Maths Expertes Ex 14 11 2023

11 Novembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Démonstration 1

1. L'équation az+b=0 à une seule solution $-\frac{b}{a}$ avec $a \neq 0$ ou aucune solution si $a = 0$ donc L'équation a bien au plus une solution. Or l'équation est de degré 1 donc l'équation a au plus n solutions.
2. Si P n'a pas de solution l'équatio $P(z) = 0$ n'a pas de solution donc elle a bien moins de $(n + 1)$ solutions.
3. On sait que $P(z)$ est un polynôme de degré $n + 1$ et peut être écris sous la forme $(z - a)Q(z)$, le polynôme $(z - a)$ est de degré 1 car z est à la première puissance Or deux polynôme multiplié on pour degré leur puissance respective additionnée soit pour trouver $P(z)$ avec un degré $n + 1$ le polynôme $Q(z)$ a un degré n.
4. $P(z) = 0 \Rightarrow (z - a)Q(z) = 0$ donc $z = a$ ou $Q(z) = 0$ or d'après l'hypothèse de récurrence un polynôme de degré n a au plus n solutions donc $P(z) = 0$ a au plus $(n + 1)$ solutions
5. Car les racines d'un polynôme P sont les solutions de $P(z) = 0$

Démonstration 2

1. Lorsque $q \neq 1$ on a $1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ donc par produit en croix des fractions on obtient $q^n - 1 = (q - 1)\left(1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$ et pour $q = 1$ on a $q^n - 1 = 0$ et $q - 1 = 0$. Quand $a = 0$ on a $z^n = z^{n-1}z$ donc la propriété est vraie. Quand $a \neq 0$ $\frac{z^n}{a^n} - 1 = \left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(1 + \frac{z}{a} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$ $z^n - a^n = (z - a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-2}\right)$
2. Soit P un polynôme de degré n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = 0$$

$$P(z) - P(a) = a_n(z^n - a^n) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - a^{n-1}\right) + \ldots + a_1(z - a)$$

$$P(z) - P(a) = a_n(z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k\right) + a_{n-1}(z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k\right) + \ldots + a_1(z - a)$$

$$P(z) = P(z) - P(a) = (z - a)\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k + \ldots + a_1\right)$$

Donc il existe bien un polynôme Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec $Q(z) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k + \ldots + a_1$

Exercice 38

$$R(z) = 8z^3 - 1$$

$$R(z) = \left(\sqrt[3]{8}z\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{8}z - 1\right)\left(\left(\sqrt[3]{8}z\right)^2 + \sqrt[3]{8}z + 1\right)$$

$$R(z) = (2z)^3 - 1^3 = (2z - 1)\left(4z^2 + 2z + 1\right)$$

$R(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2z-1=0 \\ 4z^2+2z+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_0=\frac{1}{2} \\ \Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2<0 \text{ Donc il existe deux solutions complexes conjuguées } z_1=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i \quad z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i \end{cases}$

$S_{\mathbb{C}} = \{\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\}i$

Exercice 39

1. Il existe un racine réelle évidente de R $R(1) = (1)^3 - 1 = 0$ donc 1 est racine de R
2. Donc $R(z)$ peut s'écrire sous la forme $R(z) = (z-1)\left(z^2+z+1\right)$ et les racines de $\left(z^2+z+1\right)$ sont $\Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2 < 0$ donc il y a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc z^2+z+1 peut s'écrire sous la forme $\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ donc on $R(z) = (z-1)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Exercice 48

1. Il existe une racine entière évidente de P $P(3) = 3^3 - 9(3)^2 + 31(3) - 39 = 27 - 81 + 93 - 39 = 0$
2. On peut donc écrire P sous la forme $P(z) = (z-3)\left(az^2+bz+c\right) = az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$ avec $a = 1, b = -6, c = 13$ soit $P(z) = (z-3)\left(z^2-6z+13\right)$ Les racines de $z^2-6z+13$ peut s'obtenir en calculant le discriminant $\Delta = -16 = (4i)^2 < 0$ donc il existe deux solutions complexes conjuguées $z_1 = 3+2i \quad z_2 = 3-2i$. On remarque que toutes les racines de $P(z)$ on $Re(a) = 3$ donc les points correspondant aux affixes des racines sont alignés sur la droite vertical passant par le point d'affixe 3 sur le plan complexe et d'équation cartésienne $x = 3$.