

Maths Devoir Maison 1

17 Septembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1:

1.

$$f_1'(x) = 2x^2 + x - 6$$

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1'(x) = 0$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$$

Variation/Signe	Intervalle
positif	pour $x < -2$
zéro	à $x = -2$
négatif	pour $-2 < x < 3/2$
zéro	à $x = 3/2$
positif	pour $x > 3/2$
croissante	de $-\infty$ à -2
décroissante	de -2 à $3/2$
croissante	de $3/2$ à $+\infty$

2.

$$f_2'(x) = \frac{-11}{(4x-3)^2}$$

Valeurs interdites :

$$4p - 3 = 0$$

$$4p = 3$$

$$p = \frac{3}{4}$$

$$x \neq \frac{3}{4}$$

Ensemble de définition:

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Variation/Signe	Intervalle
négatif	de $-\infty$ à $3/4$
indéfini	à $3/4$
négatif	de $3/4$ à $+\infty$
décroissante	de $-\infty$ à $3/4$
indéfini	à $3/4$
décroissante	de $3/4$ à $+\infty$

3.

$$f_3'(x) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}}$$

Ensemble de définition :

$$f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Variation/Signe	Intervalle
positif	de $0 < x$ à $+\infty$
croissante	de $0 < x$ à $+\infty$

Exercice 2

1. elle prend deux arguments f et x soit une fonction et un nombre
2. Le résultat est < positif >
3. elle donne le signe d'un nombre après avoir appliqué une fonction f
4.
 - a. L'instruction lambda sert à définir une fonction anonyme (sans nom)
 - b. < positif >
- 5.

```
from math import *
def racine(f, x):
    if (2*f(x)-1)>=0:
        return sqrt(2*f(x)-1)
    else:
        return 'non défini'
```

```
def f(x):
    return 5-2*x
```

```
print(racine(f, -5))
print(racine(f, 10))
```

6. $x = -5 \rightarrow y = 5.385164807134504$
 $x = 10 \rightarrow 'non défini'$

Exercice 3

Soit à démontrer:

$$(P_n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Initialisation:

pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 k^2 &= 1 \\ \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$

On va montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} k^2 &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1 \\ &= \frac{2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 12p + 6}{6} \\ &= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \\ &= \frac{(p^2 + 3p + 2)(2p+3)}{6} \\ &= \frac{2^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6} \end{aligned}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $p+1$

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4

On commence par calculer l'aire d'un cercle en posant x comme le périmètre du cercle:

$$A = \pi r^2 \text{ et } P = 2\pi r$$

$$\text{soit } r = \frac{P}{2\pi}$$

$$\text{donc } A_c(x) = \frac{\pi x^2}{4\pi^2}$$

On calcule l'aire du triangle équilatéral avec $(1 - x)$ comme le périmètre du triangle

$$A_t e = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \text{ avec } a = \frac{(1-x)}{3} \text{ donc comme un côté du triangle}$$

$$\Rightarrow A_t e(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1-x}{3} \right)^2$$

On obtient l'aire totale

$$A_t(x) = \frac{\pi x^2}{4\pi^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1-x}{3} \right)^2$$

$$A_t(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{18} \sqrt{3} (1 - 2x + x^2)$$

Pour minimiser A_t on calcule sa dérivée

$$A_t'(x) = \frac{8x\pi}{(4\pi)^2} + \frac{1}{18} \sqrt{3} (2x - 2)$$

$$A_t'(x) = \frac{8\pi}{(4\pi)^2} x + \frac{\sqrt{3}}{9} x - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

On calcule maintenant la racine de A_t'

$$A_t'(x) = 0$$

$$\frac{8\pi}{(4\pi)^2} x + \frac{\sqrt{3}}{9} x - \frac{\sqrt{3}}{9} = 0$$

$$x \left(\frac{8\pi}{(4\pi)^2} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) - \frac{\sqrt{3}}{9} = 0$$

$$x \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$x \left(\frac{2\sqrt{3}\pi + 9}{18\pi} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{9} * \frac{18\pi}{2\sqrt{3}\pi + 9}$$

$$x = \frac{18\sqrt{3}\pi}{18\sqrt{3}\pi + 81}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{3}\pi + 9}$$

$$x \approx 0.55 \text{ m}$$

Donc la longueur du morceaux formant le cercle est d'environ 0.55m
et celle formant le triangle équilatéral :

$$(1 - x) = \frac{2\sqrt{3}\pi+9-2\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{3}\pi+9}$$

$$(1 - x) = \frac{9}{2\sqrt{3}\pi+9}$$

$$(1 - x) \approx 0.45$$

La longueur du deuxième morceaux est d'environ 0.45m

Maths DM