PETIT MANUEL DE BONNE RÉDACTION

« Bien rédiger » peut signifier deux choses :

- exposer sa pensée clairement, c'est-à-dire avec ordre et rigueur, et si possible avec style.
 Un raisonnement faux peut être bien rédigé, auquel cas il est généralement facile de trouver l'erreur commise.
 Au contraire, un raisonnement « correct » mal rédigé est souvent le signe d'une arnaque, volontaire ou non.
- se conformer aux conventions de notation pratiquées par la communauté des personnes auxquelles on s'adresse. Par exemple, puisque tout le monde note $\mathbb R$ l'ensemble des réels, il faudrait avoir l'esprit tordu pour le noter autrement. On peut toujours insister sur son caractère arbitraire, il n'en demeure pas moins qu'il est nécessaire de fixer une notation si l'on veut pouvoir communiquer.

Dans tout ce texte, les exemples de rédactions correctes sont précédées des symboles 🕷 🕷 et les exemples de rédaction incorrectes des symboles 🗙 🗶 🗙 .

Bien que les conventions de la bonne rédaction ne soient pas gravées dans le marbre dans les moindres détails, j'emploierai ci-dessous un ton impératif et sûr de lui. Chaque mathématicien a ses petites manies, mais les miennes sont partagées par bon nombre de mes collègues.

■ 1 LES GRANDS PRINCIPES DE LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE

Les enseignements de cette partie sont à bien des égards les plus importants de toute votre année de MPSI.

1.1 Introduire tout ce dont on parle

La première règle de rédaction en mathématiques, c'est que TOUTE NOTATION QUELLE QU'ELLE SOIT DOIT ÊTRE INTRO-DUITE. En français, si vous dites « Ils ont travaillé toute la soirée » sans avoir précisé qui sont ces « ils » travailleurs, vous risquez de n'être pas compris. En maths, c'est pareil, mais comment introduit-on concrètement un objet mathématique? Cela dépend du statut logique de l'objet à introduire, qui est soit un objet quelconque, une variable décrivant un certain ensemble, soit un objet précis déjà défini auquel on veut seulement donner un nom par souci de concision.

1.1 Introduire une variable

Quand on veut introduire une variable décrivant tout un ensemble, autrement dit un élément x quelconque d'un ensemble E, on peut procéder de deux manières :

 $\begin{tabular}{lll} \begin{tabular}{lll} \begin{$

 \emptyset \emptyset Pour tout $x \in E$: ...

Oublier ces petites phrases d'introduction est une faute de rédaction, mais surtout faute logique. Imaginez par exemple qu'on vous demande d'établir la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$. Première réponse :

$$\times$$
 \times $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}.$

Rédaction incorrecte car vous n'introduisez pas votre x. Voici deux réponses correctes :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

1

Bon, mais tout ceci n'est-il pas un peu de la maniaquerie? Sur un exemple aussi simple, sans doute. Mais un nombre considérable d'erreurs mathématiques, côté étudiants, provient d'une indifférence totale aux objets manipulés et à leur introduction. Quand on néglige ces « détails », de nombreux raisonnements ne sont ni corrects ni incorrects et n'ont tout simplement aucun sens. Dans la vie courante, on qualifie de fous les gens dont les phrases qui n'ont pas de sens! Plus un problème mathématique est subtil, plus il exige de rigueur et de maîtrise de soi.

En matière de rigueur, les matheux professionnels savent quand ils peuvent se permettre un certain relâchement sur la forme sans commettre d'erreur. Vous aussi, quand vous maîtriserez parfaitement la langue mathématique, vous pourrez lâcher du lest — mais pas avant!

En tout cas, si les « Soit $x \in E$ » sont une garantie de rigueur, ils sont bien plus que cela. Il arrive souvent qu'on ne sache pas résoudre un problème d'un coup d'un seul. Quelle attitude adopter pour éviter la page blanche? Dans de nombreuses situations, il suffit de partir du bon pied et d'introduire les objets en jeu avec méthode pour s'en sortir. Imaginez par exemple qu'on vous demande de démontrer le théorème suivant :

« Toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbb R$ possède une limite en $+\infty$. »

Par où commencer? Il faut d'abord traduire mentalement l'énoncé dans un langage plus mathématique :

« Pour toute fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est croissante $\implies f$ possède une limite en $+\infty$. »

On sait alors tout de suite par quoi la preuve doit COMMENCER:

 $\begin{cases} \begin{cases} \& \begin{cases}$

Libre à vous de ne pas savoir poursuivre la démonstration, vous n'avez en tout cas pas le droit de ne pas savoir la commencer ainsi. Tant que vous ne vous donnez pas une fonction f croissante fixée, vous n'êtes pas en mesure de montrer que toute fonction croissante possède une limite en $+\infty$. Maintenant que vous en avez une entre les mains, vous pouvez entamer une réflexion à son sujet. La suite de la preuve vous échappera peut-être, mais au moins vous êtes bien partis.

En résumé, quand on vous demande de démontrer un résultat de la forme « Pour tout $x \in E$, ... », commencez par « Soit $x \in E$. Montrons que ... » Et si le résultat est de la forme « Pour tout $x \in E$, si x a la propriété \mathscr{P} , alors... », commencez par « Soit $x \in E$. On suppose que x vérifie la propriété \mathscr{P} . Montrons que ... »

1.1 Donner un nom à un objet

Il arrive souvent en maths qu'on veuille donner un nom simple à une quantité compliquée parce qu'on sait qu'on va devoir souvent l'écrire. Par exemple, si vous devez employer plusieurs fois dans un raisonnement l'expression $\ln\left(e^{n_0}+1\right)$ dans laquelle n_0 est un entier déjà connu de votre lecteur, vous pouvez choisir de noter K cette quantité et profiter de ce nom pour rendre votre raisonnement plus lisible. Plutôt que $\ln\left(e^{n_0}+1\right)$, vous écrirez partout K. Deux verbes nous permettent d'introduire proprement la notation K, les verbes « poser » et « noter ».

- $\begin{tabular}{ll} \begin{tabular}{ll} \beg$
- $M \ M \ M \ M$ On pose $K = \ln(e^{n_0} + 1)$.

Ces deux rédactions correctes, tout à fait équivalentes, appellent quelques commentaires :

- Il est impératif dans les deux cas que la lettre *K* n'ait pas déjà été utilisée ailleurs dans le raisonnement que vous êtes en train de faire, sans quoi elle aurait une double signification.
- Il est impératif dans les deux cas que la lettre n_0 ait été introduite en amont, sinon votre lecteur ne comprendra jamais ce que vous entendez par $\ln (e^{n_0} + 1)$.
- Dans la deuxième rédaction, la nouvelle lettre K est à gauche du symbole d'égalité et la quantité connue $\ln(e^{n_0} + 1)$ à droite.
- Il est interdit d'employer les verbes « poser » et « noter » l'un à la place de l'autre dans ces expressions. Les confondre n'est pas une erreur de maths, mais de français. On ne dit pas par exemple « On pose K le réel $\ln (e^{n_0} + 1)$. »

Attention, l'exemple suivant est incorrect. Sous l'hypothèse que vous avez déjà introduit le réel positif y en amont, vous n'avez pas le droit d'introduire l'objet x en écrivant :

$$\times$$
 \times \times On pose $y = x^2$.

Cette formulation sous-entend que c'est y (à gauche) qui est introduit et que x (à droite) est déjà connu alors que vous vouliez exprimer le contraire. Plus profondément, la relation $y=x^2$ ne définit pas un seul réel mais deux, à savoir \sqrt{y} et $-\sqrt{y}$. Quel sens cela a-t-il de dire « On pose... » si on ne sait même pas quel réel précis on est en train d'introduire? Voici finalement deux façons correctes d'introduire un réel x de carré y.

$$\S$$
 \S On pose $x = \sqrt{y}$.

$$\emptyset$$
 \emptyset On pose $x = -\sqrt{y}$.

Comme nous venons de le voir, les verbes « poser » et « noter » servent à donner de petits noms simples à des expressions compliquées, mais on les utilise aussi et surtout pour justifier l'existence d'un objet. Imaginez qu'on vous demande de montrer l'existence de deux réels x et y dont la somme est un entier mais qui ne sont pas eux-mêmes des entiers — autrement dit, avec des quantificateurs : $\exists x,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x+y \in \mathbb{Z}$. Démontrer un résultat d'existence revient dans la mesure du possible à **EXHIBER UN EXEMPLE**. Ici, vous devez sortir de votre chapeau deux réels x et un y qui satisfont les propriétés demandées. Après un instant de réflexion :

$$\begin{tabular}{ll} \begin{tabular}{ll} \beg$$

On n'a bien sûr pas trouvé là le seul exemple de réels x et y possible, mais un seul exemple suffit à prouver leur existence. Retenez bien de tout ceci que les verbes « poser » et « noter » sont liés au quantificateur existentiel \exists alors que l'expression « Soit... » était lié au quantificateur universel \forall .

1.2 METTRE EN ÉVIDENCE LES ARTICULATIONS LOGIQUES

Quand on rédige un raisonnement, il est très important de distinguer clairement les hypothèses des conclusions par exemple et d'indiquer les rapports d'implication entre propositions. Le français est riche en mots de liaison, profitez-en :

donc	or	par conséquent	en outre
ainsi	alors	puisque	dès lors
aussitôt	ensuite	de plus	mais
cependant	toutefois	enfin	car

Truffez vos raisonnements de ces petits mots qui guideront votre lecteur et ouvrez-vous à la variété autant que possible. Par exemple, imaginez qu'on vous demande de montrer la proposition : $\forall x \in [0,1], \quad \sqrt{1-x^2} \in [0,1].$

**** ** ****
$$0 \le x \le 1$$

 $0 \le x^2 \le 1$ car $t \mapsto t^2$ est croissante sur \mathbb{R}_+
 $0 \le 1 - x^2 \le 1$
 $0 \le \sqrt{1 - x^2} \le 1$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur \mathbb{R}_+
**** **** $0 \le x \le 1 \implies 0 \le x^2 \le 1 \implies 0 \le 1 - x^2 \le 1 \implies 0 \le \sqrt{1 - x^2} \le 1$

 $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$

À propos de la deuxième rédaction incorrecte, l'affirmation qui suit vous surprendra, mais elle est vraiment essentielle.

La flèche d'implication «
$$\Longrightarrow$$
 » Ne signifie PAS « donc » et on l'utilise RAREMENT.

Quand on fait un raisonnement du type « p est vraie donc q est vraie », c'est la conclusion « q est vraie » qu'on vise, c'est elle qu'on affirme haut et fort. La proposition p n'est qu'un moyen au service de cette fin. En d'autres termes, quand on dit « p est vraie donc q est vraie », ce **N'est PAS** l'implication : $p \Longrightarrow q$ qu'on affirme, car cette implication ne garantit ni que p est vraie, ni que q est vraie.

Autre manière de dire les choses, l'implication : $p \Longrightarrow q$ est une proposition alors que la phrase « p est vraie donc q est vraie » est un raisonnement, i.e. un enchevêtrement complexe de propositions :

$$p$$
 est vraie $\underbrace{\text{ET}}$ il est vrai que $p \Longrightarrow q$, q est vraie.

En pratique, ce sont des raisonnements qu'on mène le plus souvent, qui requièrent des « donc » ou des mots apparentés comme « ainsi », « par conséquent », « dès lors »... JAMAIS DE FLÈCHES À LA PLACE DE CES MOTS!

La flèche d'implication n'a-t-elle donc aucune utilité en mathématiques ? Bien au contraire ! Généralement sous-entendue comme on vient de le voir, elle est peu présente physiquement, mais les définitions en sont truffées par exemple. Par définition, une fonction f est croissante si : $\forall x, y \in I$, $(x < y \implies f(x) \le f(y))$. Cette proposition n'est pas un raisonnement et la flèche y est parfaitement à sa place.

1.3 Annoncer ce que l'on fait

Rédiger correctement une démonstration, c'est en premier lieu expliquer ce que l'on fait. Rendez votre travail lisible en annonçant régulièrement ce que vous vous apprêtez à prouver : « Montrons que... », « Nous allons maintenant prouver que... », « Il nous reste à montrer que... », etc.

1.4 CITER UNE DÉFINITION OU UN THÉORÈME

Citer une définition ou un théorème exige une précision parfaite. Hypothèses, notations et conclusions doivent être énoncées clairement et sans faute. Un théorème à peu près correct mais pas tout à fait, ou mal rédigé, est un théorème mal appris et souvent mal compris. Imaginez qu'on vous demande de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point. Première réponse :

XXX Le nombre dérivé de
$$f$$
 en a vaut $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Économique, certes, mais insuffisant. Qui sont f et a? Pourquoi la limite existe-t-elle? Correction :

 $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$

Connaître une définition ou un théorème, c'est être capable de les rédiger ainsi dans l'instant.

2 CAS PARTICULIERS DE RÉDACTION PROBLÉMATIQUE

2.1 LE MÉLANGE DES GENRES

ÉCRIVEZ FRANÇAIS OU MATHÉMATIQUE, MAIS PAS LES DEUX À LA FOIS! Par exemple, on n'écrit pas :

 $\times \times \times \times \forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier.

mais au choix:

 $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$

 $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$

& & La somme de deux entiers est un entier.

De même, ne remplacez pas l'expression « il existe » par le symbole ∃ dans une phrase en français.

Le mélange autorisé le plus courant concerne le symbole \in . Les exemples précédents en témoignent, de même que la classique expression « Soit $x \in E$ ». Il n'est pas nécessaire d'écrire en toutes lettres « Soit x un élément de E ». En revanche, le verbe « appartenir » ne doit pas être remplacé par le symbole \in au cœur d'une phrase en français :

 \times \times La fonction cosinus \in à l'ensemble des fonctions paires.

2.2 Définir une fonction

Commençons par un exemple bien laid :

 $\times \times \times$ La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Le problème dans cet exemple, c'est que $e^x \sin x$ N'EST PAS UNE FONCTION! On dit plutôt que c'est une expression.

Une fonction $de \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , par exemple, est un objet mathématique qui associe à tout réel un autre réel. Définir une telle fonction f revient donc à définir la façon dont un réel quelconque, disons x, est transformé en un autre réel f(x) dépendant de x. La fonction, notée f, est l'objet abstrait qui associe les x aux f(x). La quantité f(x) est quant à elle un simple réel et n'a de sens que si l'on s'est donné un réel x concret. On a coutume de noter également $x \mapsto f(x)$ la fonction f. Cette notation indique bien en quoi f n'est pas simplement le réel f(x), mais la manière dont on passe de façon générale d'un réel x à un réel f(x).

Attention de ne pas confondre les flèches \longrightarrow et \longmapsto ! La flèche \longrightarrow est utilisée typiquement dans le cadre des limites. Seule la flèche \longmapsto convient pour les fonctions.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\times \times \times$$
 La fonction $x \longrightarrow e^{x^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

En pratique, quand on veut faire référence à une fonction précise dans une phrase, soit la fonction a un nom et on peut employer ce nom (par exemple f, $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, sin, cos...), soit la fonction n'a pas de nom mais elle est définie par une expression explicite et on la note alors $x \mapsto \ldots$ Dans cette notation, la lettre x peut être remplacée par n'importe quel symbole.

Et quand on veut définir une fonction, on fait comment? Imaginez par exemple qu'on veuille introduire proprement et noter f la fonction qui envoie tout réel positif sur sa racine carrée augmentée de 1. On pourra procéder ainsi :

- $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$
- $\begin{tabular}{lll} \begin{tabular}{lll} \begin{$
- \emptyset \emptyset On note f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

Tous ces exemples sont corrects. Dans le deuxième, notez bien que la flèche du haut qui relie l'ensemble de départ \mathbb{R}_+ à l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} s'écrit \longrightarrow et non pas \longmapsto .

2.3 Parler des propriétés d'une fonction

Les exemples suivants sont incorrectement rédigés :

- ****** La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ****** La fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Le problème, c'est qu'on ne dit pas qu'une fonction est dérivable/croissante « pour tout $x \in ...$ ». M'accordez-vous que la fonction $x \longmapsto x^2$ NE dépend PAS de x? L'expression x^2 dépend de x, oui, mais la fonction $x \longmapsto x^2$ existe à un niveau d'abstraction supérieur et décrit l'association de TOUT réel x au réel x^2 . Pour cette raison, elle ne dépend pas de x, on aurait d'ailleurs pu noter $t \longmapsto t^2$ la même fonction.

Voilà donc ce qu'il convient d'écrire :

- \emptyset \emptyset La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} .
- $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$

2.4 DÉRIVER UNE FONCTION

Dériver n'est pas difficile, mais la rédaction d'un calcul de dérivée pose parfois problème. Imaginez qu'on veuille par exemple dériver sur \mathbb{R} la fonction $x \stackrel{f}{\longmapsto} e^{\sin(2x)}$. Voici une réponse :

****** Pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
: $f'(x) = (e^{\sin(2x)})' = (\sin(2x))' e^{\sin(2x)} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$.

Ça ne va pas car LA NOTATION (f(x))' EST INTERDITE! La meilleure rédaction est ici la plus courte, i.e. celle qui donne directement le résultat. Un résultat bien présenté se suffit à lui-même dans une situation aussi simple. Quiconque sait dériver comprendra tout seul ce que vous avez fait si vous écrivez simplement ceci :

$$\begin{tabular}{lll} \begin{tabular}{lll} \begin{$$

Par bonheur, la notation (f(x))' est interdite, mais vous pouvez la remplacer par la notation $\frac{d}{dx}(f(x))$. Dans cette notation, le « dx » indique qu'on dérive par rapport à la variable x. Quand un problème contient plusieurs variables, la précision est bienvenue.

Pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
: $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{\sin(2x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sin(2x) \right) \times e^{\sin(2x)} = 2\cos(2x) e^{\sin(2x)}$.

2.5 LA NAÏVETÉ DES NOTATIONS CLASSIQUES

Pour que leurs élèves retiennent bien les formules et sachent les utiliser d'une année à l'autre, les profs de maths utilisent souvent tous les mêmes notations. Quand on présente la résolution des équations du second degré par exemple, la tradition veut qu'on note $x \mapsto ax^2 + bx + c$ la fonction polynomiale de degré 2 étudiée et Δ son discriminant. Vous avez tous appris la définition du discriminant sous la même forme $\Delta = b^2 - 4ac$.

Imaginez qu'on vous demande de résoudre l'équation du second degré $x^2+3x-2=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$. Premier exemple de rédaction :

XXX
$$\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$$
, donc $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

Cette rédaction est une pure abomination. Où les quantités Δ , a, b, c, x_1 et x_2 ont-elles été introduites dans cet exemple ? Nulle part. Et si vous devez résoudre ensuite une autre équation du second degré, vous noterez aussi Δ le deuxième discriminant ? La lettre Δ aura donc plusieurs valeurs différentes tout en n'ayant jamais été introduite proprement ? Voici maintenant un exemple de rédaction correcte :

& & & L'équation $x^2+3x-2=0$ s'écrit aussi $ax^2+bx+c=0$ si on pose : a=1, b=3 et c=-2. Son discriminant Δ vaut $\Delta=b^2-4ac=17$ et est strictement positif, donc l'équation étudiée possède deux solutions distinctes x_1 et x_2 , par exemple dans cet ordre : $x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Voilà qui est correct, mais qu'est-ce que c'est lourd et pervers! Au fond, l'emploi des lettres Δ , a, b et c est-il bien nécessaire pour de telles bêtises? Que nenni. La rédaction la plus limpide est aussi la plus économique :

 $\begin{align*} \begin{align*} \beg$

Élégance et clarté! Libérez-vous des fausses idoles. Mais peut-être ne voyez-vous pas bien pourquoi il est maladroit d'écrire $\Delta = b^2 - 4ac$ quand Δ , a, b et c n'ont pas été introduits. Ok, ce n'est pas nickel côté rédaction, mais après tout, tout le monde comprend.

Pour vous convaincre, je m'appuierai sur le ou la géologue qui sommeille en vous. Vous savez tous ce que sont une stalagtite et une stalagmite? Alors vous connaissez sans doute aussi le moyen mnémotechnique qu'on utilise pour retenir la différence entre ces deux notions : $stalac\underline{T}ite/\underline{T}ombe$, $stalag\underline{M}ite/\underline{M}onte$. Que penserait-on d'un géologue professionnel qui, devant ses pairs dans des conférences internationales, dirait chaque fois « stalagtite/tombe » au lieu de « stalagtite » et « stalagmite/monte » au lieu de « stalagmite » pour se rassurer et éviter toute confusion? On rirait de lui, ses collègues le jugeraient ridicule. La situation est la même en maths avec $\Delta = b^2 - 4ac$. Que vous ayez un moyen mnémotechnique pour retenir une formule, pourquoi pas, mais n'en faites pas profiter tout le monde et évitez de paraître immature.