$$f'(z) = \frac{2-iz}{2-\bar{z}}$$

$$f'(x,y) = \frac{2-ix+y}{2-x-iy} = \frac{(2-ix+y)(2-x+iy)}{(2-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{4-2x+2iy-2ix+x^2i+\cancel{xy}+2y-\cancel{xy}+iy^2}{(2-x)^2+y^2} = \frac{4-2x+2y+i(2y-2x+x^2+y^2)}{(2-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{4-2x+2y}{(2-x)^2+y^2} + i\,\frac{2y-2x+x^2+y^2}{(2-x)^2+y^2}$$

$f'(z)$ est un imaginaire pur ssi $Re(f'(z))=0$

$$\begin{cases} 4-2x+2y=0 \\ (2-x)^2+y^2\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=-2 \Rightarrow y=x-2 \\ x\neq 2 \quad y\neq 0 \end{cases}$$

soit la droite $y=x-2$ privé du point $M(2;0)$

$f'(z)$ est un réel ssi $Im(f'(z))=0$

$$\begin{cases} 2y-2x+x^2+y^2=0 \\ (2-x)^2+y^2\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)^2-1+(y+1)^2-1=0 \\ x\neq 2 \quad y\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=2 \\ x\neq 2 \quad y\neq 0 \end{cases}$$

Cercle de centre $C(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Donc $f'(z)$ est un imaginaire pur pour tout les points appartenant à la droite $y=x-2$ privé de $(2;0)$ et un réel pour tout les points appartenant au cercle de centre $O(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ privé de $(-2;0)$