Maths Exercices 09 11 2023

31 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 48

1. Soit $u_n = 5n^2 - 2(-1)^n$. On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ pour tout n. Cela signifie que $-2(-1)^n \geq -2$ pour tout n. Par conséquent, $5n^2 - 2(-1)^n \geq 5n^2 - 2$ pour tout n. On sait également que $\lim_{n\to+\infty}(5n^2 - 2) = +\infty$. En appliquant le théorème de comparaison, on obtient que $\lim_{n\to+\infty}(5n^2 - 2(-1)^n) = +\infty$.
2. Soit $u_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$. On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ pour tout n. Cela signifie que pour n=n+1 $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$ par conséquent $n^2 - 2n - 1 \leq (-1)^{n+1} \leq n^2 - 2n + 1$ pour tout n On sait que $\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 2n - 1) = \lim_{n\to+\infty}\left(n^2\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème de comparaison, on obtient que $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 - 2n + (-1)^{n+1}\right) = +\infty$
3. Soit $(-1)^n \times \frac{\sqrt{n}}{n}$. On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $-\frac{\sqrt{n}}{n} \leq (-1)^n \times \frac{\sqrt{n}}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$. On sait également que $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n} = -\frac{n^{1/2}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et de manière analogue $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ En appliquant le théorème dit des gendarmes, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \times \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$