

Correction Olympiades Partie 1

4 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

1. Quelques exemples

- a. On peut construire une autre liste de longueur 8 et de score 3 en changeant l'ordre de certains éléments tout en gardant 3 inversions. Par exemple :

$[4, 2, 6, 7, 1, 5, 3, 8]$

Ici on a inversé 2 et 5 par rapport à la liste initiale, ainsi que 6 et 7, tout en gardant le même nombre d'inversions (3).

- b. Avec $n=3$, il y a $3! = 6$ listes possibles. Les voici avec leur score :

- $[1, 2, 3]$: score 0 (liste triée dans l'ordre croissant)
- $[1, 3, 2]$: score 1 (une inversion 3-2)
- $[2, 1, 3]$: score 1 (une inversion 2-1)
- $[2, 3, 1]$: score 1 (une inversion 3-1)
- $[3, 1, 2]$: score 1 (une inversion 3-2)
- $[3, 2, 1]$: score 2 (deux inversions 3-2 et 3-1)

2. Fonction Python

```
def score(L, n):  
    compteur = 0  
    for i in range(n-1):  
        if L[i] < L[i+1]:  
            compteur += 1  
    return compteur
```

3. Démonstration des bornes du score

- Score minimum = 0. C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre croissant, il n'y a alors aucune inversion.
- Score maximum = $n-1$. C'est le cas quand la liste est triée dans l'ordre décroissant. Il y a alors une inversion entre chaque paire d'éléments successifs, soit $n-1$ inversions.
- Exemple de liste avec score 0 : $[1, 2, 3, \dots, n]$
- Exemple de liste avec score $n-1$: $[n, n-1, n-2, \dots, 1]$

4. Existence d'une liste de score k

- a. On peut construire une telle liste comme suit : on prend les k plus grands éléments dans l'ordre décroissant, puis on ajoute les $n-k$ plus petits éléments dans l'ordre croissant. Cette liste aura alors exactement k inversions.

Par exemple avec $n = 8$ et $k = 3$:

$[7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8]$

- b. Oui il existe plusieurs listes avec le même score k . Par exemple avec $n = 5$ et $k = 2$:

$[4, 5, 1, 2, 3]$

$[5, 4, 1, 2, 3]$

Ces deux listes ont toutes les deux exactement 2 inversions (entre 4 et 1, et entre 5 et 1).

5. Formules pour $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$

$L_n(0) = 1$ car il n'y a qu'une seule liste possible avec 0 inversion : la liste triée par ordre croissant.

$L_n(n-1) = 1$ car il n'y a qu'une seule liste possible avec $n-1$ inversions : la liste triée par ordre décroissant.

6. Relation de récurrence

a. Avec $n = 3$:

$L_3(0) = 1$ (liste $[1,2,3]$)

$L_3(1) = 3$ (listes $[2,1,3]$, $[1,3,2]$ et $[3,1,2]$)

$L_3(2) = 1$ (liste $[3,2,1]$)

Pour insérer 4 et garder un score de 1, on peut insérer 4 entre 1 et 2 : $[3,1,4,2]$

b. Pour insérer 4 et garder un score nul, on insère 4 avant 3 : $[4,3,2,1]$

c. Avec $n = 4$, vérification de la formule $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$

d. Démonstration de la relation de récurrence générale :

- Pour compter les listes de longueur $n+1$ et de score k , on regarde la position d'insertion de $n+1$:
 - Si on insère $n+1$ à la fin, cela crée k nouvelles inversions et on avait une liste de longueur n et score k . Il y a $L_n(k)$ listes possibles.
 - Si on insère $n+1$ en i ème position, cela crée $k-i$ nouvelles inversions. On avait une liste de longueur n et score $k-i$. Il y a $L_n(k-i)$ listes possibles pour chaque position d'insertion i .
- Il y a donc au total :
 - $(n+1-k) \cdot L_n(k)$ listes avec insertion à la fin
 - $(k+1) \cdot L_n(k-1)$ listes avec insertion en position intermédiaire

D'où la relation $L_{n+1}(k) = (n+1-k)L_n(k) + (k+1)L_n(k-1)$

e. Formule générale par récurrence : $L_{n+1}(k) = (n+1-k) \cdot L_n(k) + (k+1) \cdot L_n(k-1)$

f. Tableau des valeurs de $L_n(k)$:

$k \setminus n$	3	4	5
0	1	1	1
1	3	6	10
2	1	15	35
3	-	20	56
4	-	-	70

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Partie 1

1. $b = -(r_1 + r_2)$

$c = r_1 \cdot r_2$

2. Comme $b \leq 0$ et $c \geq 0$, les racines r_1 et r_2 sont de signes opposés. Voici une proposition pour continuer le développement des réponses :

Partie 2

1. a. Soit (x_1, x_2, x_3) une solution de (E). Alors : $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \alpha|x_1||x_2||x_3|$ par parité des fonctions carré et valeur absolue. Donc $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de (E).
- b. S'il existe une solution (x_1, x_2, x_3) dans \mathbb{Z}^3 avec un x_i non nul, alors $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est une solution dans \mathbb{N}^3 .
2. Si (x_1, x_2, x_3) est solution de (E), alors en permutant x_1 et x_2 , on obtient que (x_2, x_1, x_3) est aussi solution de (E).
3. D'après les questions précédentes, s'il existe une solution dans \mathbb{Z}^3 différente de $(0,0,0)$, alors il existe aussi une solution (x_1, x_2, x_3) dans \mathbb{N}^3 avec $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

1. Supposons $x_1 = 0$. Alors d'après (E), on a $x_2^2 + x_3^2 = 0$, donc $x_2 = x_3 = 0$. Ce qui contredit le fait que (x_1, x_2, x_3) est différent de $(0,0,0)$. Donc nécessairement $x_1 > 0$.
2. a. Montrons que y racine de $Q \iff (x_1, x_2, y)$ solution de (E) :
 - Si y racine de Q , alors $Q(y) = 0$, donc $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$, donc (x_1, x_2, y) solution de (E).
 - Réciproquement, si (x_1, x_2, y) solution de (E), alors $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$, donc $Q(y) = 0$, donc y racine de Q .
- b. x_3 est racine de Q car (x_1, x_2, x_3) solution de (E).
- c. $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2) < 0$ car $x_1 > 0$ et $x_2 > x_1$ d'après l'énoncé.
- d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2 > 0$
- e. Q a deux racines $0 < x_2 < x_3$. De plus, $Q(x_2) < 0$ et $Q(0) > 0$ donc il existe une racine $y > x_3$ par le théorème des valeurs intermédiaires.
- f. Comme y est racine de Q , d'après a., (x_1, x_2, y) est solution de (E) dans \mathbb{N}^3 .
3. On peut réappliquer le raisonnement précédent en remplaçant x_3 par y , et trouver un nouveau triplet solution encore plus grand, et ainsi de suite. Cela conduit à une impossibilité car il n'y a pas de suite strictement croissante infinie d'entiers naturels.
4. On aboutit à une contradiction. Donc le seul triplet solution de (E) dans \mathbb{Z}^3 est $(0,0,0)$.
5. Généralisation au cas de n variables :

On procède par récurrence sur n . L'initialisation pour $n=2$ est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$, avec $n \geq 3$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un n -uplet (x_1, \dots, x_n) solution de l'équation avec un $x_i \neq 0$.

En appliquant un raisonnement similaire aux questions précédentes, on peut se ramener à un n -uplet (x_1, \dots, x_n) dans \mathbb{N}^n avec $x_1 \leq \dots \leq x_n$.

On définit alors $Q(y) = y^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} y + (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$. On montre comme précédemment que Q admet deux racines distinctes x_n et y avec $y > x_n$.

Donc (x_1, \dots, x_{n-1}, y) est un $(n-1)$ -uplet solution de l'équation analogue en dimension $n-1$. Ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

D'où finalement le seul n -uplet solution est $(0, \dots, 0)$.