

Tomographie

Antoine Robert

Novembre 2023



Déroulement des séances

- Vendredi 17 novembre : cours 2h.
- Mercredi 22 novembre : cours 2h.
- Mercredi 29 novembre : TP 4h.
- Vendredi 15 décembre : Partiel 2h (40 min de tomographie).

Sommaire

1 Introduction

2 Modélisation de la mesure

- La mesure en tomographie par transmission
- La mesure en tomographie par émission

3 Transformée de Radon

Sommaire

1. Introduction

2. Modélisation de la mesure

- 2.1 La mesure en tomographie par transmission
- 2.2 La mesure en tomographie par émission

3. Transformée de Radon

Étymologie

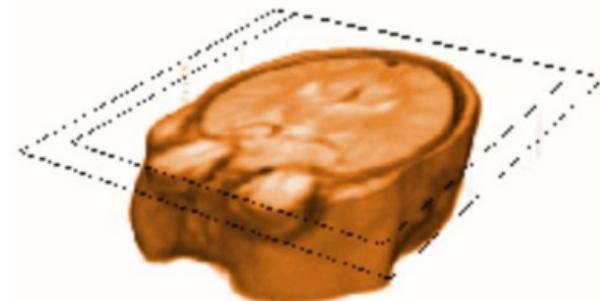
- Tomos : coupe, section
- Graphia : écrire

Étymologie

- Tomos : coupe, section
- Graphia : écrire

Tomographie

Cartographie d'un paramètre interne à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs.



Qu'est ce que la tomographie ?

- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer la carte d'un paramètre physique selon un ou plusieurs plans de coupe.

Qu'est ce que la tomographie ?

- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer **la carte** d'un paramètre physique **selon un ou plusieurs plans de coupe**.
 - Finalité : observer la **composition de la matière** grâce à des rayonnements.

Qu'est ce que la tomographie ?

- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer **la carte** d'un paramètre physique **selon un ou plusieurs plans de coupe**.
 - Finalité : observer la **composition de la matière** grâce à des rayonnements.
 - Principe : Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière ; mesure indirecte du paramètre relatif à l'objet d'intérêt.

Qu'est ce que la tomographie ?

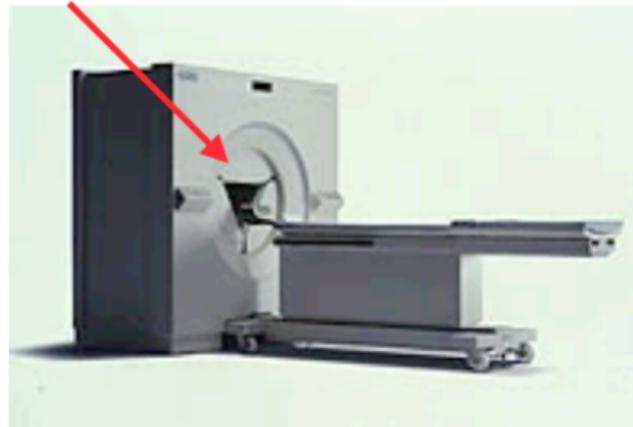
- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer **la carte** d'un paramètre physique **selon un ou plusieurs plans de coupe**.
- Finalité : observer la **composition de la matière** grâce à des rayonnements.
- Principe : Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière ; mesure indirecte du paramètre relatif à l'objet d'intérêt.
- Intérêt : **Localiser** dans l'espace et le temps des caractéristiques d'un objet, **sans le détruire**.

Qu'est ce que la tomographie ?

- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer **la carte** d'un paramètre physique **selon un ou plusieurs plans de coupe**.
- Finalité : observer la **composition de la matière** grâce à des rayonnements.
- Principe : Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière ; mesure indirecte du paramètre relatif à l'objet d'intérêt.
- Intérêt : **Localiser** dans l'espace et le temps des caractéristiques d'un objet, **sans le détruire**.
- Application :
 - Imagerie médicale.
 - Paléontologie, archéologie.
 - Géophysique (sondage des océans, couches géologiques).
 - Contrôle de bagages.

La tomographie médicale

Mesure de rayonnement émis ou transmis par des tomodensitomètres (radiologie), gamma caméras ou tomographes à émission de positons (médecine nucléaire)



Traitement de l'information détectée (par ordinateur)



Problème inverse

Les capteurs permettent d'acquérir une mesure indirecte de l'image cherchée, grâce à un **rayonnement utilisé pour sonder la matière**. Ces mesures sont décrites par les **équations de transport** du rayonnement dans la matière (équations de la mesure) qui fournissent le problème directe :

Problème inverse

Les capteurs permettent d'acquérir une mesure indirecte de l'image cherchée, grâce à un **rayonnement utilisé pour sonder la matière**. Ces mesures sont décrites par les **équations de transport** du rayonnement dans la matière (équations de la mesure) qui fournissent le problème directe :

$$\text{mesure} = F(\text{image cherchée})$$

Problème inverse

Les capteurs permettent d'acquérir une mesure indirecte de l'image cherchée, grâce à un **rayonnement utilisé pour sonder la matière**. Ces mesures sont décrites par les **équations de transport** du rayonnement dans la matière (équations de la mesure) qui fournissent le problème directe :

mesure = $F(\text{image cherchée})$
↓
La reconstruction réalise le **problème inverse**

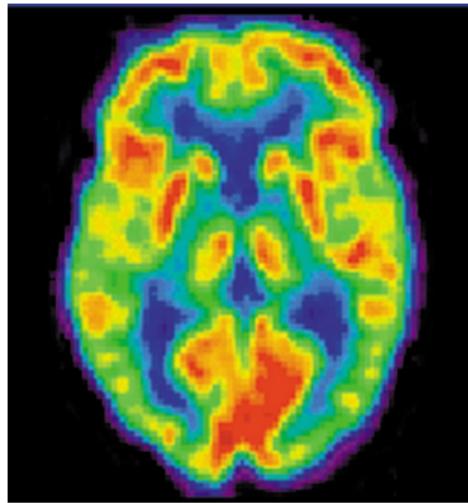
Bref historique

- **1917** : publication de **Radon** sur la reconstruction d'une fonction par ses intégrales de lignes.
- **50,60** : premières études de **Cormack** sur la reconstruction d'une section transverse à partir de ses projections radio.
- **1971** : **Hounsfield** met au point le premier prototype de tomographie X dédié à imagerie cérébrale.
- **1979** : **Hounsfield** reçoit le prix Nobel en physiologie et médecine.
- **1976** : premier prototype français de tomographe à rayon X, au CHU de Grenoble.
- **80** : émergence et développement de imagerie 3D.

La tomographie X, γ , RMN.. constituent 1/3 du marché de imagerie médicale.

Quelques applications

- Neuro-science (TEP) : identification des aires corticales, suivi du métabolisme...
- Anatomie (imagerie X), étude des structures denses.
- Étude fonctionnelle (TEP, TEMP)
- GMCAO (imagerie X), chirurgie interventionnelle.



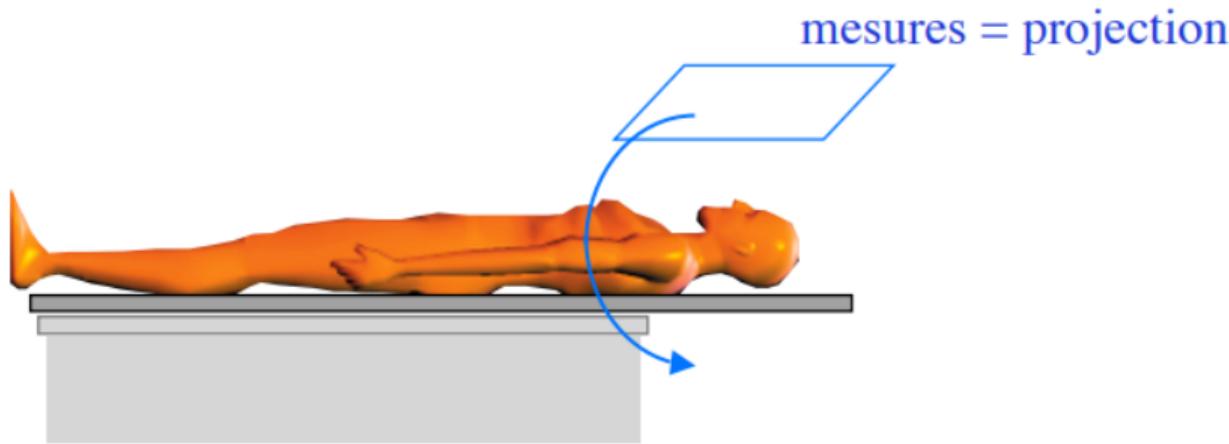
Impact sur la santé

L'interaction rayonnement/matière est accompagnée d'un dépôt dénergie qui peut être associé à divers phénomènes :

- augmentation locale de l'agitation thermique
- ionisation des atomes
- rupture de liaisons chimiques

L'amélioration de la qualité des images requiert une augmentation des doses déposées, où un **compromis (dose supportée/qualité)** mais aussi où de nouveaux domaines de recherche : reconstruction à partir d'un faible nombre de mesures.

La tomographie en imagerie médicale

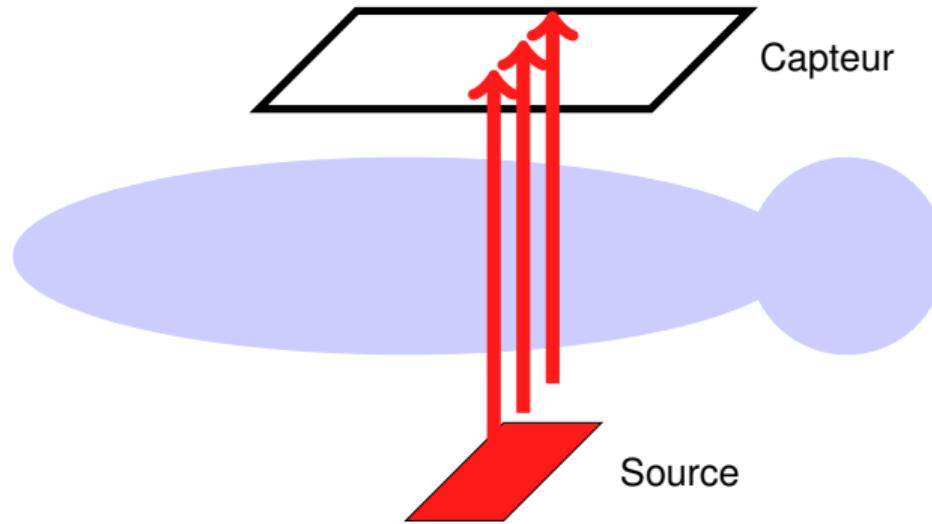


Mesures intégrales (projections) sous différentes incidences angulaires

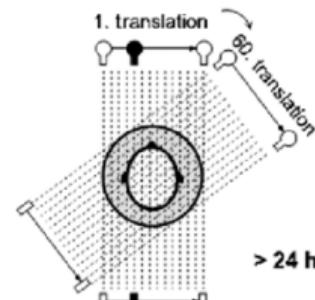
Deux types de mesure :

- La tomographie de transmission
- La tomographie d'émission

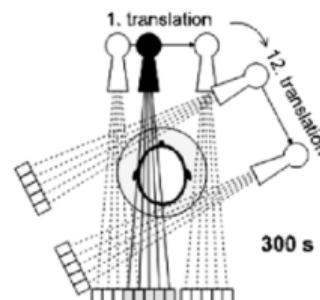
La tomographie de transmission



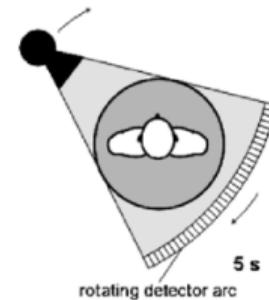
Tomographie de transmission : évolution des dispositifs



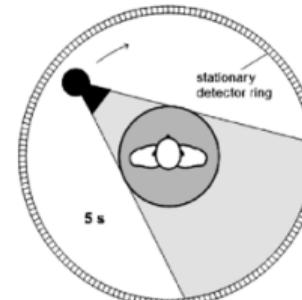
1st generation



2nd generation



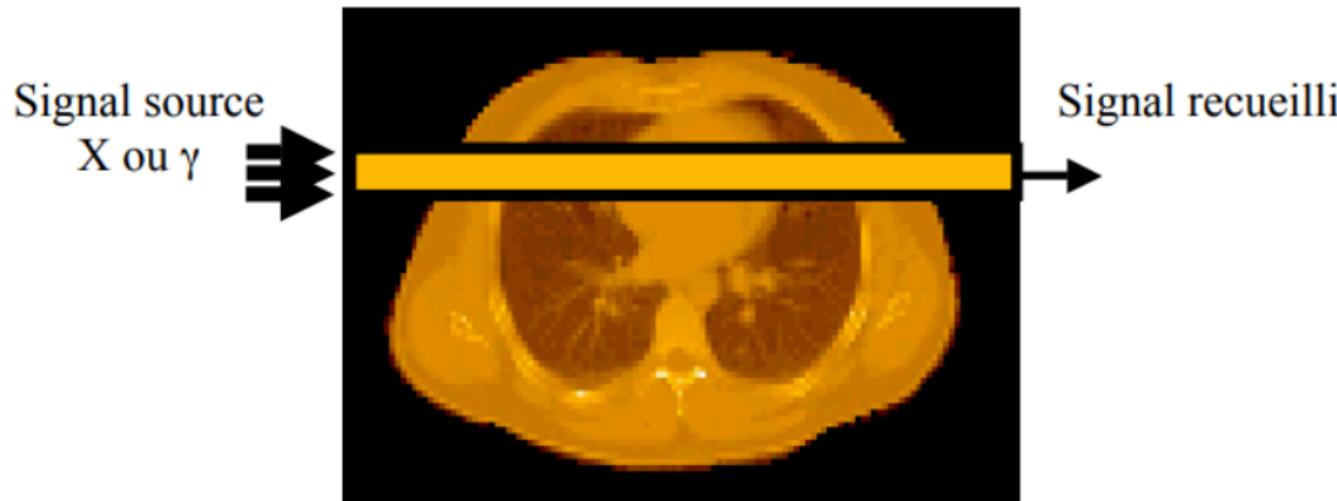
3rd generation



4th generation

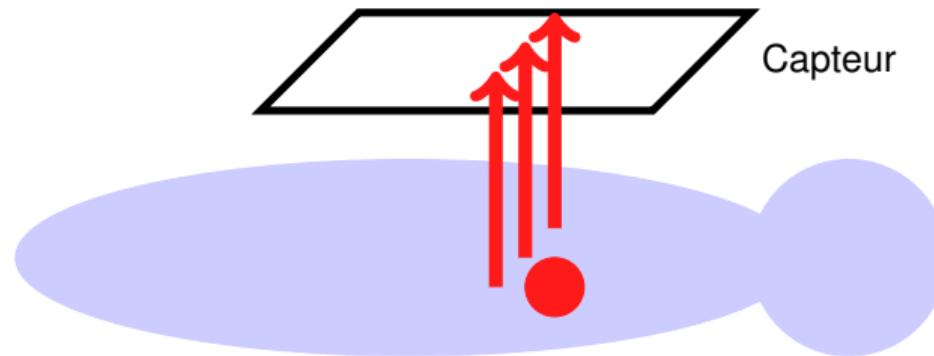
From [Kalender 2006]

Tomographie de transmission : mesure

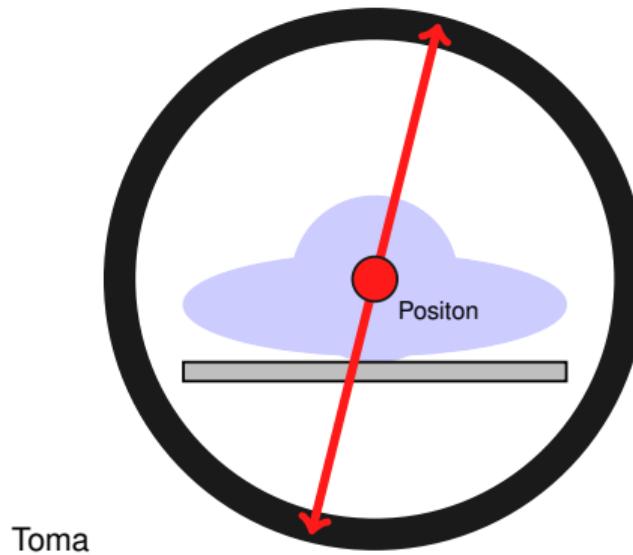


- Projection du rayonnement ayant traversé le patient
- Donne des informations sur la nature (densité, coefficient datténuation) des tissus traversés

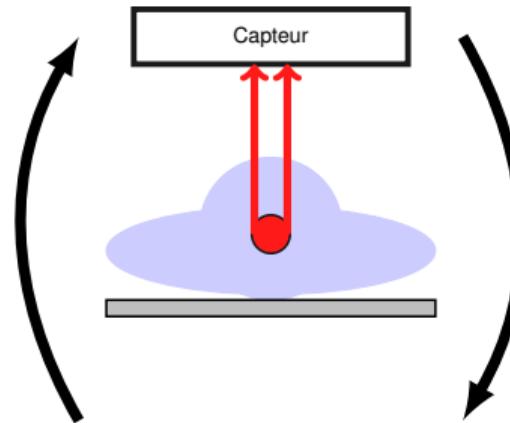
La tomographie d'émission



Tomographie d'émission : dispositifs

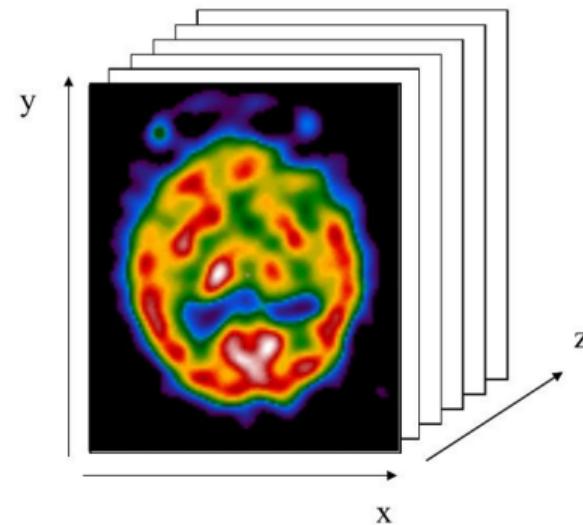


Toma



Tomographie d'émission : mesure

Source γ ou β^+ interne au patient



On cherche à reconstruire la cartographie 3D de la concentration du radiotraceur dans l'organisme

Tomographie par émission monophotonique (TEMP)



Bilan

En tomographie on cherche la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées (mesures intégrales).

Bilan

En tomographie on cherche la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées (mesures intégrales).

- La tomographie de transmission :

- Source commandée par un générateur externe activé lors de la mesure.
- Paramètre d'intérêt = coefficient d'atténuation

Bilan

En tomographie on cherche la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées (mesures intégrales).

- La tomographie de transmission :

- Source commandée par un générateur externe activé lors de la mesure.
- Paramètre d'intérêt = coefficient d'atténuation

- La tomographie d'émission :

- Source du rayonnement interne à la matière/patient.
- Paramètre d'intérêt = carte d'activité

Sommaire

1. Introduction

2. Modélisation de la mesure

- 2.1 La mesure en tomographie par transmission
- 2.2 La mesure en tomographie par émission

3. Transformée de Radon

Sommaire

1. Introduction

2. Modélisation de la mesure

2.1 La mesure en tomographie par transmission

2.2 La mesure en tomographie par émission

3. Transformée de Radon

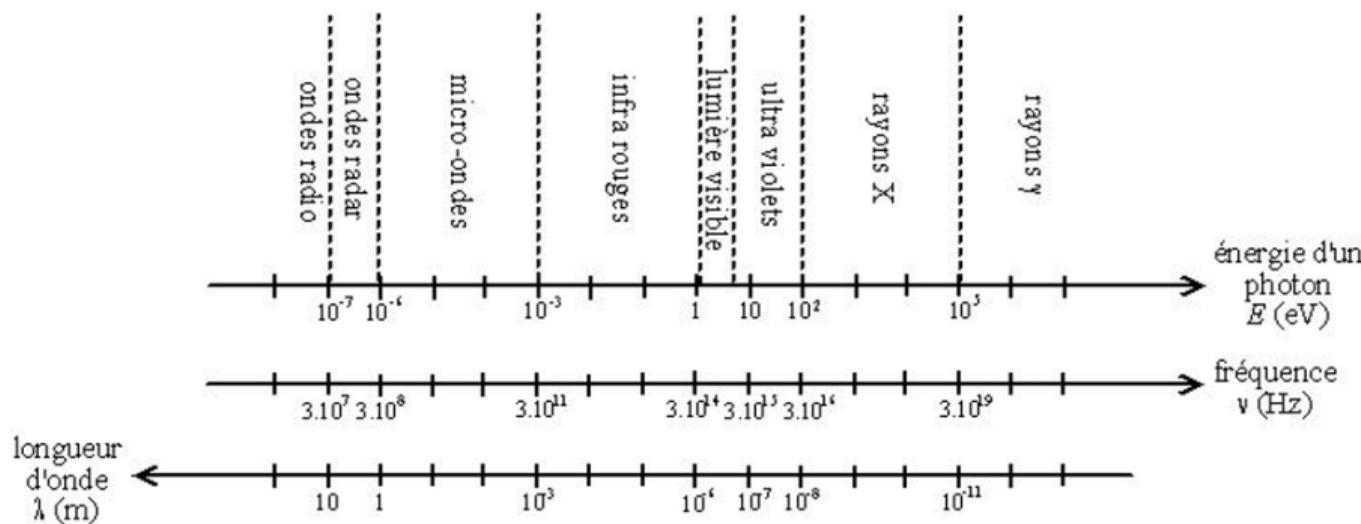
Qu'est ce que la mesure ?

Le rayon émergent fournit une mesure globale intégrant la contribution de toutes les régions traversées. Plus précisément, on obtient une projection de l'image cherchée selon un noyau d'intégration (exemple : radio du thorax). La transformée projective est caractéristique du système de mesure :

- RMN : transformée de Fourier
- Tomographie : transformée de Radon

Modèle physique

Rayonnement électromagnétique : $E = h\nu$



Procédé de génération

Rayons X

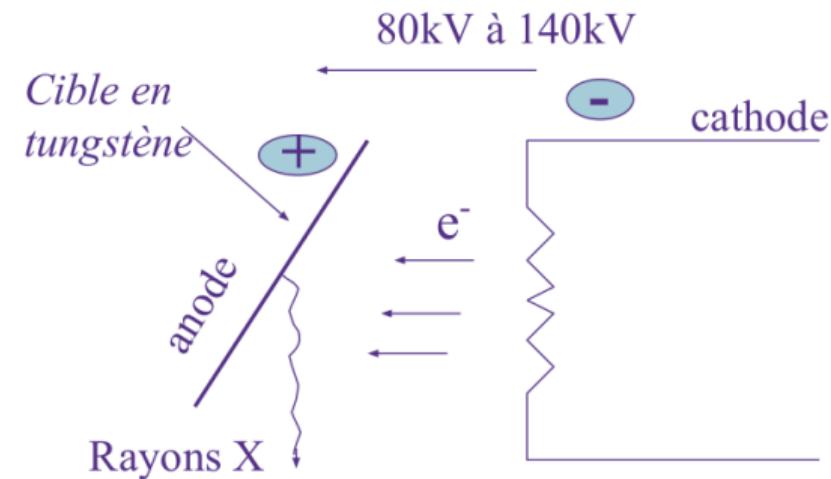
Découverts en 1895 par Röntgen en Allemagne (reçoit le prix Nobel en 1901) : ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, rayonnement ionisant.

Procédé de génération

Rayons X

Découverts en 1895 par Röntgen en Allemagne (reçoit le prix Nobel en 1901) : ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, rayonnement ionisant.

Des photons sont émis lors de la transition d'un électron d'un niveau d'énergie à un autre.



Procédé de génération

Lors de la production de rayons X, le rayonnement émis sera constitué :

Procédé de génération

Lors de la production de rayons X, le rayonnement émis sera constitué :

- d'un spectre continu : due au **rayonnement de Bremsstrahlung** (rayonnement de freinage) : un électron passant près d'un atome de Tungstène est dévié. Il perd de l'énergie. L'énergie libérée donne lieu à un photon.

Procédé de génération

Lors de la production de rayons X, le rayonnement émis sera constitué :

- d'un spectre continu : due au **rayonnement de Bremsstrahlung** (rayonnement de freinage) : un électron passant près d'un atome de Tungstène est dévié. Il perd de l'énergie. L'énergie libérée donne lieu à un photon.
- d'un spectre discret : l'énergie du photon produit, dépend de la différence des niveaux d'énergies de l'atome de Tungstène.

Interactions rayonnement/matière (échelle microscopique)

Deux phénomènes physiques principaux vont conduire à une atténuation du faisceau incident :

Interactions rayonnement/matière (échelle microscopique)

Deux phénomènes physiques principaux vont conduire à une atténuation du faisceau incident :

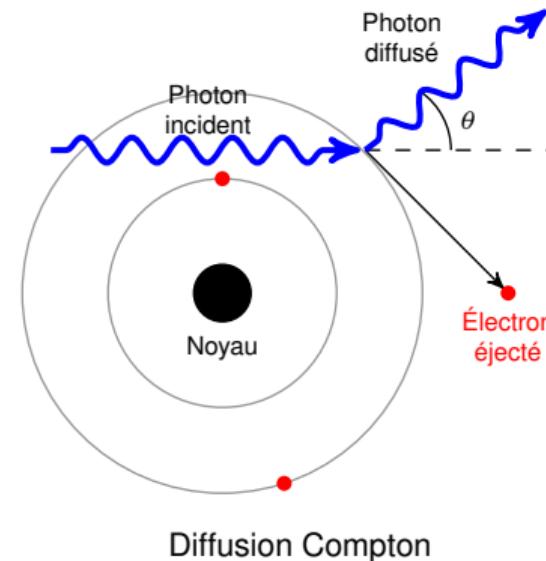
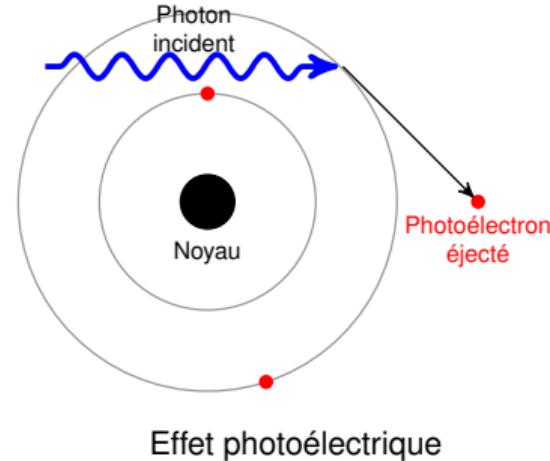
- **Effet photoélectrique** : absorption du photon par un atome et libération d'électrons. La probabilité d'absorption augmente avec le numéro atomique du noyau.

Interactions rayonnement/matière (échelle microscopique)

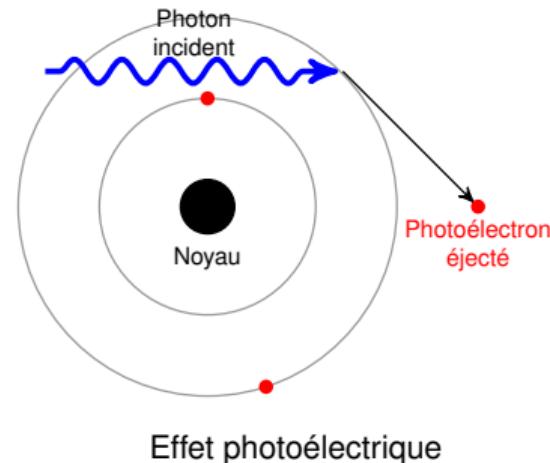
Deux phénomènes physiques principaux vont conduire à une atténuation du faisceau incident :

- **Effet photoélectrique** : absorption du photon par un atome et libération d'électrons. La probabilité d'absorption augmente avec le numéro atomique du noyau.
- **Diffusion compton** : collision entre le photon incident et un électron entraîne l'éjection de l'électron et déviation du photon dans une autre direction et à une autre longueur d'onde.

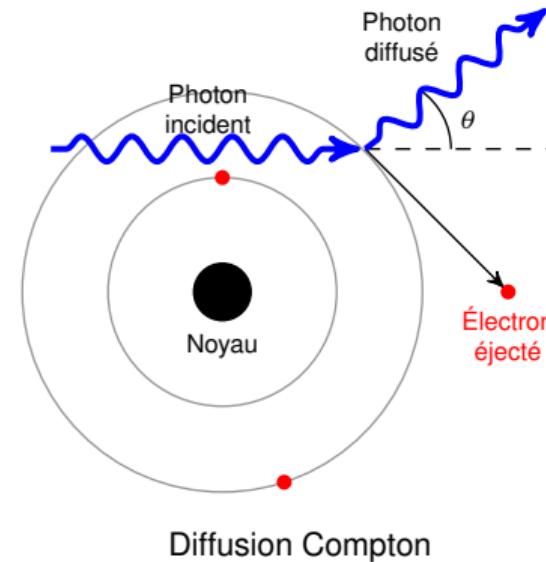
Interactions rayonnement/matière (échelle microscopique)



Interactions rayonnement/matière (échelle microscopique)



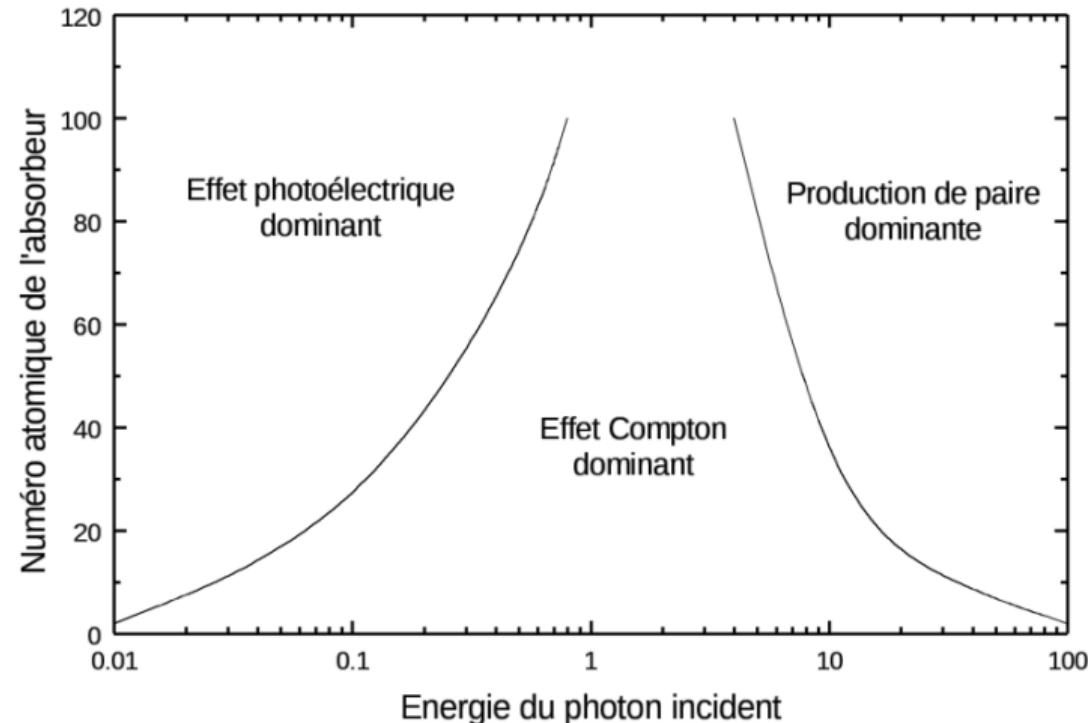
Effet photoélectrique



Diffusion Compton

⇒ Atténuation du faisceau incident.

Lien énergie du rayonnement/effet prédominant

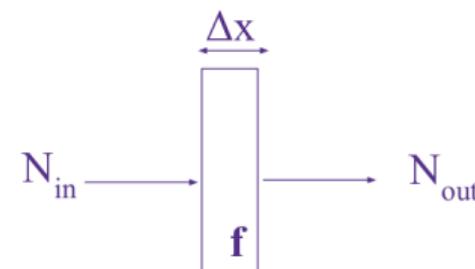


La loi de Beer-Lambert (échelle macroscopique)

Tout faisceau de rayon X traversant un objet subit une perte de photons qui s'exprime par la loi de Beer-Lambert :

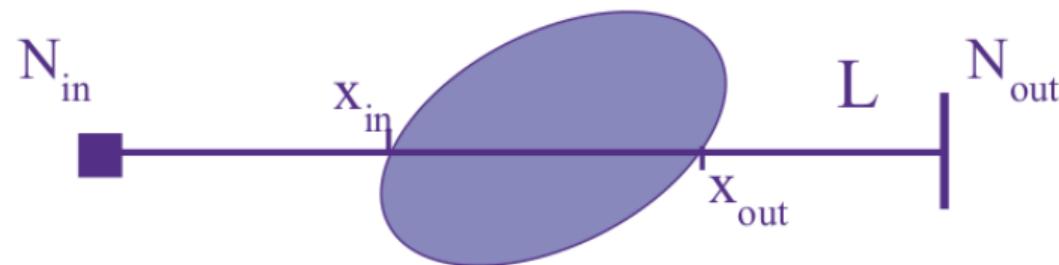
$$\Delta N = -fN\Delta x \quad (1)$$

f : coefficient d'atténuation linéaire (effet photoélectrique+ Compton) dépend du matériau (mm^{-1}).



Exemple : à 60KeV, eau(0.203/cm), substance blanche cerveau(0.210/cm), substance grise(0.212/cm) ...

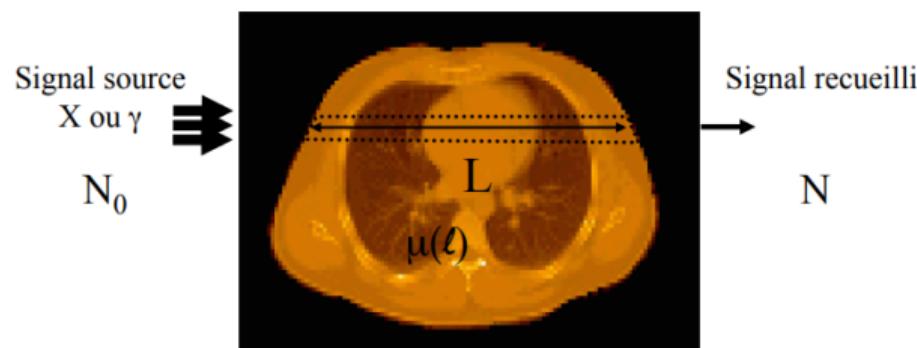
Intégration de la loi de Beer-Lambert



$$\int_{N_{in}}^{N_{out}} \frac{dN}{N} = - \int_{x_{in}}^{x_{out}} f(x) dx, \text{ d'où } \ln \frac{N_{in}}{N_{out}} = \int_L f(x) dx$$

Problème à résoudre

La mesure en tomographie par transmission correspond aux intégrales de ligne de la fonction $\mu(l)$, qui représente la cartographie du coefficient d'atténuation dans le milieu :



$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_L \mu(l) dl$$

→ Le but de la reconstruction tomographique est de déterminer $\mu(l)$ à partir de ses intégrales de lignes.

Sommaire

1. Introduction

2. Modélisation de la mesure

2.1 La mesure en tomographie par transmission

2.2 La mesure en tomographie par émission

3. Transformée de Radon

La mesure en tomographie par émission

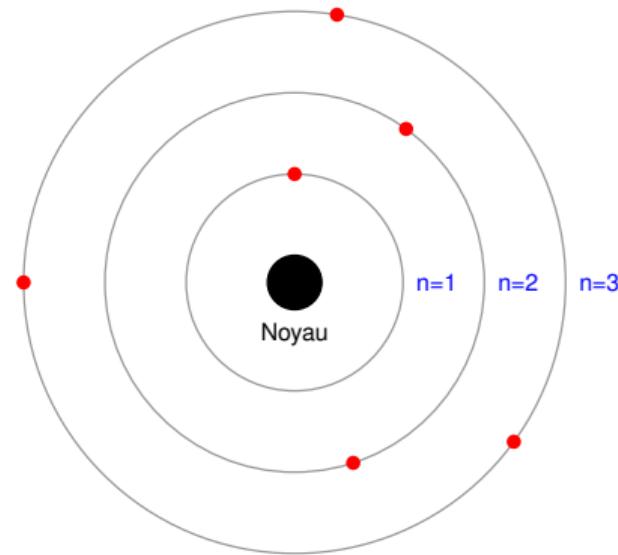
Tomographie d'émission

On **injecte** un produit radioactif au patient qui va se déposer sur des cellules cibles. On cherche à localiser et quantifier ces sources. Cette fois, l'inconnue f désigne donc **les sources d'émission** (et non les coefficients d'absorption).

Atome

Modèle de Bohr

Les électrons peuvent rester indéfiniment en orbite stable autour du noyau sans perte d'énergie. Ces orbites stables, ou couches électroniques, sont identifiées par leur nombre quantique principal n pouvant prendre seulement des valeurs entières ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Notations

- Z : numéro atomique, correspond au nombre de charges positives dans le noyau (proton) et caractérise l'élément chimique auquel appartient l'atome.
- A : nombre total de nucléons (proton + neutron) correspond à la masse du noyau.
- N : nombre de neutrons ($A - Z$).
- La notation utilisée pour résumer la composition atomique d'un élément chimique X est : ${}^A_Z X_N$ ou simplement ${}^A X$.

Radionucléide

Le nombre de nucléons ou le rapport entre le nombre de protons et de neutrons au sein du noyau conditionne la stabilité du noyau atomique. On distingue trois types d'états :

Radionucléide

Le nombre de nucléons ou le rapport entre le nombre de protons et de neutrons au sein du noyau conditionne la stabilité du noyau atomique. On distingue trois types d'états :

- 1 L'état fondamental dans lequel l'arrangement des nucléons est le plus stable.

Radionucléide

Le nombre de nucléons ou le rapport entre le nombre de protons et de neutrons au sein du noyau conditionne la stabilité du noyau atomique. On distingue trois types d'états :

- 1** L'état fondamental dans lequel l'arrangement des nucléons est le plus stable.
- 2** L'état excité où le noyau est tellement instable qu'il se transforme directement pour passer dans un autre état.

Radionucléide

Le nombre de nucléons ou le rapport entre le nombre de protons et de neutrons au sein du noyau conditionne la stabilité du noyau atomique. On distingue trois types d'états :

- 1 L'état fondamental dans lequel l'arrangement des nucléons est le plus stable.
- 2 L'état excité où le noyau est tellement instable qu'il se transforme directement pour passer dans un autre état.
- 3 L'état métastable (ou isomérique) où le noyau est également instable mais a une durée de vie suffisamment longue ($> 10^{-12}$ s) avant de se transformer dans un autre état.

Radionucléide

Le nombre de nucléons ou le rapport entre le nombre de protons et de neutrons au sein du noyau conditionne la stabilité du noyau atomique. On distingue trois types d'états :

- 1 L'état fondamental dans lequel l'arrangement des nucléons est le plus stable.
- 2 L'état excité où le noyau est tellement instable qu'il se transforme directement pour passer dans un autre état.
- 3 L'état métastable (ou isomérique) où le noyau est également instable mais a une durée de vie suffisamment longue ($> 10^{-12}$ s) avant de se transformer dans un autre état.

Un nucléide désigne un noyau atomique caractérisé par son nombre de protons et de neutrons ainsi que par l'état d'énergie nucléaire dans lequel il se trouve.

→ Radionucléide : nucléide radioactif.

Décroissance radioactive

La décroissance radioactive désigne le processus qui permet à un noyau instable de se transformer dans un état plus stable.

Décroissance radioactive

La décroissance radioactive désigne le processus qui permet à un noyau instable de se transformer dans un état plus stable.

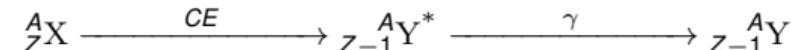
- Transition isomérique : un radionucléide dans un état métastable se désintègre dans un état plus stable sans subir de transmutation.



Ex : Technetium-99m (^{99m}Tc).

Décroissance radioactive

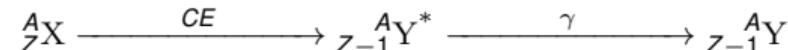
- Capture électronique : un électron de la couche électronique est absorbé par le noyau pour se combiner avec un proton et ainsi former un neutron.



Ex : Indium-111 (^{111}In), Iode-123 (^{123}I), Thallium-201 (^{201}Tl), Gallium-67 (^{67}Ga).

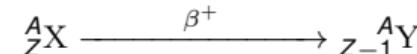
Décroissance radioactive

- Capture électronique : un électron de la couche électronique est absorbé par le noyau pour se combiner avec un proton et ainsi former un neutron.



Ex : Indium-111 (^{111}In), Iode-123 (^{123}I), Thallium-201 (^{201}Tl), Gallium-67 (^{67}Ga).

- Radioactivité β^+ : un proton du noyau est transformé en un neutron et un positon (électron chargé positivement).



Ex : Azote 13 (^{13}N), oxygène 15 (^{15}O), fluor 18 (^{18}F), carbone 11 (^{11}C).

Temps de demi-vie

On désigne par demi-vie le temps nécessaire pour qu'un radionucléide perde 50% de son activité initiale. L'activité d'un radionucléide correspond au nombre de désintégrations par seconde dans un échantillon donné. Elle se mesure en becquerel (Bq).

- Demi-vie trop courte : pas assez de temps pour le marquage du traceur et l'injection dans le patient.

Temps de demi-vie

On désigne par demi-vie le temps nécessaire pour qu'un radionucléide perde 50% de son activité initiale. L'activité d'un radionucléide correspond au nombre de désintégrations par seconde dans un échantillon donné. Elle se mesure en becquerel (Bq).

- Demi-vie trop courte : pas assez de temps pour le marquage du traceur et l'injection dans le patient.
- Demi-vie trop grande : la dose de radiation reçue par le patient en dehors de la salle d'imagerie serait trop importante.

Temps de demi-vie

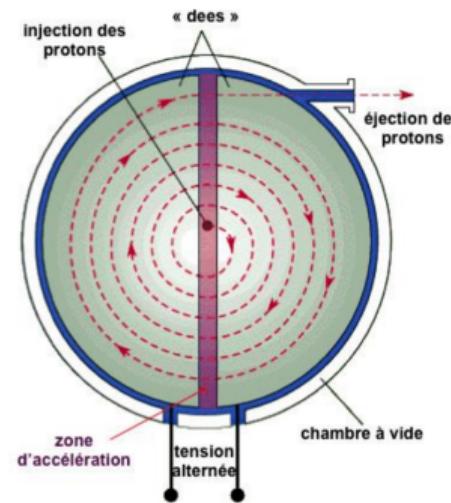
On désigne par demi-vie le temps nécessaire pour qu'un radionucléide perde 50% de son activité initiale. L'activité d'un radionucléide correspond au nombre de désintégrations par seconde dans un échantillon donné. Elle se mesure en becquerel (Bq).

- Demi-vie trop courte : pas assez de temps pour le marquage du traceur et l'injection dans le patient.
- Demi-vie trop grande : la dose de radiation reçue par le patient en dehors de la salle d'imagerie serait trop importante.

Une problématique de stockage et d'élimination du radionucléide se pose et les contraintes de radioprotection, pour le personnel et les patients, sont le quotidien des services de médecine nucléaire.

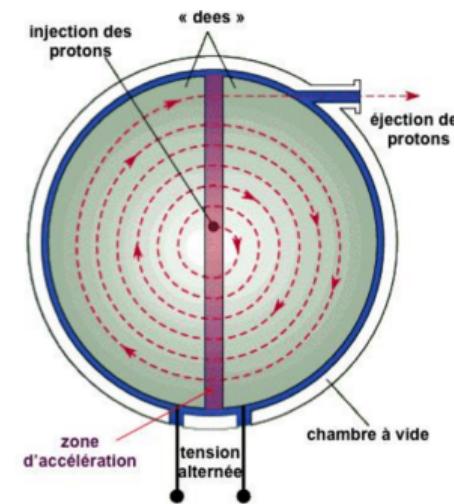
Création des radionucléides

- Cyclotron : des protons sont accélérés et bombardés sur une cible pour créer une réaction nucléaire. Une charge positive est alors ajoutée aux noyaux.
→ Désintégration par capture électronique ou émission de β^+ .



Création des radionucléides

- Cyclotron : des protons sont accélérés et bombardés sur une cible pour créer une réaction nucléaire. Une charge positive est alors ajoutée aux noyaux.
→ Désintégration par capture électronique ou émission de β^+ .
- Générateur de radionucléides : dispositif contenant un radionucléide parent et permettant d'extraire le radionucléide fils issu de la désintégration du parent.
Ex : le générateur molybdène-99 (^{99}Mo)/ ^{99m}Tc .



Médicaments radiopharmaceutiques

Médicament radiopharmaceutique : solution qui va être injectée au patient en vue de l'acquisition.

- Radionucléide seul utilisé sous une forme chimique simple (iode 123 ou thallium 201).

Médicaments radiopharmaceutiques

Médicament radiopharmaceutique : solution qui va être injectée au patient en vue de l'acquisition.

- Radionucléide seul utilisé sous une forme chimique simple (iode 123 ou thallium 201).
- Radionucléide couplé à une molécule vectrice qui possède un tropisme particulier pour l'organe ou la pathologie d'intérêt.

Médicaments radiopharmaceutiques

Médicament radiopharmaceutique : solution qui va être injectée au patient en vue de l'acquisition.

- Radionucléide seul utilisé sous une forme chimique simple (iode 123 ou thallium 201).
- Radionucléide couplé à une molécule vectrice qui possède un tropisme particulier pour l'organe ou la pathologie d'intérêt.
- Période biologique : temps nécessaire pour que la moitié des molécules administrées soit éliminée par l'organisme.

Médicaments radiopharmaceutiques

Médicament radiopharmaceutique : solution qui va être injectée au patient en vue de l'acquisition.

- Radionucléide seul utilisé sous une forme chimique simple (iode 123 ou thallium 201).
- Radionucléide couplé à une molécule vectrice qui possède un tropisme particulier pour l'organe ou la pathologie d'intérêt.
- Période biologique : temps nécessaire pour que la moitié des molécules administrées soit éliminée par l'organisme.
- Période effective du radiopharmaceutique : moment où la radioactivité injectée dans le patient a diminué de moitié (combinaison de la demi-vie du radionucléide et de la période biologique de la molécule vectrice).

Tomographie par émission monophotonique (TEMP)

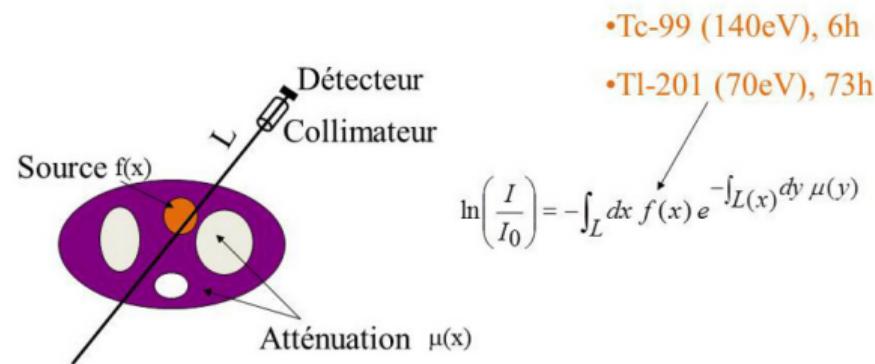
- Injection préalable d'un radiopharmaceutique émetteur de rayons gamma.

Tomographie par émission monophotonique (TEMP)

Tomographie par émission monophotonique (TEMP)

Depuis leur émission jusqu'à leur détection, les photons vont être atténués par l'objet traversé. Si on note $\mu(x)$ cette fonction d'atténuation, le modèle de mesure est donc :

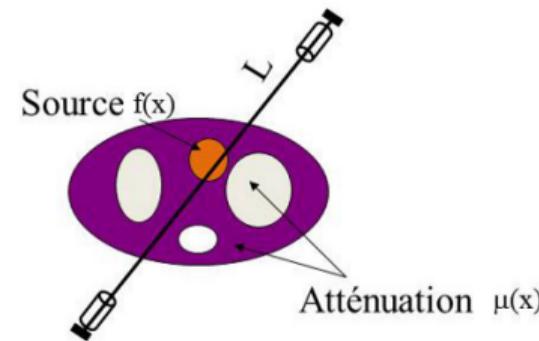
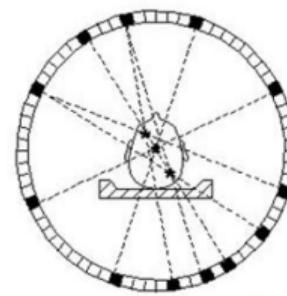
$$\ln \frac{I}{I_0} = \int_{x \in L} f(x) \exp\left(-\int_{y \in L(x)} \mu(y) dy\right) dx$$



La mesure correspond aux intégrales de lignes pondérées par une fonction d'atténuation.

Tomographie par émission de positrons (TEP)

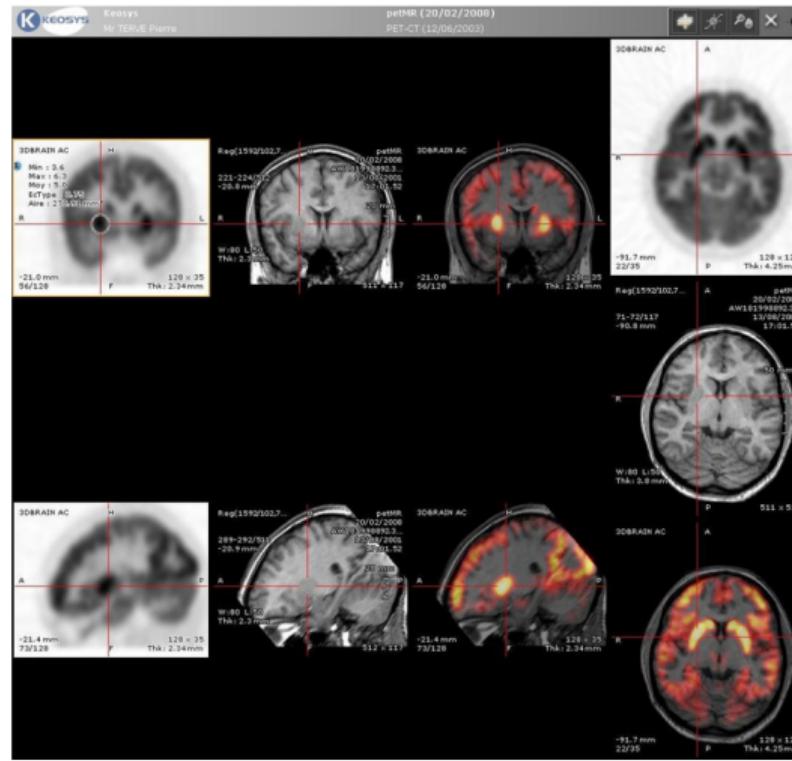
- Injection d'un radiopharmaceutique émetteurs de positrons.
- Détection quasi-simultanée des deux photons en opposition de phase par le cercle de détecteurs.



$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = - \int_L dx f(x) e^{-\int_L dy \mu(y)} = A \int_L dx f(x) \leftarrow {}^{15}\text{O}, {}^{18}\text{F}, {}^{13}\text{N}$$

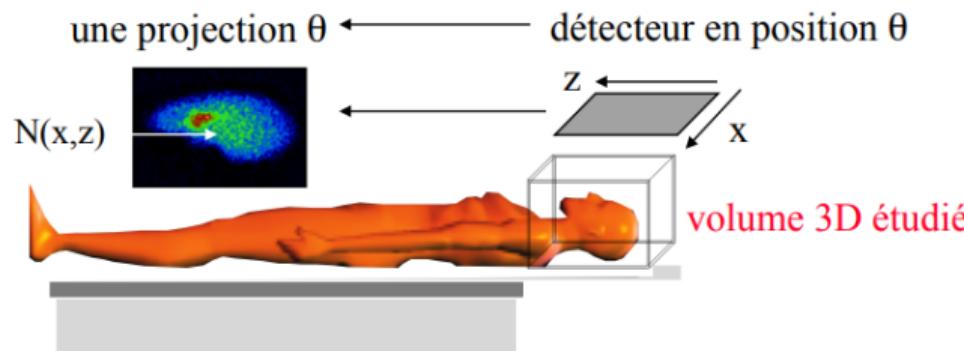
Une fois corrigée de l'atténuation, la mesure correspond aux intégrales de lignes comme en tomographie par transmission.

Exemple d'images TEP

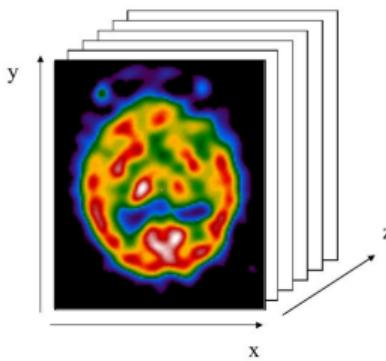


Formulation du problème en 3D

Acquisition d'un ensemble de projections 2D :



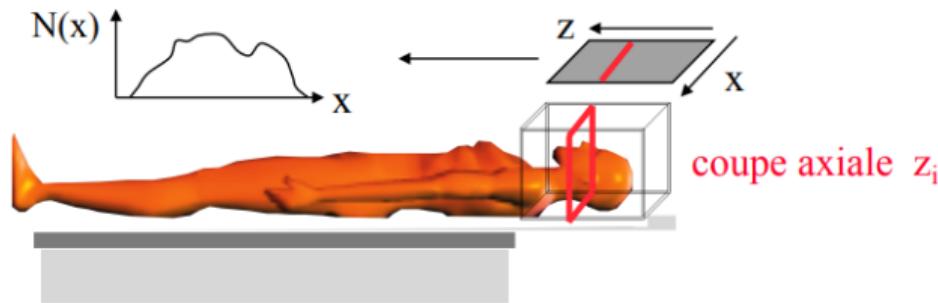
Reconstruction d'un objet 3D :



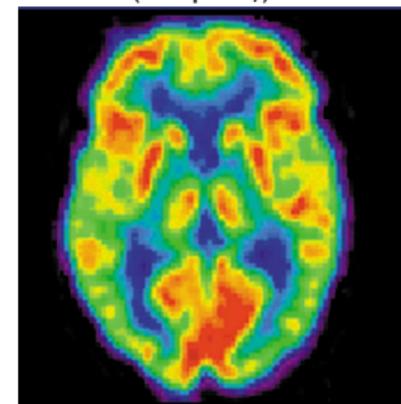
Formulation du problème en 2D

Acquisition d'un ensemble de projections 1D :

une ligne de projection ← détecteur en position θ

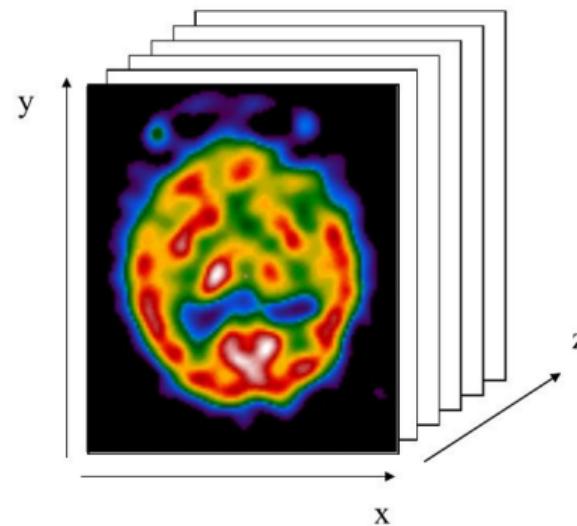


Reconstruction d'un objet 2D
(coupe z_i) :



Formulation du problème en 2D

Ensemble de coupes z_i = volume d'intérêt :

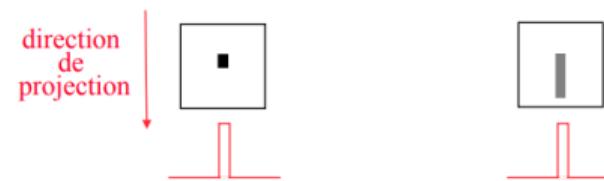


⇒ Estimation d'un volume 3D en reconstruisant indépendamment un ensemble de coupes 2D

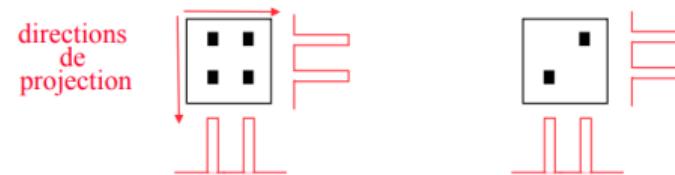
Problèmes liés à la reconstruction tomographique

Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections :

1 projection : plusieurs solutions possibles



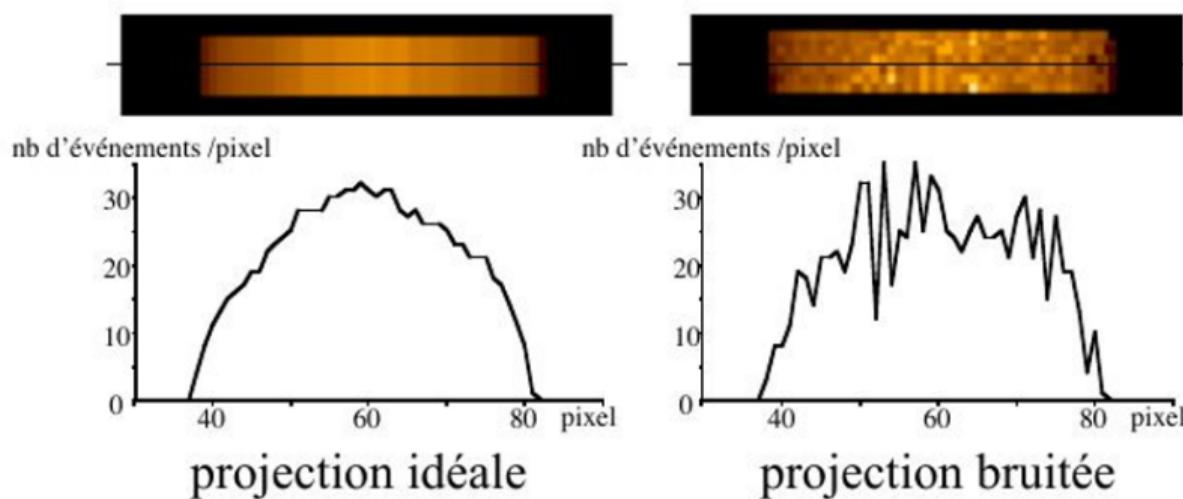
2 projections : plusieurs solutions possibles



⇒ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

Problèmes liés à la reconstruction tomographique

Mesures bruitées : Pas de solution exacte au problème de reconstruction



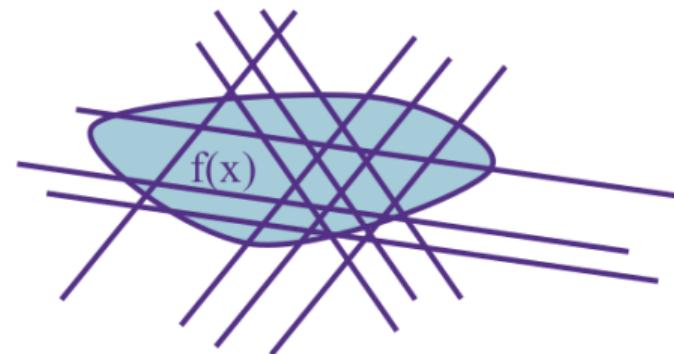
Problèmes liés à la reconstruction tomographique

Problème inverse mal posé :

- On dispose de mesures → il faut trouver ce qui a produit ces mesures
- La solution est instable → une petite différence sur les projections peut conduire à des reconstructions très différentes

Bilan

- But : identifier les coefficients d'absorption $f(x)$ (ou l'activité) de l'objet à partir de ses intégrales de lignes (fournis par la mesure).
- **Radon** (1917) montra qu'en 2D, la fonction f peut être identifiée si ses intégrales de lignes sont connues pour toute droite coupant son support.



Sommaire

1. Introduction

2. Modélisation de la mesure

- 2.1 La mesure en tomographie par transmission
- 2.2 La mesure en tomographie par émission

3. Transformée de Radon

Johann Radon



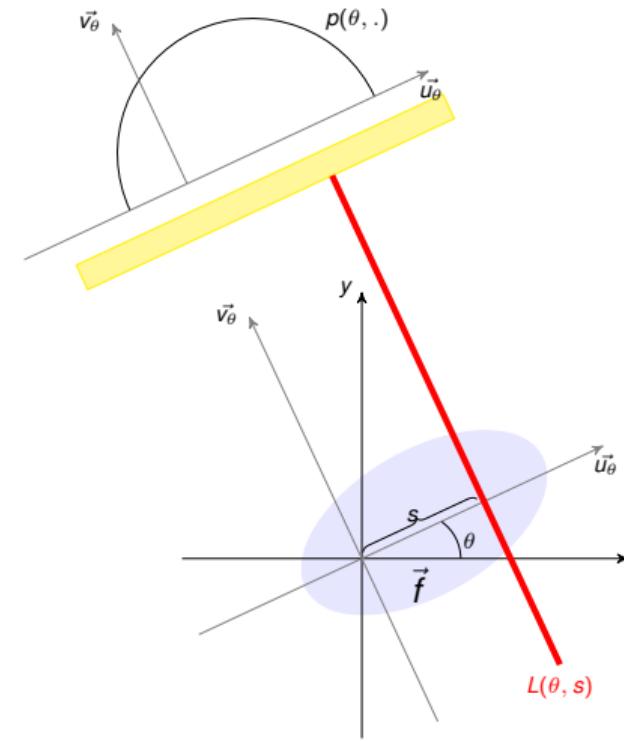
1887-1956

- Mathématicien Autrichien
- Formalisation de la transformée de Radon en 1917
- Aucune application pratique de son vivant (mort en 1956)
- Application aujourd'hui : CT, PET, SPECT, MRI, ...

1917 : Johann Radon : "De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions",
Math.Phys.Klass

Transformée de Radon

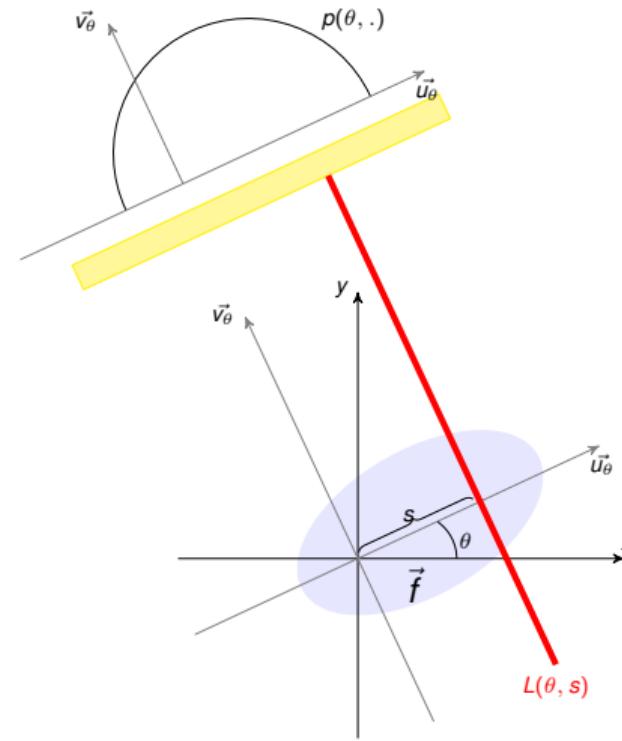
- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.



Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (2)$$



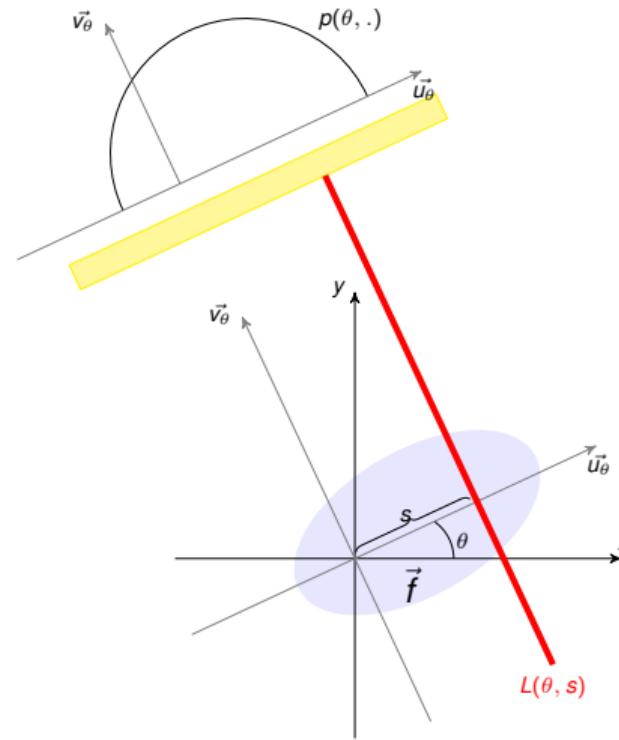
Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (2)$$

- L'ensemble des projections pour $s \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi[$ forme la transformée de Radon de \vec{f} .

$$(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos(\theta) - t \sin(\theta), s \sin(\theta) + t \cos(\theta)) dt \quad (3)$$



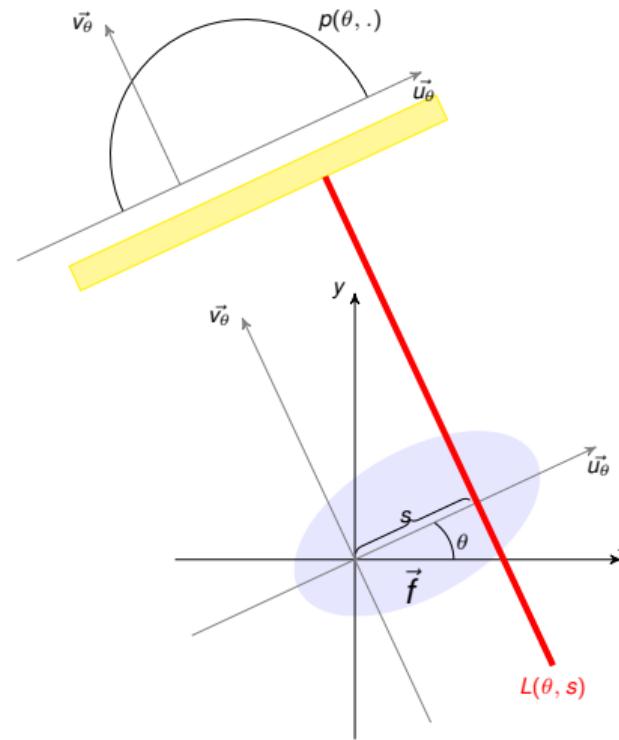
Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (2)$$

- L'ensemble des projections pour $s \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi[$ forme la transformée de Radon de \vec{f} .

$$(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos(\theta) - t \sin(\theta), s \sin(\theta) + t \cos(\theta)) dt \quad (3)$$

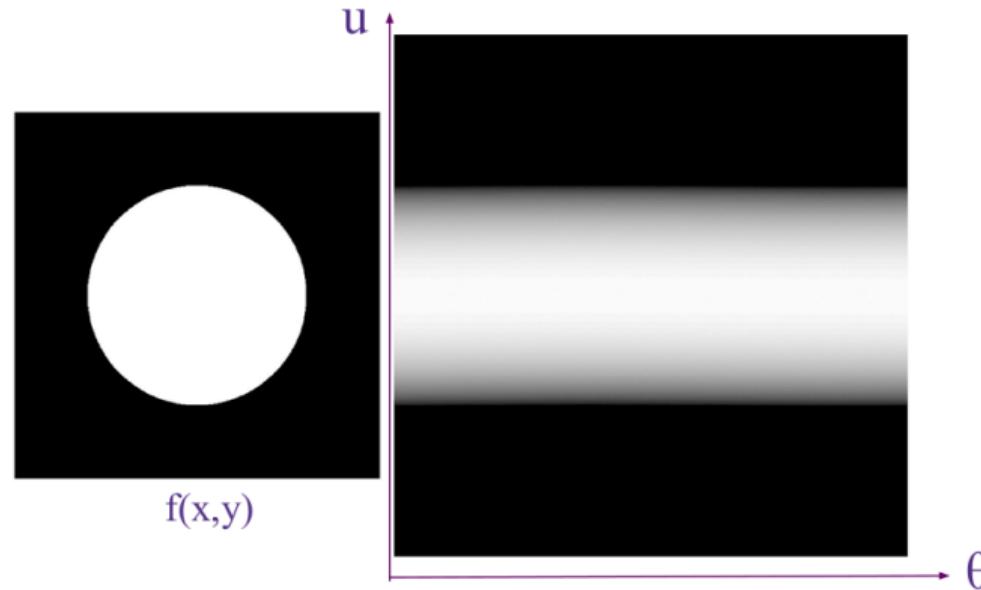


Reconstruction tomographique

Inversion de la transformée de Radon.

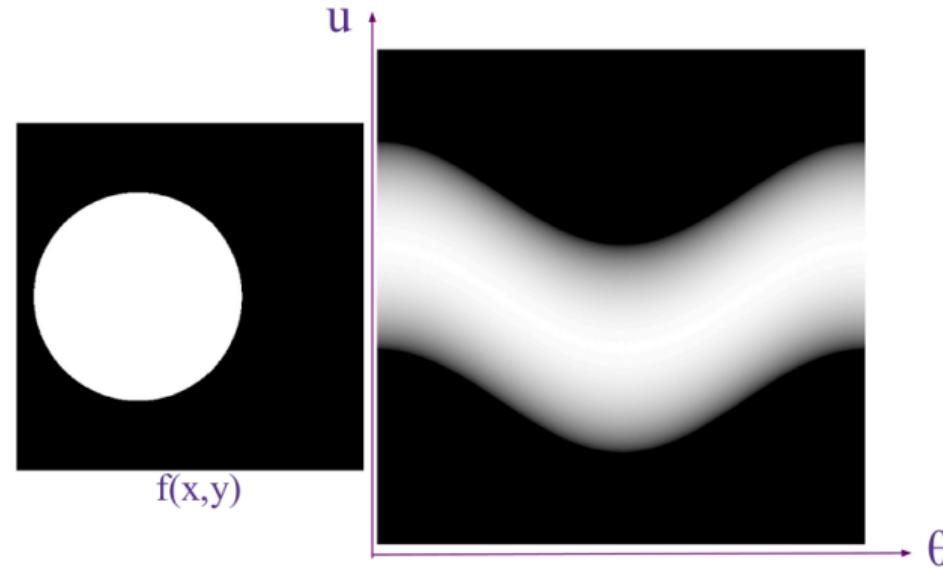
Transformée de Radon

- La transformée de Radon de $f(x, y)$ est l'ensemble des projections $p_\theta(u)$ pour $\theta \in [0, \pi[$.
- Elle peut se représenter sous forme d'un **sinogramme**.



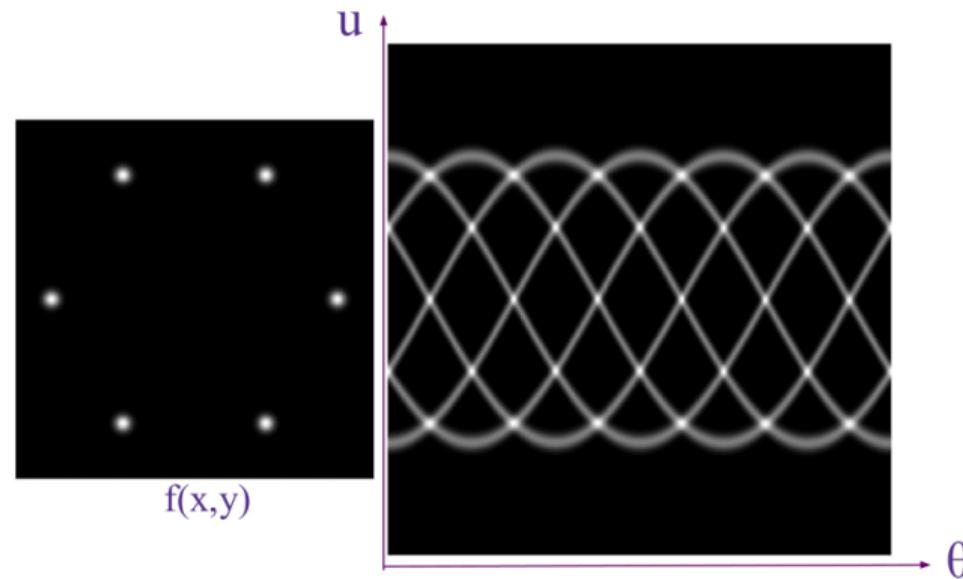
Transformée de Radon

- La transformée de Radon de $f(x, y)$ est l'ensemble des projections $p_\theta(u)$ pour $\theta \in [0, \pi[$.
- Elle peut se représenter sous forme d'un **sinogramme**.



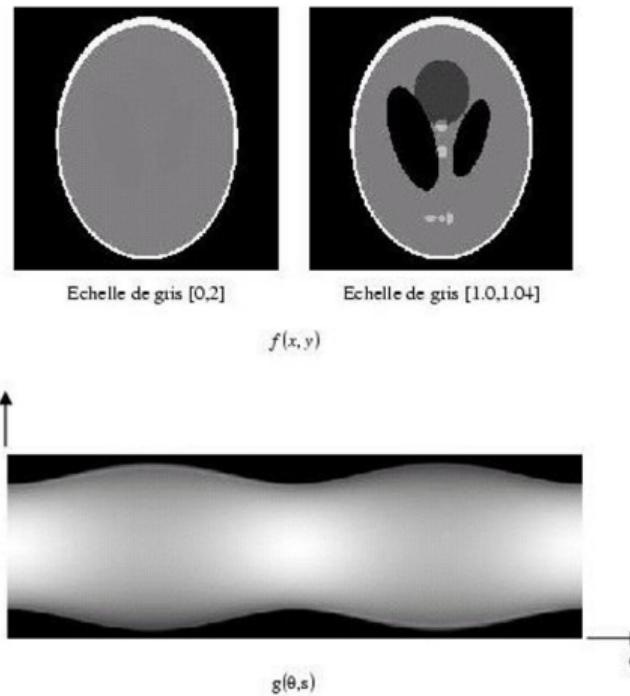
Transformée de Radon

- La transformée de Radon de $f(x, y)$ est l'ensemble des projections $p_\theta(u)$ pour $\theta \in [0, \pi[$.
- Elle peut se représenter sous forme d'un **sinogramme**.



Transformée de Radon

Fantôme de Shepp-Logan [?]



Transformée de Radon

- La reconstruction d'une image consiste à inverser la transformée de Radon → estimer $f(x, y)$ à partir de $p(\theta, u)$
- Reconstruction exacte avec une infinité de projections
- La quantité de rayons X transmis augmente avec le nombre d'incidences
- Intérêt des méthodes de reconstruction efficaces à partir de peu de projections (domaine de recherche actif)

Références