Correction Olympiades Partie 1

7 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

1. Quelques exemples

a. On peut construire une autre liste de longueur 8 et de score 3 en changeant l'ordre de certains éléments tout en gardant 3 inversions. Par exemple :

[4,2,6,7,1,5,3,8]

Ici on a inversé 2 et 5 par rapport à la liste initiale, ainsi que 6 et 7, tout en gardant le même nombre d'inversions (3).

b. Avec n=3, il y a 3! = 6 listes possibles. Les voici avec leur score :

- [1,2,3] : score 0 (liste triée dans l'ordre croissant)
- [1,3,2] : score 1 (une inversion 3-2)
- [2,1,3] : score 1 (une inversion 2-1)
- [2,3,1] : score 1 (une inversion 3-1)
- [3,1,2] : score 1 (une inversion 3-2)
- [3,2,1] : score 2 (deux inversions 3-2 et 3-1)

2. Fonction Python

```python
def score(L, n):
  compteur = 0
  for i in range(n-1):
    if L[i] < L[i+1]:
      compteur += 1
  return compteur
```

3. Démonstration des bornes du score

- Score minimum = 0. C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre croissant, il n'y a alors aucune inversion.
- Score maximum = n-1. C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre décroissant. Il y a alors une inversion entre chaque paire d'éléments successifs, soit n-1 inversions.
- Exemple de liste avec score 0 : [1, 2, 3, ..., n]
- Exemple de liste avec score n-1 : [n, n-1, n-2, ..., 1]

4. Existence d'une liste de score k

a. On peut construire une telle liste comme suit : on prend les k plus grands éléments dans l'ordre décroissant, puis on ajoute les n-k plus petits éléments dans l'ordre croissant. Cette liste aura alors exactement k inversions.

Par exemple avec n = 8 et k = 3 :
[7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8]

b. Oui il existe plusieurs listes avec le même score k. Par exemple avec n = 5 et k = 2 :

[4, 5, 1, 2, 3]
[5, 4, 1, 2, 3]

Ces deux listes ont toutes les deux exactement 2 inversions (entre 4 et 1, et entre 5 et 1).

5. Formules pour $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$

$L_n(0) = 1$ car il n'y a qu'une seule liste possible avec 0 inversion : la liste triée par ordre croissant.

$L_n(n-1) = 1$ car il n'y a qu'une seule liste possible avec n-1 inversions : la liste triée par ordre décroissant.

6. Relation de récurrence

a. Avec n = 3 :
   $L_3(0) = 1$ (liste [1,2,3])
   $L_3(1) = 3$ (listes [2,1,3], [1,3,2] et [3,1,2])
   $L_3(2) = 1$ (liste [3,2,1])

Pour insérer 4 et garder un score de 1, on peut insérer 4 entre 1 et 2 : [3,1,4,2]

b. Pour insérer 4 et garder un score nul, on insère 4 avant 3 : [4,3,2,1]

c. Avec n = 4, vérification de la formule $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0) = 23 + 31 = 6$

d. Démonstration de la relation de récurrence générale :

- Pour compter les listes de longueur n+1 et de score k, on regarde la position d'insertion de n+1 :
  - Si on insère n+1 à la fin, cela crée k nouvelles inversions et on avait une liste de longueur n et score k. Il y a $L_n(k)$ listes possibles.
  - Si on insère n+1 en iième position, cela crée k-i nouvelles inversions. On avait une liste de longueur n et score k-i. Il y a $L_n(k-i)$ listes possibles pour chaque position d'insertion i.
- Il y a donc au total :
  - $(n+1-k)*L_n(k)$ listes avec insertion à la fin
  - $(k+1)*L_n(k-1)$ listes avec insertion en position intermédiaire

D'où la relation $L_{(n+1)}(k) = (n+1-k)L_n(k) + (k+1)L_n(k-1)$

e. Formule générale par récurrence : $L_{(n+1)}(k) = (n+1-k) * L_n(k) + (k+1) * L_n(k-1)$

f. Tableau des valeurs de $L_n(k)$:

k \ n	3	4	5
0	1	1	1
1	3	6	10
2	1	15	35
3	-	20	56
4	-	-	70

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Partie 1

1. b = -(r1 + r2)
   c = r1*r2

2. Comme b ≤ 0 et c ≥ 0, les racines r1 et r2 sont de signes opposés. Voici une proposition pour continuer le développement des réponses :

Partie 2

1. a. Soit (x_1, x_2, x_3) une solution de (E). Alors : $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \alpha|x_1||x_2||x_3|$ par parité des fonctions carré et valeur absolue. Donc $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de (E).

b. S'il existe une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{Z}^3$ avec un x_i non nul, alors $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est une solution dans $\mathbb{N}^3$.

2. Si (x_1, x_2, x_3) est solution de (E), alors en permutant x_1 et x_2, on obtient que (x_2, x_1, x_3) est aussi solution de (E).

3. D'après les questions précédentes, s'il existe une solution dans $\mathbb{Z}^3$ différente de $(0,0,0)$, alors il existe aussi une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{N}^3$ avec $x_1 \le x_2 \le x_3$.

Partie 3

1. Supposons $x_1 = 0$. Alors d'après (E), on a $x_2^2 + x_3^2 = 0$, donc $x_2 = x_3 = 0$. Ce qui contredit le fait que (x_1, x_2, x_3) est différent de $(0,0,0)$. Donc nécessairement $x_1 > 0$.

2. a. Montrons que y racine de $Q \Leftrightarrow (x_1, x_2, y)$ solution de (E) :

- Si y racine de Q, alors $Q(y) = 0$, donc $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$, donc (x_1, x_2, y) solution de (E).
- Réciproquement, si (x_1, x_2, y) solution de (E), alors $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$, donc $Q(y) = 0$, donc y racine de Q.

b. x_3 est racine de Q car (x_1, x_2, x_3) solution de (E).

c. $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2) < 0$ car $x_1 > 0$ et $x_2 > x_1$ d'après l'énoncé.

d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

e. Q a deux racines $0 < x_2 < x_3$. De plus, $Q(x_2) < 0$ et $Q(0) > 0$ donc il existe une racine $y > x_3$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

f. Comme y est racine de Q, d'après a., (x_1, x_2, y) est solution de (E) dans $\mathbb{N}^3$.

3. On peut réappliquer le raisonnement précédent en remplaçant x_3 par y, et trouver un nouveau triplet solution encore plus grand, et ainsi de suite. Cela conduit à une impossibilité car il n'y a pas de suite strictement croissante infinie d'entiers naturels.

4. On aboutit à une contradiction. Donc le seul triplet solution de (E) dans $\mathbb{Z}^3$ est $(0,0,0)$.

5. Généralisation au cas de n variables :

On procède par récurrence sur n. L'initialisation pour $n=2$ est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$, avec $n \ge 3$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ solution de l'équation avec un $x_i \ne 0$.

En appliquant un raisonnement similaire aux questions précédentes, on peut se ramener à un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ avec $x_1 \le \dots \le x_n$.

On définit alors $Q(y) = y^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} y + (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$. On montre comme précédemment que Q admet deux racines distinctes x_n et y avec $y > x_n$.

Donc $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ est un $(n-1)$-uplet solution de l'équation analogue en dimension $n-1$. Ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

D'où finalement le seul n-uplet solution est $(0, \dots, 0)$.