Maths Devoir Maison 1

30 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1:

1.

$f_1{}'(x) = 2x^2 + x - 6$
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_1{}'(x) = 0$
$2x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 1 - 4{*}2{*}(-6)$
$\Delta = 49$
$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$

Variation/Signe	Intervalle
positif	pour x < -2
zéro	à x = -2
négatif	pour -2<x<3/2
zéro	à x = 3/2
positif	pour x>3/2
croissante	de -inf à -2
décroissante	de -2 à 3/2
croissante	de 3/2 à +inf

2.

$f_2{}'(x) = \frac{-11}{(4x-3)^2}$

Valeurs interdites :
$4p - 3 = 0$
$4p = 3$
$p = \frac{4}{3}$

$x \neq \frac{4}{3}$

Ensemble de définition:
$f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

Variation/Signe	Intervalle

négatif	de -inf à 3/4
indéfini	à 3/4
négatif	de 3/4 à +inf
décroissante	de -inf à 3/4
indéfini	à 3/4
décroissante	de 3/4 à +inf

3.
$f_3{}'(x) = e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}}$
Ensemble de définition :
$f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

Variation/Signe	Intervalle
positif	de 0<x à +inf
croissante	de 0<x à +inf

Exercice 2

1. elle prend deux arguments f et x soit une fonction et un nombre
2. Le résultat est ‹ positif ›
3. elle donne le signe d'un nombre après avoir appliqué une fonction f
4.

a. L'instruction lambda sert à définir une fonction anonyme (sans nom)
b. ‹ positif ›

5.

```
from math import *
def racine(f, x):
  if (2*f(x)-1)>=0:
    return sqrt(2*f(x)-1)
  else:
    return 'non défini'

def f(x):
  return 5-2*x

print(racine(f, -5))
print(racine(f, 10))
```

6. $x = -5 \rightarrow y = 5.385164807134504$
   $x = 10 \rightarrow 'non\ défini'$

Exercice 3

Soit à démontrer:
$(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation:
pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{x} k^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:
On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$
On va montrer que :
$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1$$

$$= \frac{2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 12p + 6}{6}$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{\left(p^2 + 3p + 2\right)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{2^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang p+1

Conclusion:
D'après le principe de récurrence pour àut entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4

On commence par calculer l'aire d'un cercle en posant x comme le périmètre du cercle:

$A = \pi r^2$ et $P = 2\pi r$
soit $r = \frac{P}{2\pi}$
donc $A_c(x) = \frac{x^2}{4\pi}$
On calcule l'aire du triangle équilatéral avec $(1 - x)$ comme le périmètre du triangle

$A_t e = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ avec $a = \frac{(1-x)}{3}$ donc comme un côté du triangle

$\Rightarrow A_t e(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} (1 - x)^2$

On obtient l'aire totale

$$A_t(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{36}(1-x)^2$$

$$A_t(x) = \frac{1}{18}\left(9x^2 + (1-x)^2 + \sqrt{3}\pi\right)$$

Pour miniser A_t on calcule sa dérivée

$$A_t{}'(x) = \frac{18x+\sqrt{3}\pi(2x-2)}{36\pi}$$

On calcule maitenant la racine de $A_t{}'$

$$A_t{}'(x) = 0$$

$$\frac{18x+\sqrt{3}\pi(2x-2)}{36\pi} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}x + \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{\sqrt{3}}{18} = 0$$

$$\frac{9x+\sqrt{3}\pi x}{18\pi} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$x\left(9 + \sqrt{3}\pi\right) = \sqrt{3}\pi$$

$$x = \frac{\sqrt{3}\pi}{9+\sqrt{3}\pi}$$

$x \approx 0.38m$
Donc la longeur du morceaux formant le cercle est d'environ 0.38m
et celle formant le triangle équilatéral :

$$(1-x) = \frac{9}{\sqrt{3}\pi+9}$$

$$(1-x) \approx 0.62$$

La longeur du deuxième morceaux est d'environ 0.62m

Maths DM