

Tomographie

Antoine Robert

Novembre 2023



Déroulement des séances

- Vendredi 17 novembre : cours 2h.
- Mercredi 22 novembre : cours 2h.
- Mercredi 29 novembre : TP 4h.
- Vendredi 15 décembre : Partiel 2h (40 min de tomographie).

Sommaire

1 Rappel

2 Reconstruction tomographique

- Reconstruction analytique
- Reconstruction discrète
 - Méthodes algébriques
 - Méthodes statistiques

Sommaire

1. Rappel

2.1 Reconstruction analytique

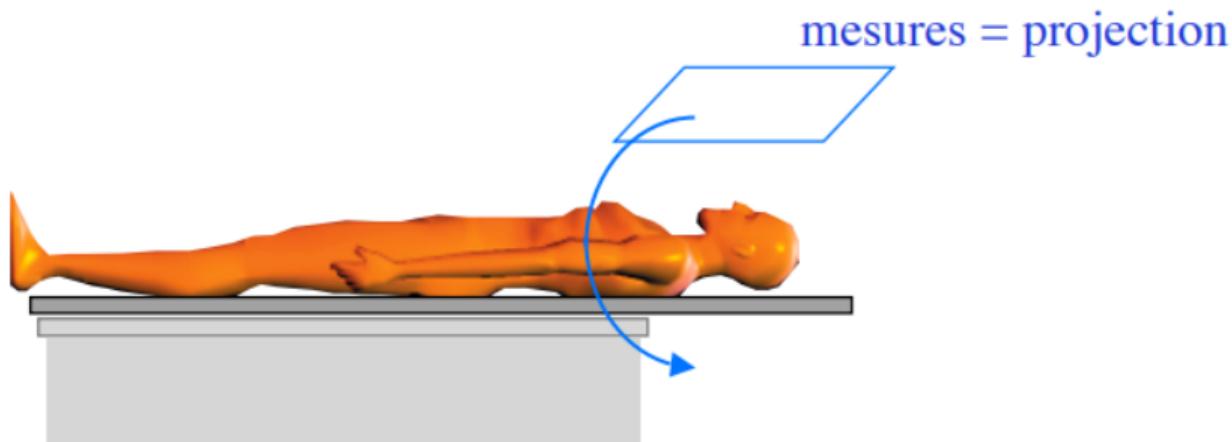
2.2 Reconstruction discrète

- Méthodes algébriques
 - Méthodes statistiques

Qu'est ce que la tomographie ?

- Définition : La tomographie (visualisation de coupes) regroupe l'ensemble des techniques d'imagerie permettant de restituer **la carte** d'un paramètre physique **selon un ou plusieurs plans de coupe**.
 - Finalité : observer la **composition de la matière** grâce à des rayonnements.
 - Principe : Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière ; mesure indirecte du paramètre relatif à l'objet d'intérêt.
 - Intérêt : **Localiser** dans l'espace et le temps des caractéristiques d'un objet, **sans le détruire**.
 - Application :
 - Imagerie médicale.
 - Paléontologie, archéologie.
 - Géophysique (sondage des océans, couches géologiques).
 - Contrôle de bagages.

La tomographie en imagerie médicale

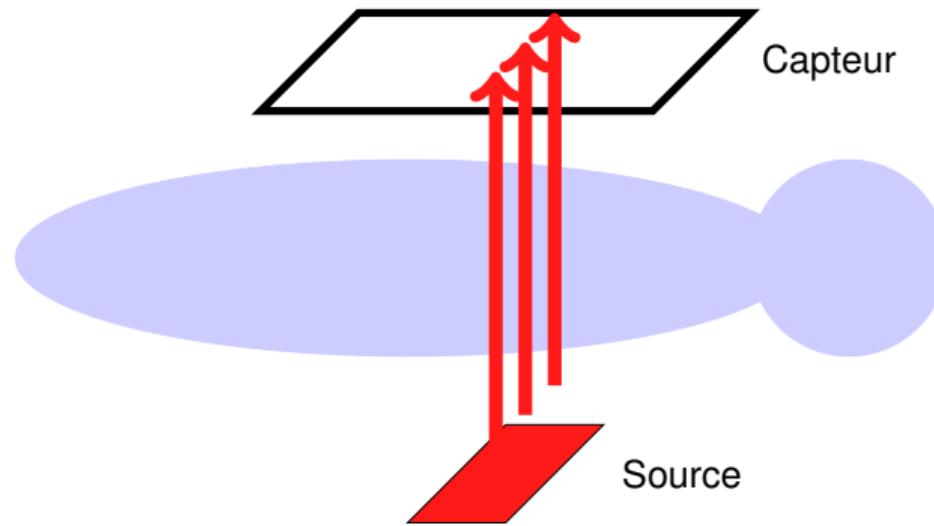


Mesures intégrales (projections) sous différentes incidences angulaires

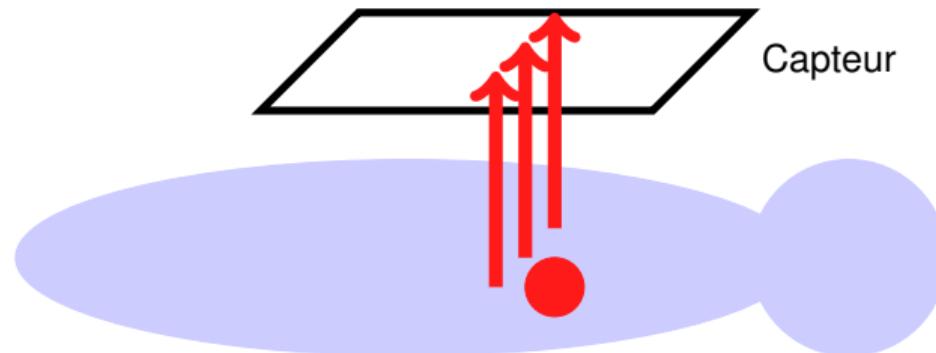
Deux types de mesure :

- La tomographie de transmission
 - La tomographie d'émission

La tomographie de transmission

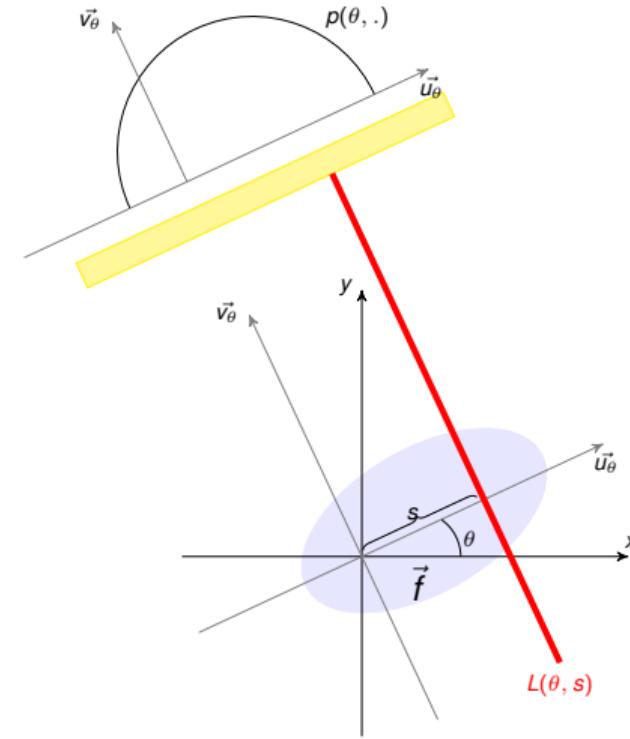


La tomographie d'émission



Transformée de Radon

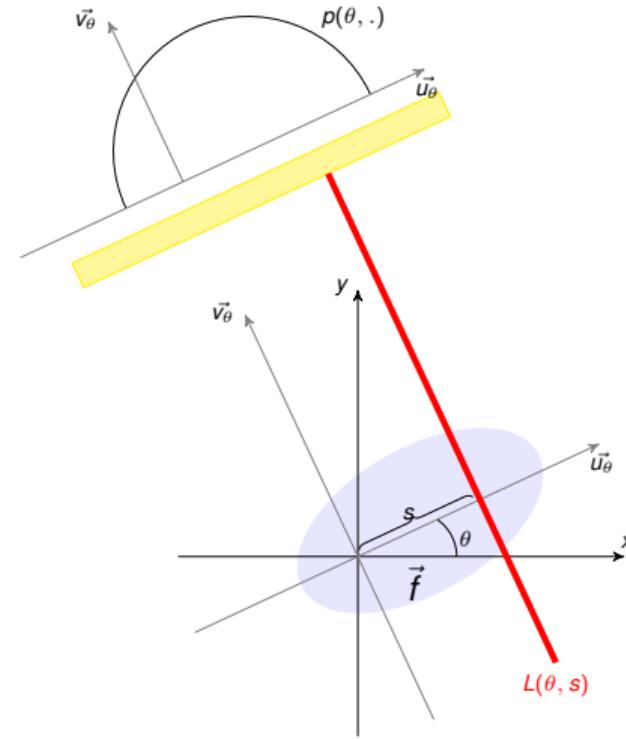
- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.



Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (1)$$



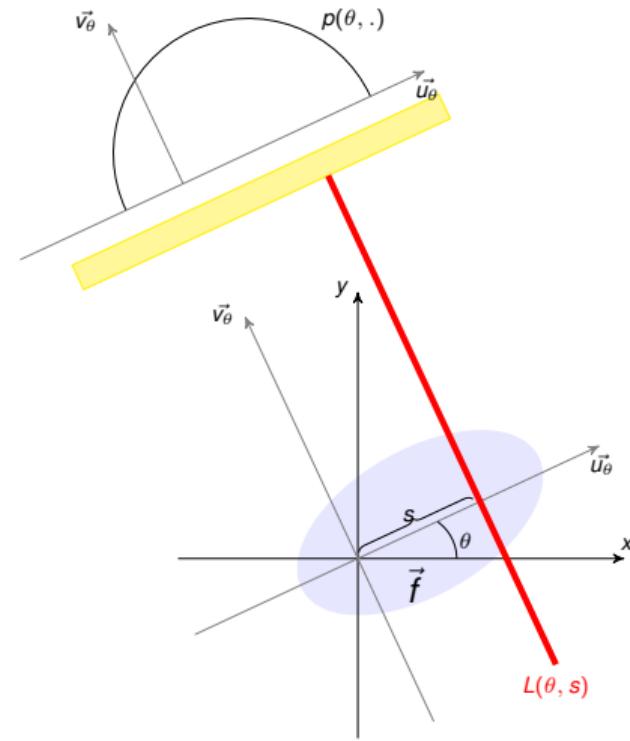
Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (1)$$

- L'ensemble des projections pour $s \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi[$ forme la transformée de Radon de \vec{f} .

$$(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos(\theta) - t \sin(\theta), s \sin(\theta) + t \cos(\theta)) dt \quad (2)$$



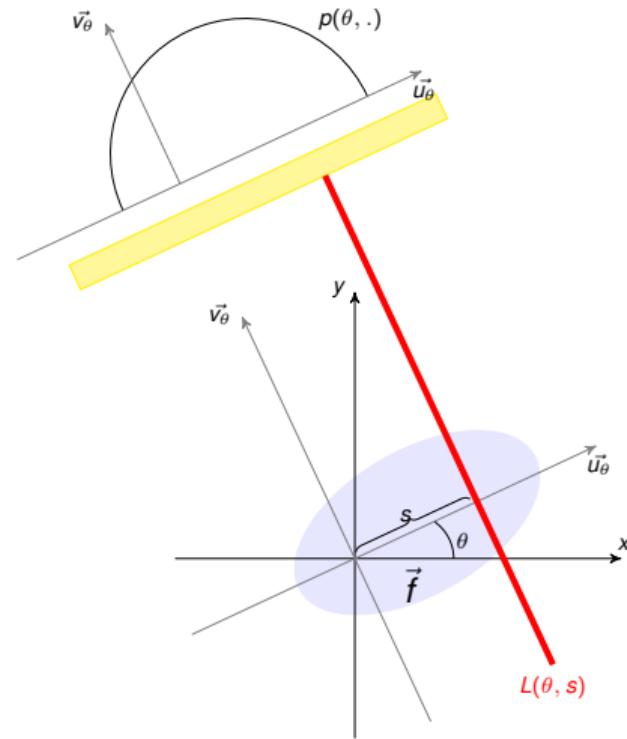
Transformée de Radon

- Soit $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction de densité à reconstruire.
- L'ensemble des lignes intégrales pour un angle θ donné forme une projection :

$$p(\theta, s) = \int_{L(\theta, s)} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (1)$$

- L'ensemble des projections pour $s \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi[$ forme la transformée de Radon de \vec{f} .

$$(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos(\theta) - t \sin(\theta), s \sin(\theta) + t \cos(\theta)) dt \quad (2)$$



Reconstruction tomographique

Inversion de la transformée de Radon.

Sommaire

1. Rappel

2. Reconstruction tomographique

2.1 Reconstruction analytique

2.2 Reconstruction discrète

- Méthodes algébriques
- Méthodes statistiques

Sommaire

1. Rappel

2. Reconstruction tomographique

2.1 Reconstruction analytique

2.2 Reconstruction discrète

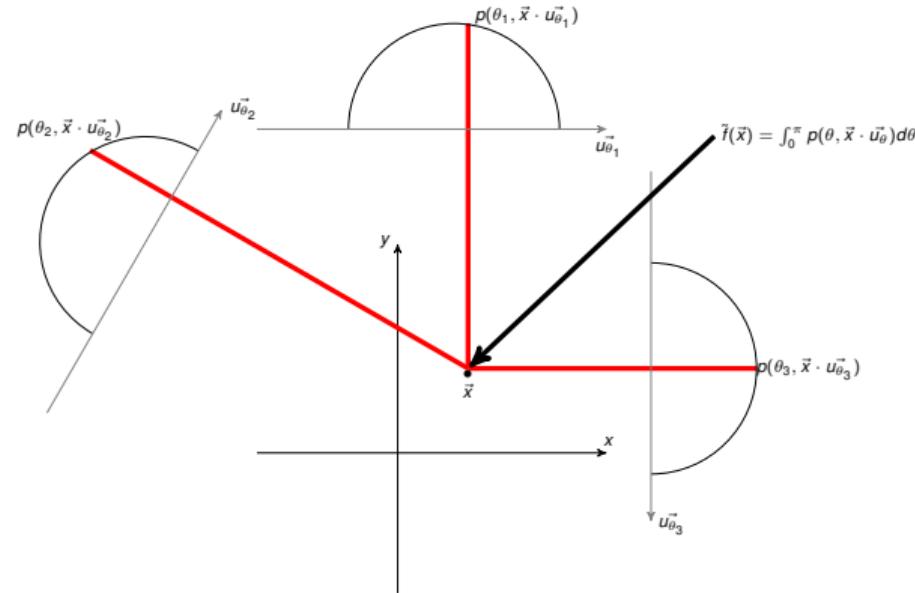
- Méthodes algébriques
- Méthodes statistiques

Reconstruction analytique

- Inversion analytique de la transformée de Radon = résolution d'équations intégrales
 - Expression continue du problème de reconstruction tomographique
 - Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée (FBP : Filtered Backprojection en anglais)

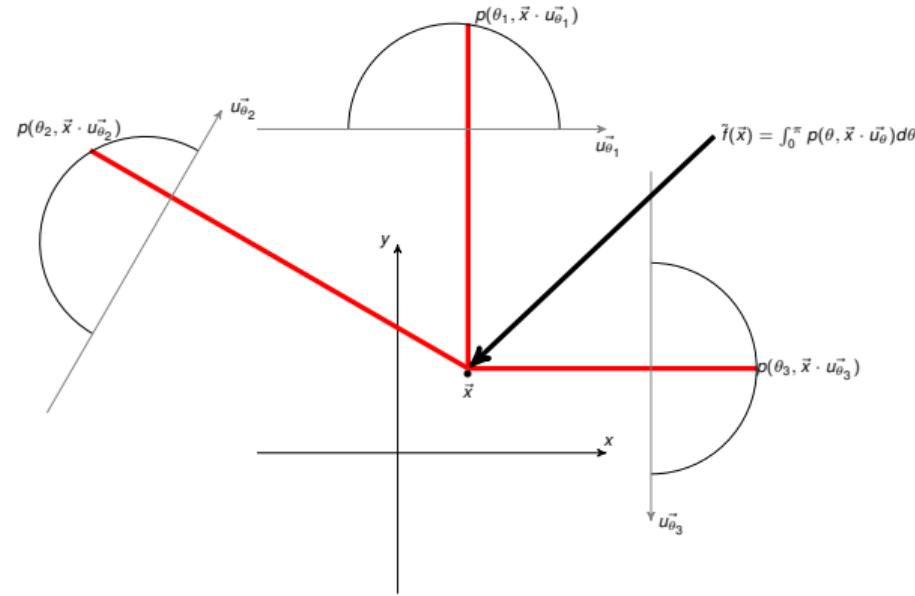
Opération de rétroprojection : formulation continue

- Pour chaque point de l'espace image (x, y) , on somme toutes les projections qui passent en ce point :



Opération de rétroprojection : formulation continue

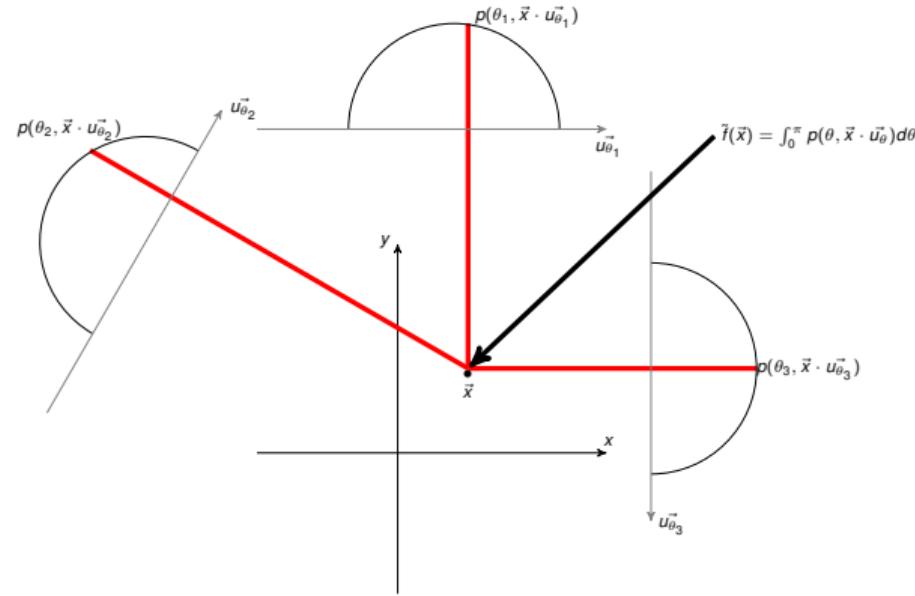
- Pour chaque point de l'espace image (x, y) , on somme toutes les projections qui passent en ce point :



- Image rétro-projetée : $(R^* p)(x, y) = \int_0^\pi p(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$

Opération de rétroprojection : formulation continue

- Pour chaque point de l'espace image (x, y) , on somme toutes les projections qui passent en ce point :



- Image rétro-projetée : $(R^* p)(x, y) = \int_0^\pi p(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$
 - **Attention :** $(R^* p)(x, y) \neq f(x, y)$

Rétroprojection

- #### ■ Artefacts d'épandage en étoile avec rétroprojection simple

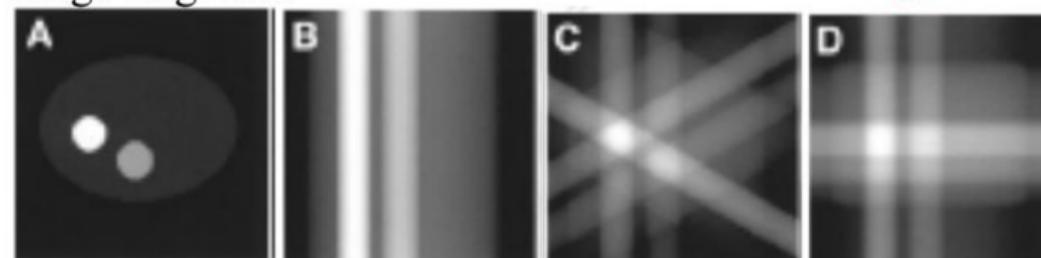
nombre de projections

image originale

1

11

△



16

32

64

Rappel : transformée de Fourier 1D

Transformée de Fourier 1D

$$(TFk)(\rho) = \hat{k}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s) e^{-2i\pi\rho s} ds$$

Rappel : transformée de Fourier 1D

Transformée de Fourier 1D

$$(TFk)(\rho) = \hat{k}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s) e^{-2i\pi\rho s} ds$$

Transformée de Fourier inverse 1D

$$k(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{k}(\rho) e^{2i\pi\rho s} d\rho$$

Rappel : transformée de Fourier 2D

Transformée de Fourier 2D

$$(TFf)(\rho_1, \rho_2) = \hat{f}(\rho_1, \rho_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(x\rho_1 + y\rho_2)} dx dy$$

Rappel : transformée de Fourier 2D

Transformée de Fourier 2D

$$(TFf)(\rho_1, \rho_2) = \hat{f}(\rho_1, \rho_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(x\rho_1 + y\rho_2)} dx dy$$

Transformée de Fourier inverse 2D

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\rho_1, \rho_2) e^{2i\pi(x\rho_1 + y\rho_2)} d\rho_1 d\rho_2$$

Théorème coupe-projection

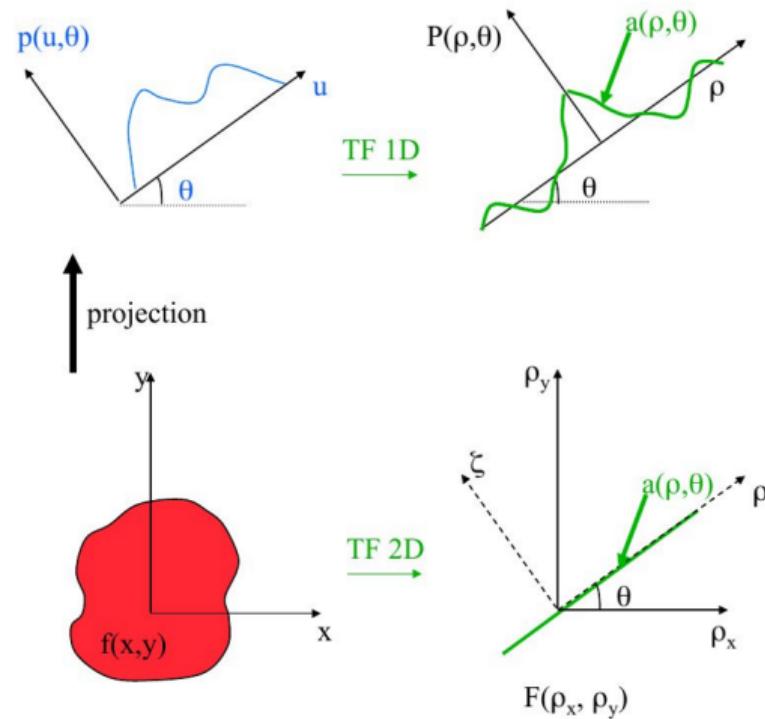
La transformée de Fourier monodimensionnelle, $\hat{p}(\theta, \rho)$, d'une projection $p(\theta, s)$ par rapport à s est égale à la transformée de Fourier bidimensionnelle $\hat{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ de $f(x, y)$.

Théorème coupe-projection

$$\hat{p}(\theta, \rho) = \hat{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

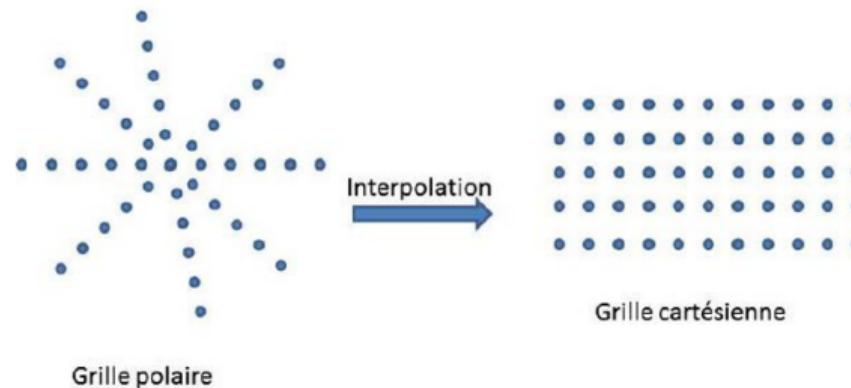
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta, s) e^{-2i\pi\rho s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(x\rho \cos \theta + y\rho \sin \theta)} dx dy$$

Théorème coupe-projection



Théorème coupe-projection

En pratique, difficile à exploiter du fait de l'échantillonnage des projections (interpolation nécessaire dans l'espace de Fourier) :



Rétroprojection filtrée

On peut retrouver exactement $f(x,y)$ (et donc inverser la transformée de Radon) grâce à la rétroprojection filtrée.

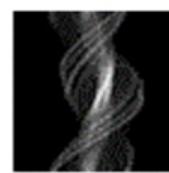
Rétroprojection filtrée

$$f(x, y) = \int_0^\pi p'(\theta, s)d\theta \text{ avec } p'(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\theta, \rho)|\rho|e^{2i\pi\rho s}d\rho$$

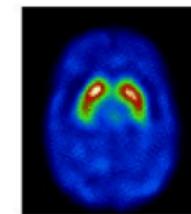
où $|\rho|$ est appelé filtre rampe.

⇒ L'objet $f(x, y)$ à reconstruire s'obtient à rétroprojectant les projections filtrées

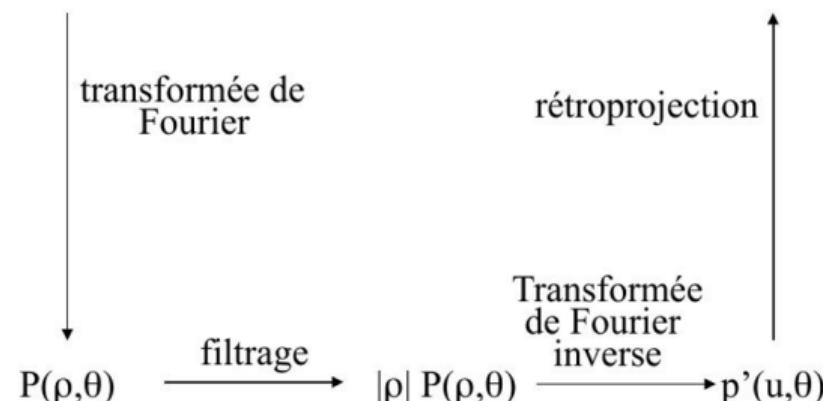
Rétroprojection filtrée



sinogramme
 $p(u,\theta)$

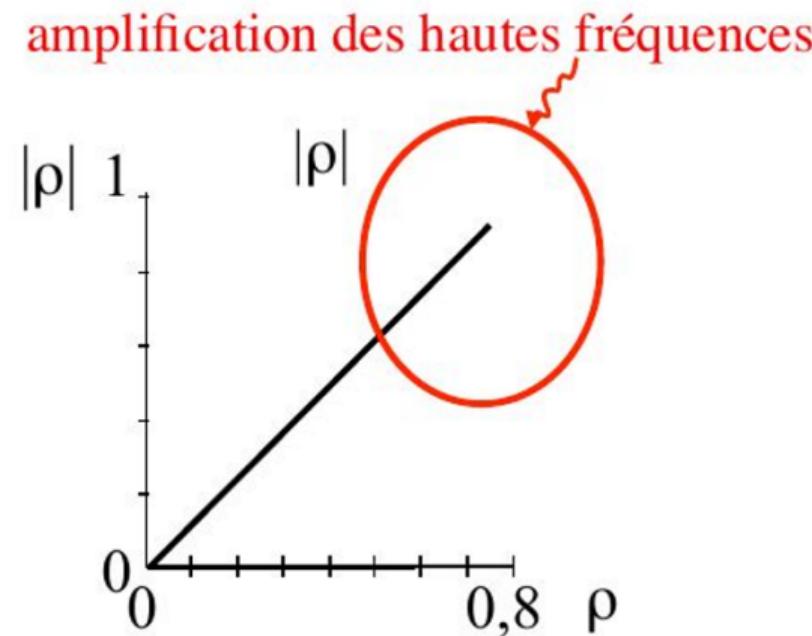


coupe reconstruite
 $f(x,y)$



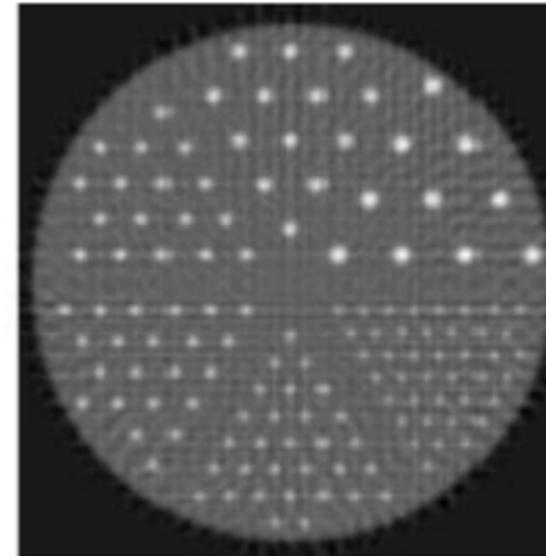
Choix du filtre

- Le filtrage s'effectue dans le domaine des fréquences
 - Idéalement il s'agit du filtre rampe $|p|$



Choix du filtre

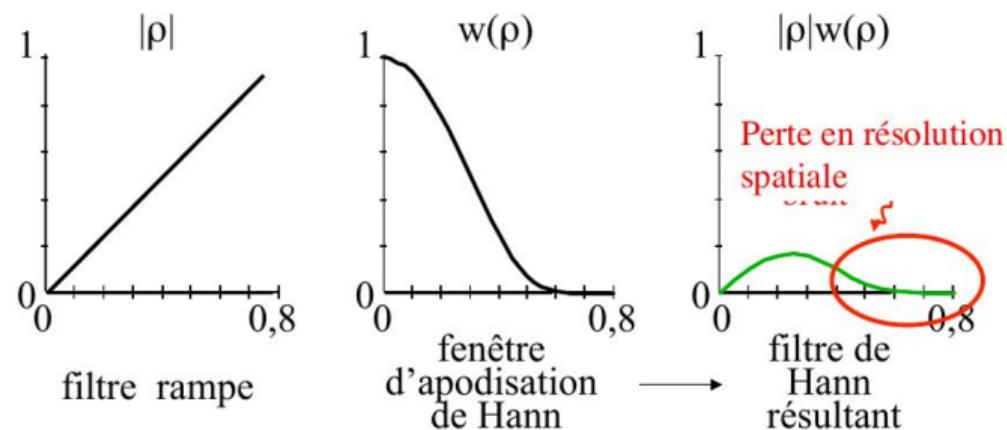
- Filtre rampe → meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence :



Choix du filtre

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

↑
fenêtre d'apodisation

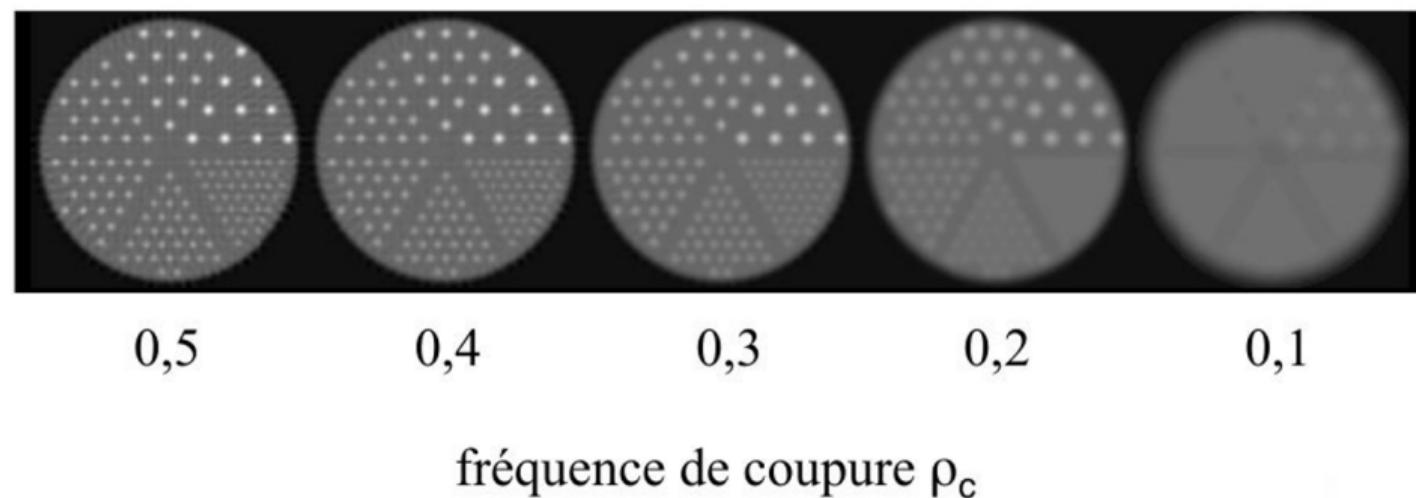


Choix du filtre

- #### ■ Filtre de Hann :

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

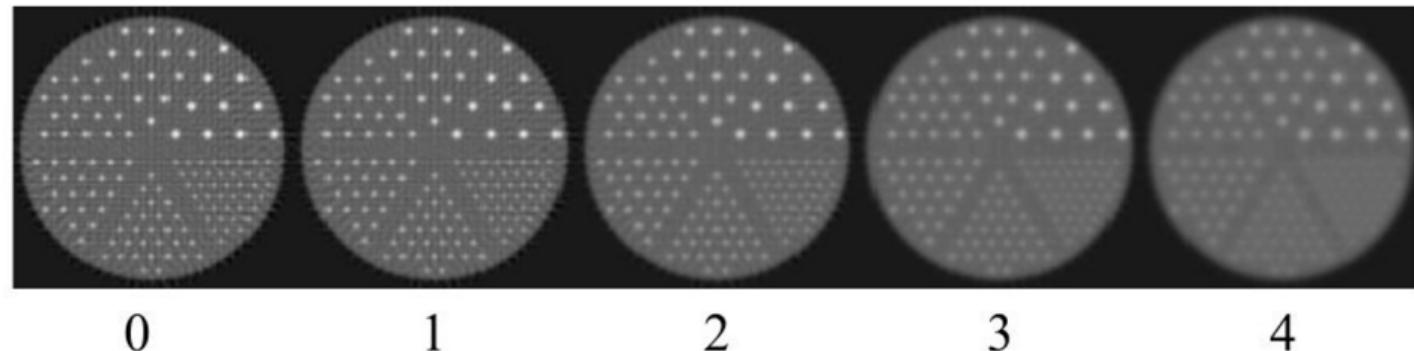
→ modifie les moyennes fréquences



Choix du filtre

- #### ■ Filtre gaussien (domaine spatial) :

$$c(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$$



$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma (\text{pixel})$$

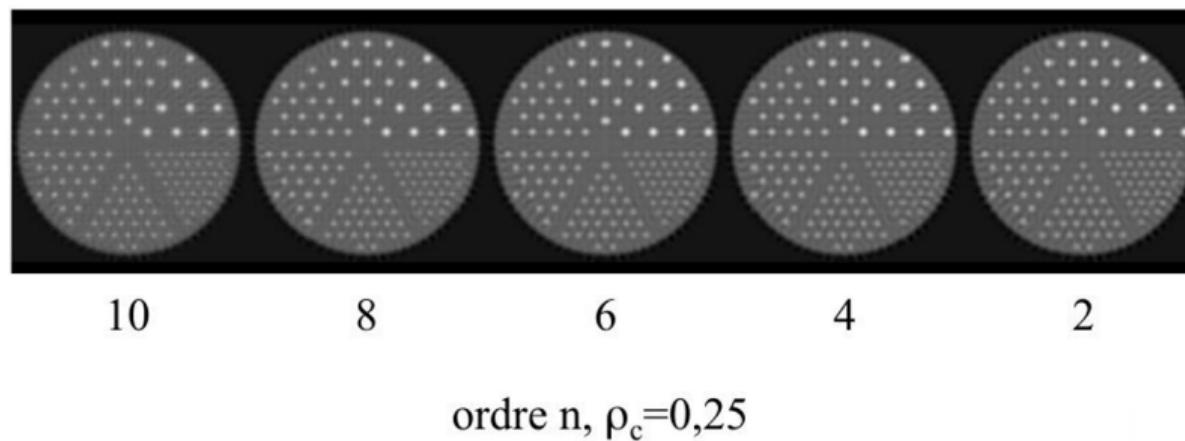
Caractérise l'étendue spatiale du filtre

Choix du filtre

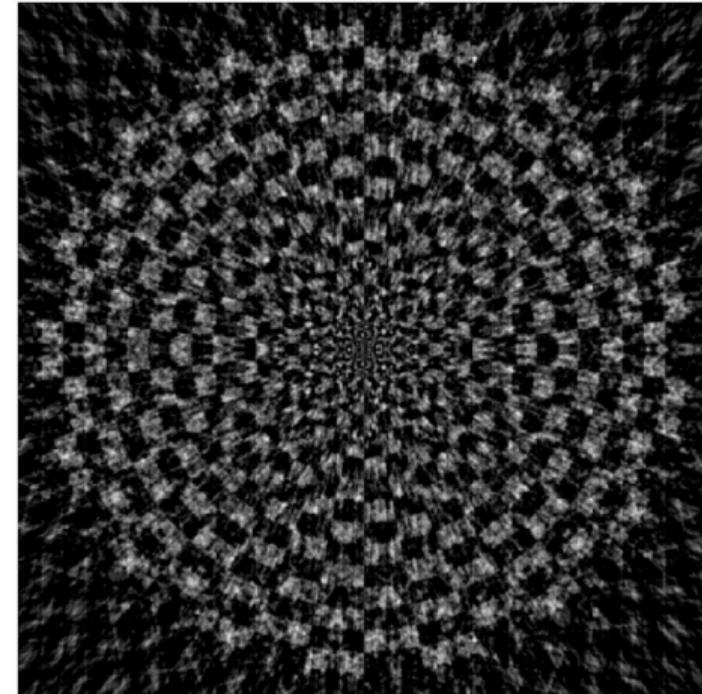
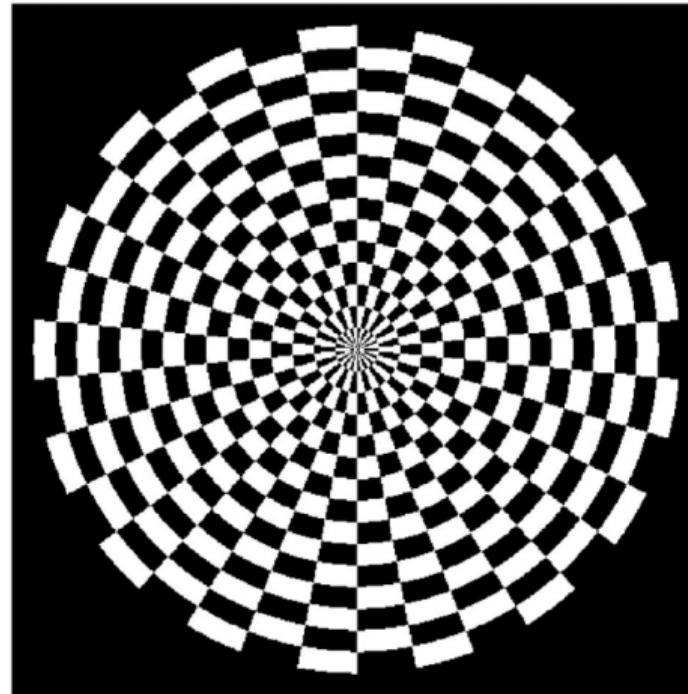
- #### ■ Filtre de Butterworth :

$$w(\rho) = 1/[1 + (\rho/\rho_c)^{2n}] \quad \text{si } \rho < \rho_c$$

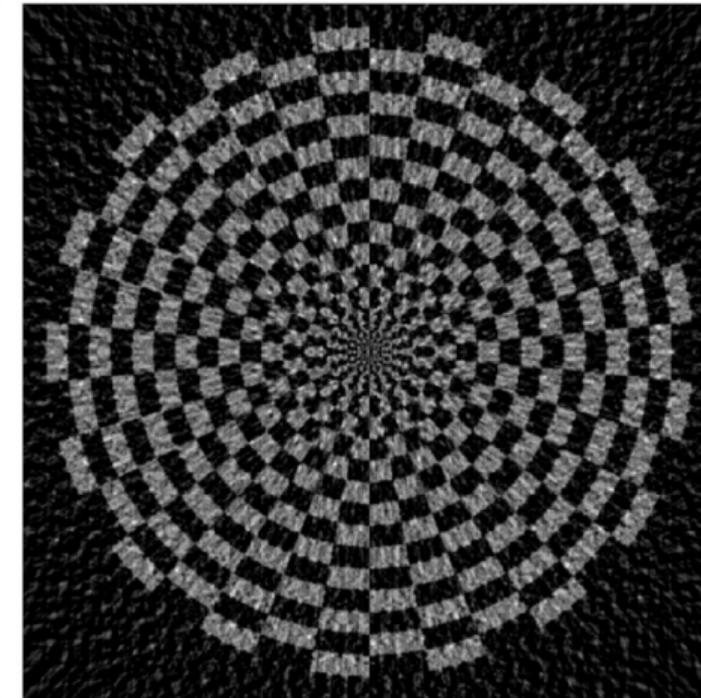
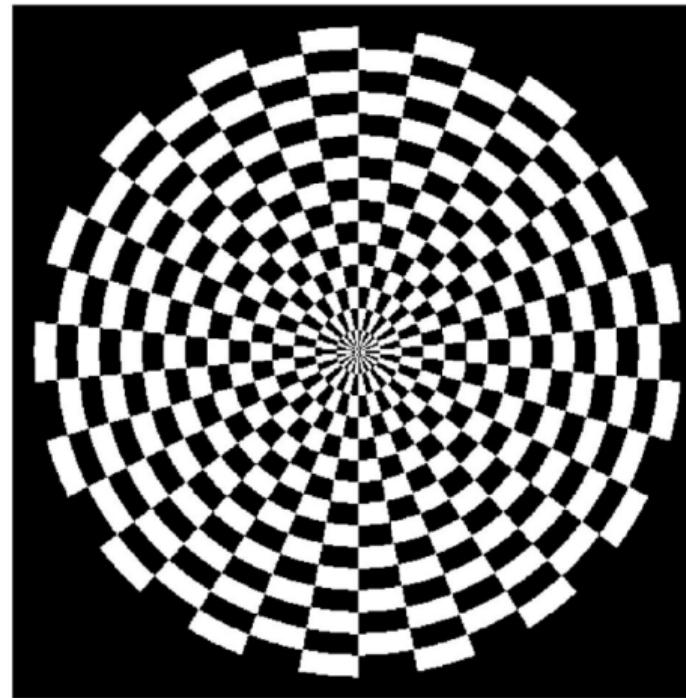
→ 2 paramètres : fréquence de coupure ρ_c et ordre n



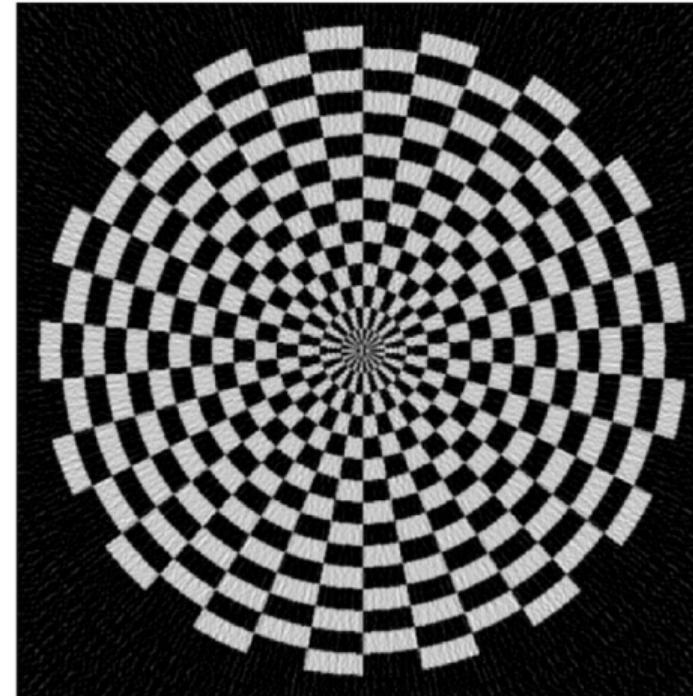
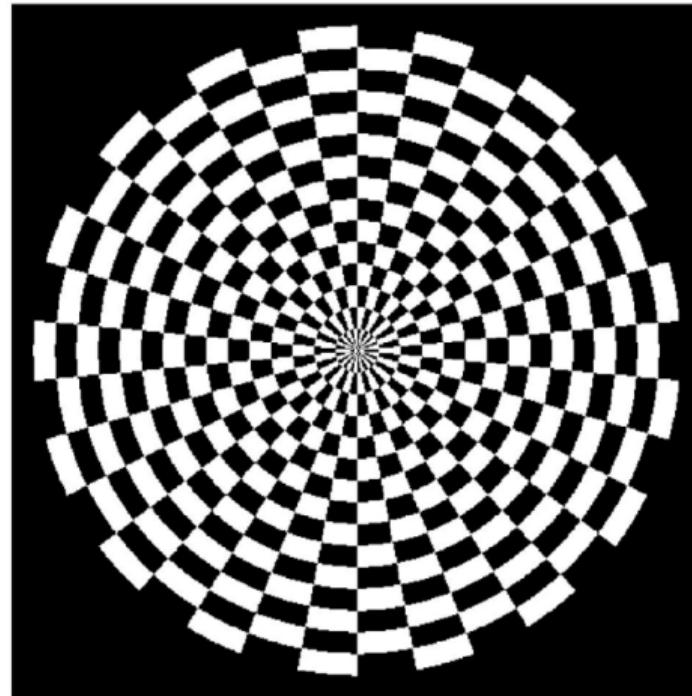
Qualité de la reconstruction : 32 projections



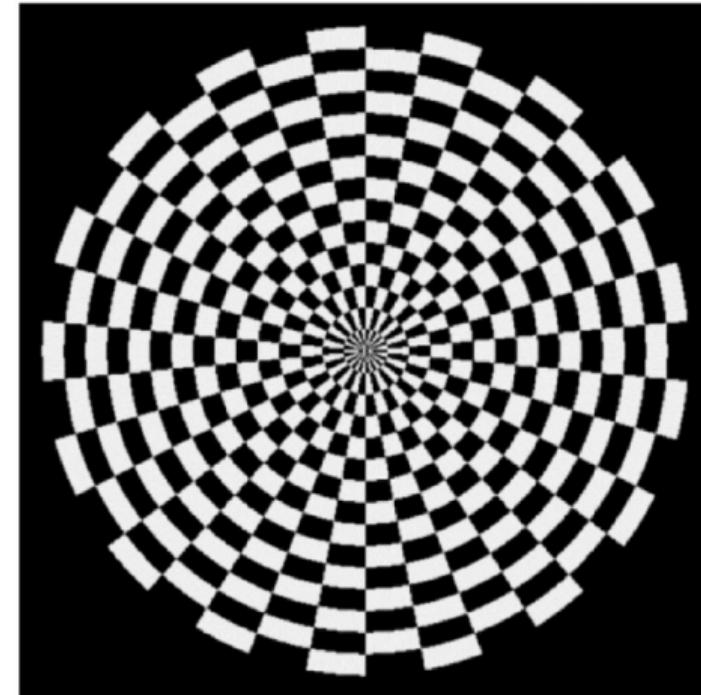
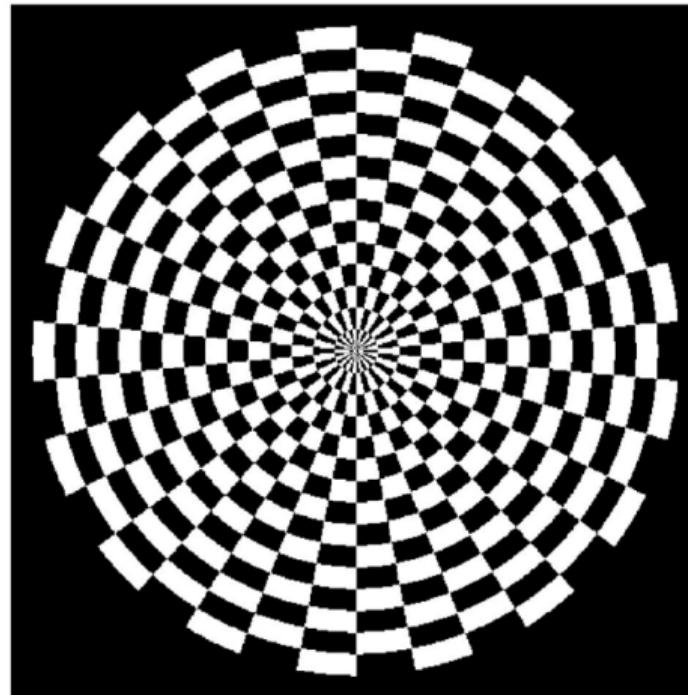
Qualité de la reconstruction : 64 projections



Qualité de la reconstruction : 180 projections



Qualité de la reconstruction : 512 projections



Bilan reconstruction analytique

Avantage	Inconvénient
Méthodes rapides	Pas de prise en compte du bruit dans les mesures
Très utilisées en pratique	Pas de prise en compte des phénomènes physiques Pas de prise en compte de la discréétisation des projections

Sommaire

1. Rappel

2. Reconstruction tomographique

2.1 Reconstruction analytique

2.2 Reconstruction discrète

- Méthodes algébriques
- Méthodes statistiques

Discrétisation du problème

- Au lieu de rechercher une solution continue, le problème est discrétisé

Discrétisation du problème

- Au lieu de rechercher une solution continue, le problème est discréteisé.
 - L'image recherchée est une image discrète $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$, $f_j \in \mathbb{R}$ avec N le nombre de pixels (en 2D) ou voxels (en 3D).

Discrétisation du problème

- Au lieu de rechercher une solution continue, le problème est discréteisé.
 - L'image recherchée est une image discrète $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$, $f_j \in \mathbb{R}$ avec N le nombre de pixels (en 2D) ou voxels (en 3D).
 - Les mesures sont un ensemble d'images (1D ou 2D) $\vec{p} = (p_1, \dots, p_M)$, $p_i \in \mathbb{R}$ avec M le nombre de pixels de l'ensemble (nombre de pixels par projection \times le nombre de projections)

Discrétisation du problème

- Au lieu de rechercher une solution continue, le problème est discréteisé.
 - L'image recherchée est une image discrète $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$, $f_j \in \mathbb{R}$ avec N le nombre de pixels (en 2D) ou voxels (en 3D).
 - Les mesures sont un ensemble d'images (1D ou 2D) $\vec{p} = (p_1, \dots, p_M)$, $p_i \in \mathbb{R}$ avec M le nombre de pixels de l'ensemble (nombre de pixels par projection \times le nombre de projections)
 - La valeur d'une projection en un point est alors :

$$p_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} f_j \quad (3)$$

R est la matrice de projection (aussi appelée matrice système), de taille $M \times N$. Les coefficients r_{ij} sont caractéristiques de l'intersections du rayon i avec le pixel j .

Discréétisation du problème

- Au lieu de rechercher une solution continue, le problème est discréétisé.
- L'image recherchée est une image discrète $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$, $f_j \in \mathbb{R}$ avec N le nombre de pixels (en 2D) ou voxels (en 3D).
- Les mesures sont un ensemble d'images (1D ou 2D) $\vec{p} = (p_1, \dots, p_M)$, $p_i \in \mathbb{R}$ avec M le nombre de pixels de l'ensemble (nombre de pixels par projection \times le nombre de projections)
- La valeur d'une projection en un point est alors :

$$p_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} f_j \quad (3)$$

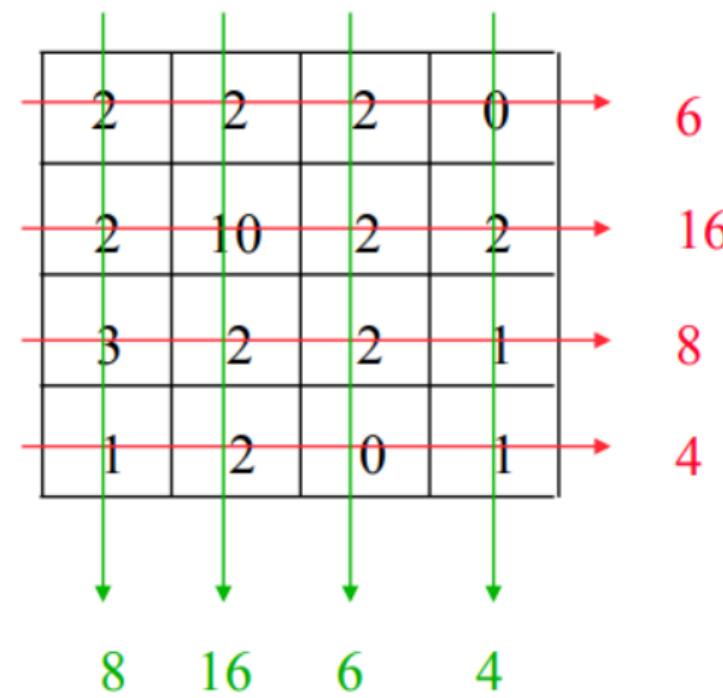
R est la matrice de projection (aussi appelée matrice système), de taille $M \times N$. Les coefficients r_{ij} sont caractéristiques de l'intersections du rayon i avec le pixel j.

Reconstruction tomographique

Trouver le vecteur \vec{f} solution de $\vec{p} = R\vec{f}$

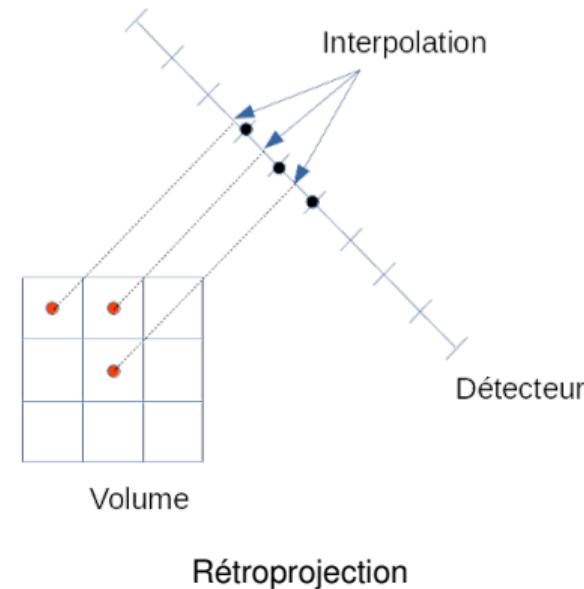
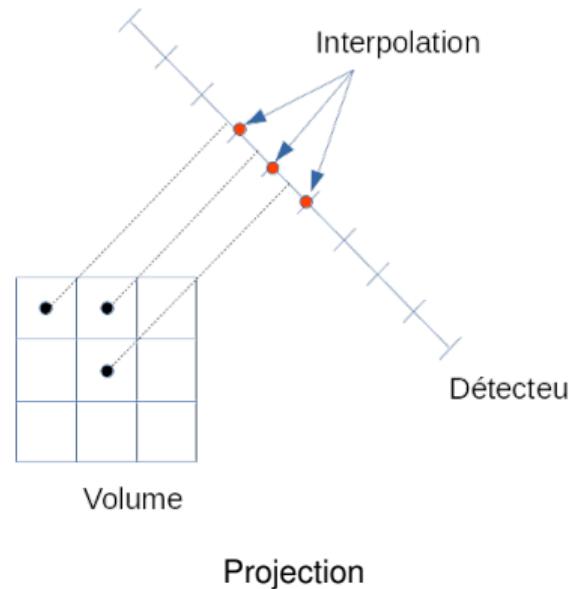
Formulation discrète de l'opérateur de projection

Calcul de 2 projections pour la distribution d'activité représentée :



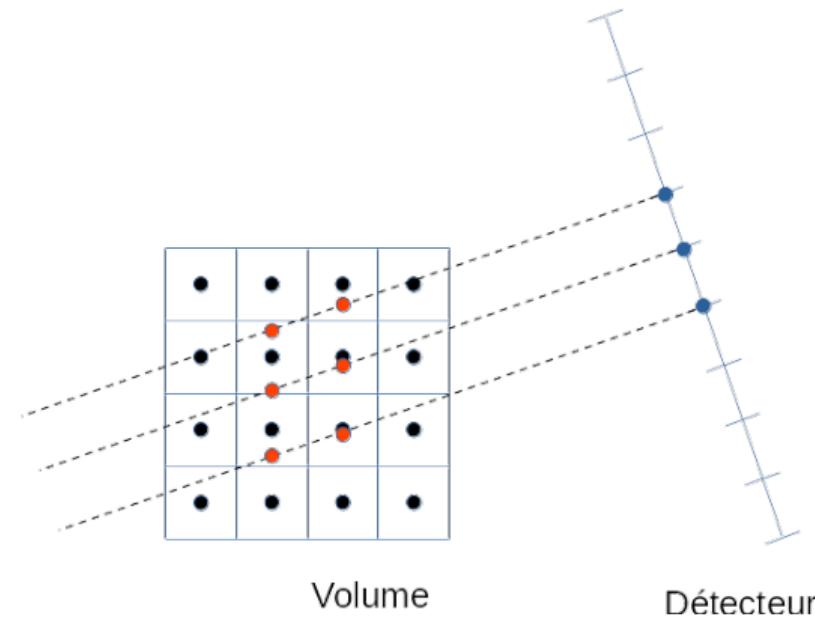
Implémentation des projecteurs

Modélisation basée sur les voxels :



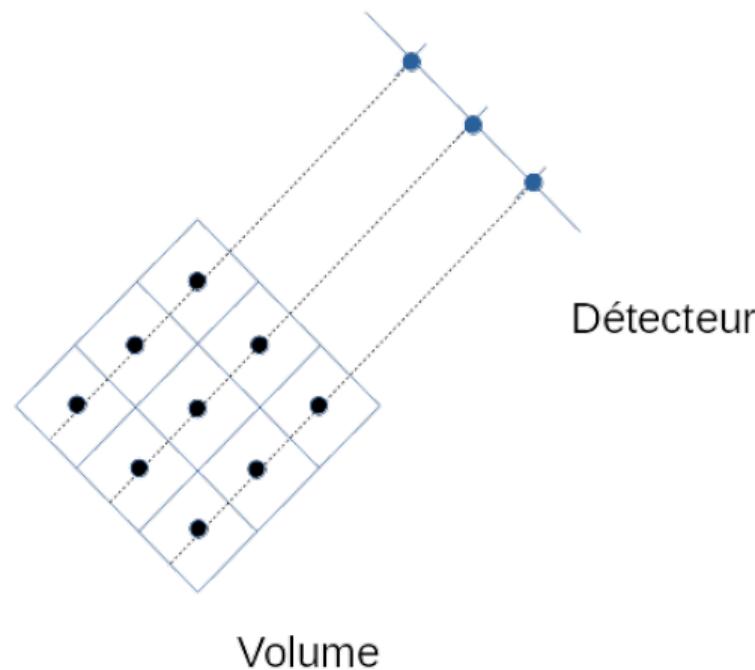
Implémentation des projecteurs

Modélisation basée sur le lancer de rayons (méthode de Joseph) :



Implémentation des projecteurs

Modélisation basée une rotation du volume



Reconstruction discrète

- ### ■ Approche matricielle du problème :

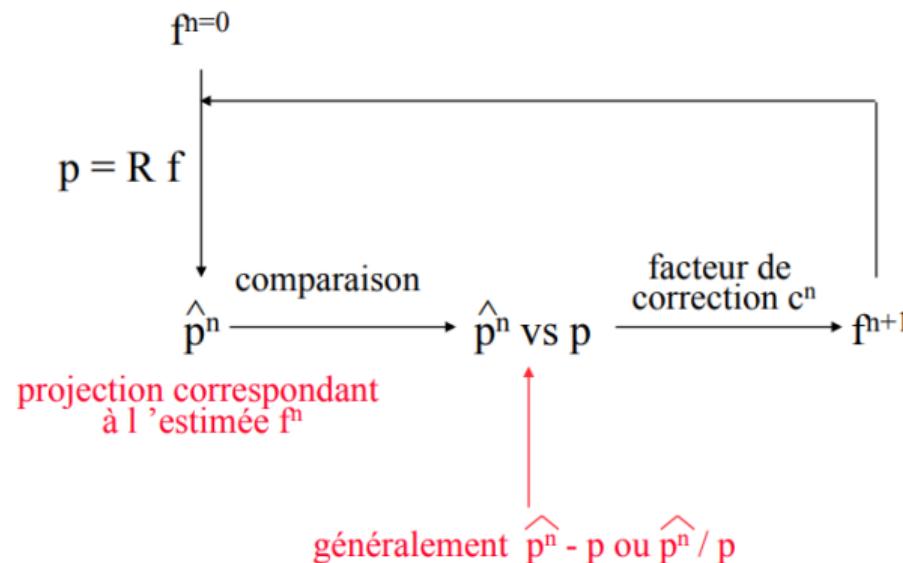
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \dots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

- Pourquoi cette équation n'est pas facilement inversible ?
 - problème mal-posé :
 - solution n'est pas unique
 - solution exacte n'existe pas
 - matrice R en général pas carrée
 - système sur/sous-déterminé

Résolution du problème inverse

- On cherche à trouver les solutions qui minimisent la distance entre p et Rf via un processus **itératif**

estimée initiale de l'objet à reconstruire



Méthode algébriques

- Méthodes itératives traditionnelles résolvant un système d'équation linéaire
- Minimisent $\|p - Rf\|^2$
- Régularisation possible
- Méthodes ART, SART, SIRT

Méthode ART

ART : Algebraic Reconstruction Technique

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \lambda_k \sum_i r_{ij} \frac{p_i - \sum_j r_{ij} f_j^n}{\sum_j r_{ij}} \quad (4)$$



Méthode ART

ART : Algebraic Reconstruction Technique

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \lambda_k \sum_i r_{ij} \frac{p_i - \sum_j r_{ij} f_j^n}{\sum_j r_{ij}} \quad (4)$$

Projections mesurées - Projections de l'image estimée

Méthode ART

ART : Algebraic Reconstruction Technique

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \lambda_k \sum_i r_{ij} \frac{p_i - \sum_j r_{ij} f_j^n}{\sum_j r_{ij}} \quad (4)$$

Projections mesurées - Projections de l'image estimée

Facteur de normalisation.

Méthode ART

ART : Algebraic Reconstruction Technique

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \lambda_k \sum_i r_{ij} \frac{p_i - \sum_j r_{ij} f_j^n}{\sum_j r_{ij}} \quad (4)$$

Projections mesurées - Projections de l'image estimée

Facteur de normalisation.

Rétroprojections de l'erreur.

Méthodes statistiques

- Estimation bayesienne
 - Prise en compte de la distribution du bruit dans les données
 - Maximisent une fonction de vraisemblance
 - Méthodes MLEM, OSEM

Fonction de vraisemblance

- L'émission des photons suit une loi de Poisson, alors la mesure g_i suit elle même une distribution de Poisson dont l'espérance statistique est donnée par $\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j$.

Fonction de vraisemblance

- L'émission des photons suit une loi de Poisson, alors la mesure g_i suit elle même une distribution de Poisson dont l'espérance statistique est donnée par $\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j$.

Fonction de vraisemblance

$$P(\vec{p}/\vec{f}) = \prod_{i=1}^M \frac{\sum_{j=1}^N (r_{ij} f_j)^{p_i}}{p_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j\right). \quad (5)$$

Fonction de vraisemblance

- L'émission des photons suit une loi de Poisson, alors la mesure g_i suit elle même une distribution de Poisson dont l'espérance statistique est donnée par $\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j$.

Fonction de vraisemblance

$$P(\vec{p}/\vec{f}) = \prod_{i=1}^M \frac{\sum_{j=1}^N (r_{ij} f_j)^{p_i}}{p_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j\right). \quad (5)$$

- Afin d'estimer \vec{f} à partir de \vec{p} , on peut maximiser $P(\vec{p}/\vec{f})$ ou de façon équivalente $\log(P(\vec{p}/\vec{f}))$.

Fonction de vraisemblance

- L'émission des photons suit une loi de Poisson, alors la mesure g_i suit elle même une distribution de Poisson dont l'espérance statistique est donnée par $\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j$.

Fonction de vraisemblance

$$P(\vec{p}/\vec{f}) = \prod_{i=1}^M \frac{\sum_{j=1}^N (r_{ij} f_j)^{p_i}}{p_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j\right). \quad (5)$$

- Afin d'estimer \vec{f} à partir de \vec{p} , on peut maximiser $P(\vec{p}/\vec{f})$ ou de façon équivalente $\log(P(\vec{p}/\vec{f}))$.

Maximisation de log-vraisemblance

$$\max_{\vec{f} \geq 0} L(\vec{f}) = \sum_{i=1}^M (p_i \ln(\sum_{j=1}^N r_{ij} f_j) - \sum_{j=1}^N r_{ij} f_j). \quad (6)$$

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

Équation de mise à jour MLEM

$$f_j^{n+1} = \frac{f_j^n}{\sum_i r_{ij}} \sum_i r_{ij} \frac{p_i}{\sum_j r_{ij} f_j^n} \quad (7)$$

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

Équation de mise à jour MLEM

$$f_j^{n+1} = \frac{f_j^n}{\sum_i r_{ij}} \sum_i r_{ij} \frac{\textcolor{blue}{p_i}}{\sum_j r_{ij} f_j^n} \quad (7)$$

Projections mesurées.

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

Équation de mise à jour MLEM

$$f_j^{n+1} = \frac{f_j^n}{\sum_i r_{ij}} \sum_i r_{ij} \frac{p_i}{\sum_j r_{ij} f_j^n} \quad (7)$$

Projections mesurées.

Projections de l'image estimée.

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

Équation de mise à jour MLEM

$$f_j^{n+1} = \frac{f_j^n}{\sum_i r_{ij}} \sum_i r_{ij} \frac{p_i}{\sum_j r_{ij} f_j^n} \quad (7)$$

Projections mesurées.

Projections de l'image estimée.

Rétroprojections.

MLEM [Shepp and Vardi, 1982]

- L'algorithme MLEM permet de maximiser la vraisemblance entre les projections mesurées et les projections de l'image estimée.

Équation de mise à jour MLEM

$$f_j^{n+1} = \frac{f_j^n}{\sum_i r_{ij}} \sum_i r_{ij} \frac{p_i}{\sum_j r_{ij} f_j^n} \quad (7)$$

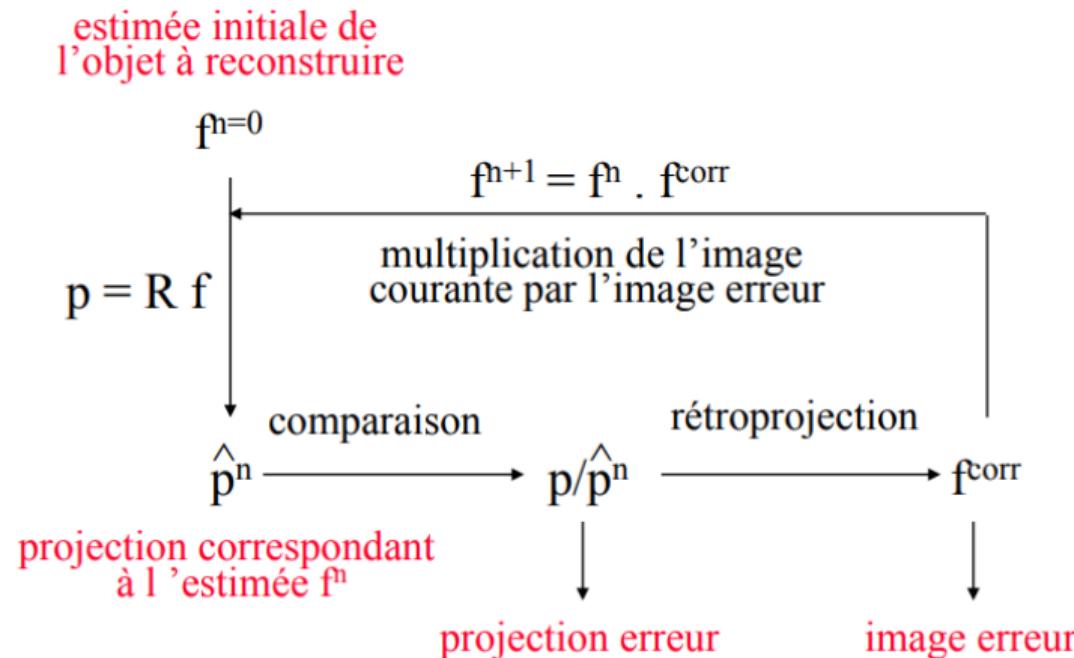
Projections mesurées.

Projections de l'image estimée.

Rétroprojections.

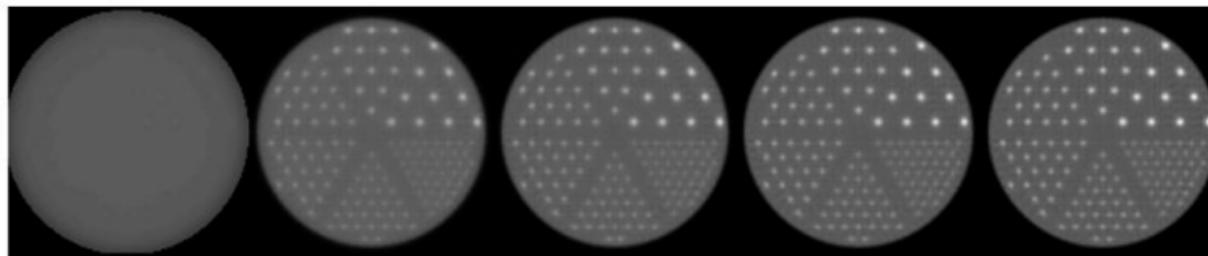
- Convergence lente \Rightarrow Version accélérée : OSEM [Hudson and Larkin, 1994].

ML-EM [[Shepp and Vardi, 1982]]

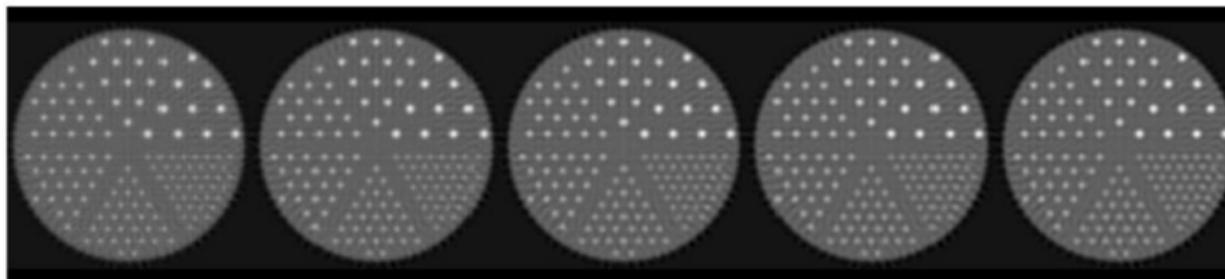


Méthode MLEM

MLEM 1 16 24 32 40 itér.



Filtre du Butterworth - Ordre variable



Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$.

Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$.

Théorème de Bayes

$$P(\vec{f}/\vec{p}) = \frac{P(\vec{p}/\vec{f})P(\vec{f})}{P(\vec{p})}. \quad (8)$$

Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$

Théorème de Bayes

$$P(\vec{f}/\vec{p}) = \frac{P(\vec{p}/\vec{f})P(\vec{f})}{P(\vec{p})}. \quad (8)$$

Fonction de vraisemblance.

Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$

Théorème de Bayes

$$P(\vec{f}/\vec{p}) = \frac{P(\vec{p}/\vec{f}) P(\vec{f})}{P(\vec{p})}. \quad (8)$$

Fonction de vraisemblance.

Fonction a priori de l'image.

Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$

Théorème de Bayes

$$P(\vec{f}/\vec{p}) = \frac{P(\vec{p}/\vec{f}) P(\vec{f})}{P(\vec{p})}. \quad (8)$$

Fonction de vraisemblance.

Fonction a priori de l'image.

Distribution a priori des mesures

Régularisation (MAPEM)

- Maximisation de la distribution a posteriori de l'image $P(\vec{f}/\vec{p})$

Théorème de Bayes

$$P(\vec{f}/\vec{p}) = \frac{P(\vec{p}/\vec{f}) P(\vec{f})}{P(\vec{p})}. \quad (8)$$

Fonction de vraisemblance.

Fonction a priori de l'image.

Distribution a priori des mesures

Maximisation de la distribution a posteriori

$$\max_{\vec{f}} \ln(P(\vec{f}/\vec{p})) = L(\vec{f}) + \ln(P(\vec{f})). \quad (9)$$

Régularisation

- Maximiser la distribution a posteriori revient à maximiser la vraisemblance associée à une fonction de pénalité :

$$\max_{\vec{f}} \ln(P(\vec{f}/\vec{p})) = L(\vec{f}) - \beta U(\vec{f}) \quad (10)$$

où U est une fonction d'énergie et β est le poids accordé à la régularisation.

Régularisation

- Maximiser la distribution a posteriori revient à maximiser la vraisemblance associée à une fonction de pénalité :

$$\max_{\vec{f}} \ln(P(\vec{f}/\vec{p})) = L(\vec{f}) - \beta U(\vec{f}) \quad (10)$$

où U est une fonction d'énergie et β est le poids accordé à la régularisation.

- Posons $U(\vec{f}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in N_i} (f_i - f_j)^2$, avec N_i le voisinage du pixel i [De Pierro, 1995].

Régularisation

- Maximiser la distribution a posteriori revient à maximiser la vraisemblance associée à une fonction de pénalité :

$$\max_{\vec{f}} \ln(P(\vec{f}/\vec{p})) = L(\vec{f}) - \beta U(\vec{f}) \quad (10)$$

où U est une fonction d'énergie et β est le poids accordé à la régularisation.

- Posons $U(\vec{f}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in N_i} (f_i - f_j)^2$, avec N_i le voisinage du pixel i [De Pierro, 1995].

Équation de mise à jour MAPEM [De Pierro, 1995]

$$f_j^{(n+1)} = \frac{2\hat{f}_j^n}{\sum_i r_{ij} - \beta \sum_{k \in N_j} (f_j^n + f_k^n) + \sqrt{(\sum_i r_{ij} - \beta \sum_{k \in N_j} (f_j^n + f_k^n))^2 + 8\beta \sum_{k \in N_j} \hat{f}_j^n}} \quad (11)$$

$$\text{avec } \hat{f}_j^n = f_j^n \sum_i r_{ij} \frac{p_i}{\sum_k r_{ik} f_k^n}.$$

Bilan reconstruction discrète

- Algorithme itératifs par rapport à la rétroprojection filtrée :
 - possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
 - possible modélisation des caractéristiques statistiques des données
 - augmentation du temps de calculs

Bilan reconstruction tomographique

- Deux types de reconstructions
 - Analytique
 - Discrète
 - Application :
 - Scanner X : rétroprojection filtrée
 - TEMP : OSEM
 - TEP : rétroprojection filtrée, OSEM

Références

- De Pierro, A. R. (1995).
A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography.
IEEE Transactions on Medical Imaging, 14(1) :132–137.
 - Hudson, H. M. and Larkin, R. S. (1994).
Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data.
IEEE transactions on medical imaging, 13(4) :601–609.
 - Shepp, L. A. and Vardi, Y. (1982).
Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography.
IEEE Transactions on Medical Imaging, 1(2) :113–122.