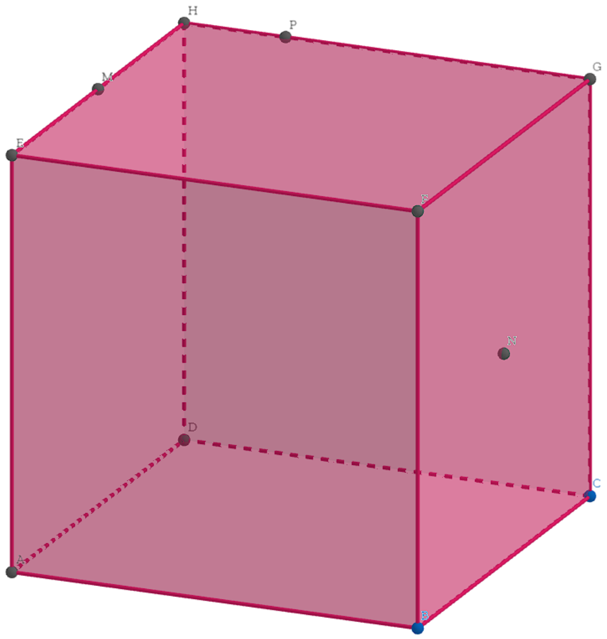
Brouillon DM 2

Lucas
Duchet-Annez
T°B

Exercice 1

1.



2. Les points M, P, F, G sont coplanaires si et seulement si $\vec{MP} = a\vec{MF} + b\vec{MG}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{MP} = \vec{MH} + \vec{HP}$ (Chasles)
$= \frac{1}{2}\vec{EH} + \frac{1}{4}\vec{HG}$ (données)

$\vec{MF} = \vec{ME} + \vec{EF}$ (Chasles)
$= -\vec{EM} + \vec{HG}$ (EFGH est un carré)
$= -\frac{1}{2}\vec{EH} + \vec{HG}$ (données)

$\vec{MG} = \vec{MH} + \vec{HG}$ (Chasles)
$= \frac{1}{2}\vec{EH} + \vec{HG}$ (données)

On peut transcrire le problème sous forme de système d'équation

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4} = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{4} - a = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - a\right) = -\frac{1}{2}a \\ b = \frac{1}{4} - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$S = \left\{\left(-\frac{3}{8} ; \frac{5}{8}\right)\right\}$

donc $\vec{MP}, \vec{MG}, \vec{MF}$ sont coplanaires $\Rightarrow$ M, P, F, G sont coplanaires

b. (MP) et (FG) sont parallèles si et seulement si $\vec{MP} = k\vec{FG}$

avec $k \in \mathbb{R}$

$\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{EH} + \vec{HG}$ (question précédente) $\vec{FG} = \vec{EH}$ (car EFGH est un carré)

On peut poser le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$ ce qui est impossible

donc (MP) et (FG) ne sont pas parallèle

Partie B

1. On sait que $(MP) \subset (EHG)$ et $(FG) \subset (EHG)$

Or (MP) et (FG) ne sont pas parallèle d'après la question précédente

(MP) et (FG) sont coplanaires et sécantes en un point d'intersection

L.

$$\left.\begin{array}{l}(LN) \subset (FGC) \\ (CG) \subset (FGC)\end{array}\right\} \Rightarrow (LN) \text{ et } (GC) \text{ sont coplanaires}$$

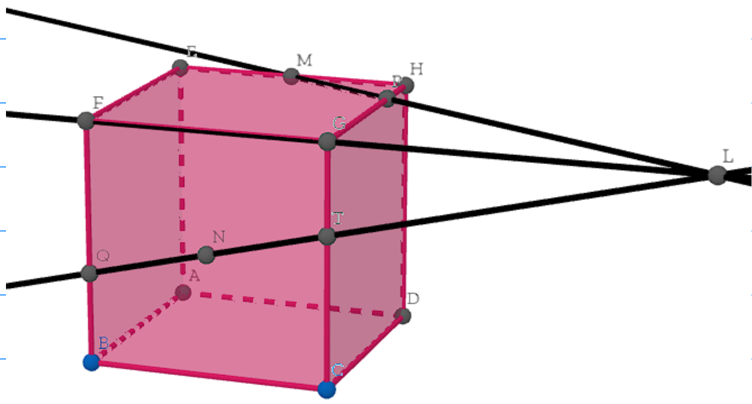
Or d'après la figure (LN) n'est pas parallèle à (CG) donc (LN) et (CG) sont sécantes en un point d'intersection T

3. $$\left.\begin{array}{l}(LN) \subset (FGC) \\ (BF) \subset (FGC)\end{array}\right\} \Rightarrow (LN) \text{ et } (BF) \text{ sont coplanaires}$$

Si on considère 3 droites : (d), (d'), (t) avec (d)//(d')

si (t) est sécante à (d), (t) est sécante à (d')

Or (LN) est sécante à (CG) et (CG)//(BF) car FGCB est un carré et [GC] est le côté opposé à [BF] donc (LN) est sécante à (BF) en un point d'intersection Q a.



b. La section (MNP) de (FGC) est le segment [TQ] et d'après le théorème des parallèles la section par un même plan de deux plans forment de droites parallèles. Or (FGC)//(HEA) donc (QT) est parallèle à la droite (MV) avec V le point d'intersection entre (EA) et la parallèle de (QT) au point M.

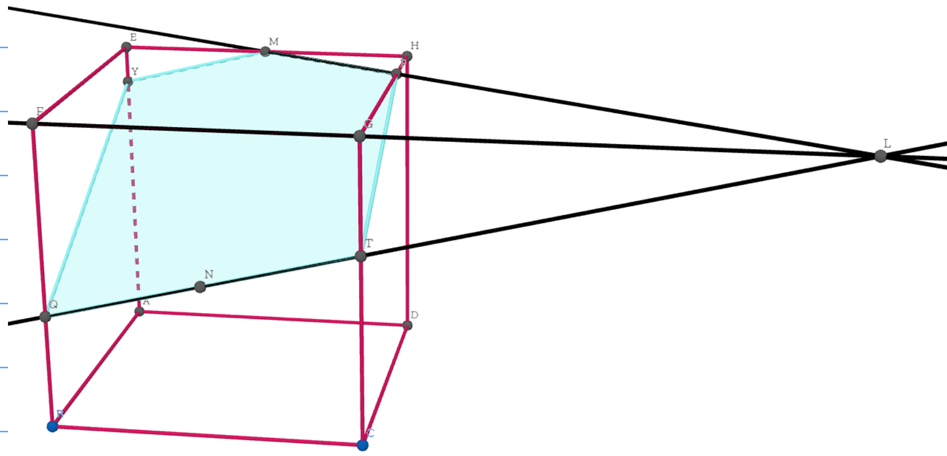
$$\left.\begin{array}{l} P \in (HDC) \\ T \in (HDC) \end{array}\right\}$$

La section (MNP) de (HGCD) est [TP]

$Q \in (EFB)$
$Y \in (EFB)$

donc la section (MNP) de (AEFB) est [YQ]

donc la section (MNP) des cube (EHGFADCB) est (MPTQY)



Partie C:

1. $M(0; \frac{1}{2}; 1)$ $N(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $P(\frac{1}{4}; 1; 1)$

2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

la longueur [MN] est égale à la norme de $\overrightarrow{MN}$ définit :

$\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$= \sqrt{1^2+0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

donc la longueur de MN est $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

D'après le théorème de pythagore un triangle est un triangle rectangle si et seulement si la longueur du plus grand côté au carré est égal à la somme des carrés des autres côtés

donc si $\|\overrightarrow{PN}\|^2 = \|\overrightarrow{TP}\|^2 + \|\overrightarrow{TN}\|^2$

$\|\overrightarrow{PN}\|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$
$= \frac{17}{16}$

$\|\overrightarrow{TP}\|^2 + \|\overrightarrow{TN}\|^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2$
$= \frac{31}{32}$

donc TPN n'est pas un triangle rectangle

Exercice 2 :

1 a. Pour étudier la fonction g on détermine sa dérivée :

$$g'(x) = 2xe^{x} + e^{x}x^{2}$$
$$= xe^{x}(2+x)$$

On étudie le signe g' :

$g'(x) \geq 0$

$xe^{x}(2+x) \geq 0$

soit si $xe^{x} \geq 0$ ou $2+x \geq 0$

On sait que $e^{x} > 0$ avec $x \in [0;+\infty[$ $\quad x \geq -2$

donc $xe^{x} \geq 0$ si $x \geq 0$

$\Rightarrow$ sur l'intervale $[0,+\infty[$ g' s'annule une fois quand $x=0$

On en déduis le tableau de variation suivant

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	-1	$\nearrow$	

$g(0) = 0^{2}e^{0} - 1$
$= -1$

donc g est strictement croissant sur $[0;+\infty[$

b. g est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc g est continue sur $[0;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc g est monotone stricte.

$$g(0.703) = (0.703)^2 e^{0.703} - 1 \simeq -0,0018 < 0$$

$$g(0.704) = (0.704)^2 e^{0.704} - 1 \simeq 0,0020 > 0$$

g change de signe sur $[0.703 ; 0.704[$

$\Rightarrow$ D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

On en déduit que $g(a) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$ avec $a \in [0.703;0.704[\subset [0;+\infty[$

c. On sait que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ que $g(0) = -1$ et que $g(a) = 0$ est vraie pour un réel a entre 0.703 et 0.704

donc

x	0		0.703 0.704		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. Étude de la fonction f (Complémentaire)

a. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x + \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ n'est pas définie quand $x=0$ Donc on peut seulement obtenir la limite quand x tend vers 0^+

$\lim_{x \to 0^+} e^x + \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \to \infty} e^x + \frac{1}{x} = e^{\infty} + \frac{1}{\infty} = \infty$ car $\frac{1}{\infty} = 0$ et $e^{\infty} = \infty$

b $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{e^x x^2 - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

c $e^x x^2 - 1 \geqslant 0$ quand $x \in [0.704 ; +\infty[$

$x^2 \geqslant 0$ quand $x \geqslant 0$ donc $x \neq 0$

x	0		0.703 0.704		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	∞ ↘		↗	∞

Le minimum de la intervient quand $f'(a)=0$

$f'(x)=0$

$\frac{g(x)}{x^2}=0$

$g(x)=0$ et $x \neq 0$

$x=a$

$f(a)=e^a+\frac{1}{a}$ $\quad a^2e^a-1=0 \Rightarrow e^a=\frac{1}{a^2}$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$

donc la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$

$y(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$

e On sait que $0.703<a<0.704$ On peut composer par y sachant que y est décroissante sur $]0,+\infty[$

$f(0.703)>f(a)>f(0.704)$

$3,45>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}>3,43$ $\quad f(0.703)\simeq 3,45$

$3,43<m<3,45$ $\quad f(0.704)\simeq 3,43$

Donc le minimum de f se situe entre 3,43 et 3,45