## Olympiades Groupes Partie 2

4 Octobre, 2023

## Lucas Duchet-Annez

## Exercices académique n°2

## Généalogie des fractions.

Dans cet exercice, on considère des fractions écrites sous la forme  $\frac{a}{b}$  où a et b sont des entiers naturels non nuls. On construit un arbre généalogique de fractions en partant de la fraction 1. Chaque fraction  $\frac{a}{b}$ , qu'on écrit à droite.

$$\frac{a}{b} \vdash \frac{a}{a+b} \vdash \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{1}{1} \vdash \frac{1}{3} \mid \vdash \frac{1}{3} \mid \vdash \frac{1}{4} \mid \downarrow \vdash \dots \mid \vdash \frac{4}{3} \mid \vdash \frac{5}{3} \mid \vdash \dots \mid \frac{3}{1} \mid \frac{3}{5} \mid \downarrow \vdash \dots \dots \mid \vdash \frac{3}{4} \mid \vdash \dots \dots \mid \vdash \dots \mid \vdash \frac{3}{4} \mid \vdash \dots \dots \mid \vdash \dots$$

En poursuivant le processus, on obtient un arbre généalogique infini.

Partie I: La famille proche.

- Quelles sont les deux filles de la fraction <sup>22</sup>/<sub>7</sub>?
   Quelle est la mère de la fraction <sup>17</sup>/<sub>31</sub>? Et sa grand-mère?
   Quelle est la mère de la fraction <sup>-1</sup>/<sub>j</sub> si i < j? Et si i > j?
   Quelle est la petite sœur de la fraction <sup>355</sup>/<sub>j</sub>?
   Démontrer que les fractions <sup>13</sup>/<sub>31</sub> et <sup>23</sup>/<sub>5</sub> sont cousines.
   Que peut-on dire de la succession des filles aînées de <sup>1</sup>/<sub>1</sub>?

Partie II: Des fractions irrédutibles.

On considère une fraction strictement positive irrédutible  $\frac{a}{1}$ .

Cela signifie que le seul diviseur commun des entiers naturels non nuls a et b est égal à 1.

- 1. Soit d un diviseur commun de a et a + b. Montrer que d est forcément égal à 1. Que peut-on en déduire pour la fille benjamine de  $\frac{a}{r}$  ?
- 2. Expliquer pourquoi toutes les fractions qui apparaissent dans l'arbre généalogique sont irréductibles.

Partie III: À chacun sa place.

Dans la partie II, on a établi que l'arbre étudié comporte uniquement des fractions irrédutibles strictement positives. On admet que toutes les fractions irréductibles strictement positives sont dans cet arbre généalogique, sans aucune répétition.

1

On peut ainsi numéroter toutes les fractions irrédutibles strictement positives en considérant les lignes successives de l'arbre généalogique parcourues de haut en bas et de gauche à droite.

On peut représenter les chosees comme sur l'arbre ci-dessous. F\_1 
$$\longmapsto$$
 F\_2  $\mid$   $\longmapsto$  F\_4  $\mid$   $\mid$  F\_8  $\mid$   $\mid$  F\_9  $\mid$  F\_5  $\mid$  F\_10  $\mid$  F\_11  $\mid$  F\_3  $\mid$  F\_6  $\mid$  F\_12  $\mid$  F\_13  $\mid$  F\_7  $\mid$  F\_14  $\mid$  F\_15

On admet que dans cette situation, chaque fraction  $F_n$  a pour fille benjamine  $F_2n$  et pour fille aînée  $F_{2n+1}$  où n est un entier naturel non nul.

- 1. Calculer le produit de deux fractions soeurs. En déduire la valeur du produit de toutes les fractions d'une même génération.
- 2. Combien vaut  $F_{2023}$ ?
- 3. Déterminer l'entier n tel que F<sub>n</sub> = 31/43
  4. Ecris un programme qui calcule F<sub>n</sub> pour un entier n donné.
- 5. Ecris un programme qui calcule n pour une fraction donnée.