

# Correction Olympiades Partie 1

24 Octobre, 2023

**Lucas Duchet-Annez**

## 1. Quelques exemples

- a. On peut construire une autre liste de longueur 8 et de score 3 en changeant l'ordre de certains éléments tout en gardant 3 inversions. Par exemple :

$[4, 2, 6, 7, 1, 5, 3, 8]$

Ici on a inversé 2 et 5 par rapport à la liste initiale, ainsi que 6 et 7, tout en gardant le même nombre d'inversions (3).

- b. Avec  $n=3$ , il y a  $3! = 6$  listes possibles. Les voici avec leur score :

- $[1, 2, 3]$  : score 0 (liste triée dans l'ordre croissant)
- $[1, 3, 2]$  : score 1 (une inversion 3-2)
- $[2, 1, 3]$  : score 1 (une inversion 2-1)
- $[2, 3, 1]$  : score 1 (une inversion 3-1)
- $[3, 1, 2]$  : score 1 (une inversion 3-2)
- $[3, 2, 1]$  : score 2 (deux inversions 3-2 et 3-1)

## 2. Fonction Python

```
def score(L, n):  
    compteur = 0  
    for i in range(n-1):  
        if L[i] < L[i+1]:  
            compteur += 1  
    return compteur
```

## 3. Démonstration des bornes du score

- Score minimum = 0. C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre croissant, il n'y a alors aucune inversion.
- Score maximum =  $n-1$ . C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre décroissant. Il y a alors une inversion entre chaque paire d'éléments successifs, soit  $n-1$  inversions.
- Exemple de liste avec score 0 :  $[1, 2, 3, \dots, n]$
- Exemple de liste avec score  $n-1$  :  $[n, n-1, n-2, \dots, 1]$

## 4. Existence d'une liste de score k

- a. On peut construire une telle liste comme suit : on prend les  $k$  plus grands éléments dans l'ordre décroissant, puis on ajoute les  $n-k$  plus petits éléments dans l'ordre croissant. Cette liste aura alors exactement  $k$  inversions.

Par exemple avec  $n = 8$  et  $k = 3$  :

$[7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8]$

- b. Oui il existe plusieurs listes avec le même score  $k$ . Par exemple avec  $n = 5$  et  $k = 2$  :

$[4, 5, 1, 2, 3]$

$[5, 4, 1, 2, 3]$

Ces deux listes ont toutes les deux exactement 2 inversions (entre 4 et 1, et entre 5 et 1).

## 5. Formules pour $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$

$L_n(0) = 1$  car il n'y a qu'une seule liste possible avec 0 inversion : la liste triée par ordre croissant.

$L_n(n-1) = 1$  car il n'y a qu'une seule liste possible avec  $n-1$  inversions : la liste triée par ordre décroissant.

## 6. Relation de récurrence

a. Avec  $n = 3$  :

$L_3(0) = 1$  (liste  $[1,2,3]$ )

$L_3(1) = 3$  (listes  $[2,1,3]$ ,  $[1,3,2]$  et  $[3,1,2]$ )

$L_3(2) = 1$  (liste  $[3,2,1]$ )

Pour insérer 4 et garder un score de 1, on peut insérer 4 entre 1 et 2 :  $[3,1,4,2]$

b. Pour insérer 4 et garder un score nul, on insère 4 avant 3 :  $[4,3,2,1]$

c. Avec  $n = 4$ , vérification de la formule  $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$

d. Démonstration de la relation de récurrence générale :

- Pour compter les listes de longueur  $n+1$  et de score  $k$ , on regarde la position d'insertion de  $n+1$  :
  - Si on insère  $n+1$  à la fin, cela crée  $k$  nouvelles inversions et on avait une liste de longueur  $n$  et score  $k$ . Il y a  $L_n(k)$  listes possibles.
  - Si on insère  $n+1$  en  $i$ ème position, cela crée  $k-i$  nouvelles inversions. On avait une liste de longueur  $n$  et score  $k-i$ . Il y a  $L_n(k-i)$  listes possibles pour chaque position d'insertion  $i$ .
- Il y a donc au total :
  - $(n+1-k) \cdot L_n(k)$  listes avec insertion à la fin
  - $(k+1) \cdot L_n(k-1)$  listes avec insertion en position intermédiaire

D'où la relation  $L_{n+1}(k) = (n+1-k)L_n(k) + (k+1)L_n(k-1)$

e. Formule générale par récurrence :  $L_{n+1}(k) = (n+1-k) \cdot L_n(k) + (k+1) \cdot L_n(k-1)$

f. Tableau des valeurs de  $L_n(k)$  :

$k \setminus n$	3	4	5
0	1	1	1
1	3	6	10
2	1	15	35
3	-	20	56
4	-	-	70

## Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

### Partie 1

1.  $b = -(r_1 + r_2)$

$c = r_1 \cdot r_2$

2. Comme  $b \leq 0$  et  $c \geq 0$ , les racines  $r_1$  et  $r_2$  sont de signes opposés. Voici une proposition pour continuer le développement des réponses :

## Partie 2

1. a. Soit  $(x_1, x_2, x_3)$  une solution de (E). Alors :  $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \alpha|x_1||x_2||x_3|$  par parité des fonctions carré et valeur absolue. Donc  $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$  est aussi solution de (E).
- b. S'il existe une solution  $(x_1, x_2, x_3)$  dans  $\mathbb{Z}^3$  avec un  $x_i$  non nul, alors  $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$  est une solution dans  $\mathbb{N}^3$ .
2. Si  $(x_1, x_2, x_3)$  est solution de (E), alors en permutant  $x_1$  et  $x_2$ , on obtient que  $(x_2, x_1, x_3)$  est aussi solution de (E).
3. D'après les questions précédentes, s'il existe une solution dans  $\mathbb{Z}^3$  différente de  $(0,0,0)$ , alors il existe aussi une solution  $(x_1, x_2, x_3)$  dans  $\mathbb{N}^3$  avec  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

## Partie 3

1. Supposons  $x_1 = 0$ . Alors d'après (E), on a  $x_2^2 + x_3^2 = 0$ , donc  $x_2 = x_3 = 0$ . Ce qui contredit le fait que  $(x_1, x_2, x_3)$  est différent de  $(0,0,0)$ . Donc nécessairement  $x_1 > 0$ .
2. a. Montrons que  $y$  racine de  $Q \iff (x_1, x_2, y)$  solution de (E) :
  - Si  $y$  racine de  $Q$ , alors  $Q(y) = 0$ , donc  $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ , donc  $(x_1, x_2, y)$  solution de (E).
  - Réciproquement, si  $(x_1, x_2, y)$  solution de (E), alors  $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ , donc  $Q(y) = 0$ , donc  $y$  racine de  $Q$ .
- b.  $x_3$  est racine de  $Q$  car  $(x_1, x_2, x_3)$  solution de (E).
- c.  $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2) < 0$  car  $x_1 > 0$  et  $x_2 > x_1$  d'après l'énoncé.
- d.  $Q(0) = x_1^2 + x_2^2 > 0$
- e.  $Q$  a deux racines  $0 < x_2 < x_3$ . De plus,  $Q(x_2) < 0$  et  $Q(0) > 0$  donc il existe une racine  $y > x_3$  par le théorème des valeurs intermédiaires.
- f. Comme  $y$  est racine de  $Q$ , d'après a.,  $(x_1, x_2, y)$  est solution de (E) dans  $\mathbb{N}^3$ .
3. On peut réappliquer le raisonnement précédent en remplaçant  $x_3$  par  $y$ , et trouver un nouveau triplet solution encore plus grand, et ainsi de suite. Cela conduit à une impossibilité car il n'y a pas de suite strictement croissante infinie d'entiers naturels.
4. On aboutit à une contradiction. Donc le seul triplet solution de (E) dans  $\mathbb{Z}^3$  est  $(0,0,0)$ .
5. Généralisation au cas de  $n$  variables :

On procède par récurrence sur  $n$ . L'initialisation pour  $n=2$  est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $n-1$ , avec  $n \geq 3$ . Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  solution de l'équation avec un  $x_i \neq 0$ .

En appliquant un raisonnement similaire aux questions précédentes, on peut se ramener à un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$  avec  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ .

On définit alors  $Q(y) = y^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} y + (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$ . On montre comme précédemment que  $Q$  admet deux racines distinctes  $x_n$  et  $y$  avec  $y > x_n$ .

Donc  $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$  est un  $(n-1)$ -uplet solution de l'équation analogue en dimension  $n-1$ . Ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

D'où finalement le seul  $n$ -uplet solution est  $(0, \dots, 0)$ .