Maths Devoir Maison 3

27 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

1. Il y a 6 faces sur un cube et il y a 2 faces noires sur le dé A donc la probabilité d'obtenir une fois une face noire et $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Comme les deux lancers sont indépendants la probabilité d'avoir une face noire au second lancer et aussi de $\frac{1}{3}$ donc la probabilité d'avoir deux faces noires successivement est $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
2. La probabilité de l'évènement C est égale à la somme des probabilités d'avoir deux faces d'une certaine même couleur, Soit : $P(C) = \sum_{n=0}^{2} P_n$ avec $n \in \{0, 1, 2\}$ et 0 correspondant à la couleur verte, 1 à la couleur noire, et 2 à la couleur rouge On sait que $P_1 = \frac{1}{9}$ d'après la question précédente de manière analogue on détermine que $P_0 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et que $P_2 = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ donc $P(C) = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$
3. La probabilité qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes est $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$
4. Soit l'évènement B : à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient vertes avec $P(B) = P_0 = \frac{1}{36}$ la probabilité de $P_C(B) = P(B \mid C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{1}{36}\frac{18}{7} = \frac{1}{14}$

Partie B

1. b. Soit A l'évènement obtenir la face verte au premier lancer et B l'évènement obtenir la face verte au second lancer $P_A(B) = \frac{2}{3}$ d'après l'arbre des probabilités.
2. La probabilité d'obtenir deux faces vertes est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
3. La probabilité d'obtenir une face verte au 2ème lancer est $P(B) = P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Exercice 2

1. a. $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{3}$ $u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{1}{4}$

b.
```
def liste(k):
  L=[]
  u=1
  for i in range(0, k+1):
    L.append(u)
    u=u/(1+u)
  return L
```

2. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Initialisation:
   pour le rang n=0. $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$ soit $u_0 > u_1$ donc la propriété est vraie au rang n=0.
   Hérédité:
   On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_{k+1} < u_k$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n = k + 1$. On pose la fonction f qui à x renvoie $\frac{x}{1+x}$ définie et dérivable sur $[0; +\infty[$

en dérivant f on obtient $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ or $(1+x)^2 > 0$ pour $x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc f est croissante sur ce même intervalle on peut donc composer par f. $f(u_{k+1}) < f(u_k)$ $u_{k+2} < u_{k+1}$
Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrons que la suite (u_n) converge:

La suite (u_n) est strictement décroissante d'après la question précédente. De plus la suite (u_n) est minorée par 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ d'après l'énoncé.

Or, toute suite strictement décroissante et minorée converge vers un réel l d'après le théorème 4.2 du cours sur la convergence des suites monotones.

4. $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ d'après la convergence de la suite. Donc $l = \frac{l}{1+l}$ $l - \frac{l}{1+l} = 0$
$\frac{l+l^2-l}{1+l} = 0$

$\frac{l^2}{1+l} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} l^2=0 \\ 1+l\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} l=0 \\ l\neq -1 \end{cases}$
Or $l > 0$ d'après l'énoncé donc $l = 0$ soit la $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

5. a. On conjecture à partir des premiers termes de la suite que $u_n = \frac{1}{n+1}$.

b. Soit la proposition $P_n : u_n = \frac{1}{n+1}$
Montrons que P_n est vraie pour tout entier naturel n par récurrence:
Initialisation:
pour $n = 0$ on a $\frac{1}{n+1} = 11 = 1$ et $u_n = u_0 = 1$ donc la propriété P_0 est vraie.
Hérédité:
On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k = \frac{1}{k+1}$ Montrons que $P_k + 1$ est vraie:
$u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k+1}$

$u_{k+1} = \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{k+2}$

$u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$
Donc la propriété P_n est héréditaire
Conclusion:
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{n+1}$
La conjecture est bien démontrée