Maths Devoir Maison 4

4 Décembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Rédacteur Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

On sait que (Cf) admet deux asymptotes d'équations $x = 1$ et $x = -1$ cela veut dire que f n'est pas définie quand $x = 1$ ou $x = -1$ or f est une fonction rationnelle définie tant que son dénominateur est différent de 0 soit quand $x^2 - c \neq 0$ Donc $c = (1)^2$ ou $c = (-1)^2$ soit $c = 1$.

$$f(x) - (x+2) = \frac{ax^3 + bx^2}{x^2 - 1} - x - 2$$

$$= \frac{(a-1)x^3 + (b-2)x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x^3\left(a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= x\frac{a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

On sait que $lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0$ donc $lim_{x\to+\infty}a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = a - 1$ et $lim_{x\to+\infty}1 - \frac{1}{x^2} = 1$ De plus $lim_{x\to+\infty}x = +\infty$ Donc $lim_{x\to+\infty}f(x) - (x+2) = lim_{x\to+\infty}x(a-1) = 0$

Pour que la limite soit 0 il faut que $a - 1 = 0$ soit $a = 1$

Finalement On peut noter

$$f(x) - (x+2) = x\frac{1 - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{b-2}{+}\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

A nouveau $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par conséquent on obtient $lim_{x\to+\infty}f(x) - (x+2) = lim_{x\to+\infty}b - 2 = 0$ Donc $b = 2$

Partie B

1. Pour étudier les variations de g on analyse le signe de sa dérivée. $g'(x) = 3x^2 - 3$ $g'(x) > 0$ $3x^2 - 3 > 0$ $x^2 > \frac{3}{3}$ $x^2 > 1$ $x > 1$ ou $x < -1$

Pour calculer les limites de g on factorise par le terme prépondérant. $g(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$ On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Par conséquent $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ On en déduit

x	-∞		-1		1		+∞
signe de g'(x)		+	0	-	0	+	
var de g	-∞	↗	g(-1)=-2	↘	g(1)=-6	↗	+∞

2. a. On peut étudier chaque intervalle à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Premièrement g est une fonction polynomiale donc définie et dérivable sur ℝ, par conséquent g est une fonction continue sur ℝ. Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ g est croissante et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $g(-1) = -2$ donc (Cg) ne coupe pas l'axe des abscisses et l'équation $g(a) = 0(E)$ n'as pas de solution de manière analogue sur $[-1;1]$ g est décroissante et comme $g(-1) < 0$ (E) n'as pas non plus de solution. Finalement sur $[1; +\infty[$ g est croissante et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$, $g(1) = -6 < 0$ Donc d'après le théorème des valeurs intermédiares (E) a une unique solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$
   b. $g(2.19) = -0.066541$ et $g(2.20) = 0.048$ ce qui veut dire que $g(2.19) < a < g(2.20)$ soit d'après le théorème des valeurs intermédiares $2.19 < a < 2.20$

3. $g(x) > 0$ $x^3 - 3x - 4 > 0$ $x > a$ On en déduit le tableau suivant

x	-∞		a		+∞
signe de g(x)		-	0	+	

Partie C

1. f est définie quand son dénominateur est différent de 0 soit quand $x^2 - 1 \neq 0$ donc quand $x \neq 1$ et $x \neq -1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ De plus $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^3 + 2x^2$ et $v(x) = x^2 - 1$ donc son ensemble de dérivabilité est $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ car v n'est pas définie quand $x = 1$ et $x = -1$

2. f satisfait les conditions de la partie A car $f(0) = \frac{0^3+2(0^2)}{0^2-1} = 0$ donc f passe par l'origine. De plus f n'est pas définie en -1 et 1 comme dans la partie A et la limite de $f(x) - (x+2) = \frac{x^3+2x^2-x^3+x-2x^2+2}{x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+2) = 0$ et de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = 0$

3. a. $f'(x) = \frac{(x^2-1)(3x^2+4x)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
   b.

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ car $x < -1$ $x^2 > 1$ car x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ $x^2 - 1 > 0$

et de manière analogue $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ car $x > -1$ $x^2 < 1$ car x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ $x^2 - 1 < 0$

De plus $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ car $x > 1$ $x^2 > 1$ car x^2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ $x^2 - 1 > 0$ Finalement $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ car $x < 1$ $x^2 < 1$ car x^2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ $x^2 - 1 < 0$

x	-∞		-1		0		1		+∞
signe de xg(x)		+		+	0	-		-	
var de f	x+2	↗	||	↗	0	↘	||	↘	x+2

4. a. $x+2+\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2+(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x+2-2-x+x^3+2x^2}{x^2-1} = f(x)$
   b. Par conséquent $f(x)-(x+2) = \frac{x+2}{x^2-1}$ Donc quand x tend vers $-\infty$ (Cf) sera légèrement en dessous de Δ et inversement quand x tend vers $+\infty$

5.

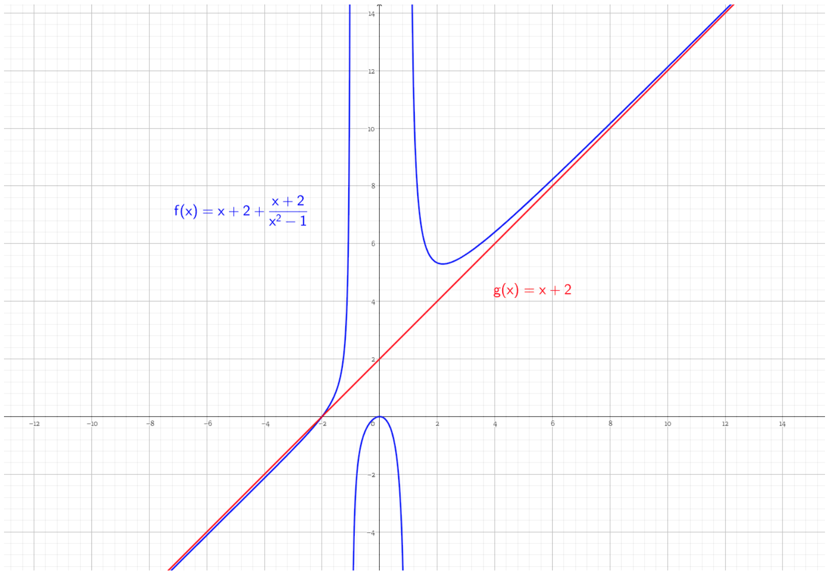


Figure 1: Graphique

Partie D

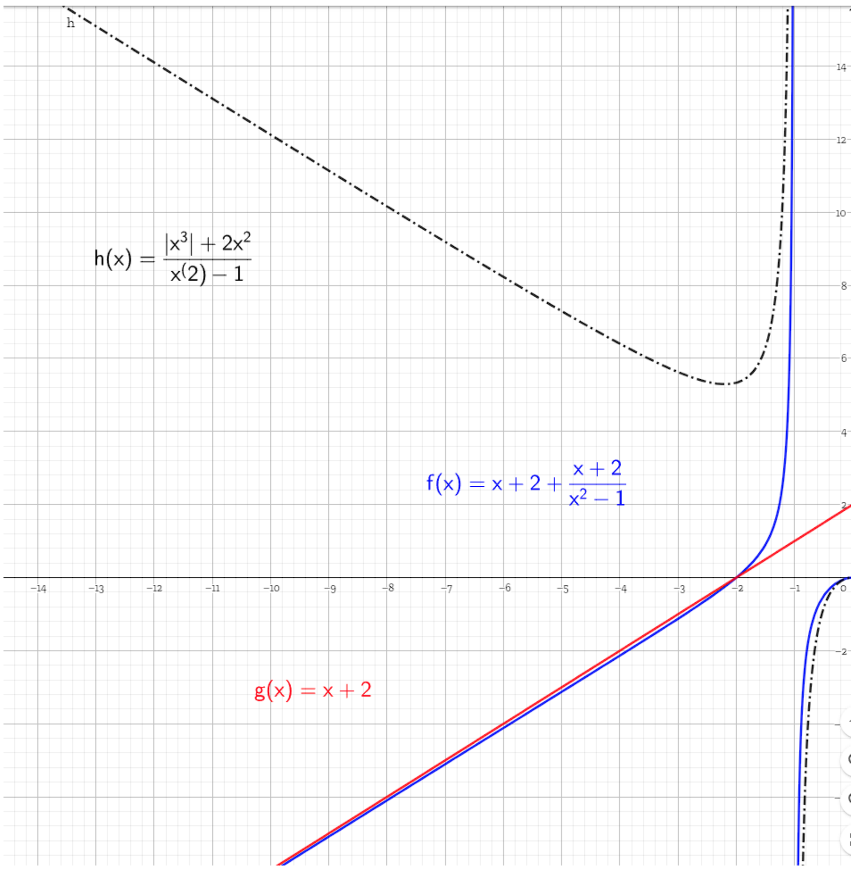


Figure 2: h(x) en pointillé

Brouillon

Exercice 2

1.

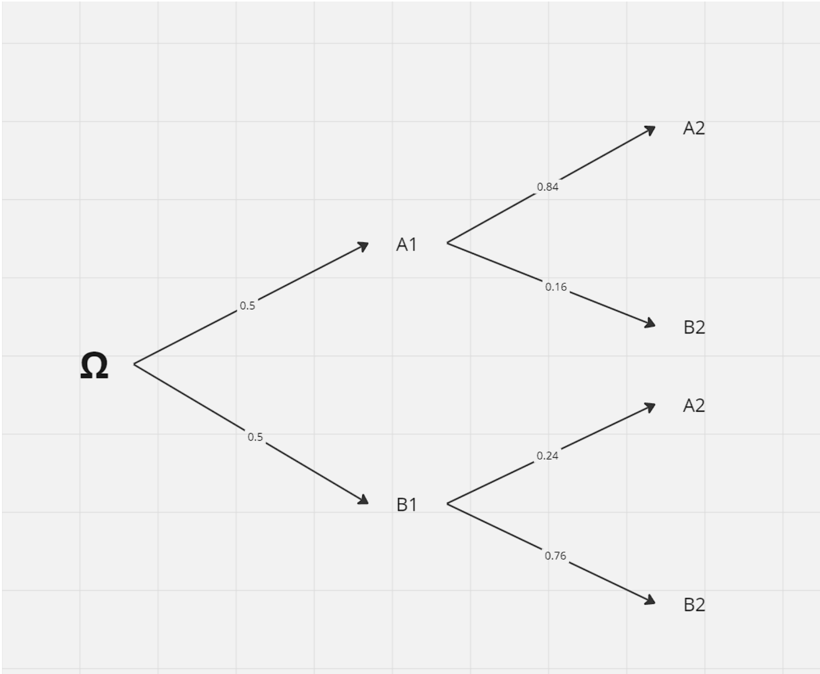
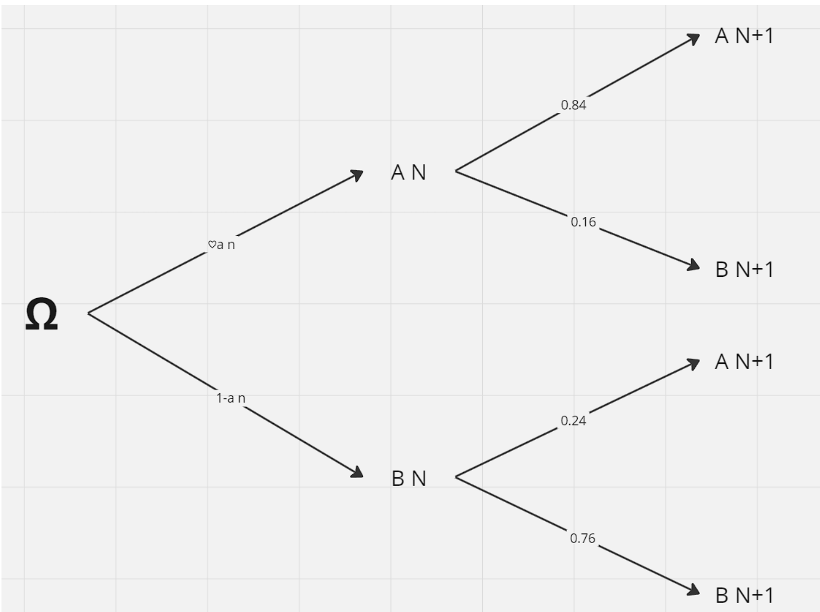


Figure 3: Arbre de probabilités

2. a. $a_2 = P(A_2 \cap B_1) + P(A_2 \cap A_1) = P_{B_1}(A_2)P(B_1) + P_{A_2}(A_1)P(A_2)$ donc
   $a_2 = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.84 = 0.54$

   b. $P_{A_2}(B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1}{P(A_2)} = \frac{0.24 \times 0.5}{0.54} = \frac{2}{9}$

3. a.



   b. $a_n + 1 = (0.24)(1 - a_n) + 0.84\ a_n = 0.24 - 0.24\ a_n + 0.84\ a_n = 0.6\ a_n + 0.24$

4. Soit à démonter: $P(n)$: " $a_n = 0.6 - 0.1 \times 0.6^{n-1}$"
   Initialisation: au rang $n = 1$ on a d'une part $a_1 = 0.5$ et $0.6 - 0.1 \times 0.6^0 = 0.5$ Donc $P(1)$ est vraie c'est-à-dire la propriété est initialisée.
   Hérédité: On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire

$a_k = 0.6 - 0.1 \times 0.6^{k-1}$
On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$
$a_{k+1} = 0.6\,(a_k) + 0.24 = 0.6\left(0.6 - 0.1 \times 0.6^{k-1}\right) + 0.24$ $a_{k+1} = 0.36 - 0.1 \times 0.6^{k+1-1} + 0.24 = 0.6 - 0.1 \times 0.6^{k+1-1}$
Donc $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = 0.6 - 0.1 \times 0.6^{n-1}$

5. $\lim_{n\to+\infty} 0.6^n = 0$ car $-1 < 0.6 < 1$ Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.6$ Ce qui veut dire qu'après un grand nombre de jour la probabilité de trouver le vélo au point A au matin suivant est de 0.6

6. On peut utiliser un programme de seuil

```
def seuil(A):
  u=0.5
  n=1
  while u < A:
    n+=1
    u=0.6*u+0.24
  return n
print(seuil(0.599))
```

On obtient n=11 ce qui veut dire qu'après 11 matin la probabilité d'obtenir le vélo au point A le matin suivant sera supérieur à 0.599

Exercice 3

D'après le théorème de Pythagore on a $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$ soit $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$ Or le volume d'un cylindre d'hauteur variable est $V(h) = \pi r^2 h$ Donc $V(h) = \pi\left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$

On peut maintenant étudier les variations de V sur $]0; 2R[$ $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \frac{-1}{2}h(\pi h) = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$

$$V'(h) = 0$$

$$\pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\pi R^2 = \frac{3\pi h^2}{4}$$

$$4\pi R^2 = 3\pi h^2$$

$$\frac{4\pi R^2}{3\pi} = h^2$$

$$\frac{4R^2}{3} = h^2$$

Donc $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$
car $R > 0$ et $h > 0$ en tant que longeur.

Donc $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ quand $V(h)$ est maximal et $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

$$r^2 = \frac{2R^2}{3}$$

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

car $R > 0$ et $r > 0$ en tant que longeur.