Analyse 1 Cours 1

11/10/2024

2024-09-11

Lucas Duchet-Annez
EPFL
2024/2025
Génie Mécanique

1 Fonctions

$f : A \to B$
$x \to y = f(x)$

y est l'image de x et x est une préimage de y

1.1 Ensemble image

1.1.1 Définition

$$Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \mid f(x) = y\}$$

1.1.2 Surjection

$f : A \to B$ est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = B \leftrightarrow \forall y \in B \; \exists x \in A \mid f(x) = y$

1.1.2.1 Example

- $$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
  $$x \to y = f(x) = x + 1$$
  est surjective. Soit $y \in \mathbb{Z}$ et $x = y - 1 \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est stable par addition. On a $f(x) = x + 1 = y$. Ainsi $Im(f) = \mathbb{Z}$.
- Soit $A = \text{ensemble des élèves}$, B = $\mathbb{N}$
  $$f : A \to B$$
  $$x \to f(x) = \text{nombre de frères de soeurs de x}$$
  n'est pas surjective car $y = 676$ n'a pas de préimage.
  $$Im(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$$

1.1.2.2 Remarque

Si $\tilde{B} = Im(f)$,

$$\tilde{f} : A \to \tilde{B}$$
$$x \to \tilde{f}(x) = f(x)$$

1.1.3 Injection

$f : A \to B$ est injective $\Longleftrightarrow \forall (x, x') \mid x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x') \Longleftrightarrow \forall (x, x') \in A^2 \mid f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$

1.1.3.1 Example

- $\tilde{f}$ n'est pas injective, car $f(\text{Marianne}) = f(\text{Pierre}) = 2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; x \to f(x) = x^2$ n'est pas surjective car $y = -4 \in \mathbb{R}$ n'a pas de préimage et n'est pas injective car $x = -2 \neq x' = 2 \; f(x) = f(x')$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \; x \to f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Quand

$$f(x) = f(x')$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x'^2}{x'^2+1}$$

$$x^2 - x'^2 = 0$$

$$(x - x')(x + x') = 0$$

$$x = x' \quad \text{ou } x = x' = 0$$

$$x = x'$$

Donc f est injective

1.1.4 Bijection

$f : A \to B$ est bijective $\iff$ f est surjective et injective

- $\forall y \in B\ \exists x_* \in A \mid f(x_*) = y$
- Il existe au plus une préimage pour y

$\iff \exists! x_* \in A \mid f(x_*) = y$

1.1.4.1 Fonction Réciproque

Ainsi il existe une fonction, appelé réciproque de f $f^{-1} : B \to A\ y \to f^{-1}(y) = x_*$

- $f^{-1}(f(x)) = x$
- $f(f^{-1}(y)) = y$

1.1.4.2 Fonctions réelles

$A, B \subseteq \mathbb{R}$

1.1.5 Graphiquement

$f : A \to B$ est surjective si $\forall y \in B$, la droite horizontale à hauteur y coupe le graphe de f en au moins un point.

$f : A \to B$ est injective si $\forall y \in B$, la droite horizontale à hauteur y coupe le graphe de f en au plus un point.

1.1.6 Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \to f(x) = \frac{x-5}{3}$

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \iff \frac{x-5}{3} = \frac{x'-5}{3} \iff x = x'$$

Ainsi f est injective

$$\forall y \in \mathbb{R}\ f(x) = y \iff \frac{x-5}{3} = y \iff x = (3y+5) \in \mathbb{R}$$

Ainsi f est surjective. $\implies f$ bijective et sa réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y \to f^{-1}(y) = 3y + 5$

2 Preuve par récurrence

$\forall n \geq 0 \mathcal{P}(n)$

1. Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie
2. Montrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi

$$\implies \mathcal{P}(n) \text{ est vraie } \forall n \geq 0$$

2.1 Example

Montrons que $\forall n \geq 1 \ \sum_{k=1}^{n(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n(n)}$$

$$b_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$ $a_1 = b_1 \implies \mathcal{P}(1) \text{ est vraie}$
2. Supposons que $\mathcal{P}(n) \text{ est vraie } a_n = b_n$

$a_{n+1} = a_n + n + 1 = b_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = (n+1)\frac{n+2}{2} = b_{n+1}$

$$\implies \mathcal{P}(n) \text{ vraie } \forall n \geq 1$$