se întâmplă în trei cazuri:

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

Deci:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_3}) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\
&\quad + \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\
&= 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \\
&= 0.16 + 0.04 + 0.24 \\
&= 0.44
\end{aligned}$$

Teoremă

Inegalitatea lui Boole. Pentru orice evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

Exercițiul 4

Un agregat are trei componente la care pot să apară defecțiuni de funcționare cu probabilitățile 0.075, 0.09, respectiv 0.082.

Se cere:

1. probabilitatea minimă ca agregatul să funcționeze;
2. probabilitatea maximă ca agregatul să funcționeze.

Rezolvare

Notăm cu A_i evenimentul că funcționează componenta $i \in \{1, 2, 3\}$.

Din ipoteză, probabilitățile defecțiunilor sunt:

- Componenta 1: defectare cu probabilitate 0.075, deci $\mathbb{P}(A_1) = 1 - 0.075 = 0.925$
- Componenta 2: defectare cu probabilitate 0.09, deci $\mathbb{P}(A_2) = 1 - 0.09 = 0.91$
- Componenta 3: defectare cu probabilitate 0.082, deci $\mathbb{P}(A_3) = 1 - 0.082 = 0.918$

Probabilitatea ca agregatul să funcționeze este notată cu:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

a) Probabilitatea minimă

Din inegalitatea lui Boole cu $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &\geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - (3-1) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - 2 \\
&= 0.925 + 0.91 + 0.918 - 2 \\
&= 2.753 - 2 \\
&= 0.753
\end{aligned}$$

Deci probabilitatea minimă ca agregatul să funcționeze este $\boxed{0.753}$ sau 75.3%.

b) Probabilitatea maximă

Probabilitatea maximă a intersecției a trei evenimente este cel mult egală cu probabilitatea celui mai improbabil dintre ele:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &\leq \min\{\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \mathbb{P}(A_3)\} \\
&= \min\{0.925, 0.91, 0.918\} \\
&= 0.91
\end{aligned}$$

Deci probabilitatea maximă ca agregatul să funcționeze este $\boxed{0.91}$ sau 91%.

Observație

Probabilitatea reală că agregatul funcționează se află în intervalul:

$$0.753 \leq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \leq 0.91$$

Dacă componentele ar fi independente, atunci:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 0.925 \cdot 0.91 \cdot 0.918 \approx 0.768$$

care se află într-adevăr în intervalul de mai sus.