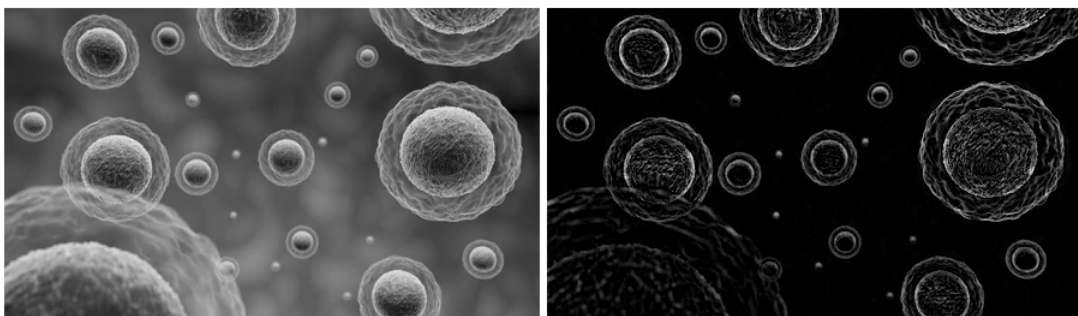


**Année universitaire
2021 - 2022**

Majeure IMI – 4ETI - S8
Traitement d'images

Morphologie mathématique en niveaux de gris



Eric Van Reeth

Il s'agit ici d'étendre les notions de morphologie mathématique vues au semestre précédent sur des images binaires, aux images en niveaux de gris. Le principe reste identique : des éléments structurants sont utilisés pour sonder des caractéristiques spécifiques des images. À la différence du cas binaire, les éléments structurants en niveaux de gris peuvent être uniformes ou non, comme illustré en Figure 1. Par défaut, nous utiliserons dans ce cours des éléments structurants uniformes, de hauteur 1, centrés et symétriques.

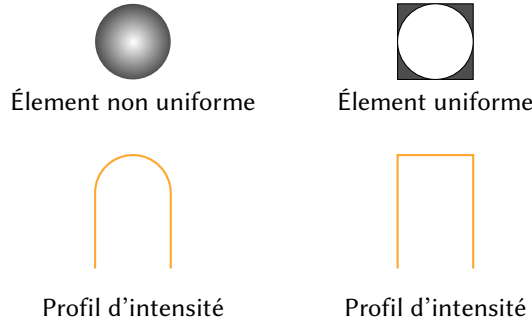


Figure 1 – Éléments structurants potentiellement utilisés en morphologie mathématique en niveaux de gris

Érosion et dilatation

En morphologie binaire, les opérations d'érosion et de dilatation avaient été définies en parcourant un objet X de l'image $I(x, y)$. En morphologie en niveaux de gris, la notion d'appartenance à un objet n'étant plus définie, on définit ces opérations en parcourant l'image entière. On appellera S l'élément structurant. L'érosion de l'image I par S au pixel (x, y) se définit comme le minimum de l'image dans le voisinage défini par l'élément structurant centré en (x, y) , soit :

$$E_S(I) = \min_{(s,t) \in S} \{I(x + s, y + t)\} \quad (1)$$

L'érosion de l'image est obtenue en parcourant tous les pixels de I .

Lorsqu'un élément structurant non uniforme est utilisé, la formule suivante est utilisée :

$$E_S(I) = \min_{(s,t) \in S} \{I(x + s, y + t) - S(s, t)\} \quad (2)$$

On notera ici que contrairement au cas où S est uniforme, la distribution des intensités de S influence la valeur du minimum retenue.

De manière analogue, la dilatation de I par S au pixel (x, y) est obtenue en prenant le maximum de I dans le voisinage défini par le **symétrique** de l'élément structurant centré en (x, y) , noté \hat{S} .

$$D_S(I) = \max_{(s,t) \in \hat{S}} \{I(x - s, y - t)\} \quad (3)$$

On note que $\hat{S}(s, t) = S(-s, -t)$.

Dans le cas où S est non-uniforme, on aura la formule suivante :

$$D_S(I) = \max_{(s,t) \in \hat{S}} \{I(x - s, y - t) + \hat{S}(s, t)\} \quad (4)$$

Comme dans le cas binaire, ces opérations deviennent intéressantes lorsqu'elles sont combinées entre elles pour effectuer entre autres les opérations d'ouverture et de fermeture.

Ouverture et fermeture

L'expression des opérations d'ouverture et de fermeture est identique au cas binaire. L'ouverture est l'érosion de I par S , suivie d'une dilatation du résultat par le même élément structurant. Elle est notée $O_S(I)$. La fermeture est la dilatation de I par S , suivie de l'érosion du résultat par S également. Elle est notée $F_S(I)$.

Avec des images en niveaux de gris, ces opérations peuvent s'interpréter de façon géométrique (Figure 2).

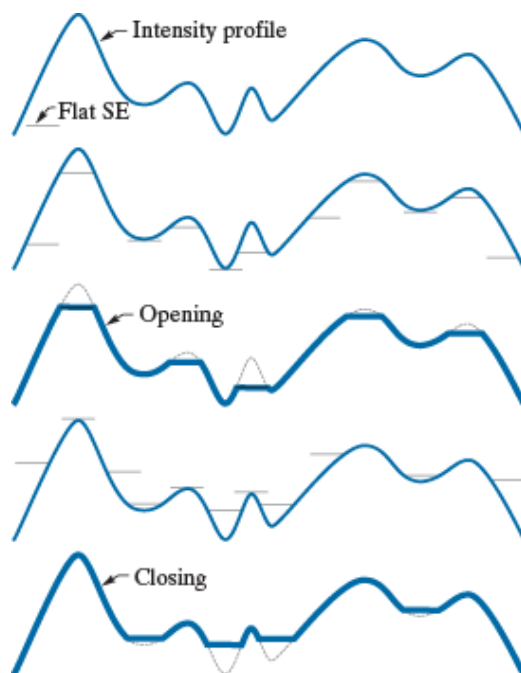


Figure 2 – Interprétation géométrique 1D de l'ouverture et de la fermeture d'une courbe représentant l'évolution des niveaux de gris, par l'élément structurant SE

Le résultat de l'ouverture s'obtient en imaginant la poussée du bas vers le haut de l'élément structurant contre la courbe d'intensité. Pour chaque point de cette courbe, on place l'origine de l'élément structurant – l'ouverture correspond à la plus haute valeur prise par l'élément structurant lorsqu'il est poussé sous la courbe (sans jamais la traverser). La troisième ligne de la Figure 2 illustre bien l'effet de l'ouverture (en gras). L'élément structurant ne parvenant pas à "remplir" les pics d'intensité, l'opération d'ouverture aura pour effet de rogner l'amplitude de ces pics. La taille de l'élément structurant jouera sur la largeur et l'amplitude de réduction des pics d'intensité. En pratique, ces ouvertures seront utilisées lorsqu'il s'agira de retirer des petits détails clairs dans l'image, tout en laissant le reste de l'image inchangée.

À l'inverse, l'opération de fermeture s'interprète comme le fait de pousser de haut en bas l'élément structurant sur la courbe d'intensité (Figure 2). Elle aura pour effet d'éliminer de l'image les petits détails sombres de l'image, tout en laissant le reste de l'image inchangée.

La combinaison des opérations d'ouverture et de fermeture permet de générer une série de traitements spécifiques que nous allons détailler par la suite.

Lissage morphologique

Étant donné que l'ouverture (resp. la fermeture) permet de supprimer les détails clairs (resp. sombres) de l'image plus petits que l'élément structurant, leur combinaison permet d'obtenir un lissage (filtrage des détails) de l'image. L'opérateur de lissage morphologique est donc défini tel que :

$$L_S(I) = F_S(O_S(I)) \quad (5)$$

La figure 3 illustre le résultat du lissage morphologique d'une image représentant la supernova Cygnus Loop acquise dans le domaine des rayons-X, avec plusieurs tailles d'éléments structurants. Admettons ici que nous cherchons à éliminer le bruit entourant la supernova apparaissant en clair au centre de l'image.

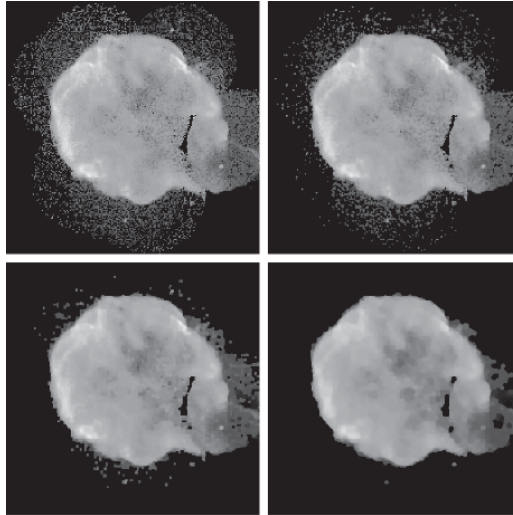


Figure 3 – Illustration de l'effet du lissage morphologique (ouverture suivie d'une fermeture) pour plusieurs géométries d'éléments structurants. Haut gauche : Image originale. Haut droit : élément circulaire homogène de rayon 1. Bas gauche : élément circulaire homogène de rayon 3. Bas droit : élément circulaire homogène de rayon 5.

Gradient morphologique

Le gradient morphologique est obtenu en soustrayant le résultat de la dilatation et de l'érosion :

$$G_S(I) = D_S(I) - E_S(I) \quad (6)$$

On constate aisément que cette opération fait ressortir les contours des objets, qui ont été élargis par la dilatation puis rétrécis par l'érosion (Figure 4). Les régions uniformes étant peu affectées par ces opérations, la différence aura tendance à les supprimer. Le résultat aura donc l'allure d'une image obtenue par le calcul de la norme du gradient de l'image, puisque seuls les contours des objets auront une intensité élevée (notons que formellement, il n'y a pas de lien entre les deux opérations).

Transformations *top-hat* et *bottom-hat*

La transformation *top-hat* consiste à soustraire à l'image I son ouverture :

$$T_S(I) = I - O_S(I) \quad (7)$$

La transformation *bottom-hat* consiste à soustraire l'image I à sa fermeture :

$$B_S(I) = F_S(I) - I \quad (8)$$

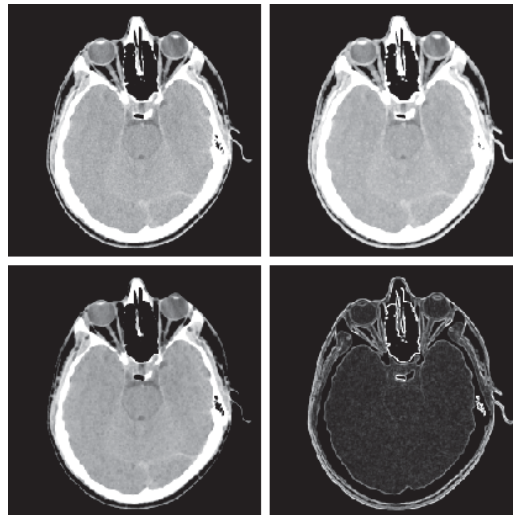


Figure 4 – Illustration du calcul du gradient morphologique obtenue avec un élément structurant uniforme carré de taille 3×3 . Haut gauche : Image originale d'une acquisition cérébrale par rayons-X. Haut droit : Dilatation. Bas gauche : Érosion. Bas droit : Gradient morphologique

L'intérêt principal de ces opérations est de faire disparaître certains éléments de l'image en adaptant le choix de l'élément structurant. Par exemple, la transformation *top-hat* est utile pour éliminer de l'image les éléments qui ne sont pas des petits objets d'intensité élevée. La transformation *bottom-hat* sera utilisée pour la situation opposée.

Un exemple d'application est la correction d'illumination non-uniforme particulièrement utile avant d'appliquer un seuil sur l'image comme illustré en Figure 5. Cette image est composée de grains de riz clairs sur un fond sombre dont l'éclairage est non-uniforme. Le seuillage réalisé sur l'image originale ne permet pas de détecter tous les grains correctement. L'application d'une transformation *top-hat* va permettre d'éliminer les composantes autres que les grains de riz dans l'image, et donc d'éliminer les différences d'illumination. Le seuillage sur l'image *top-hat* permet alors une segmentation correcte des grains de riz.

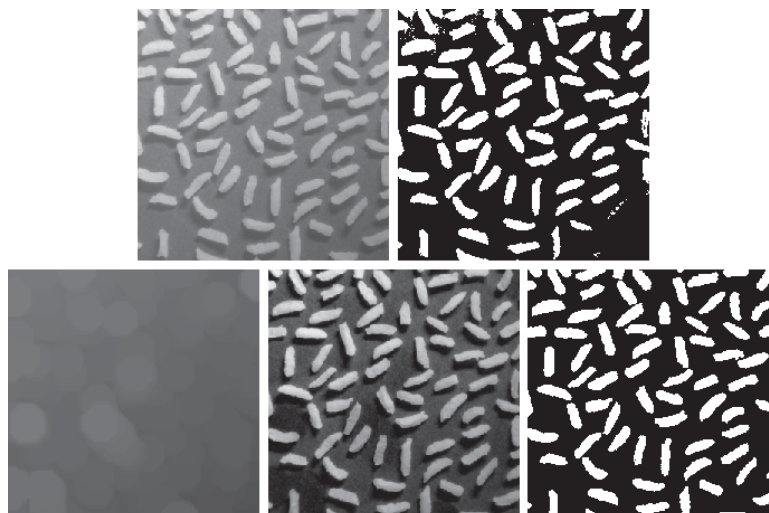


Figure 5 – Haut gauche : image originale. Haut droit : image originale seuillée. Bas gauche : résultat de l'ouverture par un élément structurant circulaire de rayon 40 pixels. Bas milieu : résultat de la transformation *top-hat*. Bas droit : image *top-hat* seuillée

Reconstruction morphologique

Les opérations de reconstruction se définissent également de manière identique au cas binaire, où I était défini comme un masque (souvent l'image originale), et M un marqueur. On considérera que I et M sont deux images de même taille, et que les intensités de M sont en tout point inférieures à I . La dilatation géodésique de taille 1 de M relativement au masque I par l'élément structurant S est définie par :

$$\delta_{I,S}^1(M) = D_S(M) \wedge I \quad (9)$$

où \wedge est l'opérateur *min* élément-par-élément. Elle consiste donc à calculer la dilatation de M par S , puis à sélectionner le minimum en tout point entre le résultat de cette opération et le masque I .

La dilatation géodésique de taille n de M relativement au masque I par l'élément structurant S est définie par :

$$\delta_{I,S}^n(M) = \delta_{I,S}^1 \left(\delta_{I,S}^{(n-1)}(M) \right) \quad (10)$$

avec $\delta_{I,S}^0(M) = M$

De façon similaire, l'érosion géodésique de taille 1 du marqueur M relativement au masque I par l'élément structurant S est définie par :

$$\varepsilon_{I,S}^1(M) = E_S(M) \vee I \quad (11)$$

où \vee est l'opérateur *max* élément-par-élément. L'érosion géodésique de taille n de M relativement au masque I par l'élément structurant S est définie par :

$$\varepsilon_{I,S}^n(M) = \varepsilon_{I,S}^1 \left(\varepsilon_{I,S}^{(n-1)}(M) \right) \quad (12)$$

avec $\varepsilon_{I,S}^0(M) = M$

On appelle reconstruction par dilatation, notée $R_{I,S}^D(M)$, le résultat des dilatations géodésiques successives jusqu'à stabilité :

$$R_{I,S}^D(M) = \delta_{I,S}^k(M) \quad (13)$$

avec k tel que $\delta_{I,S}^{(k+1)}(M) = \delta_{I,S}^k(M)$

On appelle reconstruction par érosion, notée $R_{I,S}^E(M)$, le résultat des érosions géodésiques successives jusqu'à stabilité :

$$R_{I,S}^E(M) = \varepsilon_{I,S}^k(M) \quad (14)$$

avec k tel que $\varepsilon_{I,S}^{(k+1)}(M) = \varepsilon_{I,S}^k(M)$

Ces opérations servent à définir l'ouverture et la fermeture par reconstruction.

L'ouverture par reconstruction de taille n érode l'image I n fois, utilise le résultat comme marqueur (M), et utilise l'image I comme masque pour effectuer une reconstruction par dilatation. On note cette opération :

$$\Omega_S^{(n)}(I) = R_{I,S}^D(E_S^{(n)}(I)) \quad (15)$$

Cette opération est utile pour préserver la forme des objets de l'image après reconstruction.

La fermeture par reconstruction de taille n dilate l'image I n fois, utilise le résultat comme marqueur (M), et utilise l'image I comme masque pour effectuer une reconstruction par érosion. On note cette opération :

$$\varphi_S^{(n)}(I) = R_{I,S}^E(D_S^{(n)}(I)) \quad (16)$$

Enfin, notons que l'on peut effectuer une transformation *top-hat* par reconstruction en soustrayant à une image, son ouverture par reconstruction. Cela aura pour effet d'éliminer certains éléments de l'image (la nature de ces éléments dépend du choix de l'élément structurant), tout en préservant au mieux les autres éléments.

References

- [1] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Pearson/Prentice Hall, NY, 4th edition, 2018.