Maths Expertes Exercices

26 Mars, 2024

Lucas Duchet-Annez

Exercice 43 p 128

1.

On a $5^3 = 25 \times 5$

$5 \equiv 5[31]$ et $25 \equiv -6[31]$

donc $5^3 \equiv 5 \times -6[31]$ $5^3 \equiv -30[31]$

Or $-30 \equiv 1[31]$ car $-30 - 1 = 31$ donc $5^3 \equiv 1[31]$

2.

$5^{15} = \left(5^3\right)^5$ donc $5^{15} \equiv 1^5[31] \equiv 1[31]$

$\Rightarrow 7 \times 5^{15} - 6 \equiv 7 - 6[31] \equiv 1[31]$

Par conséquent le reste de la division eucliedienne de $7 \times 5^{15} - 6$ par 31 est 1

Exerice 44 p 128

$100 - 9 = 31 \times 7$ donc $100 \equiv 9[31]$

$\Rightarrow 100^{1000} \equiv 9^{1000}[31]$

Or

k	1	2	3	4
$9^k \equiv \ldots[31]$	9	3	1	9

On trouve que $9^k \equiv \ldots[31]$ forme un cycle contenant 3 éléments.

De plus $1000 \equiv 1[3]$ donc $100^{1000} \equiv 9^{1000}[31] \equiv 9[31]$

Exercice 50

1.

$10 \equiv 1[9]$ donc $10^k \equiv 1[9]$

$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{k=0}^{y}\left(a_k \times 10^k\right)$, y étant le nombre de chiffre de n

Donc $n \equiv \left(\sum_{k=0}^{y}\left(a_k \times 10^k\right)\right)[9] \Rightarrow n \equiv \left(\sum_{k=0}^{y} a_k\right)[9]$

Par conséquent tout entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres et aussi divisble par 9

2.

Pour que $27a8$ soit divisible par 9 on doit avoir $2 + 7 + 8 + a \equiv 0[9]$

$2 \equiv 2[9]$ $7 \equiv 7[9]$ $8 \equiv 8[9]$ donc $2+7+8 \equiv 17[9] \equiv 8[9]$ par conséquent $a \equiv -8[9] \equiv 1[9]$ Ainsi $a = 1 + 9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ Or a est un chiffre en base 10 donc $0 \leqslant a < 10$

pour $k = 0$ $a = 1$ ce qui est dans l'intervalle

pour $k = 1$ $a = 10$ ce qui n'est pas dans l'intervalle

pour $k = -1$ $a = -8$ ce qui n'est pas dans l'intervalle

En conclusion $a = 1$ et $27a8 = 2718$ qui est divisible par 9

Exercice 51 p 128

1.

k	1	2	3	4
$10^k \equiv ...[11]$	-1	1	-1	1

On remarque que $10^k \equiv ...[11]$ forme un cycle de 2 éléments et dépend donc de la parité de k

2.
$67485 = 6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

$\Rightarrow 67485 \equiv 6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0[11]$

$67485 \equiv 6 - 7 + 4 - 8 + 5[11] \equiv 0[11]$

On en conclut que 67485 est divisible par 11 et est donc un multiple de 11.

3.
Il faut vérifier que la somme des chiffres correspondant à une puissance paire de 10 soustrait de la somme des chiffres correspondant à une puissance impaire de 10 est divisible par 11.