Exercice 74

1 Si M appartient à l'axe des réels privé du point d'abscisse 4

$z_M = x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\Rightarrow z_M' = \frac{z_M}{z_M - 4} = \frac{x}{x-4}$ donc le numérateur est un nombre réels et $x-4$ est un nombre réel défini quand $x \neq 4 \Rightarrow z_M'$ est un réel donc M' appartient à l'axe des réels

2. Si M a pour affixe 2-2i

$\Rightarrow z_M = 2-2i$ et $z_M' = \frac{2-2i}{2-2i-4} = \frac{(2-2i)(-2+2i)}{(-2i-2)(-2+2i)}$

$= \frac{8i}{4+4} = i \in i\mathbb{R}$ donc M' à l'axe des imaginaires purs

3. $z' = \frac{z}{z-4} = \frac{x+iy}{x+iy-4} = \frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)} = \frac{x^2-4x-\cancel{xiy}+\cancel{xiy}-4iy+y^2}{(x-4)^2+y^2}$

$= \frac{x^2-4x+y^2-4yi}{(x-4)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-4x}{(x-4)^2+y^2} + i\frac{-4y}{(x-4)^2+y^2}$

a. M' appartient à l'axe des réels si $Im(z_M') = 0$

soit $\frac{-4y}{(x-4)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = 0 \\ (x-4)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

donc $z_M' \in \mathbb{R}$ si $z_M \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

b. $z_M' \in i\mathbb{R}$ ssi $Re(z_M') = 0$

$$\frac{x^2+y^2-4x}{(x-4)^2+y^2}=0 \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-4x=0 \\ (x-4)^2+y^2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-2)^2-4+y^2=0 \\ x \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-2)^2+(y-0)^2=4 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ M appartient au cercle de centre $A(2;0)$ et rayon $\sqrt{4}$ soit 2 privé du point d'affixe 4

4. Voir la vidéo sur github