m dm 18 09 2023

13 Septembre, 2023

Lucas

Exercice 1:

1.
$f_1'(x) = 2x^2 + x - 6$
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_1'(x) = 0$
$2x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 1 - 4*2*(-6)$
$\Delta = 49$
$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$

Variation	Interval
positive	on x<-2
zero	at x = -2
negative	on -2<x<3/2
zero	at x = 3/2
positive	on x>3/2
increase	from -inf to -2
decrease	from -2 to 3/2
increase	from 3/2 to +inf

2.
$f_2'(x) = \frac{-11}{(4x-3)^2}$
Valeurs interdites :
$4p - 3 = 0$
$4p = 3$
$p = \frac{4}{3}$

$x \neq \frac{4}{3}$
Ensemble de définition $f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

Variation	Interval
negative	from -inf to 3/4

not defined	at 3/4
negative	from 3/4 to +inf
decrease	from -inf to 3/4
not defined	at 3/4
decrease	from 3/4 to +inf

3.
$f_3'(x) = e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}}$ $f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

Variation	Interval
positive	on 0<x to +inf
increase	on 0<x to +inf

Exercice 2

1. elle prend deux arguments f et x soit une fonction et un nombre
2. Le résultat est ‹ positif ›
3. elle donne le signe d'un nombre après avoir appliqué une fonction f
4.

a. L'instruction lambda sert à définir une fonction anonyme (sans nom)
b. ‹ positif ›

5.

```
from math import *
def racine(f, x):
  if (2*f(x)-1)>=0:
    return sqrt(2*f(x)-1)
  else:
    return 'non défini'

def f(x):
  return 5-2*x

print(racine(f, -5))
print(racine(f, 10))
```

6. $x = -5 \rightarrow y = 5.385164807134504$
   $x = 10 \rightarrow 'non\ défini'$

Exercice 3

Soit à démontrer:
$(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation:
pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{x} k^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$

On va montrer que :

$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1$$

$$= \frac{2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 12p + 6}{6}$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{\left(p^2 + 3p + 2\right)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{2^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang p+1

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

<u>Maths DM</u>