Algèbre Linéaire Série 7

16/10/2024

2024-09-16

Lucas Duchet-Annez

EPFL

2024/2025

Génie Mécanique

1 Exercice 1

1.1

Supposons que $AC = I_n$ Si A a un inverse alors $\exists ! E \;\; EA = I_n$ Supposons que

$$CA \neq I_n$$

Ainsi

$$(CA - I_n)D \neq 0$$

$$A(CA - I_n)D \neq 0$$

$$ACAD - AD \neq 0$$

$$AD - AD \neq 0$$

$$0 \neq 0$$

Absurde Donc $AC = I_n \iff CA = I_n$ et C est l'inverse de A par définition

1.2

Supposons que $CA = I_n$ Si A a un inverse alors $\exists ! E \;\; AE = I_n$ Supposons que

$$AC \neq I_n$$

Ainsi

$$C(AC - I_n)D \neq 0$$

$$C(AC - I_n)D \neq 0$$

$$CACD - CD \neq 0$$

$$CD - CD \neq 0$$

$$0 \neq 0$$

Absurde Donc $CA = I_n \iff AC = I_n$ et C est l'inverse de A par définition

Par double implication A est inversible d'inverse C

2 Exercice 2

On $AB(U) = I_n$ et $V(AB) = I_n$ Par associativité

$$A(BU) = I_n$$

d'après le théorème précédent A est inversible d'inverse BU

$$(VA)B = I_n$$

d'après le théorème précédent B est inversible d'inverse VA

3 Exercice 3

$\det(A) = bc^2 - cb^2 - ac^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 = c^2(b-a) + b^2(a-c) + a^2(c-b) = (b-a)(c-a)(c-b)$

$(b-a)(c-a)(c-b) \neq 0 \Longrightarrow c \neq b \neq a \neq c$

3.1

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

3.2 Généralisation

$$\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n}^{n} (c_j - c_i)$$

4 Exercice 4

$$t = 7$$

$$s = 14$$

5 Exercice 5

$$\det(A) = 16$$

6 Exercice 6

6.1

F

6.2

V

6.3

F

6.4

F

7 Exercice 7

7.1

$$\det(C) = -15\det(A)$$

$$\det(2B) = 2^3 B$$

$$\det(D) = -120\det(A)\det(B)$$

7.2

$$\det(C) = 4^3(-1)\det(A)$$

$$\det(D^-1) = \frac{1}{4}\text{det}(B)^-1$$

$$\det(CD^-1) = -16\det(A)\text{det}(B)^-1$$

8 Exercice 8

8.1

S4S

8.2

S4S

8.3

S4S

8.4

S4S

8.5

$$f(x) = 0 \in \mathbb{F}$$

$$f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$

$$\alpha f(x) \in \mathbb{R}$$

Donc $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel

8.6

$$0 \in \mathbb{P}$$

car $f(x) = 0 = p(t) = 0$ monome nulle Question a

8.7

On peut dire que $C(\mathbb{R})$ est un sous ensemble de $\mathbb{F}$ Or d'après l'analyse $f + g$ est continue si f et g sont continue donc $f + g \in C(\mathbb{R})$ $f(x) = 0$ est continue et $\alpha f(x)$ est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ si f est continue donc $C(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbb{F}$, un espace vectoriel.

8.8

$f(x) = 0 \in C^1(\mathbb{R})$ car $f(x) = 0$ a pour dérivée lui même donc sa dérivée est continue $f + g \in C^1(\mathbb{R})$ et $\alpha f \in C^1(\mathbb{R})$ d'après l'analyse donc $C^1(\mathbb{R})$ est un sev de $C(\mathbb{R})$