Maths Expertes

Pour le 30/04/2024

2024-04-29

Lucas Duchet-Annez
LHB

2023/2024

101

1 Exercices

1.1 Numéro 47 page 172

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $n^{11} - n$ est divisible par 33

1.1.1 Méthode 1

n est un entier naturel et 11 est un nombre premier, ainsi d'après le corollaire du petit théorème de Fermat $n^{11} - n \equiv 0 \bmod 11$.
De plus 3 est aussi un nombre premier, donc $n^3 - n \equiv 0 \bmod 3$
$n^{11} = (n^3)^3 \times n^2$ Par conséquent $n^3 \equiv n \bmod 3$ et $(n^3)^3 \equiv n^3 \bmod 3 \equiv n \bmod 3$ Donc $n^{11} \equiv n \times n^2 \bmod 3 \equiv n^3 \bmod 3 \equiv n \bmod 3$

Alors il existe un entier k tel que $n^{11} - n = 11 \times k$ et il existe un entier k' tel que $n^{11} - n = 3 \times k'$ Ainsi $3 \times k' = 11 \times k$. Ainsi $3k'$ divise $11k$ et $3k'$ divise $3k'$ $\Rightarrow$ 3 divise $11k$ or 3 et 11 sont deux nombres premiers $\Leftrightarrow \text{pgcd}(3; 11) = 1$
Selon le théorème de Gauss 3 divise k
Soit $k = 3k''$ avec k'' un entier relatif : $11 \times 3k'' = 3 \times k'$
$\Leftrightarrow 11 \times k'' = k'$
$n^{11} - n = 3 \times k' \Leftrightarrow$
$n^{11} - n = 3 \times 11 \times k''$
$\Leftrightarrow n^{11} - n = 33k''$
Par conséquent $n^{11} - n$ est divisible par 33

1.1.2 Méthode 2

n est un entier naturel et 11 est un nombre premier, ainsi d'après le corollaire du petit théorème de Fermat $n^{11} - n \equiv 0 \bmod 11$.

De plus 3 est aussi un nombre premier, donc $n^3 - n \equiv 0 \bmod 3$
$n^{11} = (n^3)^3 \times n^2$ Par conséquent $n^3 \equiv n \bmod 3$ et $(n^3)^3 \equiv n^3 \bmod 3 \equiv n \bmod 3$ Donc $n^{11} \equiv n \times n^2 \bmod 3 \equiv n^3 \bmod 3 \equiv n \bmod 3$
$n^{11} - n \equiv 0 \bmod 3$ Donc $n^{11} - n$ divisible par 3
or $33 = 11 \times 3$ donc 33 a pour facteurs premiers 11 et 3 et $33 = ppcm(11, 3)$ Comme $n^{11} - n$ est divisible par 3 et par 11 il est aussi divisible par 33