Maths Devoir Maison 3

28 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

1. Soit P_n la probabilité d'obtenir une face de couleur n au premier lancer avec $n \in \{0, 1, 2\}$ où 0 correspond à la couleur verte, 1 à la couleur noire et 2 à la couleur rouge. Les lancers étant indépendants, la probabilité d'obtenir deux faces de couleur n est P_n^2. On a alors : $P_0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ La probabilité d'obtenir deux faces noires est donc $P_1^2 = \frac{1}{9}$.
2. Notons C l'événement « les deux faces obtenues sont de la même couleur ». On a alors :

$$P(C) = P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

3. La probabilité qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes est la probabilité de l'événement contraire $\overline{C}$ qui s'obtient par :

$$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

4. Notons B l'événement « les deux faces obtenues sont vertes » inclus dans C. On sait que $P(B) = P_0^2 = \frac{1}{36}$. La probabilité conditionnelle s'écrit alors :

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{1/36}{7/18} = \frac{1}{14}$$

Partie B

1. a.

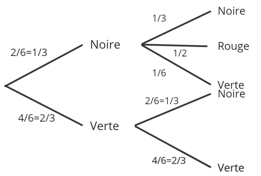

Figure 1: Arbre des probabilités

b. Notons A l'événement « obtenir une face verte au premier lancer » et B l'événement « obtenir une face verte au second lancer ». On lit sur l'arbre des probabilités : $P_A(B) = \frac{2}{3}$.

2. La probabilité d'obtenir deux faces vertes est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
3. La probabilité d'obtenir une face verte au 2ème lancer est $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P\left(\overline{A}\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Exercice 2

1. a. Calculons les premiers termes de la suite: $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{1}{4}$

b.

```
def liste(k):
  L=[]
```

```python
u=1
for i in range(0, k+1):
  L.append(u)
  u=u/(1+u)
return L
```

2. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Initialisation:
   Pour le rang n=0, on a $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$ soit $u_0 > u_1$ donc la propriété est vraie au rang n=0.
   Hérédité:
   On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_{k+1} < u_k$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n = k + 1$. On pose la fonction f qui à x renvoie $\frac{x}{1+x}$ définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ en dérivant f on obtient $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ or $(1 + x)^2 > 0$ pour $x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc f est croissante sur ce même intervalle on peut donc composer par f. $f(u_{k+1}) < f(u_k)$ $u_{k+2} < u_{k+1}$
   Donc la propriété est héréditaire.
   Conclusion:
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrons que la suite (u_n) converge:

La suite (u_n) est strictement décroissante d'après la question précédente. De plus la suite (u_n) est minorée par 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ d'après l'énoncé.

Or, toute suite strictement décroissante et minorée converge vers un réel l d'après le théorème 4.2 du cours sur la convergence des suites monotones.

4. $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ d'après la convergence de la suite. Donc $l = \frac{l}{1+l}$ $l - \frac{l}{1+l} = 0$
   $\frac{l+l^2-l}{1+l} = 0$

   $\frac{l^2}{1+l} = 0$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} l^2=0 \\ 1+l\neq 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} l=0 \\ l\neq -1 \end{cases}$
   Or $l > 0$ d'après l'énoncé donc $l = 0^+$ soit la $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$

5. a. On conjecture à partir des premiers termes de la suite que $u_n = \frac{1}{n+1}$.

b. Soit la proposition $P_n : u_n = \frac{1}{n+1}$
   Montrons que P_n est vraie pour tout entier naturel n par récurrence:
   Initialisation:
   pour $n = 0$ on a $\frac{1}{n+1} = 11 = 1$ et $u_n = u_0 = 1$ donc la propriété P_0 est vraie.
   Hérédité:
   On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k = \frac{1}{k+1}$
   Montrons que $P_k + 1$ est vraie:
   $u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k+1}$

   $u_{k+1} = \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{k+2}$

   $u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$
   Donc la propriété P_n est héréditaire

Conclusion:
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{1}{n+1}$
La conjecture est bien démontrée

Exercice 3

1. (IJ) est sécante avec (AB) en le point d'intersection J et

(AB)//(EF) car [AB] et [EF] sont des faces opposées du cube donc (IJ) est sécante avec (EF) en un point d'intersection P. Or, $(EF) \subset (EFG)$, donc (IJ) coupe le plan (EFG) au point d'intersection P

2. $K \in (EFG)$ et $K \in (IJ) \subset (IJK)$, $P \in (EFG)$ et $P \in (IJ) \subset (IJK)$ donc l'intersection des plans (IJK) et (EFG) est la droite (PK)

3. La section (IJK) de (ABF) est la droite (IJ) et d'après le théorème des parallèles la section par un même plan de deux plan forment deux droites parallèles or $(ABF) \,/\!/\, (DCG)$ donc (IJ) est parallèle à la droite (KR) avec R le point d'intersection entre (GC) et la parallèle de (IJ) au point K. La section (IJK) de (EFG) est la droite (PK) donc la section de la face $EFGH$ par le plan (IJK) est le segment $[SK]$ avec S le point d'intersection entre (PK) et (EH) d'après le théorème des parallèles la section par un même plan de deux plan forment deux droites parallèles or $(EFG) \,/\!/\, (ABC)$ donc (SK) est parallèle à la droite (JQ) avec Q le point d'intersection entre (BC) et la parallèle de (SK) au point J. De plus $S \in (IJK)$ et $S \in (HE) \subset (HEA)$ de même $I \in (IJK)$ et $I \in (EA) \subset (HEA)$ par conséquent $[SI]$ est la section de la face $HEAD$ par le plan (IJK). Finalement $R \in (GC) \subset (BCG)$ et $R \in (IJK)$ de même $Q \in (BC) \subset (BCG)$ et $Q \in (IJK)$ par conséquent $[RQ]$ est la section de la face $FGCB$ par le plan (IJK). Par conséquent la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est l'hexagone $IJQRKS$

Exercice 4

Considérons la fonction f tel que $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2+x} = \frac{x}{x^2-x+1}$ définie et dérivable sur l'intervalle $[2; 2,1]$
Étudions la variation de f:
La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$
Pour $x \in [2; 2,1]$, $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ On en déduit que $-x^2 < -1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$
Enfin $(x^2 - x + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2} < 0$
Soit $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[2; 2,1]$ autrement dit f est décroissante sur $[2; 2,1]$.
Soient $a = 2,014014014014$ et $b = 2,014014014016$
Puisque $a < b$, on a $f(a) > f(b)$ en composant par la fonction f
Or $f(a) = A$ et $f(b) = B$ donc $A > B$
En conclusion A est plus grand que B