

Olympiades Groupes Partie 2

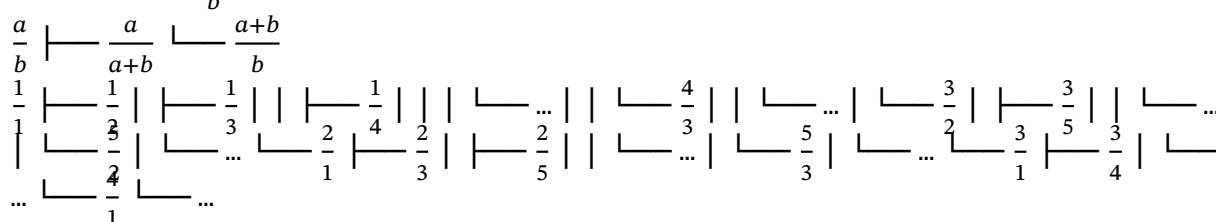
17 Septembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercices académique n°2

Généalogie des fractions.

Dans cet exercice, on considère des fractions écrites sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls. On construit un arbre généalogique de fractions en partant de la fraction $\frac{1}{1}$. Chaque fraction $\frac{a}{b}$ donne naissance à deux fractions : - la fille benjamine: $\frac{a}{a+b}$, qu'on écrit à gauche ; - la fille aînée: $\frac{a+b}{b}$, qu'on écrit à droite.



On peut ainsi numéroter toutes les fractions irréductibles strictement positives en considérant les lignes successives de l'arbre généalogique parcourues de haut en bas et de gauche à droite.

On peut représenter les choses comme sur l'arbre ci-dessous.

```

F_1 ┤── F_2 ┤ ┤── F_4 ┤ ┤──
F_8 ┤ ┤── F_9 ┤ ┤── F_5 ┤ ┤── F_10 ┤ ┤── F_11 ┤── F_3 ┤── F_6 ┤ ┤── F_12 ┤ ┤── F_13
├── F_7 ┤── F_14 ┤── F_15

```

On admet que dans cette situation, chaque fraction F_n a pour fille benjamine F_{2n} et pour fille aînée F_{2n+1} où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer le produit de deux fractions soeurs.
En déduire la valeur du produit de toutes les fractions d'une même génération.
2. Combien vaut F_{2023} ?
3. Déterminer l'entier n tel que $F_n = \frac{31}{43}$
4. Ecris un programme qui calcule F_n pour un entier n donné.
5. Ecris un programme qui calcule n pour une fraction donnée.