Maths Devoir Maison 3

28 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

1. Il y a 6 faces sur un cube et il y a 2 faces noires sur le dé A donc la probabilité d'obtenir une fois une face noire et $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Comme les deux lancers sont indépendants la probabilité d'avoir une face noire au second lancer et aussi de $\frac{1}{3}$ donc la probabilité d'avoir deux faces noires successivement est $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
2. La probabilité de l'évènement C est égale à la somme des probabilités d'avoir deux faces d'une certaine même couleur, Soit : $P(C) = \sum_{n=0}^{2} P_n$ avec $n \in \{0, 1, 2\}$ et 0 correspondant à la couleur verte, 1 à la couleur noire, et 2 à la couleur rouge On sait que $P_1 = \frac{1}{9}$ d'après la question précédente de manière analogue on détermine que $P_0 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et que $P_2 = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ donc $P(C) = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$
3. La probabilité qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes est $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$
4. Soit l'évènement B : à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient vertes avec $P(B) = P_0 = \frac{1}{36}$ la probabilité de $P_C(B) = P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{36}\frac{18}{7} = \frac{1}{14}$

Partie B

1. a.

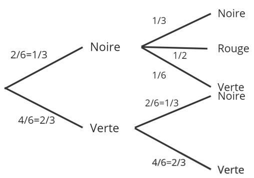

Figure 1: Arbre des probabilités

b. Soit A l'évènement obtenir la face verte au premier lancer et B l'évènement obtenir la face verte au second lancer $P_A(B) = \frac{2}{3}$ d'après l'arbre des probabilités.

2. La probabilité d'obtenir deux faces vertes est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
3. La probabilité d'obtenir une face verte au 2ème lancer est $P(B) = P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Exercice 2

1. a. $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{3}$ $u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{1}{4}$

b.

```
def liste(k):
  L=[]
  u=1
  for i in range(0, k+1):
    L.append(u)
```

```
    u=u/(1+u)
  return L
```

2. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Initialisation:
   pour le rang n=0. $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$ soit $u_0 > u_1$ donc la propriété est vraie au rang n=0.
   Hérédité:
   On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_{k+1} < u_k$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n = k + 1$. On pose la fonction f qui à x renvoie $\frac{x}{1+x}$ définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ en dérivant f on obtient $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ or $(1 + x)^2 > 0$ pour $x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc f est croissante sur ce même intervalle on peut donc composer par f. $f(u_{k+1}) < f(u_k)$ $u_{k+2} < u_{k+1}$
   Donc la propriété est héréditaire.
   Conclusion:
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrons que la suite (u_n) converge:

La suite (u_n) est strictement décroissante d'après la question précédente. De plus la suite (u_n) est minorée par 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ d'après l'énoncé.

Or, toute suite strictement décroissante et minorée converge vers un réel l d'après le théorème 4.2 du cours sur la convergence des suites monotones.

4. $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ d'après la convergence de la suite. Donc $l = \frac{l}{1+l}$ $l - \frac{l}{1+l} = 0$
   $\frac{l+l^2-l}{1+l} = 0$

   $\frac{l^2}{1+l} = 0$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} l^2=0 \\ 1+l\neq 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} l=0 \\ l\neq -1 \end{cases}$
   Or $l > 0$ d'après l'énoncé donc $l = 0$ soit la $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

5. a. On conjecture à partir des premiers termes de la suite que $u_n = \frac{1}{n+1}$.

b. Soit la proposition $P_n : u_n = \frac{1}{n+1}$
   Montrons que P_n est vraie pour tout entier naturel n par récurrence:
   Initialisation:
   pour $n = 0$ on a $\frac{1}{n+1} = 11 = 1$ et $u_n = u_0 = 1$ donc la propriété P_0 est vraie.
   Hérédité:
   On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k = \frac{1}{k+1}$
   Montrons que $P_k + 1$ est vraie:
   $u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k+1}$

   $u_{k+1} = \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{k+2}$

   $u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$
   Donc la propriété P_n est héréditaire
   Conclusion:
   $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{n+1}$
   La conjecture est bien démontrée

Exercice 3

1. (IJ) est sécante avec (AB) en le point d'intersection J et

(AB)//(EF) car [AB] et [EF] sont des faces opposées du cube donc (IJ) est sécante avec (EF) en un point d'intersection P Or $(EF) \subset (EFG)$ donc (IJ) coupe le plan (EFG) au point d'intersection P

2. $K \in (EFG)$ et $K \in (IJ) \subset (IJK)$, $P \in (EFG)$ et $P \in (IJ) \subset (IJK)$ donc l'intersection des plans (IJK) et (EFG) et la droite (PK)

3. La section (IJK) de (ABF) est la droite (IJ) et d'après le théorème des parallèles la section par un même plan de deux plan forment deux droites parallèles or $(ABF) \mathbin{/\mkern-5mu/} (DCG)$ donc (IJ) est parallèle à la droite (KR) avec R le point d'intersection entre (GC) et la parallèle de (IJ) au point K. La section (IJK) de (EFG) est la droite (PK) donc la section de la face $EFGH$ par le plan (IJK) est le segment $[SK]$ avec S le point d'intersection entre (PK) et (EH) d'après le théorème des parallèles la section par un même plan de deux plan forment deux droites parallèles or $(EFG) \mathbin{/\mkern-5mu/} (ABC)$ donc (SK) est parallèle à la droite (JQ) avec Q le point d'intersection entre (BC) et la parallèle de (SK) au point J. Finalement $S \in (IJK)$ et $S \in (HE) \subset (HEA)$ et $I \in (IJK)$ et $I \in (EA) \subset (HEA)$ donc $[SI]$ est la section de la face $HEAD$ par le plan (IJK). De plus $R \in (GC) \subset (BCG)$ et $R \in (IJK)$ et $Q \in (BC) \subset (BCG)$ et $Q \in (IJK)$ donc $[RQ]$ est la section de la face $FGCB$ par le plan (IJK). Par conséquent la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est l'hexagone $IJQRKS$

Exercice 4

Considérons la fonction f tel que $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2+x} = \frac{x}{x^2-x+1}$ définie et dérivable sur l'intervalle $[2; 2,1]$
Regardons la variation de la fonction f
La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$
pour $x \in [2; 2,1]$
$x > 1$
$x^2 > 1$
$-x^2 < -1$
$1 - x^2 < 0$
et $(x^2 - x + 1)^2 > 0$ donc $\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$
Soit $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[2; 2,1]$ donc f est décroissante sur $[2; 2,1]$.
Posons $a = 2,014014014014$ et $b = 2,014014014016$
$a < b$
$f(a) > f(b)$ Composont par la fonction f
donc $A > B$