Maths Devoir Maison 2

9 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

1.

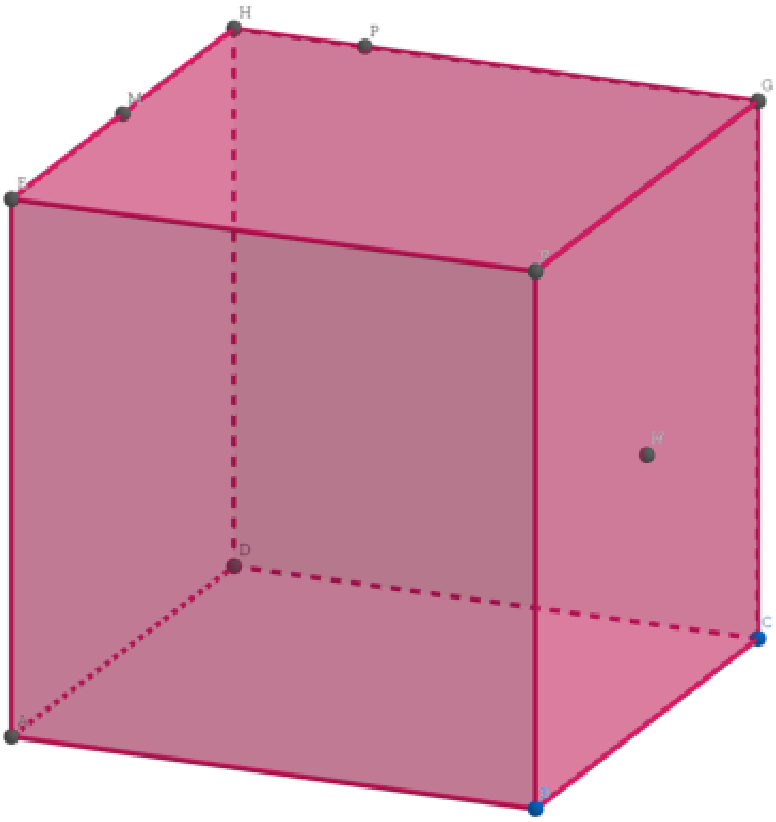


Figure 1: Cube

2. Les points M, P, F, G sont coplanaires si et seulenent si $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MF} + b\overrightarrow{MG}$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} \text{ (Chasles)}$$
$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} \text{ (Données)}$$
$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} \text{ (Chasles)}$$
$$\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{HG} \text{ (Car EFGH est un carré)}$$
$$\overrightarrow{MF} = -\frac{1}{2}EH + HG \text{ (Données)}$$
$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Chasles)}$$
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Données)}$$

On peut transcrire le problème sous forme d'un système d'équation :

$\begin{cases} \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4}=a+b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{4}-a=b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-a\right)=-\frac{1}{2}a \\ b=\frac{1}{4}-a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ b=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8} \end{cases}$

$S = \left\{\left(-\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right)\right\}$

donc $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MF}$ sont coplanaires => M,P,E,G sont coplanaires

b. (MP) et (FG) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{FG}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Question précédente) } \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} \text{ (car EFGH est un carré)}$$

On peut poser le système suivant :

$\begin{cases} \frac{1}{2}=k \\ 1=0 \end{cases}$

ce qui est impossible

donc (MP) et (FG) ne sont pas parallèles.

Partie B

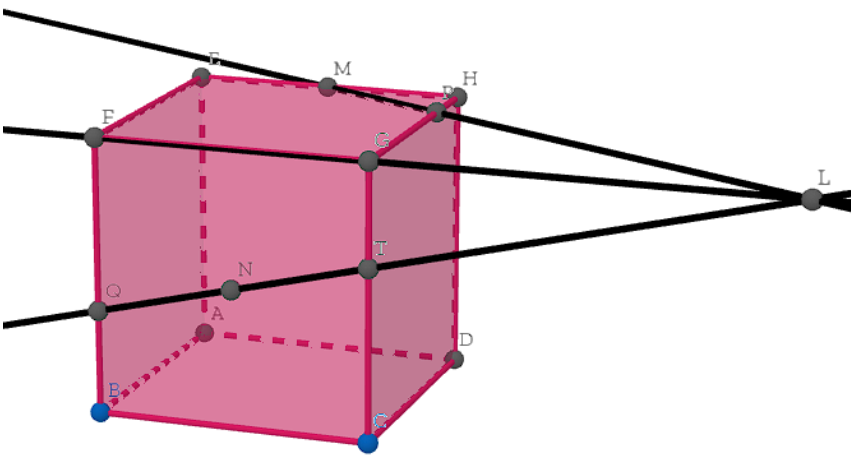
1. On sait que $(MP) \subset (EHG)$ et $(FG) \subset (EHG)$ donc que (MP) et (FG) sont coplanaires Or (MP) et (FG) ne sont pas parallèles d'après la question précédente et deux droites coplanaires sont soit parallèles ou sécantes donc (MP) et (FG) sont sécantes en un point d'intersection L

$$(LN) \subset (FGC)$$
$$(CG) \subset (FGC)$$
$$\Rightarrow (LN) \text{ et } (GC) \text{ sont coplanaires}$$

Or d'après la figure (LN) n'est pas parallèle à (GC) donc (LN) et (CG) sont sécantes en un point d'intersection T

3. $(LN) \subset (FGC)$
   $(BF) \subset (FGC)) \Rightarrow (LN)$ et (BF) sont coplanaires

Si on considère 3 droites: $(d), (d'), (t)$ avec $(d) /\!\!/ (d')$ $s'(t)$ est sécante à (d) alors (t) est sécante à (d') Or (LN) est sécante à (CG) et $(CG) /\!\!/ (BF)$ car $FGCB$ est un carré et $[GC]$ est le côté opposé à $[BF]$ Donc (LN) est sécante à (BF) en un point d'intersection Q



b. La section (MNP) de (FGC) est la droite (TQ) et d'après le théorème des parallèles la section pas un même plan de deux plan forment de deux droites parallèles or $(FGC) /\!\!/ (HEA)$ donc (QT) est parallèle à la droite (MY) avec Y le point d'intersection entre (EA) et la parallèle de (QT) au point M.

$$P \in (HDC) \text{ La section } (MNP) \text{ de } (HGCD) \text{ est } [TP]$$
$$T \in (HDC)$$

$$Q \in (EFB)$$
$$Y \in (EFB)$$

donc la section (MNP) de $(AEFB)$ est $[YQ]$

On en déduis que la section (MNP) du cube (EHGFADCB) est (MPTQY)

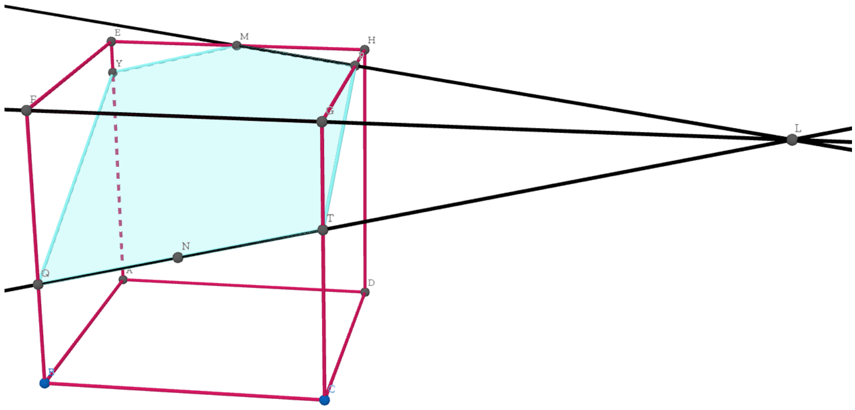


Figure 2: Section (MNP) de (EHGFADCB)

Partie C

1. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $P\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$
2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ La longueur de $[MN]$ est égale à la norme de $\overrightarrow{MN}$ définit comme :
   $\| \overrightarrow{MN} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2}$

$$= \sqrt{1^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

donc la longueur de MN est $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3.

$$\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-1 \\ 1-1 \\ 1-\frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 1-1 \\ \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

D'après la réciproque théorème de pythagore un triangle est un traingle rectangle si et seulement si le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des autres côtés.
soit si $\| \overrightarrow{PN} \|^2 = \| \overrightarrow{TP} \|^2 + \| \overrightarrow{TN} \|^2$

$$\begin{aligned} \left(\| \overrightarrow{PN} \|\right)^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{17}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\| \overrightarrow{TP} \|\right)^2 + \left(\| \overrightarrow{TN} \|\right)^2 &= \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \\ &= \frac{31}{32} \end{aligned}$$

Donc TPN n'est pas un triangle rectangle