Maths Devoir Maison 5

8 Janvier, 2024

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Question 1
b.

Question 2
a.

Question 3
c.

Question 4
b.

Question 5
b.

Question 6
b.

Exercice 2

Partie A

1. a.

$$lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$lim_{x \to -\infty} 0.5\,x - 2 = -\infty$$

$$lim_{x \to -\infty} e^{0.5\,x-2} = lim_{X to -\infty} e^{X} = 0$$

$$lim_{x \to -\infty} 1 + x - e^{0.5\,x-2} = -\infty$$

b.

$$f(x) = 1 + x + e^{0.5\,x-2} = 1 + 0.5\,x\left(2 - 2e^{0.5\,x-2}\right) = 1 + 0.5\,x\left(2 - \frac{e^{0.5\,x}}{0.5\,x} \times e^{-2}\right)$$

2. a.

$$f(x) = 1 + x - e^X$$

$$f'(x) = 1 - X'(x)e^X$$

$$X(x) = 0.5\,x - 2$$

$$X'(x) = 0.5$$

$$f'(x) = 1 - 0.5\left(e^{0.5\,x-2}\right)$$

b.

$$1 - 0.5\left(e^{0.5\,x-2}\right) < 0$$

$$-\,0.5\left(e^{0.5\,x-2}\right) < -1$$

$$e^{0.5\,x-2} > 2$$

$$0.5\,x - 2 > ln(2)$$

$$x > 2(ln(2) + 2)$$

$$x > 4 + 2ln(2)$$

Donc $f'(x) < 0$ quand $x \in]4 + 2ln(2); +\infty[$

3.

x	$-\infty$			$4 + 2ln(2)$			$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$2ln(2) + 3$		$\searrow$	$-\infty$

4. On montre que la fonction $f(x) = 1 + x - e^{0.5\,x-2}$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$.

La fonction $x \mapsto 1 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{0.5\,x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction exponentielle. La somme, la composition et la multiplication de fonctions continues sont continues, donc $f(x) = 1 + x - e^{0.5\,x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $f(x)$ est continue sur $[-1; 0]$.

D'après le tableau de variation $f(x)$ est croissante sur $[-1; 0]$ car $0 < 4 + 2ln(2) \approx 5.4$ Finalement $f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0.9$ et $f(1) = 2 - e^{-\,1.5} \approx -\,0.08$ Donc $0 \in \left[1 - e^{-2}; 2 - e^{-\,1.5}\right]$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$

Partie B

1. a.

Soit à démontrer: P(n): « $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ »

Initialisation: au rang $n = 0$ $u_0 = 0$ $u_1 = f(0) = 1 + 0 - e^{-2} = 1 - e^{-2} > 0$

$4 \geq 1 - e^{-2} \geq 0$ Donc la propriété est initialisée.

Hérédité: On suppose qu'il existe un entier k naturel tel que $u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ On cherche à démontrer que la propriété est vraie au rang suivant.

On sait que sur $[0; 4]$ f est croissante. Donc $f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$ $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1 + 4 - e^{0.5 \times 4 - 2} = 4$

Par conséquent la propriété est héréditaire.

Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire selon le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

b. On sait que f est un fonction continue sur $[0; 4]$ et que pour tout entier appartenant à $[0; 4]$ (u_n) est une suite à valeurs dans $[0; 4]$; De plus (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle converge vers un réel l appartenant à $[0; 4]$ et l est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$

$1 + x - e^{0.5\,x-2} = x$ $1 + x - x = e^{0.5\,x-2}$ $ln(1) = 0.5\,x - 2$ $4 + 2ln(1) = x$ $4 = x$ Donc $l = 4$

2. On en déduit que pour que $u_n \geq 3.99$, $n \geq 12$