1. $S_0 = 1$

$S_1 = 1 + j = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_2 = 1 + j + j^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$= 0$

$S_3 = 1 + j + j^2 + j^3$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

2. $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$S_5 = 0$

$S_6 = 1$

$S_7 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$S_8 = 0$

$S_9 = 1$

$S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3a J'émet la conjecture $S_{3p+2} = 0$ avec $p \in \mathbb{N}^+$

b Soit à démontrer :

(P_p) : $j^{3p} = 1$

Initialielisation :

pour $p = 1$, On a $j^{3p} = j^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$

donc la propriété est vraie au rang $p = 1$

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie au rang $p = k$ avec $k \in \mathbb{N}^+$

tel que : (P_k) : $j^{3k} = 1$

au rang $k+1$ $j^{3(k+1)} = j^{3k+3}$

$= j^{3k} \times j^3$

$= j^3$

$= 1$

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion :

$\forall p \in \mathbb{N}^+$, $j^{3p} = 1$

c. Soit à démontrer :

(P_p) : $S_{3p+2} = 0$

Initialisation :

pour $p = 1$ On a $S_{3+2} = S_5 = 0$

Donc (P_1) est vraie

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $p = k$ avec $k \in \mathbb{N}^+$

tel que (P_k) : $S_{3k+2} = 0$

au rang $k+1$: $S_{3(k+1)+2} = S_{3k+5} = S_{3k+2} + j^{3k+3} + j^{3k+4} + j^{3k+5}$

$= j^{3k+3} + j^{3k+4} + j^{3k+5}$

$= \underbrace{j^{3(k+1)}}_{1} + j^{3(k+1)} \times j + j^{3(k+1)} \times j^2$

$= 1 + j + j^2$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$= 1 - \frac{2}{2} = 0$

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion ;

$\forall p \in \mathbb{N}^+$, $S_{3p+2} = 0$

or la propriété est aussi vraie au rang $p = 0$

car $S_{2+3(0)} = S_2 = 0$ donc la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$

4 les termes de la suite (S_n) sont périodiques de période 3

en valent $S_{3p+2} = 0$ $S_{3p+1} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ $S_{3p} = 1$