

Théorie quantique des champs

Théorie *Jean-Pierre Derendinger* quantique des champs

Dans la même collection :

Mécanique quantique

Constantin Piron

Introduction au génie nucléaire

Jacques Ligou

Problèmes à N-corps et champs quantiques

Philippe A. Martin et François Rothen

Introduction à la physique des solides

Emanuel Mooser

Cristallographie

Dieter Schwarzenbach

Mécanique générale

Christian Gruber et Willy Benoit

Physique générale

François Rothen

Illustration de couverture :

Computer reconstructed events recorded with the ALEPH detector, CERN,
<http://alephwww.cern.ch>

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

© 2001, Presses polytechniques et universitaires romandes

CH – 1015 Lausanne

Tous droits réservés.

ISBN 2-88074-491-1

Imprimé en France

Reproduction, même partielle, sous quelque forme

ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Table des matières

1	Théorie des champs classiques	1
1.1	Action, densité lagrangienne, équations du mouvement	2
1.2	Symétries internes et courants de Noether	4
1.3	Symétries d'espace-temps et théorème de Noether	7
1.3.1	Relativité restreinte: le groupe de Poincaré	7
1.3.2	Le champ scalaire	12
1.3.3	Le champ vectoriel	13
1.3.4	Le champ spinoriel	13
1.3.5	Masse et spin	15
1.3.6	Le tenseur énergie-impulsion	19
1.4	Equations du champ libre	22
1.4.1	Le champ de Klein-Gordon	23
1.4.2	Le champ de Dirac	25
1.5	Invariance de jauge et théories de jauge	35
	Références	44
	Exercices	44
2	Quantification canonique du champ libre	47
2.1	Principe	47
2.2	Champs scalaires	48
2.2.1	Le champ scalaire réel	49
2.2.2	Le champ scalaire complexe	55
2.3	Champs spinoriels	59
2.4	Champs de jauge	66
2.4.1	Quantification covariante	66
2.4.2	Un exemple de quantification non covariante: la jauge de radiation	78
2.5	Propagateurs	80
	Références	88
	Exercices	89

3	Processus élémentaires	91
3.1	Matrice S et théorie asymptotique	92
3.2	Réduction	95
3.2.1	Le champ scalaire réel	95
3.2.2	Fermions	100
3.2.3	Photons	104
3.3	Théorie des perturbations, diagrammes de Feynman	106
3.3.1	Une expression pour S et les fonctions de Green	106
3.3.2	Le théorème de Wick	112
3.3.3	Diagrammes de Feynman du champ scalaire réel	116
3.3.4	Diagrammes de Feynman de l'électrodynamique quantique	124
3.4	Grandeurs observables: sections efficaces, temps de vie	130
3.4.1	Collision de deux particules: section efficace	131
3.4.2	Désintégration d'une particule instable: largeur, temps de vie, rapports de branchement	136
3.4.3	Calculs d'espace de phase	137
	Références	142
	Exercices	143
4	Densités lagrangiennes phénoménologiques	145
4.1	Invariance ou violation de C , P et T	146
4.1.1	La conjugaison de charge C	146
4.1.2	Le spineur de Majorana	152
4.1.3	La parité P	154
4.1.4	Invariance ou violation de CP	157
4.1.5	Le renversement du temps T	159
4.1.6	La symétrie CPT	162
4.2	Interactions fortes et électromagnétiques: QCD et QED	163
4.3	Interactions dérivatives: règles de Feynman	168
4.4	Champs massifs de spin un	175
4.5	L'interaction faible des fermions	179
	Références	181
	Exercices	182
5	Applications	183
5.1	Annihilation électron-positon	184
5.2	Diffusion Compton	191
5.2.1	Diffusion électron-photon	191
5.2.2	Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)	195
5.2.3	Quark-gluon \longrightarrow quark-gluon	196
5.3	Désintégrations du W^\pm et du Z^0	199

5.3.1	Désintégration $W^- \longrightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$	200
5.3.2	Désintégration $W^- \longrightarrow D_a \bar{U}_b$	202
5.3.3	Largeur totale, rapports de branchement	203
5.3.4	Désintégration du Z^0	203
5.4	Désintégration du muon	206
5.5	Diffusion profondément inélastique, modèle des partons	210
5.5.1	Diffusion électron-quark	210
5.5.2	Diffusion élastique électron-proton	212
5.5.3	Diffusion inélastique profonde	215
5.5.4	Partons	217
5.6	Désintégration en deux photons du boson de Higgs	218
5.6.1	Le modèle	220
5.6.2	Une densité lagrangienne effective	227
	Références	229
	Exercices	229
6	Renormalisation	231
6.1	Contre-termes et théorie des perturbations	232
6.2	L'électrodynamique à l'ordre d'une boucle: divergences	239
6.3	Régularisation dimensionnelle	243
6.3.1	La fonction gamma	243
6.3.2	Une intégrale en dimension n	244
6.3.3	D'autres intégrales	247
6.4	Régularisation dimensionnelle de l'électrodynamique	249
6.4.1	La densité lagrangienne	249
6.4.2	Propagateur du photon: polarisation du vide	251
6.4.3	Propagateur du fermion, self-énergie	253
6.4.4	Correction de vertex	257
6.4.5	Résumé	262
6.5	L'identité de Ward	264
6.6	Ordres plus élevés, renormalisabilité	267
6.7	Groupe de renormalisation, couplages effectifs	269
	Références	283
	Exercices	284
7	Symétrie spontanément brisée	287
7.1	Le théorème de Goldstone	287
7.2	Le mécanisme de Higgs	293
7.3	Un exemple: le doublet scalaire complexe	297
	Références	302
	Exercices	303

8 Le Modèle standard	305
8.1 Groupe et bosons de jauge	306
8.2 Quarks et leptons	307
8.3 Champs scalaires	309
8.4 Dérivées covariantes, densité lagrangienne	310
8.5 Mécanisme de Higgs et jauge unitaire	313
8.6 Paramètres et valeurs numériques	321
 Appendice A Formulaire, conventions et notations	 323
 Appendice B L'anomalie chirale	 333
 Bibliographie	 339
 Index	 345

Avant-propos

La théorie quantique des champs, qui intègre relativité restreinte et mécanique quantique, est à la base de la description des interactions des particules élémentaires. Son développement, dont l'origine remonte à la fin des années 1920, s'est longtemps concentré sur la physique des photons et des électrons, sur l'électrodynamique quantique. Après de nombreux détours et plusieurs crises, les interactions faibles et fortes des quarks et des leptons y ont trouvé aujourd'hui leur place. Seule subsiste l'aversion de la force de gravitation pour la théorie quantique des champs. . .

Ce texte d'introduction à la théorie quantique des champs est une synthèse du contenu de plusieurs cours de deuxième cycle ou postgrades donnés à l'Université de Neuchâtel, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich et dans le cadre de l'enseignement postgrade commun aux universités suisses francophones ("Troisième cycle de la physique en Suisse romande"). Il est destiné en priorité aux étudiants doctorants en physique expérimentale des hautes énergies et aux étudiants du deuxième cycle avec une orientation en physique des particules ou en théorie. Il est admis que le lecteur dispose d'une bonne maîtrise de la mécanique quantique non relativiste. Dans une moindre mesure, des connaissances de base de la physique des particules peuvent aider à suivre certains exemples ou discussions. L'objectif est de développer les bases du formalisme de la théorie quantique des champs, le "minimum vital" permettant d'apprécier la structure de théories telles que l'électrodynamique quantique ou le Modèle standard et de les utiliser pour décrire des systèmes physiques simples. En revanche, les fondements phénoménologiques et historiques ou les tests expérimentaux des théories décrivant les interactions fondamentales ne sont pas abordés.

Dans l'optique d'une introduction au sujet, le texte a deux limitations principales. Premièrement, l'intégrale de chemin n'est pas utilisée, l'approche canonique est suivie. Cette option permet une progression plus rapide et plus adaptée aux connaissances de la majorité des étudiants. Deuxièmement, la quantification des théories de jauge non abéliennes n'est pas discutée, et ne sont envisagées que des applications perturbatives, dans le domaine relativiste.

La littérature traitant de la théorie quantique des champs est considérable, de haute qualité, avec un bon nombre d'ouvrages à la fois récents et complets. La bibliographie donne une liste étendue d'ouvrages de référence. Quelques lec-

tures d'approfondissement ou de complément sont en général suggérées à la fin des chapitres, ainsi que quelques exercices. Le lecteur désireux de perfectionner ses connaissances et sa dextérité saura se reporter à l'abondante littérature qui propose nombre de problèmes et d'exemples autres que ceux traités ici.

L'organisation de l'exposé est relativement traditionnelle. Le chapitre 1 passe en revue les aspects classiques utiles à la construction de la théorie quantique, y compris la dérivation de la densité lagrangienne d'une théorie invariante de jauge. Le chapitre 2 est consacré à la quantification canonique des champs libres, à la description des espaces d'états et des propagateurs causals. L'expansion perturbative (diagrammes de Feynman) de la théorie interactive fait l'objet du chapitre 3, l'accent étant mis sur le champ scalaire pour sa simplicité et sur l'électrodynamique quantique pour son importance. Ce chapitre fait également le lien avec les grandeurs mesurées (section efficace, largeur de désintégration, ...). Le chapitre 4 le complète par une discussion de quelques points absents de l'électrodynamique quantique mais requis par les interactions faibles ou fortes: champs massifs libres de spin un, interactions dérivatives; il rassemble aussi diverses notions plus proches de la phénoménologie et utiles à la formulation de modèles physiques: C , P , T , couleur et chromodynamique quantique, interactions faibles des fermions. Le chapitre 5 propose un choix d'exemples; il aborde aussi à un niveau élémentaire quelques notions marginales à la théorie des champs mais utiles en physique des particules (partons, facteurs de forme, fonctions de structure). La renormalisation est étudiée dans le chapitre 6, qui ne prétend cependant pas donner une présentation complète de cet important sujet. La discussion se concentre sur l'électrodynamique quantique à l'ordre d'une boucle et en régularisation dimensionnelle, avec une section consacrée au groupe de renormalisation. La brisure spontanée de la symétrie est le sujet du chapitre 7, presque uniquement au niveau classique puisque la quantification des théories non abéliennes n'a pas été traitée. La construction du Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques est présentée dans le dernier chapitre. Enfin, deux appendices contiennent les notations et conventions utilisées ainsi que quelques formules, et une brève discussion de l'anomalie chirale. Les chapitres 1, 2, 3, 5 et peut-être 6 forment ainsi l'ossature d'un cours d'introduction à la théorie quantique des champs.

L'aide de Philippe Page a été précieuse lors de l'élaboration de la première version des notes de cours. J'aimerais l'en remercier, ainsi que les collègues et étudiants qui ont contribué à l'amélioration du texte par leurs remarques et corrections. J'ai bénéficié des compétences de Liliane Deppierraz et Christophe Borlat lors de la réalisation finale de l'ouvrage. Je remercie enfin Nicole Derendinger pour son soutien, sa patience et l'aide apportée à la mise en informatique du manuscrit.

Chapitre 1

Théorie des champs classiques

Dans l’approche traditionnelle que nous suivrons, l’étude d’une théorie quantique des champs comprend deux phases. Il s’agit d’abord de construire la théorie, ce qui revient à formuler la *fonctionnelle d’action* S qui la définit. Un certain nombre de règles qui découlent du formalisme de la théorie des champs limitent les formes admissibles de l’action. Violer ces règles vide la deuxième phase, l’étude du contenu physique de la théorie, de toute signification. Le formalisme de la théorie quantique des champs permet avant tout d’extraire de l’action, traitée dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, les quantités physiques observables, en général par le biais de la théorie des perturbations. Le but principal de ce cours est d’étudier ce formalisme, de développer les outils de la théorie des perturbations et de discuter les fonctionnelles d’action utiles à la description des interactions des particules élémentaires.

En fait, le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des symétries. La forme de la fonctionnelle d’action en découle¹. L’action elle-même n’a pas de signification physique propre. L’information physique se trouve dans la classification des champs et le contenu en symétries, qu’elles soient exactes ou spontanément brisées.

Dans le contexte de la théorie relativiste des champs qui nous intéresse ici, un champ est une fonction de l’espace-temps. Par exemple, dans la théorie de Maxwell, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ est un champ classique. Sa dynamique, fixée par les équations de Maxwell, est conforme au principe de relativité restreinte (les équations de Maxwell sont qualifiées de “covariantes relativistes”). La théorie de Maxwell est donc une théorie relativiste de champs classiques. La théorie quantique des champs considère des champs à valeurs opératoriels. Ce passage du champ classique à “l’opérateur de champ” est souvent qualifié de deuxième quantification.

Ce premier chapitre décrit brièvement les notions classiques à la base de la

¹Ce n’est que partiellement vrai si la théorie est supersymétrique.

théorie quantique des champs: la fonctionnelle d'action et le formalisme lagrangien, les symétries de l'action et les lois de conservation déduites du théorème de Noether, ainsi que les champs scalaires, vectoriels et spinoriels et les équations cinématiques de Klein-Gordon et Dirac. Le but est d'obtenir la fonctionnelle d'action la plus générale décrivant des champs de spins 0, 1/2 et 1 qui pourra être traitée dans le cadre de la théorie quantique des champs.

1.1 Action, densité lagrangienne, équations du mouvement

Les théories quantiques des champs utilisées pour décrire les interactions des particules élémentaires peuvent être formulées à partir d'un principe d'action qui est une simple généralisation de la situation rencontrée en mécanique classique. On pourrait également se donner les équations dynamiques qui découlent de l'action (les équations d'Euler-Lagrange) comme point de départ du formalisme. Mais il s'avère que l'utilisation de l'action simplifie la quantification de la théorie.

En mécanique classique, les équations du mouvement d'un système de particules ponctuelles sont obtenues à partir d'une action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (1.1)$$

où L est la fonction de Lagrange. L'action S est une fonctionnelle de l'ensemble des coordonnées $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_{3N}(t)\}$ des N particules du système (tridimensionnel) et de leurs vitesses $\dot{q}(t) = \{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{3N}(t)\}$, au temps t . Le principe de moindre action postule que les trajectoires physiques sont celles pour lesquelles la fonctionnelle d'action S a un extremum, en général un minimum. Il en découle un ensemble d'équations différentielles, les équations d'Euler-Lagrange, qui sont les équations du mouvement du système: elles déterminent son évolution temporelle.

Pour les obtenir, supposons que la fonctionnelle S est stationnaire pour $q(t) = Q(t)$, et considérons des trajectoires différant peu de $Q(t)$ de la forme $q_\epsilon(t) = Q(t) + \epsilon \delta q(t)$. La quantité ϵ est un paramètre et on peut supposer que $\delta q(t)$ s'annule aux temps t_1 et t_2 ; $Q(t)$ et $q_\epsilon(t)$ coïncident donc aux temps t_1 et t_2 . La valeur de l'action pour les trajectoires q_ϵ est une fonction du paramètre ϵ , et la stationnarité de l'action pour $q(t) = Q(t)$ s'exprime par la condition

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] \right]_{\epsilon=0} = 0. \quad (1.2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t), \end{aligned}$$

en intégrant par parties avec $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Puisque $\delta q(t)$ est arbitraire pour $t_1 < t < t_2$, la condition de stationnarité implique les équations différentielles

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (1.3)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange du système décrit par l'action S . Elles forment un système de $3N$ équations différentielles du deuxième ordre (au plus), en général couplées et non linéaires.

L'extension de ce formalisme à la dynamique de champs est immédiate. Considérons le cas le plus simple de champ classique: une fonction de l'espace-temps $\phi(x)$ à valeur dans les nombres réels ou complexes. Nous utilisons la notation suivante: x dénote le quadrivecteur de composantes x^μ , avec $x^0 = ct$ et le choix d'unités $c = 1$ ². Le système physique a maintenant un nombre infini de degrés de libertés: au lieu des $3N$ coordonnées $q_i(t)$, on considère à chaque temps t les valeurs du champ en chaque point de l'espace. Comme auparavant, une *action* et une *fonction de Lagrange* sont introduites,

$$S[\phi] = \int dt L \quad (1.4)$$

mais il convient d'utiliser également une *densité lagrangienne* $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ avec³

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.5)$$

Le volume d'intégration ne sera pas spécifié plus précisément. Il dépend du système physique considéré et peut être fini ou infini. Donc

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.6)$$

Le principe de moindre action stipule que les champs physiques du système $\tilde{\phi}(x)$ correspondent aux extrema de l'action S . Par analogie avec le cas discret étudié plus haut, on considère l'action $S[\phi_\epsilon]$, avec $\phi_\epsilon = \tilde{\phi} + \epsilon \delta$, δ étant un champ quelconque s'annulant aux bords du volume d'intégration. Alors, puisque S est stationnaire en $\tilde{\phi}$,

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon] \right]_{\epsilon=0} = 0.$$

²L'ensemble des notations utilisées est défini dans l'appendice A.

³La densité lagrangienne peut en principe dépendre explicitement de x , $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)$. Nous omettrons cette possibilité.

Après une intégration partielle utilisant l'annulation de δ aux bords du volume d'intégration, la dérivée est

$$\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon] = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right]_{\phi=\phi_\epsilon} \delta. \quad (1.7)$$

Sauf mention contraire, la répétition d'un indice (ici l'indice μ) implique par convention une somme sur toutes ses valeurs. Comme le champ δ est arbitraire, la condition de stationnarité conduit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (1.8)$$

dont les champs physiques $\tilde{\phi}$ sont solutions. Par rapport au cas de la mécanique classique de particules ponctuelles, on a en fait une infinité d'équations d'Euler-Lagrange (vues comme des équations différentielles dans le temps), en chaque point spatial du volume du système physique considéré. Elles déterminent la dynamique spatio-temporelle du champ $\phi(x)$ puisque leurs solutions sont précisément les champs physiques $\tilde{\phi}(x)$. Lorsque la densité lagrangienne est fonction du champ et de ses premières dérivées uniquement, les équations d'Euler-Lagrange sont au plus du deuxième ordre. Ceci est suffisant pour décrire les interactions de champs relativistes quantifiés.

La généralisation au cas d'une action dépendant de plusieurs champs, notés collectivement $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, M$, est simple. A nouveau, puisque l'action est stationnaire pour les champs physiques $\tilde{\phi}^i(x)$, on aura

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon^i] \right]_{\epsilon=0} = 0, \quad (1.9)$$

où $\phi_\epsilon^i(x) = \tilde{\phi}^i(x) + \epsilon \delta^i(x)$. Cette équation est vraie pour des variations $\epsilon \delta^i(x)$ indépendantes et arbitraires de chaque champ, s'annulant au bord du volume d'intégration. On aura donc une équation d'Euler-Lagrange pour chaque champ $\phi_i(x)$ apparaissant dans la densité lagrangienne:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.10)$$

1.2 Symétries internes et courants de Noether

L'action S possède une symétrie s'il existe un ensemble de transformations des champs ϕ_i et des coordonnées d'espace-temps laissant S invariante. L'ensemble de toutes les symétries de l'action forme nécessairement un groupe de symétrie.

Considérons une théorie de champs classiques définie par l'action

$$S[\phi^j] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j). \quad (1.11)$$

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) = 0, \quad (1.12)$$

déterminent la dynamique des M champs ϕ^j , $j = 1, \dots, M$. Supposons ensuite que cette action possède une *symétrie interne*, c'est-à-dire qu'il existe une (ou plusieurs) transformation agissant sur les champs selon

$$\phi^j(x) \longrightarrow \phi^j(x)' = U_k^j \phi^k(x) \quad (1.13)$$

(on somme, de 1 à M , sur les indices répétés). En général, la matrice U de dimension $(M \times M)$ n'est pas unique. L'ensemble des matrices U forme un groupe, \mathcal{G} . Cette symétrie est qualifiée d'*interne* puisqu'elle transforme les champs sans agir sur l'espace-temps: les coordonnées ne sont pas affectées par la transformation. C'est une symétrie qui commute avec les symétries d'espace-temps du groupe de Poincaré qui seront considérées dans la section suivante.

Une *symétrie* est une transformation qui laisse l'action invariante. Les symétries apparaissant dans les théories de champs décrivant les interactions des particules élémentaires sont de plusieurs types. Certaines sont *discrètes*, le groupe \mathcal{G} possédant un nombre fini d'éléments. Les symétries continues correspondent à un groupe dont les éléments (les matrices U) sont des fonctions d'un nombre fini de paramètres continus α_I . Nous allons considérer des transformations qui sont des fonctions analytiques des paramètres α_I . Le groupe \mathcal{G} est alors un *groupe de Lie*. On peut se restreindre à des transformations infinitésimales et poser

$$U_k^j = \delta_k^j + i\alpha_I (T^I)_k^j, \quad \phi^{j'} = \phi^j + \delta\phi^j, \quad \delta\phi^j = i\alpha_I (T^I)_k^j \phi^k, \quad (1.14)$$

les paramètres α_I étant infinitésimaux (on somme sur I). L'ensemble de matrices linéairement indépendantes T^I forme un ensemble de *générateurs de l'algèbre de Lie du groupe \mathcal{G}* . Les symétries continues sont de deux types. Lorsque les paramètres α_I sont indépendants du point de l'espace-temps, la symétrie est dite *globale*. Elle transforme les champs de la même façon dans tout l'espace-temps. Par exemple, le nombre baryonique et les nombres leptoniques sont des symétries globales du Modèle standard dans sa version minimale. Par contre, on peut envisager des transformations laissant l'action invariante et qui agissent différemment selon le point dans l'espace-temps:

$$\phi^j(x) \longrightarrow \phi^j(x)' = U_k^j(x) \phi^k(x). \quad (1.15)$$

Dans ce cas, les paramètres sont des fonctions $\alpha_I(x)$ et la transformation est une *symétrie de jauge*. Les théories de champs classiques invariantes de jauge seront étudiées dans la dernière section de ce chapitre.

Le lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie peut se résumer comme suit. La transformation infinitésimale (1.14) peut être vue comme l'expansion au premier ordre dans les paramètres infinitésimaux α_I de l'élément du groupe \mathcal{G}

$$U(\alpha_I) \equiv e^{i\alpha_I T^I} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (i\alpha_I T^I)^n. \quad (1.16)$$

Comme \mathcal{G} est un groupe, la loi de groupe indique que

$$U(\alpha_I)U(\beta_I) = U(\gamma_I) \in \mathcal{G}.$$

D'autre part, pour deux matrices A et B , on a

$$e^A e^B = e^C, \quad C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \delta C$$

où la matrice δC contient une infinité de termes d'ordres plus élevés que A^2 , AB ou B^2 s'écrivant uniquement à partir de commutateurs. Pour des éléments du groupe de la forme (1.16), la loi de groupe devient

$$i\gamma_I T^I = i(\alpha_I + \beta_I)T^I - \frac{1}{2}\alpha_I \beta_J [T^I, T^J] + \text{commutateurs d'ordres plus élevés}.$$

Elle est donc équivalente à la donnée des relations de commutations

$$[T^I, T^J] = i f^{IJ}{}_K T^K, \quad (1.17)$$

qui définit l'algèbre de Lie du groupe \mathcal{G} . Les nombres $f^{IJ}{}_K$ sont les *constantes de structure* de l'algèbre de Lie. Ces notions joueront un rôle important dans la construction des théories de jauge non abéliennes (ou théories de Yang-Mills) qui sont à la base du Modèle standard des interactions fortes et électrofaibles.

Pour étudier certaines conséquences de l'invariance de l'action sous une transformation infinitésimale (1.14), il convient d'abord de remarquer que si S est invariante sous une transformation locale dont les paramètres α^I dépendent de x , S sera également invariante sous les transformations globales, pour lesquelles $\partial_\mu \alpha^I = 0$. L'invariance de l'action sous une transformation infinitésimale (1.14) globale s'exprime par les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S[\phi^j] &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^j} \delta \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^j} \partial_\mu (\delta \phi^j) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^j} \delta \phi^j \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le dernier pas utilise le fait que les champs physiques sont solutions des équations d'Euler-Lagrange et n'est donc vrai que pour ces solutions. L'invariance de l'action, $\delta S = 0$, implique que la variation de la densité lagrangienne est au plus une dérivée totale d'une quantité qui s'annule au bord du volume d'intégration:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu, \quad (1.19)$$

V^μ étant une fonction des champs ϕ^j et $\partial_\nu \phi^j$, et des paramètres α_I , qui sont arbitraires. Par conséquent,

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^j} \delta \phi^j - V_\mu \quad (1.20)$$

Le courant conservé J_μ dépend de l'ensemble des paramètres de la transformation de symétrie. Pour une transformation continue infinitésimale, au premier ordre en α_I , on a $\delta\phi^j = i\alpha_I(T^I)_k^j\phi^k$ et $V^\mu = \alpha_I V^{I\mu}$ si bien que l'invariance de l'action implique

$$\partial^\mu J_\mu^I = 0, \quad J_\mu^I = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi_j} (T^I)_j^k \phi_k - V_\mu^I. \quad (1.21)$$

On a donc construit un courant conservé pour chacun des paramètres de la symétrie continue interne: c'est le *théorème de Noether* pour les symétries internes.

Par la suite, nous considérerons uniquement des symétries internes qui laissent la densité lagrangienne invariante. Le *courant de Noether* est alors donné par l'expression (1.21) avec $V_\mu^I = 0$.

L'équation de conservation des courants J_μ^I s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} J^{I0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^I = 0.$$

En prenant l'intégrale de cette équation sur un volume spatial V , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x J^{I0} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^I = - \int_{\partial V} \vec{ds} \cdot \vec{J}^I. \quad (1.22)$$

Si le volume est choisi tel que le courant \vec{J}^I s'annule sur son bord ∂V , on aura

$$\frac{d}{dt} Q^I(t) = 0, \quad Q^I(t) = \int_V d^3x J^{I0} = Q^I. \quad (1.23)$$

A chaque symétrie continue de l'action correspond un courant conservé et une charge totale Q^I indépendante du temps. La composante temporelle du courant joue le rôle de densité de charge.

1.3 Symétries d'espace-temps et théorème de Noether

1.3.1 Relativité restreinte: le groupe de Poincaré

Le principe de relativité restreinte impose que l'action soit invariante sous les transformations du *groupe de Poincaré*, qui comprend les translations d'espace-temps et les *transformations de Lorentz*. Sur les coordonnées d'espace-temps, l'action du groupe de Poincaré est

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.24)$$

où $\Lambda^\mu{}_\nu$ est une transformation de Lorentz. Chaque élément g est donc caractérisé par $g = (\Lambda, a)$. Il s'agit de transformations globales ($\Lambda^\mu{}_\nu$ et a^μ sont

indépendants de x^μ) qui peuvent être continues (translations, transformations de Lorentz propres) ou discrètes (parité, renversement du temps). Les transformations de Poincaré laissent invariant l'élément d'intervalle entre deux points proches x^μ et $x^\mu + dx^\mu$, qui s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.25)$$

$\eta_{\mu\nu}$ étant la métrique de Minkowski⁴. Les quantités dx^μ forment un vecteur contravariant par rapport aux transformations de Lorentz,

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (1.26)$$

d'après (1.24). La condition d'invariance de l'intervalle, $ds^2 = ds'^2$, exige

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (1.27)$$

qui caractérise complètement les transformations de Lorentz. Elle contient dix conditions indépendantes qui réduisent à six le nombre de paramètres (continus) de la transformation de Lorentz. La transformation de Lorentz du vecteur covariant des dérivées partielles s'écrit

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (1.28)$$

la dernière égalité définissant $\Lambda_\mu{}^\nu$, qui est l'inverse de $\Lambda^\mu{}_\nu$: $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\rho{}_\nu = \delta_\mu^\rho$. Il suit de (1.27) que

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma, \quad (1.29)$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est l'inverse de $\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu.$$

Les matrices $\eta^{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$ sont numériquement identiques. On les utilisera pour modifier la nature covariante ou contravariante d'un indice vectoriel puisque

$$\Lambda_\mu{}^\nu \eta_{\nu\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho.$$

Les indices seront donc “montés” en utilisant $\eta^{\mu\nu}$ et “abaissés” grâce à $\eta_{\mu\nu}$.

Il suit de (1.27) que toute matrice Λ peut se décomposer en un produit

$$\Lambda = \Lambda_D \Lambda_0 \quad (1.30)$$

avec $\Lambda_D = 1, P, T, PT$ alors que Λ_0 a déterminant unité et $\Lambda_0^0 \geq 1$. L'ensemble L_+^\uparrow des matrices Λ_0 forme le sous-groupe des transformations de Lorentz *propres et orthochrones*. Les éléments discrets apparaissant dans Λ_D sont la parité

$$P : (x^0, \vec{x}) \longrightarrow (x^0, -\vec{x}), \quad (1.31)$$

⁴Les conventions utilisées sont définies dans l'appendice A.

et le renversement du temps

$$T : (x^0, \vec{x}) \longrightarrow (-x^0, \vec{x}), \quad (1.32)$$

Plutôt que de considérer directement l'équation de définition (1.27), il est souvent plus simple de se restreindre à une transformation infinitésimale,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu}, \quad (1.33)$$

les quantités $\omega_{\rho\nu}$ étant supposées petites face à l'unité. Ceci n'est possible que pour une transformation de L_+^\uparrow , mais la décomposition (1.30) permet de discuter l'ensemble du groupe de Lorentz à partir de (1.33) et (1.30). Au premier ordre en ω , la condition (1.27) devient simplement

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0, \quad (1.34)$$

et ω est une matrice antisymétrique quelconque. Comme mentionné plus haut, le groupe de Lorentz a six paramètres continus, correspondant à trois angles de rotation et aux trois paramètres \vec{v}/c apparaissant dans un “*boost*” (ou “glissement”) de Lorentz vers un référentiel inertiel de vitesse relative \vec{v} .

Nous allons par la suite utiliser la notion de générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Pour l'introduire, on pose

$$\delta x^\mu = \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu} x^\nu = \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.35)$$

où les $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ sont des opérateurs agissant dans l'espace-temps, choisis indépendamment des paramètres $\omega_{\rho\sigma}$. D'après (1.35), il faut que

$$i(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu = \eta^{\mu\rho} x^\sigma - \eta^{\mu\sigma} x^\rho.$$

La solution est de remplacer les $M^{\rho\sigma}$ par des opérateurs différentiels de la forme $(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = (L^{\rho\sigma})\delta^\mu_\nu$, avec

$$L^{\rho\sigma} = i(x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho). \quad (1.36)$$

On vérifie que ces opérateurs satisfont l'algèbre de commutateurs

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}). \quad (1.37)$$

Les relations de commutation (1.37) définissent l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz dont les $M^{\mu\nu}$ sont les *générateurs* (qui forment une base de l'algèbre de Lie). Chaque réalisation des règles de commutation (1.37) correspond à une représentation particulière de l'algèbre de Lie. Par exemple, le choix (1.36) utilise des opérateurs différentiels agissant sur les coordonnées d'espace-temps. Un autre choix consisterait à représenter tous les générateurs par le nombre zéro. C'est une réalisation triviale de l'algèbre, en une dimension puisqu'un nombre réel représente chaque élément.

Par la suite, nous considérerons des représentations de l'algèbre de Lie (1.37) de la forme

$$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

les opérateurs $L^{\mu\nu}$ étant définis par (1.36) alors que les $S^{\mu\nu}$ forment une représentation matricielle de l'algèbre (1.37) qui commute avec $L^{\mu\nu}$. Nous aurons en effet à agir à la fois sur les coordonnées et sur les champs.

Il est facile d'étendre cette discussion aux translations

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu = x^\mu + a^\nu \partial_\nu x^\mu. \quad (1.39)$$

Les générateurs P_μ des translations sont introduits en posant

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = i(a^\nu P_\nu)x^\mu, \quad (1.40)$$

par analogie avec (1.35). D'après (1.39), les opérateurs différentiels

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (1.41)$$

génèrent les translations. En utilisant les générateurs de Lorentz (1.36), on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\eta_{\mu\rho}P_\nu - i\eta_{\nu\rho}P_\mu, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ces relations, associées à l'algèbre de Lorentz (1.37), forment l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, dont les dix générateurs sont $M_{\mu\nu}$ et P_μ . Par la suite, une représentation générale de l'algèbre de Poincaré sera donnée par les opérateurs (1.38), (1.36) et (1.41). Ces équations sont essentielles pour caractériser le comportement des champs sous les transformations du groupe de Poincaré. Nous verrons plus loin que ce comportement est directement lié aux spins des champs en question.

Pour une théorie de champs classiques invariante relativiste, décrivant un ensemble de champs $\phi^i(x)$, il sera nécessaire de connaître l'action sur les champs des transformations du groupe de Poincaré:

$$\phi^i(x) \longrightarrow \phi^{i'}(x').$$

Il doit être possible de reconstruire le champ $\phi^{i'}$, dans les coordonnées $x^{\mu'}$, à partir des valeurs du champ $\phi^i(x)$. Nous n'utiliserons que des champs pour lesquels une relation linéaire

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i_j \phi^j(x) \quad (1.43)$$

existe. La matrice $S(g)$ dépend de l'élément (abstrait) $g = (\Lambda, a)$ du groupe de Poincaré utilisé pour transformer les coordonnées. Il s'agit d'une représentation linéaire du groupe de Poincaré. L'équation (1.43) donne la relation fonctionnelle définissant ϕ' . Le changement de coordonnées inverse exprime x^μ comme fonction de $x^{\mu'}$ et donc

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i_j \phi^j(x(x')). \quad (1.44)$$

Par exemple, pour une transformation de Lorentz $x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, ou matriciellement $x' = \Lambda x$, on a

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i{}_j \phi^j(\Lambda^{-1}x'), \quad (1.45)$$

ou encore

$$\phi^{i'}(\Lambda x) = S(g)^i{}_j \phi^j(x). \quad (1.46)$$

Pour une transformation infinitésimale,

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad S(g)^i{}_j = \delta^i_j + \delta S(g)^i{}_j,$$

on aura, au premier ordre en δx^μ et $\delta S(g)$,

$$\begin{aligned} \phi^{i'}(x') &= \phi^{i'}(x^\mu + \delta x^\mu) = \phi^{i'}(x) + [\partial_\mu \phi^{i'}(x)] \delta x^\mu = \phi^{i'}(x) + [\partial_\mu \phi^i(x)] \delta x^\mu \\ &= \phi^i(x) + \delta S(g)^i{}_j \phi^j(x), \end{aligned}$$

d'après (1.43). Il y a donc une relation linéaire entre les fonction $\phi^{i'}$ et ϕ^i au point x :

$$\begin{aligned} \phi^{i'}(x) - \phi^i(x) &= \delta S(g)^i{}_j \phi^j(x) - \partial_\mu \phi^i(x) \delta x^\mu = [\delta S(g)^i{}_j - \delta x^\mu \partial_\mu \delta^i_j] \phi^j(x) \\ &= \delta S_0(g)^i{}_j \phi^j(x). \end{aligned} \quad (1.47)$$

La version infinitésimale de (1.43) s'écrit donc

$$\phi^{i'}(x') - \phi^i(x) = \delta S(g)^i{}_j \phi^j(x) = \delta S_0(g)^i{}_j \phi^j(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i(x). \quad (1.48)$$

Le choix de $\delta S_0(g)$ caractérise complètement la transformation des champs. Pour élaborer ce point, nous allons considérer séparément les translations et les transformations de Lorentz.

Translations

Pour une translation $x' = x + a$, il est naturel de définir la valeur des champs $\phi^{i'}$ en x' comme étant simplement la valeur de ϕ^i en $x = x' - a$. On aura donc

$$\phi^{i'}(x') = \phi^i(x), \quad (1.49)$$

c'est-à-dire

$$S(g)^i{}_j = \delta^i_j, \quad \delta S(g)^i{}_j = 0. \quad (1.50)$$

D'autre part,

$$\phi^{i'}(x) = \phi^i(x - a) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-a^\mu \partial_\mu)^n \phi^i(x) = e^{-a^\mu \partial_\mu} \phi^i(x). \quad (1.51)$$

D'après (1.47) et pour a^μ infinitésimal, on obtient

$$\delta S_0(g)^i{}_j \phi^j(x) = -i a^\mu P_\mu \phi^i(x), \quad (1.52)$$

en utilisant les générateurs (1.41) des translations. Le même résultat découle de (1.50) inséré dans (1.48).

Transformations de Lorentz

Le traitement des transformations de Lorentz est plus compliqué puisqu'il faut en général intervenir des opérateurs $\delta S(g)$ non nuls. Une transformation infinitésimale s'écrit

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu = \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} x^\mu.$$

D'après (1.36), les opérateurs différentiels $L^{\mu\nu}$ sont donnés par $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. On observe ensuite que le dernier terme dans la transformation (1.48) peut s'écrire

$$\delta x^\mu \partial_\mu \phi^i(x) = \frac{1}{2} i \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \phi^i(x).$$

Nous allons alors poser

$$\delta S(g)^j_k = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma})^j_k, \quad (1.53)$$

si bien que

$$\delta S_0(g)^j_k = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} [(S^{\rho\sigma})^j_k + L^{\rho\sigma} \delta_k^j] = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^j_k. \quad (1.54)$$

C'est le choix des $S^{\rho\sigma}$ [ou de $\delta S(g)$] qui caractérise les transformations de Lorentz propres orthochrones des champs. Nous verrons plus loin que ce choix détermine également le spin (intrinsèque) des champs en question.

1.3.2 Le champ scalaire

Il s'agit du cas le plus simple pour lequel

$$\delta S(g) = 0 \longleftrightarrow S^{\mu\nu} = 0.$$

C'est la représentation triviale, de dimension 1, de l'algèbre de Lie. Elle agit donc sur un champ unique $\varphi(x)$ pour lequel

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad (1.55)$$

comme dans le cas des translations. Nous verrons que le champ scalaire, qui peut être réel ou complexe, est sans spin.

1.3.3 Le champ vectoriel

Un *champ vectoriel* est un quadrivecteur de champs $V^\mu(x)$ dont la transformation de Lorentz utilise des générateurs $S^{\mu\nu}$ de la forme

$$(S^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\mu). \quad (1.56)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} V^{\mu'}(x') - V^\mu(x) &= \delta S(g)^\mu{}_\nu V^\nu(x) \\ &= -\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma} [i\eta^{\mu\rho}\delta_\nu^\sigma - i\eta^{\mu\sigma}\delta_\nu^\rho] V^\nu(x) \\ &= \omega^{\mu\nu} V_\nu(x), \end{aligned} \quad (1.57)$$

où les indices sont abaissés ou élevés avec $\eta_{\mu\nu}$ ou $\eta^{\mu\nu}$, comme d'habitude. La transformation ci-dessus est identique à celle d'un quadrivecteur (contravariant ou covariant), d'où le nom de champ vectoriel.

Un champ vectoriel $V_\mu(x)$ se transforme de la même façon que le gradient d'un champ scalaire $\partial_\mu\phi(x)$, qui est donc un champ vectoriel particulier. En effet,

$$\partial_\mu\phi(x) \longrightarrow \partial'_\mu\phi'(x') = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu\phi(x).$$

Pour une transformation infinitésimale,

$$\partial'_\mu\phi'(x') - \partial_\mu\phi(x) = \omega_{\mu\nu}\partial^\nu\phi(x).$$

Nous verrons que $V_\mu(x)$ est utilisé dans la description d'une particule de spin unité.

1.3.4 Le champ spinoriel

Les *champs spinoriels* permettent de décrire la physique de particules de spin $1/2$. Il en existe une généralisation pour les spins demi-entiers plus élevés qui ne sera pas discutée ici. La construction des spineurs est plus sophistiquée que celle des champs tensoriels, tels que les champs scalaire et vectoriel. Nous nous bornerons à construire leurs transformations infinitésimales, c'est-à-dire à obtenir les générateurs $S^{\mu\nu}$. Ceux-ci utilisent les *matrices de Dirac*, qui satisfont l'algèbre d'anticommutateurs (*algèbre de Dirac*)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I. \quad (1.58)$$

Cette algèbre peut être représentée par des matrices (4×4) et I est la matrice identité en quatre dimensions. Un exemple de réalisation est le suivant:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.59)$$

où les matrices de Pauli sont notées σ_i et I_2 est la matrice unité en deux dimensions. Il s'agit de la représentation *chirale*, ou *de Weyl*.

En utilisant l'algèbre de Dirac (1.58), on vérifie facilement que les matrices

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.60)$$

vérifient l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz (1.37). Elles forment donc les générateurs d'une représentation de l'algèbre (1.37) agissant sur un champ à quatre composantes

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

qui est un *spineur de Dirac*. Nous allons donc identifier les générateurs $S^{\mu\nu}$ apparaissant dans (1.53) avec les $\sigma^{\mu\nu}$ et la transformation de Lorentz du spineur de Dirac est donc

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = \psi(x) + \delta S(\omega)\psi(x), \\ \delta S(\omega) &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Le champ de Dirac porte en fait une représentation réductible de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Pour le montrer, introduisons la matrice

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (1.63)$$

qui satisfait

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = I_4, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (1.64)$$

Par conséquent,

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.65)$$

Il est alors possible de construire un ensemble complet de projecteurs orthogonaux

$$P_L = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5), \quad (1.66)$$

pour lesquels

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L + P_R = I_4. \quad (1.67)$$

Les projecteurs commutent avec les générateurs:

$$[P_L, \sigma^{\mu\nu}] = [P_R, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.68)$$

Puisque les quatre valeurs propres de γ_5 sont 1, 1, -1, -1, les projecteurs permettent de définir deux spineurs à deux composantes

$$\psi_L = P_L \psi = P_L \psi_L, \quad \psi_R = P_R \psi = P_R \psi_R, \quad (1.69)$$

qui se transforment séparément sous le groupe de Lorentz:

$$\begin{aligned}\delta\psi_L &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}P_L\psi = -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}P_L\sigma^{\mu\nu}\psi = P_L\delta\psi, \\ \delta\psi_R &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}P_R\psi = -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}P_R\sigma^{\mu\nu}\psi = P_R\delta\psi.\end{aligned}\tag{1.70}$$

Les spineurs à deux composantes ψ_L et ψ_R peuvent être considérés comme des entités indépendantes puisqu'ils ont des transformations de Lorentz bien définies. Ce sont des *spineurs de Weyl*.

Les projecteurs P_L et P_R sont les *projecteurs de chiralité*; ψ_L et ψ_R sont les spineurs de chiralités gauche et droite. Dans la représentation chirale (1.59), la matrice γ_5 est diagonale:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.\tag{1.71}$$

On aura donc

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix},$$

en termes de spineurs à deux composantes χ_L et χ_R .

1.3.5 Masse et spin

Les champs scalaires, vectoriels et spinoriels possèdent des transformations de Poincaré bien définies, qui les caractérisent. Ils portent des représentations du groupe de Poincaré et de son algèbre de Lie. Ces représentations peuvent elles-mêmes être caractérisées au moyen des *opérateurs de Casimir*, au nombre de deux pour le groupe de Poincaré. Les opérateurs de Casimir commutent avec les dix générateurs P_μ et $M_{\mu\nu}$ de l'algèbre de Poincaré. Ils ont donc une valeur propre unique pour chaque représentation irréductible. De plus, ces valeurs propres sont des invariants (sous translations, rotations et “*boosts*” de Lorentz): ce sont des nombres quantiques intrinsèques (indépendants d'un choix de coordonnées) qui suffisent à caractériser la représentation du champ. Ces deux nombres quantiques sont la *masse* et le *spin* du champ (ou, plus généralement, de la représentation).

L'opérateur de Casimir dont la valeur propre est la masse est facile à construire. Comme le carré d'un quadrivecteur est un invariant, on choisit simplement l'opérateur

$$P^2 = P^\mu P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu.\tag{1.72}$$

L'annulation du commutateur $[P^2, P^\mu]$ est triviale alors que

$$[P^2, M^{\mu\nu}] = \eta_{\rho\sigma} P^\rho [P^\sigma, M^{\mu\nu}] + \eta_{\rho\sigma} [P^\rho, M^{\mu\nu}] P^\sigma = 0,$$

en utilisant l'algèbre de Poincaré (1.42). La valeur propre de P^2 pour chaque champ irréductible sera

$$m^2 c^2,$$

m étant la *masse* du champ. Du point de vue du groupe de Poincaré, la valeur propre $m^2 c^2$ peut être un nombre réel quelconque, positif, nul ou négatif. Seules les valeurs propres nulles et positives sont observées dans la nature⁵.

Le deuxième opérateur de Casimir est plus subtil. Il est nécessaire d'introduire quatre opérateurs formant le vecteur de Pauli-Lubanski:

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}, \quad (1.73)$$

où $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est complètement antisymétrique avec

$$\epsilon_{0123} = 1.$$

Les opérateurs W_μ ont les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [W_\mu, M_{\nu\rho}] &= -i(\eta_{\mu\nu} W_\rho - \eta_{\mu\rho} W_\nu) \\ [W_\mu, W_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho W^\sigma. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Ces relations se démontrent en utilisant les règles de commutation (1.37) et (1.42) de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. La deuxième indique que W_μ se transforme comme un quadrivecteur. Puisque le carré d'un quadrivecteur est un invariant, on définit ensuite

$$W^2 = W^\mu W_\mu. \quad (1.75)$$

Il suit des relations (1.74) que

$$[W^2, P^\mu] = [W^2, P^2] = [W^2, M^{\mu\nu}] = 0.$$

En prenant garde aux commutateurs (et à l'aide des identités de l'appendice A), l'opérateur W^2 s'écrit aussi

$$W^2 = -\frac{1}{2} (P^2 M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + 2P^\nu P_\rho M^{\rho\sigma} M_{\sigma\nu}). \quad (1.76)$$

Le second opérateur de Casimir de l'algèbre de Poincaré est donc W^2 . A nouveau, chaque champ portant une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré sera caractérisé par un nombre quantique correspondant à la valeur propre de W^2 dans cette représentation.

Finalement, l'algèbre de Poincaré admet six opérateurs mutuellement commutants: P^μ , P^2 et W^2 . On peut les diagonaliser simultanément et leur associer leurs valeurs propres respectives, p^μ , $p^2 = p^\mu p_\mu$ et λ_{W^2} .

Pour comprendre la signification du nombre quantique associé à W^2 , considérons un champ massif, c'est-à-dire une représentation irréductible pour laquelle la valeur propre de P^2 est $p^2 = m^2$, $m^2 > 0$, avec $c = 1$. Par transformation de Lorentz, on peut toujours choisir des coordonnées dans lesquelles

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (1.77)$$

⁵Une valeur négative signalerait un *tachyon*.

(référentiel “au repos”). Ce choix est invariant sous rotation d'espace, c'est-à-dire sous l'action des opérateurs M^{12} , M^{23} et M^{31} . On a alors

$$\begin{aligned} W^i &= -\frac{1}{2}m\epsilon^{0ijk}M_{jk}, & i, j, k = 1, 2, 3, \\ W^0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Explicitement, $W^1 = mM^{23}$, $W^2 = mM^{31}$, $W^3 = mM^{12}$ (puisque $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$). De plus, en utilisant la dernière équation (1.74), il vient

$$\begin{aligned} [W^i, W^j] &= i\epsilon^{ijk}mW^k \\ [W^i, W^0] &= 0. \end{aligned} \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

où $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = \epsilon^{jki}$, $\epsilon^{123} = 1$ et on somme sur les indices répétés. En posant

$$M^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M_{jk} = \frac{1}{m}W^i, \quad (1.79)$$

il vient

$$[M^i, M^j] = i\epsilon^{ijk}M^k, \quad (1.80)$$

qui montre que les opérateurs $\vec{M} = (M^1, M^2, M^3)$ forment un moment cinétique quantique. Ensuite, comme

$$W^2 = W^\mu W_\mu = W^0 W^0 - \sum_{i=1}^3 W^i W^i = -m^2 \vec{M}^2 \quad (1.81)$$

dans les coordonnées choisies, et que les valeurs propres d'un moment cinétique quantique sont ($\hbar = 1$)

$$s(s+1),$$

s étant un nombre entier ou demi-entier positif ou nul, on obtient finalement que la valeur propre de W^2 est

$$-m^2 s(s+1) = \lambda_{W^2} \quad (m \neq 0) \quad s : \text{spin}. \quad (1.82)$$

Ce résultat est vrai dans n'importe quelles coordonnées puisque W^2 est un invariant du groupe de Poincaré. Par contre, la relation entre les opérateurs de moment cinétique M^i et les générateurs de Poincaré P^μ et $M^{\mu\nu}$ dépend des coordonnées.

Nous allons ensuite montrer que s est le *spin intrinsèque* du champ. Pour cela, il suffit de considérer la forme générale des opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ agissant sur les champs, qui est donnée par (1.41) et (1.54). Avec $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ et $P_\mu = -i\partial_\mu$, il est clair que

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu S_{\rho\sigma}.$$

La partie orbitale $L_{\mu\nu}$ ne contribue pas au vecteur de Pauli-Lubanski. Seule la partie $S_{\mu\nu}$, qui est de ce fait qualifiée de partie de spin, intervient. Le nombre s dans la valeur propre de W^2 est donc entièrement déterminé par le choix de

la transformation du champ (1.43), c'est le spin (intrinsèque) du champ. Et les trois opérateurs de moment cinétique apparaissant dans l'expression (1.81) sont en fait les opérateurs de spin

$$\vec{S} = (S^1, S^2, S^3) = (S^{23}, S^{31}, S^{12}). \quad (1.83)$$

Le cas de masse nulle demande quelques précautions. Lorsque $p^2 = 0$, on peut choisir des coordonnées telles que

$$p^\mu = (E, E, 0, 0). \quad (1.84)$$

Il suit de sa définition (1.73) que le vecteur W^μ est orthogonal à P^μ : $W^\mu P_\mu = 0$. Avec le choix ci-dessus, on peut alors poser

$$W_\mu = \lambda p_\mu + (0, 0, W_2, W_3), \quad W^\mu W_\mu = -(W_2)^2 - (W_3)^2.$$

Comme de plus (1.84) conduit à $[W_2, W_3] = 0$, il n'y a pas de contrainte quantifiant la valeur propre de $W^\mu W_\mu$ ("spin continu"). Les états de masse nulle observés dans la nature sont cependant ceux pour lesquels W_2 et W_3 s'annulent et

$$W_\mu = \lambda p_\mu, \quad W^2 = 0 \quad (m = 0). \quad (1.85)$$

La constante de proportionnalité est en général (lorsque W^μ agit sur plusieurs champs) une matrice dont les valeurs propres donnent l'hélicité des composantes du champ. Dans le référentiel (1.84), il vient

$$W^0 = W^1 = ES^{23}, \quad (1.86)$$

et les valeurs de l'hélicité sont simplement les valeurs propres de S^{23} . Notez que S^{23} est l'opérateur qui génère les rotations dans le plan (x^2, x^3) , qui laissent le vecteur (1.84) invariant. Dans un référentiel quelconque, l'hélicité est donnée par la projection du spin \vec{S} le long de l'impulsion \vec{p} , c'est-à-dire par $\vec{p} \cdot \vec{S} |\vec{p}|^{-1}$. Dans le référentiel choisi, $\vec{p} = (E, 0, 0)$ et l'hélicité se réduit à $S^1 = S^{23}$.

Nous pouvons maintenant justifier les assertions sur les spins des champs scalaire, vectoriel et spinoriel faites dans la section précédente. Pour le champ scalaire, $S_{\mu\nu} = 0$, $W^\mu = 0$, et le spin est donc nul (de même que l'hélicité si la masse est nulle). Pour le champ vectoriel, les opérateurs $S_{\mu\nu}$ sont donnés par (1.56). En insérant $S_{\mu\nu}$ dans l'expression (1.76), on obtient la matrice

$$(W^2)^\alpha_\beta = -2[p^2 \delta^\alpha_\beta - p^\alpha p_\beta] \quad (1.87)$$

qui agit sur les composantes du champ vectoriel $V^\beta(x)$. Notez que p est un vecteur propre de W^2 avec valeur propre nulle: $(W^2)^\alpha_\beta p^\beta = 0$. Dans le cas massif, $P^2 = p^2 = m^2 > 0$, les valeurs propres de W^2 s'obtiennent de la manière suivante. Définissons

$$V^\mu(x) = V_T^\mu(x) + V_L^\mu(x),$$

$$V_T^\mu(x) = V^\mu - \frac{p^\nu V_\nu}{p^2} p^\mu,$$

$$V_L^\mu(x) = \frac{p^\nu V_\nu}{p^2} p^\mu.$$

La partie transverse $V_T^\beta(x)$ est orthogonale au vecteur p^μ , $V_T^\mu(x)p_\mu = 0$, alors que la partie longitudinale $V_L^\mu(x)$ est parallèle à l'impulsion p^μ . Il vient

$$\begin{aligned}(W^2)^\alpha{}_\beta V_T^\beta(x) &= -2m^2 V_T^\alpha(x), \\ (W^2)^\alpha{}_\beta V_L^\beta(x) &= 0.\end{aligned}\tag{1.88}$$

On obtient donc que les quatre composantes du champ vectoriel $V_\mu(x)$ correspondent aux trois composantes $V_T^\mu(x)$ transverses d'un champ de spin 1 ajoutées à un champ de spin nul, la partie longitudinale $V_L^\mu(x)$.

Pour un champ vectoriel sans masse, les valeurs propres de l'opérateur S^{23} [donné dans (1.56)] sont 0, 0, 1, -1: ce sont respectivement les hélicités des composantes $V^0, V^1, V^2 + iV^3$ et $V^2 - iV^3$ du champ vectoriel, dans le référentiel où $p^\mu = (E, E, 0, 0)$.

Finalement, un spineur de Dirac se transforme avec

$$S_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Avec $P_\mu = -i\partial_\mu$, ces générateurs permettent de calculer l'opérateur W^2 , qui prend la forme d'une matrice (4×4) agissant sur les composantes du spineur. A partir de la forme (1.76), on obtient facilement

$$W^2 = -\frac{3}{4}m^2,\tag{1.89}$$

qui indique que le champ spinoriel a bien spin 1/2.

Si on utilise la représentation des matrices γ^μ (1.59) dans les coordonnées définies par (1.77), les opérateurs de spin (1.79) deviennent simplement

$$S^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix}.$$

Chaque spineur de Weyl ψ_L et ψ_R correspond donc à un spin 1/2. Cette dernière égalité indique aussi que les valeurs de l'hélicité pour chaque spineur de Weyl de masse nulle sont +1/2 et -1/2.

1.3.6 Le tenseur énergie-impulsion

Nous avons vu que le théorème de Noether implique l'existence d'un courant conservé pour chaque symétrie interne continue de l'action. Ce théorème s'applique également aux symétries agissant sur l'espace-temps, et donc à l'invariance sous les transformations de Poincaré. La forme des courants conservés est cependant différente de celle donnée en (1.21), pour les symétries internes.

Dans cette section, nous allons construire les courants conservés associés à l'invariance sous translations. Ces courants jouent un rôle particulier puisqu'ils expriment la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Ils fournissent également l'hamiltonien de la théorie de champs, qui sera utile par la suite.

L'invariance sous les transformations de Lorentz mène également à des lois de conservation que nous ne discuterons pas en détail ici. Alors que l'invariance sous rotations d'espace conduit simplement à la conservation du moment cinétique total des champs, les transformations de Lorentz qui mélangent temps et espace sont nécessairement plus subtiles: on ne peut discuter leurs lois de conservation en termes de charges indépendantes du temps et l'interprétation de ces lois perd son caractère intuitif. Elles correspondent à une généralisation à l'espace-temps quadri-dimensionnel de la conservation du moment cinétique total des champs, qui est une conséquence de l'invariance sous les rotations spatiales.

Considérons la quantité

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial_\nu \phi^i - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}). \quad (1.90)$$

Nous devons supposer que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de x : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$. Elle est donc invariante (de forme) sous les translations. Nous voulons calculer la divergence $\partial^\mu T_{\mu\nu}$. Tout d'abord,

$$\partial^\mu [\eta_{\mu\nu} \mathcal{L}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi^i} \partial_\nu \partial_\rho \phi^i.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial_\nu \phi^i \right] &= \left(\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \right) \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial^\mu \partial_\nu \phi^i \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial^\mu \partial_\nu \phi^i = \partial_\nu \mathcal{L}, \end{aligned}$$

en utilisant les équations du mouvement. Il vient donc

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.91)$$

et le *tenseur énergie-impulsion* $T_{\mu\nu}$ est conservé⁶.

Nous avons donc construit quatre (les valeurs de $\nu = 0, 1, 2, 3$) courants conservés. Nous allons maintenant montrer que les $T_{\mu\nu}$ sont les courants de Noether associés aux translations d'espace-temps

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu,$$

⁶Il s'agit du tenseur énergie-impulsion *canonique*, en général non symétrique (voir l'exercice 1.1).

qui forment un groupe de transformations continues à quatre paramètres. Nous nous placerons dans un cadre légèrement plus général en considérant des transformations infinitésimales des coordonnées de la forme

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.92)$$

où δx^μ peut dépendre de la position x . La transformation des champs associée est

$$\phi^i(x) \longrightarrow \phi^{i'}(x') = \phi^{i'}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i, \quad (1.93)$$

et donc

$$\delta \phi^i \equiv \phi^{i'}(x') - \phi^i(x) = \phi^{i'}(x) - \phi^i(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i. \quad (1.94)$$

La variation fonctionnelle du champ sera notée

$$\delta_0 \phi^i = \phi^{i'}(x) - \phi^i(x), \quad \delta \phi^i = \delta_0 \phi^i + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i. \quad (1.95)$$

En regardant la densité lagrangienne comme un champ local, sa variation sera donc

$$\delta \mathcal{L} = \delta_0 \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \quad (1.96)$$

où

$$\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta_0 \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \partial_\mu \phi^i.$$

Ensuite,

$$\delta_0 \partial_\mu \phi^i = \partial_\mu \delta_0 \phi^i,$$

si bien que

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \right] \delta_0 \phi^i. \quad (1.97)$$

Le dernier terme s'annule pour des champs vérifiant les équations du mouvement. Finalement:

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right]. \quad (1.98)$$

Il s'agit ensuite de considérer la variation de l'action. La transformation infinitésimale de d^4x est

$$d^4x \longrightarrow d^4x' = J d^4x$$

où le jacobien J est

$$J = \left| \det \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) \right| = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu,$$

au premier ordre. Donc

$$\delta d^4x = d^4x \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (1.99)$$

La variation de l'action s'écrit finalement

$$\delta S = \int (\mathcal{L} \delta d^4x + d^4x \delta \mathcal{L}) = \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right], \quad (1.100)$$

avec $\delta_0\phi^i = \delta\phi^i - \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i$. L'invariance de l'action, $\delta S = 0$, implique donc à nouveau la conservation d'un ou plusieurs courants, selon le nombre de paramètres apparaissant dans la transformation de symétrie.

Notez que le résultat (1.100) généralise le théorème de Noether pour les symétries internes discuté dans la section précédente. Celui-ci s'obtient avec $\delta x^\mu = 0$ pour une symétrie interne.

Une translation est caractérisée par l'absence de transformation du champ:

$$\text{Translation : } \delta x^\mu = a^\mu, \quad \delta\phi^i = 0 \quad \delta_0\phi^i = -a^\mu \partial_\mu \phi^i.$$

Il vient alors

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \partial^\nu \phi^i \right] a_\nu = 0 \quad (1.101)$$

pour des valeurs arbitraires des paramètres a^μ . Le tenseur énergie-impulsion

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \partial^\nu \phi^i \quad (1.102)$$

est donc conservé, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Les quantités

$$P^\mu = \int_V d^3x T^{0\mu}, \quad (1.103)$$

qui sont les charges associées aux courants $T^{\mu\nu}$, sont indépendantes du temps si le volume spatial V est choisi de façon telle que le tenseur énergie-impulsion s'annule à son bord. Le quadrivecteur P^μ donne l'*impulsion totale* du système de champs contenu dans le volume V . Sa composante temporelle P^0 est l'énergie totale du système (c'est l'*hamiltonien* du système de champs) et

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^i} \partial^0 \phi^i - \mathcal{L}$$

est la densité d'énergie des champs.

1.4 Equations du champ libre

Dans la section précédente, nous avons construit des champs locaux de spin 0, 1/2 et 1. Il s'agit maintenant d'obtenir les équations décrivant leur propagation libre.

La propagation libre est évidemment contrôlée par l'impulsion du champ, p^μ , qui est obtenue en agissant sur le champ avec l'opérateur différentiel $P_\mu = -i\partial_\mu$. Les équations du mouvement sont donc des équations différentielles. La quantité de mouvement n'est pas arbitraire. La condition de "couche de masse",

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2,$$

où m est la masse, doit être satisfaite. Pour un champ libre, on s'attend à obtenir des solutions sous la forme de superpositions d'ondes planes, de la forme $e^{\pm i p x}$.

Deux équations différentes sont utiles à la description des bosons et des fermions. Nous allons les discuter successivement. Elles peuvent être obtenues comme équations d'Euler-Lagrange des actions de Klein-Gordon et de Dirac.

1.4.1 Le champ de Klein-Gordon

L'équation relativiste la plus simple décrivant un champ libre est l'équation de Klein-Gordon. Son contenu physique est simplement d'imposer que le champ soit une superposition linéaire d'ondes planes (un paquet d'ondes) dont la propagation est conforme à la condition de couche de masse de la cinématique relativiste, $p^2 = m^2$. L'opérateur $P^2 - m^2$ étant représenté par

$$P^2 - m^2 = -(\square + m^2), \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla},$$

l'équation de Klein-Gordon est simplement

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (1.104)$$

Comme l'opérateur $\square + m^2$ est invariant de Lorentz, on peut en principe l'appliquer à un champ de spin arbitraire. Elle s'applique en particulier au champ scalaire, sans spin, $\phi(x)$.

L'onde plane

$$e^{\pm i k x} = e^{\pm i(k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

est une fonction propre de l'opérateur d'alembertien \square avec valeur propre $-k^2$. Elle sera donc une solution de l'équation de Klein-Gordon pour autant que le quadrivecteur d'onde k^μ satisfasse la condition $k^2 = m^2$. La solution de l'équation (1.104) peut alors s'écrire

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k c(k) e^{i k x} \delta(k^2 - m^2). \quad (1.105)$$

La fonction $c(k)$ détermine la composition en ondes planes du paquet d'ondes scalaire $\phi(x)$. Le caractère scalaire du champ ϕ est respecté par cette expression qui est manifestement invariante relativiste. La distribution de Dirac permet d'intégrer sur k^0 . En définissant

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

il vient

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta((k^0)^2 - \omega_k^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k)], \quad (1.106)$$

et

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[c(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + c(-\omega_k, \vec{k}) e^{-i(\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right].$$

Avec le changement de variable $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ dans le second terme et en définissant

$$a(\vec{k}) = c(-\omega_k, -\vec{k}), \quad b(\vec{k}) = c(\omega_k, \vec{k}),$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + b(\vec{k}) e^{+ikx} \right] \quad k = (\omega_k, \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\vec{k}) e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + b(\vec{k}) e^{+i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right], \end{aligned} \quad (1.107)$$

qui est la forme de la solution que nous utiliserons par la suite. Il est à noter que malgré les apparences, la mesure d'intégration $\frac{d^3k}{2\omega_k}$ est invariante de Lorentz: c'est une conséquence des égalités (1.106). Pour différencier les deux termes, on utilise couramment la terminologie suivante:

- onde d'énergie positive: e^{-ikx} , avec $k = (\omega_k, \vec{k})$. Comme l'onde est de la forme $e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$, le vecteur \vec{k} est l'impulsion spatiale de l'onde.
- onde d'énergie négative: e^{+ikx} , avec $k = (\omega_k, \vec{k})$ également. L'onde est de la forme $e^{-i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})}$ et on dira que $-\vec{k}$ est l'impulsion (spatiale) de l'onde d'énergie négative $-\omega_k$.

L'intérêt et la signification de cette convention peu intuitive apparaîtront lors de la quantification du champ.

La solution générale de l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire réel est donnée par l'équation (1.107), avec $b(\vec{k}) = a(\vec{k})^*$.

L'équation de Klein-Gordon pour le champ complexe $\phi(x)$ est l'équation d'Euler-Lagrange de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.108)$$

Cette densité lagrangienne possède une symétrie: elle est invariante sous les rotations de la phase du champ complexe

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x)' = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (1.109)$$

α étant un nombre réel. Comme il s'agit d'une symétrie globale continue, le théorème de Noether implique l'existence d'un courant conservé et d'une charge indépendante du temps. Le courant s'écrit

$$\alpha j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \delta \phi^* = (\partial^\mu \phi^*) i \alpha \phi - (\partial^\mu \phi) i \alpha \phi^*.$$

En introduisant la notation

$$\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi = \phi^* (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^*) \phi, \quad (1.110)$$

on obtient

$$j_\mu = -i \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi. \quad (1.111)$$

Il est facile de vérifier que si ϕ vérifie l'équation de Klein-Gordon, alors le courant est conservé, $\partial^\mu j_\mu = 0$. Il faut remarquer que la composante temporelle, $j^0 = -i[\phi^*(\partial_0 \phi) - (\partial_0 \phi^*)\phi]$ n'est pas une quantité positive. On ne peut donc pas identifier j^0 à une densité de probabilité comme on le fait en mécanique quantique basée sur l'équation de Schrödinger. L'équation de Klein-Gordon n'est donc pas appropriée à la description quantique d'une particule ayant $\phi(x)$ comme fonction d'onde.

Il faudra de plus prendre garde à l'existence d'énergies négatives. La solution de l'équation de Klein-Gordon ne possède apparemment pas d'état fondamental d'énergie minimum. Ce problème recevra une solution en termes d'antiparticules dans le cadre de la théorie quantique des champs.

Le champ complexe $\phi(x)$ peut se décomposer en deux champs réels:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)].$$

La densité lagrangienne (1.108) est alors la somme de deux densités lagrangiennes du champ scalaire réel

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{1}{2}m^2 \varphi_i^2 \right]. \quad (1.112)$$

La transformation de symétrie (1.109) agit comme une rotation du vecteur bi-dimensionnel de composantes φ_1 et φ_2 :

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

et le courant conservé (1.111) s'obtient aussi par

$$\alpha j_\mu = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_i} \delta \varphi_i.$$

1.4.2 Le champ de Dirac

L'équation de Dirac est une équation différentielle linéaire, du premier ordre en ∂_μ , pour le champ spinoriel $\psi(x)$. On pourra donc écrire en général

$$(iA^\mu \partial_\mu - B)\psi(x) = 0, \quad (1.113)$$

où A^μ et B sont des matrices (4×4) . Ces matrices sont déterminées en demandant que le spineur ψ soit aussi solution de

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation de Klein-Gordon qui impose la condition de couche de masse $p^2 = m^2$. L'équation (1.113) implique

$$(iA^\nu \partial_\nu + B)(iA^\mu \partial_\mu - B)\psi(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{2} \{A^\mu, A^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + i[A^\mu, B] \partial_\mu + B^2 \right) \psi(x) = 0,$$

où $\{A^\mu, A^\nu\} = A^\mu A^\nu + A^\nu A^\mu = \{A^\nu, A^\mu\}$ est l'*anticommutateur* de A^μ et A^ν . Demander que ψ vérifie l'équation de Klein-Gordon $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$ revient à demander

$$\{A^\mu, A^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I, \quad [A^\mu, B] = 0, \quad B^2 = m^2 I \quad (1.114)$$

(I est la matrice unité). On peut donc choisir $B = mI$, alors que les matrices A^μ , qui vérifient l'algèbre de Dirac (1.58), peuvent être remplacées par les matrices γ^μ . L'équation de Dirac est donc

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (1.115)$$

Elle peut être reformulée en utilisant les spineurs de Weyl à deux composantes définis par (1.69):

$$\psi = \psi_L + \psi_R,$$

$$P_L \psi = \psi_L, \quad P_R \psi = \psi_R,$$

les projecteurs étant donnés par (1.66). Comme

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R, \quad P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L,$$

il vient

$$\begin{aligned} P_L (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0, \\ P_R (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Les deux spineurs à deux composantes satisfont des équations différentielles couplées sauf si la masse est nulle. Un champ spinoriel de masse nulle pourra donc en principe être décrit par un seul spineur de Weyl. Un champ spinoriel massif utilisera un spineur de Dirac entier⁷.

Covariance relativiste

L'équation de Dirac satisfait au principe de relativité restreinte. Nous connaissons les transformations de Lorentz du champ spinoriel [éq. (1.62)] et des dérivées partielles ∂_μ [éq. (1.28)]:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\longrightarrow \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \end{aligned}$$

⁷Ou un "spineur de Majorana" (sect. 4.1.2) qui a deux composantes.

La forme de la matrice $S(\Lambda)$ a été construite dans la section précédente. Pour une transformation infinitésimale

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu{}^\nu &= \delta_\mu^\nu + \omega_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu}, \\ S(\Lambda) &= I + \delta S(\Lambda), \quad \delta S(\Lambda) = \frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].\end{aligned}\tag{1.117}$$

Sans utiliser immédiatement ce résultat, supposons que $\psi(x)$ est solution de l'équation de Dirac dans les coordonnées x^μ . On cherche alors à construire $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ qui vérifie l'équation de Dirac dans les coordonnées transformées x' comme conséquence de $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$. On observe que

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) \\ &= S(\Lambda) \{iS(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu S(\Lambda)\partial_\nu - m\} \psi(x).\end{aligned}$$

Si on exige que

$$\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu = S(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)^{-1},\tag{1.118}$$

il vient

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = S(\Lambda)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0,\tag{1.119}$$

et le champ transformé $\psi'(x')$ est solution de l'équation de Dirac dans les nouvelles coordonnées $x^{\mu'}$. La condition de covariance relativiste de l'équation de Dirac est donc l'équation (1.118), qui peut être vue comme une équation pour $S(\Lambda)$. Pour une transformation infinitésimale, elle devient

$$\gamma_\mu\omega^{\mu\nu} = [\delta S(\Lambda), \gamma^\nu].$$

La forme (1.117) est solution de cette dernière équation. Nous avons donc montré que l'équation de Dirac est covariante relativiste si $\psi(x)$ est un spineur de Lorentz.

Densité lagrangienne, courant de Noether

L'équation de Dirac découle de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi,\tag{1.120}$$

où ψ et $\bar{\psi}$, qui est un spineur "ligne", $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4)$, doivent être considérés comme des champs indépendants. En fait, nous allons fixer la relation entre ψ et $\bar{\psi}$ en exigeant que leurs deux équations du mouvement soient l'équation de Dirac. La variation de $\bar{\psi}$ donne simplement

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

qui est l'équation de Dirac. Celle de ψ conduit à

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\psi} &= -m\bar{\psi} - \partial^\mu\bar{\psi}i\gamma_\mu \\ &= [\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\gamma^0\bar{\psi}^\dagger]^\dagger,\end{aligned}$$

qui est, à un facteur γ^0 près, le conjugué hermitique de l'équation de Dirac si on définit le spineur *conjugué de Dirac*

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.121)$$

L'équation de Dirac pour le spineur conjugué est donc

$$i(\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu + m \bar{\psi} = 0. \quad (1.122)$$

Nous avons vu [équ. (1.119)] que $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ acquiert un facteur $S(\Lambda)$ sous transformation de Lorentz. On peut également définir $\bar{\psi}$ en exigeant l'invariance de Lorentz de quantités telles que $\bar{\psi}\psi$ ou \mathcal{L} . Il faut donc que

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} S(\Lambda)^{-1},$$

ou, pour une transformation infinitésimale,

$$\delta \bar{\psi} = -\bar{\psi} \delta S(\Lambda) = -\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.123)$$

Comme $S(\Lambda)$ n'est pas unitaire, $S(\Lambda)^{-1} \neq S(\Lambda)^\dagger$ et on ne peut pas identifier ψ^\dagger à $\bar{\psi}$:

$$\delta \psi^\dagger = \frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \psi^\dagger [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger = -\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^0 \neq -\psi^\dagger \delta S(\Lambda).$$

Par contre, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ vérifie bien la transformation (1.123).

Il est peut-être utile de mentionner que la densité lagrangienne (1.120) peut être remplacée par

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi,$$

qui traite plus symétriquement ψ et $\bar{\psi}$. \mathcal{L}' diffère de \mathcal{L} [équ. (1.120)] par une dérivée $\partial_\mu(\dots)$ qui ne contribue pas aux équations du mouvement.

En termes des spineurs de Weyl,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\bar{\psi}_L \psi_R - m\bar{\psi}_R \psi_L, \quad (1.124)$$

où

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} P_R, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L. \quad (1.125)$$

Ainsi que mentionné lors de la discussion de l'équation de Dirac, le couplage entre ψ_L et ψ_R est uniquement dû au terme de masse.

La densité lagrangienne de Dirac est invariante sous les transformations globales continues [symétrie U(1)]

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha},$$

et le théorème de Noether implique que le courant

$$-\alpha j_{Dirac}^\mu = i\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \psi = i\alpha \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_\mu \psi} \psi - i\alpha \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = -\alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.126)$$

est conservé: $\partial_\mu j_{Dirac}^\mu = 0$. La composante temporelle du courant,

$$j_{Dirac}^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \quad (1.127)$$

est clairement positive, contrairement au courant obtenu dans le cas du champ de Klein-Gordon complexe.

Le cas de masse nulle correspond à une extension de la symétrie au groupe $U(1) \times U(1)$, et donc à l'apparition d'un second courant conservé. Les transformations indépendantes de ψ_L et ψ_R ,

$$\begin{aligned} \psi_L &\longrightarrow e^{i\alpha} \psi_L, & \bar{\psi}_L &\longrightarrow \bar{\psi}_L e^{-i\alpha}, \\ \psi_R &\longrightarrow e^{i\beta} \psi_R, & \bar{\psi}_R &\longrightarrow \bar{\psi}_R e^{-i\beta}, \end{aligned} \quad (1.128)$$

qui sont appelées *transformations chirales*, sont des invariances et leurs courants conservés (courants chiraux) sont

$$\begin{aligned} -\alpha J_L^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_L} \delta \psi_L = -\alpha \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = -\frac{1}{2} \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi, \\ -\beta J_R^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_R} \delta \psi_R = -\beta \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = -\frac{1}{2} \beta \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi. \end{aligned}$$

Autrement dit, le *courant axial*

$$j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, \quad (1.129)$$

qui, du fait de l'équation de Dirac, vérifie

$$\partial_\mu j_A^\mu = 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi,$$

est conservé lorsque la masse m est nulle.

Solutions de l'équation de Dirac

Comme dans le cas du champ de Klein-Gordon, nous allons considérer des ondes planes de la forme:

$$\begin{aligned} \psi_k^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), \\ \psi_k^{(-)}(x) &= e^{+ikx} v(k), \end{aligned} \quad (1.130)$$

avec $k^0 = \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ puisque les solutions de l'équation de Dirac vérifient la condition de couche de masse $k^2 = m^2$. Les spineurs $u(k)$ et $v(k)$ ont quatre composantes. Comme

$$i\partial_\mu (e^{\mp ikx}) = \pm k_\mu e^{\mp ikx},$$

l'équation de Dirac devient

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= (\not{k} - m) u(k) = 0, \\(\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= (\not{k} + m) v(k) = 0,\end{aligned}\tag{1.131}$$

en utilisant le “*Feynman slash*”

$$\not{k} = \gamma^\mu k_\mu.$$

Comme pour le champ de Klein-Gordon, nous dirons qu'une solution de la forme $\psi_k^{(+)}(x)$ a une énergie positive et $\psi_k^{(-)}(x)$ une énergie négative.

Pour construire les solutions des équations (1.131), il est utile d'introduire les projecteurs sur les énergies positive et négative. On remarque d'abord que si $k^2 = m^2$,

$$\begin{aligned}\not{k} \not{k} &= \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = k^2 I_4, \\(\not{k} + m)(\not{k} - m) &= (\not{k} - m)(\not{k} + m) = (k^2 - m^2) I_4 = 0, \\(\not{k} + m)^2 &= (k^2 + m^2) I_4 + 2m \not{k} = 2m(\not{k} + m), \\(\not{k} - m)^2 &= (k^2 + m^2) I_4 - 2m \not{k} = 2m(-\not{k} + m).\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\Lambda_+ = \frac{\not{k} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = -\frac{\not{k} - m}{2m}, \tag{1.132}$$

forment un ensemble complet de projecteurs orthogonaux:

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = I_4. \tag{1.133}$$

Comme $\text{Tr}[\Lambda_+] = \text{Tr}[\Lambda_-] = 2$, chaque projecteur a deux valeurs propres +1 et deux valeurs propres 0. A partir d'un spineur constant w , des solutions aux équations (1.131) peuvent alors simplement être obtenues en posant

$$u(k) = \Lambda_+ w, \quad v(k) = \Lambda_- w.$$

Λ_+ et Λ_- projettent respectivement sur les solutions d'énergie positive $u(k)$ et négative $v(k)$, d'où leur nom. Comme chaque projecteur sélectionne deux des quatre composantes de w , on trouvera deux solutions indépendantes de type $u(k)$ ainsi que deux de type $v(k)$.

Pour être plus concret, choisissons des matrices γ^μ avec γ^0 diagonale:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.134}$$

Pour une particule massive au repos, $k^\mu = (m, \vec{0})$, $\not{k} = m\gamma^0$ et

$$\Lambda_+ = \frac{\not{k} + m}{2m} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = -\frac{\not{k} - m}{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Un ensemble de solutions dans ce référentiel est alors donné par

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = u^{(\alpha)}, \quad v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.135)$$

avec

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.136)$$

Pour k quelconque, les spineurs

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} (\not{k} + m) u^{(\alpha)}, \\ v^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} (-\not{k} + m) v^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (1.137)$$

sont des solutions des équations de Dirac (1.131) qui se réduisent à $u^{(\alpha)}$ et $v^{(\alpha)}$ lorsque $k = (\omega_k, \vec{k}) = (m, \vec{0})$. On a alors:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} \bar{u}^{(\alpha)} (\not{k} + m), \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} \bar{v}^{(\alpha)} (-\not{k} + m), \end{aligned} \quad (1.138)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= (1 \ 0 \ 0 \ 0), & \bar{u}^{(2)} &= (0 \ 1 \ 0 \ 0), \\ \bar{v}^{(1)} &= (0 \ 0 \ -1 \ 0), & \bar{v}^{(2)} &= (0 \ 0 \ 0 \ -1). \end{aligned}$$

Les normalisations choisies sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= \delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= -\delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) = 0. \end{aligned} \quad (1.139)$$

De plus,

$$u^{(\alpha)\dagger}(k) u^{(\beta)}(k) = v^{(\alpha)\dagger}(k) v^{(\beta)}(k) = \frac{\omega_k}{m} \delta^{\alpha\beta}. \quad (1.140)$$

Finalement, nous écrirons l'expansion en ondes planes d'une solution de l'équation de Dirac sous la forme

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b_{\alpha}(k) \psi_k^{(+)(\alpha)} + d_{\alpha}^*(k) \psi_k^{(-)(\alpha)} \right], \quad (1.141)$$

avec

$$\psi_k^{(+)(\alpha)}(x) = e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k), \quad \psi_k^{(-)(\alpha)}(x) = e^{+ikx} v^{(\alpha)}(k). \quad (1.142)$$

Les nombres $b_{\alpha}(k)$ et $d_{\alpha}^*(k)$ sont les coefficients de la superposition linéaire d'ondes planes, et le facteur m est conventionnel.

La signification de l'indice α peut être élucidée en se souvenant que les opérateurs de spin sont⁸

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Les spineurs $u^{(\alpha)}$ et $v^{(\alpha)}$ sont clairement des états propres de S_3 , qui est diagonal, avec les valeurs propres $+1/2$ lorsque $\alpha = 1$, et $-1/2$ lorsque $\alpha = 2$. Comme $\pm \not{k} + m$ commute avec S_3 lorsque $\vec{k} = (0, 0, |\vec{k}|)$, cette remarque reste vraie dans ce cas pour $u^{(\alpha)}(k)$ et $v^{(\alpha)}(k)$. L'indice α distingue donc les valeurs propres de S_3 pour les solutions d'énergie positive ou négative.

Deux remarques devraient encore être faites avant de clore cette section. Le choix (1.134) des matrices de Dirac est commode lorsqu'on s'intéresse au référentiel au repos d'une particule massive. Il est cependant souvent plus utile d'adopter un choix avec γ_5 diagonal, comme par exemple dans (1.59). Dans ce cas, les solutions sont obtenues en remplaçant (1.136) par

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.143)$$

Les remarques ci-dessus concernant la signification de α restent évidemment valables.

Ensuite, on vérifie facilement que

$$\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)} \bar{u}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(I + \gamma^0), \quad \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)} \bar{v}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2}(I - \gamma^0)$$

(quel que soit le choix de γ^0). Avec l'identité

$$(\not{k} \pm m)\gamma^0(\not{k} \pm m) = 2\omega_k(\not{k} \pm m),$$

qui est vérifiée lorsque $k^2 = m^2$, il vient

$$\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \Lambda_+, \quad \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) = -\Lambda_-. \quad (1.144)$$

Ces derniers résultats seront utiles lorsqu'il s'agira de sommer sur les orientations du spin d'une particule (ou antiparticule) de spin $1/2$.

Hélicité, masse nulle et chiralité

L'hélicité est la projection du spin dans la direction de l'impulsion \vec{p} . Elle est mesurée par l'opérateur

⁸Voir le paragraphe 1.3.4.

$$|\vec{p}|^{-1} \vec{p} \cdot \vec{S}, \quad \vec{S} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}), \quad \sigma^{kl} = \frac{i}{4} [\gamma^k, \gamma^l],$$

dont les valeurs propres sur un spineur sont $+1/2$ (hélicité droite) et $-1/2$ (hélicité gauche).

Pour un spineur de masse nulle, l'équation de Dirac devient $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0$, c'est-à-dire, pour une onde plane d'énergie positive $\psi(x) = e^{-ipx} u(p)$,

$$\not{p} u(p) = 0, \quad p^0 = |\vec{p}|.$$

La relation

$$\gamma_5 \not{p} = \gamma_5 p^0 + 2\vec{p} \cdot \vec{S} \quad (1.145)$$

implique

$$2|\vec{p}|^{-1} \vec{p} \cdot \vec{S} u(p) = -\gamma_5 u(p). \quad (1.146)$$

Un état propre de la chiralité ($\gamma_5 u(p) = \pm 1$) est donc un état propre de l'hélicité de valeur propre $\mp 1/2$ pour une solution d'énergie positive, et $\pm 1/2$ si l'énergie est négative, $p^0 = -|\vec{p}|$. Sur les spineurs de Weyl de masse nulle⁹

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|} \psi_L = -\frac{1}{2} \psi_L, \quad \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|} \psi_R = \frac{1}{2} \psi_R. \quad (1.147)$$

Ces résultats s'appliquent également dans la limite ultrarelativiste $|\vec{p}| \gg m$, $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sim |\vec{p}|$ qui est souvent valable en physique des hautes énergies.

Les projecteurs Λ_\pm distinguent les solutions d'énergie positive et négative. Il existe de même un projecteur qui sélectionne la solution pour laquelle le spin est dans une direction donnée quelconque. On définit cette direction au moyen d'un quadrivecteur n de genre espace, avec $n^2 = -1$. Alors

$$P(n) = \frac{1}{2} (I + \gamma_5 \not{n}) \quad (1.148)$$

est un projecteur, $P(n)^2 = P(n)$ puisque $\not{n}\not{n} = -I$. Un ensemble complet est obtenu en lui ajoutant le projecteur $P(-n) = I - P(n)$. Si par exemple, pour une particule massive, on se place dans le référentiel du centre de masse et on choisit $n = (0, 0, 0, 1)$,

$$P(n) = \frac{1}{2} (I - 2\gamma^0 S^3)$$

sélectionne les solutions ayant la même valeur propre de γ^0 et de $2S^3$, c'est-à-dire celle d'énergie positive avec le spin "en haut" (spineur $u^{(1)}$) et celle d'énergie négative avec le spin "en bas" (spineur $v^{(2)}$).

Pour un spineur de masse non nulle, un choix particulier de n conduit au projecteur sur les états propres de l'hélicité¹⁰:

$$n_p = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p^0}{m|\vec{p}|} \vec{p} \right).$$

⁹C'est l'origine de la notation $L, R = \text{left, right}$.

¹⁰Dans la limite non relativiste, $|\vec{p}| \ll m$, $|\vec{p}| \rightarrow 0$, $n_p \rightarrow (0, |\vec{p}|^{-1} \vec{p})$.

Comme $p n_p = 0$, $\not{n}_p \not{p} = -\not{p} \not{n}_p$ et

$$[P(n_p), \Lambda_{\pm}] = 0.$$

On montre avec l'aide de l'identité (1.145) que

$$P(n_p) \Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(I \mp 2 \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \Lambda_{\pm} \left(I \mp 2 \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right). \quad (1.149)$$

Pour une solution d'énergie positive (particule), $P(n_k) \Lambda_{\pm}$ sélectionne l'état d'hélicité gauche. Pour une solution d'énergie négative (antiparticule), $P(n_k) \Lambda_{\pm}$ retient l'hélicité droite.

Il est parfois utile d'utiliser une base des solutions de l'équation de Dirac construite à partir d'états propres de l'hélicité, au lieu des spineurs $u^{(\alpha)}$ et $v^{(\alpha)}$ qui sont des états propres de S^3 . Dans la représentation (1.134) des matrices de Dirac,

$$\vec{S} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Définissons alors

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(\alpha)}(p) &= [2m(m + \omega_p)]^{-1/2} (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{v}^{(\alpha)}(p) &= -[2m(m + \omega_p)]^{-1/2} (\not{p} - m) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.150)$$

où les quatre spineurs à deux composantes $\varphi^{(\alpha)}$ et $\chi^{(\alpha)}$ sont solutions de

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^{-1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi^{(1)} &= \varphi^{(1)}, & |\vec{p}|^{-1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi^{(2)} &= -\varphi^{(2)} \\ |\vec{p}|^{-1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi^{(1)} &= \chi^{(1)}, & |\vec{p}|^{-1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi^{(2)} &= -\chi^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Clairement,

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^{-1} (\vec{S} \cdot \vec{p}) \hat{u}^{(\alpha)}(p) &= \lambda_{\alpha} \hat{u}^{(\alpha)}(p), \\ |\vec{p}|^{-1} (\vec{S} \cdot \vec{p}) \hat{v}^{(\alpha)}(p) &= \lambda_{\alpha} \hat{v}^{(\alpha)}(p), \end{aligned} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Dans la représentation chirale (1.59) des matrices de Dirac, les quatre solutions (1.150) deviennent

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(\alpha)}(p) &= [2m(m + \omega_p)]^{-1/2} (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ \varphi^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \\ \hat{v}^{(\alpha)}(p) &= -[2m(m + \omega_p)]^{-1/2} (\not{p} - m) \begin{pmatrix} -\chi^{(\alpha)} \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.152)$$

1.5 Invariance de jauge et théories de jauge

Le concept d'*invariance de jauge* est à la base de la construction du Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques des particules élémentaires. Il détermine, conjointement avec les restrictions imposées par la cohérence de la théorie quantique des champs, la forme possible des interactions des quarks et des leptons, impose l'existence de bosons de jauge (photon, gluons, W^\pm et Z^0) et la structure de leurs interactions.

Pour formaliser le principe d'invariance de jauge, nous allons considérer tout d'abord une théorie classique décrivant un ensemble de champs scalaires réels $\varphi^i(x)$ et de spineurs $\psi^I(x)$ sans masses ni interactions. La densité lagrangienne ne comprendra donc que les termes de propagation dépendant de dérivées des champs. De plus, comme les composantes gauches (ψ_L^I) et droites (ψ_R^I) se transforment séparément sous le groupe de Lorentz, elles sont indépendantes dans la théorie libre et sans masse. La densité lagrangienne est :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^i)(\partial^\mu \varphi^i) + i\bar{\psi}_{LI}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^I + i\bar{\psi}_{RJ}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R^J \quad (1.153)$$

(on somme sur les indices répétés i , I et J). Les nombres de champs scalaires, de fermions gauches et droits seront respectivement notés N_s , N_L et N_R . En principe, N_L et N_R peuvent être différents.

La densité lagrangienne possède automatiquement une invariance globale étendue. Premièrement, le terme cinétique des champs scalaires est invariant sous les transformations

$$\varphi^i \longrightarrow \varphi^{i'} = O_j^i \varphi^j, \quad \sum_{k=1}^{N_s} O_i^k O_j^k = \delta_{ij}. \quad (1.154)$$

Matriciellement, $O^T O = I$, O est une matrice réelle orthogonale et le groupe de symétrie est le groupe des rotations $O(N_s)$. Ensuite, les transformations globales

$$\begin{aligned} \psi_L^I &\longrightarrow \psi_L^{I'} = U_J^I \psi_L^J, & (U^\dagger)_J^I U_K^J &= \delta_K^I, \\ \psi_R^I &\longrightarrow \psi_R^{I'} = V_J^I \psi_R^J, & (V^\dagger)_J^I V_K^J &= \delta_K^I, \end{aligned} \quad (1.155)$$

laissent la densité lagrangienne (1.153) inchangée. Il s'agit des transformations unitaires du groupe $U(N_L) \times U(N_R)$: c'est la *symétrie chirale* des théories de fermions sans masse, déjà rencontrée dans la section 1.4.2. La théorie (1.153) possède donc une symétrie globale $O(N_s) \times U(N_L) \times U(N_R)$.

Pour discuter l'invariance de jauge, nous allons imposer qu'un sous-groupe de cette symétrie globale soit une symétrie locale de la densité lagrangienne. Plus

précisément, nous allons demander que les transformations

$$\begin{aligned}\varphi^j &\longrightarrow \varphi^{j'} = \left(e^{i\alpha^A T_s^A}\right)_k^j \varphi^k, \\ \psi_L^J &\longrightarrow \psi_L^{J'} = \left(e^{i\alpha^A T_\ell^A}\right)_K^J \psi_L^K, \\ \psi_R^J &\longrightarrow \psi_R^{J'} = \left(e^{i\alpha^A T_r^A}\right)_K^J \psi_R^K,\end{aligned}\tag{1.156}$$

avec des paramètres α^A dépendant du point de l'espace-temps,

$$\alpha^A \longrightarrow \alpha^A(x),$$

soient des *symétries de jauge* de la théorie. Chaque élément du groupe de transformations (*groupe de jauge*) apparaissant dans (1.156) a été écrit comme l'exponentielle d'un élément de l'algèbre de Lie du groupe de jauge. Nous avons vu dans la section 1.2 que les matrices T_s^A forment un ensemble de générateurs de cette algèbre de Lie. C'est également le cas des matrices T_ℓ^A et T_r^A . Les règles de commutation

$$[T_\#^A, T_\#^B] = if^{ABC} T_\#^C, \quad \# = s, \ell \text{ ou } r,\tag{1.157}$$

sont donc vérifiées. Ces générateurs sont en général différents pour les scalaires [les matrices T_s^A] et les spineurs [les matrices T_ℓ^A et T_r^A]: les champs φ^i , ψ_L^I et ψ_R^I se transforment en général selon des représentations différentes de l'algèbre. En particulier, puisque les φ^i sont des champs réels, les matrices T_s^A seront purement imaginaires. Nous ne considérerons que des groupes de symétrie compacts pour lesquels les générateurs sont des matrices hermitiques ($T_{s,\ell,r}^A = (T_{s,\ell,r}^A)^\dagger$) et les constantes de structure f^{ABC} sont des nombres réels qui peuvent être choisis complètement antisymétriques: $f^{ABC} = f^{CAB} = -f^{BAC}$.

Champs de jauge et dérivées covariantes

Comme

$$\begin{aligned}(\partial_\mu \varphi^j)' &= \left(e^{i\alpha^A T_s^A}\right)_k^j \partial_\mu \varphi^k + \left[\partial_\mu \left(e^{i\alpha^A T_s^A}\right)_k^j\right] \varphi^k, \\ (\partial_\mu \psi_L^J)' &= \left(e^{i\alpha^A T_\ell^A}\right)_K^J \partial_\mu \psi_L^K + \left[\partial_\mu \left(e^{i\alpha^A T_\ell^A}\right)_K^J\right] \psi_L^K, \\ (\partial_\mu \psi_R^J)' &= \left(e^{i\alpha^A T_r^A}\right)_K^J \partial_\mu \psi_R^K + \left[\partial_\mu \left(e^{i\alpha^A T_r^A}\right)_K^J\right] \psi_R^K,\end{aligned}\tag{1.158}$$

la densité lagrangienne (1.153) n'est pas invariante de jauge. Pour restaurer la symétrie, il est nécessaire de compenser les deuxièmes termes. Ceci requiert l'introduction d'un *champ de jauge*¹¹ $A_\mu^A(x)$ pour chaque transformation indépendante et donc pour chaque générateur (d'où l'indice A). Les transformations

¹¹Aussi appelé *potentiel de jauge*, par analogie avec le quadrivecteur des potentiels dans la théorie de Maxwell.

de ces champs de jauge sont ensuite déterminées en imposant que les dérivées covariantes

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi^j &= \partial_\mu \varphi^j - i A_\mu^A (T_s^A)^j_k \varphi^k, \\ D_\mu \psi_L^J &= \partial_\mu \psi_L^J - i A_\mu^A (T_\ell^A)^J_K \psi_L^K, \\ D_\mu \psi_R^J &= \partial_\mu \psi_R^J - i A_\mu^A (T_r^A)^J_K \psi_R^K, \end{aligned} \quad (1.159)$$

aient les mêmes transformations que les champs eux-mêmes (une somme sur les valeurs de l'indice A est sous-entendue). On veut donc obtenir:

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi^j &\longrightarrow D_\mu \varphi^{j'} = \left(e^{i\alpha^A T_s^A} \right)_k^j D_\mu \varphi^k, \\ D_\mu \psi_L^J &\longrightarrow D_\mu \psi_L^{J'} = \left(e^{i\alpha^A T_\ell^A} \right)_K^J D_\mu \psi_L^K, \\ D_\mu \psi_R^J &\longrightarrow D_\mu \psi_R^{J'} = \left(e^{i\alpha^A T_r^A} \right)_K^J D_\mu \psi_R^K. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Dans un premier temps, il est plus facile de se restreindre à des transformations infinitésimales, c'est-à-dire, pour les champs scalaires,

$$\begin{aligned} \delta \varphi^i &= i\alpha^A (T_s^A)^i_j \varphi^j, \\ \delta \partial_\mu \varphi^i &= i\alpha^A (T_s^A)^i_j (\partial_\mu \varphi^j) + i(\partial_\mu \alpha^A) (T_s^A)^i_j \varphi^j, \\ \delta D_\mu \varphi^i &= i\alpha^A (T_s^A)^i_j D_\mu \varphi^j \\ &\quad + i\varphi^j \{ (\partial_\mu \alpha^A) (T_s^A)^i_j - (\delta A_\mu^A) (T_s^A)^i_j - i A_\mu^A \alpha^B ([T^A, T^B])^i_j \}. \end{aligned}$$

Pour que la dernière ligne s'annule, il faut que

$$\sum_A (\delta A_\mu^A) T_s^A = \sum_A \left(\partial_\mu \alpha^A T_s^A + A_\mu^A \sum_{B,C} f^{ABC} \alpha^B T_s^C \right).$$

Les générateurs peuvent toujours être normalisés par la condition

$$\text{Tr}(T_s^A T_s^B) = \tau(s) \delta^{AB}, \quad (1.161)$$

où le nombre réel $\tau(s)$ dépend de la représentation. Il suit alors que

$$\begin{aligned} A_\mu^A &\longrightarrow A_\mu^A + \delta A_\mu^A, \\ \delta A_\mu^A &= \partial_\mu \alpha^A + \sum_{B,C} f^{ABC} A_\mu^B \alpha^C. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Cette expression est bien entendu indépendante du choix de la représentation des scalaires. On l'aurait également obtenue en considérant les transformations des fermions gauches ou droits.

Le même argument appliqué au cas général des transformations (1.156) conduit à

$$\sum_A A_\mu^{A'} T_\#^A = e^{i\alpha^B T_\#^B} [i\partial_\mu + \sum_A A_\mu^A T_\#^A] e^{-i\alpha^C T_\#^C}, \quad \# = s, \ell \text{ ou } r, \quad (1.163)$$

en notation matricielle (et avec une somme sur B et C). A nouveau, l'équation (1.163) détermine la même transformation des champs de jauge pour $T^A = T_s^A$, T_ℓ^A ou T_r^A . Elle se ramène à (1.162) lorsque les paramètres α^A sont infinitésimaux et au premier ordre en α^A .

D'après (1.160), les termes cinétiques de la densité lagrangienne deviennent invariants de jauge lorsque les dérivées ∂_μ sont remplacées par les dérivées covariantes D_μ appropriées. On aura donc

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(D_\mu \varphi^i)(D^\mu \varphi^i) + \bar{\psi}_{LJ} i \gamma^\mu D_\mu \psi_L^J + \bar{\psi}_{RJ} i \gamma^\mu D_\mu \psi_R^J, \quad (1.164)$$

qui est invariant de jauge et contient des interactions scalaires–champs de jauge et fermions–champs de jauge. Cette théorie ne contient cependant pas de termes assurant la propagation des champs de jauge: elle ne dépend pas des dérivées $\partial_\mu A_\nu^A$. La prochaine étape est donc la construction de la densité lagrangienne cinétique des champs de jauge, qui doit être invariante de jauge.

Courbure de jauge, termes de propagation

Pour construire les termes cinétiques des champs de jauge, on introduit la *courbure de jauge*¹²

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + \sum_{BC} f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C. \quad (1.165)$$

Comme les f^{ABC} sont antisymétriques, $F_{\mu\nu}^A = -F_{\nu\mu}^A$. Sa transformation de jauge (infinitésimale) est

$$F_{\mu\nu}^{A'} = F_{\mu\nu}^A + \sum_{B,C} f^{ABC} F_{\mu\nu}^B \alpha^C. \quad (1.166)$$

La vérification de ce résultat utilise l'*identité de Jacobi*

$$\sum_B (f^{ACB} f^{BDE} + f^{ADB} f^{BEC} + f^{AEB} f^{BCD}) = 0,$$

qui découle de l'identité matricielle triviale

$$[T^A, [T^B, T^C]] + [T^B, [T^C, T^A]] + [T^C, [T^A, T^B]] = 0.$$

L'expression

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (1.167)$$

qui est invariante de jauge¹³, est la densité lagrangienne de *Yang-Mills* qui décrit la propagation et les interactions des champs de jauge.

Constantes de couplage

Il reste à faire apparaître les constantes de couplage qui caractériseront la force des interactions impliquant les champs de jauge contenues dans (1.167) et (1.164).

¹²Aussi appelée *tenseur du champ de jauge*, par opposition au potentiel de jauge A_μ^A . En anglais: *field strength*.

¹³Puisque $F_{\mu\nu}^A \delta F^{\mu\nu A} = f^{ABC} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} \alpha^C = 0$.

En général, le groupe de jauge G a la structure $G = G_1 \times G_2 \times \dots = \prod G_a$. Chaque G_a est soit un groupe simple, soit $U(1)$. Par exemple, le groupe de jauge du Modèle standard est $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Deux générateurs T^A et T^B pris dans deux facteurs G_a différents commutent et $f^{ABC} = 0$, pour tout autre générateur T^C . Supposons qu'on effectue le remplacement

$$A_\mu^A \longrightarrow g^A A_\mu^A, \quad (g^A : \text{des nombres réels non nuls})$$

dans les dérivées covariantes et les courbures de jauge. Et aussi

$$F_{\mu\nu}^A \longrightarrow g^A \left[\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + \sum_{BC} (g^A)^{-1} g^B g^C f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \right] \equiv g^A F_{\mu\nu}^A.$$

Pour que la transformation de jauge (1.166) reste valable, il faut que

$$g^A = g^B = g^C \iff f^{ABC} \neq 0. \quad (1.168)$$

Ceci implique que l'invariance de jauge ne permet qu'une *constante de couplage* pour chaque facteur du groupe de jauge G_a . Le nombre de paramètres arbitraires contenus dans (1.167) et (1.164) est donc égal au nombre de facteurs formant le groupe de jauge.

Densité lagrangienne “cinétique”

En résumé, pour un groupe de jauge $G = \prod_a G_a$, la partie de la densité lagrangienne invariante de jauge qui dépend des dérivées des champs est donnée par l'expression

$$\mathcal{L}_{cin.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^i)(D^\mu \varphi^i) + \bar{\psi}_{LJ} i \gamma^\mu D_\mu \psi_L^J + \bar{\psi}_{RJ} i \gamma^\mu D_\mu \psi_R^J. \quad (1.169)$$

Elle contient l'ensemble des termes invariants qui décrivent la propagation des champs de spins 0, 1/2 et 1 (ou plus précisément d'hélicités 0, $\pm 1/2$ et ± 1), ainsi que les interactions des champs de jauge. Les dérivées covariantes sont

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi^j &= \partial_\mu \varphi^j - i \sum_A g^A A_\mu^A (T_s^A)^j_k \varphi^k, \\ D_\mu \psi_L^J &= \partial_\mu \psi_L^J - i \sum_A g^A A_\mu^A (T_\ell^A)^J_K \psi_L^K, \\ D_\mu \psi_R^J &= \partial_\mu \psi_R^J - i \sum_A g^A A_\mu^A (T_r^A)^J_K \psi_R^K, \end{aligned} \quad (1.170)$$

et les courbures de jauge s'écrivent

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g^A \sum_{BC} f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C. \quad (1.171)$$

Les constantes de couplage g^A vérifient (1.168). Finalement, les transformations infinitésimales sont données par (1.156) et par:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^A &= (g^A)^{-1} \partial_\mu \alpha^A + \sum_{B,C} f^{ABC} A_\mu^B \alpha^C, \\ \delta F_{\mu\nu}^A &= \sum_{B,C} f^{ABC} F_{\mu\nu}^B \alpha^C. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Les constantes de couplage de jauge sont des nombres sans dimension. En effet, comme l'action $S = \int d^4x \mathcal{L}$ est sans dimension, \mathcal{L} a dimension 4 (en unité d'énergie) et il suit de la forme de $\mathcal{L}_{cin.}$ que les dimensions (dites canoniques) des champs φ^i , A_μ^A et $\psi_{L,R}^I$ sont respectivement 1, 1 et 3/2.

Les règles de cohérence de la théorie quantique des champs permettent encore d'ajouter divers termes sans dérivées spatio-temporelles et ne faisant pas intervenir les champs de jauge A_μ^A . Nous nous bornerons ici à les énumérer¹⁴, en observant simplement qu'ils ne doivent pas contenir de paramètre de dimension négative en énergie: de telles contributions sont en effet fatales à la cohérence de la théorie quantique et sont qualifiées de non renormalisables. Les termes permis se divisent en deux catégories. Premièrement, les termes quadratiques dans les champs jouent le rôle de termes de masse. Ils contribuent aux équations d'Euler-Lagrange par des termes linéaires et entrent dans la description des champs libres. Deuxièmement, les termes cubiques ou quartiques dans les champs dont les contributions aux équations du mouvement sont non linéaires et qui décrivent les interactions entre champs scalaires et spinoriels.

L'invariance de jauge doit également être respectée par les termes sans dérivées. Elle impose des contraintes qui s'écrivent plus simplement en se restreignant aux transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} \delta\varphi^j &= i\alpha^A (T_s^A)^j_k \varphi^k, \\ \delta\psi_L^J &= i\alpha^A (T_\ell^A)^J_K \psi_L^K, & \delta\bar{\psi}_{LJ} &= -i\alpha^A \bar{\psi}_{LK} (T_\ell^A)^K_J, \\ \delta\psi_R^J &= i\alpha^A (T_r^A)^J_K \psi_R^K, & \delta\bar{\psi}_{RJ} &= -i\alpha^A \bar{\psi}_{RK} (T_r^A)^K_J. \end{aligned} \quad (1.173)$$

Termes de masse

Ces contributions qui sont quadratiques dans les champs scalaires et spinoriels s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \mathcal{L}_{m.s.} + \mathcal{L}_{m.f.}, \\ \mathcal{L}_{m.s.} &= -\frac{1}{2}(m^2)^{ij} \varphi^i \varphi^j, \\ \mathcal{L}_{m.f.} &= -(M)_J^I \bar{\psi}_{LI} \psi_R^J - (M^\dagger)^I_J \bar{\psi}_{RI} \psi_L^J. \end{aligned} \quad (1.174)$$

La matrice du carré des masses des scalaires est réelle et symétrique. L'invariance sous les transformations (1.173) donne les contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} (m^2)^{kj} (T_s^A)^i_k + (m^2)^{ik} (T_s^A)^j_k &= 0, \\ (M)_J^I (T_r^A)^J_K - (T_\ell^A)^I_J (M)_K^J &= 0, \end{aligned} \quad (1.175)$$

ou, en notation matricielle

$$T_s^A(m^2) + (m^2)T_s^{A\tau} = [T_s^A, m^2] = 0, \quad MT_r^A - T_\ell^A M = 0, \quad (1.176)$$

¹⁴Une discussion partielle de ce point se trouve dans la section 6.6.

puisque T_s^A est antisymétrique et imaginaire. Les masses des champs scalaires, dont les carrés sont les valeurs propres de la matrice m^2 , sont donc identiques dans chaque représentation irréductible du groupe de jauge. Pour les fermions, une masse non nulle requiert la présence d'un multiplet de fermions de chiralités gauche *et* droite, avec les mêmes transformations de jauge, c'est-à-dire $T_r^A = T_\ell^A$: un fermion massif exige un spineur de Dirac $\psi = \psi_L + \psi_R$, qui est compatible avec une invariance de jauge uniquement si les transformations de ψ_L et ψ_R coïncident. L'exception serait le spineur de Majorana¹⁵ à deux composantes dans une représentation réelle du groupe de jauge (les générateurs sont alors des matrices imaginaires et antisymétriques).

Un terme de masse pour les champs de jauge, qui serait de la forme

$$-\frac{1}{2}\mathcal{M}_{AB}^2 A_\mu^A A^{\mu B},$$

est clairement interdit par l'invariance sous les transformations de jauge (1.172). A chaque symétrie de jauge correspond un boson de jauge de masse nulle.

Interactions de Yukawa

L'interaction fermions-scalaires la plus générale est de la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Yuk.} &= \lambda_{iJ}^K \varphi^i (\bar{\psi}_{LK} \psi_R^J) + (\lambda_{iJ}^K)^* \varphi^i (\bar{\psi}_{RJ} \psi_L^K) \\ &= \frac{1}{2} A_{iJ}^K \varphi^i (\bar{\psi}_K \psi^J) + \frac{1}{2} B_{iJ}^K \varphi^i (\bar{\psi}_K \gamma_5 \psi^J),\end{aligned}\tag{1.177}$$

avec $A_{iJ}^K = \lambda_{iJ}^K + (\lambda_{iK}^J)^*$ et $B_{iJ}^K = -\lambda_{iJ}^K + (\lambda_{iK}^J)^*$. Comme $\bar{\psi}_K \psi^J$ est hermitique, les couplages "scalaires" sont hermitiques :

$$(A_{iJ}^K)^* = A_{iK}^J.$$

Par contre, les couplages "pseudoscalaires" vérifient

$$(B_{iJ}^K)^* = -B_{iK}^J,$$

une conséquence de l'antihermiticité de $\bar{\psi}_K \gamma_5 \psi^J$. L'invariance de jauge exige

$$\lambda_{jJ}^K (T_s^A)_i^j - \lambda_{iJ}^M (T_\ell^A)_M^K + \lambda_{iM}^K (T_r^A)_J^M = 0.\tag{1.178}$$

La dimension canonique de $\varphi^i (\bar{\psi}_{LK} \psi_R^J)$ étant quatre, les couplages de Yukawa λ_{iJ}^K sont des nombres sans dimension.

Interactions scalaires

Les termes cubiques et quartiques d'interactions scalaires sont

$$\Delta_s(\varphi^i) = -\frac{1}{3}\alpha_{ijk}\varphi^i\varphi^j\varphi^k - \frac{1}{4}\beta_{ijkl}\varphi^i\varphi^j\varphi^k\varphi^l.\tag{1.179}$$

¹⁵Paragraphe 4.1.2.

Les constantes de couplage α_{ijk} et β_{ijkl} sont réelles et symétriques sous les permutations de leurs indices. Elles sont contraintes par l'invariance de jauge, qui exige

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Delta_s(\varphi^j) \delta \varphi^i = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Delta_s(\varphi^j) (T_s^A)^j_k \varphi^k = 0$$

pour toutes les valeurs des champs et de A , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{ljk}(T_s^A)^l_i + \alpha_{ilk}(T_s^A)^l_j + \alpha_{ijl}(T_s^A)^l_k, \\ 0 &= \beta_{mjkl}(T_s^A)^m_i + \beta_{imkl}(T_s^A)^m_j + \beta_{ijml}(T_s^A)^m_k + \beta_{ijkml}(T_s^A)^m_l, \end{aligned} \quad (1.180)$$

pour toutes les valeurs de i, j, k, l . Alors que les constantes de couplages quartiques β_{ijkl} sont sans dimension, les α_{ijk} ont les unités d'une masse (énergie).

On rassemble souvent l'ensemble des termes scalaires sans dérivées dans le potentiel scalaire

$$V(\varphi^i) = \frac{1}{2}(m^2)_{ij} \varphi^i \varphi^j + \frac{1}{3} \alpha_{ijk} \varphi^i \varphi^j \varphi^k + \frac{1}{4} \beta_{ijkl} \varphi^i \varphi^j \varphi^k \varphi^l. \quad (1.181)$$

La densité lagrangienne complète

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la densité lagrangienne la plus générale décrivant des champs scalaires (spin 0), spinoriels (spin 1/2) et vectoriels (spin 1) admissible dans le cadre de la théorie quantique des champs. C'est la somme des termes cinétiques (1.169), de masse (1.174), de Yukawa (1.177) et des interactions scalaires (1.179):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin.} + \mathcal{L}_{m.f.} + \mathcal{L}_{Yuk.} - V(\varphi^i). \quad (1.182)$$

Cette théorie est entièrement définie lorsqu'on a choisi:

1. Le groupe de jauge (le groupe de symétrie locale), qui détermine les constantes de structure f^{ABC} et le nombre de constantes de couplage g^A .
2. Les champs scalaires φ^i et leurs transformations de jauge (c'est-à-dire les générateurs T_s^A).
3. Les champs spinoriels ψ_L^I et ψ_R^J et leurs transformations de jauge (les générateurs T_ℓ^A et T_r^A).

Nous verrons¹⁶ que cette théorie peut posséder un mécanisme (*de Higgs*) qui génère des champs de jauge massifs. Il requiert la présence de champs scalaires et le prix à payer est la *brisure spontanée* des symétries de jauge associées aux champs de jauge qui deviennent massifs. C'est ce mécanisme qui est utilisé pour

¹⁶Chap. 7.

produire les masses des bosons de jauge W^\pm et Z^0 dans le Modèle standard des interactions fortes et électrofaibles.

L'électrodynamique d'un fermion chargé

Nous terminons ce chapitre par l'exemple de théorie de jauge le plus simple, qui décrit un fermion de charge électrique Qe et le champ du photon.

Le groupe de jauge, $U(1)$, n'a qu'un paramètre. Il est donc nécessairement abélien. L'unique générateur de son algèbre de Lie sera noté Q . La théorie contient un fermion de Dirac, avec la transformation de jauge

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)Q}\psi(x).$$

Q est un nombre réel arbitraire (une “matrice” 1×1 hermitique). Comme $\psi = \psi_L + \psi_R$, ceci revient à choisir une transformation identique pour ψ_L et ψ_R . La courbure de jauge associée à l'unique champ de jauge A_μ est simplement

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

puisque les constantes de structure f^{ABC} sont nulles. Les transformations de jauge infinitésimales deviennent

$$\delta A_\mu = e^{-1}\partial_\mu \alpha(x), \quad \delta F_{\mu\nu} = 0,$$

où e est la constante de couplage de jauge. D'après la discussion générale qui précède, la densité lagrangienne invariante de jauge la plus générale est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieQA_\mu\psi, \quad (1.183)$$

où m est la masse du champ spinoriel. Cette théorie, dont la quantification sera discutée par la suite, est à la base de l'électrodynamique quantique. Elle contient une interaction fermion–photon de la forme

$$eQA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Il est à noter que le champ de jauge A_μ , qui sera le champ du photon, est couplé au courant de Noether conservé $j_\mu = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. La quantification de la théorie donnera une interprétation en termes de courant et charge électriques aux quantités j_μ et $\int d^3x j_0$.

Références

Le formalisme lagrangien et le théorème de Noether sont décrits dans la plupart des ouvrages de théorie classique ou quantique des champs; par exemple: Soper [12], chapitres 2, 3 et 9. Goldstein [13], chapitre 12. Ou Itzykson et Zuber [1], sections 1.1 et 1.2.

Pour une description plus élaborée des symétries d'espace-temps (groupe de Poincaré) et de la classification des champs:

Weinberg [2], chapitre 2 ou Ramond [3] chapitre 1. Ou encore l'article de Moussa et Stora [14].

Sur l'équation de Dirac:

Itzykson et Zuber [1], chapitre 2; Bjorken et Drell [4], chapitres 1 à 5.

Pour les théories invariantes de jauge:

Weinberg [2], chapitre 15; Huang [5], chapitres 3 et 4.

Pour les aspects de la théorie des groupes utiles ici, voir entre autres les ouvrages de Gilmore [42], Georgi [43], O'Raiheartaigh [44], Gourdin [45] ou Cornwell [46].

Exercices

- 1.1** Montrer que l'invariance de Lorentz de la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ implique pour des champs solutions de l'équation d'Euler-Lagrange la relation

$$T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = i\partial^\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\rho \phi^i} (S_{\mu\nu})^i{}_j \phi^j \right),$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur-énergie impulsion canonique (1.90). Utiliser les variations de Lorentz $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$, $\delta \phi^j = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^j{}_k \phi^k$, et donc $\delta \partial_\rho \phi^j = \omega_{\rho\mu} \partial^\mu \phi^j - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^j{}_k \partial_\rho \phi^k$ (sect. 1.3). Ainsi, $T_{\mu\nu}$ n'est en général pas symétrique pour des champs autres que scalaires.

Supposons qu'on dispose d'un tenseur $\theta_{\rho\mu\nu} = -\theta_{\mu\rho\nu}$. Montrer que le nouveau tenseur

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\rho \theta_{\rho\mu\nu}$$

est encore conservé, $\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = 0$, avec la même énergie-impulsion $P_\mu = \int d^3x T_{0\mu}$.

En utilisant la relation d'invariance de Lorentz ci-dessus, construire un tenseur $\theta_{\rho\mu\nu} = -\theta_{\mu\rho\nu}$ pour lequel le nouveau tenseur $\tilde{T}_{\mu\nu}$ est symétrique.

Indication: la relation d'invariance contient le tenseur $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\rho \phi^i} (S_{\mu\nu})^i{}_j \phi^j$, antisymétrique en μ et ν . L'utiliser pour former une combinaison antisymétrique en ρ et μ et un tenseur $\theta_{\rho\mu\nu}$ qui conduise à $\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\nu\mu}$.

Le résultat est le *tenseur de Belinfante*, conservé et symétrique:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \partial^\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\rho \phi^i} (S_{\mu\nu})^i_j \phi^j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} (S_{\rho\nu})^i_j \phi^j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\nu \phi^i} (S_{\rho\mu})^i_j \phi^j \right].$$

Il décrit le courant et la densité d'énergie-impulsion (non gravitationnelle) en relativité générale: c'est la source du champ gravitationnel.

- 1.2** On considère la théorie de Maxwell couplée à un courant externe conservé j_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu. \quad \partial^\mu j_\mu = 0.$$

Le courant externe détruit l'invariance sous translation et $T_{\mu\nu}$ n'est pas conservé si $j_\mu \neq 0$. Calculer le tenseur énergie-impulsion canonique $T_{\mu\nu}$, le tenseur de Belinfante $\tilde{T}_{\mu\nu}$, la divergence $\partial^\mu T_{\mu\nu}$ et vérifier que $\partial^\mu T_{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}$. (L'identité de Bianchi banale $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$ peut être utile.)

En l'absence de courant externe, $\tilde{T}_{\mu\nu}$ est invariant de jauge, symétrique, conservé et de trace nulle: $\eta^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ (vérifier). Il décrit le courant et la densité d'énergie-impulsion du champ électromagnétique.

- 1.3** Montrer que si deux densités lagrangiennes $\mathcal{L}(\varphi^i, \partial_\mu \varphi^i)$ et $\mathcal{L}'(\varphi^i, \partial_\mu \varphi^i)$ diffèrent par une dérivée (elles décrivent donc la même physique), leurs tenseurs énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ et $T'_{\mu\nu}$ diffèrent par une quantité conservée, $\partial^\mu (T_{\mu\nu} - T'_{\mu\nu}) = 0$.

Indication: puisque \mathcal{L} est fonction de φ^i et $\partial_\mu \varphi^i$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu(\varphi^i)$.

- 1.4** L'algèbre de Lie du groupe $SO(4)$ est

$$[M^{ij}, M^{kl}] = i(\delta^{ik} M^{jl} + \delta^{jl} M^{ik} - \delta^{il} M^{jk} - \delta^{jk} M^{il}),$$

avec six générateurs $M^{ij} = -M^{ji}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Démontrer que cette algèbre est aussi celle de $SU(2) \times SU(2)$,

$$[T_L^a, T_L^b] = i\epsilon^{abc} T_L^c, \quad [T_R^a, T_R^b] = i\epsilon^{abc} T_R^c, \quad [T_L^a, T_R^b] = 0,$$

avec $a, b, c = 1, 2, 3$ et $\epsilon^{abc} = \epsilon^{cab} = -\epsilon^{bac}$, $\epsilon^{123} = 1$. Il s'agit d'exprimer les six $T_{L,R}^a$ comme combinaisons linéaires des M^{ij} .

Indication: les trois générateurs M^{ab} , $a, b = 1, 2, 3$ engendrent une sous-algèbre $SO(3)$ de $SO(4)$. D'autre part, l'algèbre de Lie de $SU(2)$, $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c$, est identique à celle de $SO(3)$ avec $T^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} M^{bc}$ (vérifier). Identifier ensuite ces trois générateurs avec la somme $\tilde{T}^a = \frac{1}{2} (T_L^a + T_R^a)$.

L'algèbre de Lie de Lorentz (1.37) est celle de $SO(1, 3)$. Montrer son équivalence avec l'algèbre de Lie du groupe des transformations linéaires complexes de déterminant unité, en dimension deux, $SL(2, C)$, en s'inspirant de la relation entre $SO(4)$ et $SU(2) \times SU(2)$.

- 1.5** Calculer la transformation des spineurs de Weyl sous $SL(2, C)$, montrer qu'ils se transforment de manière identique sous les rotations d'espace $SO(3)$, mais selon des représentations conjuguées de $SL(2, C)$. Utiliser la base de Weyl des matrices de Dirac et l'exercice précédent.
- 1.6** Vérifier quelques identités de l'appendice A, ou toutes les identités.

Chapitre 2

Quantification canonique du champ libre

2.1 Principe

En mécanique classique, un système de particules est décrit au moyen de quantités telles que la position \vec{q} et l'impulsion \vec{p} de chaque particule. L'état du système au temps t est caractérisé par $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$, c'est un point de l'*espace de phase* de chaque particule. La description quantique du même système peut être construite en remplaçant les quantités classiques¹ par des opérateurs qui agissent dans un espace des états approprié. Les opérateurs \vec{Q} et \vec{P} sont construits en imposant les relations de commutation canoniques:

$$\begin{aligned} [Q_i, P_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ [Q_i, Q_j] &= [P_i, P_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ces relations sont valables à n'importe quel temps².

Dans la formulation lagrangienne de la mécanique classique, la dynamique d'une particule est définie au moyen de la fonction de Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i)$. Les quantités p_i , qui sont les impulsions conjuguées aux composantes du vecteur position q_i , sont alors données par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.2}$$

Cette équation permet en principe d'exprimer les vitesses en fonction de p_i et q_i , et de construire l'hamiltonien de la théorie $H(p_i, q_i)$.

La généralisation à un système de champs dans l'espace-temps, et à une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ est immédiate. Les impulsions conjuguées aux

¹Ainsi que les grandeurs physiques sans équivalent classique telles que le spin d'une particule.

²Dans le point de vue de Schrödinger, les opérateurs ne dépendent pas du temps.

champs $\phi^i(x)$ sont

$$\Pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^i}. \quad (2.3)$$

La quantification des champs revient à considérer les champs ϕ^i et Π^i comme des opérateurs (agissant dans un espace qui sera précisé plus loin) et à imposer les *relations de commutation canoniques*

$$\begin{aligned} [\phi^i(\vec{x}, t), \Pi^j(\vec{y}, t)] &= i\hbar \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi^i(\vec{x}, t), \phi^j(\vec{y}, t)] &= 0 = [\Pi^i(\vec{x}, t), \Pi^j(\vec{y}, t)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ces règles sont valables à tous les temps. Comme à chaque temps les champs $\phi^i(x)$ contiennent un nombre infini de degrés de liberté (le champ en chaque point \vec{x}), la généralisation de (2.1) fait intervenir une distribution de Dirac, $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$. Un fait important est que les relations de commutation canoniques relient des opérateurs en des points de l'espace \vec{x} et \vec{y} différents, mais à un temps unique. Nous verrons que cette formulation est compatible avec la relativité restreinte et la covariance de Lorentz malgré l'asymétrie du traitement du temps et de l'espace. Cette asymétrie est d'ailleurs une caractéristique générale du formalisme hamiltonien, utilisant comme variables \vec{p} et \vec{q} , ou ϕ_i et Π_j . Les relations (2.4) sont connues sous le nom de *relations de commutation à temps égaux*.

L'opérateur hamiltonien est contenu dans le tenseur énergie-impulsion discuté dans la section 1.3.6. La conservation du courant de Noether associé à l'invariance sous translation du temps,

$$T_{\mu 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial_0 \phi^i - \eta_{\mu 0} \mathcal{L},$$

exprime la conservation de l'énergie dans le système de champs et sa composante T_{00} est la densité d'énergie. L'hamiltonien est donc

$$\begin{aligned} H = \int d^3x T_{00} &= \int d^3x \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 \phi^i} \partial_0 \phi^i - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^3x \left[\sum_i \Pi^i(x) \partial_0 \phi^i(x) - \mathcal{L} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Après quantification, H contient des produits d'opérateurs en un point unique x . Du fait des règles canoniques de commutation (2.4) qui sont singulières en $\vec{x} = \vec{y}$, il apparaîtra des ambiguïtés liées à l'ordre de ces opérateurs. Il sera nécessaire d'introduire une prescription d'ordre des produits d'opérateurs afin de définir correctement l'hamiltonien H . Cette prescription assurera que ses valeurs propres (énergies) soient finies.

2.2 Champs scalaires

Nous allons considérer séparément deux cas qui correspondent à des situations physiques différentes: le champ scalaire réel et complexe. Le champ scalaire

réel, pour lequel particules et antiparticules sont indistinguables, est le champ quantique le plus simple. Il contient cependant l'ensemble des notions nécessaires à la discussion du champ scalaire complexe, ou chargé, qui suivra.

2.2.1 Le champ scalaire réel

Le champ libre le plus simple est le champ scalaire réel $\varphi(x)$, dont la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2]. \quad (2.6)$$

Il en découle que l'impulsion conjuguée à φ est

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi} = \partial_0 \varphi \quad (2.7)$$

alors que l'hamiltonien devient

$$H_c = \int d^3x [\Pi \partial^0 \varphi - \mathcal{L}] = \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_0 \varphi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2]. \quad (2.8)$$

Puisque H_c ne contient que des produits de deux opérateurs identiques au même point, on ne s'attend pas à rencontrer de problème d'ordre des facteurs dans ce cas simple. Nous verrons cependant que cette expression n'est pas satisfaisante dans la théorie quantique et qu'il faudra la modifier (d'où l'indice c qui indique une expression classique).

Le champ φ est solution de l'équation de Klein-Gordon qui découle de la densité lagrangienne (2.6). Son expansion en modes est donnée par l'expression³:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}], \quad (2.9)$$

où $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ et le quadrivecteur k dans les exponentielles s'écrit $k = (\omega_k, \vec{k})$; il vérifie donc $k^2 = m^2$. Le champ réel quantifié est un opérateur hermitique et le coefficient de l'expansion en modes $a(k)$ est un opérateur. $a^\dagger(k)$ est l'opérateur conjugué hermitique de $a(k)$. Les fonctions

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx} \quad (2.10)$$

sont des ondes planes de quantité de mouvement \vec{k} et d'énergie ω_k . Elles vérifient

$$\begin{aligned} \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) &= i \int d^3x [f_k^*(x)(\partial_0 f_q(x)) - (\partial_0 f_k^*(x))f_q(x)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (\omega_k + \omega_q) e^{i(\omega_k - \omega_q)t} \int d^3x e^{-i(\vec{k} - \vec{q}) \cdot \vec{x}} \\ &= \delta^3(\vec{k} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

³C'est l'équation (1.107) avec $a^\dagger(k) = b(k)$, en demandant l'hermiticité du champ, $\varphi = \varphi^\dagger$.

On a de même

$$\int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = 0. \quad (2.12)$$

Notez que les égalités (2.11) et (2.12) sont vraies à tous les temps x^0 . Elles permettent d'inverser l'expansion en modes de $\varphi(x)$ et d'obtenir une expression pour $a(k)$ et son conjugué:

$$\begin{aligned} a(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \\ a^\dagger(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \varphi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comme dans les relations (2.11) et (2.12), $a(k)$ ne dépend pas du temps. Les règles de commutation des opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$ s'obtiennent ensuite facilement en utilisant les expressions (2.13) et les commutateurs canoniques (2.4) de φ et $\Pi(x) = \partial_0 \varphi(x)$. Un calcul sans difficulté montre que

$$\begin{aligned} [a(k), a^\dagger(q)] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a(k), a(q)] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(q)] = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $k = (\omega_k, \vec{k})$ et $q = (\omega_q, \vec{q})$. Ces relations sont clairement similaires aux relations de commutation des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique quantique: $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$, $[a, a^\dagger] = 1$. Il apparaît que le champ scalaire réel quantifié correspond à un nombre infini d'oscillateurs harmoniques⁴ décrits par les opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$. Ces opérateurs jouent un rôle essentiel dans l'interprétation en termes de particules de la théorie des champs quantifiés.

Il est utile de définir l'opérateur

$$N(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k) a(k), \quad (2.15)$$

dont les règles de commutation sont

$$\begin{aligned} [N(k), N(q)] &= 0, \\ [N(k), a(q)] &= -a(q) \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [N(k), a^\dagger(q)] &= +a^\dagger(q) \delta^3(\vec{k} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'opérateur hamiltonien (2.8) peut être facilement exprimé en fonction des opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$, ou de $N(k)$, en utilisant l'expansion (2.9) et les règles de commutation (2.14). On obtient

$$H_c = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \left\{ a(k) a^\dagger(k) + a^\dagger(k) a(k) \right\} \quad (2.17)$$

$$= \int d^3k \left\{ \omega_k N(k) + \frac{1}{4(2\pi)^3} [a(k), a^\dagger(k)] \right\}. \quad (2.18)$$

⁴Un oscillateur pour chaque \vec{k} .

L'expression (2.18) n'est cependant pas satisfaisante puisque, d'après les commutateurs (2.14), elle contient un terme indéfini de la forme $\int d^3k \frac{1}{2}\omega_k \delta^3(0)$. Ce terme est cependant indépendant des opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$, et $[H_c, N(k)] = 0$; en fait, on peut le voir comme une constante indéfinie multipliant l'opérateur identité. Nous définirons plus loin un hamiltonien quantique H qui ne contient pas ce terme, dont les valeurs propres sont finies et qui vérifie $[H, N(k)] = 0$.

Comme $[H_c, N(k)] = [N(k), N(q)] = 0$, on peut trouver une base de l'espace dans lequel agissent les opérateurs $a(k)$, $a^\dagger(k)$ et $\varphi(x)$ formée d'états propres de tous les opérateurs $N(k)$ et de l'hamiltonien. On la notera:

$$\{|n(q)\rangle, \forall q = (\omega_q, \vec{q})\}.$$

Chacun de ces états propres vérifie

$$N(k)|n(q)\rangle = n(k)|n(q)\rangle, \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}). \quad (2.19)$$

Cette égalité recouvre une infinité de conditions puisqu'à chaque vecteur $k = (\omega_k, \vec{k})$ correspond un opérateur $N(k)$. La quantité $n(k)$ est en fait une fonction (une distribution) de \vec{k} . Pour montrer que les valeurs propres de tous les opérateurs $N(k)$ sont positives ou nulles, il suffit de remarquer que la norme (au carré) de l'état $a(k)|n(k)\rangle$, qui est nécessairement positive ou nulle, s'écrit

$$\langle n(k)|a^\dagger(k)a(k)|n(k)\rangle = 2\omega_k(2\pi)^3 n(k)\langle n(k)|n(k)\rangle \geq 0.$$

L'état $|0\rangle$ pour lequel

$$N(k)|0\rangle = 0 \quad (2.20)$$

pour tous les $k = (\omega_k, \vec{k})$ est l'état *du vide*. On peut le définir par les conditions

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}). \quad (2.21)$$

La base formée des états $|n(k)\rangle$ engendre un *espace de Fock*. Les états $a(q)|n(k)\rangle$ et $a^\dagger(q)|n(k)\rangle$ sont également des états propres de tous les opérateurs $N(k)$, puisque

$$\begin{aligned} N(k)a^\dagger(q)|n(k)\rangle &= a^\dagger(q)N(k)|n(k)\rangle + [N(k), a^\dagger(q)]|n(k)\rangle \\ &= (n(k) + \delta^3(\vec{k} - \vec{q})) a^\dagger(q)|n(k)\rangle, \end{aligned}$$

et de même

$$N(k)a(q)|n(k)\rangle = (n(k) - \delta^3(\vec{k} - \vec{q})) a(q)|n(k)\rangle,$$

sauf si $|n(k)\rangle = |0\rangle$ pour lequel $a(q)|0\rangle = 0$.

Finalement, on introduit l'opérateur

$$N = \int d^3k N(k), \quad (2.22)$$

dont la valeur n sur un état propre est un nombre entier positif ou nul qui sera interprété comme le *nombre total de particules (ou quanta)* contenues dans l'état, alors que la valeur propre de $N(k)$ sur cet état, comme fonction de \vec{k} sera la *densité de nombre de quanta dans le volume d^3k autour de \vec{k}* . D'après les règles de commutation (2.16), on a:

$$\begin{aligned} [N, a(k)] &= -a(k), \\ [N, a^\dagger(k)] &= +a^\dagger(k), \\ N|n(k)\rangle &= n|n(k)\rangle, \quad n = \int d^3k n(k), \\ Na(q)|n(k)\rangle &= (n-1)a(q)|n(k)\rangle, \quad n \geq 1, \\ Na^\dagger(q)|n(k)\rangle &= (n+1)a^\dagger(q)|n(k)\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Il apparaît donc que les opérateurs d'annihilation $a(k)$ et de création $a^\dagger(k)$ détruisent ou créent, respectivement, un quantum d'impulsion \vec{k} et de masse m , satisfaisant l'équation de Klein-Gordon. L'état du vide $|0\rangle$ ne contient pas de particule⁵.

L'espace de Fock engendré par tous les vecteurs propres des opérateurs $N(k)$ peut être entièrement construit en agissant sur le vide $|0\rangle$ avec un nombre arbitraire d'opérateurs de création $a^\dagger(k)$:

$$\begin{aligned} &|0\rangle, \\ &a^\dagger(k)|0\rangle, \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}), \\ &a^\dagger(k)a^\dagger(q)|0\rangle, \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}), \quad \forall q = (\omega_q, \vec{q}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Comme $[a^\dagger(k), a^\dagger(q)] = 0$, l'ordre d'action sur le vide des opérateurs est sans importance. Un état est entièrement caractérisé par la donnée des impulsions $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_m$ des particules créées par l'action des opérateurs $a^\dagger(k_i)$, $i = 1, \dots, m$ sur l'état du vide. Il est naturellement symétrique (statistique de Bose-Einstein) et on écrira parfois

$$|k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = \frac{1}{m!} \sum_{\text{permutations}} a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)\dots a^\dagger(k_m)|0\rangle, \quad (2.24)$$

pour mettre en évidence la symétrie de l'état, bien qu'en fait

$$|k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)\dots a^\dagger(k_m)|0\rangle.$$

⁵Le fait que les valeurs propres de N sont entières découle de l'argument suivant: en agissant avec un nombre approprié d'opérateurs $a(k)$, on peut à partir de n'importe quel état propre de N parvenir à un état $|m\rangle$, $N|m\rangle = m|m\rangle$, avec $0 \leq m < 1$. La valeur propre de N pour l'état $a(k)|m\rangle$ est alors $m-1 < 0$, ce qui n'est possible que si $a(k)|m\rangle = 0$. Et donc $|m\rangle = |0\rangle$, $m = 0$, un entier.

Clairement, $|k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = |k_2, k_1, \dots, k_m\rangle$, l'égalité restant vraie pour n'importe quelle permutation des impulsions. L'espace de Fock possède donc une base formée de tous les états à m particules, $m = 0, 1, \dots, \infty$ d'impulsions $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_m$. Ces m particules sont indistinguables au sens de la mécanique quantique et suivent la statistique de Bose-Einstein: ce résultat est une conséquence des relations de commutation (2.4) appliquées au champ scalaire $\varphi(x)$. Cette observation suggère que les champs de spin 1/2, auxquels s'applique la statistique de Fermi-Dirac, ne pourront pas être quantifiés à partir de ces relations de commutation canoniques.

Il faut cependant noter que les états de base construits ci-dessus ne sont pas normalisés. En effet, par exemple,

$$\begin{aligned} \langle 0|a(k)a^\dagger(q)|0\rangle &= \langle 0|[a(k), a^\dagger(q)]|0\rangle \\ &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

en supposant que le vide $|0\rangle$ est normalisé, $\langle 0|0\rangle = 1$. Des états normalisés seront obtenus en remplaçant les opérateurs de création $a^\dagger(k)$ par

$$\tilde{a}^\dagger(k) = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2} a^\dagger(k),$$

dont les règles de commutation sont $[\tilde{a}(k), \tilde{a}^\dagger(q)] = \delta^3(\vec{k} - \vec{q})$.

Pour définir l'énergie de l'état $|n(k)\rangle$, il est nécessaire de modifier l'opérateur hamiltonien qui est d'après (2.18) indéfini dans sa forme originale "classique" H_c , tirée de l'expression (2.8). L'énergie d'un état est seulement définie relativement à celle d'un autre état: on ne mesure que des différences d'énergie, il n'y a pas de "zéro absolu de l'énergie". Elle n'est donc définie qu'à une constante indépendante de l'état près. Comme le terme indéfini dans l'expression (2.18) est formellement indépendant de l'état, il est naturel de choisir la constante arbitraire en supprimant ce terme, et de définir l'hamiltonien quantifié en exigeant que l'énergie de l'état du vide soit nulle: $H|0\rangle = 0$. C'est le cas si on remplace (2.18) par

$$H = \int d^3k \omega_k N(k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k a^\dagger(k) a(k). \quad (2.26)$$

Cette définition revient à renverser l'ordre des opérateurs dans le premier terme de l'hamiltonien (2.17) en plaçant les opérateurs d'annihilation à droite du produit. Cette prescription d'ordre des opérateurs est l'*ordre normal*, qui pour un produit d'opérateurs $[P]$ quelconque se note

$$: [P] :$$

Elle impose que dans chaque terme du produit $[P]$, les opérateurs de création et d'annihilation sont ordonnés en plaçant les opérateurs $a(k)$ à droite. La prescription d'ordre normal est sans ambiguïté puisque $[a(k), a(q)] = [a^\dagger(k), a^\dagger(q)] = 0$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} : \varphi(x) : &= \varphi(x), \\ : \varphi(x) \varphi(y) : &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi^3)} \frac{1}{2\omega_k} \int \frac{d^3 q}{(2\pi^3)} \frac{1}{2\omega_q} \left[e^{-i(kx+qy)} a(k) a(q) + e^{-i(kx-xy)} a^\dagger(q) a(k) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(qy-kx)} a^\dagger(k) a(q) + e^{i(kx+qy)} a^\dagger(k) a^\dagger(q) \right]. \end{aligned}$$

Dans le second exemple, l'ordre normal n'affecte que le deuxième terme. L'hamiltonien quantique (2.26) est obtenu en ordonnant normalement l'expression (2.8) de l'hamiltonien classique:

$$H = : \frac{1}{2} \int d^3 x \left[(\partial_0 \varphi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] : \quad (2.27)$$

Finalement, il reste à montrer que les commutateurs à temps égaux sont compatibles avec le principe de relativité restreinte malgré l'asymétrie entre temps et espace qu'ils présentent. Pour cela, on calcule les relations de commutation pour des temps arbitraires à partir des commutateurs à temps égaux. Il vient:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \left(e^{-ikx+iqy} [a(k), a^\dagger(q)] \right. \\ &\quad \left. - e^{ikx-iqy} [a(q), a^\dagger(k)] \right) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k_0) e^{-ik(x-y)} \\ &\equiv i\Delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.28)$$

où

$$\epsilon(k^0) = \frac{k^0}{|k^0|}$$

est le signe de k^0 qui est un invariant de Lorentz. Ainsi, le commutateur de deux champs scalaires est un invariant de Lorentz, et la quantification canonique utilisée préserve la covariance de Lorentz. Supposons que le vecteur $x-y$ est de genre espace, $(x-y)^2 < 0$. Il existe donc un référentiel où $x-y = (0, \vec{z})$. Dans ces coordonnées,

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} - e^{-i\vec{k} \cdot \vec{z}} \right) = 0,$$

et le commutateur $[\varphi(x), \varphi(y)]$ s'annule hors du cône de lumière $(x-y)^2 \geq 0$: il n'y a pas d'interférence entre deux points de l'espace-temps séparés par un vecteur de genre espace, une conséquence de la causalité relativiste. D'autre part, $\Delta(x-y)$ est une solution impaire de l'équation de Klein-Gordon, qui satisfait au principe de relativité restreinte. Notez cependant qu'en général le commutateur $[\varphi(x), \varphi(y)]$ ne s'annule pas à des temps x^0 et y^0 différents.

2.2.2 Le champ scalaire complexe

La notion d'antiparticule n'existe pas pour le champ scalaire réel qui ne possède qu'un seul ensemble d'opérateurs de création entièrement caractérisés par \vec{k} . Comme la densité lagrangienne libre (2.6) de ce champ ne possède pas de symétrie continue, il n'y a pas de courant de Noether conservé et on ne peut pas lui associer de charge. Par contre, nous avons vu dans la section 1.4.1 que le champ scalaire complexe possède un courant conservé. En conséquence, la construction de l'espace de Fock du champ complexe quantifié va imposer la notion d'antiparticule qui sera naturellement distinguée de la particule par la valeur opposée de sa charge de Noether.

Un champ scalaire complexe de masse m est une combinaison linéaire de deux champs réels de mêmes masses, par exemple

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]. \quad (2.29)$$

La densité lagrangienne du champ complexe libre est obtenue à partir de celle du champ réel (2.6):

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\varphi_1, \partial_\mu \varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2, \partial_\mu \varphi_2) = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (2.30)$$

Le tenseur énergie-impulsion (classique) est

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.31)$$

si bien que l'hamiltonien classique s'écrit

$$H_C = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[(\partial_0 \phi^\dagger)(\partial_0 \phi) + (\vec{\nabla} \phi^\dagger) \cdot (\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (2.32)$$

Nous avons vu [section 1.4.1] que l'invariance sous les transformations

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad (\alpha \text{ réel}) \quad (2.33)$$

implique l'existence d'un courant conservé qui doit s'écrire avec un ordre normal dans le cas du champ quantifié:

$$j^\mu = : i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi : \quad (2.34)$$

et donc d'une charge

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (2.35)$$

indépendante du temps.

L'expansion en modes du champ scalaire complexe s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + b^\dagger(k) e^{+ikx} \right], \\ \phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a^\dagger(k) e^{+ikx} + b(k) e^{-ikx} \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

La quantification du champ implique que les quantités $\phi(x)$, $a(k)$, $a^\dagger(k)$, $b(k)$ et $b^\dagger(k)$ sont des opérateurs agissant dans un espace de Fock encore à construire. Le choix d'introduire des opérateurs $a(k)$ et $b^\dagger(k)$ dans l'expansion du champ $\phi(x)$ sera justifié par leurs règles de commutation. En termes des modes de φ_1 et φ_2 ,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a_1(k) e^{-ikx} + a_1^\dagger(k) e^{ikx} \right], \\ \varphi_2(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a_2(k) e^{-ikx} + a_2^\dagger(k) e^{ikx} \right],\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(k) + i a_2(k)], \\ b(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(k) - i a_2(k)].\end{aligned}\tag{2.37}$$

Pour quantifier ϕ , il suffit de reprendre les résultats de la quantification du champ réel, c'est-à-dire les relations de commutation (2.14), et de les appliquer aux opérateurs de création et d'annihilation des deux champs φ_1 et φ_2 . En utilisant (2.37), on trouve:

$$\begin{aligned}[a(k), a(q)] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(q)] = 0, \\ [a(k), a^\dagger(q)] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [b(k), b(q)] &= [b^\dagger(k), b^\dagger(q)] = 0, \\ [b(k), b^\dagger(q)] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a(k), b(q)] &= [a(k), b^\dagger(q)] = 0, \\ [a^\dagger(k), b(q)] &= [a^\dagger(k), b^\dagger(q)] = 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Ces résultats montrent que les opérateurs $a^\dagger(k)$ et $b^\dagger(k)$ jouent le rôle d'opérateurs de création alors que leurs conjugués $a(k)$ et $b(k)$ sont des opérateurs d'annihilation. Ils motivent le choix des expansions (2.36).

Les règles de commutation canoniques à des temps quelconques peuvent être directement déduites de la décomposition (2.29) du champ complexe et de

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)] = i\delta_{ij}\Delta(x-y), \quad i, j = 1, 2,$$

la fonction $\Delta(x-y)$ étant définie dans l'équation (2.28). Il vient

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= i\Delta(x-y), \\ [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0.\end{aligned}\tag{2.39}$$

A temps égaux, ces commutateurs deviennent

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}),\tag{2.40}$$

comme dans (2.4), l'impulsion conjuguée au champ ϕ étant

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial_0 \phi^\dagger(x).\tag{2.41}$$

Comme dans le cas du champ réel, l'espace des états sera construit en agissant avec les opérateurs de création sur l'état du vide défini par les conditions

$$a(k)|0\rangle = b(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}). \quad (2.42)$$

Pour donner l'interprétation en termes de particules des opérateurs de création $a^\dagger(k)$, $b^\dagger(k)$ et d'annihilation $a(k)$, $b(k)$, il est utile de calculer la charge Q qui, par le théorème de Noether, est indépendante du temps. D'après les expressions du courant conservé (2.34) et de la charge (2.35), on obtient en utilisant l'expansion en modes du champ complexe (2.36):

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x : \phi^\dagger(\partial_0\phi) - (\partial_0\phi^\dagger)\phi : \\ &= \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)] \\ &= \int d^3k [N_a(k) - N_b(k)] \\ &= N_a - N_b, \end{aligned} \quad (2.43)$$

en définissant comme dans le cas précédent les opérateurs de densité de nombre de particules

$$N_a(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k)a(k), \quad N_b(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} b^\dagger(k)b(k), \quad (2.44)$$

et de nombre total de particules

$$N_a = \int d^3k N_a(k), \quad N_b = \int d^3k N_b(k). \quad (2.45)$$

L'introduction de l'ordre normal assure que l'état du vide est sans charge,

$$Q|0\rangle = 0. \quad (2.46)$$

L'expression (2.43) montre que le quantum créé par $a^\dagger(k)$ possède une charge +1 alors que celui créé par $b^\dagger(k)$ a une charge -1:

$$[Q, a^\dagger(k)] = a^\dagger(k), \quad [Q, b^\dagger(k)] = -b^\dagger(k).$$

On utilisera la terminologie suivante:

- $a^\dagger(k)$ crée une particule de charge 1 et d'impulsion \vec{k} [$a(k)$ la détruit],
- $b^\dagger(k)$ crée une antiparticule de charge -1 et d'impulsion \vec{k} [$b(k)$ la détruit].

Le champ ϕ contient les opérateurs $a(k)$ et $b^\dagger(k)$; il a charge -1 puisqu'il détruit une particule ou crée une antiparticule. Par contre, la charge de ϕ^\dagger est +1 puisqu'il contient les opérateurs $a^\dagger(k)$ et $b(k)$:

$$[Q, \phi(x)] = -\phi(x), \quad [Q, \phi^\dagger(x)] = +\phi^\dagger(x). \quad (2.47)$$

La convention sur les impulsions est fondée sur l'argument suivant. Calculons l'opérateur mesurant les composantes spatiales de l'impulsion totale, c'est-à-dire

$$P_i = \int d^3x T_{0i} = \int d^3x \left[(\partial_0 \phi^\dagger)(\partial_i \phi) + (\partial_i \phi^\dagger)(\partial_0 \phi) \right], \quad (2.48)$$

en utilisant le tenseur énergie-impulsion (2.31). Cette expression ne requiert pas d'ordre normal. En effet, en insérant l'expansion en modes (2.36) du champ quantique, il vient

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} k_i \left[a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) + b(k) b^\dagger(k) \right] \\ &= \int d^3k k_i [N_a(k) + N_b(k)], \end{aligned} \quad (2.49)$$

puisque

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} k_i [a(k), a^\dagger(k)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} k_i [b(k), b^\dagger(k)] = 0,$$

l'intégrant étant une fonction impaire de \vec{k} . D'après (2.16),

$$\begin{aligned} [P_i, a(k)] &= -k_i a(k), & [P_i, a^\dagger(k)] &= k_i a^\dagger(k), \\ [P_i, b(k)] &= -k_i b(k), & [P_i, b^\dagger(k)] &= k_i b^\dagger(k). \end{aligned} \quad (2.50)$$

En agissant sur un état, les opérateurs de création apportent une impulsion \vec{k} , ceux d'annihilation la retirent, en conformité avec la terminologie introduite ci-dessus. On vérifie d'autre part que

$$[P_i, \phi(x)] = -i\partial_i \phi(x). \quad (2.51)$$

L'opérateur (2.49) correspond bien à la réalisation dans l'espace de Fock du générateur des translations d'espace $-i\partial_i$.

L'hamiltonien est construit à partir de la densité lagrangienne en appliquant la prescription d'ordre normal qui exige

$$H|0\rangle = 0,$$

comme pour le champ réel. On aura donc

$$H =: \int d^3x \left[(\partial_0 \phi^\dagger)(\partial_0 \phi) + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \right] : \quad (2.52)$$

L'ordre normal place les opérateurs d'annihilation $a(k)$ et $b(k)$ à la droite des $a^\dagger(k)$ et $b^\dagger(k)$ dans les produits. Il vient immédiatement

$$H = \int d^3k \omega_k [N_a(k) + N_b(k)]. \quad (2.53)$$

L'énergie de chaque état de l'espace de Fock est donc positive ou nulle, le seul état d'énergie nulle étant le vide. Notez qu'en rassemblant (2.49) et (2.53), on a

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu [N_a(k) + N_b(k)], \quad k_\mu = (\omega_k, k_i) = (\omega_k, -\vec{k}). \quad (2.54)$$

ainsi que

$$[P^\mu, \phi(x)] = -i\partial^\mu \phi(x). \quad (2.55)$$

La construction de l'espace de Fock à partir de l'état du vide $|0\rangle$ est similaire au cas du champ scalaire réel. Puisque

$$P_\mu|0\rangle = N_a|0\rangle = N_b|0\rangle = 0,$$

le vide ne contient ni énergie-impulsion, ni particule, ni antiparticule. Un état contenant n particules d'impulsions k_1, \dots, k_n et m antiparticules d'impulsions q_1, \dots, q_m sera construit en agissant sur $|0\rangle$ avec les opérateurs de création correspondants:

$$a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n) b^\dagger(q_1) \dots b^\dagger(q_m) |0\rangle.$$

Comme les opérateurs de création commutent entre eux [éq. (2.38)], l'ordre des opérateurs est sans importance et l'état est naturellement symétrique (statistique de Bose-Einstein).

2.3 Champs spinoriels

Le champ spinoriel libre est solution de l'équation de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (2.56)$$

qui est l'équation du mouvement de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi, \quad (2.57)$$

une forme préférable à

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \mathcal{L}' + \frac{i}{2} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] \quad (2.58)$$

puisqu'elle traite ψ et $\bar{\psi}$ de manière symétrique⁶. L'invariance de \mathcal{L}' et \mathcal{L} sous la transformation $\psi \longrightarrow e^{i\alpha} \psi$ implique la conservation du courant

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial^\mu j_\mu = 0, \quad (2.59)$$

lorsque ψ vérifie l'équation de Dirac. Cette expression est valable dans la théorie classique; la quantification du champ la modifiera légèrement.

⁶Comme $\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \partial_\mu(\dots)$, les deux densités lagrangiennes conduisent aux mêmes équations du mouvement.

On déduit de \mathcal{L}' et \mathcal{L} une unique équation d'Euler-Lagrange, l'équation de Dirac, mais deux expressions du tenseur énergie-impulsion qui diffèrent par une quantité elle-même conservée. Dans les deux cas, les densités lagrangiennes \mathcal{L}' et \mathcal{L} s'annulent lorsqu'elles sont évaluées pour un spineur solution de l'équation de Dirac. A partir de \mathcal{L}' , il vient alors

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial^\mu \psi} (\partial_\nu \psi) + (\partial_\nu \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial^\mu \bar{\psi}} \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \psi) - \frac{i}{2} (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi, \end{aligned} \quad (2.60)$$

une expression réelle. On peut écrire

$$T_{\mu\nu} = i \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \psi) - \frac{i}{2} \partial_\nu j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \psi} (\partial_\nu \psi) - \frac{i}{2} \partial_\nu j_\mu. \quad (2.61)$$

Le premier terme est le tenseur énergie-impulsion (non réel!) que l'on déduirait de \mathcal{L} . Les trois quantités apparaissant dans cette équation sont conservées:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = \partial^\mu \left[i \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \psi) \right] = \partial^\mu [\partial_\nu j_\mu] = 0.$$

C'est l'expression classique réelle (2.60) qui est utile à la construction du tenseur énergie-impulsion de la théorie quantifiée⁷.

L'impulsion totale du champ est

$$P_\mu = \int d^3x T_{0\mu} = \int d^3x \left[\frac{i}{2} \psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \right]. \quad (2.62)$$

Elle est indépendante du temps puisque $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Une expression simple de l'hamiltonien (classique) s'obtient facilement à l'aide de l'identité (2.61):

$$\begin{aligned} H_c = P_0 &= \int d^3x \left[i \psi^\dagger (\partial_0 \psi) - \frac{i}{2} \partial_0 j_0 \right] \\ &= \int d^3x i \psi^\dagger (\partial_0 \psi) - \frac{i}{2} \frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi \\ &= \int d^3x i \psi^\dagger (\partial_0 \psi), \end{aligned} \quad (2.63)$$

en utilisant la conservation du courant (2.59) et l'indépendance du temps de la charge associée.

Nous avons établi dans le chapitre 1 qu'une solution de l'équation de Dirac est une superposition d'ondes planes

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b_\alpha(k) e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k) + d_\alpha^\dagger(k) e^{ikx} v^{(\alpha)}(k) \right], \quad (2.64)$$

⁷A une grandeur physique, il correspond un opérateur hermitique.

avec

$$\begin{aligned} (\not{k} - m) u^{(\alpha)}(k) &= 0, \\ (\not{k} + m) v^{(\alpha)}(k) &= 0, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.65)$$

Les quantités $b_\alpha(k)$ et $d_\alpha^\dagger(k)$ deviendront opératoriels après quantification du champ; nous en tiendrons compte en respectant l'ordre des facteurs dans un produit de champs. À partir de l'expansion en ondes planes (2.64), il est facile de calculer l'impulsion totale classique (2.62):

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} k_\mu \sum_{\alpha=1}^2 \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) \right]. \quad (2.66)$$

Ce calcul utilise la normalisation des spineurs $u^{(\alpha)}(k)$ et $v^{(\alpha)}(k)$ définie dans le chapitre 1⁸. En particulier, l'hamiltonien classique (2.63) s'écrit

$$H_c = m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) \right]. \quad (2.67)$$

Contrairement au champ scalaire complexe, les modes $d_\alpha(k)$ contribuent négativement à l'énergie.

Quantifier le champ spinoriel en imposant des relations de commutation aux opérateurs $b_\alpha(k)$ et $d_\alpha(k)$ conduirait immédiatement à deux difficultés⁹. Premièrement, l'espace de Fock contiendrait des états à n quanta symétriques qui suivraient la statistique de Bose-Einstein. Deuxièmement, en appliquant la prescription d'ordre normal liée aux commutateurs, la contribution des modes $d_\alpha(k)$ à l'hamiltonien (2.67) permettrait des énergies arbitrairement négatives: il n'y aurait pas d'état fondamental stable puisque l'énergie ne serait pas bornée inférieurement.

Pour établir une procédure de quantification satisfaisante et cohérente, il est possible de s'inspirer de l'action de l'opérateur P_μ sur le champ spinoriel, qui doit être:

$$[P_\mu, \psi] = -i\partial_\mu \psi, \quad (2.68)$$

puisque le générateur des translations P_μ agit comme $-i\partial_\mu$ sur n'importe quel champ. Nous avons déjà vérifié que la procédure utilisée pour quantifier le champ scalaire vérifie la même condition [éq. (2.55)]. Dans la théorie quantifiée, P_μ est un opérateur agissant dans l'espace de Fock dont la définition suit de l'expression classique (2.66), modifiée si nécessaire par une prescription d'ordre normal. D'après (2.64), il est donc nécessaire que

$$\begin{aligned} [P_\mu, b_\alpha(k)] &= -k_\mu b_\alpha(k), \\ [P_\mu, d_\alpha(k)] &= -k_\mu d_\alpha(k), \\ [P_\mu, b_\alpha^\dagger(k)] &= k_\mu b_\alpha^\dagger(k), \\ [P_\mu, d_\alpha^\dagger(k)] &= k_\mu d_\alpha^\dagger(k). \end{aligned} \quad (2.69)$$

⁸Equations (1.137–1.140), paragraphe 1.4.2.

⁹Ce point est élaboré dans Peskin et Schroeder [6], section 3.5.

En supposant de plus que

$$\begin{aligned} [b_\alpha^\dagger(k)b_\alpha(k), d_\beta(q)] &= 0, \\ [d_\alpha(k)d_\alpha^\dagger(k), b_\beta(q)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

les conditions (2.69) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} \sum_\alpha [b_\alpha^\dagger(k)b_\alpha(k), b_\beta(q)] &= -(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\beta(q), \\ \sum_\alpha [d_\alpha(k)d_\alpha^\dagger(k), d_\beta(q)] &= +(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) d_\beta(q). \end{aligned}$$

Ces deux conditions peuvent être réduites de deux manières, à l'aide des deux identités triviales

$$\begin{aligned} [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B, & [A, B] &= AB - BA, \\ [AB, C] &= A\{B, C\} - \{A, C\}B, & \{A, B\} &= AB + BA. \end{aligned} \quad (2.71)$$

En choisissant d'utiliser la seconde égalité, pour les anticommutateurs, il vient

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \left(b_\alpha^\dagger(k) \{b_\alpha(k), b_\beta(q)\} - \{b_\alpha^\dagger(k), b_\beta(q)\} b_\alpha(k) \right) &= -(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\beta(q), \\ \sum_\alpha \left(d_\alpha(k) \{d_\alpha^\dagger(k), d_\beta(q)\} - \{d_\alpha(k), d_\beta(q)\} d_\alpha^\dagger(k) \right) &= +(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) d_\beta(q). \end{aligned}$$

Ces équations sont vérifiées si on impose les relations d'anticommutation:

$$\begin{aligned} \{b_\alpha^\dagger(k), b_\beta(q)\} &= (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ \{d_\alpha^\dagger(k), d_\beta(q)\} &= (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ \{b_\alpha(k), b_\beta(q)\} &= \{b_\alpha^\dagger(k), b_\beta^\dagger(q)\} = 0, \\ \{d_\alpha(k), d_\beta(q)\} &= \{d_\alpha^\dagger(k), d_\beta^\dagger(q)\} = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

D'autre part, les conditions (2.70) sont vérifiées en imposant

$$\{b_\alpha(k), d_\beta(q)\} = \{b_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)\} = 0, \quad (2.73)$$

ainsi que leurs conjugués hermitiques.

Si par contre on choisit d'utiliser la première identité (2.71), les anticommutateurs (2.72) sont remplacés par

$$[b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)] = -[d_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)] = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}),$$

tous les autres commutateurs étant nuls. Ces relations de commutation sont similaires à celles obtenues pour le champ scalaire, à l'exception d'un "mauvais" signe. Mais elles conduisent à un espace d'états de Bose-Einstein dont l'énergie n'est pas inférieurement bornée. L'ensemble des conditions de cohérence (action des

opérateurs de Poincaré, dont P_μ , sur le champ, existence d'un état fondamental (le vide) d'énergie minimum) sélectionne donc une quantification par commutateurs pour le champ de spin zéro ou un et par anticommutateurs pour le champ de spin 1/2, et établit le lien entre spin et statistique (bosons de spin entier, fermions de spin demi-entier).

Les relations d'anticommutation (2.72) et (2.73) définissent la quantification canonique du champ de Dirac libre et massif. En utilisant les relations de normalisation des ondes planes présentes dans l'expansion (2.64), on vérifie qu'elles conduisent à

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] i\Delta(x - y), \quad (2.74)$$

où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et

$$i\Delta(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}]$$

est la fonction déjà apparue dans le commutateur $[\varphi(x), \varphi(y)]$ du champ scalaire réel [éq. (2.28)]. La procédure de quantification du champ spinoriel s'avère donc conforme au principe de relativité restreinte pour les raisons évoquées dans la section précédente.

A temps égaux, il vient $\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \gamma^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, ou encore en composantes

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})^\dagger\} = \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad a, b = 1, 2, 3, 4. \quad (2.75)$$

Ces dernières relations auraient pu être postulées dans une procédure canonique de quantification du champ spinoriel analogue à celle utilisée pour le champ scalaire [éq. (2.4)]. Les champs anticommutent en $\vec{x} \neq \vec{y}$ même si les points (t, \vec{x}) et (t, \vec{y}) sont séparés par le vecteur $(0, \vec{x} - \vec{y})$ qui est de genre espace.

Comme pour le champ scalaire, on peut introduire des opérateurs de nombres:

$$\begin{aligned} N_b &= \int d^3k N_b(k), & N_b(k) &= \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k), \\ N_d &= \int d^3k N_d(k), & N_d(k) &= \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k), \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ils vérifient [comparez avec (2.16) et (2.23)]:

$$\begin{aligned} [N_b(k), b_\alpha(q)] &= -\delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\alpha(q), & [N_b(k), b_\alpha^\dagger(q)] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\alpha^\dagger(q), \\ [N_d(k), d_\alpha(q)] &= -\delta^3(\vec{k} - \vec{q}) d_\alpha(q), & [N_d(k), d_\alpha^\dagger(q)] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) d_\alpha^\dagger(q), \\ [N_b, b_\alpha(k)] &= -b_\alpha(k), & [N_b, b_\alpha^\dagger(k)] &= b_\alpha^\dagger(k), \\ [N_d, d_\alpha(k)] &= -d_\alpha(k), & [N_d, d_\alpha^\dagger(k)] &= d_\alpha^\dagger(k). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Les autres commutateurs possibles s'annulent. Avec les anticommutateurs canoniques (2.72), l'hamiltonien classique devient

$$\begin{aligned} H_c &= m \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^2 [b_{\alpha}^{\dagger}(k)b_{\alpha}(k) + d_{\alpha}^{\dagger}(k)d_{\alpha}(k)] - 2 \int d^3 k \omega_k \delta^3(0) \\ &= \int d^3 k \omega_k [N_b(k) + N_d(k)] - 2 \int d^3 k \omega_k \delta^3(0). \end{aligned}$$

Le deuxième terme est indéfini mais indépendant des opérateurs $b_{\alpha}(k)$ et $d_{\alpha}(k)$: la prescription d'ordre normal prendra cette contribution en charge.

Pour construire une base de l'espace de Fock, on commence par définir l'état du vide, $|0\rangle$ par les conditions:

$$b_{\alpha}(k)|0\rangle = d_{\alpha}(k)|0\rangle = 0 \quad (2.78)$$

pour toutes les valeurs de $k = (\omega_k, \vec{k})$ et $\alpha = 1, 2$. L'hamiltonien quantique est obtenu en appliquant une procédure d'ordre normal fermionique à l'expression classique (2.63) qui annule l'énergie du vide:

$$\begin{aligned} H = : \int d^3 x i\psi^{\dagger} \partial_0 \psi : &= m \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1,2} [b_{\alpha}^{\dagger}(k)b_{\alpha}(k) + d_{\alpha}^{\dagger}(k)d_{\alpha}(k)] \\ &= \int d^3 k \omega_k [N_b(k) + N_d(k)]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Selon cette prescription, les opérateurs d'annihilation $b_{\alpha}(k)$ et $d_{\alpha}(k)$ sont placés à droite dans les produits. Mais chaque permutation nécessaire pour les amener dans cette position engendre un changement de signe. L'ordre normal fermionique tient ainsi compte du caractère anticommutant des opérateurs. Par exemple

$$\begin{aligned} : d_{\alpha}(k)d_{\beta}^{\dagger}(q) : &= -d_{\beta}^{\dagger}(q)d_{\alpha}(k), \\ : d_{\alpha}(k)d_{\beta}^{\dagger}(q)d_{\delta}^{\dagger}(l) : &= d_{\beta}^{\dagger}(q)d_{\delta}^{\dagger}(l)d_{\alpha}(k) = -d_{\delta}^{\dagger}(l)d_{\beta}^{\dagger}(q)d_{\alpha}(k). \end{aligned}$$

Les états de la base de l'espace de Fock sont obtenus en agissant sur le vide avec les opérateurs de création $b_{\alpha}^{\dagger}(k)$ et $d_{\beta}^{\dagger}(q)$. Comme le carré de tous les opérateurs de création s'annule par anticommutation, un état de la forme

$$b_{\alpha_1}^{\dagger}(k_1) \dots b_{\alpha_m}^{\dagger}(k_m) d_{\beta_1}^{\dagger}(q_1) \dots d_{\beta_n}^{\dagger}(q_n) |0\rangle \quad (2.80)$$

ne peut contenir deux quanta dans le même état physique (c'est-à-dire avec même impulsion et même orientation du spin α). Cet état à $n + m$ particules est complètement antisymétrique dans l'échange de deux particules puisque les opérateurs de création anticommutent. Cette structure de l'espace de Fock correspond bien à la statistique de Fermi-Dirac et au principe d'exclusion de Pauli.

Pour une impulsion k donnée, on a quatre états à une particule:

$$b_1^{\dagger}(k)|0\rangle, b_2^{\dagger}(k)|0\rangle, d_1^{\dagger}(k)|0\rangle, d_2^{\dagger}(k)|0\rangle.$$

Pour les distinguer, on a recours à des observables qui commutent avec P_μ . Ici intervient le courant conservé (2.59), dont la charge indépendante du temps est

$$Q =: \int d^3x j^0 :=: \int d^3x \psi^\dagger \psi :$$

dans la théorie quantifiée. Avec l'expansion en modes (2.64), on obtient

$$\begin{aligned} Q &= : \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k)] : \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)] = N_b - N_d. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Comme, d'après (2.77),

$$\begin{aligned} [Q, b_\alpha(k)] &= -b_\alpha(k), & [Q, d_\alpha(k)] &= +d_\alpha(k), \\ [Q, b_\alpha^\dagger(k)] &= +b_\alpha^\dagger(k), & [Q, d_\alpha^\dagger(k)] &= -d_\alpha^\dagger(k), \end{aligned} \quad (2.82)$$

on dira que

- $b_\alpha(k)$, $d_\alpha^\dagger(k)$ et $\psi(x)$ ont une charge $Q = -1$.
- $b_\alpha^\dagger(k)$, $d_\alpha(k)$ et $\psi^\dagger(x)$ ont une charge $Q = +1$.

Comme $Q|0\rangle = 0$, le vide est sans charge, et la charge de l'état (2.80) est $Q = m - n$. Nous avons vu dans le chapitre 1 que le spineur de Dirac ψ décrit deux spins $1/2$ qui seront interprétés comme la particule, de charge $Q = 1$, et l'antiparticule, de charge $Q = -1$. D'après (2.69), les opérateurs de création apportent une impulsion k à l'état, les opérateurs d'annihilation lui retirent cette impulsion. On aura donc:

- $b_\alpha^\dagger(k)$ crée une particule d'impulsion k ,
- $d_\alpha^\dagger(k)$ crée une antiparticule d'impulsion k ,
- $b_\alpha(k)$ détruit une particule d'impulsion k ,
- $d_\alpha(k)$ détruit une antiparticule d'impulsion k .

Finalement, l'indice $\alpha = 1, 2$ permet de distinguer les deux orientations du spin $1/2$ ou ses deux états d'hélicité¹⁰.

¹⁰Dans la section 1.4.2, nous avons utilisé deux bases des ondes planes de Dirac. Dans la première, construite à partir des spineurs $u^{(\alpha)}(k)$ et $v^{(\alpha)}(k)$, l'indice α spécifie la valeur propre de l'opérateur de spin dans la direction x^3 . Dans la seconde, qui utilise $\hat{u}^{(\alpha)}(k)$ et $\hat{v}^{(\alpha)}(k)$, α distingue les deux états d'hélicité.

2.4 Champs de jauge

La quantification d'un système de champs de jauge pose des problèmes inédits liés au fait que l'invariance de Lorentz incite à considérer des champs vectoriels $A_\mu(x)$, à quatre composantes, alors que l'invariance de jauge nous indique que ces quatre composantes ne sont pas toutes significatives. Il y a donc conflit entre le maintien de l'invariance relativiste lors de la quantification et la construction d'un espace des états quantiques ne décrivant que les états physiques significatifs.

Dans cette section, nous allons principalement utiliser le formalisme le plus simple de quantification canonique des champs de jauge préservant la covariance de Lorentz. Cette méthode est suffisante pour une théorie de jauge abélienne telle que l'électrodynamique quantique. Elle ne permet pas la quantification des théories de jauge non abéliennes bien qu'elle puisse être utilisée pour des calculs à l'ordre le plus bas de leur théorie des perturbations (diagrammes en arbres ou sans boucle de champs de jauge). Dans la dernière partie, nous décrirons brièvement une quantification non covariante, dans la jauge de radiation.

2.4.1 Quantification covariante

Le point de départ de la discussion est la densité lagrangienne libre classique, de Maxwell, des champs de jauge. Nous allons tout d'abord établir que la théorie classique invariante de jauge ne décrit que deux composantes du champ vectoriel, d'hélicités $+1$ et -1 (polarisations transverses). Ensuite nous allons nous efforcer de construire une théorie quantique (espace des états, opérateurs de champ, hamiltonien, etc...) qui décrive les mêmes degrés de liberté, la construction préservant à chaque étape la covariance de Lorentz.

Le champ massif de spin 1 classique

Bien qu'elle ne s'applique pas directement aux champs de jauge qui sont sans masse, il est utile de se référer à la discussion du champ vectoriel massif du point de vue du groupe de Poincaré (section 1.3.5). Les quatre composantes d'un champ vectoriel massif correspondent aux trois états d'un spin 1 auxquels s'ajoute une composante de spin 0. Nous avons vu que pour un champ $V_\mu(x)$ qui est un état propre avec valeur propre p_μ de l'opérateur $P_\mu = -i\partial_\mu$ ¹¹, la partie du champ décrivant le spin 1 est orthogonale à p_μ : $p_\mu V_T^\mu(x) = 0$, alors que la partie de spin 0 est proportionnelle à p_μ . Il est donc possible d'éliminer la partie de spin 0 en imposant la contrainte $P_\mu V^\mu(x) = 0 = \partial_\mu V^\mu(x)$, qui est covariante de Lorentz.

Pour décrire un champ de spin 1 et de masse m , il faut une densité lagrangienne dont l'équation d'Euler-Lagrange impose à la fois la condition $\partial_\mu V^\mu = 0$ et la

¹¹ V_μ est donc une onde plane, $V_\mu(x) = V_\mu(p) e^{ipx}$.

condition de couche de masse $k^2 = m^2$ aux solutions en ondes planes. Considérons

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (2.83)$$

L'équation de mouvement est l'équation de Proca

$$\square V_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu V^\nu) + m^2 V_\mu = 0. \quad (2.84)$$

Sa divergence

$$\partial^\mu [\square V_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu V^\nu) + m^2 V_\mu] = m^2 \partial^\mu V_\mu = 0$$

impose bien la contrainte $\partial_\mu V^\mu = 0$ qui élimine la composante de spin 0. Elle est donc équivalente à

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu(x) = 0 & (\text{champ de spin 1}), \\ (\square + m^2)V^\mu(x) = 0 & (\text{Klein - Gordon}). \end{cases} \quad (2.85)$$

Les solutions de l'équation de Proca sont des superpositions linéaires d'ondes planes

$$V_\mu(x) = \epsilon_\mu(k)e^{-ikx},$$

avec $k\epsilon(k) = 0$ et $k^2 = m^2$. Elles décrivent un champ de spin 1 et de masse m .

La limite de masse nulle présente deux changements. Premièrement, la densité lagrangienne devient invariante sous la transformation de jauge $V_\mu \rightarrow V_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$. Deuxièmement, la contrainte $\partial_\mu V^\mu = 0$ n'est plus une conséquence de l'équation du mouvement.

Champs de jauge: résultats classiques

La densité lagrangienne de champs de jauge libres $A_\mu^B(x)$ s'écrit

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^B F^{B\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^B = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B = -F_{\nu\mu}^B. \quad (2.86)$$

Comme cette expression est une somme de termes indépendants pour chaque champ de jauge (une somme sur l'indice B), nous nous contenterons de considérer un champ de jauge unique $A_\mu(x)$. La densité lagrangienne (2.86) est invariante sous la transformation de jauge

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (2.87)$$

qui laisse également le champ $F_{\mu\nu}$ inchangé. Cette transformation correspond à la transformation de jauge (1.172) dans la limite abélienne $f^{ABC} = 0$ ou dans celle du couplage de jauge nul. Il est clair que le tenseur $F_{\mu\nu}$ s'annule identiquement lorsque le champ de jauge est la dérivée d'un champ scalaire,

$$A_\mu(x) = \partial_\mu \varphi(x) \longrightarrow F_{\mu\nu} \equiv 0.$$

L'invariance de jauge implique donc que la partie du champ vectoriel A_μ qui peut être écrite comme la dérivée d'un champ $\varphi(x)$ n'intervient pas dans la densité lagrangienne (2.86); elle ne contient pas d'information physique et peut être éliminée, ou choisie de manière à simplifier le traitement du champ A_μ . Elle permet, par exemple, d'imposer la condition invariante relativiste $\partial^\mu A'_\mu = 0$, ce qui revient à choisir la fonction Λ telle que $\square\Lambda = -\partial_\mu A^\mu$. Cette condition, qui est un *choix de jauge*, définit la *jauge de Lorentz*.

L'équation d'Euler-Lagrange découlant de \mathcal{L}_0 est

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0, \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu, \quad (2.88)$$

pour un seul champ de jauge $A_\mu(x)$. Pour déterminer l'ensemble des solutions, considérons des ondes planes de la forme¹²

$$a_\mu(x) = \epsilon_\mu(k) e^{-ikx}. \quad (2.89)$$

L'équation du mouvement (2.88) devient

$$k^2 \epsilon_\mu(k) - k_\mu k_\nu \epsilon^\nu(k) = 0. \quad (2.90)$$

La première solution a un vecteur de polarisation $\epsilon_\mu(k)$ proportionnel à k_μ :

$$\epsilon_\mu(k) = f(k) k_\mu \quad \longrightarrow \quad a_\mu(x) = \partial_\mu [i f(k) e^{-ikx}].$$

C'est la solution triviale $a_\mu(x) = \partial_\mu \varphi(x)$, dont l'hélicité est nulle. Elle correspond à la partie de spin 0 d'une onde plane vectorielle massive. On qualifie donc sa polarisation de *scalaire*. L'invariance de jauge permet de l'éliminer.

Les solutions non triviales ont $F_{\mu\nu} \neq 0$. Elles annulent séparément les deux termes de l'équation (2.90):

$$a_\mu(x) = \epsilon_\mu(k) e^{-ikx}, \quad k^2 = 0, \quad k\epsilon(k) = 0, \quad \epsilon_\mu(k) \neq f(k) k_\mu. \quad (2.91)$$

Il s'agit d'ondes planes de masse nulle et de polarisation $\epsilon_\mu(k)$ orthogonale à k_μ . Pour $k^2 = 0$, la condition $k\epsilon(k) = 0$ a trois solutions linéairement indépendantes, l'une d'elles étant $\epsilon_\mu(k) \propto k_\mu$, la solution triviale. Ceci ne laisse que deux polarisations linéairement indépendantes, qui sont qualifiées de *transverses* puisqu'on peut toujours choisir un référentiel dans lequel $\epsilon(k) = (0, \vec{\epsilon}(k))$ avec $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(k) = 0$. Elles décrivent les états d'hélicités 1 et -1 du champ de spin 1.

L'équation du mouvement (2.88) admet donc trois solutions indépendantes. Deux ont des polarisations transverses et sont significatives. La troisième, de polarisation scalaire, est sans contenu physique: elle est entièrement définie par le choix de jauge et n'apparaît pas dans les grandeurs physiques qui sont invariantes de jauge.

¹²Il conviendrait évidemment de former des combinaisons linéaires réelles de ces ondes planes complexes.

En ne retenant que les solutions physiquement significatives, l'expansion en ondes planes du champ de jauge libre sera donc

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\kappa=1}^2 \left[a^{(\kappa)}(k) \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{-ikx} + a^{(\kappa)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{ikx} \right], \quad (2.92)$$

avec

$$k^2 = 0, \quad k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)} = 0, \quad \epsilon_\mu^{(\kappa)} \neq k_\mu, \quad \kappa = 1, 2. \quad (2.93)$$

L'indice κ numérote deux vecteurs $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$ linéairement indépendants, orthogonaux à k_μ sans être proportionnels à k_μ . La solution triviale

$$\int d^4k f(k) k_\mu e^{-ikx} + \text{c.c.} = i\partial_\mu \int d^4k f(k) e^{-ikx} + \text{c.c.}$$

peut être ajoutée sans inconvénient à cette expansion puisqu'elle ne contribue pas au champ $F_{\mu\nu}$.

Quantification canonique: généralités, difficultés

Les champs vectoriels décrivent des états de spin entier, ils suivent la statistique de Bose-Einstein et sont donc quantifiés en imposant des relations de commutation. Si on essaie d'appliquer directement la procédure de quantification canonique (2.4) à la densité lagrangienne \mathcal{L}_0 , on rencontre immédiatement une difficulté. Les impulsions conjuguées aux champs A_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ sont

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial^0 A^\mu} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 = F_{\mu 0}, \quad (2.94)$$

et en particulier, puisque \mathcal{L}_0 ne dépend pas de $\partial_0 A_0$,

$$\Pi_0 = 0. \quad (2.95)$$

D'autre part, l'équation du mouvement $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ induit dans la direction temporelle une seconde contrainte sur les impulsions conjuguées:

$$\sum_{i=1}^3 \partial_i \Pi_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0. \quad (2.96)$$

Dans cette situation, les relations canoniques de commutation à temps égaux

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.97)$$

ne peuvent être imposées puisqu'elles n'ont pas de sens dans la direction temporelle $\mu = \nu = 0$. Notez en passant que la contrainte $\Pi_0 = 0$ est également présente dans la théorie (2.83) du champ de spin 1 massif. Le problème n'est donc pas spécifiquement lié à l'invariance de jauge, mais au fait que dans les deux cas l'une (au moins) des composantes du champ vectoriel $V_\mu(x)$ ou $A_\mu(x)$ n'a pas de contenu physique.

Il faut d'autre part remarquer qu'il n'est pas à priori évident que la transformation de jauge (2.87), qui est clairement définie comme une transformation des champs classiques $A_\mu(x)$ et qui implique une fonction de l'espace-temps $\Lambda(x)$, doit admettre un équivalent quantifié. En principe, la théorie quantifiée doit posséder des opérateurs de champs $A_\mu(x)$ agissant dans l'espace des états; la transformation de jauge (2.87) requerrait alors l'existence d'un opérateur Λ , agissant dans cet espace, bien que Λ ne contienne aucune information physique. Ceci n'est possible que si l'espace des états contient des états non physiques, mais quelle est alors la procédure de construction de ces états quantiques non physiques?

Il existe deux méthodes classiques de quantification des champs de jauge libres (ou abéliens). Premièrement, la méthode conceptuellement la plus simple consiste à tirer parti de l'invariance de jauge et des équations du mouvement pour se restreindre aux degrés de liberté physiques qui seuls sont quantifiés. On choisit donc une condition de jauge pour éliminer une composante du champ, et on la résout en sacrifiant la covariance de Lorentz de la procédure. Par exemple, on choisit la jauge $A_0 = 0$ (jauge *temporelle* ou *de radiation*). La condition de transversalité (équations du mouvement) est alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, analogue à $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0$ qui est l'une des équations du mouvement. Le système peut ensuite être facilement quantifié dans un espace des états ne contenant que les états physiques. Cependant, puisque la quantification est effectuée dans une classe restreinte de référentiels, il est délicat (mais pas impossible) de garder le contrôle de l'action du groupe de Lorentz; cet inconvénient rend en général le calcul de processus physiques relativistes compliqué et inélégant. Un exemple de quantification non covariante sera considéré à la fin de cette section.

Deuxièmement, on peut choisir de conserver l'invariance de Lorentz linéaire et donc de quantifier l'ensemble du champ vectoriel $A_\mu(x)$. Cette approche exige cependant de modifier la densité lagrangienne pour éviter l'annulation de Π_0 . La modification de \mathcal{L}_0 brise l'invariance de jauge, l'espace des états contient nécessairement des états inconnus dans la théorie invariante de jauge. L'invariance de jauge est ensuite rétablie par des contraintes (invariantes de Lorentz) appliquées dans l'espace des états. C'est la méthode, due à Gupta et Bleuler, que nous allons étudier ici.

Quantification covariante

Au lieu de \mathcal{L}_0 [équ. (2.86)], considérons la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (2.98)$$

où λ est un nombre réel (non nul) arbitraire. On dira que le nouveau terme, qui n'est pas invariant de jauge, *fixe la jauge*. Les impulsions conjuguées aux champs A_μ deviennent

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial \partial^0 A^\mu} = F_{\mu 0} - \lambda \eta_{\mu 0}(\partial_\nu A^\nu), \quad (2.99)$$

et $\Pi_0 = -\lambda \partial^\nu A_\nu$ ne s'annule plus: \mathcal{L}_λ dépend aussi de $\partial_0 A_0$. En fait, la modification de la densité lagrangienne n'a d'effet que sur Π_0 puisque le nouveau terme n'introduit pas de nouvelle dépendance en $\partial_0 A_i$. On peut alors appliquer sans difficulté particulière la procédure de quantification canonique à la théorie modifiée par le terme fixant la jauge.

Avant de procéder à la quantification, considérons l'équation du mouvement de la théorie modifiée,

$$\square A_\mu - (1 - \lambda) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (2.100)$$

d'un point de vue classique. Pour $\lambda \neq 1$, les ondes planes de polarisation orthogonale à k_μ (2.91) restent solutions de cette équation, ainsi que

$$a_\mu(x) = f(k) k_\mu e^{-ikx}, \quad k^2 = 0, \quad (2.101)$$

pour laquelle la densité lagrangienne modifiée s'annule.

La quantification est la plus simple dans la *jauge de Feynman*,

$$\lambda = 1, \quad (2.102)$$

où l'équation (2.100) devient simplement l'équation de Klein-Gordon sans masse, $\square A_\mu = 0$ dont la solution est de la forme

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\kappa=0}^3 \left[a^{(\kappa)}(k) \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) e^{-ikx} + a^{(\kappa)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\kappa)*}(k) e^{ikx} \right], \quad (2.103)$$

où $k_0 = |\vec{k}|$ d'après l'équation de Klein-Gordon de masse nulle, mais sans aucune contrainte sur les quatre vecteurs linéairement indépendants $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$. Ces vecteurs sont en général complexes mais une base de vecteurs réels peut être choisie.

La procédure de quantification canonique impose les règles de commutation à temps égaux suivantes:

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] &= i \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] &= [\Pi_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Pour construire des opérateurs de champ satisfaisant ces règles, nous allons utiliser l'expansion en modes de Fourier du champ A_μ dans la jauge de Feynman $\lambda = 1$, équivalente à une expansion en ondes planes de masse nulle et de polarisation quelconque. Pour chaque onde plane de vecteur d'onde \vec{k} , le coefficient de l'expansion est une combinaison linéaire de quatre vecteurs (réels) $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$ linéairement indépendants. Ils décriront les quatre polarisations possibles pour un champ vectoriel. Il est impossible d'imposer à priori la condition $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, qui annule l'impulsion conjuguée Π_0 .

Traditionnellement, on choisit les vecteurs de polarisation de la manière suivante. Soit n un quadrivecteur constant donnant "l'axe du temps", c'est-à-dire

$$n^2 = 1, \quad n^0 > 0. \quad (2.105)$$

On peut par exemple prendre

$$n = (1, 0, 0, 0), \quad (2.106)$$

mais chaque forme explicite du vecteur n n'est évidemment pas invariante sous les transformations de Lorentz alors que les deux conditions (2.105) le sont. On choisit ensuite $\epsilon^{(1)}(k)$ et $\epsilon^{(2)}(k)$ dans le plan orthogonal à k et à n :

$$n\epsilon^{(\kappa)}(k) = k\epsilon^{(\kappa)}(k) = 0, \quad \kappa = 1, 2. \quad (2.107)$$

Ce sont deux vecteurs de genre espace. [On le voit immédiatement dans le référentiel où $n = (1, 0, 0, 0)$]. Leurs normalisations sont fixées par les conditions

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)}(k)\epsilon^{(1)}(k) &= \epsilon^{(2)}(k)\epsilon^{(2)}(k) = -1, \\ \epsilon^{(1)}(k)\epsilon^{(2)}(k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Si k est de la forme

$$k = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|), \quad (2.109)$$

dans un référentiel où $n = (1, 0, 0, 0)$, alors on peut prendre

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)}(k) &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon^{(2)}(k) &= (0, 0, 1, 0). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Il reste à définir deux vecteurs linéairement indépendants dans le plan sous-tendu par n et k . On choisira $\epsilon^{(3)}$ orthogonal à n et normalisé:

$$n\epsilon^{(3)}(k) = 0, \quad \epsilon^{(3)}(k)\epsilon^{(3)}(k) = -1. \quad (2.111)$$

Finalement $\epsilon^{(0)}$ est choisi égal à n . Avec (2.106) et (2.109), on a simplement

$$\begin{aligned} \epsilon^{(3)}(k) &= (0, 0, 0, 1), \\ \epsilon^{(0)}(k) &= n = (1, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Pour un choix de n quelconque, la normalisation des vecteurs de polarisation est

$$\epsilon^{(\kappa)}(k)\epsilon^{(\kappa')}(k) = \eta^{\kappa\kappa'}, \quad (2.113)$$

et aussi

$$\sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 \eta_{\kappa\kappa'} \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\nu}^{(\kappa')}(k) = \sum_{\kappa=0}^3 \frac{\epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\nu}^{(\kappa)}(k)}{\epsilon^{(\kappa)}(k) \epsilon^{(\kappa)}(k)} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.114)$$

Les polarisations $\epsilon^{(1)}(k)$ et $\epsilon^{(2)}(k)$ sont qualifiées de *transverses* [orthogonales à k et à n], $\epsilon^{(3)}(k)$ de *longitudinale* [dans le plan k - n , tout en étant orthogonale à n ; elle est dirigée selon \vec{k} si $n = (1, 0, 0, 0)$] et $\epsilon^{(0)}(k)$ de *scalaire*.

En insérant l'expansion en modes (2.103) dans les commutateurs canoniques (2.104), on obtient les règles de commutation des opérateurs $a^{(\kappa)}(k)$ et $a^{(\kappa)\dagger}(k)$:

$$\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)] &= -2k^0(2\pi)^3 \eta^{\kappa\kappa'} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')}(q)] &= [a^{(\kappa)\dagger}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)] = 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Ces relations ne diffèrent de celles obtenues pour le champ scalaire réel [éq. (2.14)] que par le signe négatif de $[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(q)] = -2k_0(2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{q})$: les opérateurs de création et d'annihilation pour la polarisation scalaire ont un commutateur de "mauvais signe".

Le commutateur à temps arbitraires est obtenu de la même façon que pour le champ scalaire, en utilisant les règles de commutation (2.115) dans l'expansion en modes (2.103). Par rapport aux expressions (2.14), $[a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)]$ contient un facteur supplémentaire $-\eta^{\kappa\kappa'}$ et donc

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -i\eta_{\mu\nu}\Delta(x-y), \quad (2.116)$$

avec, comme auparavant,

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} [e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}],$$

et $k_0 = |\vec{k}|$. A nouveau, le commutateur de A_0 a le "mauvais signe".

Les relations de commutation (2.115) et (2.116) ne sont valables que dans la jauge de Feynman $\lambda = 1$. Dans une jauge avec λ quelconque, la relation entre l'impulsion conjuguée Π_μ et les dérivées $\partial_\mu A_\nu(x)$ fait intervenir le paramètre λ , qui apparaîtra dans les règles de commutation. La quantification canonique pour λ quelconque est donc plus compliquée que dans la jauge de Feynman, mais elle ne pose pas de problème de principe et n'apporte pas d'information supplémentaire.

Si on essaie de construire les états de la manière habituelle, en agissant sur l'état du vide $|0\rangle$ avec les opérateurs de création $a^{(\kappa)\dagger}(k)$, on rencontre des difficultés associées au signe négatif du commutateur $[A_0, A_0]$. L'état du vide est défini par les conditions

$$a^{(\kappa)}(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k = (|\vec{k}|, \vec{k}), \quad \kappa = 0, 1, 2, 3. \quad (2.117)$$

Un état à une particule avec polarisation scalaire s'écrit comme une combinaison linéaire des états $a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle$,

$$|1\rangle = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle, \quad k = (|\vec{k}|, \vec{k}). \quad (2.118)$$

La norme de cet état est

$$\langle 1|1\rangle = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2q_0(2\pi)^3} f(k) f^*(q) \langle 0|a^{(0)}(q) a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle.$$

Comme

$$\begin{aligned} \langle 0|a^{(0)}(q) a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle &= \langle 0|[a^{(0)}(q), a^{(0)\dagger}(k)]|0\rangle \\ &= -2q_0(2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \end{aligned}$$

pour un vide normalisé, $\langle 0|0\rangle = 1$, on trouve

$$\langle 1|1\rangle = - \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} |f(k)|^2, \quad (2.119)$$

et la norme de l'état $|1\rangle$ est négative. L'espace de Fock a donc une *métrique indéfinie*: si $\langle 0|0\rangle > 0$, alors $\langle 1|1\rangle < 0$. Par contre, pour les états de polarisations transverses ou longitudinale, les normes sont toujours positives.

A ce stade, la conclusion est que la quantification canonique de la densité lagrangienne avec le terme fixant la jauge (2.98) conduit à un espace d'états comprenant des polarisations non physiques et de métrique négative en ce qui concerne la polarisation scalaire. Il s'agit ensuite de concevoir une méthode restreignant l'espace des états *physiques* aux polarisations transverses seulement. Au niveau classique, il suffirait d'imposer l'invariance de jauge et la condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, par exemple. Dans la théorie quantique, cette condition est incompatible avec les relations de commutation canoniques. Comme

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu(x) &= \partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) + \partial^\mu A_\mu^{(-)}(x), & A_\mu^{(-)}(x) &= [A_\mu^{(+)}(x)]^\dagger, \\ i\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \sum_{\kappa=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k) e^{-ikx}, \end{aligned}$$

en séparant énergies positives et négatives, imposer $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$ en chaque x revient à imposer $a^{(0)}(k) = a^{(3)}(k) = 0$, en contradiction avec les relations canoniques (2.115). Imposer que l'opérateur $\partial^\mu A_\mu(x)$ s'annule sur l'état du vide conduirait par exemple à

$$a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle = a^{(3)\dagger}(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k.$$

Nous voulons que les états physiques ne contiennent que des polarisations transverses. Un état typique sera donc de la forme

$$|k_1, \kappa_1; \dots; k_m, \kappa_m\rangle = a^{(\kappa_1)\dagger}(k_1) \dots a^{(\kappa_m)\dagger}(k_m)|0\rangle, \quad \kappa_i = 1, 2. \quad (2.120)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} &\langle k_1, \kappa_1; \dots; k_m, \kappa_m | \partial^\mu A_\mu(x) | q_1, \kappa'_1; \dots; q_p, \kappa'_p \rangle \\ &= \langle 0 | a^{(\kappa_1)}(k_1) \dots a^{(\kappa_m)}(k_m) a^{(\kappa'_1)\dagger}(q_1) \dots a^{(\kappa'_p)\dagger}(q_p) [\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)] | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | [\partial^\mu A_\mu^{(-)}(x)] a^{(\kappa_1)}(k_1) \dots a^{(\kappa_m)}(k_m) a^{(\kappa'_1)\dagger}(q_1) \dots a^{(\kappa'_p)\dagger}(q_p) | 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

et qu'en particulier

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu(x) | 0 \rangle = 0.$$

Ces résultats suggèrent de définir les états physiques en demandant que la condition invariante de Lorentz

$$\langle \phi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0 \quad (2.121)$$

soit vérifiée par toute paire d'états physiques $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$. La *condition de Gupta et Bleuler* (2.121) est vérifiée par les états (2.120); il reste à en caractériser toutes les solutions.

Par linéarité dans l'espace des états, la condition (2.121) est équivalente à

$$i\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\psi\rangle = \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} e^{-ikx} \sum_{\kappa=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k) |\psi\rangle = 0, \quad (2.122)$$

pour tout état physique $|\psi\rangle$, une condition qui ne fait intervenir que les polarisations scalaire ($\kappa = 0$) et longitudinale ($\kappa = 3$).

L'espace de Fock possède une base formée d'états de la forme

$$a^{(0)\dagger}(p_1) \dots a^{(0)\dagger}(p_s) a^{(3)\dagger}(p'_1) \dots a^{(3)\dagger}(p'_t) |k_1, \kappa_1; \dots; k_m, \kappa_m\rangle, \quad \kappa_i = 1, 2.$$

Comme $\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)$ commute avec les opérateurs de création de polarisations transverses, résoudre la condition (2.122) revient à résoudre

$$[\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)] a^{(0)\dagger}(p_1) \dots a^{(0)\dagger}(p_s) a^{(3)\dagger}(p'_1) \dots a^{(3)\dagger}(p'_t) |0\rangle = 0, \quad (2.123)$$

ou encore:

$$\left[\sum_{\kappa=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k) \right] a^{(0)\dagger}(p_1) \dots a^{(0)\dagger}(p_s) a^{(3)\dagger}(p'_1) \dots a^{(3)\dagger}(p'_t) |0\rangle = 0. \quad (2.124)$$

Comme $k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$ est un invariant de Lorentz, on peut utiliser le référentiel correspondant à (2.106), (2.109), (2.110) et (2.112), dans lequel

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(0)}(k) = -k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(k).$$

Avec ce choix, la condition (2.124) est équivalente à

$$\left[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k) \right] a^{(0)\dagger}(p_1) \dots a^{(0)\dagger}(p_s) a^{(3)\dagger}(p'_1) \dots a^{(3)\dagger}(p'_t) |0\rangle = 0. \quad (2.125)$$

Cette condition est sans information pour l'état du vide $|0\rangle$, mais elle est déjà significative sur un état à une particule: si on considère une combinaison linéaire arbitraire des polarisations scalaire et longitudinale,

$$|\phi_1\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} \left(c^0(q) a^{(0)\dagger}(q) + c^3(q) a^{(3)\dagger}(q) \right) |0\rangle,$$

comme

$$a^{(0)}(k) |\phi_1\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} c^0(q) [a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(q)] |0\rangle = -c^0(k) |0\rangle,$$

$$a^{(3)}(k) |\phi_1\rangle = +c^3(k) |0\rangle,$$

la condition (2.125) impose $c^0(k) = -c^3(k) \equiv c(k)$, $\forall k$. Un état à un quantum vérifiant la condition de Gupta-Bleuler est donc de la forme

$$|\phi_1\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} c(q) \left[a^{(0)\dagger}(q) - a^{(3)\dagger}(q) \right] |0\rangle.$$

On voit facilement que la norme de cet état est nulle, $\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = 0$, puisque $\langle 0 | a^{(0)}(q) a^{(0)\dagger}(q') | 0 \rangle = -\langle 0 | a^{(3)}(q) a^{(3)\dagger}(q') | 0 \rangle$ du fait du mauvais signe du commutateur des opérateurs $a^{(0)}(k)$. En conséquence, un état à une “particule” de l’espace de Fock,

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\kappa=0}^3 c_{\kappa}(k) a^{(\kappa)\dagger}(k) | 0 \rangle$$

soumis à la condition de Gupta-Bleuler ne contient pas d’information dans sa composante de polarisations longitudinale et scalaire, qui est de norme nulle.

Pour généraliser le cas d’un quantum non physique discuté ci-dessus, il est utile d’introduire l’opérateur de nombre

$$N' = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right], \quad (2.126)$$

qui vérifie

$$[N', a^{(0)\dagger}(k)] = a^{(0)\dagger}(k), \quad [N', a^{(3)\dagger}(k)] = a^{(3)\dagger}(k),$$

ainsi que $[N', a^{(1)\dagger}(k)] = [N', a^{(2)\dagger}(k)] = 0$. L’opérateur N' compte le nombre de quanta de polarisation scalaire ou longitudinale présents dans un état. Considérons ensuite un état $|\phi_n\rangle$ pour lequel

$$N' |\phi_n\rangle = n |\phi_n\rangle,$$

et supposons que cet état vérifie la condition (2.125). On a alors

$$\begin{aligned} n \langle \phi_n | \phi_n \rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \langle \phi_n | \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right] | \phi_n \rangle \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \langle \phi_n | \left[a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right] | \phi_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

La deuxième ligne est obtenue en remplaçant grâce à (2.125) la polarisation longitudinale (3) par (0). La norme de l’état $|\phi_n\rangle$ est donc nulle sauf si $n = 0$:

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \delta_{n,0} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle. \quad (2.127)$$

Un état quelconque de l’espace de Fock vérifiant la condition (2.125) est certainement de la forme

$$|\phi\rangle = \sum_{n \geq 0} |\phi_n\rangle, \quad N' |\phi_n\rangle = n |\phi_n\rangle.$$

Sa norme est

$$\langle \phi | \phi \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle.$$

Puisque $|\phi_0\rangle$ ne contient que des polarisations transverses dont les commutateurs ont le “bon signe”, la norme de $|\phi\rangle$ est positive. Et seules les polarisations transverses contiennent de l’information.

On en conclut qu'imposer la projection de Gupta et Bleuler aux états de l'espace de Fock revient à enlever toute signification aux polarisations indésirables, pour ne garder que les polarisations transverses $\kappa = 1, 2$ décrivant le champ de jauge de masse nulle. Les états formés en combinant linéairement les états

$$a^{(\kappa_1)\dagger}(k_1) \dots a^{(\kappa_n)\dagger}(k_n)|0\rangle, \quad \kappa_1, \dots, \kappa_n = 1 \text{ ou } 2$$

sont automatiquement solutions de la condition de Gupta-Bleuler (2.122). Ils suffiront à décrire l'ensemble des états physiques pour le champ de jauge quantifié. Mais la cohérence de la quantification exige de considérer l'espace de Fock entier, y compris les états non physiques.

L'opérateur hamiltonien de la théorie s'écrit

$$\begin{aligned} H &= : \int d^3x [\Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}] : = : \frac{1}{2} \int d^3x \left[\sum_i (F_{0i})^2 + \sum_{i < j} (F_{ij})^2 \right] : \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\sum_{\kappa=1}^3 a^{(\kappa)\dagger}(k) a^{(\kappa)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right] \\ &= H_T + H', \end{aligned} \quad (2.128)$$

avec

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^{(1)\dagger}(k) a^{(1)}(k) + a^{(2)\dagger}(k) a^{(2)}(k) \right], \\ H' &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]. \end{aligned}$$

Comme pour l'opérateur de nombre N' , on montre que:

$$\langle \phi_n | H' | \phi_n \rangle = \langle \phi | H' | \phi \rangle = 0. \quad (2.129)$$

Mais H' ne s'annule pas sur les états $|\phi_n\rangle$. D'autre part, pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | H_T | \phi_n \rangle &= n^{-1} \langle \phi_n | H_T N' | \phi_n \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \langle \phi_n | \left[a^{(3)\dagger}(k) H_T a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) H_T a^{(0)}(k) \right] | \phi_n \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle \phi_0 | H_T | \phi_0 \rangle. \quad (2.130)$$

Seule la composante purement transverse $|\phi_0\rangle$ d'un état physique vérifiant la condition (2.121) contribue à l'énergie, et seule la partie transverse H_T de l'hamiltonien intervient dans le calcul de l'énergie.

2.4.2 Un exemple de quantification non covariante: la jauge de radiation

Nous avons vu que l'équation du mouvement de la théorie invariante de jauge classique, dont la densité lagrangienne est $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, admet une solution triviale qui ne contribue pas à $F_{\mu\nu}$ et qu'une transformation de jauge peut éliminer, et des solutions physiquement significatives de polarisations transverses et de masse nulle. On peut donc écrire

$$A_\mu(x) = \int d^4q c(q) q_\mu e^{iqx} + \text{c.c.} \\ + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k) e^{-ikx} + \text{c.c.}, \quad k^0 = |\vec{k}|, \quad (2.131)$$

où la première ligne contient la solution triviale dans laquelle q^2 est quelconque. Les vecteurs de polarisation $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$ vérifient

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) = 0, \quad (k^2 = 0), \quad (2.132)$$

sans être proportionnels à k_μ . La transformation de jauge

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad \Lambda(x) = i \int d^4q c(q) e^{iqx} + \text{c.c.}$$

élimine la solution triviale. On peut alors choisir un référentiel dans lequel

$$\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) = (0, \vec{\epsilon}^{(\kappa)}(k)), \quad \vec{\epsilon}^{(\kappa)}(k) \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\epsilon}^{(\kappa)}(k) \cdot \vec{\epsilon}^{(\kappa')}(k) = \delta^{\kappa\kappa'}, \quad (\kappa, \kappa' = 1, 2), \quad (2.133)$$

ainsi que

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_i^{(\kappa)}(k) \epsilon_j^{(\kappa)}(k) = \delta_{ij} - \frac{1}{|\vec{k}|^2} k_i k_j. \quad (2.134)$$

Dans ce référentiel,

$$A_0(x) = 0, \quad (2.135)$$

et la théorie ne contient plus que les champs $\vec{A}(x) = (A_1, A_2, A_3)$ et leurs impulsions conjuguées $\Pi_i = F_{i0} = -\partial_0 A_i$. Ce système est donc formellement semblable à trois champs scalaires réels de masse nulle soumis à la contrainte de polarisation transverse $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, qui suit de (2.132), et qui implique de même $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0$. Les équations $A_0 = 0$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ définissent la *jauge de radiation*, qui n'est pas invariante de Lorentz.

Du fait des contraintes $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0$, il n'est pas possible de quantifier le système en imposant:

$$[A_j(\vec{x}, t), \Pi_k(\vec{y}, t)] = -i \delta_{jk} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.136)$$

Le membre droit de cette relation ne s'annule pas lorsqu'on prend sa divergence par rapport à \vec{x} ou \vec{y} . Les relations de commutation appropriées s'avèrent être¹³

$$\begin{aligned} [A_j(\vec{x}, t), \Pi_k(\vec{y}, t)] &= -i\delta_{jk}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \\ [A_j(\vec{x}, t), A_k(\vec{y}, t)] &= [\Pi_j(\vec{x}, t), \Pi_k(\vec{y}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Le signe du commutateur $[A_j, \Pi_k]$ suit de $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, comparez avec les expressions (2.104). Puisque¹⁴ $\Delta_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \Delta_{\vec{y}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, on a bien

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} [A_j(\vec{x}, t), \Pi_k(\vec{y}, t)] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial y^k} [A_j(\vec{x}, t), \Pi_k(\vec{y}, t)] = 0,$$

en accord avec les contraintes $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0$.

Avec l'expansion en ondes planes (2.131) du champ $A_\mu(x)$ dans la jauge $c(q) = 0$ et la relation (2.134), on vérifie que les commutateurs

$$\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)] &= 2k^0(2\pi)^3 \delta^{\kappa\kappa'} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')}(q)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

conduisent bien aux relations (2.137). La vérification utilise l'égalité

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Les relations (2.138) sont identiques à celles obtenues pour les polarisations transverses lors de la quantification covariante. En interprétant $a^{(\kappa)\dagger}(k)$ comme l'opérateur de création d'un quantum d'impulsion $k = (|\vec{k}|, \vec{k})$ et de polarisation transverse $\vec{\epsilon}^{(\kappa)}(k)$, l'espace des états contient uniquement les états physiques engendrés par

$$\begin{aligned} |k_1, \kappa_1; k_2, \kappa_2; \dots; k_n, \kappa_n\rangle &= a^{(\kappa_1)\dagger}(k_1) a^{(\kappa_2)\dagger}(k_2) \dots a^{(\kappa_n)\dagger}(k_n) |0\rangle, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad \kappa_i = 1, 2. \end{aligned}$$

La quantification dans la jauge de radiation a l'avantage de ne faire intervenir que les états physiques de polarisations transverses. Le prix à payer est l'abandon de la covariance de Lorentz par l'utilisation des conditions non covariantes $A_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Et la présence de contraintes rend la quantification canonique plus subtile.

¹³Pour une discussion approfondie: Weinberg [2], sections 8.2 et 8.3.

¹⁴ $\Delta_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}}$ est le Laplacien pour la variable \vec{x} .

2.5 Propagateurs

Les opérateurs de champs $\phi(x)$, $A_\mu(x)$ et $\psi(x)$ sont capables de créer ou de détruire des particules ou des antiparticules. Par construction, ils sont solutions des équations du mouvement de la théorie libre. Nous allons maintenant les utiliser pour décrire la propagation libre de particules par l'intermédiaire de leurs propagateurs respectifs, c'est-à-dire de fonctions de Green des équations du mouvement vérifiant une prescription de propagation causale. Nous commençons par le champ le plus simple, le champ scalaire.

Le propagateur du champ scalaire

L'opérateur de champ $\phi^\dagger(x)$ crée une particule ou détruit une antiparticule. Par conséquent, l'état $\phi^\dagger(x)|0\rangle$ est une solution de l'équation de Klein-Gordon qui contient une particule de charge $Q = 1$, d'après (2.47). De même, $\phi(x)|0\rangle$ est un état de charge $Q = -1$ contenant une antiparticule, et une solution de l'équation de Klein-Gordon:

$$Q\phi^\dagger(x)|0\rangle = \phi^\dagger(x)|0\rangle, \quad Q\phi(x)|0\rangle = -\phi(x)|0\rangle.$$

La propagation d'une charge $Q = +1$ de x vers x' peut être décrite de deux façons en termes de particules et d'antiparticules. Premièrement, on peut créer une particule en x et la détruire en x' . Deuxièmement, on peut créer une antiparticule en x' et la détruire en x . Les opérateurs correspondant à ces deux descriptions sont respectivement:

$$\phi(x')\phi^\dagger(x) \quad \text{et} \quad \phi^\dagger(x)\phi(x').$$

Ils ajoutent une charge $Q = +1$ en x et une charge $Q = -1$ en x' . Pour tenir compte de ces deux descriptions, on introduit une prescription de causalité qui revient à demander qu'une particule ou antiparticule se propage vers des temps croissants. Si $x'^0 = t' > x^0 = t$, on dira que la propagation d'une charge $Q = +1$ de x vers x' correspond à la création d'une particule par $\phi^\dagger(x)$ puis sa destruction par $\phi(x')$. L'opérateur correspondant est

$$\theta(t' - t)\phi(x')\phi^\dagger(x). \quad (2.139)$$

Par contre, si $t > t'$, elle correspond à la création d'une antiparticule par $\phi(x')$ puis sa destruction par $\phi^\dagger(x)$, à l'aide de l'opérateur

$$\theta(t - t')\phi^\dagger(x)\phi(x'). \quad (2.140)$$

La somme de ces deux opérateurs décrit la propagation de la charge $Q = +1$ de x vers x' :

$$\theta(t' - t)\phi(x')\phi^\dagger(x) + \theta(t - t')\phi^\dagger(x)\phi(x') \equiv T\phi(x')\phi^\dagger(x). \quad (2.141)$$

La notation $T\phi(x')\phi^\dagger(x)$ désigne un *produit chronologique* de Dyson des opérateurs $\phi(x')$ et $\phi^\dagger(x)$. En général, le produit chronologique de n opérateurs bosoniques est défini de la manière suivante:

$$TA_1(x_1)A_2(x_2)\dots A_n(x_n) = A_{i_1}(x_{i_1})A_{i_2}(x_{i_2})\dots A_{i_n}(x_{i_n}), \quad (2.142)$$

où l'ordre des facteurs est tel que

$$x_{i_1}^0 \geq x_{i_2}^0 \geq \dots \geq x_{i_n}^0.$$

Autrement dit, le produit chronologique d'un produit d'opérateurs ordonne les facteurs en temps décroissants vers la droite: le temps le plus ancien apparaît toujours dans l'opérateur de champ le plus à droite.

L'étape suivante est de montrer que l'amplitude $i\langle 0|T\phi(x')\phi^\dagger(x)|0\rangle$ obtenue à partir du produit chronologique (2.141) est une *fonction de Green* de l'opérateur de Klein-Gordon, c'est-à-dire une fonction $G_F(x' - x)$ vérifiant

$$(\square_{x'} + m^2)G_F(x' - x) = \delta^4(x' - x), \quad \square_{x'} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \quad (2.143)$$

Pour cela, on observe tout d'abord que

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} T\phi(x')\phi^\dagger(x) = \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ T \frac{\partial}{\partial t'} \phi(x')\phi^\dagger(x) + \delta(t' - t)[\phi(x'), \phi^\dagger(x)] \right\},$$

puisque

$$\frac{\partial}{\partial t'} \theta(t' - t) = \delta(t' - t), \quad \frac{\partial}{\partial t'} \theta(t - t') = -\delta(t' - t).$$

Mais, d'après (2.39),

$$\delta(t' - t)[\phi(x'), \phi^\dagger(x)] = i\delta(t' - t)\Delta(x' - x) = i\delta(t' - t)\Delta(0, \vec{x}' - \vec{x}) = 0.$$

Il vient donc:

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} T\phi(x')\phi^\dagger(x) = T \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi(x')\phi^\dagger(x) + \delta(t' - t) \left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x'), \phi^\dagger(x) \right]. \quad (2.144)$$

Le calcul se poursuit en observant que

$$\begin{aligned} \delta(t' - t) \left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x'), \phi^\dagger(x) \right] &= i\delta(t' - t) \frac{\partial}{\partial t'} \Delta(x' - x) \\ &= -i\delta(t' - t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \\ &= -i\delta^4(x' - x), \end{aligned}$$

qui conduit finalement à

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} T\phi(x')\phi^\dagger(x) = T \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi(x')\phi^\dagger(x) - i\delta^4(x' - x).$$

Comme d'autre part

$$[-\Delta_{x'} + m^2]T\phi(x')\phi^\dagger(x) = T[-\Delta_{x'} + m^2]\phi(x')\phi^\dagger(x),$$

où $\Delta_{x'}$ est le Laplacien pour la variable \vec{x}' , il vient

$$(\square_{x'} + m^2)T\phi(x')\phi^\dagger(x) = T(\square_{x'} + m^2)\phi(x')\phi^\dagger(x) - i\delta^4(x' - x) = -i\delta^4(x' - x) \quad (2.145)$$

par l'équation de Klein-Gordon, et l'amplitude

$$G_F(x' - x) = i\langle 0|T\phi(x')\phi^\dagger(x)|0\rangle \quad (2.146)$$

est une fonction de Green de l'opérateur de Klein-Gordon.

Cette amplitude peut ensuite être calculée en utilisant l'expansion en modes (2.36) du champ scalaire. Les seuls termes non nuls contiennent l'élément de matrice

$$\langle 0|a(k')a^\dagger(k)|0\rangle = \langle 0|[a(k'), a^\dagger(k)]|0\rangle = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}),$$

ou $\langle 0|b(k)b^\dagger(k')|0\rangle$ qui a la même valeur, si bien que

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x')\phi^\dagger(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x'-x)}, \\ \langle 0|\phi^\dagger(x)\phi(x')|0\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x'-x)}, \end{aligned}$$

et finalement

$$G_F(x' - x) = i\theta(t' - t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x'-x)} + i\theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(x'-x)}, \quad (2.147)$$

ou encore (avec un changement $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ de variable d'intégration)

$$G_F(x' - x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[\theta(t' - t) \frac{i}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t'-t)} + \theta(t - t') \frac{i}{2\omega_k} e^{i\omega_k(t'-t)} \right]. \quad (2.148)$$

Nous allons ensuite transformer cette expression en une intégrale sur d^4k , en traitant séparément les cas $t' > t$ et $t > t'$. L'astuce est de considérer l'intégrale de contour dans le plan k_0 complexe suivante:

$$\begin{aligned} I_C &= \int_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t'-t)} \\ &= -\frac{1}{2\omega_k} \int_C \frac{dk_0}{2\pi} \left(\frac{1}{k_0 - \omega_k} - \frac{1}{k_0 + \omega_k} \right) e^{-ik_0(t'-t)}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

où C est un contour fermé à définir, ϵ un nombre réel positif petit et non nul dont le rôle apparaîtra plus bas et $\omega_k = [\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon]^{1/2}$. Notez que $\text{Im } \omega_k < 0$. La valeur de l'intégrale I_C est

$$I_C = 2\pi i (\text{Sgn}_C) \sum \text{Rés.},$$

où Sgn_C est un signe indiquant l'orientation de la courbe C et $\sum \text{Rés.}$ est la somme des résidus des pôles en $k_0 = +\omega_k$ et $k_0 = -\omega_k$ à l'intérieur de C :

$$\begin{aligned} k_0 = +\omega_k : \quad \text{Rés.} &= \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t'-t)}, \\ k_0 = -\omega_k : \quad \text{Rés.} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\omega_k} e^{i\omega_k(t'-t)}. \end{aligned}$$

Supposons premièrement que $t' > t$. On choisit un contour C qui parcourt l'axe réel croissant et se referme par un demi-cercle de rayon $|k_0| \rightarrow \infty$ dans le demi-plan inférieur, $\text{Im } k_0 < 0$. Dans ce cas

$$e^{-ik_0(t'-t)} = e^{\text{Im } k_0(t'-t)} e^{-i \text{Re } k_0(t'-t)} \quad (2.150)$$

s'annule sur le demi-cercle et

$$I_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t'-t)}.$$

Le contour C dans le demi-plan inférieur ne contient que le pôle en $k_0 = +\omega_k$ et

$$I_C = \frac{i}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t'-t)}, \quad (2.151)$$

puisque $\text{Sgn}_C = -1$.

Si par contre $t' < t$, on prend un contour C qui parcourt l'axe réel croissant et se referme par un demi-cercle de rayon $|k_0| \rightarrow \infty$ dans le demi-plan supérieur $\text{Im } k_0 > 0$. A nouveau,

$$I_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t'-t)}.$$

Et comme C ne contient que le pôle en $k_0 = -\omega_k$, il vient

$$I_C = \frac{i}{2\omega_k} e^{i\omega_k(t'-t)}, \quad (2.152)$$

puisque cette fois $\text{Sgn}_C = 1$. On peut donc écrire

$$\theta(t' - t) \frac{i}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t'-t)} + \theta(t - t') \frac{i}{2\omega_k} e^{i\omega_k(t'-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t'-t)},$$

étant sous-entendu que l'intégrale est définie au moyen du contour C qui convient au signe de $t' - t$, et que la limite

$$\epsilon \longrightarrow 0_+$$

est prise (après l'intégration). Ce dernier résultat conduit à

$$\begin{aligned} G_F(x' - x) &= i \langle 0 | T \phi(x') \phi^\dagger(x) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | T \phi(x') \phi^\dagger(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x'-x)}, \end{aligned} \quad (2.153)$$

avec la limite $\epsilon \rightarrow 0_+$. Autrement dit, la transformée de Fourier de $G_F(x' - x)$ est

$$\tilde{G}(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.154)$$

Le rôle de la quantité ϵ est de sélectionner la singularité qui contribue à $G_F(x' - x)$ selon le signe de $t' - t$. D'après la prescription de causalité introduite pour la définir, la fonction $G_F(x' - x)$ reçoit lorsque $t' > t$ une contribution de la particule se propageant de x en x' . Dans ce cas, ϵ sélectionne le pôle d'énergie positive, $k_0 = \omega_k$: la particule est associée à l'onde plane d'énergie positive. Lorsque $t' < t$, l'antiparticule se propageant de x' vers x contribue à $G_F(x' - x)$ et ϵ sélectionne le pôle d'énergie négative, $k_0 = -\omega_k$: l'antiparticule est associée à l'onde plane d'énergie négative. En résumé, ϵ met en œuvre la prescription causale.

La fonction de Green $G_F(x' - x)$ donnée par les équations (2.153) ou (2.147) et vérifiant la prescription de causalité est le *propagateur de Feynman* (ou propagateur causal).

En fait, puisque la fonction $G_F(x' - x)$ est une fonction de Green de l'opérateur de Klein-Gordon, on aurait pu la calculer en résolvant directement l'équation différentielle (2.143). En passant à la transformée de Fourier, cette équation devient

$$(-k^2 + m^2)\tilde{G}(k) = 1. \quad (2.155)$$

Pour $k^2 \neq m^2$, clairement, $\tilde{G}(k) = -(k^2 - m^2)^{-1}$. La discussion précédente a montré que le traitement des singularités en $k_0 = \pm\omega_k$ suit de la prescription de causalité et se manifeste par l'introduction de la quantité ϵ et de la limite $\epsilon \rightarrow 0_+$ dans (2.154). La prescription de causalité définit la fonction de Green sur la couche de masse $k^2 = m^2$. Il est clair que l'équation de définition de la fonction de Green (2.143) fixe $G_F(x' - x)$ à une solution de l'équation de Klein-Gordon près. La prescription de causalité fixe cette solution de Klein-Gordon.

Trois remarques pour terminer ce paragraphe. Premièrement,

$$G_F(x' - x) = i\langle 0|T\phi(x')\phi^\dagger(x)|0\rangle = G_F(x - x') = i\langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(x')|0\rangle,$$

et $\tilde{G}(-k) = \tilde{G}(k)$. Deuxièmement,

$$\langle 0|T\phi(x')\phi(x)|0\rangle = \langle 0|T\phi^\dagger(x')\phi^\dagger(x)|0\rangle = 0.$$

Des opérateurs de charge $Q = \pm 2$ ont nécessairement une valeur moyenne sur l'état du vide nulle. Finalement, le propagateur d'un champ scalaire réel $\varphi(x)$ est

$$i\langle 0|T\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle = G_F(x' - x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x'-x)}. \quad (2.156)$$

Le propagateur du champ spinoriel

Le propagateur de Feynman du champ de Dirac, qui sera noté $S_F(x' - x)$, est une fonction de Green de l'opérateur de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$ vérifiant une prescription causale similaire à celle appliquée au champ scalaire. Il peut donc être obtenu en résolvant l'équation de la fonction de Green

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) S_F(x' - x) = \delta^4(x' - x). \quad (2.157)$$

Cette équation se résout facilement en observant que

$$\square_{x'} + m^2 = \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) \left(-i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right).$$

Alors

$$S_F(x' - x) = - \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} + m\right) G_F(x' - x), \quad (2.158)$$

est clairement une solution de (2.157) avec la même prescription causale que $G_F(x' - x)$. En passant à la transformée de Fourier,

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x' - x)} \tilde{S}(k), \quad (2.159)$$

l'équation (2.158) devient

$$\tilde{S}(k) = -(\gamma^\mu k_\mu + m) \tilde{G}(k),$$

c'est-à-dire

$$\tilde{S}(k) = \frac{\gamma^\mu k_\mu + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.160)$$

avec à nouveau la limite $\epsilon \rightarrow 0_+$.

Le propagateur de Feynman du champ de Dirac s'exprime également à partir d'un produit chronologique. Il faut cependant tenir compte du caractère anti-commutant des champs spinoriels et définir

$$T\psi_a(x')\bar{\psi}_b(x) = \theta(t' - t)\psi_a(x')\bar{\psi}_b(x) - \theta(t - t')\bar{\psi}_b(x)\psi_a(x') = -T\bar{\psi}_b(x)\psi_a(x'), \quad (2.161)$$

où les indices a et b numérotent les quatre composantes de chaque spineur¹⁵. En insérant l'expansion en modes (2.64), en utilisant les éléments de matrice

$$\langle 0|b_\alpha(k)b_\beta^\dagger(q)|0\rangle = \langle 0|d_\beta(q)d_\alpha^\dagger(k)|0\rangle = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}),$$

et les relations de normalisation (1.144), on montre que

$$\langle 0|T\psi(x')\bar{\psi}(x)|0\rangle = -i\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} + m\right) G_F(x' - x),$$

¹⁵Dans un produit chronologique de n spineurs, on ordonne les champs en temps décroissants vers la droite, avec un signe positif (négatif) lorsque la permutation effectuée pour ordonner les champs est paire (impaire).

en comparant avec l'expression (2.147). D'après (2.158),

$$S_F(x' - x)_{ab} = -i\langle 0|T\psi_a(x')\bar{\psi}_b(x)|0\rangle = i\langle 0|T\bar{\psi}_b(x)\psi_a(x')|0\rangle. \quad (2.162)$$

Les indices a et b numérotent les composantes de $S_F(x' - x)$, qui est une matrice (4×4) . Clairement, $S_F(x' - x) \neq S_F(x - x')$.

Le propagateur du champ de jauge

Dans la jauge de Feynman, l'expansion en ondes planes (2.103) conduit à

$$\begin{aligned} & \langle 0|TA_\mu(x')A_\nu(x)|0\rangle \\ &= \eta_{\mu\nu} \left[\theta(t' - t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} e^{-ik(x'-x)} + \theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} e^{ik(x'-x)} \right] \\ &= i\eta_{\mu\nu} G_F(x' - x)|_{m=0}. \end{aligned}$$

$G_F(x' - x)|_{m=0}$ est la fonction de Green (causale) de l'opérateur de Klein-Gordon de masse nulle,

$$\square G_F(x' - x)|_{m=0} = \delta^4(x' - x).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} G_F^{\mu\nu}(x' - x) &= -i\langle 0|TA^\mu(x')A^\nu(x)|0\rangle \\ &= \eta^{\mu\nu} G_F(x' - x)|_{m=0} \end{aligned} \quad (2.163)$$

est le propagateur du champ de jauge dans la jauge de Feynman, où

$$\square A_\mu(x) = 0.$$

En transformée de Fourier,

$$\begin{aligned} G_F^{\mu\nu}(x' - x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x'-x)} \tilde{G}_F^{\mu\nu}(k), \\ \tilde{G}_F^{\mu\nu}(k) &= -\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Dans une jauge covariante quelconque, l'équation du mouvement du champ de jauge est

$$[\square\eta_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu(x) = 0,$$

après avoir fixé la jauge. Le propagateur de Feynman $G_F^{\mu\nu}(x' - x)$ est la fonction de Green causale associée¹⁶:

$$[\square\eta_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu]G_F^{\nu\rho}(x' - x) = \delta^4(x' - x)\delta_\mu^\rho.$$

¹⁶Les dérivées agissent indifféremment sur x ou sur x' .

En transformée de Fourier,

$$[-k^2 \eta_{\mu\nu} + (1 - \lambda) k_\mu k_\nu] \tilde{G}_F^{\nu\rho}(k) = \delta_\mu^\rho. \quad (2.165)$$

Pour $k^2 \neq 0$, la solution est

$$\tilde{G}_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right].$$

La prescription causale pour le pôle en $k^2 = 0$ revient, comme pour le champ scalaire ou spinoriel, à remplacer k^2 par $k^2 + i\epsilon$ dans les dénominateurs et à prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0_+$. On obtient alors:

$$\tilde{G}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right], \quad (2.166)$$

une expression valable pour toutes les valeurs non nulles du paramètre de jauge λ . Deux choix de jauge sont particuliers: la jauge de Feynman $\lambda = 1$ discutée plus haut pour sa simplicité et la jauge de Landau $\lambda \rightarrow \infty$ dans laquelle le propagateur est transverse: $k_\mu \tilde{G}_F^{\mu\nu}(k) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} = 0$.

Si la quantification est effectuée dans une jauge covariante autre que celle de Feynman, il reste encore vrai que

$$\langle 0 | T A^\mu(x') A^\nu(x) | 0 \rangle = i G_F^{\mu\nu}(x' - x).$$

La dépendance en λ du propagateur (2.166) n'a pas de conséquence physique: du fait de l'invariance de jauge des interactions, le deuxième terme ne contribue pas aux probabilités de transition dans une théorie interactive. Au niveau du champ de jauge libre, on peut le voir en introduisant une interaction avec un courant "externe" (classique). La densité lagrangienne sera

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_\lambda - j^\mu A_\mu,$$

où \mathcal{L}_λ est l'expression (2.98). La contribution à l'action du terme d'interaction $-\int d^4x j^\mu A_\mu$ est invariante de jauge si le courant est conservé (et s'il s'annule à l'infini):

$$\delta \int d^4x j^\mu A_\mu = \int d^4x j^\mu \partial_\mu \Lambda = - \int d^4x \Lambda \partial_\mu j^\mu,$$

qui s'annule si $\partial_\mu j^\mu = 0$. L'équation du mouvement inhomogène tirée de \mathcal{L}_j ,

$$\square A_\mu - (1 - \lambda) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = j_\mu,$$

a pour solution:

$$A^\mu(x) = A^{(0)\mu}(x) + \int d^4y G_F^{\mu\nu}(x - y) j_\nu(y),$$

$A^{(0)\mu}(x)$ étant un champ libre, solution de l'équation du mouvement sans courant. En transformée de Fourier,

$$j_\mu(y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqy} j_\mu(q),$$

la conservation du courant s'écrit $q_\mu j^\mu(q) = 0$, et

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A^{(0)\mu}(x) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left[\frac{j_\mu(k)}{k^2 + i\epsilon} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu j^\nu(k)}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] \\ &= A^{(0)\mu}(x) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{j_\mu(k)}{k^2 + i\epsilon}, \end{aligned}$$

sans dépendance en λ .

L'introduction du produit chronologique d'opérateurs de champs a pour vertu de donner une réalisation des fonctions de Green en termes de valeurs moyennes d'opérateurs dans l'espace de Fock. Les propagateurs sont les fonctions de Green à deux particules de la théorie. Nous verrons dans le chapitre suivant que les fonctions de Green à n particules, qui correspondent aux valeurs moyennes du produit chronologique de n opérateurs de champ, jouent un rôle central dans le calcul des probabilités de transition d'une théorie de champs en interaction.

Références

La quantification des champs a été effectuée par la procédure canonique. L'intégrale de chemin donne une autre méthode dont l'élégance devient flagrante lorsqu'il s'agit de considérer les théories de jauge non abéliennes. Pour un traitement de la théorie des champs entièrement dans cette approche: Ramond [3]. Ou encore: Itzykson et Zuber [1], chapitre 9; Weinberg [2], chapitre 9.

Sur l'intégrale de chemin, l'ouvrage classique de Feynman et Hibbs [15], ou celui de Rivers [16].

La quantification des théories de jauge non abéliennes est par exemple décrite dans:

Itzykson et Zuber [1], chapitre 12; Weinberg [2], chapitre 15; Pokorski [7], chapitres 2 et 3.

Exercices

- 2.1** Hélicité et vecteurs de polarisation du champ de jauge: écrire trois états à une particule d'impulsion k^μ et d'hélicité $+1$, -1 et 0 , en excluant la polarisation scalaire. Comme dans le paragraphe 2.4.1, on peut choisir pour simplifier $n = (1, 0, 0, 0)$, $k = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$ et $\epsilon^{(0)}(k) = n$.

Vérifier que l'hélicité de la polarisation scalaire $\epsilon^{(0)}$ est nulle et calculer la quantité

$$\sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 \eta_{\kappa\kappa'} \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) \epsilon_\nu^{(\kappa')}(k)^*$$

avec les quatre vecteurs de polarisation ainsi obtenus.

L'opérateur d'hélicité est $\vec{k} \cdot \vec{S} / |\vec{k}|$ et \vec{S} est défini par les équations (1.83) et (1.56).

- 2.2** Les courants intervenant dans la théorie du champ spinoriel sont en général de la forme $J_i(x) = \bar{\psi}(x) \Gamma_i \psi(x)$, où Γ_i est une matrice 4×4 (une combinaison de produits de matrices de Dirac).

Montrer que le commutateur à temps égaux de deux de ces courants vérifie

$$[J_i(0, \vec{x}), J_j(0, \vec{y})] = \bar{\psi}(0, \vec{x}) [\Gamma_i, \Gamma_j] \psi(0, \vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

En déduire les commutateurs des courants fermioniques

$$j_{L\mu}^A = \bar{\psi}_{LJ} \gamma_\mu (T_\ell^A)^J{}_K \psi_L^K \quad \text{et} \quad j_{R\mu}^A = \bar{\psi}_{RJ} \gamma_\mu (T_r^A)^J{}_K \psi_R^K$$

présents dans la théorie invariante de jauge décrite dans la section 1.5.

Chapitre 3

Processus élémentaires

La procédure suivie pour quantifier les champs libres dans le chapitre précédent est en pratique inapplicable au cas d'une théorie interactive. Pour des champs libres, il est possible de résoudre les conditions de quantification canonique, c'est-à-dire de construire complètement l'espace des états et les opérateurs de champs qui y agissent. La résolution des équations d'Euler-Lagrange est pour cela indispensable. Pour des champs libres, ces équations sont linéaires et se résolvent facilement en les développant en modes de Fourier, c'est-à-dire en ondes planes. Cette expansion conduit à l'interprétation en termes d'opérateurs de création et d'annihilation des champs libres quantifiés. Les équations d'Euler-Lagrange d'une théorie interactive sont non linéaires. Leurs solutions sont en général inconnues. Il est alors impossible de résoudre les conditions de quantification canonique, ou de vérifier qu'elles s'appliquent de manière similaire au cas libre, ce qui devrait être en principe vrai, ou encore de construire explicitement les opérateurs de champs.

En supposant cependant que ces opérateurs de champs existent, il sera possible de calculer certaines quantités physiques de la théorie interactive en se limitant à des situations favorables telles que les processus de diffusion ou de désintégration couramment rencontrés en physique des particules, et en utilisant une expansion perturbative. Dans un processus de diffusion ou de désintégration, les *états asymptotiques*, longtemps avant ou après la diffusion ou la désintégration, peuvent être vus en très bonne approximation comme formés de particules libres et spatialement éloignées, l'interaction n'agissant que dans un volume et un intervalle de temps limités. Calculer la probabilité d'un tel processus revient donc à calculer la probabilité de transition entre deux états asymptotiques, l'état initial au temps $t \rightarrow -\infty$ et l'état final au temps $t \rightarrow +\infty$, décrits au moyen des champs quantiques libres construits au chapitre précédent. C'est l'approche dite de la *matrice S* dont les éléments de matrice donnent les amplitudes de probabilité de ces processus.

L'évaluation des éléments de matrice S s'effectue en deux étapes, qui vont

être successivement décrites dans ce chapitre. Premièrement, il s'agira de relier ces quantités aux fonctions de Green de la théorie de champs au moyen de la réduction (de Lehmann, Symanzik et Zimmermann, ou LSZ). Ensuite, le calcul des fonctions de Green requiert l'usage de la théorie des perturbations, exprimée par le formalisme des diagrammes de Feynman. Auparavant, nous allons préciser quelque peu les notions de matrice S et d'états asymptotiques.

3.1 Matrice S et théorie asymptotique

Nous allons donc nous intéresser à des processus de diffusion de particules pour lesquels, à une échelle macroscopique, les durées caractéristiques d'interaction sont très petites. On peut donc espérer décrire l'interaction comme la transition d'un état asymptotique initial $|in\rangle$, formé de paquets d'ondes libres et bien séparés (spatialement), vers un état asymptotique $|out\rangle$ également formé de paquets d'ondes libres et bien séparés. Nous avons vu dans le chapitre précédent que de tels états peuvent être caractérisés par des quantités comme l'impulsion ou la polarisation et des “nombres quantiques” (masses, spins, charges...). Nous utiliserons la notation a et b pour l'ensemble des quantités définissant respectivement les états initial et final. La probabilité de la transition est donc obtenue à partir de l'amplitude

$$\langle b, out | a, in \rangle,$$

qui est une fonction covariante de Lorentz des quantités symbolisées par a et b . Par exemple, pour la diffusion de deux particules de spin zéro décrites par un champ scalaire réel, on écrira en général

$$|in\rangle = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2\omega_{p_2}} f_1(p_1) f_2(p_2) |p_1, p_2, in\rangle, \quad (3.1)$$

$|p_1, p_2, in\rangle$ étant un état à deux particules d'impulsions p_1 et p_2 ¹. L'état $|in\rangle$ est alors une superposition d'états libres, d'impulsions p_1 et p_2 , avec deux distributions d'impulsions $f_1(p_1)$ et $f_2(p_2)$ (les profils des deux paquets d'ondes). Par linéarité dans la théorie libre, la connaissance des amplitudes

$$\langle b, out | p_1, p_2, in \rangle$$

suffit à déterminer $\langle b, out | in \rangle$. Le même argument s'applique à l'état final $|b, out\rangle$, si celui-ci contient n particules.

Le problème consiste donc à établir la relation entre les états $|out\rangle$ et $|in\rangle$. On suppose donc que cette relation est linéaire et qu'il existe un opérateur S , appelé matrice S , tel que

$$|in\rangle = S|out\rangle, \quad |out\rangle = S^{-1}|in\rangle, \quad (3.2)$$

¹Pour le champ libre, $|p_1, p_2, in\rangle = c a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) |0\rangle$, la constante c normalisant l'état.

et donc

$$\langle in| = \langle out|S^\dagger, \quad \langle out| = \langle in|(S^+)^{-1}, \quad (3.3)$$

pour n'importe quels états $|in\rangle$ ou $|out\rangle$ (n'importe quels a et b). S doit être unitaire par conservation de la probabilité:

$$\langle out|out\rangle = \langle in|in\rangle = \langle out|S^+S|out\rangle,$$

et donc

$$S^+S = 1, \quad (3.4)$$

et $\langle out| = \langle in|S$. En conséquence,

$$\langle b, out|a, in\rangle = \langle b, in|S|a, in\rangle = \langle b, out|S|a, out\rangle.$$

Par convention, on choisit en général de calculer les amplitudes sur des états $|in\rangle$:

$$\langle b, out|a, in\rangle = \langle b|S|a\rangle, \quad (3.5)$$

en écrivant simplement $|a, in\rangle = |a\rangle$. Parfois, on posera de plus

$$S = 1 + iT \quad (3.6)$$

où la matrice iT contient les transitions non triviales uniquement.

Pour simplifier la discussion, nous allons premièrement considérer le cas d'un champ scalaire réel unique $\varphi(x)$, en interaction. Si on suppose que les interactions sont inopérantes sur des états très éloignés, qu'elles s'annulent régulièrement (adiabatiquement) pour $t \rightarrow -\infty$, on doit pouvoir relier $\varphi(x)$ à un champ libre $\varphi_{in}(x)$ dans cette limite. Dans le passé lointain, la relation est de la forme

$$t = x_0 \rightarrow -\infty : \quad \varphi(x) \rightarrow Z^{1/2}\varphi_{in}(x). \quad (3.7)$$

La signification du facteur Z est, schématiquement, la suivante. L'opérateur de champ libre φ_{in} agit dans l'espace de Fock du champ libre, dont le vide est $|0\rangle$. Si $|n\rangle$ est un état à n particules, $\langle n|\varphi_{in}(x)|0\rangle = 0$ lorsque $n > 1$. Ce n'est en général pas le cas de $\langle n|\varphi(x)|0\rangle$: l'action du champ en interaction non linéaire est plus complexe que de créer seulement une particule sur l'état du vide et il n'y pas lieu d'admettre la conservation d'un "nombre de quanta" comme pour le champ libre. On est donc tenté de supposer que

$$|\langle 1|\varphi(x)|0\rangle| < |\langle 1|\varphi_{in}(x)|0\rangle|,$$

et, dans la limite $x_0 \rightarrow -\infty$,

$$\langle 1|\varphi(x)|0\rangle \rightarrow Z^{1/2} \cdot \langle 1|\varphi_{in}(x)|0\rangle,$$

pour tenir compte du fait que la probabilité n'est pas entièrement contenue dans l'amplitude $\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$ pour un champ en interaction. L'intuition suggère ainsi que la valeur de Z est comprise entre 0 et 1. En fait, on peut montrer que

$0 \leq Z < 1$, la valeur limite $Z = 1$ correspondant au champ libre. La limite asymptotique (3.7) doit cependant être comprise comme une limite au sens faible, valable séparément pour chaque élément de matrice, la valeur de Z dépendant de l'élément de matrice considéré. Sinon, on pourrait conclure que

$$t \longrightarrow -\infty : \quad [\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{y})] = Z[\varphi_{in}(t, \vec{x}), \varphi_{in}(t, \vec{y})]$$

et $\varphi(x)$ serait alors un champ libre (à tous les temps!).

Par analogie avec (3.7), la condition asymptotique dans le futur lointain est

$$t = x_0 \longrightarrow +\infty : \quad \varphi(x) \longrightarrow Z^{1/2} \varphi_{out}(x), \quad (3.8)$$

avec la même constante Z .

Comme l'état du vide est à une phase près unique, on peut toujours aligner les vides asymptotiques (libres),

$$|0, in\rangle = |0, out\rangle = |0\rangle, \quad (3.9)$$

par un choix de phases. Il en découle que

$$1 = \langle 0|0\rangle = \langle 0, out|0, in\rangle = \langle 0, in|S|0, in\rangle = \langle 0|S|0\rangle.$$

D'autre part, d'après (3.2), pour des états $|in\rangle$ et $|out\rangle$ quelconques

$$\varphi_{in}(x)|in\rangle = \varphi_{in}(x)S|out\rangle = S(\varphi_{out}(x)|out\rangle) = S\varphi_{out}(x)S^{-1}|in\rangle,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{in}(x) = S\varphi_{out}(x)S^{-1}. \quad (3.10)$$

Pour une théorie décrivant un champ scalaire unique $\varphi(x)$, un état à une particule est nécessairement stable²:

$$|1, in\rangle = |1, out\rangle = |1\rangle. \quad (3.11)$$

Il en découle que

$$\langle 1|1'\rangle = \langle 1, in|S|1', in\rangle = \langle 1|S|1'\rangle,$$

ainsi que

$$\langle 0|\varphi(x)|1\rangle = Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{in}(x)|1\rangle = Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{out}(x)|1\rangle, \quad (3.12)$$

puisque l'invariance sous translation exige que les dépendances spatiales des amplitudes $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$, $\langle 0|\varphi_{in}(x)|1\rangle$ et $\langle 0|\varphi_{out}(x)|1\rangle$ soient les mêmes.

Finalement, l'invariance relativiste indique que S commute avec les générateurs du groupe de Poincaré.

²En quoi pourrait-elle se désintégrer?

3.2 Réduction

Le calcul des éléments $\langle out|in \rangle$ de la matrice S comprend généralement deux étapes: on commence par exprimer $\langle out|in \rangle$ en termes des fonctions de Green généralisées de la théorie interactive; ensuite, ces fonctions de Green sont calculées en théorie des perturbations. La première étape est la *réduction*, qui est une procédure algébrique entièrement basée sur les deux conditions asymptotiques (3.7) et (3.8).

3.2.1 Le champ scalaire réel

Pour illustrer la réduction dans un cas simple, considérons dans le cadre de la théorie d'un champ scalaire réel $\varphi(x)$ un processus de collision de deux particules (d'impulsions p_1 et p_2), l'état final ayant également deux particules (d'impulsions q_1 et q_2).

On veut donc calculer l'élément de matrice

$$M = \langle q_1, q_2; out|p_1, p_2; in \rangle. \quad (3.13)$$

Puisque les états asymptotiques sont décrits au moyen d'un champ libre, on aura par exemple

$$M = \langle q_1, q_2; out|a_{in}^\dagger(p_1)|p_2; in \rangle$$

avec³

$$a_{in}^\dagger(p_1) = \int d^3x \varphi_{in}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ip_1x}.$$

L'intégration spatiale est effectuée à un temps quelconque, et son résultat $a_{in}^\dagger(p_1)$ est indépendant du temps. On écrira

$$M = \int_t d^3x e^{-ip_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out|\varphi_{in}(x)|p_2; in \rangle, \quad (3.14)$$

l'indice t indiquant que l'intégrale est prise au temps t . En choisissant $t \rightarrow -\infty$, on peut utiliser la condition asymptotique (3.7):

$$M = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int_t d^3x e^{-ip_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out|\varphi(x)|p_2; in \rangle. \quad (3.15)$$

Le pas suivant utilise une identité valable pour une fonction $f(\vec{x}, t)$ quelconque:

$$\int_{t_1} d^3x f(\vec{x}, t_1) - \int_{t_2} d^3x f(\vec{x}, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} dt \frac{\partial}{\partial t} \int_t d^3x f(\vec{x}, t), \quad (3.16)$$

³Paragraphe 2.2.1, équations (2.13).

dans les limites $t_1 \longrightarrow +\infty, t_2 \longrightarrow -\infty$. L'élément de matrice M devient alors

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{t \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int d^3x e^{-ip_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&\quad + i Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle] \\
&= \langle q_1, q_2; out | a_{out}^\dagger(p_1) | p_2; in \rangle \\
&\quad + i Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Le premier élément de matrice donne:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | a_{out}^\dagger(p_1) | p_2; in \rangle &= \langle 0 | a_{out}(q_1) a_{out}(q_2) a_{out}^\dagger(p_1) | p_2; in \rangle \\
&= (2\pi)^3 2\omega_{p_1} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{q}_2) \langle 0 | a_{out}(q_1) | p_2; in \rangle \\
&\quad + \langle 0 | a_{out}(q_1) a_{out}^\dagger(p_1) a_{out}(q_2) | p_2; in \rangle \\
&= (2\pi)^3 2\omega_{p_1} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{q}_2) \langle q_1; out | p_2; in \rangle \\
&\quad + (2\pi)^3 2\omega_{p_1} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) \langle q_2; out | p_2; in \rangle.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme un état à une particule satisfait $|p; in\rangle = |p, out\rangle$, on vérifie facilement que

$$\langle q; out | p; in \rangle = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \tag{3.19}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
&\langle q_1, q_2; out | a_{out}^\dagger(p_1) | p_2; in \rangle \\
&= (2\pi)^6 4\omega_{p_1} \omega_{p_2} [\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2) + \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{q}_2) \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_1)].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ces deux termes représentent des processus où les deux particules ne sont pas diffusées. Ils peuvent se représenter par les diagrammes non connexes

$$\begin{array}{ccc}
p_1 & \text{-----} & q_1 \\
p_2 & \text{-----} & q_2
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
p_1 & \text{-----} & q_2 \\
p_2 & \text{-----} & q_1
\end{array}$$

On a donc trouvé:

$$M = (\text{non connexes}) + i Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle].$$

Le deuxième terme peut s'écrire sous une forme plus suggestive, et manifestement

invariante de Lorentz:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \partial_0 [e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle] \\
&= \int d^4x [-\partial_0^2 (e^{-ip_1x}) \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle + e^{-ip_1x} \partial_0^2 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle] \\
&= \int d^4x [(-\Delta + m^2) e^{-ip_1x} \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&\quad + e^{-ip_1x} \partial_0^2 \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle] \\
&= \int d^4x e^{-ip_1x} (\square + m^2) \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

en utilisant $(\square + m^2)e^{-ip_1x} = 0$ et en intégrant par parties en supposant comme toujours que les termes de bord s'annulent⁴. Finalement

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | p_1, p_2; in \rangle &= \text{(non connexes)} \\
&\quad + iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ip_1x} (\square + m^2) \langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

qui est l'expression finale de la réduction de la particule initiale d'impulsion p_1 . Malgré l'utilisation asymétrique du temps et de l'espace dans sa dérivation, ce résultat est manifestement invariant de Lorentz.

Dans l'expression (3.22), on peut ensuite réduire de la même façon une particule “out” de l'état final:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle &= \langle q_2; out | a_{out}(q_1) \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&= i \int_{y^0} d^3y e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | \varphi_{out}(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&= \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} iZ^{-1/2} \int_{y^0} d^3y e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&= \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} i \int_{y^0} d^3y e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | \varphi_{in}(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&\quad + iZ^{-1/2} \int d^4y \partial_{y^0} [e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

La dernière expression ne permet cependant pas de calculer l'élément de matrice $\langle q_2; out | \varphi_{in}(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle$ puisque $\varphi_{in}(y)$ n'agit pas directement sur $|p_2; in\rangle$ et que son commutateur avec $\varphi(x)$ est inconnu. Il convient alors de faire usage du produit chronologique:

$$T\varphi(y)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(y)\varphi(x), & y^0 > x^0 \\ \varphi(x)\varphi(y), & y^0 < x^0 \end{cases}$$

⁴On intègre par parties sur l'espace, non sur le temps: il est exclu de demander l'annulation de termes de bord en $t \rightarrow \pm\infty$.

déjà introduit lors de la discussion des propagateurs libres. On peut certainement écrire:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle &= \\
&= \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} i Z^{-1/2} \int_{y^0} d^3 y e^{iq_1 y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | T \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle \\
&= \lim_{y \rightarrow -\infty} i \int_{y^0} d^3 y e^{iq_1 y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | \varphi(x) \varphi_{in}(y) | p_2; in \rangle \\
&\quad + i Z^{-1/2} \int d^4 y \partial_{y^0} [e^{iq_1 y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \langle q_2; out | T \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle],
\end{aligned} \tag{3.24}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | \varphi(x) | p_2; in \rangle &= \langle q_2; out | \varphi(x) a_{in}(q_1) | p_2; in \rangle \\
&\quad + i Z^{-1/2} \int d^4 y e^{iq_1 y} (\square_y + m^2) \langle q_2; out | T \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle
\end{aligned}$$

en évaluant le dernier terme de (3.24) comme en (3.21). Puisque

$$a_{in}(q_1) | p_2; in \rangle = a_{in}(q_1) a_{in}^\dagger(p_2) | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega_{p_2} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_1) | 0 \rangle,$$

le premier terme est non connexe et on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | p_1, p_2; in \rangle &= (\text{non connexes}) \\
&\quad + (i Z^{-1/2})^2 \int d^4 x \int d^4 y e^{-ip_1 x + iq_1 y} (\square_x + m^2) (\square_y + m^2) \langle q_2; out | T \varphi(y) \varphi(x) | p_2; in \rangle.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La réduction peut être poursuivie en traitant de manière entièrement similaire les particules d'impulsions p_2 et q_2 :

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2; out | p_1, p_2; in \rangle &= (\text{non connexes}) \\
&\quad + (i Z^{-1/2})^4 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2 + iq_1 y_1 + iq_2 y_2} \\
&\quad (\square_{x_1} + m^2) (\square_{x_2} + m^2) (\square_{y_1} + m^2) (\square_{y_2} + m^2) \langle 0 | T \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(y_1) \varphi(y_2) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Les termes “non connexes”, qui se calculent facilement, correspondent à des processus sans diffusion. Nous avons donc montré que la partie dynamiquement intéressante de l'élément de matrice S pour la diffusion de deux particules peut être calculée à partir de l'élément de matrice

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | T \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) | 0 \rangle, \tag{3.27}$$

qui est la *fonction de Green à quatre points*.

Le résultat (3.26) se généralise directement à un élément de matrice S avec

des nombres arbitraires de particules initiales et finales:

$$\begin{aligned} \langle q_1, \dots, q_n; out | p_1, \dots, p_m; in \rangle &= (\text{non connexes}) \\ &+ (iZ^{-1/2})^{n+m} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \int d^4y_1 \dots \int d^4y_m \exp \left(i \sum_{i=1}^n x_i q_i - i \sum_{j=1}^m y_j p_j \right) \\ &(\square_{x_1} + m^2) \dots (\square_{x_n} + m^2) (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{y_m} + m^2) \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(y_m) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

qui est la formule de LSZ pour le champ scalaire réel. Chaque contribution y est manifestement invariante de Lorentz. Les impulsions externes n'apparaissent que dans l'exponentielle. On observe la symétrie *particule entrante* \leftrightarrow *particule sortante*, qui se manifeste par le fait qu'une particule initiale d'impulsion p_i (et d'énergie p_i^0 positive) est équivalente à une particule sortante d'impulsion $q_i = -p_i$ (et d'énergie négative), pour le champ scalaire réel qui ne possède pas la notion d'antiparticule.

La formule de réduction (3.28) prend une forme plus suggestive lorsqu'on l'exprime en termes de fonction de Green en espace des impulsions:

$$\begin{aligned} G(z_1, \dots, z_n) &= \langle 0 | T \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} \exp \left(i \sum_{j=1}^n z_j k_j \right) \tilde{G}(k_1, \dots, k_n). \end{aligned} \quad (3.29)$$

En effectuant les intégrations banales sur les variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, il vient

$$\begin{aligned} \langle q_1, \dots, q_n; out | p_1, \dots, p_m; in \rangle &= (\text{non connexes}) \\ &+ (-iZ^{-1/2})^{n+m} \prod_{i=1}^n (q_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^m (p_j^2 - m^2) \tilde{G}(-q_1, \dots, -q_n, p_1, \dots, p_m). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En espace des impulsions, la fonction de Green \tilde{G} aura des pôles dans les variables p_j^2, q_i^2 , aux points $p_j^2 = q_i^2 = m^2$, c'est-à-dire lorsque les impulsions sont sur la couche de masse. La formule de réduction (3.30) montre que la contribution non triviale à l'élément de matrice S est obtenue, au facteur $(-iZ^{-1/2})^{n+m}$ près, en extrayant le résidu du pôle de la fonction de Green sur la couche de masse. La formule explicite le lien entre éléments de matrice S et opérateur de champ, par l'intermédiaire des valeurs sur le vide de produits chronologiques.

La formule (3.30) montre également qu'avec la convention de transformation de Fourier (3.29) pour définir la fonction de Green en espace des impulsions, les variables naturelles de $\tilde{G}(k_1, \dots, k_n)$ sont à interpréter comme des impulsions entrantes (initiales).

La réduction d'une théorie de champs scalaires complexes n'apporte pas de nouveauté, si ce n'est selon les interactions la possibilité d'une charge conservée qui restreindrait les éléments de matrice S non nuls. Un champ complexe est équivalent à deux champs réels.

3.2.2 Fermions

La réduction d'éléments de matrice S pour une théorie de fermions de Dirac en interaction suit d'un calcul presque identique à celui du champ scalaire réel. L'apparition des antiparticules et le fait que le spineur de Dirac est un objet à quatre composantes introduisent cependant des complications supplémentaires et une multiplication du nombre d'indices qui alourdit le formalisme. Conceptuellement, le résultat ne change pas: la conclusion est que les éléments de matrice S s'obtiennent à partir des fonctions de Green du champ en interaction en extrayant le résidu des singularités pour des impulsions "in" et "out" sur la couche de masse.

Les conditions asymptotiques pour un spineur de Dirac en interaction $\psi(x)$ s'écrivent de manière analogue à celles du champ scalaire (3.7) et (3.8), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x^0 \longrightarrow +\infty : \quad \psi(x) &\longrightarrow Z_2^{1/2} \psi_{out}(x), \\ x^0 \longrightarrow -\infty : \quad \psi(x) &\longrightarrow Z_2^{1/2} \psi_{in}(x), \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $\psi_{out}(x)$ et $\psi_{in}(x)$ sont des champs libres, dont l'expansion en modes de Fourier est

$$\psi_{in,out}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_{in,out}^{\alpha}(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_{in,out}^{\dagger\alpha}(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right].$$

Dans (3.31), l'introduction d'un facteur $Z_2^{1/2}$ suit la tradition qui veut que l'indice "2" soit associé aux fermions. L'inversion de l'expansion en modes permet d'obtenir les opérateurs de création et d'annihilation par des intégrales spatiales prises au temps x^0 fixé⁵:

$$\begin{aligned} b_{in}^{\alpha}(k) &= \int_{x^0} d^3x e^{ikx} \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 \psi_{in}(x), \\ d_{in}^{\dagger\alpha}(k) &= \int_{x^0} d^3x e^{-ikx} \bar{v}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 \psi_{in}(x), \\ b_{in}^{\dagger\alpha}(k) &= \int_{x^0} d^3x e^{-ikx} \bar{\psi}_{in}(x) \gamma^0 u^{(\alpha)}(k), \\ d_{in}^{\alpha}(k) &= \int_{x^0} d^3x e^{ikx} \bar{\psi}_{in}(x) \gamma^0 v^{(\alpha)}(k). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Des relations identiques existent pour les opérateurs "out". D'après l'équation de Dirac, les opérateurs de création et d'annihilation sont indépendants du temps et x^0 est donc arbitraire. Nous allons utiliser ces résultats pour réduire les éléments de matrice S en suivant la même procédure que pour le champ scalaire.

Supposons par exemple que nous cherchons à réduire un élément de matrice S de la forme, $\langle out | b_{in}^{\dagger\alpha}(k) | in \rangle$. Le but est de transformer $b_{in}^{\dagger\alpha}(k)$ en $b_{out}^{\dagger\alpha}(k)$. La

⁵Ces résultats utilisent les relations (1.140), ainsi que $u^{(\alpha)\dagger}(k) v^{(\beta)}(\omega_k, -\vec{k}) = 0$.

première étape utilise les relations d'inversion (3.32):

$$\langle out|b_{in}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle = \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} Z_2^{-1/2} \int_{x^0} d^3x e^{-ikx} \langle out|\bar{\psi}(x)\gamma^0|in\rangle u^{(\alpha)}(k).$$

Ensuite, l'identité banale (3.16) et les conditions asymptotiques (3.31) permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} \langle out|b_{in}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle &= \langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle \\ &\quad - Z_2^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left[e^{-ikx} \langle out|\bar{\psi}(x)\gamma_0|in\rangle u^{(\alpha)}(k) \right] \\ &= \langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle \\ &\quad - Z_2^{-1/2} \int d^4x \left[\langle out|\bar{\psi}(x)|in\rangle \gamma^0 \partial_0 [e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k)] \right. \\ &\quad \quad \left. + \langle out|\partial_0 \bar{\psi}(x)\gamma^0|in\rangle u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right] \\ &= \langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle \\ &\quad - i Z_2^{-1/2} \int d^4x \left[\langle out|\bar{\psi}(x)|in\rangle (i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m) [e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k)] \right. \\ &\quad \quad \left. + \langle out|\partial_0 \bar{\psi}(x)|in\rangle (-i\gamma^0) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right] \\ &= \langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle \\ &\quad - i Z_2^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} \langle out|\bar{\psi}(x)|in\rangle (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) u^{(\alpha)}(k). \end{aligned}$$

Le symbole $\overleftarrow{\partial}_\mu$ signifie que la dérivée agit sur la première fonction de x à sa gauche, en l'occurrence sur le champ $\bar{\psi}(x)$. Les deux dernières égalités sont obtenues en utilisant le fait que $e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k)$ est une solution de l'équation de Dirac libre,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k) = 0, \quad i\gamma^\mu \partial_\mu - m = i\gamma^0 \partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m,$$

et en intégrant par parties. L'élément de matrice $\langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle$ donne une contribution de type "non connexe" puisque $\langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)$ est un état libre de la forme

$$\langle 0|b_{out}^{\beta_1}(q_1) \dots b_{out}^{\beta_m}(q_m) b_{out}^{\dagger\alpha}(k)$$

et $\langle 0|b_{out}^{\dagger\alpha}(k) = 0$. Un calcul analogue effectué pour chacun des quatre opérateurs de création et d'annihilation conduit à:

$$\begin{aligned} \langle out|b_{in}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle &= \langle out|b_{out}^{\dagger\alpha}(k)|in\rangle \\ &\quad - i Z_2^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} \langle out|\bar{\psi}(x)|in\rangle (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) u^{(\alpha)}(k), \end{aligned} \tag{3.33}$$

qui est le résultat démontré ci-dessus, et:

$$\begin{aligned}
\langle out | d_{in}^{\dagger\alpha}(k) | in \rangle &= \langle out | d_{out}^{\dagger\alpha}(k) | in \rangle \\
&\quad + i Z_2^{-1/2} \int d^4 x e^{-ikx} \bar{v}^{(\alpha)}(k) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \langle out | \psi(x) | in \rangle, \\
\langle out | b_{out}^\alpha(k) | in \rangle &= \langle out | b_{in}^\alpha(k) | in \rangle \\
&\quad - i Z_2^{-1/2} \int d^4 x e^{ikx} \bar{u}^{(\alpha)}(k) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \langle out | \psi(x) | in \rangle, \\
\langle out | d_{out}^\alpha(k) | in \rangle &= \langle out | d_{in}^\alpha(k) | in \rangle \\
&\quad + i Z_2^{-1/2} \int d^4 x e^{ikx} \langle out | \bar{\psi}(x) | in \rangle (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) v^{(\alpha)}(k).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dans les termes non triviaux (connexes), il apparaît que l'échange

$$e^{-ikx} u^{(\alpha)}(k) \longleftrightarrow -e^{+ikx} v^{(\alpha)}(k) \tag{3.35}$$

revient à échanger une particule entrante ou sortante par une antiparticule sortante ou entrante.

Les relations (3.33) et (3.34) permettent, en introduisant le produit chronologique fermionique T , de dériver la formule de réduction pour les champs spinoriels. L'élément de matrice S pour la transition d'un état initial avec n fermions d'impulsions k_i et de polarisations α_i et n' antifermions (k'_i et α'_i) vers un état final avec m fermions (q_i et β_i) et m' antifermions (q'_i et β'_i) est

$$M = \langle in | out \rangle = \langle 0 | d_{out}^{\beta'_1}(q'_1) \dots b_{out}^{\beta_1}(q_1) \dots b_{in}^{\dagger\alpha_1}(k_1) \dots d_{in}^{\dagger\alpha'_1}(k'_1) \dots | 0 \rangle.$$

Par conservation de la charge, $n - n' = m - m'$, et $m + n + m' + n'$ est donc pair. La réduction de M s'écrit:

$$\begin{aligned}
M &= (\text{non connexes}) \\
&\quad + (-1)^{m+n} (i Z_2^{-1/2})^{m+m'+n+n'} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x'_1 \dots \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y'_1 \dots \\
&\quad \cdot \exp \left[-ik_1 x_1 - \dots - ik'_1 x'_1 - \dots + iq_1 y_1 + \dots + iq'_1 y'_1 + \dots \right] \\
&\quad \cdot \left[\bar{u}^{(\beta_1)}(q_1) (i \not{\partial}_{y_1} - m) \dots \bar{v}^{(\alpha'_1)}(k'_1) (i \not{\partial}_{x'_1} - m) \dots \right] \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \bar{\psi}(y'_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(x_1) \dots \psi(x'_1) \dots | 0 \rangle \\
&\quad \cdot \left[(-i \overleftarrow{\not{\partial}}_{y'_1} - m) v^{(\beta'_1)}(q'_1) \dots (-i \overleftarrow{\not{\partial}}_{x_1} - m) u^{(\alpha_1)}(k_1) \dots \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Notez que l'introduction des variables d'intégration associe dans les exponentielles x_i , x'_i , y_i et y'_i à respectivement k_i , k'_i , q_i et q'_i . Pour interpréter correctement l'action des opérateurs de Dirac apparaissant dans la formule (3.36), considérons par exemple le premier d'entre eux, $\bar{u}^{(\beta_1)}(q_1) (i \not{\partial}_{y_1} - m)$. L'opérateur différentiel

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} - m$$

est une matrice 4×4 qui est multipliée à gauche par le spineur ligne $\bar{u}^{(\beta_1)}(q_1)$ et qui agit sur la variable y_1 associée à q_1 . Cette variable apparaît dans le spineur colonne $\psi(y_1)$, contenu dans le produit chronologique. Il faut donc lire l'expression (3.36) comme comprenant la quantité

$$\bar{u}^{(\beta_1)}(q_1)(i\partial_{y_1} - m)\psi(y_1)$$

dans le produit chronologique.

Dans le cas simple de la diffusion

$$\text{fermion } (k, \alpha) + \text{antifermion } (k', \alpha') \longrightarrow \text{fermion } (q, \beta) + \text{antifermion } (q', \beta'),$$

la formule de réduction (3.36) devient

$$\begin{aligned} M &= \langle 0 | d_{out}^{\beta'}(q') b_{out}^{\beta}(q) b_{in}^{\dagger \alpha}(k) d_{in}^{\dagger \alpha'}(k') | 0 \rangle \\ &= (\text{non connexes}) \\ &\quad + (-1)^2 (iZ_2^{-1/2})^4 \int d^4x \int d^4x' \int d^4y \int d^4y' \exp[-ikx - ik'x' + iqy + iq'y'] \\ &\quad [\bar{u}^{(\beta)}(q)(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)]_b [\bar{v}^{(\alpha')}(k')(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m)]_d \\ &\quad [(-i\gamma^\rho \frac{\partial}{\partial y'^\rho} - m)v^{(\beta')}(q')]_a [(i\gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} + m)u^{(\alpha)}(k)]_c \\ &\quad \langle 0 | T \bar{\psi}_a(y') \psi_b(y) \bar{\psi}_c(x) \psi_d(x') | 0 \rangle, \end{aligned} \tag{3.37}$$

une somme sur les indices $a, b, c, d = 1, \dots, 4$ des spineurs étant sous-entendue. Il convient de respecter l'ordre des spineurs, tel qu'il est défini en écrivant l'élément de matrice S à réduire [dans la première égalité (3.37)]: le produit chronologique fermionique respecte la propriété d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation.

Tant pour les fermions que pour les scalaires, la formule de réduction a la structure suivante, pour les termes "connexes":

- Pour chaque particule entrante un facteur $\int d^4x e^{-ikx}$, pour chaque particule sortante, un facteur $\int d^4y e^{iqy}$;
- Un facteur $(iZ)^{-1/2}$ pour les scalaires, $(-iZ_2)^{-1/2}$ pour les fermions et $(iZ_2)^{-1/2}$ pour les antifermions;
- La fonction de Green correspondante: $\langle 0 | T[\dots] | 0 \rangle$;
- Agir avec l'opérateur *libre* de Klein-Gordon $(\square + m^2)$ ou de Dirac $(\pm i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$. Ceci a pour effet d'extraire les résidus des pôles de la fonction de Green;
- Multiplier par les solutions libres $u^{(\alpha)}$, $\bar{u}^{(\beta)}$, $v^{(\alpha')}$ ou $\bar{v}^{(\beta')}$ de l'équation de Dirac.

En introduisant la fonction de Green en espace des impulsions,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \bar{\psi}_a(y') \psi_b(y) \bar{\psi}_c(x) \psi_d(x') | 0 \rangle \\ = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} e^{iy'k_1 + iyk_2 + ixk_3 + ix'k_4} \tilde{G}(k_1, k_2, k_3, k_4)_{abcd}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

(l'ordre des indices est significatif!), la formule de réduction (3.37) devient:

$$\begin{aligned} M &= \langle 0 | d_{out}^{\beta'}(q') b_{out}^{\beta}(q) b_{in}^{\dagger\alpha}(k) d_{in}^{\dagger\alpha'}(k') | 0 \rangle \\ &= (\text{non connexes}) \\ &\quad + (-iZ_2^{-1/2})^4 [\bar{u}^{(\beta)}(q)(\not{q} - m)]_b [\bar{v}^{(\alpha')}(k')(\not{k}' + m)]_d \\ &\quad \tilde{G}(-q', -q, k, k')_{abcd} [(\not{q}' + m)v^{(\beta')}(q')]_a [(\not{k} - m)u^{(\alpha)}(k)]_c. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Le préfacteur est cette fois $-iZ_2^{-1/2}$ pour chaque fermion ou antifermion. Comme pour le champ scalaire, la convention de transformée de Fourier (3.38) définit les variables de \tilde{G} comme des impulsions initiales d'un élément de matrice S .

3.2.3 Photons

La réduction d'éléments de matrice S impliquant des photons est un problème plus délicat. Le champ vectoriel $A_\mu(x)$ utilisé pour décrire le photon comprend des composantes non physiques. Nous avons vu que la procédure de quantification traite simultanément les composantes physiques de polarisations transverses, la polarisation longitudinale et la composante scalaire par le biais d'une fixation de l'invariance de jauge. Il n'est alors pas possible de postuler que lorsque $x^0 \rightarrow \pm\infty$, le champ $A_\mu(x)$ tend (au sens d'une limite faible) vers un champ libre, à une normalisation constante près. Il faut tenir compte de manière cohérente de la composante scalaire⁶. Nous allons cependant uniquement considérer des éléments de matrice S pour des photons (ou champs de jauge) physiques, de polarisations transverses. Pour ces états, la théorie asymptotique fait intervenir une constante de normalisation notée conventionnellement Z_3 qui est l'analogue de Z pour le champ scalaire et Z_2 pour le spineur de Dirac. On peut d'autre part montrer que la constante Z_3 ne dépend pas de la jauge choisie⁷.

Considérons un processus dont l'état initial contient un photon d'impulsion k et de polarisation transverse ϵ . Le vecteur ϵ sera donc une combinaison linéaire des vecteurs $\epsilon^{(1)}(k)$ et $\epsilon^{(2)}(k)$ définis dans la section 2.4, avec la normalisation $\epsilon^2 = -1$:

$$\epsilon = e_1 \epsilon^{(1)}(k) + e_2 \epsilon^{(2)}(k), \quad |e_1|^2 + |e_2|^2 = 1.$$

⁶Voir par exemple: Itzykson et Zuber [1], paragraphe 5.1.7.

⁷ Z_3 est indépendant du paramètre λ .

L'élément de matrice S est $\langle out|k, \epsilon; in \rangle$, où in et out désignent l'ensemble des nombres quantiques des autres particules. Dans le chapitre précédent, nous avons quantifié le champ de jauge libre $A_{in,out}^\mu(x)$ dans la jauge de Feynman $\lambda = 1$, où l'équation du mouvement est $\square A_{in,out}^\mu = 0$. En utilisant l'expansion en modes (2.103) de $A_{in,out}^\mu(x)$ et la normalisation (2.113) des vecteurs de polarisation, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle out|k, \epsilon; in \rangle &= -\langle out| \sum_{\kappa=1,2} \epsilon^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a_{in}^{(\kappa)\dagger}(k) |in \rangle \\ &= \langle out| [e_1 a_{in}^{(1)\dagger}(k) + e_2 a_{in}^{(2)\dagger}(k)] |in \rangle \\ &= \int_{x^0} d^3x e^{-ikx} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle out| \epsilon_\mu A_{in}^\mu(x) |in \rangle. \end{aligned}$$

Par la même procédure que pour le champ scalaire, on arrive à

$$\begin{aligned} \langle out|k, \epsilon; in \rangle &= -\langle out| \sum_{\kappa=1,2} \epsilon^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) a_{out}^{(\kappa)\dagger}(k) |in \rangle \\ &\quad -iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} \epsilon^\mu \square \langle out| A_\mu(x) |in \rangle, \end{aligned} \tag{3.40}$$

qui est l'analogie de l'expression (3.22) obtenue avec un champ scalaire. Le premier terme correspond à des contributions non connexes.

D'après l'équation du mouvement du photon dans la théorie interactive (et dans la jauge de Feynman)⁸,

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x),$$

l'équation de réduction (3.40) peut aussi s'écrire

$$\langle out|k, \epsilon; in \rangle = (\text{non connexes}) - iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} \langle out| \epsilon^\mu j_\mu(x) |in \rangle. \tag{3.41}$$

Cette expression covariante est aussi invariante de jauge. En effet, une transformation de jauge abélienne laisse le courant invariant et agit sur le vecteur de polarisation du photon externe selon

$$\epsilon^\mu \longrightarrow \epsilon^\mu + \delta\epsilon^\mu, \quad \delta\epsilon^\mu = ck^\mu,$$

c'est-à-dire en lui ajoutant une composante scalaire. Comme le courant est conservé, $\partial^\mu j_\mu = 0$, la variation de l'intégrale apparaissant dans (3.41) est nulle:

$$\begin{aligned} \delta \left[\int d^4x e^{-ikx} \langle out| \epsilon^\mu j_\mu(x) |in \rangle \right] &= c \int d^4x e^{-ikx} \langle out| k^\mu j_\mu(x) |in \rangle \\ &= ic \int d^4x \partial^\mu \left[e^{-ikx} \langle out| j_\mu(x) |in \rangle \right] = 0. \end{aligned}$$

⁸Voir par exemple l'équation (1.183) et la discussion qui suit.

Comme $A_\mu(x)$ est un champ réel, un photon entrant d'impulsion k et de polarisation ϵ est équivalent dans (3.41) à un photon sortant d'impulsion $-k$ et de même polarisation. On aura donc

$$\langle k, \epsilon; out | in \rangle = (\text{non connexes}) - iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{ikx} \langle out | \epsilon^\mu j_\mu(x) | in \rangle. \quad (3.42)$$

Pour un processus avec un photon entrant et un photon émis, la formule de réduction des deux photons fait intervenir le produit chronologique:

$$\begin{aligned} \langle k_f, \epsilon_f; out | k_i, \epsilon_i; in \rangle &= (\text{non connexes}) \\ &+ (-iZ_3^{-1/2})^2 \int d^4x \int d^4y e^{i(k_f x - k_i y)} \langle out | T \epsilon_f^\mu j_\mu(x) \epsilon_i^\nu j_\nu(y) | in \rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Cette formule peut par exemple être utilisée pour évaluer l'élément de matrice S de la diffusion Compton d'un photon sur un fermion de charge eQ . Le courant est alors l'opérateur $eQ : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi :$, comme dans l'équation (1.183).

3.3 Théorie des perturbations, diagrammes de Feynman

3.3.1 Une expression pour S et les fonctions de Green

D'après l'équation (3.10), l'opérateur S réalise la transformation de $\varphi_{in}(x)$ à $\varphi_{out}(x)$: $\varphi_{out}(x) = S^{-1} \varphi_{in}(x) S$. Nous avons d'autre part écrit $\varphi_{in}(x)$ et $\varphi_{out}(x)$ comme une limite faible pour $t \rightarrow -\infty$ ou $t \rightarrow +\infty$ du champ en interaction $\varphi(x)$ [conditions asymptotiques (3.7) et (3.8)]. Afin d'obtenir une expression perturbative de S , nous allons construire formellement un *opérateur d'évolution* unitaire $U(t)$ qui relie le champ interactif à un temps quelconque à $\varphi_{in}(x)$:

$$\varphi(x) = U^{-1}(t) \varphi_{in}(x) U(t), \quad t = x^0. \quad (3.44)$$

Ainsi:

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t). \quad (3.45)$$

La construction formelle de l'opérateur d'évolution utilise principalement le fait que l'opérateur hamiltonien est le générateur des translations du temps. En équations⁹,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) &= i[H(t), \varphi(x)], \\ \frac{\partial}{\partial t} \Pi(x) &= i[H(t), \Pi(x)], \end{aligned} \quad (3.46)$$

⁹L'hamiltonien est une fonctionnelle des champs et de leurs impulsions conjuguées: $H(\varphi, \Pi)$; c'est aussi une fonction du temps $H(t)$ puisqu'on l'obtient en prenant l'intégrale spatiale de T_{00} . Nous utiliserons indifféremment les deux notations selon le contexte.

où $\Pi(x)$ est l'impulsion canonique associée à $\varphi(x)$. En effet, nous avons vu dans le chapitre 1 que l'invariance de Poincaré implique en particulier l'existence de quatre courants de Noether pour les translations, rassemblés dans le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Ensuite, nous avons montré dans le chapitre 2 que les quatre charges (quantifiées), $P_\mu = \int d^3x T_{0\mu}$, vérifient

$$[P_\mu, \varphi_{in,out}(x)] = -i\partial_\mu \varphi_{in,out}(x),$$

pour un champ scalaire libre tel que φ_{in} ou φ_{out} . Dans la section 2.3, nous avons construit la quantification du champ spinoriel en demandant que $[P_\mu, \psi(x)] = -i\partial_\mu \psi(x)$. Ces équations resteront vraies dans une théorie interactive: elles suivent de l'invariance de Poincaré. Et comme $H = P_0$, les équations (3.46) devront être vérifiées par n'importe quelle théorie invariante de Poincaré.

L'hamiltonien est donc l'opérateur d'évolution temporelle infinitésimale dans la représentation de Heisenberg, qui fait porter cette évolution sur les opérateurs et non sur les états. Il est naturel d'espérer trouver une relation entre $U(t)$ et $H(t)$.

Des équations analogues à (3.46) existent évidemment pour $\varphi_{in}(x)$ et $\Pi_{in}(x)$. Par exemple:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in}(x) = i[H_0^{in}, \varphi_{in}(x)], \quad (3.47)$$

où $H_0^{in} = H_0^{in}(\varphi_{in}, \Pi_{in})$ est l'hamiltonien libre, indépendant du temps, que nous avons construit dans le chapitre précédent et qui peut s'exprimer en fonction des opérateurs de création et d'annihilation des quanta du champ libre.

D'après (3.44), on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in} &= \frac{\partial}{\partial t} (U \varphi U^{-1}) = \frac{dU}{dt} U^{-1} \varphi_{in} + \varphi_{in} U \frac{d}{dt} U^{-1} + iU[H, \varphi]U^{-1} \\ &= \frac{dU}{dt} U^{-1} \varphi_{in} - \varphi_{in} \frac{dU}{dt} U^{-1} + iU[H, \varphi]U^{-1} \\ &= \left[\frac{dU}{dt} U^{-1} + iU H U^{-1}, \varphi_{in} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

où $H = H(\varphi, \Pi)$ est l'hamiltonien de la théorie interactive. Comme dans toute théorie de champs quantifiés la dépendance en φ et Π de H est polynomiale,

$$U H(\varphi, \Pi) U^{-1} = H(U \varphi U^{-1}, U \Pi U^{-1}) = H(\varphi_{in}, \Pi_{in}), \quad (3.49)$$

et l'expression (3.48) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in} = \left[\frac{dU}{dt} U^{-1} + iH(\varphi_{in}, \Pi_{in}), \varphi_{in} \right].$$

En comparant avec (3.47), il vient

$$\left[\frac{dU}{dt} U^{-1} + iH(\varphi_{in}, \Pi_{in}) - iH_0^{in}, \varphi_{in} \right] = 0, \quad (3.50)$$

ainsi que l'équation analogue pour Π_{in} . L'opérateur $\frac{dU}{dt}U^{-1} + iH(\varphi_{in}, \Pi_{in}) - iH_0^{in}$, qui agit dans l'espace des états libres in , commute avec tous les opérateurs in ; il est donc proportionnel à l'opérateur identité I . La constante de proportionnalité, qui peut d'ailleurs dépendre du temps, doit être imaginaire par unitarité de $U(t)$ ¹⁰. On peut la choisir égale à zéro sans restreindre la généralité. On obtient alors:

$$i\frac{dU}{dt} = H_I(t)U, \quad (3.51)$$

où $H_I(t)$ est l'hamiltonien d'interaction

$$H_I(t) = H(\varphi_{in}, \Pi_{in}) - H_0^{in}(\varphi_{in}, \Pi_{in}), \quad (3.52)$$

exprimé en fonction du champ libre φ_{in} et de son impulsion conjuguée. L'hamiltonien d'interaction peut en général dépendre du temps selon la forme des interactions.

L'équation (3.51) s'intègre par itérations:

$$\begin{aligned} U(t) &= I - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1) \\ &= I - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) U(t_2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dans chaque terme de la série, les variables d'intégration sont ordonnées chronologiquement: $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$. Cependant:

$$\begin{aligned} T \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1); \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\int_{-\infty}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) = \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1),$$

et donc

$$T \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = 2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2).$$

Ce résultat peut se généraliser:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} T \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) \\ = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n). \end{aligned}$$

¹⁰Qui implique $0 = \frac{d}{dt}(UU^\dagger)$ et donc $(\frac{dU}{dt}U^{-1})^\dagger = -\frac{dU}{dt}U^{-1}$.

En conséquence,

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} T \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right], \quad (3.54)$$

la seconde égalité définissant l'exponentielle. D'après (3.45) et (3.53),

$$S = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right]. \quad (3.55)$$

Le point important est que la matrice S est ici exprimée par une série infinie de termes qui dépendent de l'opérateur de champ *libre* φ_{in} par l'intermédiaire de l'hamiltonien d'interaction $H_I(t)$ défini par l'expression (3.52). Le champ en interaction φ a été éliminé.

Pour les théories dans lesquelles H_I ne contient pas de dérivées du champ $\partial_\mu \varphi$, $H_I = - \int d^3x \mathcal{L}_I$, et (3.54) devient

$$U(t) = T \exp \left[i \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x \mathcal{L}_I \right], \quad (3.56)$$

alors que

$$S = T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right]. \quad (3.57)$$

Notre but est de calculer les fonctions de Green généralisées du champ en interaction, $\langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle$. Pour faire le lien avec le formalisme qui vient d'être développé, il est nécessaire d'introduire un nouvel opérateur, défini formellement par

$$U(t_2, t_1) = T \exp \left[-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right]. \quad (3.58)$$

Cet opérateur vérifie certainement

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) &= U(t_1, t) U(t, t_2), \\ U(t, t) &= I, \quad \longrightarrow \quad U(t_1, t_2)^{-1} = U(t_2, t_1), \\ U(t) &= U(t, -\infty), \\ U(t_1) &= U(t_1, t_2) U(t_2). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dans la fonction de Green $\langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle$, supposons que $x_1^0 = t_1 > x_2^0 = t_2 > \dots > x_n^0 = t_n$; on a alors

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle &= \langle 0 | \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^{-1}(t_1) \varphi_{in}(x_1) U(t_1) U^{-1}(t_2) \varphi_{in}(x_2) U(t_2) \dots U^{-1}(t_n) \varphi_{in}(x_n) U(t_n) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant

$$U(t_1) U^{-1}(t_2) = U(t_1, t_2) U(t_2) U^{-1}(t_2) = U(t_1, t_2),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)|0\rangle \\ &= \langle 0|U^{-1}(t_1)\varphi_{in}(x_1)U(t_1, t_2)\varphi_{in}(x_2)\dots U(t_{n-1}, t_n)\varphi_{in}(x_n)U(t_n)|0\rangle. \end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite arbitrairement un temps t tel que $t \gg x_1^0 = t_1$ et $-t \ll x_n^0 = t_n$. Puisque $U(t_n) = U(t_n, -t)U(-t)$ et $U^{-1}(t_1) = U^{-1}(t)U(t, t_1)$, il vient

$$\begin{aligned} & \langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)|0\rangle \\ &= \langle 0|U^{-1}(t)U(t, t_1)\varphi_{in}(x_1)U(t_1, t_2)\dots\varphi_{in}(x_n)U(t_n, -t)U(-t)|0\rangle \\ &= \langle 0|U^{-1}(t)T\varphi_{in}(x_1)\dots\varphi_{in}(x_n)U(t, t_1)U(t_1, t_2)\dots U(t_n, -t)U(-t)|0\rangle \\ &= \langle 0|U^{-1}(t)T\varphi_{in}(x_1)\dots\varphi_{in}(x_n)U(t, -t)U(-t)|0\rangle \\ &= \langle 0|U^{-1}(t)T\varphi_{in}(x_1)\dots\varphi_{in}(x_n) \exp\left[-i\int_{-t}^t dt' H_I(t')\right] U(-t)|0\rangle. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Il s'agit ensuite de prendre la limite $t \rightarrow \infty$. Premièrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)|0\rangle = |0\rangle,$$

où $|0\rangle$ est le vide $|0\rangle_{in}$. Ensuite, puisque l'état du vide est stable au cours de l'évolution temporelle, l'état $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t)$ doit être proportionnel à $\langle 0| = \langle 0|_{in}$, la constante de proportionnalité étant une phase¹¹:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t) = e^{i\alpha} \langle 0|, \quad e^{i\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(t)|0\rangle^{-1}. \tag{3.61}$$

Pour une théorie sans interaction dérivative dans laquelle S est donnée par (3.57), la limite $t \rightarrow \infty$ dans l'expression (3.60) conduit finalement à¹²:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)|0\rangle \\ &= \frac{\langle 0|T\varphi_{in}(x_1)\dots\varphi_{in}(x_n) \exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_I\right] |0\rangle}{\langle 0|T \exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_I\right] |0\rangle}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

où \mathcal{L}_I est la densité lagrangienne d'interaction exprimée en fonction des champs libres $\varphi_{in}(x)$:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I[\varphi_{in}(x)].$$

Ce résultat est fondamental puisqu'il est à la base de la théorie des perturbations: il permet de développer les fonctions de Green à n points $G(x_1, \dots, x_n)$ en série de puissances des interactions contenues dans $\mathcal{L}_I[\varphi_{in}(x)]$ et de calculer chaque terme

¹¹La dernière égalité suit de $1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t)U(t)|0\rangle = e^{i\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(t)|0\rangle$.

¹²C'est la *formule de Gell-Mann et Low*.

puisque (3.62) ne dépend que de champs *libres* et donc connus. Pour une théorie comprenant des interactions dérivatives¹³, faisant intervenir $\partial_\mu \varphi$, la substitution

$$i \int d^4x \mathcal{L}_I \longrightarrow -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t)$$

doit être effectuée, l'hamiltonien d'interaction $H_I(t)$ étant également exprimé en fonction du champ libre $\varphi_{in}(x)$. Finalement, notez que l'équation (3.62) est manifestement covariante, bien qu'elle ait été dérivée à partir d'un formalisme hamiltonien dans lequel l'évolution temporelle joue un rôle particulier.

Pour une théorie de champs scalaires, la densité lagrangienne d'interaction \mathcal{L}_I est un polynôme ordonné normalement de degré trois ou quatre dans les champs. Il n'y a pas d'interactions dérivatives. Une forme plus compliquée de \mathcal{L}_I mènerait inévitablement à des incohérences lors du calcul des fonctions de Green¹⁴. A titre d'exemple, considérons la théorie du champ scalaire réel φ définie par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)] = : \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 : , \quad (3.63)$$

un terme possible de la forme $:\varphi^3:$ étant exclu en imposant l'invariance sous la symétrie discrète $\varphi \longrightarrow -\varphi$. La densité lagrangienne d'interaction qui apparaît dans (3.62) est

$$\mathcal{L}_I[\varphi_{in}(x)] = -\frac{\lambda}{4!} : \varphi_{in}(x)^4 : \quad (3.64)$$

Les expansions en puissances de \mathcal{L}_I qui apparaissent dans (3.62) peuvent être vues comme des séries de puissances de la constante de couplage positive λ . Dans (3.64), le facteur $(4!)^{-1}$ est choisi par commodité. Le signe de l'interaction n'est pas arbitraire. Il est choisi de manière à assurer que l'énergie soit bornée inférieurement pour des valeurs constantes du champ φ , et que la solution classique $\varphi = 0$ soit bien une solution des équations du mouvement qui minimise l'énergie.

D'après (3.62), et en omettant les indices *in*, les fonctions de Green s'écrivent

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \left(\langle 0 | T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right] | 0 \rangle \right)^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^p \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \\ &\quad \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \varphi(y_1)^4 : \dots : \varphi(y_p)^4 : | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Les champs $\varphi(x)$ qui apparaissent dans cette expression sont libres. Pour évaluer la valeur moyenne sur le vide, nous avons besoin du théorème de Wick.

¹³Les interactions dérivatives seront traitées dans la section 4.3.

¹⁴Ceci sera discuté dans le chapitre 6, consacré à la renormalisation.

3.3.2 Le théorème de Wick

Le théorème de Wick pour un champ scalaire réel¹⁵ est la généralisation de l'identité

$$T\varphi(x)\varphi(y) = : \varphi(x)\varphi(y) : + \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle. \quad (3.66)$$

Pour démontrer cette relation, il convient de décomposer $\varphi(x)$ en parties dites de “fréquences positives” $\varphi^{(+)}(x)$ et “négatives” $\varphi^{(-)}(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \\ \varphi^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a(k) e^{-ikx} & : \text{fréquences positives}, \\ \varphi^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k) e^{+ikx} & : \text{fréquences négatives}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

On utilise alors les relations de commutation canoniques (2.14) et la définition du propagateur de Feynman (2.146) et (2.147):

$$\begin{aligned} T\varphi(x)\varphi(y) - : \varphi(x)\varphi(y) : &= \theta(x^0 - y^0) [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] + \theta(y^0 - x^0) [\varphi^{(+)}(y), \varphi^{(-)}(x)] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{+ik(x-y)} \\ &= -iG_F(x - y) = \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Pour poursuivre, nous allons établir deux relations de récursion. Considérons

$$T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \varphi(x_{n+1}).$$

Comme le produit chronologique est symétrique pour un champ bosonique, on peut supposer que $x_{n+1}^0 < x_i^0$, $i = 1, \dots, n$. Alors

$$T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \varphi(x_{n+1}) = [T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \varphi(x_{n+1}), \quad (3.68)$$

qui est la première relation (banale) de récursion. D'autre part,

$$\begin{aligned} &: \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \varphi(x_{n+1}) \\ &= \varphi^{(-)}(x_{n+1}) : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : + : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \varphi^{(+)}(x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [\varphi^{(+)}(x_i), \varphi^{(-)}(x_{n+1})] : \varphi(x_1) \dots \check{\varphi}(x_i) \dots \varphi(x_n) :, \end{aligned}$$

où $\check{\varphi}(x_i)$ signifie que le terme $\varphi(x_i)$ est omis dans le produit. Puisque par hypothèse $x_{n+1}^0 < x_i^0$,

$$[\varphi^{(+)}(x_i), \varphi^{(-)}(x_{n+1})] = \langle 0 | T\varphi(x_i)\varphi(x_{n+1}) | 0 \rangle.$$

¹⁵Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que des champs libres, en omettant l'indice *in*.

(le membre gauche de cette égalité est un commutateur d'opérateurs de champ proportionnel à l'opérateur unité; il faut comprendre le membre droit comme le nombre $\langle 0|T\varphi(x_i)\varphi(x_{n+1})|0\rangle$ multiplié par l'opérateur unité). On obtient ainsi la seconde relation de récursion:

$$\begin{aligned} & : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \varphi(x_{n+1}) \\ & =: \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{n+1}) : + \sum_{i=1}^n \langle 0|T\varphi(x_i)\varphi(x_{n+1})|0\rangle : \varphi(x_1) \dots \check{\varphi}(x_i) \dots \varphi(x_n) : . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Les relations (3.68), (3.69) et (3.66) donnent directement le théorème de Wick pour $T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)$ avec $x_3^0 < x_1^0, x_2^0$:

$$\begin{aligned} T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) &= [T\varphi(x_1)\varphi(x_2)]\varphi(x_3) \\ &= : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : \varphi(x_3) + \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle \varphi(x_3), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) &= : \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) : + \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle \varphi(x_3) \\ &\quad + \langle 0|T\varphi(x_3)\varphi(x_1)|0\rangle \varphi(x_2) + \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle \varphi(x_1). \end{aligned}$$

Les deux membres de cette égalité sont symétriques dans les variables x_1, x_2 et x_3 . Elle est donc valable sans restriction sur les temps x_1^0, x_2^0 et x_3^0 . Comme $\langle 0| : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m) : |0\rangle = 0$ par définition de l'ordre normal, il suit que

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle = 0. \quad (3.70)$$

Les relations (3.68) et (3.69) peuvent ensuite être utilisées pour démontrer par induction le théorème de Wick pour le produit chronologique d'un nombre quelconque de champs scalaires:

$$\begin{aligned} T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) &= : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \\ &\quad + \sum_{k < l} : \varphi(x_1) \dots \check{\varphi}(x_k) \dots \check{\varphi}(x_l) \dots \varphi(x_n) : \langle 0|T\varphi(x_k)\varphi(x_l)|0\rangle \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \sum_{k_1 < k_2 \dots < k_{2p}} : \varphi(x_1) \dots \check{\varphi}(x_{k_1}) \dots \check{\varphi}(x_{k_{2p}}) \dots \varphi(x_n) : \\ &\quad \cdot \sum_P \langle 0|T\varphi(x_{P_1})\varphi(x_{P_2})|0\rangle \dots \langle 0|T\varphi(x_{P_{2p-1}})\varphi(x_{P_{2p}})|0\rangle \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dans la cinquième ligne de cette expression, P désigne une permutation des coordonnées $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{2p}})$ qui correspondent aux $2p$ champs omis dans le produit normal de la quatrième ligne. La somme porte sur les permutations qui mènent à des valeurs différentes de $\langle 0|T\varphi(x_{P_1})\varphi(x_{P_2})|0\rangle \dots \langle 0|T\varphi(x_{P_{2p-1}})\varphi(x_{P_{2p}})|0\rangle$.

L'opération qui consiste à remplacer deux champs dans un produit normal par leur propagateur $\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ est couramment qualifiée de *contraction*.

Lors de l'évaluation d'éléments de matrice S , il est nécessaire de calculer des fonctions de Green généralisées. D'après l'équation (3.65), ces fonctions de Green peuvent être obtenues en théorie des perturbations à partir de valeurs moyennes sur le vide de produits chronologiques de champs libres. Le théorème de Wick indique alors que

$$\begin{aligned} \langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{2n})|0\rangle &= \sum_P \langle 0|T\varphi(x_{P_1})\varphi(x_{P_2})|0\rangle \\ &\quad \cdot \langle 0|T\varphi(x_{P_3})\varphi(x_{P_4})|0\rangle \dots \langle 0|T\varphi(x_{P_{2n-1}})\varphi(x_{P_{2n}})|0\rangle, \end{aligned} \quad (3.72)$$

où P désigne n'importe quelle permutation $(P_1, P_2, \dots, P_{2n})$ de $(1, 2, \dots, 2n)$. On somme sur toutes les permutations qui conduisent à des contributions différentes. D'autre part,

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{2n+1})|0\rangle = 0. \quad (3.73)$$

L'équation (3.72) indique que la quantité $\langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{2n})|0\rangle$ pour des champs libres est donnée par la somme de toutes les combinaisons possibles de propagateurs libres:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{2n})|0\rangle &= (-i)^n \sum_P G_F(x_{P_1} - x_{P_2}) \\ &\quad \cdot G_F(x_{P_3} - x_{P_4}) \dots G_F(x_{P_{2n-1}} - x_{P_{2n}}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Par exemple:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle &= -G_F(x_1 - x_2)G_F(x_3 - x_4) \\ &\quad -G_F(x_1 - x_3)G_F(x_2 - x_4) \\ &\quad -G_F(x_1 - x_4)G_F(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Une modification importante du théorème de Wick apparaît lorsque le produit chronologique est appliqué à des expressions contenant des produits normaux, comme dans l'équation (3.65). Considérons par exemple le produit chronologique

$$I \equiv T\varphi(x_1)\varphi(x_2) : \varphi(x_3)\varphi(x_4) : .$$

L'usage répété de (3.66) conduit à

$$\begin{aligned} I &= T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)T\varphi(x_3)\varphi(x_4)] - T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\langle 0|T\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle \\ &= T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) - : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : \langle 0|T\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle \\ &\quad - \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle. \end{aligned}$$

Et, avec le théorème de Wick (3.71),

$$\begin{aligned}
T\varphi(x_1)\varphi(x_2) : \varphi(x_3)\varphi(x_4) : &= : \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) : \\
&+ : \varphi(x_1)\varphi(x_3) : \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_4)|0\rangle + : \varphi(x_1)\varphi(x_4) : \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle \\
&+ : \varphi(x_2)\varphi(x_3) : \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_4)|0\rangle + : \varphi(x_2)\varphi(x_4) : \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_3)|0\rangle \\
&+ : \varphi(x_3)\varphi(x_4) : \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle + \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_3)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_4)|0\rangle \\
&+ \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_4)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle, \\
\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2) : \varphi(x_3)\varphi(x_4) : |0\rangle &= \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_3)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_4)|0\rangle \\
&+ \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_4)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle.
\end{aligned}$$

Il n'apparaît pas de contraction $\langle 0|T\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle$ des champs à l'intérieur de l'ordre normal. On aurait de même

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) : \varphi(y)^4 : |0\rangle = 4! \prod_{i=1}^4 \langle 0|T\varphi(x_i)\varphi(y)|0\rangle.$$

En général, on peut montrer que *les contractions impliquant deux champs ordonnés normalement sont exclues* dans le théorème de Wick.

Associées à l'expression (3.62), les règles données par le théorème de Wick permettent de calculer les fonctions de Green en théorie des perturbations: chaque terme de l'expansion (3.62) devient une combinaison de produits de fonctions à deux points $\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ et donc de propagateurs libres.

Le théorème de Wick existe également pour les produits chronologiques de champs fermioniques, la seule difficulté additionnelle provenant des signes associés aux anticommutateurs. En se rappelant que $\langle 0|T\psi_a(x)\psi_b(y)|0\rangle = 0$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
T\psi_a(x)\psi_b(y) &= : \psi_a(x)\psi_b(y) : = - : \psi_b(y)\psi_a(x) : = -T\psi_b(y)\psi_a(x), \\
T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) &= : \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) : + \langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle \\
&= -T\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Les indices $a, b = 1, 2, 3, 4$ numérotent les composantes des spineurs. Pour quatre

fermions, en omettant les indices spinoriels, il vient

$$\begin{aligned}
T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4) &= : \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4) : \\
&+ : \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) : \langle 0|T\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)|0\rangle \\
&- : \psi(x_1)\bar{\psi}(x_4) : \langle 0|T\psi(x_3)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \\
&- : \psi(x_3)\bar{\psi}(x_2) : \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_4)|0\rangle \\
&+ : \psi(x_3)\bar{\psi}(x_4) : \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \\
&+ \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \langle 0|T\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)|0\rangle \\
&- \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_4)|0\rangle \langle 0|T\psi(x_3)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Pour donner une expression générale du théorème de Wick pour les champs de Dirac, on utilisera la notation ψ^I , l'indice I contenant l'information nécessaire à préciser la composante a de ψ_a , l'argument x de $\psi_a(x)$ et s'il s'agit d'un spineur ou de son conjugué de Dirac. On aura alors

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\psi^1\psi^2\ldots\psi^{2n+1}|0\rangle &= 0, \\
\langle 0|T\psi^1\psi^2\ldots\psi^{2n}|0\rangle &= \sum_P \epsilon_P \langle 0|T\psi^{P_1}\psi^{P_2}|0\rangle \ldots \langle 0|T\psi^{P_{2n-1}}\psi^{P_{2n}}|0\rangle,
\end{aligned} \tag{3.77}$$

où ϵ_P est la signature de la permutation $P = (P_1, P_2, \ldots, P_{2n})$ de $(1, 2, \ldots, 2n)$. A nouveau, on somme sur toutes les permutations donnant des contributions différentes.

Le théorème de Wick permet d'évaluer systématiquement l'expansion perturbative (3.62) des fonctions de Green. Les diagrammes de Feynman donnent une représentation graphique de chacun des termes apparaissant dans cette procédure. Dans les sections suivantes, nous allons établir le formalisme des diagrammes de Feynman, premièrement pour un champ scalaire réel avec une interaction $-\frac{\lambda}{4!} : \varphi^4 :$, et ensuite pour l'électrodynamique quantique.

3.3.3 Diagrammes de Feynman du champ scalaire réel

Nous allons considérer la théorie du champ scalaire réel définie par la densité lagrangienne (3.63), pour laquelle

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} : \varphi(x)^4 : .$$

Dans ce cas, l'expansion perturbative des fonctions de Green (3.62) devient l'expression (3.65).

Chaque terme du numérateur de (3.65) est de la forme

$$M_p = \frac{1}{p!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^p \int d^4y_1 \ldots \int d^4y_p \langle 0|T\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) : \varphi^4(y_1) : \ldots : \varphi^4(y_p) : |0\rangle. \tag{3.78}$$

Nous omettons de mentionner le fait que chaque champ est libre et supprimons les indices *in*. D'après le théorème de Wick (3.72), ce nombre se calcule en sommant toutes les contributions dans lesquelles tous les champs sont contractés. Aucune contraction de deux champs à l'intérieur d'un même produit normal n'est cependant admise.

L'amplitude

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n) : \varphi^4(y_1) : \dots : \varphi^4(y_p) : |0\rangle$$

dépend des variables x_1, \dots, x_n , associées aux champs externes, et y_1, \dots, y_p associées aux interactions. Nous dirons que chaque y_i donne les coordonnées d'un vertex à quatre champs. Si nous décidons de représenter par une ligne joignant deux points la contraction de deux champs en ces points, le théorème de Wick correspond à sommer tous les diagrammes dans lesquels quatre lignes parviennent en chaque y_i et une seule ligne joint chaque x_i . Quantitativement, chaque ligne reliant les points z_1 et z_2 (qu'ils soient externes comme les x_i ou associés aux vertex en y_i) représente l'amplitude

$$\langle 0|T\varphi(z_1)\varphi(z_2)|0\rangle = -iG_F(z_1 - z_2),$$

et pour parvenir à l'amplitude M_p , il faut encore intégrer sur les variables y_i , ajouter un facteur $-i\lambda/4!$ pour chaque interaction en y_i et un facteur $1/p!$. Il convient finalement de tenir compte du fait que certaines contributions différentes du théorème de Wick sont représentées par des diagrammes de Feynman identiques: chaque diagramme possédera donc une *multiplicité* qui introduit un facteur supplémentaire dans l'amplitude M_p . Par exemple, le théorème de Wick donne

$$\begin{aligned} & \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2) : \varphi(y_1)^4 : : \varphi(y_2)^4 : |0\rangle \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 3! \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(y_1)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(y_2)|0\rangle [\langle 0|T\varphi(y_1)\varphi(y_2)|0\rangle]^3 \\ &+ 4 \cdot 4 \cdot 3! \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(y_2)|0\rangle \langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(y_1)|0\rangle [\langle 0|T\varphi(y_1)\varphi(y_2)|0\rangle]^3 \\ &+ 4! \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle [\langle 0|T\varphi(y_1)\varphi(y_2)|0\rangle]^4. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Les multiplicités sont obtenues par l'argument suivant: dans le premier terme, il y a quatre contractions possibles de $\varphi(x_1)$ avec l'un des quatre $\varphi(y_1)$ et quatre contractions possibles de $\varphi(x_2)$ avec l'un des quatre $\varphi(y_2)$. Il reste ensuite 3! façons de contracter les trois $\varphi(y_1)$ et les trois $\varphi(y_2)$ restants; le deuxième terme ne diffère du premier que par l'échange de x_1 et x_2 et sa multiplicité est donc la même; finalement, dans le troisième terme, après avoir contracté $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$, il reste 4! contractions possibles de $\varphi(y_1)$ et $\varphi(y_2)$. Les trois termes de (3.79) sont représentés respectivement par les trois diagrammes de la figure 3.1. Notez qu'après les intégrations sur y_1 et y_2 , exigées par l'équation (3.78), les deux premiers diagrammes donnent une contribution identique à la fonction de Green à deux points $G(x_1, x_2)$. Les deux diagrammes sont cependant topologiquement distincts, pour x_1, x_2, y_1 et y_2 fixés.

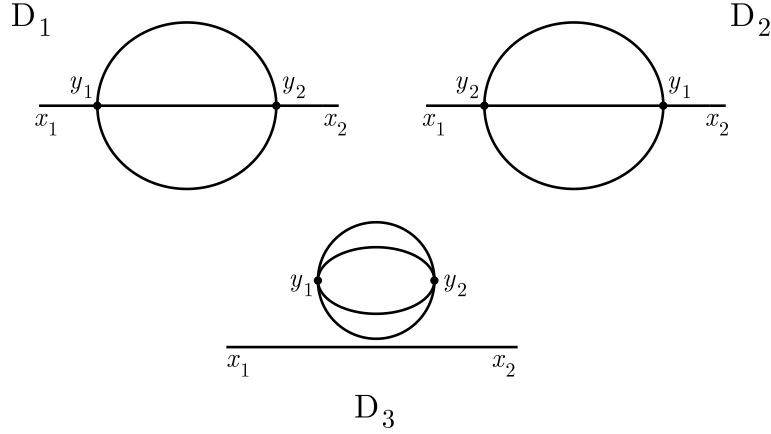


Fig. 3.1 Représentation diagrammatique de l'expansion (3.79)

Nous obtenons donc les *règles de Feynman* de la théorie du champ scalaire libre avec l'interaction

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} : \varphi(y)^4 :,$$

pour le calcul des fonctions de Green $G(x_1, \dots, x_n)$ en espace de configuration. Tout d'abord, chaque terme de la forme (3.78) est donné par la somme de tous les diagrammes de Feynman (en espace des coordonnées x^μ) topologiquement inéquivalents, avec n champs externes (aux points x_i) et p interactions (aux points y_i). Ensuite, chaque diagramme est calculé en appliquant les règles suivantes:

- Pour chaque vertex, un facteur $-i\lambda$
- Pour chaque ligne du diagramme joignant deux points z_i et z_j , un propagateur $-iG_F(z_i - z_j)$:

$$\langle 0 | T \varphi(z_i) \varphi(z_j) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(z_i - z_j)}$$

- Une intégration $\int d^4 y_i$ sur les coordonnées de chaque vertex
- Chaque diagramme est finalement divisé par son facteur de symétrie:

$$s = \frac{(4!)^p p!}{\text{multiplicité}},$$

où p est le nombre de vertex.

Il apparaît que les diagrammes sont de deux types: ceux qui contiennent des sous-diagrammes sans champ extérieur, qualifiés de diagrammes du vide, tels que D_3 , et ceux qui n'en contiennent pas. Les diagrammes du vide sont clairement

généérés par

$$\begin{aligned} \langle 0|T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right] |0\rangle \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^p \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0|T : \varphi(y_1)^4 : \dots : \varphi(y_p)^4 : |0\rangle, \end{aligned}$$

qui est le dénominateur de l'expression générale de la fonction de Green (3.62). En désignant au moyen d'un indice (0) une amplitude calculée en ne gardant que les diagrammes ne comprenant pas de sous-diagramme du vide, on peut écrire le numérateur de l'expression (3.62) sous la forme:

$$\begin{aligned} \langle 0|T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right] |0\rangle = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \langle 0|T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_k) |0\rangle^{(0)} \\ \cdot \langle 0|T \mathcal{L}_I(y_{k+1}) \dots \mathcal{L}_I(y_p) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.80)$$

D'après le théorème de Wick, le facteur $\langle 0|T \mathcal{L}_I(y_{k+1}) \dots \mathcal{L}_I(y_p) |0\rangle$ est obtenu à partir de la somme de tous les diagrammes du vide comprenant $p - k$ vertex, et

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

donne le nombre de choix de k points y_i parmi les p vertex en y_1, \dots, y_p . Chaque choix donne la même contribution dans (3.80) puisqu'on intègre sur tous les y_i . En comparant ensuite l'identité

$$e^{iA} e^{iB} = e^{i(A+B)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} (A+B)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k},$$

avec (3.80), on obtient alors

$$\begin{aligned} \langle 0|T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right] |0\rangle = \langle 0|T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \right] |0\rangle \\ \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0|T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_p) |0\rangle^{(0)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$G(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0|T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_p) |0\rangle^{(0)}. \quad (3.81)$$

Ce dernier résultat montre que le dénominateur de l'équation (3.62) supprime la contribution des diagrammes de Feynman comprenant des sous-diagrammes du

vide et donc que la fonction de Green $G(x_1, \dots, x_{2n})$ est la somme de tous les diagrammes sans sous-diagramme du vide.

Les règles et les diagrammes de Feynman ont été exprimés en espace de configuration. Il s'avère souvent plus utile et plus naturel dans un processus de diffusion de particules d'impulsions bien définies de calculer les fonctions de Green en espace des impulsions. La fonction de Green en espace des impulsions est la transformée de Fourier de $G(x_1, \dots, x_{2n})$:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}) = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_{2n} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2n} p_j x_j\right) G(x_1, \dots, x_{2n}), \quad (3.82)$$

d'après l'équation (3.29). Nous avons vu que cette convention revient à interpréter les variables de \tilde{G} comme des impulsions initiales (entrantes) d'un processus de transition. L'invariance sous translations implique en fait que $G(x_1, \dots, x_{2n})$ ne dépend que de $2n - 1$ variables, par exemple $(x_1 - x_{2n}, \dots, x_{2n-1} - x_{2n})$: la dépendance spatiale de chaque diagramme de Feynman est entièrement contenue dans celle des propagateurs libres, $G_F(x_i - x_j)$. L'intégration sur d^4x_{2n} dans (3.82) génère alors simplement la contribution

$$\int d^4x_{2n} \exp\left(-ix_{2n} \sum_{j=1}^{2n} p_j\right) = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{j=1}^{2n} p_j\right).$$

On aura donc toujours

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}) = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{j=1}^{2n} p_j\right) G_0(p_1, \dots, p_{2n}), \quad (3.83)$$

la distribution de Dirac imposant la conservation de l'impulsion qui est une conséquence de l'invariance sous translations. D'après (3.81), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}) &= \int d^4x_1 \dots \int d^4x_{2n} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2n} p_j x_j\right) \\ &\quad \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots \int d^4y_p \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_p) | 0 \rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Comme l'élément de matrice est une combinaison de propagateurs libres (les contractions),

$$-iG_F(z_i - z_j) = \langle 0 | T \varphi(z_i) \varphi(z_j) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(z_i - z_j)},$$

l'amplitude ne dépend des variables x_1, \dots, x_{2n} et y_1, \dots, y_p que par des exponentielles qui peuvent être facilement intégrées.

L'intégration sur chaque variable externe x_i , $i = 1, \dots, 2n$, est effectuée en observant que chaque $\varphi(x_i)$ est contracté soit avec un champ interne $\varphi(y_j)$, $j =$

$1, \dots, p$, soit avec un autre champ externe $\varphi(x_j)$, $i \neq j$. Dans le premier cas, la dépendance en x_i de l'amplitude (3.84) est contenue dans le facteur

$$\int d^4x_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_i x_i} e^{-ik(x_i - y_j)} = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_i y_j}.$$

La phase $e^{-ip_i y_j}$ sera prise en compte lors de l'intégration sur la coordonnée de vertex y_j . Dans le deuxième cas, la dépendance en x_i et x_j de l'amplitude (3.84) est

$$\begin{aligned} \int d^4x_i \int d^4x_j e^{-ip_i x_i - ip_j x_j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x_i - x_j)} \\ = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j). \end{aligned}$$

La contraction de deux champs externes mène nécessairement à un diagramme non connexe, chaque sous-diagramme ayant sa propre distribution de Dirac imposant la conservation de l'impulsion.

Pour calculer les intégrales sur les variables internes y_i , $i = 1, \dots, p$, on remarque que chaque variable y_i apparaît dans quatre propagateurs (les quatre lignes atteignant chaque vertex). La dépendance en y_i de l'amplitude (3.84) sera donc

$$\begin{aligned} \int d^4y_i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \exp(-iy_i[k_1 + k_2 + k_3 + k_4]) \prod_{i=1}^4 \frac{i}{k_i^2 - m^2 + i\epsilon} \\ = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \prod_{i=1}^4 \frac{i}{k_i^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned}$$

où nous avons choisi des impulsions k_1, k_2, k_3, k_4 qui entrent dans le vertex. Chaque k_i peut être l'impulsion attachée à une ligne interne du diagramme, ou l'une des impulsions externes p_i .

Ces résultats des intégrations sur les variables x_i et y_j se résument par les règles de Feynman en espace des impulsions pour le calcul des fonctions de Green:

- Dessiner tous les diagrammes topologiquement distincts, calculer leur facteur de symétrie $1/s$.
- Associer à chaque ligne externe connectée à un vertex un facteur

$$\frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

- Associer à chaque ligne interne une contribution

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

- Associer à chaque vertex un facteur

$$-i\lambda(2\pi)^4\delta^4(q),$$

où q est la somme des quatre impulsions entrantes.

- Intégrer sur les impulsions des lignes internes k_j , et multiplier par $1/s$.
- Sommer les diagrammes.

Il faut de plus ajouter un facteur $(2\pi)^4\delta^4(p_i + p_j)i[p_i^2 - m^2 + i\epsilon]^{-1}$ pour chaque ligne externe non reliée à un vertex (contribution non connexe).

Les distributions δ^4 assurent la conservation de l'impulsion à chaque vertex. Une des intégrales sur les impulsions internes sera toujours triviale et donnera la contribution

$$(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)$$

qui impose la conservation globale de l'impulsion pour les impulsions externes p_i choisies entrantes. C'est le facteur déjà mis en évidence dans l'équation (3.83).

Notez qu'un diagramme connexe avec $2n$ champs externes et p vertex comprend $2p - n$ lignes internes et $p - 1$ conditions non triviales de conservation de l'impulsion aux vertex faisant intervenir les impulsions internes. Il restera donc à effectuer $p - n + 1$ intégrations non triviales sur les impulsions internes.

En espace de configuration, les variables x_1, \dots, x_{2n} et y_1, \dots, y_p sont rattachées aux extrémités des lignes formant le diagramme. En espace des impulsions, les variables sont les impulsions parcourant les lignes. Les facteurs de symétrie seront légèrement différents dans les deux cas puisque la notion de "diagrammes topologiquement distincts" sera elle aussi différente.

En espace des impulsions, le facteur de symétrie $1/s$ pour un diagramme avec p vertex est de la forme

$$\frac{1}{s} = \frac{s_1 s_2}{p!(4!)^p},$$

où s_1 est le nombre de possibilités de rattachement des lignes externes au diagramme et s_2 le nombre de choix de connexion des vertex par des lignes internes, après avoir fixé les lignes externes. Au dénominateur, le facteur $p!$ provient du développement de l'exponentielle présente dans (3.84) et le facteur $(4!)^p$ est dû à la normalisation de l'interaction.

Les règles de Feynman montrent clairement que les fonctions de Green sont singulières lorsque les impulsions externes sont sur la couche de masse, $p_i^2 = m^2$. Les quantités physiques font cependant intervenir des éléments de matrice S , qui sont reliés aux fonctions de Green par la formule de réduction (3.30). Considérons un élément de matrice S avec $2n$ particules d'impulsions p_1, \dots, p_{2n} dans l'état initial:

$$\langle 0; out | p_1, \dots, p_{2n}; in \rangle.$$

D'après (3.30), en négligeant les termes non connexes,

$$\langle 0; out | p_1, \dots, p_{2n}; in \rangle = (Z^{-1/2})^{2n} \prod_{j=1}^{2n} [-i(p_j^2 - m^2)] \tilde{G}(p_1, \dots, p_{2n}). \quad (3.85)$$

L'élément de matrice S est obtenu en multipliant simplement la fonction de Green en espace des impulsions par un facteur

$$-iZ^{-1/2}(p_j^2 - m^2)$$

pour chaque ligne externe d'impulsion p_j . Ce facteur extrait la singularité de couche de masse de la fonction de Green. Lors du calcul d'un élément de matrice S , la règle de Feynman pour les lignes externes devient donc:

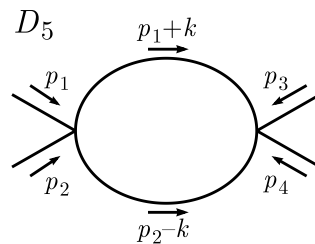
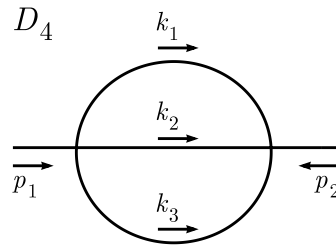
- Associer à chaque ligne externe un facteur $Z^{-1/2}$.

L'élément de matrice S est donné par la *fonction de Green amputée* de ses propagateurs externes, aux facteurs $Z^{-1/2}$ près. Il est à noter que cette dernière règle de Feynman reste valable pour une impulsion dans l'état final de l'élément de matrice S : on passe de l'état initial à l'état final en changeant le signe de l'impulsion.

Les facteurs $Z^{-1/2}$ jouent un rôle lors de la renormalisation de la théorie, qui intervient lorsque l'élément de matrice S est calculé au-delà de l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations. En fait, la valeur du nombre Z se détermine en théorie des perturbations comme une série de puissances de λ . Lorsque seulement les diagrammes du plus bas ordre sont inclus dans l'évaluation d'un processus, il est cohérent de prendre

$$Z = 1.$$

A titre d'exemples de l'application de ces règles, nous allons écrire les contributions aux fonctions de Green à deux et quatre points dans l'espace des impulsions des deux diagrammes de Feynman suivants:



En appliquant les règles de Feynman ci-dessus, le diagramme D_4 correspond à la contribution:

$$\begin{aligned}
D_4 &= \frac{1}{s}(-i\lambda)^2 \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \\
&\quad (2\pi)^8 \delta^4(p_1 - k_1 - k_2 - k_3) \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + p_2) \prod_{j=1}^3 \frac{i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{1}{s}(-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \left(\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \\
&\quad \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1 - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Pour calculer le facteur de symétrie $1/s$, on observe qu'il y a 8 possibilités de rattacher la première ligne externe à l'un des deux vertex; et quatre possibilités pour la deuxième ligne externe, si bien que $s_1 = 8 \times 4$. Ensuite, il y a $s_2 = 3!$ choix possibles pour les trois lignes internes restantes. Donc

$$\frac{1}{s} = \frac{8 \times 4!}{2! \times (4!)^2} = \frac{1}{3!}.$$

De même, le diagramme D_5 s'écrit

$$\begin{aligned}
D_5 &= \frac{1}{s}(-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left(\prod_{j=1}^4 \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\
&\quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1 + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Le facteur de symétrie est dans ce cas

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2},$$

puisque $s_1 = 8 \times 3 \times 4 \times 3$ et $s_2 = 2$.

3.3.4 Diagrammes de Feynman de l'électrodynamique quantique

La densité lagrangienne (classique) décrivant l'électrodynamique d'un fermion de masse m et de charge électrique eQ est [sect. 1.5, éq. (1.183)]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - ieQA_\mu \psi.
\end{aligned}$$

La densité lagrangienne d'interaction à utiliser dans l'expansion perturbative des fonctions de Green est

$$\mathcal{L}_I = eQ A_\mu j^\mu = eQ A_\mu : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : . \quad (3.88)$$

Le champ du photon est couplé au courant fermionique conservé $j^\mu =: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi :$.

Comme \mathcal{L}_I ne contient aucune dérivée de champ, les fonctions de Green s'obtiennent en appliquant le théorème de Wick à l'expansion perturbative (3.62), en tenant cependant compte du fait que les champs peuvent être $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ ou $A_\mu(x)$, au lieu d'un unique $\varphi(x)$. Par rapport au champ scalaire réel, l'anticommutation des opérateurs fermioniques et l'apparition des notions de polarisation et d'antiparticule introduisent quelques complications et subtilités.

Les lignes des diagrammes de Feynman correspondent à des propagateurs libres. On aura donc deux types de contractions, correspondant aux lignes fermioniques et photoniques, qui donneront en espace de configuration les contributions suivantes:

$$\begin{aligned} x \xrightarrow[a]{\quad} y & \quad \langle 0 | T \psi_b(y) \bar{\psi}_a(x) | 0 \rangle = i S_F(y - x)_{ba} \\ & = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(y-x)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (\not{k} + m)_{ba} \\ \\ x \xrightarrow[\mu]{\quad} y & \quad \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = i G_F^{\mu\nu}(x - y) \\ & = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \\ & \quad \cdot \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \end{aligned}$$

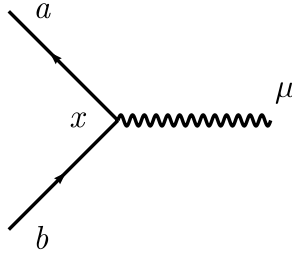
Par convention, une ligne fermionique est orientée vers le spineur ψ , dans le sens de propagation de la charge eQ de la particule. Par contre, les lignes photoniques ne sont pas orientées. L'interaction fermion-photon prend la forme d'un vertex

$$\mathcal{L}_I = eQ (\gamma^\mu)_{ab} : \bar{\psi}_a(x) \psi_b(x) A_\mu(x) : \quad (3.89)$$

Comme la quantité $i\mathcal{L}_I$ apparaît dans l'expansion perturbative (3.62), la règle de Feynman pour le vertex fermion-photon en espace de configuration associera un facteur

$$ieQ (\gamma^\mu)_{ab} \quad (3.90)$$

au vertex représenté par le diagramme suivant:



Notez que l'ordre des indices de la matrice γ^μ n'est pas indifférent: dans l'interaction \mathcal{L}_I , a est l'indice de $\bar{\psi}$, b celui de ψ . On peut vérifier cette règle de Feynman en calculant à l'ordre le plus bas la fonction de Green

$$\langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)A_\mu(x_3)\exp\left[i\int d^4y\mathcal{L}_I(y)\right]|0\rangle^{(0)},$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} & ieQ(\gamma^\nu)_{cd}\int d^4y\langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)A_\mu(x_3) : \bar{\psi}_c(y)\psi_d(y)A_\nu(y) : |0\rangle \\ & = ieQ(\gamma^\nu)_{cd}\int d^4y\langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_c(y)|0\rangle\langle 0|T\psi_d(y)\bar{\psi}_b(x_2)|0\rangle\langle 0|TA_\mu(x_3)A_\nu(y)|0\rangle. \end{aligned}$$

Aux trois lignes externes seront associées les trois fonctions à deux points, la règle de Feynman du vertex (3.90) s'ajoutant à l'intégration $\int d^4y$ sur sa coordonnée.

Par conservation de la charge, seules les fonctions de Green pour un nombre égal de ψ et $\bar{\psi}$ et un nombre arbitraire de A_μ sont susceptibles d'être non nulles:

$$\begin{aligned} & G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_m)_{a_1 \dots b_n \mu_1 \dots \mu_m} \\ & = \langle 0|T\psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_n}(x_n)\bar{\psi}_{b_1}(x_{n+1}) \dots \bar{\psi}_{b_n}(x_{2n}) \\ & \quad A_{\mu_1}(y_1) \dots A_{\mu_m}(y_m) \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_I\right]|0\rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Il faut prendre garde aux signes générés par le théorème de Wick appliqué aux fermions. La conservation de la charge implique également que les fermions apparaissent dans les diagrammes de Feynman par des lignes continues qui relient un fermion "entrant" $\bar{\psi}_{b_j}(x_{n+j})$ (en référence à l'orientation des lignes fermioniques du diagramme) à un fermion "sortant" $\psi_{a_i}(x_i)$, ou qui forment des boucles fermées. Une boucle fermée passant par les points z_1, z_2, \dots, z_k des vertex du diagramme correspond aux contractions

$$\langle 0|T\psi(z_1)\bar{\psi}(z_k)|0\rangle \dots \langle 0|T\psi(z_3)\bar{\psi}(z_2)|0\rangle \langle 0|T\psi(z_2)\bar{\psi}(z_1)|0\rangle.$$

Cette contraction est obtenue avec une permutation impaire de

$$\mathcal{L}_I(z_k) \dots \mathcal{L}_I(z_1) = (eQ)^k : \bar{\psi}(z_k)\gamma^{\mu_k}A_{\mu_k}(z_k)\psi(z_k) : \dots : \bar{\psi}(z_1)\gamma^{\mu_1}A_{\mu_1}(z_1)\psi(z_1) :$$

puisque $\psi(z_1)$ doit “traverser” $2k-1$ opérateurs fermioniques pour obtenir l’ordre des opérateurs dans la contraction. Le théorème de Wick impose donc la règle suivante:

- A chaque boucle fermionique est associé un signe négatif.

Pour chaque ligne ouverte reliant x_1 à x_k en passant par des vertex en z_2, \dots, z_{k-1} , qui correspond à la contraction

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x_k)\bar{\psi}(z_{k-1})|0\rangle \langle 0|T\psi(z_{k-1})\bar{\psi}(z_{k-2})|0\rangle \dots \\ \dots \langle 0|T\psi(z_3)\bar{\psi}(z_2)|0\rangle \langle 0|T\psi(z_2)\bar{\psi}(x_1)|0\rangle, \end{aligned}$$

on associe le signe de la permutation de ces opérateurs par rapport à leur position dans la fonction de Green (3.91).

En dessinant tous les diagrammes topologiquement inéquivalents et en tenant compte de l’orientation des lignes fermioniques, on peut se convaincre qu’il n’y a pas de facteur de symétrie s en électrodynamique des fermions. Les règles de Feynman pour le calcul des fonctions de Green en espace des impulsions sont alors:

- Dessiner tous les diagrammes topologiquement inéquivalents (en tenant compte de l’orientation des lignes fermioniques);
- Calculer le signe du diagramme en déterminant le signe associé à chaque ligne fermionique ouverte et en ajoutant un signe négatif pour chaque boucle fermionique fermée;
- Pour chaque ligne fermionique externe, un facteur

$$a \xrightarrow{k} b \quad \left[\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]_{ba};$$

la ligne est orientée de a vers b . Dans notre convention pour les fonctions de Green en espace des impulsions, définie par l’équation (3.38), les impulsions entrent dans le diagramme. Un champ externe $\bar{\psi}$ correspond à une ligne fermionique entrant dans le diagramme (a est l’indice externe): dans ce cas, la variable de la fonction de Green est l’impulsion k dans la règle de Feynman ci-dessus. Un champ externe ψ correspond à une ligne fermionique sortant du diagramme (b est l’indice externe): il faut alors remplacer k par $-k$ dans la règle de Feynman; on associe donc un facteur

$$\left[\frac{i(-\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]_{ba}$$

à chaque ligne fermionique sortant du diagramme, l’impulsion k étant dirigée vers l’intérieur du diagramme, par convention.

- Pour chaque ligne photonique externe, un facteur

$$\mu \text{ --- } \overset{k}{\text{~~~~~}} \text{ --- } \nu \quad \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right],$$

l'orientation étant ici sans signification.

- Pour chaque ligne fermionique interne, une contribution:

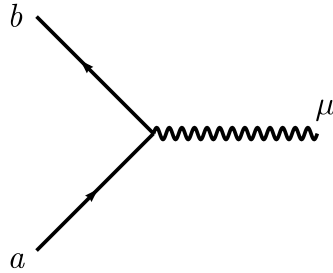
$$\overset{a}{\text{---}} \overset{k}{\text{---}} \overset{b}{\text{---}} \quad \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]_{ba},$$

la ligne et l'impulsion k étant orientées de a vers b .

- Pour chaque ligne photonique interne, une contribution:

$$\overset{\mu}{\text{~~~~~}} \overset{k}{\text{~~~~~}} \overset{\nu}{\text{~~~~~}} \quad \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)} \right].$$

- A chaque vertex



un facteur:

$$ieQ(\gamma_\mu)_{ba} (2\pi)^4 \delta^4(q),$$

q étant l'impulsion (entrante) totale au vertex.

- Finalement, intégrer sur les impulsions internes et sommer les diagrammes.

La jauge de Feynman $\lambda = 1$ simplifie fortement les propagateurs photoniques et donc le calcul des diagrammes.

En général, les deux orientations d'une boucle fermionique joignant plus de deux vertex mènent à deux diagrammes topologiquement inéquivalents qu'il faut donc sommer. On montre alors facilement que les contributions des deux orientations d'une boucle avec un nombre impair de vertex sont opposées, et que la somme des deux diagrammes est nulle. Le *théorème de Furry* affirme donc que les diagrammes contenant une ou plusieurs boucles fermioniques comprenant un nombre impair de vertex peuvent être omis¹⁶.

¹⁶Ce résultat n'est vrai que pour une interaction fermion-champ de jauge qui respecte la parité comme ici l'électrodynamique quantique (voir le chapitre 4 et l'appendice B).

Les règles de Feynman énumérées ci-dessus s'appliquent au calcul des fonctions de Green. Les éléments de matrice S sont obtenus à partir des fonctions de Green par les formules de réduction (3.39) et (3.40), dans la jauge de Feynman. Leur effet est de tronquer les propagateurs des lignes externes et de placer les états sur leur couche de masse en multipliant par la fonction d'onde correspondant à chaque particule ou antiparticule du processus. Pour obtenir les règles de Feynman pour la matrice S , on observe premièrement que, d'après les règles qui viennent d'être énoncées pour les fonctions de Green, la fonction $\tilde{G}(-q', -q, k, k')_{abcd}$ qui apparaît dans l'équation (3.39) est de la forme

$$\tilde{G}(-q', -q, k, k')_{abcd} = \frac{i(-\not{q}' + m)_{a'a}}{q'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{q} + m)_{bb'}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{k} + m)_{c'c}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(-\not{k}' + m)_{dd'}}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \Delta_{a'b'c'd'},$$

$\Delta_{a'b'c'd'}$ contenant les contributions des lignes internes et des vertex. La formule de réduction des spineurs en espace des impulsions (3.39) correspond ensuite aux manipulations suivantes:

- *Fermion d'impulsion k et polarisation α dans l'état initial:* multiplier par le facteur

$$(-iZ_2^{-1/2})[(\not{k} - m)u^{(\alpha)}(k)]_c$$

la fonction de Green qui contient une ligne fermionique entrante d'impulsion k , et donc un facteur

$$\frac{i(\not{k} + m)_{c'c}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Il en résulte un facteur $Z_2^{-1/2} u^{(\alpha)}(k)$ dans l'élément de matrice S .

- *Antifermion d'impulsion k' et polarisation α' dans l'état initial:* multiplier par le facteur

$$(-iZ_2^{-1/2})[\bar{v}^{(\alpha')}(k')(\not{k}' + m)]_d$$

la fonction de Green qui contient une ligne fermionique sortante d'impulsion (entrante) k' , et donc un facteur

$$\frac{i(-\not{k}' + m)_{dd'}}{k'^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Il en résulte un facteur $-Z_2^{-1/2} \bar{v}^{(\alpha')}(k')$ dans l'élément de matrice S .

- *Fermion d'impulsion q et polarisation β dans l'état final:* multiplier par le facteur

$$(-iZ_2^{-1/2})[\bar{u}^{(\beta)}(q)(\not{q} - m)]_b$$

la fonction de Green qui contient une ligne fermionique sortante d'impulsion (entrante) $-q$, et donc un facteur

$$\frac{i(\not{q} + m)_{bb'}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Il en résulte un facteur $Z_2^{-1/2} \bar{u}^{(\beta)}(q)$ dans l'élément de matrice S .

- *Antifermion d'impulsion q' et polarisation β' dans l'état final:* multiplier par le facteur

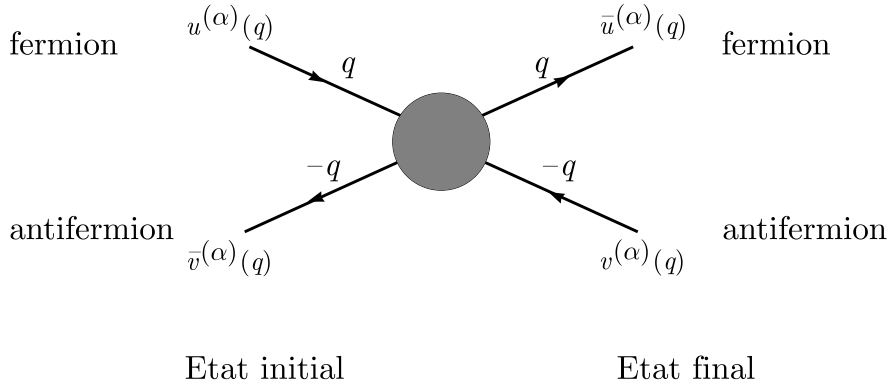
$$(-iZ_2^{-1/2})[(\not{q}' + m)v^{(\beta')}(q')]_a$$

la fonction de Green qui contient une ligne fermionique entrante d'impulsion (entrante) $-q'$, et donc un facteur

$$\frac{i(-\not{q}' + m)_{a'a}}{q'^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Il en résulte un facteur $-Z_2^{-1/2}v^{(\beta')}(q')$ dans l'élément de matrice S .

Pour un calcul à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, $Z_2 = 1$. Puisque le signe d'un élément de matrice S est inobservable, les règles de Feynman pour ses lignes fermioniques externes seront résumées par le diagramme suivant:



Finalement, la formule de réduction pour les champs vectoriels (3.40), dans la jauge $\lambda = 1$, indique que la règle de Feynman pour un photon externe de polarisation ϵ est

$$Z_3^{-1/2}\epsilon_\mu$$

dans un élément de matrice S . Le vecteur de polarisation est nécessairement transverse, $k\epsilon = 0$.

3.4 Grandeurs observables: sections efficaces, temps de vie

L'élément de matrice S

$$\langle b, out | a, in \rangle = \langle b, in | S | a, in \rangle$$

donne l'amplitude de probabilité de la transition de l'état initial asymptotique $|a, in\rangle$ vers l'état final $|b, out\rangle$. Il s'agit maintenant de relier cette quantité aux grandeurs observées expérimentalement: largeur de désintégration, temps de vie, rapports de branchement pour un état initial à une particule, section efficace totale ou différentielle, distributions lors d'une collision de deux particules.

Nous allons nous intéresser à des états initial et final formés de paquets d'ondes planes dont la distribution en impulsion est très étroitement concentrée autour d'une valeur p_i pour chaque paquet. Cette situation est couramment réalisée expérimentalement: un accélérateur prépare des faisceaux de particules d'impulsion déterminée avec une faible dispersion. On pourra alors en bonne approximation caractériser chaque paquet d'ondes par cette impulsion p_i . Idéalement, on aimerait considérer simplement des ondes planes d'impulsion p_i mais celles-ci ne sont pas normalisables.

Afin d'isoler dans la matrice S les transitions non triviales, il est d'usage d'introduire la décomposition (3.6), $S = I + iT$. D'autre part, nous avons vu que tout élément de matrice S contient en facteur une distribution de Dirac de conservation d'énergie-impulsion. On posera donc:

$$\langle b, in | iT | a, in \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P) \langle b, in | i\tau | a, in \rangle, \quad (3.92)$$

où P est la somme de toutes les impulsions entrantes et l'opérateur réduit τ agit sur des états dont les impulsions vérifient la condition de conservation d'énergie-impulsion $P = 0$.

3.4.1 Collision de deux particules: section efficace

Pour définir la *section efficace* de collision et en obtenir une expression à partir d'un élément de matrice S , il est commode de considérer un volume fini $V = L^3$ (un cube) et de supposer que l'interaction n'agit que pendant un temps fini T dans ce volume. La matrice S décrit alors une transition de l'état $|a, in\rangle$ avant la mise en œuvre de l'interaction vers un état $|b, out\rangle$ après son interruption.

Dans un volume V et un intervalle de temps T finis, les distributions de Dirac

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{q})}, \quad \delta(p^0 - q^0) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{-it(p^0 - q^0)}$$

deviennent

$$\begin{aligned} \delta_V^3(\vec{p} - \vec{q}) &\equiv \int_V \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{q})} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}, \vec{q}}, \\ \delta_T(p^0 - q^0) &\equiv \int_T \frac{dt}{2\pi} e^{-it(p^0 - q^0)} = \frac{T}{2\pi} \delta_{p^0, q^0}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

L'impulsion devient discrète, quantifiée:

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 : \text{entiers.} \quad (3.94)$$

Une onde plane est normalisable:

$$f_k(x) = V^{-1/2} e^{-ikx}, \quad \longrightarrow \quad \int_V d^3x |f_k(x)|^2 = 1.$$

Si $k^2 = m^2$, $f_k(x)$ est une solution de l'équation de Klein-Gordon avec un courant

$$j_\mu = i f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu f_k(x) = 2V^{-1} k_\mu.$$

Nous dirons alors que le nombre total de particules dans le volume V est $2k_0 = \int_V d^3x j_0$. Ecrivons l'état initial de la collision sous la forme

$$|a, in\rangle = f_{k_1} f_{k_2} |k_1, k_2, in\rangle, \quad k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2.$$

La probabilité de transition est alors

$$|\langle b, out | a, in \rangle|^2 = V^{-2} [(2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - P_f)]^2 |\langle b, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2,$$

où P_f est la somme des impulsions des particules dans l'état final. Comme

$$[(2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - P_f)]^2 = [VT \delta_{k_1+k_2, P_f}]^2 = VT (2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - P_f), \quad (3.95)$$

il vient

$$|\langle b, out | a, in \rangle|^2 = V^{-1} T (2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - P_f) |\langle b, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2.$$

Le taux de transition par unité de volume (probabilité/ VT) est alors

$$T_{i \rightarrow f} = V^{-2} (2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - P_f) |\langle b, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2.$$

Supposons ensuite que l'état final est formé de ℓ ondes planes de Klein-Gordon:

$$|b, out\rangle = f_{p_1} f_{p_2} \dots f_{p_\ell} |p_1, p_2, \dots, p_\ell, out\rangle, \quad P_f = p_1 + p_2 + \dots + p_\ell.$$

Il n'y a pas de raison de supposer que ces particules sont de masses identiques: $p_i^2 = m_i^2$. La normalisation des ondes planes va contribuer au taux de transition par un facteur $V^{-\ell}$:

$$T_{i \rightarrow f} = V^{-2-\ell} (2\pi)^4 \delta_V^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2.$$

Pour définir la section efficace, supposons que la particule incidente d'impulsion k_2 est la cible au repos: $k_2 = (m_2, \vec{0})$. Dans ce référentiel, on obtient la section efficace σ en divisant $T_{i \rightarrow f}$ par la densité de particules dans la cible (qui est $2m_2 V^{-1}$) et par le flux de particules incidentes (qui est $2|\vec{k}_1| V^{-1}$), puis en sommant sur les états finals possibles:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4m_2 |\vec{k}_1|} V^{-\ell} \sum_f \delta_V^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) \quad (3.96)$$

$$|\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2,$$

où \sum_f désigne la somme sur les états finals. Pour caractériser cette somme, nous avons besoin du nombre d'états possibles dans V et dans un volume d'impulsion d^3p autour de p , l'impulsion de l'une des particules de l'état final. La discrétisation de l'impulsion (3.94) indique qu'il y a $V(2\pi)^{-3}d^3p$ états dans d^3p : c'est le nombre de solutions (n_1, n_2, n_3) à l'équation (3.94) dans un volume d^3p donné. Le volume V contenant $2\omega_p$ particules d'impulsion p , il y a donc

$$\frac{V d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}$$

états par particule dans d^3p . En conséquence,

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\sigma, \\ d\sigma &= \frac{1}{S} \frac{(2\pi)^4}{4m_2 |\vec{k}_1|} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2\omega_{p_i}} \delta_V^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) \\ &\quad |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Le facteur $1/S$ est introduit pour éviter le comptage multiple d'états finals indistinguables: si k particules dans l'état final sont identiques, il faut multiplier $d\sigma$ par $1/k!$; S est le produit des facteurs $k!$ tenant compte des particules identiques. Toute dépendance en V et T autre que celle de δ_V a disparu et on peut prendre la limite $V, T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{S} \frac{(2\pi)^4}{4m_2 |\vec{k}_1|} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2\omega_{p_i}} \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) \\ &\quad |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.98)$$

qui est l'expression de la *section efficace différentielle* pour la collision de particules sans spin (des champs de Klein-Gordon), dans le référentiel "du laboratoire" ou la particule cible de masse m_2 est au repos. On peut déduire de (3.98) une expression invariante de Lorentz en observant que dans ce référentiel, puisque

$$(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = (\omega_{k_1} \omega_{k_2} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = m_2^2 (\omega_{k_1}^2 - m_1^2) = (m_2 |\vec{k}_1|)^2,$$

le dénominateur $4m_2 |\vec{k}_1|$ est la valeur de l'invariant $4[(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$. L'expression invariante de Lorentz de la section efficace différentielle est donc

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{S} \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2\omega_{p_i}} \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) \\ &\quad |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.99)$$

qui est une fonction de toutes les impulsions $k_1, k_2, p_1, \dots, p_\ell$. La *section efficace totale* σ pour un état final comprenant ℓ particules est obtenue en intégrant (3.99) sur les impulsions de l'état final; σ est une fonction invariante de Lorentz de k_1

et k_2 . Comme $k_1^2 = m_1^2$, $k_2^2 = m_2^2$ la seule variable invariante de Lorentz est $k_1 k_2$ ou encore

$$s = (k_1 + k_2)^2.$$

La section efficace totale est donc une fonction de \sqrt{s} , qui est l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse où $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$.

La *section efficace inclusive* est la somme des sections efficaces pour tous les états finals possibles. Pour des champs de Klein-Gordon, elle est donnée par la somme des sections efficaces pour chaque valeur ℓ du nombre de particules dans l'état final.

L'expression (3.99) a été dérivée à partir d'ondes planes dans un volume fini, au lieu de considérer des paquets d'ondes normalisables dans tout l'espace, de la forme

$$\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(k) e^{-ikx}.$$

Il s'avère que (3.99) est valable lorsque les états initial et final sont décrits par des paquets d'ondes étroits, pour lesquels

$$i\partial_\mu \tilde{f}(x) \simeq p_\mu \tilde{f}(x)$$

est une bonne approximation. C'est le cas si la distribution en impulsion $f(k)$ s'annule rapidement lorsque k s'éloigne de p .

La dimension physique du taux de transition par unité de volume $T_{i \rightarrow f}$ est longueur⁻³ temps⁻¹. Comme on obtient σ en le divisant par une densité de nombre de particules (longueur⁻³) et par un flux de particules (longueur⁻² temps⁻¹), la section efficace a la dimension physique d'une surface.

La formule (3.99) s'applique également aux processus de diffusion de bosons de spins non nuls. L'amplitude $\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle$ dépend dans ce cas des impulsions et des polarisations de ces particules. Lorsqu'on s'intéresse à une diffusion de faisceaux incidents non polarisés, la section efficace différentielle est obtenue en prenant la moyenne de la quantité $|\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2$ sur les polarisations de l'état initial. Et la section efficace totale comprend une somme sur toutes les polarisations non observées de l'état final.

Pour un processus de diffusion impliquant des fermions, il faut tenir compte de la normalisation différente utilisée dans la décomposition en ondes planes du champ spinoriel. D'après l'équation (1.140), dans un volume V fini, les ondes planes

$$\psi_{u,k}^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{m}{\omega_k V}} u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx}, \quad \psi_{v,k}^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{m}{\omega_k V}} v^{(\alpha)}(k) e^{-ikx}$$

sont normalisées correctement:

$$\int_V d^3 x \psi_{u,k}^{(\alpha)\dagger}(x) \psi_{u,k}^{(\alpha)}(x) = \int_V d^3 x \psi_{v,k}^{(\alpha)\dagger}(x) \psi_{v,k}^{(\alpha)}(x) = 1$$

(sans somme sur α). Pour ces ondes planes, le courant fermionique s'écrit

$$j^\mu = \bar{\psi}_{\mathfrak{b},k}^{(\alpha)}(x) \gamma^\mu \psi_{\mathfrak{b},k}^{(\alpha)}(x) = \frac{k^\mu}{\omega_k V}, \quad \mathfrak{b} = u, v.$$

Comme la densité de particules est $j^0 = V^{-1}$, il y a une particule dans le volume V .

Nous avons vu que la contribution à $d\sigma$ d'une onde plane bosonique de l'état initial est la suivante: un facteur V^{-1} de normalisation multiplié par $V(2k^\mu)^{-1}$ lorsqu'on divise par le flux, c'est-à-dire un facteur $(2k^\mu)^{-1}$. Pour un fermion dans l'état initial, cette contribution est

$$\frac{m}{\omega_k V} \times \frac{\omega_k V}{k^\mu} = 2m \times (2k^\mu)^{-1}.$$

Il faut donc ajouter un facteur $2m$ à l'expression (3.99) pour chaque fermion dans l'état initial.

Pour un boson dans l'état final, trois contributions se multiplient: la normalisation (facteur V^{-1}), l'espace de phase (facteur $V d^3p (2\pi)^{-3}$) qui doit être divisé par le nombre de particules dans V (facteur $(2\omega_k)^{-1}$). La contribution à $d\sigma$ est donc

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}$$

pour un boson. Les trois mêmes facteurs pour un fermion dans l'état final sont:

$$\frac{m}{\omega_k V} \times \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \times 1 = 2m \times \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}.$$

A nouveau, un fermion dans l'état final ajoute un facteur $2m$ à l'expression (3.99) de la section efficace différentielle.

Chaque fermion dans l'état initial ou final est également caractérisé par sa polarisation α . Si on s'intéresse à une collision de particules non polarisées, il faut prendre la moyenne sur les deux orientations du spin de chaque fermion initial, et sommer sur les polarisations finales non observées.

Une remarque sur les dimensions physiques des quantités apparaissant dans la formule de section efficace est peut-être utile. Nous avons affirmé que la section efficace est une surface: σ a donc dimension -2 en unité d'énergie (et $\hbar = c = 1$). D'après (3.99), il faut pour cela que l'élément de matrice réduit

$$\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle$$

ait dimension $2 - \ell$ si le processus ne comprend que des bosons. Mais cet élément de matrice est calculé à partir des termes non triviaux de l'élément de matrice S en extrayant une distribution de Dirac $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell)$, qui a dimension -4 . L'élément de matrice S doit donc avoir dimension $-(\ell + 2)$.

Pour obtenir la dimension physique de l'élément de matrice S , il convient de revenir aux champs bosoniques et fermioniques. D'après la forme des densités lagrangiennes (de dimension 4) qui les décrivent, il est clair que les dimensions des champs bosoniques et des spineurs sont respectivement 1 et $3/2$. Et leurs expansions en ondes planes indiquent que les opérateurs de création ou d'annihilation sont de dimension -1 pour les bosons, $-3/2$ pour les fermions. Ce fait est d'ailleurs confirmé par leurs relations de commutation ou d'anticommutation. Pour des bosons uniquement, l'élément de matrice S

$$\langle p_1, \dots, p_\ell, in | S | k_1, k_2, in \rangle$$

a la dimension de $\ell + 2$ opérateurs de création ou d'annihilation¹⁷, c'est-à-dire $-(\ell + 2)$ comme demandé. Si le processus à $\ell + 2$ particules comprend k fermions, la dimension de l'élément de matrice S devient $-(\ell + 2) - k/2$. Les k fermions ajoutent donc $-k$ unités à la dimension de $d\sigma$. Mais ils ajoutent aussi un facteur $(2m)^k$, de dimension $+k$ si bien que $(2m)^k |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | S | k_1, k_2, in \rangle|^2$ a bien dimension $-2(\ell + 2)$.

3.4.2 Désintégration d'une particule instable: largeur, temps de vie, rapports de branchement

Le désintégration d'une particule instable de type A et de masse M est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = -\Gamma_A N_A(t) = -\frac{1}{\tau_A} N_A(t), \quad (3.100)$$

$N_A(t)$ étant le nombre de particules au temps t dans un volume arbitraire. La quantité Γ_A est la *largeur de désintégration* et τ_A est le *temps de vie* de la particule.

Ainsi, la largeur de désintégration de la particule A dans un état final f à ℓ particules est le taux de transition $T_{A \rightarrow f}$ par particule de type A . Elle s'obtient à partir de l'élément de matrice réduit

$$\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | P, in \rangle,$$

où P est l'impulsion de la particule A , par une expression similaire à la section efficace de collision dans le référentiel du laboratoire (3.98). Il suffit en fait de supprimer la contribution de la particule projectile, c'est-à-dire le facteur de flux $(2|k_1|)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow f} = & \frac{(2\pi)^4}{2M} \frac{1}{S} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \cdots \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2\omega_{p_\ell}} \delta^4(P - p_1 - \dots - p_\ell) \\ & \cdot |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | P, in \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.101)$$

¹⁷L'état du vide $|0\rangle$ est sans dimension.

lorsque la réaction ne fait intervenir que des bosons. A nouveau, S est le facteur tenant compte des particules identiques de l'état final. Et chaque fermion dans l'état initial ou final ajoute un facteur

$$2m.$$

La largeur *totale* de désintégration sera obtenue en sommant sur tous les états finals distincts, c'est-à-dire sur tous les modes de désintégration:

$$\Gamma_A = \sum_f \Gamma_{A \rightarrow f}. \quad (3.102)$$

Pour un mode fixé, $A \rightarrow f$, $\Gamma_{A \rightarrow f}$ est la largeur de désintégration *partielle*, et le nombre

$$B_f = \frac{\Gamma_{A \rightarrow f}}{\Gamma_A} \quad (3.103)$$

est le *rapport de branchement* pour le mode de désintégration $A \rightarrow f$.

On peut définir un temps de vie pour chaque mode de désintégration $A \rightarrow f$:

$$\tau_{A \rightarrow f} = \frac{1}{\Gamma_{A \rightarrow f}} = B_f^{-1} \tau_A. \quad (3.104)$$

Notez que $\tau_A^{-1} = \sum_f \tau_{A \rightarrow f}^{-1}$.

On peut calculer différentes distributions en n'intégrant pas sur certaines variables de l'état final apparaissant dans (3.101). Par exemple, $\frac{d}{dp_1^0} \Gamma_{A \rightarrow f}$, qui est la distribution d'énergie de la particule 1 de l'état final, est obtenue en n'intégrant pas sur la variable $|\vec{p}_1| = \sqrt{\omega_{p_1}^2 - m_1^2}$ ($\omega_{p_1} = p_1^0$), avec $dp_1^0 = |\vec{p}| d|\vec{p}| / p_1^0$.

3.4.3 Calculs d'espace de phase

Le calcul d'une section efficace ou d'une largeur comprend des intégrations sur les variables de l'espace de phase de l'état final $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell$. Certaines particularités de ces intégrations méritent d'être discutées. La conservation d'impulsion, présente par une distribution de Dirac dans σ ou $\Gamma_{A \rightarrow f}$, permet l'intégration de quatre de ces variables. D'autres intégrations peuvent être simplifiées par un choix judicieux de référentiel. D'autre part, dans un processus qui n'implique pas de polarisations ou dans lequel on a sommé et moyenné les polarisations finales et initiales, l'intégrant de σ ou $\Gamma_{A \rightarrow f}$ est une fonction des invariants de Lorentz qu'on peut former avec les impulsions des particules participant au processus. La conservation d'impulsion peut souvent être utilisée pour simplifier au maximum cette dépendance.

Désintégration en deux particules

La conservation d'impulsion s'écrit

$$P = p_1 + p_2, \quad (3.105)$$

P étant l'impulsion de la particule en désintégration, $P^2 = M^2$. P est un quadrivecteur connu puisque l'état initial est supposé connu. L'équation (3.105) implique que tous les invariants formés avec P , p_1 et p_2 sont déterminés par l'état initial et donc connus:

$$p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \\ p_1 p_2 = \frac{1}{2}[P^2 - m_1^2 - m_2^2], \quad P p_1 = m_1^2 + p_1 p_2, \quad P p_2 = m_2^2 + p_1 p_2.$$

La quantité $|\langle p_1, p_2, in | i\tau | P, in \rangle|^2$ est donc complètement déterminée par l'état initial. D'après (3.101), la largeur d'une désintégration en deux particules s'écrit alors¹⁸

$$\Gamma = \frac{1}{2M} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | P, in \rangle|^2 \int dLips, \quad (3.106)$$

avec un facteur $1/2$ si l'état final comprend deux particules identiques. L'intégrale sur l'espace de phase donne:

$$\begin{aligned} \int dLips &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\omega_{p_2}} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \\ &= 2\pi \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \int d^4 p_2 \theta(p_2^0) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(P - p_1 - p_2) \quad (3.107) \\ &= 2\pi \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \theta(P^0 - p_1^0) \delta(M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2P p_1). \end{aligned}$$

Comme cette expression est invariante de Lorentz, il est plus simple de la calculer dans le référentiel au repos de la particule instable¹⁹, où $P = (M, \vec{0})$ et $P p_1 = M p_1^0 = M \omega_{p_1}$. En observant que

$$\frac{1}{2\omega_{p_1}} d^3 p_1 = \frac{1}{2\omega_{p_1}} |\vec{p}_1|^2 d\Omega d|\vec{p}_1| = \frac{1}{2} \sqrt{(p_1^0)^2 - m_1^2} d\Omega dp_1^0, \quad (|\vec{p}_1| d|\vec{p}_1| = p_1^0 dp_1^0),$$

où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide, on obtient

$$\begin{aligned} \int dLips &= \frac{1}{16\pi^2 M} \int d\Omega \int_{m_1}^{\infty} dp_1^0 \sqrt{(p_1^0)^2 - m_1^2} \theta(M - p_1^0) \\ &\quad \cdot \delta\left(p_1^0 - \frac{1}{2M}(M^2 + m_1^2 - m_2^2)\right) \quad (3.108) \\ &= \frac{1}{8\pi M^2} \sqrt{\Delta(M^2, m_1^2, m_2^2)}, \end{aligned}$$

où la fonction Δ est définie par

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz. \quad (3.109)$$

Dans (3.108), la fonction $\theta(M - p_1^0)$ est toujours égale à un. Il suit de (3.108) que la largeur de désintégration en deux particules est simplement:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M^3} \sqrt{\Delta(M^2, m_1^2, m_2^2)} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | P, in \rangle|^2, \quad (3.110)$$

¹⁸ *Lips* signifie "Lorentz invariant phase space".

¹⁹ C'est aussi le référentiel du centre de masse.

avec un facteur $1/2$ lorsque l'état final contient deux particules identiques. Dans le référentiel du centre de masse, l'impulsion $|\vec{p}|$ de chaque particule émise est

$$|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{1}{2M} \sqrt{\Delta(M^2, m_1^2, m_2^2)},$$

si bien que

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}|}{8\pi M^2} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | P, in \rangle|^2. \quad (3.111)$$

Collision: état final à deux particules

Pour une collision de deux particules d'impulsions k_1 et k_2 et un état final à deux particules,

$$P = k_1 + k_2 = p_1 + p_2,$$

il est utile d'introduire les *variables de Mandelstam*

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2, \\ t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2, \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Ces quantités vérifient

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + \tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2, \quad (k_i^2 = m_i^2, \quad p_i^2 = \tilde{m}_i^2, \quad i = 1, 2,). \quad (3.113)$$

En l'absence de polarisations (initiales ou mesurées), n'importe quel produit de deux quadrvecteurs s'exprime en fonction de s , t , u et des masses, c'est-à-dire de deux variables indépendantes seulement. Comme s est déterminé à partir de l'état initial uniquement, la quantité

$$|\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2$$

dépend de s (connu) et d'une variable t ou u reliée à l'état final. Le calcul de la section efficace n'impliquera qu'une seule intégration d'espace de phase non triviale.

La quantité \sqrt{s} est l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse de la collision. Dans ce référentiel:

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega_{k_1}, \vec{k}), & k_2 &= (\omega_{k_2}, -\vec{k}), \\ p_1 &= (\omega_{p_1}, \vec{p}), & p_2 &= (\omega_{p_2}, -\vec{p}), \end{aligned}$$

avec $\sqrt{s} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{p_1} + \omega_{p_2}$. Comme \vec{k} est connu et

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\Delta(s, \tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2)},$$

la seule variable de l'état final qui n'est pas fixée par la cinématique est l'angle entre les vecteurs \vec{k} et \vec{p} ,

$$\cos \theta = \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{|\vec{k}| |\vec{p}|}.$$

Cet *angle de diffusion* intervient dans t et u :

$$\begin{aligned} t &= m_1^2 + \tilde{m}_1^2 - 2\omega_{k_1}\omega_{p_1} + 2|\vec{k}||\vec{p}| \cos \theta, \\ u &= m_1^2 + \tilde{m}_2^2 - 2\omega_{k_1}\omega_{p_2} - 2|\vec{k}||\vec{p}| \cos \theta. \end{aligned}$$

Dans le référentiel du centre de masse, la section efficace (3.99) devient

$$d\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4\sqrt{s}|\vec{k}|} dLips |\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2,$$

puisque $(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = s|\vec{k}|^2$. Les mêmes manipulations que dans (3.107) et (3.108) permettent d'intégrer sur $d^3 p_2$ et $d|\vec{p}_1|$. Il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2(8\pi)^2 s^{3/2} |\vec{k}|} \sqrt{\Delta(s, \tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2)} \frac{1}{S} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \frac{1}{S} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.114)$$

Ω étant l'angle solide du vecteur $\vec{p}_1 = \vec{p}$ (par rapport à la direction du vecteur \vec{k}). Si l'état final comprend deux particules identiques, $S = 2$, sinon $S = 1$.

Pour calculer la section efficace totale, il reste à intégrer cette dernière expression sur $d\Omega = d\phi d\cos\theta$, avec en général une dépendance en θ de l'élément de matrice réduit. Comme l'intégration sur l'angle azimutal ϕ produit un facteur 2π , la distribution angulaire est

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \frac{1}{S} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2. \quad (3.115)$$

Dans le référentiel du laboratoire où

$$k_1 = (E_1, \vec{k}_1), \quad E_1 = \sqrt{m_1^2 + \vec{k}_1^2}, \quad k_2 = (m_2, \vec{0}), \quad (3.116)$$

comme $(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = m_2^2 (E_1^2 - m_1^2) = (m_2 |\vec{k}_1|)^2$, la section efficace différentielle (3.99) s'écrit

$$d\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4m_2 |\vec{k}_1|} dLips |\langle p_1, p_2, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2.$$

La conservation d'impulsion $k_1 + k_2 = p_1 + p_2$ et l'invariance azimutale de la cinématique indiquent qu'une seule intégration d'espace de phase est non triviale. La variable que cette intégration implique est en général $\cos\theta = \vec{p}_1 \cdot \vec{k}_1 (|\vec{p}_1| |\vec{k}_1|)^{-1}$.

Désintégration en trois particules

Supposons qu'on s'intéresse à un état final contenant trois particules d'impulsions p_1, p_2, p_3 , dans le référentiel du centre de masse; par conservation d'impulsion,

$$\sqrt{s} = \omega_{p_1} + \omega_{p_2} + \omega_{p_3}, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0.$$

La seconde égalité indique que l'état final est contenu dans un plan. Elle implique aussi:

$$\vec{p}_3^2 = (\sqrt{s} - \omega_{p_1} - \omega_{p_2})^2 - m_3^2 = |\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_2|^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta,$$

θ étant l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . Cette angle peut donc être exprimé, par exemple, en fonction de $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$:

$$\cos\theta = \frac{1}{2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \left[(\sqrt{s} - \omega_{p_1} - \omega_{p_2})^2 - m_3^2 - |\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_2|^2 \right]. \quad (3.117)$$

De plus, les valeurs limites $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ impliquent des conditions sur $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$:

$$\left| (\sqrt{s} - \omega_{p_1} - \omega_{p_2})^2 - m_3^2 - |\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_2|^2 \right| \leq 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|. \quad (3.118)$$

Pour des masses nulles dans l'état final, ces conditions deviennent:

$$\frac{1}{2}\sqrt{s} - |\vec{p}_1| \leq |\vec{p}_2| \leq \frac{1}{2}\sqrt{s}, \quad 0 \leq |\vec{p}_1| \leq \frac{1}{2}\sqrt{s}. \quad (3.119)$$

Autrement dit, l'énergie de chaque particule est au plus $\sqrt{s}/2$, et la somme des énergies de deux particules est au minimum $\sqrt{s}/2$.

Pour une désintégration en trois particules, $\sqrt{s} = M$, la masse de la particule instable. Dans le référentiel au repos de cette particule (centre de masse), l'état initial ne possède pas de direction privilégiée s'il n'est pas polarisé. La direction d'une des impulsions, par exemple \vec{p}_1 , est sans information et il ne reste que deux variables significatives, par exemple $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$. En général, le calcul d'une largeur avec un état final à trois particules impliquera donc deux intégrations non triviales. D'après (3.101),

$$\Gamma = \frac{1}{2MS} \int |\langle p_1, p_2, p_3, in | i\tau | P, in \rangle|^2 dLips. \quad (3.120)$$

Dans un processus sans polarisation, le carré de l'élément de matrice dépend des invariants Pp_1 , Pp_2 et p_1p_2 . Dans le référentiel du centre de masse,

$$Pp_1 = M\omega_{p_1}, \quad Pp_2 = M\omega_{p_2}, \quad p_1p_2 = \omega_{p_1}\omega_{p_2} - |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta,$$

et $\cos\theta$ est une fonction de $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$: les trois invariants dépendent bien de deux variables.

L'espace de phase à trois particules peut se calculer de la manière suivante:

$$\begin{aligned} dLips &= (2\pi)^4 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2\omega_{p_2}} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2\omega_{p_3}} \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) \\ &= 2\pi \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2\omega_{p_2}} d^4p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \theta(p_3^0) \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) \\ &= \pi \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2\omega_{p_2}} \theta(M - \omega_{p_1} - \omega_{p_2}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \delta(f(|\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|) - \cos\theta), \end{aligned}$$

avec $P = (M, \vec{0})$ dans le référentiel du centre de masse et

$$f(|\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|) = \frac{1}{2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \left[(M - \omega_{p_1} - \omega_{p_2})^2 - m_3^2 - |\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_2|^2 \right]. \quad (3.121)$$

La distribution de Dirac impose la relation (3.117) et les inégalités (3.118) sur le domaine de variation de $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$ (ou des énergies $\omega_{p_1} = p_1^0$ et $\omega_{p_2} = p_2^0$). Notez que $\theta(M - \omega_{p_1} - \omega_{p_2}) = 1$ puisque la valeur maximale de $\omega_{p_1} + \omega_{p_2}$ est $M - m_3$, lorsque $\vec{p}_3 = 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p_2}{2\omega_{p_2}} &= \frac{|\vec{p}_2|^2}{2\omega_{p_2}} d|\vec{p}_2| d\phi d\cos\theta = \frac{1}{2} |\vec{p}_2| d\phi d\cos\theta dp_2^0, \\ \frac{d^3 p_1}{2\omega_{p_1}} &= \frac{|\vec{p}_1|^2}{2\omega_{p_1}} d|\vec{p}_1| d\Omega_1 = \frac{1}{2} |\vec{p}_1| d\Omega_1 dp_1^0, \end{aligned}$$

où ϕ est l'angle azimutal de \vec{p}_2 autour de \vec{p}_1 , θ l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{p}_2 et Ω_1 est l'angle solide de \vec{p}_1 . Avec ces variables, il vient

$$dLips = \frac{1}{8} (2\pi)^{-5} d\Omega_1 d\phi dp_1^0 dp_2^0, \quad (3.122)$$

les valeurs admissibles des énergies p_1^0 et p_2^0 étant définies par les conditions contenues dans (3.118). En insérant (3.122) dans (3.120) et en supposant que l'élément de matrice est exprimé en fonction de p_1^0 et p_2^0 , il vient:

$$d\Gamma = \frac{1}{16(2\pi)^5 M} \frac{1}{S} d\Omega_1 d\phi dp_1^0 dp_2^0 |\langle p_1, p_2, p_3, in | i\tau | P, in \rangle|^2.$$

Ou encore:

$$\frac{d\Gamma}{dp_1^0 dp_2^0} = \frac{1}{8(2\pi)^3 M} \frac{1}{S} |\langle p_1, p_2, p_3, in | i\tau | P, in \rangle|^2. \quad (3.123)$$

La représentation graphique de cette distribution dans le domaine admissible du plan (p_1^0, p_2^0) est le *graphe de Dalitz*. La distribution est plate si l'élément de matrice est indépendant des énergies et le relief du graphe de Dalitz est donc une image de $|\langle p_1, p_2, p_3, in | i\tau | P, in \rangle|^2$.

Références

La matrice S et le développement de la théorie des perturbations pour le calcul de ses éléments de matrice se trouvent au centre de chaque exposé de la théorie quantique des champs. Par exemple:

Itzykson et Zuber [1], section 5.1 et chapitre 6; Peskin et Schroeder [6], chapitre 4; Weinberg [2], chapitres 3 et 6.

On y trouvera également une discussion d'aspects plus techniques laissés ici de

côté (propriétés d'analyticité, unitarité et causalité, ...). Le lien entre matrice S et section efficace ou taux de transition s'y trouve évidemment décrit; voir aussi: Halzen et Martin [8], sections 4.3 et 4.4.

Pour une discussion approfondie de la cinématique relativiste et de l'espace de phase:

Byckling et Kajantie [17], ou Hagedorn [18].

Exercices

- 3.1** En s'inspirant du cas du propagateur (sect. 2.5), obtenir l'équation différentielle vérifiée par la fonction de Green à n points du champ scalaire. Il s'agit de calculer

$$(\square_{x_1} + m^2)\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)|0\rangle.$$

- 3.2** Montrer que dans une désintégration en deux particules et dans le référentiel du centre de masse, l'impulsion $|\vec{p}|$ de chaque particule émise est

$$|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{1}{2M}\sqrt{\Delta(M^2, m_1^2, m_2^2)}.$$

De même, montrer que dans une collision avec un état final à deux particules et dans le référentiel du centre de masse, l'impulsion $|\vec{p}|$ de chaque particule émise est

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\Delta(s, \tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2)}.$$

- 3.3** Donner une expression perturbative de l'élément de matrice S pour la diffusion électron-photon (diffusion Compton) à partir de la formule de réduction (3.43).

Pour cela, insérer le courant électromagnétique de l'électron $j_\mu(x) = -e : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) :$ dans ladite formule, admettre que les champs spinoriels sont libres (à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations) et utiliser le théorème de Wick.

Le résultat pourra être comparé à la discussion du paragraphe 5.2.1.

Chapitre 4

Densités lagrangiennes phénoménologiques

Dans la section 1.5, nous avons énuméré sans justification particulière l'ensemble des termes admissibles dans la densité lagrangienne d'une théorie quantique de champs scalaires, spinoriels et de jauge. La densité lagrangienne est invariante sous les transformations (globales) de Lorentz propres orthochrones (invariance relativiste) ainsi que sous celles d'un groupe de jauge qui détermine les propriétés des champs de spin un de la théorie. Le choix du groupe de jauge est libre, ainsi que celui des représentations des champs scalaires et spinoriels¹.

D'autre part, nous avons développé dans le chapitre 3 les outils permettant de calculer en théorie des perturbations des observables telles que sections efficaces ou temps de vie, étant donné la densité lagrangienne d'interaction ou l'hamiltonien correspondant.

L'objet de ce chapitre est de donner une discussion de nature plus phénoménologique des densités lagrangiennes utiles à la description des interactions fortes, faibles et électromagnétiques des particules élémentaires (quarks, leptons, champs de jauge) ou non (hadrons). Pour les particules élémentaires, la forme des interactions est contenue dans le Modèle standard de Glashow, Salam et Weinberg².

Le respect ou la violation de symétries discrètes telles que la parité P , la conjugaison de charge C ou le renversement du temps T ont joué un rôle important dans l'étude des interactions des particules élémentaires et dans la classification des forces fondamentales mises en jeu. Par exemple, seules les interactions faibles violent P . Puisque ces propriétés donnent des informations sur la forme des densités lagrangiennes d'interaction, nous commençons par l'étude de C , P et T .

¹A l'exception de la condition dite "d'absence d'anomalie" pour les fermions, qui est brièvement discutée dans l'appendice B.

²La densité lagrangienne du Modèle standard est décrite dans le chapitre 8.

4.1 Invariance ou violation de C , P et T

La *parité* P et le *renversement du temps* T sont naturellement reliés au principe d'invariance relativiste puisque ces symétries discrètes sont contenues dans le groupe de Lorentz. Par contre, la *conjugaison de charge* C , qui relie particules et antiparticules, est liée à l'existence de ces dernières qui est une conséquence de la théorie quantique des champs.

Une transformation du groupe de Lorentz Λ se décompose selon $\Lambda = \Lambda_D \Lambda_0$, Λ_0 étant une transformation de Lorentz propre orthochrone et Λ_D un élément discret,

$$\Lambda_D \in \{1, P, T, PT\}.$$

Ces quatre transformations forment un sous-groupe discret $Z_2 \times Z_2$ du groupe de Lorentz. La parité et le renversement du temps agissent sur les coordonnées selon

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} (x^0, -\vec{x}), \\ x^\mu &= (x^0, \vec{x}) \xrightarrow{T} (-x^0, \vec{x}). \end{aligned}$$

D'autre part, la quantification des champs libres chargés impose l'existence d'antiparticules dont les propriétés intrinsèques d'espace-temps (masse et spin) sont identiques à celles de la particule, mais dont les nombres quantiques internes (charges) associés aux courants conservés des symétries internes sont opposés. La conjugaison de charge est alors définie comme une transformation reliant particule et antiparticule, qui inverse les nombres quantiques reliés aux symétries internes et donc au groupe de jauge.

Un théorème fondamental (le théorème CPT) affirme que toute théorie de champs (locaux) respecte la symétrie CPT , quelle que soit la forme des interactions. Il est donc impossible de décrire un processus violant cette symétrie dans le cadre de la théorie quantique des champs.

Dans les paragraphes suivants, nous allons successivement discuter les transformations sous C , P , CP , T et CPT des champs de spins 0, 1/2 et 1 dans le cadre d'une théorie de jauge, ainsi que les interactions susceptibles de violer ces symétries.

4.1.1 La conjugaison de charge C

Nous avons vu (sect. 1.5) que l'interaction d'un champ de Dirac de charge qe avec le photon est décrite par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\psi, A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + qe\gamma^\mu A_\mu - m)\psi. \quad (4.1)$$

Cette forme peut être obtenue en imposant l'invariance sous les transformations de jauge

$$\psi \longrightarrow e^{iq\alpha}\psi, \quad A_\mu \longrightarrow A_\mu + e^{-1}\partial_\mu\alpha.$$

L'équation d'Euler-Lagrange du fermion est donc

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + qe\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0. \quad (4.2)$$

Le champ de jauge A_μ est couplé au courant conservé quantifié

$$j_\mu = qe : \bar{\psi}\gamma_\mu\psi :, \quad (4.3)$$

et la quantification du champ spinoriel libre mène aux relations

$$[Q, \bar{\psi}] = qe\bar{\psi}, \quad [Q, \psi] = -qe\psi, \quad (4.4)$$

où l'opérateur de charge est

$$Q = qe \int d^3x j_0 = qe \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right]. \quad (4.5)$$

Comme le champ $\bar{\psi}$ crée une particule et détruit une antiparticule, la charge de la particule de spin 1/2 décrite par ψ est qe , celle de son antiparticule (créée par ψ) étant $-qe$ ³.

Au lieu de ψ , on pourrait considérer un champ ψ^c décrivant un fermion de charge $-qe$ et dont l'équation du mouvement serait

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - qe\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c = 0. \quad (4.6)$$

Dans l'espace des états, l'opération $q \rightarrow -q$ revient à échanger le rôle des opérateurs $b_\alpha(k)$ et $d_\alpha(k)$ et donc à échanger particules et antiparticules: c'est la conjugaison de charge. Pour exprimer l'équivalence entre les deux théories, on peut construire un opérateur \mathcal{C} agissant dans l'espace des états qui vérifie

$$\mathcal{C}b_\alpha(k)\mathcal{C}^{-1} = \sum_\beta (\xi_b)_{\alpha\beta} d_\beta(k), \quad \mathcal{C}d_\alpha(k)\mathcal{C}^{-1} = \sum_\beta (\xi_d)_{\alpha\beta} b_\beta(k). \quad (4.7)$$

Les égalités (4.7) définissent l'action de \mathcal{C} sur les opérateurs de création et d'annihilation. Pour exhiber la symétrie reliant les descriptions de ψ et de son conjugué de charge ψ^c et construire explicitement l'opérateur \mathcal{C} , nous allons déterminer l'action de la conjugaison de charge sur le champ ψ lui-même, dont l'expansion s'écrit⁴

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right].$$

³Il s'agit d'une convention terminologique; dire que ψ a charge qe revient à poser les équations (4.4).

⁴Les spineurs $u^{(\alpha)}(k)$ et $v^{(\alpha)}(k)$ sont définis par les équations (1.137).

Les égalités (4.7) suggèrent de chercher une relation entre les spineurs $u^{(\alpha)}(k)$ et $v^{(\alpha)}(k)$ qui comprenne une conjugaison hermitique inversant les phases $e^{\pm ikx}$ et conjuguant les opérateurs. Autrement dit, il faut une relation entre $[\bar{u}^{(\alpha)}(k)]^\tau$ ou $[\bar{v}^{(\alpha)}(k)]^\tau$ et respectivement $v^{(\alpha)}(k)$ ou $u^{(\alpha)}(k)$.

Premièrement, puisque les matrices $-\gamma^{\mu\tau}$ vérifient

$$\{-\gamma^{\mu\tau}, -\gamma^{\nu\tau}\} = 2\eta^{\mu\nu}I = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\},$$

il existe une matrice C telle que⁵

$$-\gamma^{\mu\tau} = C^{-1}\gamma^\mu C. \quad (4.8)$$

Dans les choix de matrices de Dirac utilisées ici, γ^0 et γ^2 sont symétriques, γ^1 et γ^3 antisymétriques. On peut alors choisir

$$C = i\gamma^2\gamma^0, \quad C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^\tau = C^*. \quad (4.9)$$

Deuxièmement, la matrice C permet d'écrire

$$(\not{k} \pm m)^\tau = -C^{-1}(\not{k} \mp m)C,$$

et donc

$$\begin{aligned} C\bar{u}^{(\alpha)}(k)^\tau &= -[2m(m + \omega_k)]^{-1/2}(\not{k} - m)C\gamma^0 u^{(\alpha)}, \\ C\bar{v}^{(\alpha)}(k)^\tau &= [2m(m + \omega_k)]^{-1/2}(\not{k} + m)C\gamma^0 v^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Dans la base des spineurs constants $u^{(\alpha)}$ et $v^{(\alpha)}$ choisie conventionnellement dans les chapitres précédents, il vient

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}^\tau &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \left([d_2(k)u^{(1)}(k) - d_1(k)u^{(2)}(k)] e^{-ikx} \right. \\ &\quad \left. + [-b_2^\dagger(k)v^{(1)}(k) + b_1^\dagger(k)v^{(2)}(k)] e^{ikx} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Troisièmement, on montre que $C\bar{\psi}^\tau$ et ψ^c vérifient la même équation de Dirac, (4.6). Le conjugué de Dirac de l'équation (4.2) est

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + qeA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0.$$

En transposant avec l'aide de (4.8), et en multipliant par C , il vient

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - qe\gamma^\mu A_\mu - m)C\bar{\psi}^\tau = 0,$$

qui est bien l'équation (4.6). Il est donc légitime de poser

$$\psi^c = C\bar{\psi}^\tau = -\gamma^0 C\psi^{\dagger\tau}, \quad \bar{\psi}^c = \psi^\tau C, \quad (4.11)$$

⁵Son existence est une conséquence de l'unicité de la représentation de l'algèbre de Dirac par des matrices 4×4 . Ne pas confondre la matrice C et l'opérateur dans l'espace des états \mathcal{C} .

sans introduire de phase (conventionnelle). Notez que $(\psi^c)^c = \psi$, en conformité avec $C^2 = 1$. Avec $C = i\gamma^2\gamma^0$, $\psi^c = i\gamma^2\psi^{\dagger\tau}$. La conjugaison de charge ne préserve pas la chiralité:

$$(\psi_{L,R})^c = -\gamma^0 C P_{L,R} \psi^{\dagger\tau} = P_{R,L} \psi^c = (\psi^c)_{R,L}. \quad (4.12)$$

L'expansion (4.10) montre que la transformation de conjugaison de charge $\psi \longrightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^\tau$ équivaut à l'échange

$$b_1(k), b_2(k) \longleftrightarrow d_2(k), -d_1(k).$$

Autrement dit, la conjugaison de charge du champ spinoriel s'écrit

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = C\psi C^{-1} = C\bar{\psi}^\tau, \quad (4.13)$$

l'action de C sur les opérateurs de création et d'annihilation étant donnée par l'équation (4.7) avec

$$\xi_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \xi_d = -\xi_b. \quad (4.14)$$

C est un opérateur linéaire unitaire dans l'espace de Fock. Il suit de $C^2 = 1$ (ou de $(\psi^c)^c = \psi$) que $\xi_b \xi_d = I$.

Il est intéressant de déterminer l'action de la conjugaison de charge sur les opérateurs d'un champ spinoriel développé dans la base des états d'hélicité:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha} \left[\hat{b}_{\alpha}(k) \hat{u}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + \hat{d}_{\alpha}^{\dagger}(k) \hat{v}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right], \quad (4.15)$$

les solutions $\hat{u}^{(\alpha)}(k)$ et $\hat{v}^{(\alpha)}(k)$ étant définies par les équations (1.150–1.151). Comme précédemment

$$C\bar{\psi}^\tau = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha} \left[\hat{b}_{\alpha}^{\dagger}(k) C[\bar{\hat{u}}^{(\alpha)}(k)]^\tau e^{ikx} + \hat{d}_{\alpha}(k) C[\bar{\hat{v}}^{(\alpha)}(k)]^\tau e^{-ikx} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} C\bar{\hat{u}}^{(\alpha)}(k)^\tau &= -[2m(m + \omega_k)]^{-1/2} (\not{k} - m) C\gamma^0 \hat{u}^{(\alpha)*}, \\ C\bar{\hat{v}}^{(\alpha)}(k)^\tau &= [2m(m + \omega_k)]^{-1/2} (\not{k} + m) C\gamma^0 \hat{v}^{(\alpha)*}. \end{aligned}$$

Dans les représentations des matrices de Dirac utilisées ici,

$$\begin{aligned} C\gamma^0 \hat{u}^{(\alpha)*} &= i\gamma^2 \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)*} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma_2 \varphi^{(\alpha)*} \end{pmatrix}, \\ C\gamma^0 \hat{v}^{(\alpha)*} &= i\gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^{(\alpha)*} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme de plus

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})[-i\sigma_2\varphi^{(\alpha)*}] &= i\sigma_2[(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})\varphi^{(\alpha)}]^* = \lambda_\alpha|\vec{k}|[i\sigma_2\varphi^{(\alpha)*}], \\(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})[i\sigma_2\chi^{(\alpha)*}] &= -i\sigma_2[(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})\chi^{(\alpha)}]^* = \lambda_\alpha|\vec{k}|[-i\sigma_2\chi^{(\alpha)*}],\end{aligned}$$

$\lambda_\alpha = -(-1)^\alpha$, la comparaison avec (1.151) suggère qu'il est naturel de choisir

$$\chi^{(\alpha)} = -i\sigma_2\varphi^{(\alpha)*} \quad (4.16)$$

(qui implique $\varphi^{(\alpha)} = i\sigma_2\chi^{(\alpha)*}$). Il vient alors

$$C\gamma^0\hat{u}^{(\alpha)*} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix} = v^{(\alpha)}, \quad C\gamma^0\hat{v}^{(\alpha)*} = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} = u^{(\alpha)},$$

ainsi que

$$C\bar{\hat{u}}^{(\alpha)}(k)^\tau = v^{(\alpha)}(k), \quad C\bar{\hat{v}}^{(\alpha)}(k)^\tau = u^{(\alpha)}(k).$$

Dans la base des états d'hélicité, le conjugué de charge du champ spinoriel est

$$\begin{aligned}\psi(x) &\xrightarrow{C} \psi^c(x) = \mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^\tau(x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha \left[\hat{d}_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)e^{-ikx} + \hat{b}_\alpha^\dagger(k)v^{(\alpha)}(k)e^{ikx} \right].\end{aligned} \quad (4.17)$$

En comparant avec (4.15),

$$\mathcal{C}\hat{b}_\alpha(k)\mathcal{C}^{-1} = \hat{d}_\alpha(k), \quad \mathcal{C}\hat{d}_\alpha(k)\mathcal{C}^{-1} = \hat{b}_\alpha(k). \quad (4.18)$$

La conjugaison de charge échange particules et antiparticules, mais laisse k et l'hélicité $\lambda_\alpha/2$ invariantes.

La relation avec la transformation obtenue dans la base $u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$ des états propres de S^3 est la suivante. Si on choisit $\vec{k} = (0, 0, k)$, alors

$$\hat{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}, \quad \hat{v}^{(1)} = v^{(2)}, \quad \hat{v}^{(2)} = -v^{(1)},$$

d'après (4.16). Autrement dit,

$$\hat{b}_\alpha(k) = b_\alpha(k), \quad \hat{d}_1(k) = d_2(k), \quad \hat{d}_2(k) = -d_1(k).$$

La transformation (4.18) coïncide alors avec les équations (4.7) et (4.14).

Comme les champs spinoriels apparaissent dans les densités lagrangiennes en combinaisons bilinéaires telles que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, il est utile de considérer la transformation de ces objets sous C :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\chi \\ \bar{\psi}\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\chi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\chi \end{array} \right\} \xrightarrow{C} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}\psi \\ \bar{\chi}\gamma_5\psi \\ -\bar{\chi}\gamma^\mu\psi \\ \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \\ -\bar{\chi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Ces résultats utilisent l'anticommutation de deux champs spinoriels lorsqu'une transposition est effectuée; par exemple, $\bar{\psi}\chi = \sum_a \bar{\psi}_a \chi_a = -\sum_a \chi_a \bar{\psi}_a = -\chi^\tau \bar{\psi}^\tau$. En conséquence, le conjugué de charge du courant de Dirac quantifié (courant électromagnétique) est

$$j_\mu^c = qe : \bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^c := -qe : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi := -j_\mu,$$

en tenant compte de l'anticommutation des champs spinoriels quantifiés lors de la transposition. Comme prévu, la conjugaison de charge renverse le signe du courant et donc celui de la charge $Q = \int d^3x j^0$. Pour les courants chiraux qui apparaissent dans les interactions de jauge,

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi_{L,R} \xrightarrow{C} -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi_{R,L};$$

C renverse la chiralité et une théorie de jauge ne pourra être invariante que si les composantes des deux chiralités de chaque spineur couplé à un champ de jauge et portant donc une charge sont présentes, avec les mêmes transformations de jauge. Nous n'allons pas énumérer ici les interactions qui préservent ou violent la conservation de C ; il est plus approprié (et plus simple) de discuter les violations de P et CP , et d'en tirer l'information sur celle de C .

Champ de jauge

Pour le champ de jauge, inverser le signe de la charge q équivaut à postuler la transformation

$$A_\mu \xrightarrow{C} A_\mu^c = -A_\mu. \quad (4.20)$$

Si l'équation de Dirac (4.2) est vérifiée par les champs ψ et A_μ , elle est aussi vérifiée par ψ^c et A_μ^c :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + qe\gamma^\mu A_\mu^c - m)\psi^c = 0,$$

d'après (4.6). La théorie est donc invariante sous C , c'est-à-dire sous les transformations (4.11) et (4.20). Au niveau de la densité lagrangienne on a

$$\mathcal{L}(\psi^c, A_\mu^c) = \bar{\psi}^c (i\gamma^\mu \partial_\mu + qe\gamma^\mu A_\mu^c - m)\psi^c = \mathcal{L}(\psi, A_\mu) + i\partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi).$$

Comme une divergence $\partial^\mu(\dots)$ peut toujours être omise, $\mathcal{L}(\psi, A_\mu)$ et $\mathcal{L}(\psi^c, A_\mu^c)$ sont équivalentes et C laisse l'action invariante (de forme):

$$S(\psi, A_\mu) = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, A_\mu) = S(\psi^c, A_\mu^c).$$

Champ scalaire

Le second champ qui possède particules et antiparticules, ainsi qu'un courant conservé est le champ scalaire complexe $\phi(x)$. A nouveau, la conjugaison de charge doit échanger les particules (créées par les opérateurs $a^\dagger(k)$) et les antiparticules

(créées par $b^\dagger(k)$) et inverser la charge $Q = \int d^3x j^0$. La définition naturelle de l'action de l'opérateur \mathcal{C} est alors

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \xi\phi^\dagger(x) = \phi^c(x), \quad (4.21)$$

ξ étant une phase. Comme $C^2=1$, il est naturel (mais pas obligatoire) de se limiter à $\xi = \pm 1$. Pour un champ de charge $q'e$, la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) = (D_\mu\phi^\dagger)(D^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi, \quad (4.22)$$

avec

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - iq'eA_\mu\phi, \quad D_\mu\phi^\dagger = \partial_\mu\phi^\dagger + iq'eA_\mu\phi^\dagger.$$

Les transformations (4.21) et (4.20) conduisent à

$$D_\mu\phi \xrightarrow{\mathcal{C}} \partial_\mu\phi^c - iq'eA_\mu^c\phi^c = \xi D_\mu\phi^\dagger,$$

et la densité lagrangienne (4.22) est invariante sous \mathcal{C} .

Pour un champ scalaire réel, on peut poser

$$\mathcal{C}\varphi(x)\mathcal{C}^{-1} = \xi\varphi(x), \quad \xi = \pm 1,$$

qui est cependant d'intérêt académique: un champ scalaire unique n'a pas de charge et ξ est sans contenu physique.

4.1.2 Le spineur de Majorana

Pour un champ scalaire ou de jauge, la condition de réalité du champ (d'hermiticité pour le champ quantifié) élimine la notion d'antiparticule. Un champ réel n'a ni charge ni antiparticule: il est (au signe près) invariant sous \mathcal{C} . On est en droit d'imposer la condition d'hermiticité puisqu'elle est invariante de Lorentz. Pour un champ spinoriel, les générateurs du groupe de Lorentz

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

ne sont ni imaginaires, ni réels. Une condition telle que $\psi^* = (\psi^\dagger)^\tau = \psi$ n'est donc pas invariante de Lorentz. Il existe cependant une prescription invariante de Lorentz qui conduit à un spineur sans charge pour lequel la particule et l'antiparticule sont identifiées: c'est la *condition de Majorana*, dont la solution est le *spineur de Majorana*.

Un spineur de Majorana vérifie la condition

$$\psi = \psi^c. \quad (4.23)$$

Puisque la conjugaison de charge échange particules et antiparticules, cette condition implique qu'un spineur de Majorana ne peut être utile qu'à la description

de particules de spin $1/2$ indistinguables de leurs antiparticules. Dans une théorie de jauge, la condition de Majorana ne peut être imposée que si la transformation de jauge du spineur est identique à celle de son conjugué de charge. Pour une transformation infinitésimale⁶ de la forme $\delta\psi^I = i\alpha^A(T^A)^{IJ}\psi^J$, il vient

$$\delta\psi_c^I = C(\delta\bar{\psi}^I)^\tau = -i\alpha^A[(T^A)^{IJ}]^*\psi_c^J,$$

et la condition de Majorana ne peut être imposée que si les générateurs T^A sont imaginaires⁷. En particulier, les charges associées au groupe $U(1)$ (celui de l'électrodynamique) sont nulles pour un spineur de Majorana, puisque C les inverse.

L'invariance de Lorentz de la condition (4.23) suit de la transformation de Lorentz infinitésimale du spineur

$$\delta\psi(x) = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\psi(x),$$

[§ 1.3.4] qui implique

$$\delta\bar{\psi}(x) = +\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)S^{\mu\nu}, \quad \delta\psi^c(x) = C(\delta\bar{\psi})^\tau = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\psi^c(x).$$

Ainsi, ψ et ψ^c ont la même transformation de Lorentz et la condition (4.23) est invariante de Lorentz.

Le spineur de Majorana n'a que deux composantes indépendantes. On le voit par exemple en décomposant: $\psi = \psi_L + \psi_R$. La condition de Majorana s'écrit alors

$$\psi_R = (\psi_L)^c = -\gamma^0 C\psi_L^{\dagger\tau}, \quad (4.24)$$

qui détermine ψ_R à partir de ψ_L . Certaines identités sont particulières au spineur de Majorana. Par exemple:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R &= -\partial_\mu\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L = -\partial_\mu(\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L) + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L, \\ \bar{\psi}\psi &= \psi_L^\tau C\psi_L + \bar{\psi}_L C\gamma^0\psi_L^{\dagger\tau} = \psi_L^\tau C\psi_L + (\psi_L^\tau C\psi_L)^\dagger. \end{aligned}$$

La densité lagrangienne libre d'un spineur de Majorana est alors

$$\mathcal{L}_{Maj.} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (4.25)$$

En omettant la divergence $-\frac{1}{2}i\partial_\mu(\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L)$, qui ne contribue pas aux équations d'Euler-Lagrange, cette densité lagrangienne peut être remplacée par

$$\mathcal{L}_{Maj.} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - \frac{1}{2}m[\psi_L^\tau C\psi_L + (\psi_L^\tau C\psi_L)^\dagger], \quad (4.26)$$

qui ne dépend que de ψ_L et de son conjugué hermitique. Le terme de masse de la forme $\psi_L^\tau C\psi_L + (\psi_L^\tau C\psi_L)^\dagger$ est qualifié de *masse de Majorana*.

⁶Section 1.5.

⁷Mathématiquement, ceci signifie que le spineur de Majorana se transforme dans une *représentation réelle* du groupe de jauge.

4.1.3 La parité P

La parité $x \xrightarrow{P} (x^0, -\vec{x})$ renverse les impulsions \vec{p} et laisse l'énergie et la direction du spin inchangées. Sur les observables physiques, $P^2 = 1$.

Nous commencerons par le spineur de Dirac. La transformation de parité des opérateurs de création et d'annihilation sera de la forme

$$\mathcal{P}b_\alpha(k)\mathcal{P}^{-1} = \eta_b b_\alpha(k^0, -\vec{k}), \quad \mathcal{P}d_\alpha(k)\mathcal{P}^{-1} = \eta_d d_\alpha(k^0, -\vec{k}), \quad (4.27)$$

avec deux phases η_b et η_d . Les grandeurs physiques dépendent d'un nombre pair de spineurs: la condition $P^2 = 1$ sur les observables implique en général que $\eta_b^4 = \eta_d^4 = 1$. Pour déterminer la transformation du champ $\psi(x)$, on observe que

$$\begin{aligned} \gamma^0 \psi(x^0, -\vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha(\tilde{k}) \gamma^0 u^{(\alpha)}(\tilde{k}) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(\tilde{k}) \gamma^0 v^{(\alpha)}(\tilde{k}) e^{ikx} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha(\tilde{k}) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} - d_\alpha^\dagger(\tilde{k}) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right], \end{aligned}$$

avec la notation

$$\tilde{k} = (k^0, -\vec{k}).$$

La seconde égalité utilise les résultats

$$u^{(\alpha)}(\tilde{k}) = \gamma^0 u^{(\alpha)}(k), \quad v^{(\alpha)}(\tilde{k}) = -\gamma^0 v^{(\alpha)}(k),$$

qui découlent des équations (1.134–1.137). Si on définit

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = \eta \gamma^0 \psi(x^0, -\vec{x}) = \psi^P(x), \quad (4.28)$$

avec une phase arbitraire η , la comparaison avec (4.27) montre que

$$\eta = \eta_b = -\eta_d^*,$$

c'est-à-dire

$$\eta_b \eta_d = -1,$$

qui indique que la parité intrinsèque d'une paire particule–antiparticule est négative:

$$b_\alpha^\dagger(k) d_\beta^\dagger(q) |0\rangle \xrightarrow{P} -b_\alpha^\dagger(\tilde{k}) d_\beta^\dagger(\tilde{q}) |0\rangle.$$

Sans restreindre la généralité, nous allons choisir

$$1 = \eta = \eta_b = -\eta_d. \quad (4.29)$$

On peut ensuite montrer que la transformation de parité du spineur $\psi(x) \rightarrow \gamma^0 \psi(x^0, -\vec{x})$ est une invariance de l'équation de Dirac. Il suffit de montrer que si $\psi(x)$ vérifie

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

c'est encore le cas de $\gamma^0\psi(x^0, -\vec{x})$. Comme

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) = \tilde{\gamma}^\mu,$$

il vient

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\gamma^0\psi(x^0, -\vec{x}) &= (i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\gamma^0\psi(x^0, -\vec{x}) \\ &= \gamma^0(i\gamma^0\partial_0 - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi(x^0, -\vec{x}) \\ &= \gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \end{aligned}$$

De même, la densité lagrangienne libre de Dirac est invariante sous parité:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^p(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^p(x) &= \bar{\psi}(x^0, -\vec{x})\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\gamma^0\psi(x^0, -\vec{x}) \\ &= \bar{\psi}(x^0, -\vec{x})(i\gamma^0\partial_0 - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi(x^0, -\vec{x}) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \end{aligned}$$

Puisque $\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$, l'action de P sur les composantes de Weyl ψ_L et ψ_R est

$$(\psi^p)_L = P_L\gamma^0\psi = \gamma^0\psi_R = (\psi_R)^p, \quad (\psi^p)_R = P_R\gamma^0\psi = \gamma^0\psi_L = (\psi_L)^p.$$

La parité renverse donc la chiralité. De même, l'action de P sur les combinaisons bilinéaires de spineurs est

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\chi \\ \bar{\psi}\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\chi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\chi \end{array} \right\} \xrightarrow{P} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\chi \\ -\bar{\psi}\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}\tilde{\gamma}^\mu\chi \\ -\bar{\psi}\tilde{\gamma}^\mu\gamma_5\chi \\ \bar{\psi}[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]\chi \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \tilde{\gamma}^\mu = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \\ = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \\ = \gamma_\mu. \end{array} \quad (4.30)$$

Ces quantités sont respectivement qualifiées de scalaire, pseudoscalaire, vecteur, pseudovecteur (ou vecteur axial) et tenseur, d'après leur comportement sous les transformations de Lorentz et de parité. Pour les spineurs de Weyl,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{R,L}\chi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{L,R}\gamma^\mu\chi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{R,L}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\chi_{L,R} \end{array} \right\} \xrightarrow{P} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{L,R}\chi_{R,L} \\ \bar{\psi}_{L,R}\tilde{\gamma}^\mu\chi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{L,R}[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]\chi_{R,L} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

Ces résultats permettent de déterminer quelles interactions conservent ou violent la parité dans la théorie de jauge générale décrite dans la section 1.5. L'interaction fermions-champs de jauge est de la forme

$$\mathcal{L}_{A-\psi} = \sum_{AJK} g^A A_\mu^A \left[(T_\ell^A)^J_K \bar{\psi}_{LJ} \gamma^\mu \psi_L^K + (T_r^A)^J_K \bar{\psi}_{RJ} \gamma^\mu \psi_R^K \right].$$

Sous parité, elle devient

$$\mathcal{L}_{A-\psi}^p = \sum_{AJK} g^A A_\mu^A \left[(T_r^A)^J_K \bar{\psi}_{LJ} \tilde{\gamma}^\mu \psi_L^K + (T_\ell^A)^J_K \bar{\psi}_{RJ} \tilde{\gamma}^\mu \psi_R^K \right],$$

où A_μ^{pA} est le champ de jauge transformé de parité. Pour l'obtenir, on observe que les dérivées covariantes $D_\mu \psi_L^I$ et $D_\mu \psi_R^J$ sont aussi covariantes sous P si on choisit

$$A_\mu^A(x) \xrightarrow{P} A_\mu^{pA}(x) = (A_0^A(x^0, -\vec{x}), -\vec{A}^A(x^0, -\vec{x})) = \tilde{A}_\mu^A(\tilde{x}), \quad (4.32)$$

c'est-à-dire si chaque champ de jauge se transforme comme un vecteur (comme x_μ). De plus, cette transformation assure l'invariance du terme cinétique des champs de jauge

$$-\frac{1}{4} \sum_A F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g^A \sum_{BC} f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C.$$

Comme $\tilde{A}_\mu^A \tilde{\gamma}^\mu = A_\mu^A \gamma^\mu$, l'invariance sous parité $\mathcal{L}_{A-\psi} = \mathcal{L}_{A-\psi}^p$ requiert alors

$$(T_\ell^A)^J_K = (T_r^A)^J_K \equiv (T^A)^J_K. \quad (4.33)$$

Dans ce cas, la densité lagrangienne cinétique des fermions s'écrit

$$i\bar{\psi}_{LJ} \gamma^\mu D_\mu \psi_L^J + i\bar{\psi}_{RJ} \gamma^\mu D_\mu \psi_R^J = i\bar{\psi}_J \gamma^\mu D_\mu \psi^J,$$

avec

$$D_\mu \psi^J = \partial_\mu \psi^J - i \sum_A g^A A_\mu^A (T^A)^J_K \psi^K.$$

La théorie de jauge peut être plus simplement formulée en utilisant des spineurs de Dirac, à quatre composantes. C'est le cas de l'électrodynamique (QED) et de la chromodynamique (QCD) quantiques puisque les interactions électromagnétiques et fortes conservent la parité, contrairement aux interactions faibles.

L'interaction de jauge invariante de parité ne fait intervenir que le *courant vectoriel* ($\bar{\psi}_J \gamma^\mu \psi^K$). Par contre, une interaction de jauge violant la parité comprend des termes dépendant du *courant axial* ($\bar{\psi}_J \gamma^\mu \gamma_5 \psi^K$). Il est d'usage d'utiliser la terminologie suivante:

- Lorsque les représentations des fermions gauches et droits sont différentes ($T_\ell^A \neq T_r^A$), la théorie est *chirale*. La parité est violée par les interactions de jauge.
- Lorsque les représentations des fermions gauches et droits sont identiques ($T_\ell^A = T_r^A$), la théorie est *vectorielle* (puisque le courant axial n'intervient pas). Les interactions de jauge conservent la parité.

La densité lagrangienne cinétique et invariante de jauge des champs scalaires,

$$\frac{1}{2} [(D_\mu \varphi^j)(D^\mu \varphi^j) - (m^2)^{ij} \varphi^i \varphi^j], \quad D_\mu \varphi^j = \partial_\mu \varphi^j - i \sum_A g^A A_\mu^A (T_s^A)^j_k \varphi^k,$$

est toujours invariante sous parité: il suffit de définir la transformation de parité des champs scalaires par

$$\varphi^j(x) \xrightarrow{P} \varphi^p(x) = \eta^j \varphi^j(x^0, -\vec{x}), \quad (4.34)$$

avec $\eta^j = 1$ (*scalaire*) ou $\eta^j = -1$ (*pseudoscalaire*). Il faut cependant que les signes η^j vérifient la condition

$$(T_s^A)^j_k \neq 0 \implies \eta^j = \eta^k, \quad \forall A.$$

Elle indique que tous les champs scalaires dans une représentation irréductible du groupe de jauge ont la même parité. Notez cependant qu'il n'est pas possible de contraindre les signes η^j à partir des interactions de jauge des champs scalaires qui sont quadratiques en φ^j .

L'interaction de Yukawa est de la forme [éq. (1.177)]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk.} &= \lambda_{jJ}^K \varphi^j (\bar{\psi}_{LK} \psi_R^J) + (\lambda_{jJ}^K)^* \varphi^j (\bar{\psi}_{RJ} \psi_L^K) \\ &= \frac{1}{2} A_{jJ}^K \varphi^j (\bar{\psi}_K \psi^J) + \frac{1}{2} B_{jJ}^K \varphi^j (\bar{\psi}_K \gamma_5 \psi^J). \end{aligned} \quad (4.35)$$

D'après les transformations (4.30), il est clair que les champs φ^j qui apparaissent dans les termes contenant les constantes de couplage A_{jJ}^K doivent être scalaires, $\eta^j = 1$, alors que ceux impliqués dans les termes contrôlés par les B_{jJ}^K doivent être pseudoscalaires, $\eta^j = -1$. Si un champ scalaire est à la fois couplé à $\bar{\psi}_K \psi^J$ et à $\bar{\psi}_K \gamma_5 \psi^J$, la parité est violée par cette interaction de Yukawa.

Finalement, l'invariance de parité des interactions scalaires est non triviale uniquement pour les interaction cubiques

$$-\frac{1}{3} \alpha_{ijk} \varphi^i \varphi^j \varphi^k.$$

Elles peuvent signaler une violation de la parité si leur invariance est incompatible avec les contraintes dues aux interactions de Yukawa.

4.1.4 Invariance ou violation de CP

D'après ce qui précède, les transformations de CP du champ spinoriel ψ et du champ de jauge A_μ seront de la forme

$$\psi, A^\mu \xrightarrow{CP} \psi^{cp} = C(\bar{\psi}^p)^\tau = C\psi^{\dagger\tau}, \quad A_\mu^{cp} = -(A_0, -\vec{A}) = -\tilde{A}_\mu. \quad (4.36)$$

Comme $\psi_{L,R} \xrightarrow{CP} C(P_{L,R} \psi)^\dagger{}^\tau = P_{L,R} \psi^{cp}$, CP ne renverse pas la chiralité. En tenant compte de l'anticommutation des champs spinoriels lorsqu'on transpose, on obtient les transformations suivantes [$\tilde{\gamma}^\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}_{L,R} \chi_{R,L} \\ \bar{\psi}_{L,R} \gamma^\mu \chi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{L,R} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \chi_{R,L} \end{array} \right\} \xrightarrow{CP} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}_{R,L} \psi_{L,R} \\ -\bar{\chi}_{L,R} \tilde{\gamma}^\mu \psi_{L,R} \\ -\bar{\chi}_{R,L} [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu] \psi_{L,R} \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Avec $A_\mu^{cp} \tilde{\gamma}^\mu = -A_\mu \gamma^\mu$, la deuxième transformation conduit à

$$A_\mu \bar{\psi}_{L,R} \gamma^\mu \psi_{L,R} \xrightarrow{CP} -A_\mu^{cp} \bar{\psi}_{L,R} \tilde{\gamma}^\mu \psi_{L,R} = A_\mu \bar{\psi}_{L,R} \gamma^\mu \psi_{L,R}. \quad (4.38)$$

Ce résultat montre que les interactions de jauge ne violent pas la conservation de CP , qu'elles soient chirales ou non⁸.

Par contre, les interactions de Yukawa (4.35) sont en général capables de violer la conservation de CP . Sous CP , la transformation du champ scalaire est

$$\varphi^i(x) \xrightarrow{CP} \varphi^{cpj}(x) = \xi^j \eta^j \varphi(x^0, -\vec{x}),$$

avec $\eta^j, \xi^j = \pm 1$. Il est clair que les signes ξ^j et η^j peuvent être choisis en général de manière à conserver C , P et donc CP dans le secteur purement scalaire des interactions cubiques $-\frac{1}{3}\alpha_{ijk}\varphi^i\varphi^j\varphi^k$. D'après (4.37), la transformation des interactions de Yukawa est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk.} &= \lambda_{jJ}^K \varphi^j (\bar{\psi}_{LK} \psi_R^J) + (\lambda_{jJ}^K)^* \varphi^j (\bar{\psi}_{RJ} \psi_L^K) \\ &\xrightarrow{CP} \xi^j \eta^j (\lambda_{jJ}^K)^* \varphi^j (\bar{\psi}_{LK} \psi_R^J) + \xi^j \eta^j \lambda_{jJ}^K \varphi^j (\bar{\psi}_{RJ} \psi_L^K). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Cette interaction sera invariante de CP si

$$\lambda_{jJ}^K = \xi^j \eta^j (\lambda_{jJ}^K)^*, \quad \forall j, J, K. \quad (4.40)$$

La violation de CP requiert donc la présence de constantes de couplage de Yukawa λ_{jJ}^K complexes (de parties réelles et imaginaires non nulles, en général). Il faut cependant prendre garde au fait que certaines composantes des matrices λ_{jJ}^K ne sont pas observables: on peut les éliminer par une redéfinition des spineurs de Weyl. On aura violation de CP seulement lorsque les composantes *observables* de λ_{jJ}^K ne vérifient pas l'égalité (4.40).

Pour illustrer ce point, effectuons un changement de base des fermions de Weyl au moyen de deux matrices unitaires U_L et U_R :

$$\psi_L^I \longrightarrow \psi_L'^I = (U_L)_J^I \psi_L^J, \quad \psi_R^I \longrightarrow \psi_R'^I = (U_R)_J^I \psi_R^J. \quad (4.41)$$

Sur les interactions de Yukawa,

$$\mathcal{L}_{Yuk.} \longrightarrow \lambda'_{jJ}{}^K \varphi^j (\bar{\psi}'_{LK} \psi'^J_R) + (\lambda'_{jJ}{}^K)^* \varphi^j (\bar{\psi}'_{RJ} \psi'^K_L),$$

avec

$$\lambda'_{jJ}{}^K = \lambda_{jN}^M (U_L)_M^K (U_R^\dagger)_J^N. \quad (4.42)$$

Les matrices U_L et U_R font partie du groupe de *symétrie chirale* des termes cinétiques $U(N_L) \times U(N_R)$ ⁹. Les transformations qui nous intéressent ici sont celles qui commutent avec le groupe de jauge,

$$[T_\ell^A, U_L] = 0, \quad [T_r^A, U_R] = 0, \quad \forall A.$$

⁸Les autres interactions des champs de jauge sont automatiquement invariantes: elles ne violent ni C ni P .

⁹Section 1.5, équation (1.155).

Comme $U_L^\dagger U_L = U_R^\dagger U_R = I$,

$$(T_{\ell,r}^A)^I_J \bar{\psi}'_{L,R I} \gamma^\mu \psi'^J_{L,R} = (T_{\ell,r}^A)^I_J \bar{\psi}_{L,R I} \gamma^\mu \psi^J_{L,R},$$

et les interactions fermions–champs de jauge restent invariantes, ainsi que les termes cinétiques des fermions. La transformation (4.41) agit sur la matrice de masse des fermions:

$$-(M)^I_J \bar{\psi}_{L I} \psi^J_R - (M^\dagger)^I_J \bar{\psi}_{R I} \psi^J_L \longrightarrow -(M')^I_J \bar{\psi}'_{L I} \psi'^J_R - (M'^\dagger)^I_J \bar{\psi}'_{R I} \psi'^J_L,$$

avec, en notation matricielle,

$$M' = U_L M U_R^\dagger.$$

Ceci permet d'imposer que M' soit diagonale et réelle: les seules grandeurs observables contenues dans la matrice de masse sont les masses (réelles) de chaque fermion ψ'^I . La diagonalisation de M détermine seulement partiellement U_L et U_R : on peut encore redéfinir les fermions en utilisant dans (4.41) des matrices \tilde{U}_L et \tilde{U}_R qui laissent M' invariante: $M' = \tilde{U}_L M' \tilde{U}_R^\dagger$. Cette symétrie résiduelle, peut en principe être mise à profit pour éliminer certaines composantes des constantes de couplage λ_j^I . La symétrie CP sera seulement violée si l'équation (4.40) n'est pas vérifiée après cette dernière redéfinition des fermions¹⁰.

4.1.5 Le renversement du temps T

L'action du renversement du temps sur les grandeurs physiques classiques est

$$\left\{ \begin{array}{c} x^0 \\ \vec{x} \\ \vec{p}, \vec{k} \\ \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{array} \right\} \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{c} -x^0 \\ \vec{x} \\ -\vec{p}, -\vec{k} \\ \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

bien que ω_p soit la composante temporelle du quadrivecteur (ω_p, \vec{p}) et \vec{p} sa composante spatiale. De même, T renverse la direction d'un spin. En conséquence, T conjugue les phases des ondes planes,

$$e^{\pm i k x} \xrightarrow{T} e^{\mp i k x} = (e^{\pm i k x})^*,$$

contrairement à P et C qui les laissent inchangées.

Au niveau quantique, le renversement du temps va échanger les états initial et final d'un processus de transition. Si $|i^t\rangle$ et $|f^t\rangle$ sont les états obtenus par

¹⁰Une violation de CP peut aussi survenir à la suite d'une brisure spontanée de la symétrie de jauge (chap. 7). Dans ce cas, une redéfinition des fermions ne commutant pas avec les symétries de jauge brisées est autorisée: elle ne laisse pas les interactions fermions–champs de jauge invariantes et des constantes complexes violant CP peuvent apparaître dans ce secteur.

l'action de T sur l'état initial $|i\rangle$ et l'état final $|f\rangle$, l'invariance sous renversement du temps correspond à la condition

$$\langle i^t | f^t \rangle = \langle f | i \rangle.$$

Nous avons réalisé la conjugaison de charge et la parité par des opérateurs unitaires agissant linéairement sur les opérateurs de création et d'annihilation. Dans le cas du renversement du temps, on utilise un opérateur *antilinéaire* et unitaire (aussi qualifié d'*antiunitaire*), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\dagger &= \mathcal{T}^{-1} & (\text{unitarité}), \\ \mathcal{T} c(\dots) &= c^* \mathcal{T}(\dots) & (\text{antilinéarité}), \end{aligned} \quad (4.44)$$

lorsque c est un nombre complexe.

La nécessité de l'antilinéarité peut être perçue en considérant un champ scalaire réel $\varphi(x)$. D'après (4.43), on veut construire un opérateur \mathcal{T} dont l'action sur l'opérateur de destruction $a(k)$ est

$$a(k) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{T} a(k) \mathcal{T}^\dagger = \delta a(\tilde{k}), \quad \tilde{k} = (k^0, -\vec{k}),$$

avec au plus une phase δ . Sur le champ,

$$\varphi(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \varphi^t(x) = \mathcal{T} \varphi(x) \mathcal{T}^\dagger = \eta^t \varphi(-x^0, \vec{x}), \quad (4.45)$$

avec $\eta^t = \pm 1$ puisque $\varphi^\dagger = \varphi$. Comme

$$\varphi(-x^0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\tilde{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\tilde{k}) e^{-ikx} \right],$$

après le changement $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ de variable d'intégration, il vient

$$\mathcal{T} a(k) e^{-ikx} \mathcal{T}^\dagger = \eta^t a(\tilde{k}) e^{ikx}, \quad \mathcal{T} a^\dagger(k) e^{ikx} \mathcal{T}^\dagger = \eta^t a^\dagger(\tilde{k}) e^{-ikx},$$

la seconde égalité étant le conjugué hermitique de la première. L'antilinéarité de \mathcal{T} signifie que $\mathcal{T} a(k) e^{-ikx} \mathcal{T}^\dagger = (e^{-ikx})^* \mathcal{T} a(k) \mathcal{T}^\dagger$, si bien qu'on obtient

$$\mathcal{T} a(k) \mathcal{T}^\dagger = \eta^t a(\tilde{k}), \quad (4.46)$$

qui est la transformation demandée.

Nous allons ensuite déterminer l'action de T sur le champ de jauge A_μ en considérant son couplage au courant fermionique en électrodynamique quantique. Les équations d'Euler-Lagrange tirées de la densité lagrangienne (4.1) sont les équations de Maxwell avec un courant électromagnétique $j^\mu = qe : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi :$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.47)$$

Sous renversement du temps, le champ électrique, donné par les composantes F^{i0} , $i = 1, 2, 3$ et la densité de charge électrique $\rho = j^0$ sont invariants. Par contre,

le champ magnétique (les composantes F^{ij} , $i, j = 1, 2, 3$) et le courant électrique \vec{j} changent de signe. Comme $\partial_\mu \xrightarrow{T} (-\partial_0, \partial_i)$, il est naturel de poser que A_μ se transforme comme le courant j_μ :

$$A_\mu(x) \xrightarrow{T} A_\mu^t(x) = \mathcal{T} A_\mu(x) \mathcal{T}^\dagger = (A_0(-x^0, \vec{x}), -A_i(-x^0, \vec{x})). \quad (4.48)$$

Le potentiel "scalaire" A^0 est invariant, le potentiel vecteur \vec{A} change de signe.

Il reste à trouver la transformation du spineur de Dirac. On cherche à construire l'opérateur \mathcal{T} pour lequel

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \mathcal{T} \psi(x) \mathcal{T}^\dagger.$$

Comme \mathcal{T} est antilinéaire, il vient

$$\mathcal{T} \psi(x) \mathcal{T}^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha [\mathcal{T} b_\alpha(k) \mathcal{T}^\dagger u^{(\alpha)*}(k) e^{ikx} + \mathcal{T} d_\alpha^\dagger(k) \mathcal{T}^\dagger v^{(\alpha)*}(k) e^{-ikx}],$$

en utilisant l'expansion du champ spinoriel développée dans le paragraphe 1.4.2. Il s'agit de relier cette dernière expression à $\psi(-x^0, \vec{x})$, qui s'écrit

$$\psi(-x^0, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_\alpha [b_\alpha(\tilde{k}) u^{(\alpha)}(\tilde{k}) e^{ikx} + d_\alpha^\dagger(\tilde{k}) v^{(\alpha)}(\tilde{k}) e^{-ikx}],$$

avec un changement de variable d'intégration $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$. On observe ensuite que les quatre matrices $(\gamma^{0*}, -\gamma^{i*})$, satisfont aux mêmes règles d'anticommuation que les matrices γ^μ elles-mêmes et il existe donc une matrice T telle que

$$T \gamma^0 T^{-1} = \gamma^{0*}, \quad T \gamma^i T^{-1} = -\gamma^{i*}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.49)$$

Dans les représentations des matrices de Dirac utilisées ici, γ^0 , γ^1 et γ^3 sont réelles, γ^2 est imaginaire; le choix standard est alors¹¹

$$T = i\gamma^1\gamma^3 = i\gamma_5 C, \quad T = T^{-1} = T^\dagger = -T^\tau = -T^*. \quad (4.50)$$

Egalement,

$$T \gamma^\mu T = (-1)^\mu \gamma^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.51)$$

On vérifie alors facilement que

$$\begin{aligned} u^{(1)*}(k) &= -i T u^{(2)}(\tilde{k}), & u^{(2)*}(k) &= i T u^{(1)}(\tilde{k}), \\ v^{(1)*}(k) &= -i T v^{(2)}(\tilde{k}), & v^{(2)*}(k) &= i T v^{(1)}(\tilde{k}). \end{aligned}$$

Si on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} b_1(k) \mathcal{T}^\dagger &= i b_2(\tilde{k}), & \mathcal{T} b_2(k) \mathcal{T}^\dagger &= -i b_1(\tilde{k}), \\ \mathcal{T} d_1(k) \mathcal{T}^\dagger &= -i d_2(\tilde{k}), & \mathcal{T} d_2(k) \mathcal{T}^\dagger &= i d_1(\tilde{k}), \end{aligned} \quad (4.52)$$

¹¹Comme dans toutes les représentations $\gamma^{0\tau} = \gamma^{0*}$, $\gamma^{i\tau} = -\gamma^{i*}$, la relation $T = i\gamma_5 C$ est toujours vraie et le choix $T = i\gamma^1\gamma^3$ suit de $C = i\gamma^2\gamma^0$.

on obtient finalement $\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = T\psi(-x^0, \vec{x})$. La transformation de T du spineur de Dirac est donc

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi^t(x) = \mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = T\psi(-x^0, \vec{x}). \quad (4.53)$$

Pour le conjugué de Dirac,

$$\bar{\psi}^t(x) = \bar{\psi}(-x^0, \vec{x})T = \bar{\psi}(-\tilde{x})T,$$

La transformation des combinaisons bilinéaires de fermions utilise l'antilinearité de T . Par exemple,

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \xrightarrow{T} \bar{\psi}^t(x)\gamma_\mu^*\psi^t(x) = \bar{\psi}(-\tilde{x})T\gamma_\mu^*T\psi(-\tilde{x}) = \bar{\psi}(-\tilde{x})\tilde{\gamma}_\mu\psi(-\tilde{x}).$$

Comme une densité lagrangienne est réelle, il est logique de considérer la transformation sous T des combinaisons bilinéaires hermitiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ i\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi \end{array} \right\} \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ -i\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\tilde{\gamma}_\mu\psi \\ \bar{\psi}\tilde{\gamma}_\mu\gamma_5\psi \\ -i\bar{\psi}[\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu]\psi \end{array} \right\} \quad \tilde{\gamma}_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}). \quad (4.54)$$

Il est sous-entendu que la variable x de chaque spineur devient $(-x^0, \vec{x}) = -\tilde{x}$. Le renversement du temps laisse la chiralité inchangée et, pour les fermions de Weyl,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{L,R}\psi_{R,L} \\ \bar{\psi}_{L,R}\gamma_\mu\psi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{L,R}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi_{R,L} \end{array} \right\} \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{L,R}\psi_{R,L} \\ \bar{\psi}_{L,R}\tilde{\gamma}_\mu\psi_{L,R} \\ \bar{\psi}_{L,R}[\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu]\psi_{R,L} \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

4.1.6 La symétrie CPT

A partir des transformations (4.19), (4.30) et (4.54), l'action de CPT sur les combinaisons bilinéaires hermitiques de spineurs est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ i\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi \end{array} \right\} \xrightarrow{CPT} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ -\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ -\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ i\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi \end{array} \right\} \quad (4.56)$$

la variable x changeant de signe

$$x^\mu \xrightarrow{CPT} -x^\mu. \quad (4.57)$$

Les résultats (4.56) utilisent

$$\psi(x) \xrightarrow{CPT} i\gamma_5 \psi^\dagger(-x)^\tau, \quad (4.58)$$

et le fait que CPT remplace les quantités numériques telles que i ou γ_μ par leurs conjugués complexes. La transformation d'un champ de jauge est

$$A_\mu(x) \xrightarrow{CPT} -A_\mu(-x), \quad (4.59)$$

et on peut toujours choisir que $\varphi(x) \xrightarrow{CPT} \varphi(-x)$. Il suit de ces transformations qu'un signe négatif est généré par chaque indice vectoriel μ porté par la quantité considérée. La densité lagrangienne et l'action sont des invariants de Lorentz et CPT sera donc une symétrie de toute théorie de champs de spin 0, 1/2 et dont les champs de spin 1 satisfont au principe d'invariance de jauge. Ce résultat est un cas particulier du théorème CPT .

4.2 Interactions fortes et électromagnétiques: QCD et QED

La théorie qui décrit les interactions fortes (*chromodynamique quantique*, QCD) et électromagnétiques (*électrodynamique quantique*, QED) des quarks et des leptons est basée sur une invariance de jauge exacte, non brisée, sous le groupe $SU(3) \times U(1)$. Elle contient donc des champs de jauge de masse nulle, les gluons pour le groupe de jauge $SU(3)$ de l'interaction forte et le photon pour celui de l'interaction électromagnétique, qui est $U(1)$. Elle peut être décrite sans tenir compte des interactions faibles, qui font intervenir des bosons de jauge massifs, et elle s'applique alors aux processus mettant en jeu des énergies faibles relativement à la masse de ces bosons de jauge, c'est-à-dire faibles par rapport à environ 80 GeV. Les résultats de la section 1.5 ne suffisent pas à établir la densité lagrangienne des interactions faibles, ni celle du Modèle standard des trois interactions. La description des interactions faibles est basée sur une invariance de jauge spontanément brisée, qui conduit à trois champs de jauge massifs, W^+ , W^- et Z^0 . Le phénomène de brisure spontanée de la symétrie de jauge et le Modèle standard seront respectivement discutés dans les chapitres 7 et 8. Mais la densité lagrangienne des interactions fortes et électromagnétiques suit de la discussion présentée dans la section 1.5, qui demande de spécifier les transformations de jauge des fermions.

Comme il s'avère (expérimentalement) que les interactions fortes et électromagnétiques conservent la parité, les transformations de jauge des quarks et des leptons seront non chirales. La théorie pourra être formulée en utilisant des spineurs de Dirac, à quatre composantes. Sans champs scalaires, CP et donc C et T sont également conservés.

Le groupe de la couleur; gluons

Le groupe de jauge de la chromodynamique quantique est $SU(3)$. Il peut être défini par le fait qu'il en existe une représentation par des matrices 3×3 unitaires

et de déterminant unité (unimodulaires):

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I, \quad \det U = 1. \quad (4.60)$$

Ces dix conditions permettent d'exprimer les dix-huit nombres réels contenus dans U en fonction de huit paramètres continus α^A , $A = 1, \dots, 8$. Une transformation infinitésimale dans la représentation de dimension 3 s'écrit

$$U = I + i\alpha^A T_{\mathbf{3}}^A \quad (4.61)$$

(on somme sur A), les paramètres α^A étant infinitésimaux. Les matrices $T_{\mathbf{3}}^A$ sont les huit générateurs qui forment une base de l'algèbre de Lie de $SU(3)$, dans la représentation de dimension 3 qui est notée $\mathbf{3}$. On les écrit souvent

$$T_{\mathbf{3}}^A = \frac{1}{2}\lambda^A, \quad \lambda^A : \text{matrices de Gell-Mann}, \quad (4.62)$$

avec la normalisation

$$\text{Tr}(T_{\mathbf{3}}^A T_{\mathbf{3}}^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}. \quad (4.63)$$

Les conditions (4.60) correspondent à

$$T_{\mathbf{3}}^{A\dagger} = T_{\mathbf{3}}^A, \quad \text{Tr } T_{\mathbf{3}}^A = 0. \quad (4.64)$$

Les huit générateurs forment donc une base des matrices 3×3 hermitiques de trace nulle.

Le principe d'invariance de jauge associe à chaque générateur de la base un champ de jauge $A_\mu^A(x)$. La chromodynamique quantique possède donc huit *gluons*. Les indices liés au groupe de jauge $SU(3)$ sont qualifiés d'indices de *couleur*: il y a huit couleurs de gluons. Et $SU(3)$ est le *groupe de la couleur*.

La densité lagrangienne invariante sous parité décrivant l'interaction des gluons avec un ensemble de champs fermioniques ψ^I est de la forme¹²

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \bar{\psi}_I(i\gamma^\mu D_\mu - m_I)\psi^I. \quad (4.65)$$

Dans cette expression,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (4.66)$$

avec des constantes de structure définies par

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C, \quad (4.67)$$

qui est vraie pour les générateurs T^A de n'importe quelle représentation de l'algèbre de $SU(3)$, et donc en particulier pour $T^A = T_{\mathbf{3}}^A$. Le premier terme dans la théorie (4.65) comprend des interactions entre gluons de la forme

$$-g_s f^{ABC}(\partial_\mu A_\nu^A)A^{B\mu}A^{C\nu} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{ABC}f^{ADE}A_\mu^B A_\nu^C A^{D\mu}A^{E\nu}, \quad (4.68)$$

¹²On peut toujours diagonaliser la matrice de masse des fermions.

dont l'intensité est déterminée par la *constante de jauge forte* g_s .

L'interaction fermion–gluons est contenue dans le terme $i\bar{\psi}_I\gamma^\mu D_\mu\psi^I$: elle dépend du choix des transformations de jauge des fermions.

Quarks et leptons

Nous avons vu dans la section 1.5 que si la transformation de jauge infinitésimale des fermions est

$$\psi^I \longrightarrow \psi^{I'} = \psi^I + \delta\psi^I, \quad \delta\psi^I = i\alpha^A(T^A)^I_J\psi^J,$$

les dérivées covariantes apparaissant dans \mathcal{L}_{QCD} sont alors

$$D_\mu\psi^I = \partial_\mu\psi^I - ig_s A_\mu^A(T^A)^I_J\psi^J,$$

la deuxième contribution définissant l'interaction fermions–gluons.

Dans le Modèle standard, les fermions sont des *quarks* ou des *leptons*. Les leptons ψ_ℓ , $\ell = e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$, n'ont pas d'interaction forte. Ceci revient à exiger que le groupe de jauge n'agisse pas sur eux, qu'il les laisse invariants de jauge:

$$\psi_\ell \longrightarrow \psi'_\ell = \psi_\ell.$$

Les générateurs sont donc nuls pour les leptons¹³ et

$$D_\mu\psi_\ell = \partial_\mu\psi_\ell.$$

Par contre, les quarks se transforment sous $SU(3)$ selon la représentation de dimension 3 dont les générateurs $T_{\mathbf{3}}^A$ sont apparus dans les équations (4.61–4.64). Chaque saveur de quark $m = u, d, s, c, b, t$ existe donc en trois couleurs $j = 1, 2, 3$, et les champs de quarks seront des spineurs de Dirac ψ_m^j . Les transformations de jauge infinitésimales et les dérivées covariantes sont:

$$\begin{aligned} \delta\psi_m^j &= i\alpha^A(T_{\mathbf{3}}^A)^j_k\psi_m^k, \\ D_\mu\psi_m^j &= \partial_\mu\psi_m^j - ig_s A_\mu^A(T_{\mathbf{3}}^A)^j_k\psi_m^k. \end{aligned} \tag{4.69}$$

L'interaction quarks–gluons contenue dans la densité lagrangienne \mathcal{L}_{QCD} est donc:

$$g_s A_\mu^A(T_{\mathbf{3}}^A)^j_k[\bar{\psi}_{jm}\gamma^\mu\psi_m^k]. \tag{4.70}$$

Elle laisse la saveur m inchangée. Notez également que l'invariance de jauge de (4.65) exige que les trois couleurs de chaque quark ψ_m^i aient la même masse.

L'électrodynamique quantique

La densité lagrangienne de l'interaction électromagnétique est apparue à diverses reprises dans les chapitres précédents. Le groupe de jauge $U(1)$ n'a qu'un

¹³C'est la représentation triviale de $SU(3)$, uni-dimensionnelle, où les générateurs $T_{\mathbf{1}}^A$ sont des nombres réels vérifiant (4.67), et donc nuls.

paramètre, il commute avec le groupe des couleurs. Les transformations de jauge des fermions seront donc :

$$\begin{aligned} \psi_\ell &\longrightarrow \psi'_\ell = e^{i\alpha Q_\ell} \psi_\ell, & \ell &= e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau, \\ \psi_m^j &\longrightarrow \psi_m^{j'} = e^{i\alpha Q_m} \psi_m^j, & m &= u, d, s, c, b, t, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Ces transformations spécifient les charges électriques Q_e des fermions, e étant la constante de couplage électromagnétique¹⁴. Le fait que $U(1)$ commute avec $SU(3)$ impose que les trois couleurs de chaque quarks ont la même charge. Les valeurs des charges électriques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Q_e = Q_\mu = Q_\tau = -1, & \quad Q_{\nu_e} = Q_{\nu_\mu} = Q_{\nu_\tau} = 0, \\ Q_u = Q_c = Q_t = 2/3, & \quad Q_d = Q_s = Q_b = -1/3. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Le choix de ces valeurs résulte de l'expérience : il n'a pas de justification théorique. En particulier, rien n'impose à ce stade la quantification de la charge électrique en multiples de $e/3$.

Les quarks et les leptons forment trois générations identiques du point de vue des nombres quantiques internes mais différentes par les masses :

$$(e, \nu_e, u, d), \quad (\mu, \nu_\mu, c, s), \quad (\tau, \nu_\tau, t, b),$$

en ordonnant les fermions selon leurs masses. Nous noterons les champs des quarks et des leptons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi_E^{(a)} &= \psi_e, \psi_\mu, \psi_\tau & : & \quad (\mathbf{1}, Q_E = -1), \\ \psi_N^{(a)} &= \psi_{\nu_e}, \psi_{\nu_\mu}, \psi_{\nu_\tau} & : & \quad (\mathbf{1}, Q_N = 0), \quad a = 1, 2, 3, \\ \psi_U^{(a)j} &= \psi_u^j, \psi_c^j, \psi_t^j & : & \quad (\mathbf{3}, Q_U = 2/3), \quad j = 1, 2, 3. \\ \psi_D^{(a)j} &= \psi_d^j, \psi_s^j, \psi_b^j & : & \quad (\mathbf{3}, Q_D = -1/3), \end{aligned} \quad (4.73)$$

L'indice a numérote les générations, j la couleur et le symbole (\mathbf{n}, Q) indique la représentation de dimension \mathbf{n} du groupe des couleurs $SU(3)$ ($\mathbf{3}$ pour les quarks, la représentation triviale de dimension $\mathbf{1}$ pour les leptons) et la charge électrique Q_e de chaque fermion. Dans cette notation, les dérivées covariantes sous $SU(3) \times U(1)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} D_\mu \psi_E^{(a)} &= \partial_\mu \psi_E^{(a)} + ie A_\mu \psi_E^{(a)}, \\ D_\mu \psi_N^{(a)} &= \partial_\mu \psi_N^{(a)}, \\ D_\mu \psi_U^{(a)j} &= \partial_\mu \psi_U^{(a)j} - \frac{2}{3} ie A_\mu \psi_U^{(a)j} - ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_U^{(a)k}, \\ D_\mu \psi_D^{(a)j} &= \partial_\mu \psi_D^{(a)j} + \frac{1}{3} ie A_\mu \psi_D^{(a)j} - ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_D^{(a)k}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

¹⁴La constante de structure fine est $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq (137)^{-1}$, à ne pas confondre avec le paramètre α de la transformation de jauge (4.71).

Dans ces expressions, A_μ et A_μ^A sont respectivement les champs de jauge du photon et des huit gluons. Et la densité lagrangienne décrivant les interactions fortes et électromagnétiques des quarks et des leptons est

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \sum_{\text{fermions } I} \bar{\psi}_I (i\gamma^\mu D_\mu - m_I) \psi^I, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C.\end{aligned}\tag{4.75}$$

La somme parcourt tous les fermions (4.73), avec les dérivées covariantes (4.74). En plus des interactions (4.68) et (4.70) de la chromodynamique quantique, \mathcal{L} contient l'interaction électromagnétique

$$e A_\mu j_{e.m.}^\mu, \quad j_{e.m.}^\mu = \sum_{a=1}^3 \left[-\bar{\psi}_E^{(a)} \gamma^\mu \psi_E^{(a)} + \frac{2}{3} \bar{\psi}_{Uj}^{(a)} \gamma^\mu \psi_U^{(a)j} - \frac{1}{3} \bar{\psi}_{Dj}^{(a)} \gamma^\mu \psi_D^{(a)j} \right], \tag{4.76}$$

une somme sur l'indice de couleur j étant sous-entendue.

Règles de Feynman

Nous avons obtenu dans le chapitre précédent les règles de Feynman de l'électrodynamique quantique. En espace des impulsions, on associe au vertex fermion-photon un facteur

$$iQe(\gamma^\mu)_{ba}$$

et un facteur $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3)$ de conservation des impulsions qui entrent au vertex. Les indices a et b indiquent respectivement la composante du spineur entrant et sortant, alors que μ est l'indice de polarisation du photon. Pour les quarks et les leptons, les charges Q sont données dans (4.72) ou dans l'interaction (4.76) ci-dessus.

La règle de Feynman pour l'interaction quark-gluon (4.70) est facile à déterminer. La comparaison avec l'expression (4.76) montre qu'il suffit de remplacer la charge électrique Qe par $g_s(T_{\mathbf{3}}^A)_i^j$. La règle de Feynman est donc

$$ig_s(T_{\mathbf{3}}^A)_i^j(\gamma^\mu)_{ba},$$

avec le facteur $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3)$ de conservation d'impulsion au vertex. Les indices i et j dénotent respectivement la couleur du quark entrant et sortant au vertex. Le gluon a couleur A et polarisation μ .

L'interaction entre trois gluons contenue dans (4.68) fait intervenir la dérivée du champ A_μ^A . Les règles de Feynman pour de telles interactions dérivatives n'ont pas été étudiées dans le chapitre 3: c'est l'objet de la section suivante.

Pour obtenir la règle de Feynman de l'interaction à quatre gluons, il est utile

de la récrire sous la forme symétrique

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{4\text{ gluons}} &= -\frac{1}{24}g_s^2 : A_\mu^A A_\nu^B A_\rho^C A_\sigma^D : \mathcal{O}^{\mu\nu\rho\sigma,ABCD}, \\ \mathcal{O}^{\mu\nu\rho\sigma,ABCD} &= f^{EAB} f^{ECD} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{EAC} f^{EDB} (\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) \\ &\quad + f^{EAD} f^{EBC} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}),\end{aligned}$$

en introduisant comme toujours l'ordre normal des champs quantifiés. L'amplitude $\mathcal{O}^{\mu\nu\rho\sigma,ABCD}$ est invariante sous les permutations des champs de jauge, telles que par exemple l'échange $(\mu, A) \leftrightarrow (\nu, B)$. On calcule ensuite

$$\mathcal{A} = \langle 0 | T A_\mu^A(x_1) A_\nu^B(x_2) A_\rho^C(x_3) A_\sigma^D(x_4) i\mathcal{L}_{4\text{ gluons}}(x) | 0 \rangle,$$

pour des champs libres. Le propagateur du gluon est

$$\langle 0 | T A_\mu^A(x) A_\nu^B(y) | 0 \rangle = iG_{\mu\nu}(x-y)\delta^{AB},$$

et le théorème de Wick conduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{i}{24}g_s^2 i^4 G_{\mu\alpha}(x_1-x) G_{\nu\beta}(x_2-x) G_{\rho\gamma}(x_3-x) G_{\sigma\delta}(x_4-x) \\ &\quad \cdot \mathcal{O}^{\alpha\beta\gamma\delta,ABCD} + 23 \text{ permutations de } (\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C) \text{ et } (\delta, D).\end{aligned}$$

La symétrie de $\mathcal{O}^{\alpha\beta\gamma\delta,ABCD}$ indique que les 24 termes sont identiques. En omettant les propagateurs des quatre gluons et en passant en espace des impulsions, ce qui fait apparaître une distribution de Dirac de conservation de l'impulsion, la règle de Feynman du vertex à quatre gluons est:

$$\begin{aligned}-ig_s^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)[&f^{EA_1A_2}f^{EA_3A_4}(\eta^{\mu_1\mu_3}\eta^{\mu_2\mu_4}-\eta^{\mu_1\mu_4}\eta^{\mu_2\mu_3}) \\ &+f^{EA_1A_3}f^{EA_4A_2}(\eta^{\mu_1\mu_4}\eta^{\mu_2\mu_3}-\eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\mu_3\mu_4}) \\ &+f^{EA_1A_4}f^{EA_2A_3}(\eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\mu_3\mu_4}-\eta^{\mu_1\mu_3}\eta^{\mu_2\mu_4})],\end{aligned}\tag{4.77}$$

pour quatre gluons $i = 1, 2, 3, 4$ entrant au vertex avec une impulsion p_i , un indice de couleur A_i et une polarisation μ_i .

4.3 Interactions dérivatives: règles de Feynman

L'équation (3.62) donne l'expansion perturbative des fonctions de Green d'une théorie dont la densité lagrangienne d'interaction ne dépend pas de la dérivée de champs. Dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) = - \int d^4x \mathcal{L}_I$$

est explicitement invariante de Lorentz. Comme le produit chronologique d'un produit de champs est lui-même covariant, chaque terme de l'expansion perturbative est covariant.

Lorsque \mathcal{L}_I dépend de la dérivée ∂_μ de champs, c'est-à-dire lorsque la théorie possède des *interactions dérivatives*, la relation entre l'hamiltonien d'interaction et la densité lagrangienne d'interaction est plus subtile. L'hamiltonien classique est

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_i} \partial^0 \phi_i - \mathcal{L} \right], \quad (4.78)$$

où ϕ_i désigne l'ensemble des champs participant à la théorie. Ses variables naturelles sont les champs ϕ_i et leurs impulsions conjuguées canoniques

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_i}. \quad (4.79)$$

L'hamiltonien est la somme d'une partie libre H_0 , quadratique, et d'un hamiltonien d'interaction H_I :

$$H(\phi_i, \Pi_i) = H_0(\phi_i, \Pi_i) + H_I(\phi_i, \Pi_i).$$

Si on considère par exemple le couplage invariant de jauge d'un champ scalaire complexe de charge q au champ du photon A_μ , la densité lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \quad (4.80)$$

en omettant le terme de propagation du photon $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Le photon sera d'ailleurs considéré dans cette discussion comme un champ classique externe et on ne s'intéressera qu'à la dynamique de ϕ . L'impulsion conjuguée à ϕ est

$$\Pi = D_0 \phi^\dagger = \partial_0 \phi^\dagger + iqA_0 \phi^\dagger, \quad (4.81)$$

et on obtient:

$$\begin{aligned} H_0 &= : \int d^3x \left[\Pi^\dagger \Pi + \vec{\nabla} \phi^\dagger \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \right] :, \\ H_I &= : \int d^3x \left[iqA_0(\Pi \phi - \Pi^\dagger \phi^\dagger) - iqA_i(\phi \partial_i \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_i \phi) + q^2 A_i A_i \phi^\dagger \phi \right] :. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Avec l'expression (4.81) de l'impulsion conjuguée à ϕ , il vient

$$H_I = : \int d^3x \left[iqA_\mu(\phi \partial_\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_\mu \phi) - q^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi - q^2 A_0 A_0 \phi^\dagger \phi \right] :,$$

et on remarque alors que

$$H_I = : \int d^3x \left[-\mathcal{L}_I - q^2 A_0 A_0 \phi^\dagger \phi \right] :, \quad (4.83)$$

où

$$\mathcal{L}_I = -iqA^\mu [\phi \partial_\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_\mu \phi] + q^2 A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi \quad (4.84)$$

est la densité lagrangienne d'interaction extraite de (4.80). Notez également que H_I n'est pas donné directement par

$$\int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \partial_0 \phi} \partial^0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \partial_0 \phi^\dagger} \partial^0 \phi^\dagger - \mathcal{L}_I \right],$$

puisque Π n'est pas proportionnel à $\partial_0 \phi^\dagger$ comme c'est le cas dans une théorie libre ou sans interaction dérivative.

L'expansion perturbative d'une fonction de Green typique est

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T \phi_{in}(x_1) \dots \phi_{in}^\dagger(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] | 0 \rangle}, \quad (4.85)$$

qui ne semble pas invariante de Lorentz en présence d'interactions dérivatives. Dans cette expression apparaissent uniquement des champs libres ϕ_{in} , et pour une théorie libre, l'impulsion conjuguée à ϕ_{in} est

$$\Pi_{in} = \partial_0 \phi_{in}^\dagger, \quad (4.86)$$

au lieu de (4.81). L'hamiltonien d'interaction qui apparaît dans (4.85) est exprimé en termes des champs libres ϕ_{in} et Π_{in} ; il est donné par l'expression (4.82) dans laquelle Π est remplacé par son expression libre (4.86):

$$H_I(\phi_{in}, \Pi_{in}) = : \int d^3x \left[-\mathcal{L}_I(\phi_{in}, \partial_\mu \phi_{in}) + q^2 A_0 A_0 \phi_{in}^\dagger \phi_{in} \right] :, \quad (4.87)$$

le champ électromagnétique A_μ étant considéré comme classique; \mathcal{L}_I est de la forme (4.84). Notez le changement de signe de l'interaction non covariante par rapport à l'expression (4.83).

Il existe une autre source de non-covariance apparente de l'expression (4.85) lorsque la théorie contient des interactions dérivatives: il est nécessaire de définir le produit chronologique non seulement pour des produits de champs $\phi(x_i) \dots \phi^\dagger(x_j)$, mais également pour des produits comprenant des facteurs $\partial_\mu \phi(x)$. L'application du théorème de Wick exige par exemple la valeur des expressions

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T [\partial_\mu \phi(x)] \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \\ & \langle 0 | T [\partial_\mu \phi(x)] [\partial_\nu \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle, \end{aligned}$$

qui ne sont pas nécessairement covariantes. Puisque

$$T \phi(x) \phi^\dagger(y) = \theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi^\dagger(y) + \theta(y^0 - x^0) \phi^\dagger(y) \phi(x),$$

il vient, avec $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \theta(x^0 - y^0) = \delta(x^0 - y^0) \eta_{\mu 0}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \phi(x) \phi^\dagger(y) &= T \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \right] \phi^\dagger(y) + \delta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi^\dagger(y)] \eta_{\mu 0} \\ &= T \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \right] \phi^\dagger(y) + i \eta_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \Delta(0, \vec{x} - \vec{y}) \\ &= T \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \right] \phi^\dagger(y), \end{aligned}$$

le commutateur $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ s'annulant lorsque $x - y$ est de genre espace. Donc:

$$\langle 0|T[\partial_\mu \phi(x)]\phi^\dagger(y)|0\rangle = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle, \quad (4.88)$$

qui est covariant. Par contre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} T\phi(x)\phi^\dagger(y) &= \frac{\partial}{\partial y^\nu} T \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x)\phi^\dagger(y) \\ &= T \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \frac{\partial}{\partial y^\nu} \phi^\dagger(y) - \eta_{\nu 0} \delta(x^0 - y^0) [\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x), \phi^\dagger(y)]. \end{aligned}$$

L'expansion en modes de $\phi(x)$ conduit à

$$\delta(x^0 - y^0) [\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x), \phi^\dagger(y)] = -i\delta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{2\omega_k} \{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\}.$$

Dans la direction temporelle, $k_0 = \omega_k$ et

$$\delta(x^0 - y^0) [\frac{\partial}{\partial x^0} \phi(x), \phi^\dagger(y)] = -i\delta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = -i\delta^4(x - y).$$

Dans les directions spatiales, $i = 1, 2, 3$, il vient

$$\delta(x^0 - y^0) [\frac{\partial}{\partial x^i} \phi(x), \phi^\dagger(y)] = -i\delta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i}{2\omega_k} \{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\} = 0.$$

On peut donc écrire

$$\delta(x^0 - y^0) [\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x), \phi^\dagger(y)] = -i\delta^4(x - y)\eta_{\mu 0},$$

et finalement

$$\langle 0|T[\partial_\mu \phi(x)][\partial_\nu \phi^\dagger(y)]|0\rangle = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle - i\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\delta^4(x - y), \quad (4.89)$$

qui n'est pas covariant.

Pour étudier l'effet de ces termes non covariants, considérons la quantité

$$\langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] |0\rangle, \quad (4.90)$$

qui apparaît dans (4.85). Nous omettrons les indices *in* des champs libres. Le problème est de montrer que cette série de puissances de la constante de couplage q est ordre par ordre invariante de Lorentz. L'ordre le plus bas, q^0 , est évidemment invariant puisque la théorie est libre à cet ordre:

$$q^0 : \quad \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n)|0\rangle.$$

Le terme d'ordre q^1 est:

$$q^1 : \quad q \int d^4 y \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) : A^\mu(y)\phi(y) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi^\dagger(y) : |0\rangle.$$

Il est covariant puisqu'il n'utilise ni la contraction $\langle 0|T[\partial_\mu\phi][\partial_\nu\phi^\dagger]|0\rangle$ ni la partie non covariante de H_I , qui est d'ordre q^2 .

L'ordre q^2 est plus intéressant. La contribution de (4.90) à cet ordre s'écrit:

$$\begin{aligned}
 q^2 : \quad & -iq^2 \int d^4y \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) \\
 & : \phi^\dagger(y)\phi(y)[A_0(y)A_0(y) - A^\mu(y)A_\mu(y)] : |0\rangle \\
 & + \frac{1}{2}q^2 \int d^4y \int d^4z \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) \\
 & : A^\mu(y)\phi(y) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi^\dagger(y) :: A^\nu(z)\phi(z) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi^\dagger(z) : |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Sa partie apparemment non covariante est

$$\begin{aligned}
 I = & -iq^2 \int d^4y \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) : A_0(y)A_0(y)\phi^\dagger(y)\phi(y) : |0\rangle \\
 & -q^2 \int d^4y \int d^4z \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) A^\mu(y)\phi^\dagger(y) A^\nu(z)\phi(z) |0\rangle \\
 & \times \langle 0|T[\partial_\mu\phi(y)][\partial_\nu\phi^\dagger(z)]|0\rangle,
 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Wick. En utilisant (4.89), cette expression devient

$$\begin{aligned}
 I = & -iq^2 \int d^4y \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) : A_0(y)A_0(y)\phi^\dagger(y)\phi(y) : |0\rangle \\
 & -q^2 \int d^4y \int d^4z \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) A^\mu(y)\phi^\dagger(y) A^\nu(z)\phi(z) |0\rangle \\
 & \times \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \langle 0|T\phi(y)\phi^\dagger(z)|0\rangle \\
 & +iq^2 \int d^4y \int d^4z \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) A^0(y)\phi^\dagger(y) A^0(z)\phi(z) \delta^4(y-z) |0\rangle \\
 = & -q^2 \int d^4y \int d^4z \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) A^\mu(y)\phi^\dagger(y) A^\nu(z)\phi(z) |0\rangle \\
 & \times \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \langle 0|T\phi(y)\phi^\dagger(z)|0\rangle,
 \end{aligned}$$

qui est covariante. Nous avons donc montré que l'expression (4.90) est covariante jusqu'à l'ordre q^2 . Le point crucial est que les contributions non covariantes présentes dans l'hamiltonien (4.87) compensent exactement celles produites par la contraction (4.89). A partir de cette observation, l'extension à tous les ordres en q de la preuve de l'invariance de Lorentz est uniquement un problème technique, sans intérêt particulier.

Puisque les effets des termes non covariants de H_I et $\langle 0|T[\partial_\mu\phi][\partial_\nu\phi^\dagger]|0\rangle$ se compensent dans les fonctions de Green, il est cohérent de ne retenir que les contributions covariantes. Ceci revient à remplacer l'hamiltonien non covariant

par l'expression covariante

$$- \int d^3x \mathcal{L}_I,$$

et à définir un produit chronologique covariant \hat{T} qui vérifie

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \hat{T} [\partial_\mu \phi(x)] \phi^\dagger(y) | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \hat{T} [\partial_\mu \phi(x)] [\partial_\nu \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Il suffit alors d'écrire la fonction de Green (4.85) sous la forme

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \phi^\dagger(x_n) \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}_I \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{T} \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}_I \right] | 0 \rangle}, \quad (4.93)$$

qui ne contient que des contributions explicitement invariantes de Lorentz.

D'après (4.92), les interactions dérivatives font apparaître des dérivées de propagateurs $\langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle$ lorsqu'une fonction de Green est calculée en théorie des perturbations à l'aide du théorème de Wick. Pour le champ scalaire,

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

On aura donc:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} [\partial_\mu \phi(x)] \phi^\dagger(y) | 0 \rangle &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-ik_\mu] \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \\ \langle 0 | \hat{T} \phi(x) [\partial_\nu \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [+ik_\nu] \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \\ \langle 0 | \hat{T} [\partial_\mu \phi(x)] [\partial_\nu \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [k_\mu k_\nu] \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Ces expressions sont utiles à la dérivation des règles de Feynman des théories avec interactions dérivatives. Nous avons formulé dans la section 1.5 la théorie de jauge la plus générale compatible avec la cohérence de la théorie quantique. Les interactions dérivatives y sont de deux types. Premièrement, l'interaction trilinéaire des champs de jauge, dont l'interaction à trois gluons [le premier terme de l'expression (4.68)] est un exemple:

$$\mathcal{L}_I = -gf^{DEF} (\partial_\mu A_\nu^D) A^{\mu E} A^{\nu F}. \quad (4.94)$$

Deuxièmement, l'interaction champs scalaires-champs de jauge contenue par exemple dans la densité lagrangienne (4.80) et due à la dérivée covariante du champ scalaire:

$$\mathcal{L}_I = ig A_\mu^A (T_s^A)_j^i [\phi_i^\dagger (\partial^\mu \phi^j) - (\partial^\mu \phi_i^\dagger) \phi^j]. \quad (4.95)$$

Les règles de Feynman pour ces interactions sont obtenues en paraphrasant le paragraphe 3.3.3, mais avec le produit chronologique \hat{T} . Nous allons les établir en espace des impulsions en prenant la transformée de Fourier de l'expression (4.93), c'est-à-dire en considérant la fonction de Green

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \exp \left(-i \sum_{k=1}^n x_k p_k \right) G(x_1, \dots, x_n).$$

Comme dans le chapitre 3¹⁵, cette convention revient à considérer les impulsions p_k comme entrantes.

Interaction de jauge trilinéaire (4.94)

En espace des impulsions, la contribution d'une interaction (4.94) à une fonction de Green $\tilde{G}(p_1, \dots, p_n)$ combine six termes correspondant aux six contractions possibles des trois champs de jauge de \mathcal{L}_I avec trois champs de jauge internes ou externes donnés. Pour définir les variables, supposons que les contractions ont lieu avec trois champs de jauge A_μ^A , A_ν^B et A_ρ^C , dont les impulsions entrant au vertex sont respectivement k_1 , k_2 et k_3 . On veut calculer

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0 | \hat{T} A_\mu^A(x_1) A_\nu^B(x_2) A_\rho^C(x_3) : i \int d^4y \mathcal{L}_I : | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} e^{ik_1x_1 + ik_2x_2 + ik_3x_3} I_{\mu\nu\rho}^{ABC}(k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

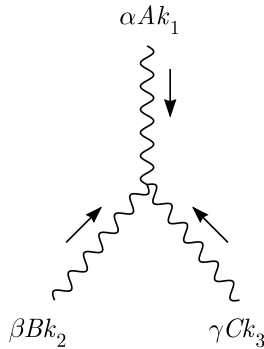
en espace des impulsions. D'après le théorème de Wick,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\rho}^{ABC}(k_1, k_2, k_3) &= -i^3 G_\mu^\alpha(k_1) G_\nu^\beta(k_2) G_\rho^\gamma(k_3) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \\ &\quad \cdot g f^{ABC} [\eta_{\alpha\beta}(k_2 - k_1)_\gamma + \eta_{\beta\gamma}(k_3 - k_2)_\alpha + \eta_{\alpha\gamma}(k_1 - k_3)_\beta], \end{aligned}$$

où $G_{\mu\nu}(k)\delta^{AB}$ est le propagateur du champ de jauge en espace des impulsions. En tronquant la contribution des trois propagateurs des champs de jauge externes, $i^3 G_\mu^\alpha(k_1) G_\nu^\beta(k_2) G_\rho^\gamma(k_3)$, on obtient la règle de Feynman

$$g f^{ABC} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) [\eta_{\alpha\beta}(k_1 - k_2)_\gamma + \eta_{\beta\gamma}(k_2 - k_3)_\alpha + \eta_{\alpha\gamma}(k_3 - k_1)_\beta], \quad (4.96)$$

pour le vertex:



¹⁵Equations (3.29) ou (3.82), par exemple.

Interaction scalaire dérivative (4.95)

L'interaction (4.95) met en jeu trois champs différents ϕ^j , ϕ_i^\dagger et A_μ^A . La règle de Feynman s'obtient en calculant

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \phi^i(x_1) \phi_j^\dagger(x_2) A_\mu^A(x_3) : i \int d^4y \mathcal{L}_I : | 0 \rangle \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{ipx_1 - ip'x_2 + iqx_3} I_{j\mu}^{iA}(p, p', q). \end{aligned}$$

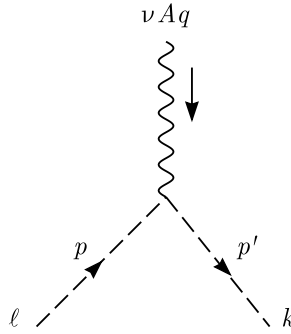
Chaque terme de \mathcal{L}_I ne produit qu'une contraction et il vient facilement

$$I_{j\mu}^{iA}(p, p', q) = i^3 G_l^i(p) G_j^k(p') G_{\mu\nu}(q) (2\pi)^4 \delta(p - p' + q) \left[-ig(T_s^A)_k^l \right] (p + p')^\nu.$$

On appliquera donc la règle de Feynman

$$-ig(T_s^A)_k^l (p + p')^\nu (2\pi)^4 \delta^4(p - p' + q) \quad (4.97)$$

au vertex représenté par la figure suivante:

**4.4 Champs massifs de spin un**

Dans le chapitre 2, nous avons quantifié le champ de jauge libre de masse nulle. Les interactions faibles font cependant intervenir des bosons massifs de spin 1, W^\pm et Z^0 , dont la quantification est considérablement plus subtile.

L'invariance de jauge impose l'absence de masse des champs de jauge et détermine la structure des interactions. Dans le cas de la force faible, il apparaît que les interactions entre fermions et W^\pm ou Z^0 sont correctement décrites à partir d'une invariance de jauge¹⁶, mais que la théorie doit posséder un mécanisme brisant cette invariance et générant les masses des bosons de jauge. A première vue, il y a au moins deux possibilités. La première consiste à simplement ajouter à la densité lagrangienne un terme de masse non invariant pour les bosons de

¹⁶Le groupe de jauge est $SU(2) \times U(1)$; il contient le groupe de jauge $U(1)$ de l'électromagnétisme et l'un des bosons de jauge est donc le photon.

jauge. Il s'agit d'une brisure *explicite* de la symétrie de jauge. Il s'avère cependant que cette procédure conduit à des théories quantiques incohérentes (non renormalisables) en présence d'interactions. Elle est donc inacceptable dans le cadre de la théorie des champs. Mais elle est utile en tant qu'approximation puisqu'elle permet d'évaluer certains processus importants à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations et dans un domaine cinématique restreint. C'est dans cet esprit que nous la considérons ici.

La seconde méthode, qui est compatible avec la quantification de la théorie de champs, brise *spontanément* la symétrie de jauge à l'aide de champs scalaires: elle est décrite dans le chapitre 7. C'est la méthode utilisée dans le Modèle standard pour générer les masses des bosons de jauge faibles.

Nous allons donc quantifier un champ vectoriel $A_\mu(x)$ dont la densité lagrangienne est la suivante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.98)$$

Le second terme brise l'invariance du premier sous les transformations de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. L'équation d'Euler-Lagrange est l'équation de Proca,

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu + M^2 A^\mu = 0, \quad (4.99)$$

déjà examinée dans le chapitre 2¹⁷. En prenant sa divergence, il vient

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.100)$$

Cette condition élimine la composante de spin zéro du champ vectoriel massif¹⁸. L'équation du mouvement (4.99) est donc équivalente à

$$(\square + M^2)A^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \partial^\mu A_\mu = 0, \quad (4.101)$$

et le champ A^μ est une solution de l'équation de Klein-Gordon de masse M , vérifiant la condition de transversalité (4.100). L'expansion en ondes planes s'écrit

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa} \left[a^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) e^{-ikx} + a^{(\kappa)\dagger}(k) \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) e^{ikx} \right], \quad (4.102)$$

avec $k^2 = M^2$ et $\omega_K = \sqrt{M^2 + \vec{k}^2}$. La condition (4.100) conduit à

$$k^\mu \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) = 0, \quad (4.103)$$

qui indique que le champ A_μ possède trois polarisations transverses, qui correspondent aux trois états d'un champ massif de spin 1. L'indice κ dans l'expansion (4.102) prend donc trois valeurs, $\kappa = 1, 2, 3$.

¹⁷Section 2.4.

¹⁸Paragraphe 1.3.5.

Les trois vecteurs de polarisation linéairement indépendants $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$ peuvent être normalisés de la manière suivante. Puisque $k^\mu \epsilon_\mu^{(\kappa)} = 0$ et $k^2 = M^2$, ils sont de genre espace et on peut choisir

$$\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) \epsilon^{(\kappa')\mu}(k) = -\delta^{\kappa\kappa'}. \quad (4.104)$$

Ensuite, le tenseur $t_{\mu\nu} = \sum_{\kappa=1}^3 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) \epsilon_\nu^{(\kappa)}(k)$ est symétrique et les conditions (4.100) et (4.104) impliquent

$$k^\mu t_{\mu\nu} = k^\nu t_{\mu\nu} = 0, \quad \epsilon^{(\kappa)\mu}(k) t_{\mu\nu} = -\epsilon_\nu^{(\kappa)}(k).$$

Par conséquent,

$$\sum_{\kappa=1}^3 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) \epsilon_\nu^{(\kappa)}(k) = -\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right). \quad (4.105)$$

Dans un référentiel où l'impulsion de la particule de spin un est dirigée selon l'axe x^3 , $k = (\omega_k, 0, 0, |\vec{k}|)$, un choix de vecteurs de polarisation vérifiant les conditions (4.103), (4.104) et (4.105) est

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)} &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon^{(2)} &= (0, 0, 1, 0), \\ \epsilon^{(3)} &= \frac{1}{M}(|\vec{k}|, 0, 0, E). \end{aligned} \quad (4.106)$$

$\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$ correspondent aux polarisations transverses à \vec{k} , $\epsilon^{(3)}$ à la polarisation longitudinale.

La quantification canonique de la densité lagrangienne (4.98) ne pose pas de problème particulier. La méthode utilisée dans le chapitre 2 s'applique directement. Les opérateurs $a^{(\kappa)}(k)$ et $a^{(\kappa)\dagger}(k)$ détruisent ou créent une particule de polarisation κ et impulsion k . Ils vérifient donc:

$$\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)] &= 2\omega_k (2\pi)^3 \delta^{\kappa\kappa'} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')}(q)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Ces résultats sont identiques aux relations de commutations (2.115) des opérateurs de création et d'annihilation du champ de jauge.

Le propagateur du champ vectoriel massif est solution de l'équation de la fonction de Green

$$[(\square + M^2)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_{\nu\rho}(x - y) = \delta_\rho^\mu \delta^4(x - y). \quad (4.108)$$

En passant à la transformée de Fourier,

$$G_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}_{\mu\nu}(k), \quad (4.109)$$

il vient

$$\left[(-k^2 + M^2)\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right] \tilde{G}_{\nu\rho}(k) = \delta_\rho^\mu,$$

dont la solution est, lorsque $k^2 \neq M^2$,

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 - M^2} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right].$$

Le traitement causal du pôle en $k^2 = M^2$ conduit à la substitution $M^2 \rightarrow M^2 - i\epsilon$ dans le dénominateur singulier, si bien que finalement

$$G_{\mu\nu}(x - y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right]. \quad (4.110)$$

Comme dans le cas du champ de jauge sans masse, on aura

$$\langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = i G_{\mu\nu}(x - y). \quad (4.111)$$

Dans un diagramme de Feynman en espace des impulsions, on associe à chaque ligne interne du champ vectoriel massif un facteur

$$-\frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right), \quad (4.112)$$

qui est la transformée de Fourier $i\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$ de la contraction $\langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle$.

Il est important de remarquer que pour les valeurs de l'impulsion k_μ grandes par rapport à M , le propagateur $\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$ se comporte comme $k_\mu k_\nu / k^2$. Ce comportement asymptotique est différent de celui des propagateurs fermioniques, scalaires ou de jauge qui s'annulent comme $1/k$ ou $1/k^2$ dans la même limite. Cette anomalie est l'une des origines des incohérences rencontrées lorsqu'on essaie de quantifier une théorie de champs en interaction à partir de la densité lagrangienne (4.98).

Le propagateur (4.110) est cependant utilisable pour obtenir une approximation d'un processus à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations et dans le domaine cinématique où k^2 est faible relativement à M^2 . Le terme dominant du propagateur est alors M^{-2} . C'est par exemple le cas de la désintégration β de particules telles que le neutron, les quarks autres que le top, les leptons μ et τ , ainsi qu'en général les désintégrations nucléaires faibles. La restriction sur k^2 exclut l'usage de (4.110) dans la boucle d'un diagramme de Feynman: dans ce cas, l'impulsion sur la boucle n'est pas contrainte par la conservation d'impulsion, on doit intégrer sur toutes ses valeurs et la restriction cinématique sur k^2 ne peut être imposée.

4.5 L'interaction faible des fermions

Dans une théorie de jauge, l'interaction fermions-champs de jauge est toujours de la forme

$$\mathcal{L}_I = \sum_A g^A A_\mu^A j^{A\mu},$$

avec un courant fermionique

$$\begin{aligned} j^{A\mu} &= (T_\ell^A)_J^I [\bar{\psi}_{LI} \gamma^\mu \psi_L^J] + (T_r^A)_J^I [\bar{\psi}_{RI} \gamma^\mu \psi_R^J] \\ &= \frac{1}{2} [(T_\ell^A)_J^I + (T_r^A)_J^I] \bar{\psi}_I \gamma^\mu \psi^J + \frac{1}{2} [(T_\ell^A)_J^I - (T_r^A)_J^I] \bar{\psi}_I \gamma^\mu \gamma_5 \psi^J. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Pour une interaction invariante de parité, $T_\ell^A = T_r^A \equiv T^A$ et le courant axial $\bar{\psi}_I \gamma^\mu \gamma_5 \psi^J$ n'intervient pas. C'est le cas de l'électromagnétisme ($g^A = e$, $(T^A)_J^I = Q_I \delta_J^I$) ou de la chromodynamique quantique ($g^A = g_s$, $T^A = T_{\mathbf{3}}^A = \frac{1}{2} \lambda^A$) qui ont été discutés plus haut.

L'interaction entre quarks ou leptons et bosons de jauge faibles W^\pm ou Z^0 , telle que contenue dans le Modèle standard, est donc nécessairement de la forme

$$\mathcal{L}_{W,Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ j^{-\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}} g W_\mu^- j^{+\mu} + g Z_\mu j^{0\mu}, \quad (4.114)$$

avec des facteurs $2^{-1/2}$ qui sont conventionnels. Elle contient une constante de couplage universelle g , la *constante de jauge faible*,

$$g = 2[\sqrt{2}G_F]^{\frac{1}{2}} M_W \simeq .65,$$

$G_F \simeq 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ étant la *constante de Fermi*. Comme $\mathcal{L}_{W,Z}$ est hermitique et $W_\mu^- = (W_\mu^+)^\dagger$,

$$j^{+\mu} = (j^{-\mu})^\dagger.$$

Le courant j_μ^\pm , qui est couplé au W^\mp porte une charge électrique ± 1 :

$$[Q, W_\mu^\pm] = \mp e W_\mu^\pm, \quad [Q, j_\mu^\pm] = \mp e j_\mu^\pm.$$

Les termes correspondants dans $\mathcal{L}_{W,Z}$ sont les interactions à *courant chargé*. Par contre l'interaction Z^0 -fermions est à *courant neutre*, sans charge électrique échangée. Les trois courants faibles sont évidemment invariants sous les transformations du groupe de la couleur. On pourra donc écrire

$$j_\mu^{+,-,0} = j_{(had.)\mu}^{+,-,0} + j_{(lept.)\mu}^{+,-,0}, \quad (4.115)$$

en séparant les contributions hadroniques (*had.*) et leptoniques (*lept.*).

La forme des courants chargés découle des informations suivantes:

- i. Seuls les fermions de Weyl gauche ψ_L^I participent à l'interaction faible à courant chargé. Autrement dit, $(T_r^\pm)_J^I = 0$.

- ii. Le courant hadronique chargé contient tous les termes permis par la conservation de la charge et de la couleur.
- iii. Le courant leptonique chargé conserve les *nombre leptoniques* de chaque génération (nombre leptonique électronique, muonique, du tau¹⁹).
- iv. La constante de couplage est universelle, aux angles de mélange entre générations près.

Ces informations sont expérimentales, sauf la troisième qui est une conséquence de l'absence de masse des neutrinos dans la version minimale du Modèle standard. En utilisant la notation des champs des quarks et leptons introduite dans les expressions (4.73), les courants chargés s'écrivent donc²⁰:

$$\begin{aligned}
 j_{(lept.)\mu}^+ &= \sum_{a=1}^3 \bar{\psi}_{EL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{NL}^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \bar{\psi}_E^{(a)} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_N^{(a)}, \\
 j_{(had.)\mu}^+ &= \sum_{a,b=1}^3 \sum_{i=1}^3 V^{ab} [\bar{\psi}_{DiL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{UL}^{(b)i}] = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 \sum_{i=1}^3 V^{ab} [\bar{\psi}_{Di}^{(a)} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_U^{(b)i}].
 \end{aligned}
 \tag{4.116}$$

Les nombres V^{ab} forment la matrice unitaire de *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*. Elle dépend de trois angles de mélange entre générations et d'une phase complexe, qui viole CP . On en déduit les règles de Feynman suivantes:

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 + \gamma_5)$$

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}} V^{ab} \gamma_\mu (1 + \gamma_5)$$

Puisque $W_\mu^+ = (W_\mu^-)^\dagger$, un W^- entrant au vertex est équivalent à un W^+ qui en sort. Et l'effet sur les règles de Feynman d'un renversement des orientations des trois lignes est uniquement de conjuguer l'élément de matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa: $V^{ab} \rightarrow (V^{ab})^*$.

La forme du courant neutre est plus compliquée. Sa caractéristique la plus importante est que l'interaction faible à courant neutre conserve la saveur des

¹⁹Par exemple, le nombre leptonique électronique vaut 1 pour l'électron et le neutrino électronique ν_e , -1 pour leurs antiparticules et 0 pour tous les autres quarks et leptons.

²⁰Nous supposons qu'il existe trois générations de quarks et leptons. S'il en existait N_g , on sommerait sur $a, b = 1, \dots, N_g$.

quarks: il n'y a pas de “*flavour changing neutral currents*” (FCNC). On obtient dans le Modèle standard:

$$\begin{aligned}
 j_{(lept.)\mu}^0 &= \frac{1}{\cos \theta_W} \sum_{a=1}^3 \left[C_{EL} \bar{\psi}_{EL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{EL}^{(a)} + C_{ER} \bar{\psi}_{ER}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{ER}^{(a)} + \frac{1}{2} \bar{\psi}_{NL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{NL}^{(a)} \right], \\
 j_{(had.)\mu}^0 &= \frac{1}{\cos \theta_W} \sum_{a=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left[C_{DL} \bar{\psi}_{DiL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{DL}^{(a)i} + C_{DR} \bar{\psi}_{DiR}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{DR}^{(a)i} \right. \\
 &\quad \left. + C_{UL} \bar{\psi}_{UiL}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{UL}^{(a)i} + C_{UR} \bar{\psi}_{UiR}^{(a)} \gamma_\mu \psi_{UR}^{(a)i} \right].
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

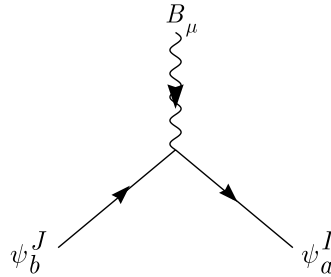
Cette expression dépend de l'angle de Weinberg θ_W . Les différentes constantes sont:

$$\begin{aligned}
 C_{EL} &= -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, & C_{ER} &= \sin^2 \theta_W, \\
 C_{DL} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W, & C_{DR} &= \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W, \\
 C_{UL} &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, & C_{UR} &= -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W.
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

Les règles de Feynman des interactions décrites par les expressions (4.114–4.118) peuvent être déduites de la prescription suivante. A l'interaction

$$V_J^I \left[C_L \bar{\psi}_{LI} \gamma_\mu \psi_L^J + C_R \bar{\psi}_{RI} \gamma_\mu \psi_R^J \right] B^\mu$$

on associe le vertex



Sa règle de Feynman est

$$iV_J^I [C_L \gamma_\mu P_L + C_R \gamma_\mu P_R]_{ab} = \frac{i}{2} V_J^I [(C_L + C_R)(\gamma_\mu)_{ab} + (C_L - C_R)(\gamma_\mu \gamma_5)_{ab}].$$

Références

Sur les symétries P , C et T et leur rôle en théorie quantique des champs (théorème CPT):

Streater et Wightman [19].

Sur l'interaction forte et la chromodynamique quantique:

Huang [5], chapitres 2 et 12; Halzen et Martin [8], chapitres 2 et 10; Aitchison et Hey [9], chapitre 9; Ynduráin [20].

Sur l'interaction faible:

Commins et Bucksbaum [21], Georgi [22]; Halzen et Martin [8], chapitres 12 et 13; Aitchison et Hey [9], 4ème partie.

Exercices

4.1 Ecrire la densité lagrangienne de la théorie de jauge suivante:

- groupe de jauge $U(1)$ avec champ de jauge A_μ ,
- un champ spinoriel de chiralité gauche ψ_L et de charge Q_L ,
- un champ spinoriel de chiralité droite λ_R et de charge Q_R ,
- un champ scalaire complexe de charge q .

Déterminer les conditions sur les charges qui permettent un terme de masse des champs spinoriels ou l'existence d'interactions de Yukawa. Déterminer toutes les règles de Feynman.

4.2 Répéter l'exercice précédent en demandant de plus que ψ_L et λ_R forment un spineur de Majorana. L'équation (4.24) est alors valable sous la forme $\lambda_R = (\psi_L)^c$. Indiquer la condition sur Q_L et Q_R que cette égalité implique.

4.3 Construire la densité lagrangienne de la théorie de jauge du groupe $SU(2)$ dans les deux cas suivants:

- un doublet réel de champs scalaires $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi^\dagger$;
- un doublet complexe de champs scalaires $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \neq \phi^\dagger$.

Un doublet se transforme dans la représentation bidimensionnelle **2** de $SU(2)$,

$$\delta\varphi = \frac{i}{2} \sum_{A=1}^3 \alpha^A \sigma^A \varphi, \quad \delta\phi = \frac{i}{2} \sum_{A=1}^3 \alpha^A \sigma^A \phi,$$

où σ^A désigne les trois matrices de Pauli et α^A les paramètres de la transformation infinitésimale. Les générateurs de $SU(2)$ pour la représentation **2** sont donc $T^A = \sigma^A/2$.

Chapitre 5

Applications

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques applications du formalisme perturbatif développé dans les chapitres précédents. L'objectif est à la fois de concrétiser les développements théoriques des premiers chapitres et d'introduire quelques concepts ou méthodes caractéristiques de la physique des particules. Les processus suivants seront successivement discutés:

- L'annihilation électron-positon (sect. 5.1): présentation détaillée d'un calcul simple de section efficace.
- La diffusion Compton, un exemple classique de processus électromagnétique mettant en évidence l'invariance de jauge d'un élément de matrice S impliquant des photons (sect. 5.2). La variante de la diffusion quark-gluon montre que la symétrie de jauge non abélienne requiert l'interaction à trois champs de jauge.
- Désintégrations du W^\pm et du Z^0 (sect. 5.3). Un exemple simple de désintégration en deux particules.
- Désintégration du muon (sect. 5.4), qui utilise le propagateur du champ massif de spin un et illustre le lien entre le Modèle standard et la théorie de Fermi de l'interaction faible. Calcul d'espace de phase de trois particules.
- La diffusion profondément inélastique et le modèle des partons (sect. 5.5): une excursion vers la description des hadrons en termes de quarks et gluons dans le domaine des processus à grands transferts d'impulsion ("*hard processes*"). Facteurs de forme et fonctions de structure.
- La désintégration en deux photons du boson de Higgs (sect. 5.6), un processus absent de l'ordre perturbatif le plus bas mais généré à l'ordre des diagrammes à une boucle. Introduction de la notion de densité lagrangienne effective.

5.1 Annihilation électron–positon

Nous allons calculer la section efficace du processus :

$$e^+e^- \longrightarrow \text{fermion} - \text{antifermion},$$

où le fermion de l'état final n'est pas un électron. Les particularités du processus $e^+e^- \longrightarrow e^+e^-$ (diffusion de Bhabha) seront évoquées plus loin. L'équation (3.99) donne l'expression de la section efficace différentielle en fonction de l'amplitude $\mathcal{M} = \langle k_1, k_2, in | i\tau | p_1, p_2, in \rangle$, qui est l'élément de matrice S réduit du processus. Nous allons calculer cette amplitude à l'ordre le plus bas de son développement perturbatif en puissances de la constante de couplage électromagnétique e . La première contribution apparaît à l'ordre e^2 . A cet ordre, la fonction de Green et l'élément de matrice S sont donnés par la contribution du diagramme unique de la figure 5.1, où F est un fermion de masse M et de charge eQ autre qu'un électron. Les lignes fermioniques sont orientées selon le sens du flot de charge de la particule: un positon d'impulsion p_2 dans l'état initial correspond à une ligne sortant du diagramme portant une impulsion $-p_2$ dans le sens de la ligne.

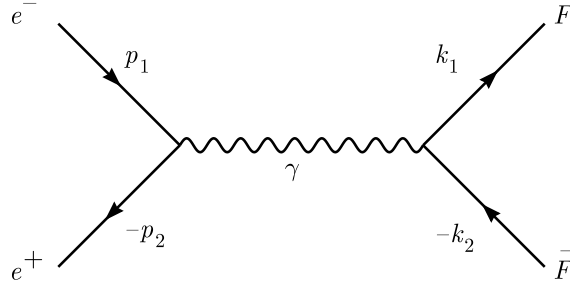


Fig. 5.1 Annihilation e^+e^- : diagramme d'ordre e^2

Bien que nous soyions avant tout intéressés au calcul de l'élément de matrice S , nous allons premièrement donner l'expression de la fonction de Green à l'ordre e^2 . Les règles de Feynman pour les fonctions de Green conduisent à l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
 G(p_1, p_2, k_1, k_2) = & (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
 & \cdot i^3 \frac{-\not{p}_2 + m}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} (-e\gamma^\mu) \frac{\not{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \cdot i^3 \frac{\not{k}_1 + M}{k_1^2 - M^2 + i\epsilon} (eQ\gamma^\nu) \frac{-\not{k}_2 + M}{k_2^2 - M^2 + i\epsilon} \\
 & \cdot \frac{-i}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \right).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Lors de l'écriture de G , il faut prendre garde à ordonner correctement le produit de matrices correspondant à chaque ligne fermionique. Les règles de Feynman

indiquent que l'ordre correct des facteurs est obtenu en commençant par la fin de chaque ligne et en la remontant dans le sens inverse de son orientation.

L'élément de matrice réduit $\tau = \langle k_1, k_2, in | i\tau | p_1, p_2, in \rangle$ est obtenu à partir de la fonction de Green dans l'espace des impulsions en remplaçant les propagateurs externes par les fonctions d'onde des spineurs. D'après la formule de réduction, il faut effectuer dans (5.1) les substitutions suivantes: pour l'état initial,

$$\begin{aligned} i \frac{\not{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} &\longrightarrow u^{(\alpha_1)}(p_1) && \text{(électron entrant),} \\ i \frac{-\not{p}_2 + m}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} &\longrightarrow \bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) && \text{(positon entrant),} \end{aligned}$$

et pour l'état final,

$$\begin{aligned} i \frac{\not{k}_1 + M}{k_1^2 - M^2 + i\epsilon} &\longrightarrow \bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1) && \text{(fermion F sortant),} \\ i \frac{-\not{k}_2 + M}{k_2^2 - M^2 + i\epsilon} &\longrightarrow v_F^{(\beta_2)}(k_2) && \text{(antifermion F sortant).} \end{aligned}$$

$\alpha_i = 1, 2$ et $\beta_j = 1, 2$ sont les polarisations des quatre particules dans le processus et l'indice F indique un spineur du fermion F de masse M . L'élément de matrice réduit τ s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \langle k_1, k_2, in | i\tau | p_1, p_2, in \rangle \\ &= -iQe^2 \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) \gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1) \gamma^\nu v_F^{(\beta_2)}(k_2) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les expressions (5.1) et (5.2) dépendent apparemment du choix de la jauge, par l'intermédiaire du terme du propagateur photonique contenant le paramètre λ . La fonction de Green, qui n'est pas une grandeur physique dépend clairement du choix de la jauge. Mais l'élément de matrice S , qui est une amplitude de probabilité et donc une quantité significative, ne dépend pas de λ : le terme en cause s'annule en utilisant l'équation de Dirac, dont les spineurs $u^{(\alpha)}(p)$ et $v^{(\beta)}(k)$ sont des solutions. En effet,

$$\begin{aligned} \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) \gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1) \right] (p_1 + p_2)_\mu &= \bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) (\not{p}_2 + m + \not{p}_1 - m) u^{(\alpha_1)}(p_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et le terme dépendant de λ du propagateur du photon ne contribue pas à \mathcal{M} : en général, tout élément de matrice S est invariant de jauge et donc indépendant de λ . Notez qu'il aurait été plus simple d'utiliser directement la jauge de Feynman $\lambda = 1$ dans laquelle ce terme est directement absent.

Dans l'amplitude \mathcal{M} , on doit prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Comme la quantité $(p_1 + p_2)^2 = s$, qui correspond au carré de l'énergie dans le centre de masse, n'est jamais nulle, la limite est triviale et on peut écrire:

$$\mathcal{M} = -iQe^2s^{-1} \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\gamma_\mu v_F^{(\beta_2)}(k_2) \right], \quad (5.3)$$

qui est l'expression finale de l'élément de matrice réduit $\langle k_1, k_2, in | i\tau | p_1, p_2, in \rangle$.

Il s'agit ensuite de calculer le carré de l'amplitude. Pour évaluer la section efficace de diffusion d'un état initial non polarisé, il faut également prendre la moyenne sur les états de polarisation de l'électron et du positon: chaque polarisation apparaît dans l'état initial avec la même probabilité. Ensuite, si l'on ne s'intéresse pas à détecter les polarisations des particules de l'état final, il faut sommer sur celles-ci. La section efficace non polarisée sera donc obtenue à partir de

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2=1,2} |\mathcal{M}|^2 \equiv \frac{1}{4} \sum_{Polar.} |\mathcal{M}|^2.$$

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2 e^4}{s^2} \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1)\gamma^\nu v^{(\alpha_2)}(p_2) \right] \\ &\quad \cdot \left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\gamma_\mu v_F^{(\beta_2)}(k_2) \right] \left[\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2)\gamma_\nu u_F^{(\beta_1)}(k_1) \right] \\ &= \frac{Q^2 e^4}{s^2} \text{Tr} \left\{ \left[v^{(\alpha_2)}(p_2)\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) \right] \gamma^\mu \left[u^{(\alpha_1)}(p_1)\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \gamma^\nu \right\} \\ &\quad \cdot \text{Tr} \left\{ \left[u_F^{(\beta_1)}(k_1)\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1) \right] \gamma_\mu \left[v_F^{(\beta_2)}(k_2)\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2) \right] \gamma_\nu \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{Polar.} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2 e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{\alpha_2} v^{(\alpha_2)}(p_2)\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) \right] \gamma^\mu \left[\sum_{\alpha_1} u^{(\alpha_1)}(p_1)\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \gamma^\nu \right\} \\ &\quad \cdot \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{\beta_1} u_F^{(\beta_1)}(k_1)\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1) \right] \gamma_\mu \left[\sum_{\beta_2} v_F^{(\beta_2)}(k_2)\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2) \right] \gamma_\nu \right\}. \end{aligned}$$

Les sommes sur les polarisations ont été évaluées dans le chapitre 1¹:

$$\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m}, \quad \sum_{\alpha} v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} - m}{2m}.$$

¹Equations (1.144).

En conséquence, il vient²

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{Polar.}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2 e^4}{4s^2} \frac{1}{16m^2 M^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] \\
&\quad \cdot \text{Tr}[(\not{k}_1 + M)\gamma_\mu(\not{k}_2 - M)\gamma_\nu] \\
&= \frac{4Q^2 e^4}{s^2} \frac{1}{16m^2 M^2} \left[2(p_1 k_1)(p_2 k_2) + 2(p_1 k_2)(p_2 k_1) \right. \\
&\quad \left. + 2M^2(p_1 p_2) + 2m^2(k_1 k_2) + 4m^2 M^2 \right].
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Cette expression peut être exprimée en fonction des variables de Mandelstam s , t et u , à l'aide des relations cinématiques suivantes:

$$\begin{aligned}
p_1 p_2 &= \frac{1}{2}s - m^2, & k_1 k_2 &= \frac{1}{2}s - M^2, \\
p_1 k_1 &= p_2 k_2 = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(m^2 + M^2), \\
p_1 k_2 &= p_2 k_1 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(m^2 + M^2).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Il vient alors:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Polar.}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4Q^2 e^4}{s^2} \frac{1}{16m^2 M^2} \left[\frac{1}{2}(t^2 + u^2) + 2s(m^2 + M^2) - (m^2 + M^2)^2 \right],$$

ou encore:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Polar.}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4Q^2 e^4}{s^2} \frac{1}{16m^2 M^2} \left[2(p_1 k_1)^2 + 2(p_1 k_2)^2 + s(m^2 + M^2) \right]. \tag{5.6}$$

Comme cette quantité est invariante de Lorentz, elle peut être calculée dans n'importe quel référentiel. Il est naturel de choisir celui du centre de masse dans lequel:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= -\vec{p}_2, & p_1^0 &= p_2^0 = \sqrt{s}/2, \\
\vec{k}_1 &= -\vec{k}_2, & k_1^0 &= k_2^0 = \sqrt{s}/2,
\end{aligned}$$

ainsi que³:

$$\begin{aligned}
p_1 k_1 &= \frac{s}{4} - \vec{p}_1 \cdot \vec{k}_1, & p_1 k_2 &= \frac{s}{4} + \vec{p}_1 \cdot \vec{k}_1, \\
|\vec{k}_1| &= \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}, & |\vec{p}_1| &= \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}.
\end{aligned}$$

En introduisant l'angle θ entre \vec{p}_1 et \vec{k}_1 , l'expression (5.6) devient:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Polar.}} |\mathcal{M}|^2 = Q^2 e^4 \frac{1}{16m^2 M^2} \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{s} + \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4M^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right]. \tag{5.7}$$

²Les résultats des traces sont donnés dans l'appendice A.

³Clairement, l'énergie dans le centre de masse \sqrt{s} est supérieure à $2M$ et $2m$ pour que le processus existe.

Cette expression ne dépend que de la direction de l'impulsion \vec{k}_1 , par l'intermédiaire de la variable θ .

L'expression (5.6) contient l'ensemble de l'information sur la dynamique du processus. Dans la section 3.4, nous avons établi la formule de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ en fonction de l'élément de matrice S , dans le référentiel du centre de masse:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{p}_1|} (16m^2 M^2) \frac{1}{4} \sum_{\text{Polar.}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\pi Q^2 \alpha^2}{2s} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{p}_1|} \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{s} + \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4M^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Le facteur $16m^2 M^2$ rend compte de la présence de quatre fermions dans le processus et la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} \quad (5.9)$$

caractérise l'intensité de l'interaction électromagnétique.

Pour obtenir la section efficace totale, il suffit d'intégrer sur la variable $-1 \leq \cos\theta \leq 1$:

$$\sigma = \frac{4}{3} \pi \frac{Q^2 \alpha^2}{s} \frac{\sqrt{1 - 4M^2/s}}{\sqrt{1 - 4m^2/s}} \left[1 + 2 \frac{m^2 + M^2}{s} + 4 \frac{m^2 M^2}{s^2} \right]. \quad (5.10)$$

Le facteur $[1 - 4M^2/s]^{1/2}$ contrôle le comportement de la section efficace au voisinage du seuil de production de la paire fermion-antifermion. La section efficace serait à l'évidence nulle pour $2m < \sqrt{s} < 2M$.

La masse de l'électron $m \sim .5$ MeV est en très bonne approximation négligeable par rapport à la masse de n'importe quel autre fermion: $M \geq m_\mu \sim 106$ MeV, la masse du muon. En négligeant $2m$ face à $\sqrt{s} \geq 2M$, les sections efficaces deviennent:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\pi Q^2 \alpha^2}{2s} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \left[1 + 4 \frac{M^2}{s} + \left(1 - \frac{4M^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right], \\ \sigma &= \frac{4}{3} \pi \frac{Q^2 \alpha^2}{s} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \left[1 + 2 \frac{M^2}{s} \right].\end{aligned}\quad (5.11)$$

Ces formules approximatives sont applicables à la production de paires leptoniques $\mu^+ \mu^-$ ou $\tau^+ \tau^-$, mais aussi pour des paires de quarks s , c , b , qui conduisent à des états finals hadroniques⁴. Lorsque l'énergie dans le centre de masse

⁴Le fait que chaque saveur de quark peut être produite en trois couleurs ajoute un facteur 3 à la section efficace.

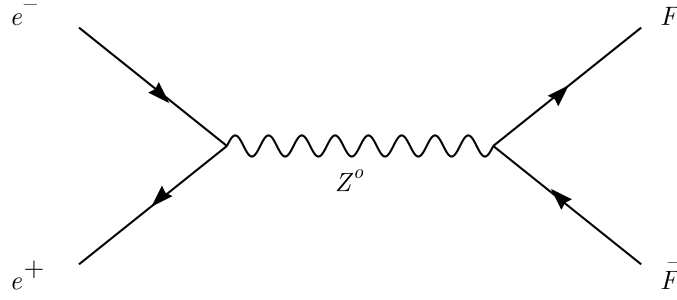


Fig. 5.2 Annihilation e^+e^- : contribution du Z^0

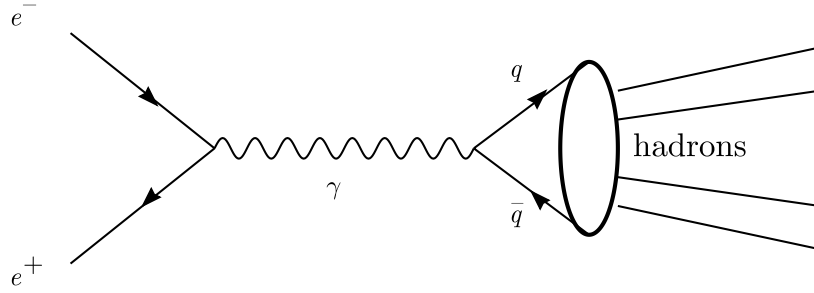


Fig. 5.3 Annihilation e^+e^- hadronique

est très supérieure au seuil de production, $\sqrt{s} \gg 2M$, elles deviennent,

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2}\pi \frac{Q^2\alpha^2}{s} [1 + \cos^2\theta], \quad \sigma = \frac{4}{3}\pi \frac{Q^2\alpha^2}{s}. \quad (5.12)$$

La section efficace décroît comme s^{-1} dans la limite de haute énergie dans le centre de masse.

Il est cependant illusoire d'utiliser ces résultats pour des valeurs de \sqrt{s} supérieures à ~ 40 GeV: l'annihilation e^+e^- y est dominée par la contribution du Z^0 , par l'intermédiaire du diagramme de la figure 5.2.

La section efficace (5.11) appliquée à

$$e^+e^- \longrightarrow \text{quark} - \text{antiquark}$$

peut être utilisée pour évaluer celle du processus inclusif

$$e^+e^- \longrightarrow \text{hadrons}.$$

Dans le modèle des partons, un processus élémentaire produisant un ou plusieurs quarks ou antiquarks mène avec probabilité unité à un état final comprenant des hadrons (fig. 5.3). La section efficace $\sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{hadrons})$ se calcule alors en additionnant celles des processus $e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}$ pour toutes les saveurs de quarks

q permises par l'énergie dans le centre de masse \sqrt{s} :

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{hadrons}) &= \sum_{\text{quarks } q_i} \sigma(e^+e^- \longrightarrow q_i\bar{q}_i) \\ &= \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{s}3 \sum_{u,d,s,\dots} Q_i^2 \sqrt{1 - \frac{4M_i^2}{s}} \left(1 + \frac{2M_i^2}{s}\right),\end{aligned}\quad (5.13)$$

la somme portant sur les quarks dont la masse M_i vérifie $2M_i \leq \sqrt{s}$. Le facteur 3 vient du fait que les quarks existent en trois couleurs: l'interaction électromagnétique n'étant pas sensible à la charge de couleur, chaque couleur de quark est un état final possible du processus, avec la même probabilité. La conservation de la couleur par l'interaction électromagnétique implique cependant que l'état final est un singlet de $SU(3)$. La couleur de l'antiquark est donc complètement déterminée par celle du quark de l'état final⁵.

Il est d'usage de normaliser $\sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{hadrons})$ en la rapportant à

$$\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

pour $\sqrt{s} \gg 2m_\mu$. On considère alors

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{u,d,s,\dots} Q_i^2 \sqrt{1 - 4M_i^2/s} \left(1 + 2M_i^2/s\right).$$

Pour \sqrt{s} suffisamment éloigné du seuil de production, $\sqrt{s} \gg 2M_i$, la contribution de chaque saveur de quark est simplement $3Q_i^2$.

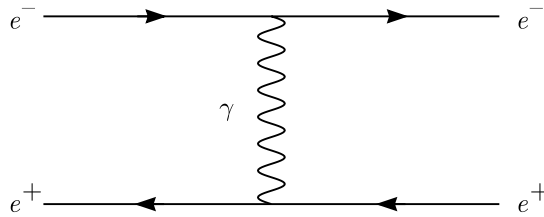


Fig. 5.4 Diffusion élastique e^+e^- : diagramme d'échange

Finalement, il faut remarquer que le calcul présenté dans cette section n'est pas valable pour le processus

$$e^+e^- \longrightarrow e^+e^-$$

(*diffusion de Bhabha*). L'amplitude de probabilité est en effet obtenue en ajoutant à la contribution du diagramme d'annihilation de la figure 5.1 celle du diagramme d'échange de la figure 5.4.

⁵Section 4.2, équation (4.76). On a donc un facteur 3 pour la couleur du quark, sans facteur supplémentaire pour celle de l'antiquark.

5.2 Diffusion Compton

Il s'agit du processus électromagnétique $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$, dont l'étude a permis de mettre en évidence le caractère corpusculaire du photon (Compton, 1923). Par extension, il s'agit aussi de la diffusion fermion–champ de jauge, dans une théorie non abélienne telle que la chromodynamique quantique.

5.2.1 Diffusion électron–photon

Les variables cinématiques du processus sont définies dans la figure 5.5, avec

$$k_i + p_i = k_f + p_f.$$

Les quadrivecteurs ϵ_i et ϵ_f décrivent les polarisations transverses des photons. Nous les avons définies au moyen des conditions invariantes de Lorentz⁶

$$\epsilon_i k_i = \epsilon_f k_f = \epsilon_i n = \epsilon_f n = 0,$$

le quadrivecteur n donnant “l'axe du temps” : $n^2 = 1$, $n^0 > 0$. Il va être judicieux de choisir

$$n = \frac{1}{m} p_i, \quad (m = \text{masse de l'électron}).$$

Dans ce cas,

$$\epsilon_i p_i = \epsilon_f p_i = 0, \quad (5.14)$$

un choix qui simplifiera les calculs. Dans le référentiel du laboratoire, $p_i = (m, \vec{0})$, il vient $\epsilon_{i,f} = (0, \vec{\epsilon}_{i,f})$, les vecteurs de polarisation n'ont pas de composante temporelle, et $\vec{\epsilon}_{i,f} \cdot \vec{k}_{i,f} = 0$.

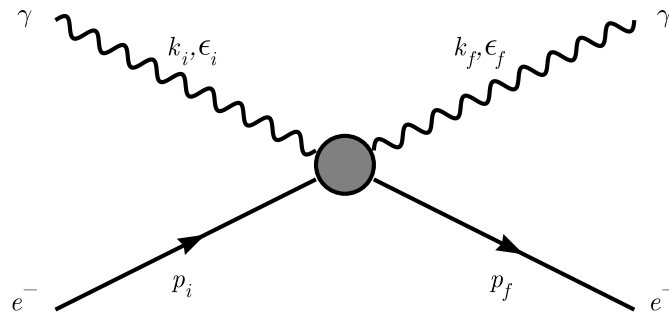


Fig. 5.5 Diffusion Compton: cinématique

A l'ordre le plus bas de l'interaction électromagnétique, deux diagrammes de Feynman contribuent à l'amplitude de probabilité de transition (fig. 5.6). Ils diffèrent par l'inversion de l'ordre des interactions le long de la ligne fermionique. Comme \mathcal{L}_I est un invariant de Lorentz contenant le produit de deux champs

⁶Chapitre 2, équations (2.105–2.109). Nous omettrons ici la dépendance en k de ces vecteurs.

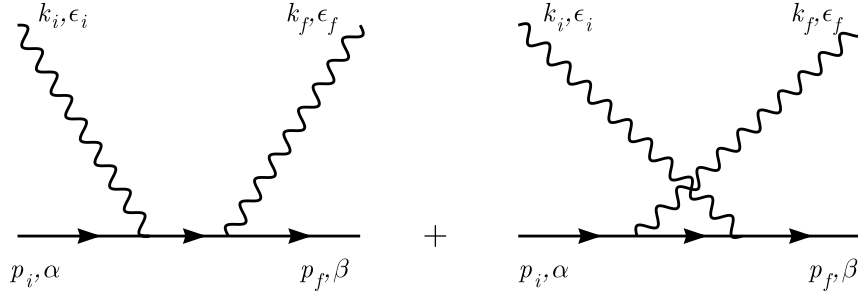


Fig. 5.6 Diffusion Compton: diagrammes d'ordre e^2

spinoriels, le signe relatif des deux contributions est positif. D'après les règles de Feynman, l'élément de matrice réduit s'écrit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &\equiv \langle k_f, \epsilon_f; p_f, in | i\tau | k_i, \epsilon_i; p_i, in \rangle \\
 &= i(-ie)^2 \bar{u}^{(\beta)}(p_f) \left[\not{\epsilon}_f \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}_i \right. \\
 &\quad \left. + \not{\epsilon}_i \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}_f \right] u^{(\alpha)}(p_i).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Les lignes fermioniques internes sont hors de la couche de masse:

$$\begin{aligned}
 (k_i + p_i)^2 - m^2 &= 2p_i k_i \neq 0, \\
 (k_f - p_i)^2 - m^2 &= -2p_i k_f \neq 0,
 \end{aligned}$$

et on peut directement poser $\epsilon = 0$ dans les dénominateurs. L'amplitude (5.15) est invariante sous la symétrie de croisement

$$(\epsilon_i, k_i) \longleftrightarrow (\epsilon_f, -k_f), \tag{5.16}$$

qui échange les photons des états initial et final.

L'expression (5.15) est de la forme

$$\mathcal{M} = \epsilon_i^\mu \epsilon_f^\nu A_{\mu\nu}.$$

Nous avons vu dans la section 2.4 qu'ajouter une composante longitudinale aux polarisations des champs de jauge,

$$\epsilon_{i,f} \longrightarrow \epsilon_{i,f} + \lambda k_{i,f}, \tag{5.17}$$

correspond à effectuer une transformation de jauge qui doit laisser la physique inchangée. Le tenseur $A_{\mu\nu}$ doit donc vérifier

$$k_i^\mu A_{\mu\nu} = 0 = k_f^\nu A_{\mu\nu}. \tag{5.18}$$

Pour vérifier par exemple que $k_i^\mu A_{\mu\nu}$ s'annule, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} (k_i + p_i + m) k_i u^{(\alpha)}(p_i) &= (k_i + p_i + m)(k_i + p_i - m) u^{(\alpha)}(p_i) \\ &= [(k_i + p_i)^2 - m^2] u^{(\alpha)}(p_i), \\ \bar{u}^{(\beta)}(p_f) k_i (p_i - k_f + m) &= \bar{u}^{(\beta)}(p_f) (k_i - p_f + m) (p_i - k_f + m) \\ &= -\bar{u}^{(\beta)}(p_f) (p_i - k_f - m) (p_i - k_f + m) \\ &= -\bar{u}^{(\beta)}(p_f) [(p_i - k_f)^2 - m^2], \end{aligned}$$

d'après l'équation de Dirac et la conservation d'énergie-impulsion.

Nous allons calculer la section efficace différentielle pour des polarisations ϵ_i et ϵ_f des photons fixées. Pour cela, il faut calculer le carré du module de l'amplitude \mathcal{M} , sommer sur la polarisation β de l'électron sortant et prendre la moyenne sur la polarisation α de l'électron initial:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} e^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 [\bar{u}^{(\beta)}(p_f) M u^{(\alpha)}(p_i)] [\bar{u}^{(\alpha)}(p_i) \bar{M} u^{(\beta)}(p_f)], \quad (5.19)$$

avec

$$\begin{aligned} M &= \not{\epsilon}_f \frac{k_i + p_i + m}{(k_i + p_i)^2 - m^2} \not{\epsilon}_i + \not{\epsilon}_i \frac{p_i - k_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\epsilon}_f, \\ \bar{M} &= \gamma^0 M^\dagger \gamma^0 = \not{\epsilon}_i \frac{k_i + p_i + m}{(k_i + p_i)^2 - m^2} \not{\epsilon}_f + \not{\epsilon}_f \frac{p_i - k_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\epsilon}_i. \end{aligned} \quad (5.20)$$

On peut également écrire:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} e^4 \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{\beta} u^{(\beta)}(p_f) \bar{u}^{(\beta)}(p_f) \right] M \left[\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p_i) \bar{u}^{(\alpha)}(p_i) \right] \bar{M} \right\}.$$

Un spineur $u^{(\alpha)}(p)$ vérifie [éq. (1.144)]

$$\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m},$$

et donc

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{8m^2} \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) M (\not{p}_i + m) \bar{M} \right].$$

Avec le choix de polarisations (5.14), il vient

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}_f (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{\epsilon}_i &= -\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_i + \not{k}_i - m), \\ \not{\epsilon}_i (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \not{\epsilon}_f &= -\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f (\not{p}_i - \not{k}_f - m), \end{aligned}$$

et, puisque $(\not{p}_i - m)(\not{p}_i + m) = p_i^2 - m^2 = 0$,

$$(\not{p}_f + m) M (\not{p}_i + m) \bar{M} = (\not{p}_f + m) \left[-\frac{\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i}{2p_i k_i} - \frac{\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f}{2p_i k_f} \right] (\not{p}_i + m) \bar{M}.$$

En répétant la même opération pour \overline{M} , on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{32m^2} \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \left(\frac{\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i}{p_i k_i} + \frac{\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f}{p_i k_f} \right) \right. \\ &\quad \cdot (\not{p}_i + m) \left(\frac{\not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f}{p_i k_i} + \frac{\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i}{p_i k_f} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Un calcul de trace sans intérêt particulier conduit à

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4m^2} \left[4(\epsilon_i \epsilon_f)^2 - 2 + \frac{p_i k_f}{p_i k_i} + \frac{p_i k_i}{p_i k_f} \right], \quad (5.22)$$

qui est l'expression à insérer dans la formule générale de la section efficace (3.99):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(k_i p_i)} (4m^2) \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\mathcal{M}|^2 dLips \\ &= \frac{e^4}{4(k_i p_i)} \left[4(\epsilon_i \epsilon_f)^2 - 2 + \frac{p_i k_f}{p_i k_i} + \frac{p_i k_i}{p_i k_f} \right] dLips. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Notez que le facteur $4m^2$ dans la formule de section efficace, qui est dû à la présence de deux électrons dans le processus, compense le dénominateur obtenu lors de la somme sur leurs polarisations: ces deux contributions dépendent uniquement du choix de normalisation des spineurs $u^{(\alpha)}(k)$; elles disparaissent évidemment de la probabilité.

Nous allons calculer la section efficace dans le référentiel du laboratoire où l'électron cible est au repos⁷: $p_i = (m, \vec{0})$. On a:

$$\begin{aligned} dLips &= \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0} \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2k_f^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} d\Omega k_f^0 dk_f^0 \theta(m + k_i^0 - k_f^0) \delta(2mk_i^0 - 2k_f^0[m + k_i^0(1 - \cos \theta)]) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 m k_i^0} d\Omega k_f^{02} dk_f^0 \delta\left(k_f^0 - k_i^0 \left[1 + \frac{k_i^0}{m}(1 - \cos \theta)\right]^{-1}\right). \end{aligned}$$

Dans ces égalités, $d\Omega$ est l'élément d'angle solide sous-tendu par le photon émis, d'impulsion \vec{k}_f , mesuré par rapport à l'impulsion \vec{k}_i du photon incident, et θ est l'angle de diffusion du photon:

$$\cos \theta = \frac{\vec{k}_i \cdot \vec{k}_f}{k_i^0 k_f^0}.$$

⁷En réalité, ceci signifie que l'impulsion du photon incident est suffisamment grande pour admettre que les électrons atomiques de la cible au repos dans le laboratoire sont eux-mêmes au repos.

La distribution de Dirac indique que

$$k_f^0 = |\vec{k}_f| = \frac{|\vec{k}_i|}{1 + \frac{|\vec{k}_i|}{m}(1 - \cos \theta)}, \quad (k_i^0 = |\vec{k}_i|). \quad (5.24)$$

Le maximum $k_f^0 = k_i^0$ (et $\vec{p}_f = 0$) est atteint lorsque $\theta = 0$, le minimum $k_f^0 = \frac{m}{m+2k_i^0} k_i^0$ (et $|\vec{p}_f| = \frac{2mk_i^0}{2k_i^0+m}$) lorsque $\theta = \pi$. La section efficace différentielle dans le référentiel du laboratoire devient finalement:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} \right)^2 \left[4(\epsilon_i\epsilon_f)^2 - 2 + \frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} + \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_f|} \right], \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (5.25)$$

C'est la *formule de Klein-Nishina*. L'énergie du photon émis y est donnée par l'expression (5.24), qui détermine la dépendance en θ de la section efficace.

5.2.2 Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)

Le processus de rayonnement électromagnétique par un électron se déplaçant dans le potentiel coulombien

$$A_0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|} \quad (5.26)$$

d'un noyau fixe (en $\vec{x} = \vec{0}$) de charge Ze peut être décrit au premier ordre de la théorie des perturbations à partir de l'amplitude de diffusion Compton (5.15). Pour passer de la diffusion Compton à la diffusion dans le potentiel $A_0(x)$, on remplace la fonction d'onde libre du photon incident, $e^{-ik_ix}\epsilon_{i\mu}(k_i)$, par le champ externe coulombien $A_\mu = (A_0(x), \vec{0})$. Puisque le champ externe n'est pas invariant sous les translations d'espace, l'élément de matrice S ne contiendra pas de facteur $(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_f - \vec{k})$: l'impulsion n'est pas conservée par l'interaction avec le potentiel externe. Il possédera par contre une contribution $2\pi\delta(p_i^0 - p_f^0 - k^0)$ conservant l'énergie. Comme la transformée de Fourier de A_0 est

$$A_0(x) = Ze \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q_0) e^{-iqx} \frac{1}{|\vec{q}|^2} = Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{1}{|\vec{q}|^2},$$

l'élément de matrice S à l'ordre le plus bas sera

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{-iZe^3}{|\vec{p}_f + \vec{k} - \vec{p}_i|^2} 2\pi \delta(p_i^0 - p_f^0 - k^0) \\ &\quad \cdot \bar{u}^{(\beta)}(p_f) \left[\not{\epsilon} \frac{\not{k} + \not{p}_f + m}{(k + p_f)^2 - m^2} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\not{p}_i - \not{k} + m}{(p_i - k)^2 - m^2} \not{\epsilon} \right] u^{(\alpha)}(p_i). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Il correspond aux diagrammes de Feynman de la figure 5.7, pour un photon émis d'impulsion k et polarisation ϵ .

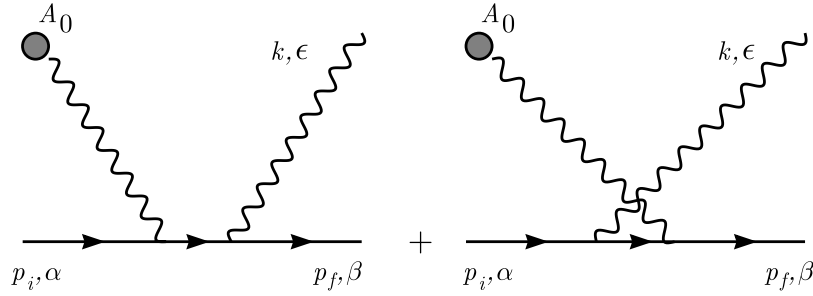


Fig. 5.7 Rayonnement de freinage: diagrammes d'ordre e^3

La section efficace obtenue à partir de l'élément de matrice S (5.27) est la *formule de Bethe-Heitler*⁸.

5.2.3 Quark–gluon \longrightarrow quark–gluon

Le processus d'interaction forte

$$Q G \longrightarrow Q G \quad (Q = \text{quark}, G = \text{gluon})$$

est le pendant pour la chromodynamique quantique de la diffusion Compton électron–photon. Il contribue⁹ par exemple à la production de deux jets hadroniques dans une collision proton–proton ou proton–antiproton. Sa description diffère cependant en un point essentiel de celle de la diffusion Compton: la chromodynamique quantique est une théorie de jauge non abélienne et l'interaction de jauge trilineaire¹⁰ intervient à l'ordre perturbatif le plus bas.

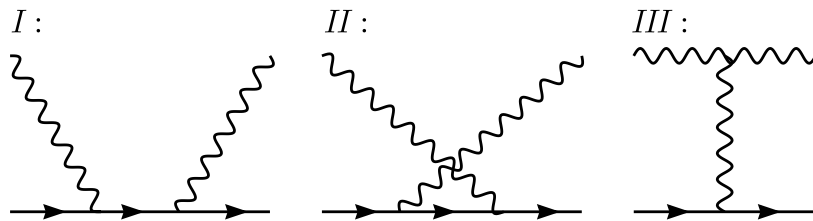


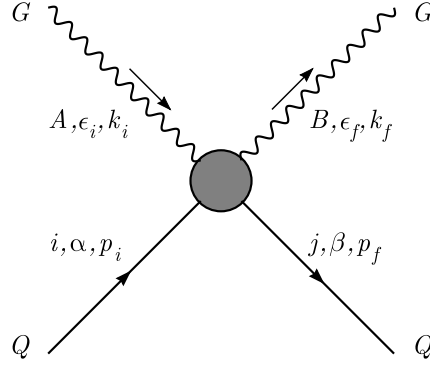
Fig. 5.8 $QG \longrightarrow QG$: diagrammes d'ordre g_s^2

À l'ordre g_s^2 de la chromodynamique quantique, trois diagrammes de Feynman contribuent à l'élément de matrice S ; ils sont représentés dans la figure 5.8. La somme \mathcal{M}_{I+II} des deux premiers diagrammes est similaire à celle obtenue pour la diffusion Compton, la seule différence résidant dans la règle de Feynman du

⁸Voir par exemple Itzykson et Zuber [1], paragraphe 5.2.4.

⁹Ou le processus $Q\bar{Q} \rightarrow GG$ relié par croisement.

¹⁰Sa règle de Feynman a été établie dans la section 4.3.


Fig. 5.9 $QG \longrightarrow QG$: cinématique

vertex quark–gluon¹¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{I+II} = & -ig_s^2 \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \left[(T_3^B T_3^A)_i^j \not{\epsilon}_f \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}_i \right. \\ & \left. + (T_3^A T_3^B)_i^j \not{\epsilon}_i \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}_f \right] u^{(\alpha)i}(p_i). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Les variables cinématiques et les indices de couleur i, j, A et B sont définis dans la figure 5.9,

$$p_i + k_i = p_f + k_f,$$

m est la masse du quark et, comme précédemment, on choisit des vecteurs de polarisation vérifiant

$$\epsilon_i k_i = \epsilon_f k_f = \epsilon_i p_i = \epsilon_f p_i = 0.$$

En utilisant la règle de Feynman (4.96) et la jauge de Feynman pour le propagateur du gluon¹², l'amplitude correspondant au troisième diagramme de la figure 5.8 est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{III} = & \frac{g_s^2}{2} f^{ABC} (T_3^C)_i^j \frac{1}{k_i k_f} \\ & \cdot \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \left[2(k_i \epsilon_f) \not{\epsilon}_i + 2(k_f \epsilon_i) \not{\epsilon}_f - (\epsilon_i \epsilon_f)(\not{k}_i + \not{k}_f) \right] u^{(\alpha)i}(p_i). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les amplitudes \mathcal{M}_{I+II} et \mathcal{M}_{III} possèdent comme il se doit la symétrie de croisement

$$(\epsilon_i, k_i, A) \longleftrightarrow (\epsilon_f, -k_f, B),$$

qui échange les gluons incident et sortant¹³. L'élément de matrice S réduit du processus sera ensuite donné par la somme

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{I+II} + \mathcal{M}_{III}. \quad (5.30)$$

¹¹Section 4.2.

¹²Le résultat est indépendant de la jauge: nous calculons un élément de matrice S .

¹³Les constantes de structure sont antisymétriques: $f^{ABC} = -f^{BAC}$.

Comme dans le cas de la diffusion Compton ci-dessus, on peut vérifier l'invariance de jauge de la théorie en remplaçant l'une des polarisations ϵ_i ou ϵ_f par l'impulsion du gluon correspondant. Par exemple:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{I+II}|_{\epsilon_i \rightarrow k_i} &= ig_s^2 \left([T_{\mathbf{3}}^A, T_{\mathbf{3}}^B] \right)_i^j \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \not{\epsilon}_f u^{(\alpha)i}(p_i), \\ \mathcal{M}_{III}|_{\epsilon_i \rightarrow k_i} &= g_s^2 f^{ABC} (T_{\mathbf{3}}^C)_i^j \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \not{\epsilon}_f u^{(\alpha)i}(p_i).\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise $\bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \not{k}_f u^{(\alpha)i}(p_i) = \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) [\not{p}_i - m + \not{k}_i - \not{p}_f + m] u^{(\alpha)i}(p_i) = \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \not{k}_i u^{(\alpha)i}(p_i)$. Cependant, comme $[T_{\mathbf{3}}^A, T_{\mathbf{3}}^B] = if^{ABC} T_{\mathbf{3}}^C$,

$$\mathcal{M}|_{\epsilon_i \rightarrow k_i} = \mathcal{M}_{I+II}|_{\epsilon_i \rightarrow k_i} + \mathcal{M}_{III}|_{\epsilon_i \rightarrow k_i} = 0,$$

et \mathcal{M} est invariant sous la transformation de jauge $\epsilon_i \rightarrow \epsilon_i + \lambda k_i$, pour tout nombre λ . Par symétrie de croisement, le même résultat s'applique à la transformation $\epsilon_f \rightarrow \epsilon_f + \lambda k_f$. L'invariance de jauge exige donc la présence de l'interaction à trois gluons, un fait déjà observé lors de la dérivation de la densité lagrangienne, dans la section 1.5.

L'amplitude \mathcal{M} peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{i}{4} g_s^2 \{T_{\mathbf{3}}^A, T_{\mathbf{3}}^B\}_i^j \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \left[\frac{\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i}{p_i k_i} + \frac{\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f}{p_i k_f} \right] u^{(\alpha)i}(p_i) \\ &+ \frac{1}{4} g_s^2 f^{ABC} (T_{\mathbf{3}}^C)_i^j \bar{u}_j^{(\beta)}(p_f) \left[\frac{\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i}{p_i k_i} - \frac{\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f}{p_i k_f} \right. \\ &\left. + \frac{4}{k_i k_f} \left((k_i \epsilon_f) \not{\epsilon}_i + (k_f \epsilon_i) \not{\epsilon}_f - (\epsilon_i \epsilon_f) \not{k}_i \right) \right] u^{(\alpha)i}(p_i).\end{aligned}$$

Au facteur $g_s^2 \{T_{\mathbf{3}}^A, T_{\mathbf{3}}^B\}_i^j$ près, la première ligne est identique à l'amplitude obtenue lors de la description de la diffusion Compton. La nature non abélienne de la théorie est présente par les termes proportionnels aux constantes de structure f^{ABC} .

La section efficace est obtenue en calculant tout d'abord

$$\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{8} \sum_{A,B=1}^8 \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_i, \epsilon_f} |\mathcal{M}|^2,$$

en moyennant sur la couleur i et la polarisation α du quark initial, en moyennant sur la couleur A et la polarisation ϵ_i du gluon initial, en sommant sur les couleurs j et B et sur les polarisations β et ϵ_f des particules de l'état final. Cette opération

introduit les *facteurs de couleur* suivants:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{A,B=1}^8 \{T_3^A, T_3^B\}_i^j \{T_3^A, T_3^B\}_j^i &= 2 \sum_{A,B=1}^8 \text{Tr}(T_3^A T_3^B T_3^A T_3^B + T_3^A T_3^A T_3^B T_3^B) \\
&= 2 \sum_{A,B=1}^8 \text{Tr}(2T_3^A T_3^A T_3^B T_3^B + i \sum_{C=1}^8 f^{ABC} T_3^A T_3^B T_3^C), \\
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{A,B,C=1}^8 \{T_3^A, T_3^B\}_i^j f^{ABC} (T_3^C)_j^i &= 0, \\
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{A,B,C,D=1}^8 f^{ABC} (T_3^C)_j^i f^{ABD} (T_3^D)_i^j &= \sum_{A,B,C,D=1}^8 f^{ABC} f^{ABD} \text{Tr}(T_3^C T_3^D).
\end{aligned}$$

Les générateurs de $SU(3)$ vérifient:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(T_3^C T_3^D) &= \frac{1}{2} \delta^{CD} \quad (\text{normalisation, choix arbitraire}), \\
\sum_{C,D=1}^8 f^{ACD} f^{BCD} &= 3\delta^{AB}, \quad \sum_{A=1}^8 (T_3^A T_3^A)_j^i = \frac{4}{3} \delta_j^i, \\
f^{ABC} &= -2i \text{Tr}(T_3^A [T_3^B, T_3^C]).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{A,B=1}^8 \{T_3^A, T_3^B\}_i^j \{T_3^A, T_3^B\}_j^i &= \frac{28}{3}, \\
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{A,B=1}^8 f^{ABC} (T_3^C)_j^i f^{ABD} (T_3^D)_i^j &= 12.
\end{aligned}$$

Les facteurs de couleur de ce type sont caractéristiques des calculs de chromodynamique quantique; ils se calculent en général à partir des égalités (5.31).

5.3 Désintégrations du W^\pm et du Z^0

Dans le Modèle standard des interactions électrofaibles, les bosons de jauge W^\pm et Z^0 possèdent une interaction avec un courant fermionique qui permet leur désintégration en un fermion (quark ou lepton) et un antifermion. Cette interaction découle du principe d'invariance sous les transformations du groupe de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ qui caractérise l'interaction électrofaible¹⁴. Sa forme a été présentée dans la section 4.5.

La règle de Feynman pour l'interaction du W^\pm et des leptons peut être reconstituée à partir des informations suivantes. Premièrement, il s'agit d'une

¹⁴Section 1.5 et chapitre 8.

interaction de jauge ne faisant intervenir que les fermions de chiralité gauche: facteur $\gamma^\mu P_L = \frac{1}{2}\gamma^\mu(I + \gamma_5)$. Ensuite, elle conserve les trois nombres leptoniques associés à chaque génération de quarks-leptons. Enfin, sa force est universelle, caractérisée par la constante de couplage faible

$$\frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} = \sqrt{2}[\sqrt{2}G_F]^{\frac{1}{2}}M,$$

θ_W étant l'angle de Weinberg, G_F la constante de Fermi et M la masse du W^\pm . La règle de Feynman pour chaque interaction entre W^\pm et leptons est donc

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(I + \gamma_5).$$

La seule modification qui intervient dans l'interaction entre W^\pm et quarks est l'existence de mélange entre générations: il s'ajoute un élément de matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, V^{ab} .

5.3.1 Désintégration $W^- \longrightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$

Le lepton chargé l^- et son antineutrino $\bar{\nu}_\ell$ peuvent appartenir à n'importe quelle génération. Il y a donc trois processus

$$W^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e, \quad \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad \tau^- \bar{\nu}_\tau.$$

Comme l'interaction est universelle, ces processus ne diffèrent que par les masses des leptons, qui sont négligeables face à celle du boson W .

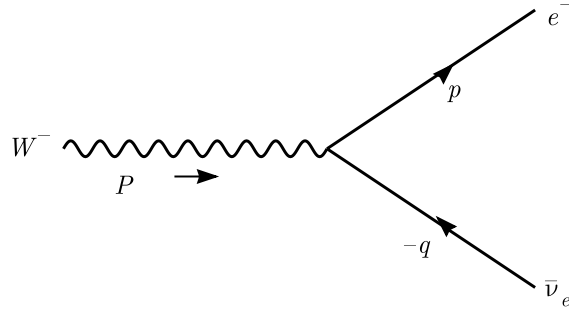
Nous utiliserons la notation suivante:

- W^- : masse M , polarisation $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$, impulsion P ;
- ℓ^- : masse m , polarisation α , impulsion p ;
- $\bar{\nu}$: masse m_ν , polarisation β , impulsion q .

Par conservation d'impulsion, $P = p + q$. La masse du neutrino n'est introduite que comme paramètre intermédiaire, afin de pouvoir utiliser dans le calcul les normalisations des spineurs introduites dans le paragraphe 1.4.2, qui n'ont de sens que pour des fermions massifs. Les grandeurs physiques ne dépendant pas du choix des normalisations, il n'y a pas de difficulté à poser $m_\nu = 0$ dans ces quantités.

A l'ordre le plus bas dans la constante de couplage g , l'élément de matrice S réduit est obtenu à partir du diagramme de Feynman de la figure 5.10:

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu^{(\kappa)} \bar{u}_{(\ell)}^{(\alpha)}(p) \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (I + \gamma_5) v_{(\nu)}^{(\beta)}(q). \quad (5.32)$$

**Fig. 5.10** Désintégration leptonique du W^- à l'ordre g

En sommant sur les polarisations α et β à l'aide de l'équation (1.144), il vient

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{8} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} \text{Tr} \left[\frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\mu (I + \gamma_5) \frac{\not{q} - m_\nu}{2m_\nu} \gamma^\nu (I + \gamma_5) \right]. \quad (5.33)$$

Dans cette expression apparaît le rôle joué par le paramètre m_ν , au dénominateur. Puisque

$$(I + \gamma_5)(\not{q} - m_\nu)\gamma^\nu(I + \gamma_5) = 2\not{q}\gamma^\nu(I + \gamma_5),$$

l'expression (5.33) se simplifie:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1,2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{4} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} \frac{1}{4mm_\nu} \text{Tr} [\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu (I + \gamma_5)] \\ &= g^2 \frac{1}{4mm_\nu} \left[2(\epsilon^{(\kappa)} p)(\epsilon^{(\kappa)} q) - (\epsilon^{(\kappa)} \epsilon^{(\kappa)})(pq) - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} p_\rho q_\sigma \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

le dernier terme, qui est la contribution de γ_5 à la trace, étant nul. Cette expression décrit la désintégration d'un W^- de polarisation $\epsilon^{(\kappa)}$. Pour un W^- non polarisé, la moyenne sur les trois polarisations κ s'effectue à l'aide de¹⁵:

$$\frac{1}{3} \sum_{\kappa=1}^3 \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} = -\frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} \right).$$

La probabilité de transition est alors donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \kappa} |\mathcal{M}|^2 &= -\frac{g^2}{12} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} \right) \frac{1}{4mm_\nu} \text{Tr} [\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu] \\ &= \frac{g^2}{3} \frac{1}{4mm_\nu} \left[(pq) + 2 \frac{(Pp)(Pq)}{M^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Puisque $P = p + q$, la cinématique impose les relations

$$\begin{aligned} Pp &= m^2 + pq, & Pq &= m_\nu^2 + pq, \\ pq &= \frac{1}{2}(M^2 - m^2 - m_\nu^2). \end{aligned}$$

¹⁵Equation (4.105).

D'après l'expression générale pour la largeur de désintégration en deux particules (3.110),

$$\begin{aligned}\Gamma_{\ell\bar{\nu}} &= \frac{1}{16\pi M^3} \sqrt{\Delta(M^2, m^2, m_\nu^2)} 4mm_\nu \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \kappa} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{g^2}{48\pi M^3} \sqrt{\Delta(M^2, m^2, m_\nu^2)} \left[pq + 2 \frac{(Pp)(Pq)}{M^2} \right].\end{aligned}\quad (5.36)$$

On peut ici poser $m_\nu = 0$ sans difficulté pour obtenir finalement

$$\Gamma_{\ell\bar{\nu}} = \frac{g^2 M}{48\pi} \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m^2}{2M^2}\right). \quad (5.37)$$

La masse du lepton peut certainement être négligée face à M :

$$\Gamma_{\ell\bar{\nu}} = \frac{g^2 M}{48\pi} = \frac{G_F M^3}{6\sqrt{2}\pi} \simeq 4.37 \times 10^{-7} \text{ GeV}^{-2} M^3, \quad (5.38)$$

en introduisant la constante de Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M^2}, \quad G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

En fait, dans l'expression (5.38), seul le facteur $(48\pi)^{-1}$ n'est pas trivial: la largeur a les unités d'une masse et la seule masse dans le problème est M , l'amplitude est d'ordre g , il suit donc que $\Gamma_{\ell\bar{\nu}} = Cg^2 M$, C étant un nombre dont la valeur est fixée par le calcul de l'amplitude. Avec $M = 80.4 \text{ GeV}$, il vient

$$\Gamma_{\ell\bar{\nu}} = .23 \text{ GeV},$$

pour chaque mode leptonique $\ell\bar{\nu}$. La contribution totale des trois modes $e^-\bar{\nu}_e$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu$ et $\tau^-\bar{\nu}_\tau$ à la largeur du W^- est donc

$$\Gamma_{lept.} = .68 \text{ GeV}.$$

5.3.2 Désintégration $W^- \longrightarrow D_a \bar{U}_b$

La désintégration de W^- en un quark de charge $-1/3$ et un antiquark de charge $-2/3$ comprend six modes permis par la cinématique: $D_a = (d, s, b)$ et $\bar{U}_b = (\bar{u}, \bar{c})$. Il y a deux différences avec les processus leptoniques étudiés ci-dessus. Premièrement, l'amplitude fait intervenir l'élément V^{ab} de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Deuxièmement, chaque quark existe en trois couleurs, ce qui multiplie par trois le nombre d'états finals ouverts à la désintégration. En négligeant la masse des quarks face à M , la largeur de chaque mode est donc donnée par l'expression (5.38), multipliée par $3|V^{ab}|^2$:

$$\Gamma_{ab} = 3|V^{ab}|^2 \frac{G_F M^3}{6\sqrt{2}\pi}. \quad (5.39)$$

Les valeurs expérimentales des éléments de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa indiquent que les modes $d\bar{c}$, $s\bar{u}$, $b\bar{u}$ et $b\bar{c}$ qui mélangent les générations sont très nettement dominés par $d\bar{u}$ et $s\bar{c}$. À l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, tous les états finals hadroniques sont obtenus à partir du processus élémentaire $W^- \rightarrow D_a \bar{U}_b$. La largeur hadronique totale est donc

$$\Gamma_{hadr.} = \sum_{a=1,2,3} \sum_{b=1,2} \Gamma_{ab} = 6 \frac{G_F M^3}{6\sqrt{2}\pi}, \quad (5.40)$$

puisque

$$\sum_{a=1,2,3} |V^{ab}|^2 = 1$$

par unitarité de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (qui est une conséquence de l'existence de trois générations de quarks seulement). Pour $M = 80.4$ GeV, d'après (5.38),

$$\Gamma_{hadr.} = 1.36 \text{ GeV}. \quad (5.41)$$

5.3.3 Largeur totale, rapports de branchement

À l'ordre g^2 (ou G_F), les modes $\ell\bar{\nu}_\ell$ et $D_a \bar{U}_b$ sont les seules contributions à la désintégration du W^- , étant entendu que les quarks conduisent avec probabilité unité à des états finals hadroniques. La largeur totale de désintégration de W^- est

$$\Gamma = \Gamma_{lept.} + \Gamma_{hadr.} = 9 \frac{G_F M^3}{6\sqrt{2}\pi} = 2.05 \text{ GeV}, \quad (5.42)$$

à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations. Cette valeur est à comparer avec la valeur expérimentale [49]

$$\Gamma_{exp.} = 2.12 \pm .05 \text{ GeV}.$$

Le rapport de branchement de chacun des trois modes leptoniques $e^- \bar{\nu}_e$, $\mu^- \bar{\nu}_\mu$ et $\tau^- \bar{\nu}_\tau$ est

$$B = \frac{\Gamma_{\ell\bar{\nu}}}{\Gamma} = \frac{1}{9} \simeq 11\%, \quad (5.43)$$

les valeurs expérimentales étant [49]

$$\begin{array}{ll} e^- \bar{\nu}_e : & B_{exp.} = 10.66 \pm .20 \%, \\ \mu^- \bar{\nu}_\mu : & B_{exp.} = 10.49 \pm .29 \%, \\ \tau^- \bar{\nu}_\tau : & B_{exp.} = 10.4 \pm .4 \%. \end{array}$$

5.3.4 Désintégration du Z^0

Dans le Modèle standard, Z^0 se désintègre de manière très dominante en $f\bar{f}$, f étant n'importe quel quark ou lepton de masse inférieure à $M_Z/2$. Ces modes de

désintégration apparaissent à l'ordre le plus bas (g^2) de la théorie des perturbations. La règle de Feynman du vertex $Z^0 f \bar{f}$ a été discutée dans la section 4.5. Par rapport à l'interaction du W^\pm utilisée ci-dessus, deux différences principales sont à relever: l'interaction de jauge du Z^0 fait intervenir les composantes de chiralités gauche et droite de chaque fermion, l'exception étant le neutrino dont seule la composante gauche apparaît. D'autre part, il n'y a pas de mélange entre générations, pas de "courants neutres à changement de saveur"¹⁶. Il n'y a donc pas d'interaction $Z^0 U_a \bar{U}_b$ ou $Z^0 D_a \bar{D}_b$, avec $a \neq b$.

La règle de Feynman pour le vertex $Z^0 f \bar{f}$ est de la forme

$$\frac{ig}{\cos \theta_W} \gamma^\mu \left[C_L \frac{I + \gamma_5}{2} + C_R \frac{I - \gamma_5}{2} \right].$$

Les coefficients C_L et C_R dépendent du fermion f (lepton chargé, neutrino, quark de charge $2/3$ ou $-1/3$). Ils ne dépendent cependant pas de la génération à laquelle f appartient. Leurs valeurs sont complètement déterminées dans le Modèle standard et sont données dans les expressions (4.117) et (4.118).

A l'ordre g , l'amplitude de la désintégration $Z^0 \rightarrow f \bar{f}$ est

$$\mathcal{M} = \frac{ig}{\cos \theta_W} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu \left[C_L \frac{I + \gamma_5}{2} + C_R \frac{I - \gamma_5}{2} \right] v^{(\beta)}(q). \quad (5.44)$$

La notation est la suivante:

Z^0 : impulsion P , polarisation $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$, masse M_Z ;

f : impulsion p , polarisation α , masse m ;

\bar{f} : impulsion q , polarisation β , masse m .

Et $P = p + q$. En sommant sur les polarisations des fermions, on arrive à

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p} + m) \gamma^\mu \left[C_L \frac{I + \gamma_5}{2} + C_R \frac{I - \gamma_5}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot (\not{q} - m) \gamma^\nu \left[C_L \frac{I + \gamma_5}{2} + C_R \frac{I - \gamma_5}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

La moyenne sur la polarisation du Z^0 [à l'aide de l'équation (4.105)] et le calcul de la trace conduisent à:

$$\frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \kappa} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4g^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{1}{4m^2} \left[\frac{1}{2} (C_L^2 + C_R^2) \left(pq + 2 \frac{(Pp)(Pq)}{M_Z^2} \right) + 3 C_L C_R m^2 \right]. \quad (5.46)$$

Comme

$$pq + 2 \frac{(Pp)(Pq)}{M_Z^2} = M_Z^2 - m^2,$$

¹⁶ "Flavour changing neutral currents" (FCNC).

il vient finalement

$$\frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \kappa} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2g^2 M_Z^2}{3 \cos^2 \theta_W} \frac{1}{4m^2} \left[(C_L^2 + C_R^2) \left(1 - \frac{m^2}{M_Z^2}\right) + 6C_L C_R \frac{m^2}{M_Z^2} \right]. \quad (5.47)$$

D'après (3.110), la largeur de désintégration s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma_{f\bar{f}} &= \frac{1}{16\pi M_Z^3} \sqrt{\Delta(M_Z^2, m^2, m^2)} 4m^2 \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \kappa} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{g^2 M_Z}{24\pi \cos^2 \theta_W} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M_Z^2}} \left[(C_L^2 + C_R^2) \left(1 - \frac{m^2}{M_Z^2}\right) + 6C_L C_R \frac{m^2}{M_Z^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Comme $m \ll M_Z$, on peut écrire en bonne approximation

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \frac{g^2 M_Z}{24\pi \cos^2 \theta_W} (C_L^2 + C_R^2) = \frac{G_F M_Z^3}{3\sqrt{2}\pi} (C_L^2 + C_R^2). \quad (5.49)$$

La dernière égalité suit de $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$, avec de plus

$$M_W = M_Z \cos \theta_W$$

dans le Modèle standard (à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations)¹⁷. L'expression (5.49) s'applique directement aux désintégrations leptoniques. Avec $M_Z = 91.2$ GeV, $\sin^2 \theta_W = .231$ [49], on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{\ell\bar{\ell}} &= .08 \text{ GeV}, \quad \ell = e, \mu, \tau, \\ \Gamma_{invisible} &= \sum_{f=\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} \Gamma_{f\bar{f}} = 3\Gamma_{\nu_e \bar{\nu}_e} = .50 \text{ GeV}, \end{aligned}$$

La quantité $\Gamma_{invisible}$ rassemble les modes indétectables, l'état final ne contenant que des neutrinos. La largeur de désintégration hadronique est obtenue en sommant sur les trois couleurs et les cinq saveurs de quarks (u, d, s, c, b) permises dans l'état final. Avec les valeurs appropriées des coefficients C_L et C_R , on trouve:

$$\Gamma_{hadr.} = 1.68 \text{ GeV},$$

si bien que la largeur totale calculée à l'ordre le plus bas en théorie des perturbations devient

$$\Gamma_Z = 2.42 \text{ GeV}.$$

La valeur expérimentale est [49] $\Gamma_Z = 2.4952 \pm .0026$ GeV. Pour les rapports de branchement, les valeurs entre parenthèses étant expérimentales:

$$\begin{aligned} B_{\ell\bar{\ell}} &= 3.5 \%, \quad \ell = e, \mu, \tau, & (3.3688 \pm .0026 \%), \\ B_{invisible} &= 21 \%, & (20.02 \pm .06 \%), \\ B_{hadr.} &= 69 \%, & (69.89 \pm .07 \%). \end{aligned}$$

¹⁷Chapitre 8.

5.4 Désintégration du muon

La désintégration du muon,

$$\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu,$$

est l'exemple le plus simple de désintégration β , la manifestation la plus courante de l'interaction faible. A l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations (g^2), l'amplitude de probabilité du processus est donnée par le diagramme de Feynman représenté dans la figure 5.11. L'amplitude fait appel au propagateur du champ de jauge massif W obtenu dans la section 4.4. Et le calcul de la largeur de désintégration comprend une intégration sur un espace de phase à trois particules.

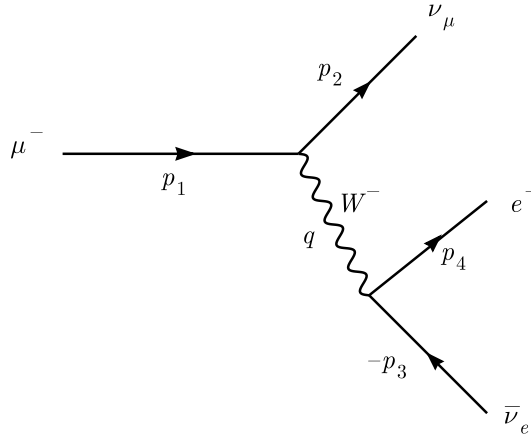


Fig. 5.11 Désintégration du muon: diagramme d'ordre g^2

Les règles de Feynman de l'interaction faible à courant chargé (sect. 4.5) et du champ massif de spin un conduisent à l'amplitude suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{g^2}{8} \left[\bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2) \gamma^\rho (I + \gamma_5) u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1) \right] \frac{-i}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\rho\sigma} - \frac{q_\rho q_\sigma}{M^2} \right) \\ & \cdot \left[\bar{u}_e^{(\alpha_4)}(p_4) \gamma^\sigma (I + \gamma_5) v_{\bar{\nu}}^{(\alpha_3)}(p_3) \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

M est la masse du W et les polarisations de μ^- , ν_μ , $\bar{\nu}_e$ et e^- sont respectivement α_1 , α_2 , α_3 et α_4 . Par conservation d'impulsion à chaque vertex,

$$q = p_1 - p_2 = p_3 + p_4.$$

Avant de calculer le carré de l'amplitude, il convient de simplifier cette expression: le second terme du propagateur massif peut être modifié à l'aide de l'équation de Dirac. Considérons par exemple le terme

$$J \equiv \bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2) \not{q} (I + \gamma_5) u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1).$$

Comme $q = p_1 - p_2$, cette expression peut s'écrire

$$J = \bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2) (I - \gamma_5) \not{p}_1 u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1) - \bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2) \not{p}_2 (I + \gamma_5) u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1).$$

Le neutrino étant de masse nulle, l'équation de Dirac s'écrit

$$(\not{p}_1 - m_\mu) u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1) = 0, \quad \bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2) \not{p}_2 = 0$$

(m_μ : masse du muon). En conséquence,

$$J = m_\mu \bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2)(I - \gamma_5)u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1).$$

Une manipulation similaire peut être appliquée au terme proportionnel à q_σ dans l'amplitude. On arrive ainsi à:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{ig^2}{8(q^2 - M^2)} \left\{ [\bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\rho(I + \gamma_5)u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1)][\bar{u}_e^{(\alpha_4)}(p_4)\gamma_\rho(I + \gamma_5)v_\nu^{(\alpha_3)}(p_3)] \right. \\ & \left. - \frac{m_\mu m_e}{M^2} [\bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2)(I - \gamma_5)u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1)][\bar{u}_e^{(\alpha_4)}(p_4)(I + \gamma_5)v_\nu^{(\alpha_3)}(p_3)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

La limite $\epsilon \rightarrow 0$ peut être prise sans problème puisque $q^2 \neq M^2$. Le second terme dans l'accolade peut être négligé: le facteur $m_\mu m_e/M^2$ étant d'ordre 10^{-8} , il est clairement négligeable face au premier terme ainsi que face aux corrections de l'ordre suivant (g^4) de la théorie des perturbations omises ici. De plus, comme $q^2 \sim m_\mu^2 \ll M^2$, il est légitime de faire l'approximation

$$\frac{1}{q^2 - M^2} \simeq -\frac{1}{M^2}.$$

Avec ces approximations, la contribution à l'amplitude du propagateur massif se réduit à la constante $iM^{-2}\eta^{\rho\sigma}$.

Puisque $\frac{1}{\sqrt{2}}G_F = g^2[8M^2]^{-1}$, l'amplitude s'écrit finalement:

$$\mathcal{M} = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\nu^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu(I + \gamma_5)u_\mu^{(\alpha_1)}(p_1)][\bar{u}_e^{(\alpha_4)}(p_4)\gamma_\mu(I + \gamma_5)v_\nu^{(\alpha_3)}(p_3)]. \quad (5.52)$$

Cette amplitude est identique à celle utilisée dans la théorie “ $V - A$ ” formulée pour l'interaction faible avant l'avènement du Modèle standard: un produit de deux courants électronique et muonique de chiralité gauche.

Nous allons calculer la largeur de désintégration du muon sans fixer de polarisations. Il s'agit donc d'évaluer

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4=1}^2 |\mathcal{M}|^2,$$

c'est-à-dire de moyenner $|\mathcal{M}|^2$ sur les polarisations du muon, et sommer sur celles des fermions de l'état final.

Nous avons déjà observé que les normalisations choisies pour les spineurs imposent de conserver les masses des neutrinos lors du calcul du carré de l'amplitude.

On peut ensuite annuler ces masses dans les grandeurs physiques qui sont indépendantes des normalisations. Pour simplifier le calcul, nous allons utiliser la règle suivante pour les sommes de polarisations des neutrinos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 u_{\nu}^{(\alpha)}(p) \bar{u}_{\nu}^{(\alpha)}(p) &\longrightarrow \frac{\not{p}}{2m}, \\ \sum_{\alpha=1}^2 v_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}(p) \bar{v}_{\bar{\nu}}^{(\alpha)}(p) &\longrightarrow \frac{\not{p}}{2m}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Le paramètre de masse m n'est introduit que dans le dénominateur: il disparaîtra simplement de l'expression de la largeur. Avec cette règle pour les neutrinos, on obtient:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F}{64} \frac{1}{m^2 m_{\mu} m_e} L^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}.$$

Les quantités $L^{\rho\sigma}$ et $M_{\rho\sigma}$ sont définies par

$$\begin{aligned} L^{\rho\sigma} &= \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^{\rho} (I + \gamma_5) (\not{p}_1 + m_{\mu}) \gamma^{\sigma} (I + \gamma_5)], \\ M_{\rho\sigma} &= \text{Tr} [(\not{p}_4 + m_e) \gamma_{\rho} (I + \gamma_5) \not{p}_3 \gamma_{\sigma} (I + \gamma_5)]. \end{aligned}$$

A l'aide des résultats de l'appendice A, un calcul sans difficulté conduit à

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} M_{\mu\nu} &= 4 \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^{\mu} \not{p}_1 \gamma^{\nu} (I + \gamma_5)] \text{Tr} [\not{p}_4 \gamma_{\mu} \not{p}_3 \gamma_{\nu} (I + \gamma_5)] \\ &= 256 (p_1 p_3) (p_2 p_4), \end{aligned}$$

et finalement,

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} |\mathcal{M}|^2 = 4 G_F^2 \frac{1}{m^2 m_{\mu} m_e} (p_1 p_3) (p_2 p_4).$$

D'après (3.101), la largeur de désintégration s'écrit:

$$d\Gamma = \frac{32}{(2\pi)^5} \frac{G_F^2}{m_{\mu}} \frac{d^3 p_2}{2p_2^0} \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} \frac{d^3 p_4}{2p_4^0} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) (p_1 p_3) (p_2 p_4),$$

qui est comme annoncé indépendante de la masse fictive m introduite pour les neutrinos.

L'état final contient trois particules. Cette situation a été étudiée dans le paragraphe 3.4.3 dont nous emprunterons simplement les résultats. Les deux variables conduisant aux intégrations non triviales seront choisies comme étant p_3^0 et p_4^0 . D'autre part, comme la masse de l'électron est inférieure à celle du muon par un facteur $\sim 200^{-1}$, nous allons négliger m_e et admettre que l'état final contient trois particules sans masse. Dans ce cas, les contraintes cinématiques (conservation énergie-impulsion) sur p_3^0 et p_4^0 sont

$$\begin{aligned} \frac{m_{\mu}}{2} - p_4^0 &\leq p_3^0 \leq \frac{m_{\mu}}{2}, \\ 0 &\leq p_4^0 \leq \frac{m_{\mu}}{2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Nous allons calculer la largeur dans le référentiel au repos du muon, $p_1 = (m_\mu, \vec{0})$. L'angle θ entre \vec{p}_3 et \vec{p}_4 vérifie alors

$$\cos \theta = \frac{1}{2p_3^0 p_4^0} [m_\mu^2 - 2m_\mu(p_3^0 + p_4^0) + 2p_3^0 p_4^0],$$

et

$$p_1 p_3 = m_\mu p_3^0, \quad p_2 p_4 = m_\mu p_4^0 - p_3^0 p_4^0 (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m_\mu (m_\mu - 2p_3^0).$$

D'après (3.123),

$$\frac{d\Gamma}{dp_3^0 dp_4^0} = \frac{G_F^2}{2\pi^3} m_\mu p_3^0 (m_\mu - 2p_3^0); \quad (5.55)$$

et, en tenant compte des contraintes cinématiques (5.54),

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_F^2 m_\mu}{2\pi^3} \int_0^{m_\mu/2} dp_4^0 \int_{m_\mu/2 - p_4^0}^{m_\mu/2} dp_3^0 p_3^0 (m_\mu - 2p_3^0) \\ &= \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Numériquement,

$$\Gamma = 3.01 \times 10^{-16} \text{ MeV}, \quad \tau_\mu = 2.18 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

La largeur totale dépend donc de la cinquième puissance de la masse du μ^- . Ce résultat suit simplement de l'observation que l'ordre g^2 et la présence d'un propagateur du W apportent un facteur $g^4/M^4 \sim G_F^2$ au carré de l'amplitude, qui doit être compensé dans la largeur Γ par la seule autre masse (non négligée) dans le processus, m_μ . Une analyse semblable peut être faite pour la désintégration du τ^- , par exemple. Le rapport des masses m_τ/m_μ étant

$$\frac{m_\tau}{m_\mu} \simeq 16.8,$$

on s'attend à trouver

$$\tau_{\tau \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e} \simeq \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5 \tau_\mu \simeq 7.5 \times 10^{-7} \tau_\mu = 1.64 \times 10^{-12} \text{ s}.$$

Expérimentalement,

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= 2.20 \times 10^{-6} \text{ s}, \\ \tau_\tau &= 2.9 \times 10^{-13} \text{ s}. \end{aligned}$$

Mais, alors que le muon se désintègre presque uniquement en $e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$, le rapport de branchement du τ dans cet état final est de 17.8%. Donc

$$\tau_{\tau \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e} = 1.63 \times 10^{-12} \text{ s}.$$

5.5 Diffusion profondément inélastique, modèle des partons

Lors d'une diffusion électron–proton à grand transfert d'impulsion, le proton ne se comporte pas comme une particule élémentaire. L'effet de sa structure est sensible. L'électron interagit avec les composantes élémentaires du proton, c'est-à-dire en priorité avec les quarks puisque les gluons n'ont pas de charge électrique. La diffusion électron–proton dans ce régime cinématique ne peut donc se calculer en considérant le proton comme une particule ponctuelle et en lui appliquant les règles de l'électrodynamique quantique.

Nous allons discuter ce processus en trois étapes. Premièrement, nous allons calculer la diffusion électron–quark à l'ordre le plus bas de l'électrodynamique quantique et à grand transfert d'impulsion. Ensuite, nous dériverons une expression pour la diffusion élastique électron–proton, et finalement nous établirons le lien entre le processus inélastique inclusif

$$e^- p \longrightarrow e^- X,$$

où X est n'importe quel état final de nombre baryonique $B = 1$, et la diffusion électron–quark en introduisant les idées de base du modèle des partons.

5.5.1 Diffusion électron–quark

La figure 5.12 contient l'unique diagramme de Feynman qui contribue à l'élément de matrice du processus $e^- Q \longrightarrow e^- Q$ à l'ordre le plus bas. Le transfert d'énergie–impulsion $q = p - p'$ entre le courant électronique et celui du quark est caractérisé par l'invariant de Lorentz

$$q^2 = (p - p')^2 = (k' - k)^2 = 2m_e^2 - 2pp'.$$

Nous allons nous intéresser au cas où les énergies des électrons $E = p_0$ et $E' = p'_0$ sont grandes par rapport à la masse de l'électron m_e qui peut donc être négligée.

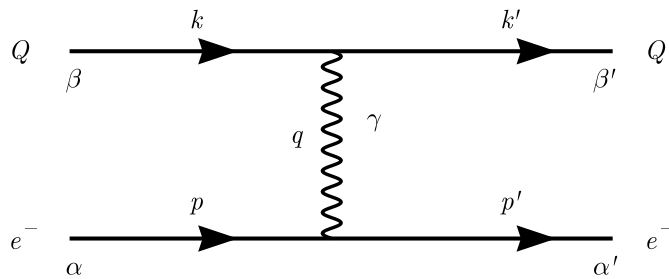


Fig. 5.12 Diffusion électron–quark: diagramme d'ordre e^2

Alors

$$q^2 \simeq -2pp' \simeq -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0. \quad (5.57)$$

θ est l'angle entre la direction \vec{p}'/E' de l'électron sortant par rapport à celle (\vec{p}/E) de l'électron incident. L'élément de matrice S correspondant à ce diagramme est indépendant du choix de la jauge. Il est donc plus simple de l'écrire directement dans la jauge de Feynman:

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{q^2}(-ie)(ieQ)[\bar{u}^{(\alpha')}(p')\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)][\bar{u}_Q^{(\beta')}(k')\gamma_\mu u_Q^{(\beta)}(k)], \quad (5.58)$$

pour un quark de charge Qe . En sommant et moyennant sur toutes les polarisations $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, on obtient facilement, pour un quark de masse M ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2 e^4}{4q^4} \frac{1}{16m_e^2 M^2} \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k}' + M) \gamma_\mu (\not{k} + M) \gamma_\nu] \\ &= \frac{8Q^2 e^4}{q^4} \frac{1}{16m_e^2 M^2} [(pk)(p'k') + (pk')(p'k) - M^2(pp')]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Dans le référentiel du laboratoire où le quark cible est au repos,

$$k = (M, \vec{0}), \quad kp = ME, \quad kp' = ME'.$$

D'autre part, en introduisant la variable

$$\nu = E - E', \quad (5.60)$$

le fait que $k^2 = k'^2 = (k + q)^2$ implique $2kq = -q^2$ et, comme $p^2 = p'^2 = 0$,

$$-2pp' = (p' - p)^2 = q^2 = -2kq = -2M\nu \quad \longleftrightarrow \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{M\nu}{2EE'}. \quad (5.61)$$

Une seule variable cinématique suffit à décrire l'état final. Il vient alors

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8Q^2 e^4}{q^4} \frac{1}{16m_e^2 M^2} 2M^2 EE' \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (5.62)$$

qui ne dépend que de E' ou de θ , ces deux variables étant reliées par (5.61). D'après (3.98), la section efficace différentielle dans le laboratoire est donnée par

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4ME} (16m_e^2 M^2) \delta^4(p + k - p' - k') \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2. \quad (5.63)$$

Il est naturel de commencer par intégrer sur $d^3 k'$ puisque $\frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2$ est une fonction de $E' = |\vec{p}'|$ uniquement. Avec $d^3 p' = E'^2 dE' d\Omega'$, l'élément d'angle solide $d\Omega'$ étant dans la direction \vec{p}'/E' de l'électron sortant, on obtient:

$$d\sigma = \frac{E'}{64\pi^2 M^2 E} (16m_e^2 M^2) dE' d\Omega' \theta(M + \nu) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) \frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2.$$

La distribution de Dirac impose la condition (5.61), qui implique aussi la positivité de ν et donc $\theta(M + \nu) = 1$. Finalement, l'expression (5.62) conduit à

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{\alpha^2 Q^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right), \quad (5.64)$$

où la constante de structure fine est $\alpha = e^2/4\pi$. Comme

$$\delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) = \delta \left(E' - E + \frac{2EE'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{E'}{E} \delta \left(E' - \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right),$$

on peut intégrer sur l'énergie E' et obtenir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2 Q^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (5.65)$$

avec

$$\frac{E'}{E} = \left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1}.$$

L'expression (5.65) est la *formule de Rosenbluth* pour la diffusion électron-quark, dans le référentiel du laboratoire. Cette formule s'appliquerait également à la diffusion à grand transfert d'impulsion d'un électron sur un proton, si celui-ci pouvait être considéré comme une particule ponctuelle de charge $Q = 1$, ce qui n'est pas le cas.

5.5.2 Diffusion élastique électron-proton

Du fait de la structure du proton, la formule de Rosenbluth n'est pas directement applicable au processus $e^- p \longrightarrow e^- p$. Les équations (5.59) et (5.64), qui sont valables pour la diffusion d'un électron et d'une particule sans structure de charge Qe et de masse M , peuvent cependant s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2 e^4}{4q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \\ \frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} &= \frac{Q^2 e^4}{256\pi^2} \frac{1}{q^4 M^2} \frac{E'}{E} \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) (16m_e^2 M^2) L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

où

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{4m_e^2} \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu] = \frac{1}{m_e^2} [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (pp') \eta_{\mu\nu}] \quad (5.67)$$

est la contribution du courant électronique alors que la contribution hadronique dans la diffusion électron-quark est

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M^2} \text{Tr}[(\not{k}' + M) \gamma_\mu (\not{k} + M) \gamma_\nu] = \frac{1}{M^2} [k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - (kk' - M^2) \eta_{\mu\nu}]. \quad (5.68)$$

La factorisation de la section efficace en deux tenseurs électronique et hadronique suit de la description du processus par l'échange d'un photon virtuel ($q^2 < 0$), qui est caractéristique de l'électrodynamique quantique (à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations). Cette propriété, ainsi que les lois de conservation et d'invariance de jauge de l'électrodynamique, resteront valables pour la diffusion d'un électron sur un hadron non ponctuel, avec le même tenseur électronique $L^{\mu\nu}$. On peut donc supposer que les équations (5.66) et (5.67) resteront valables. La forme (5.68) de la contribution hadronique devra cependant être remplacée par une expression appropriée à la diffusion électron-proton.

Dans les expressions (5.67) et (5.68), tant $L_{\mu\nu}$ que $W_{\mu\nu}$ sont des tenseurs symétriques formés à partir des impulsions p et p' des électrons ou k et k' des quarks. La conservation du courant électromagnétique impose

$$q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0. \quad (5.69)$$

La forme précise de la contribution hadronique (5.68) est due à la forme de l'interaction électromagnétique photon-quark. Comme celle-ci n'est pas connue pour l'interaction photon-proton, la contribution $W_{\mu\nu}$ dans le cas $e^-p \rightarrow e^-p$ doit être obtenue en imposant les conditions (5.69) à un tenseur symétrique $W_{\mu\nu}$ qui sera fonction des vecteurs k et q (puisque $k' = k + q$). La forme la plus générale de $W_{\mu\nu}$ sera une combinaison linéaire des quatre contributions

$$\eta_{\mu\nu}, \quad q_\mu q_\nu, \quad k_\mu k_\nu, \quad q_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu,$$

les coefficients de la combinaison étant des fonctions des invariants non triviaux formés avec q et k , c'est-à-dire q^2 et kq . Les conditions (5.69) conduisent à:

$$W_{\mu\nu} = W_1^{\text{él.}}(q^2, kq) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} W_2^{\text{él.}}(q^2, kq) \left(k_\mu - \frac{kq}{q^2} q_\mu \right) \left(k_\nu - \frac{kq}{q^2} q_\nu \right), \quad (5.70)$$

où M est la masse du proton. Dans le cas de la diffusion élastique,

$$kq = -\frac{1}{2}q^2,$$

et les *fonctions de structure élastiques* $W_1^{\text{él.}}$ et $W_2^{\text{él.}}$ ne dépendent que d'une variable:

$$W_1^{\text{él.}} = \tilde{W}_1(q^2), \quad W_2^{\text{él.}} = \tilde{W}_2(q^2).$$

En comparant avec l'expression (5.68), valable pour un fermion ponctuel,

$$W_{\mu\nu} = -\frac{q^2}{2M^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{2}{M^2} \left(k_\mu + \frac{1}{2}q_\mu \right) \left(k_\nu + \frac{1}{2}q_\nu \right),$$

on en déduit que le cas ponctuel correspond à

$$W_1^{\text{él.}} = -\frac{q^2}{2M^2}, \quad W_2^{\text{él.}} = 2, \quad (5.71)$$

une déviation de ces formes signalant une structure du proton. La section efficace différentielle pour la diffusion élastique e^-p s'obtient en revenant à la deuxième expression (5.66). En observant que

$$L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = \frac{4EE'}{m_e^2} \left[W_1^{\text{él.}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} W_2^{\text{él.}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

cette section efficace s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) \left[\frac{1}{2} \tilde{W}_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \tilde{W}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (5.72)$$

les fonctions \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 dépendant de q^2 uniquement. En intégrant sur E' , il vient

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{1}{2} \tilde{W}_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \tilde{W}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (5.73)$$

Ces deux résultats se réduisent bien aux expressions (5.64) et (5.65) avec les choix (5.71) propres à la particule ponctuelle, et $Q = 1$.

Les fonctions \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 ne peuvent être précisées théoriquement. Elles sont reliées aux *facteurs de forme* du proton, qui peuvent être définis par un argument similaire à celui conduisant à l'expression (5.70), mais cette fois au niveau de l'amplitude de probabilité et du courant hadronique. Il s'agit d'écrire la forme la plus générale de l'amplitude \mathcal{M} , qui, dans le cas de la diffusion électron-quark, est donnée par (5.58). Pour le processus $e^-p \longrightarrow e^-p$, cette amplitude aura la forme générale

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{ie^2}{q^2} j_{(e)}^\mu j_{(p)\mu}, \\ j_{(e)}^\mu &= \bar{u}^{(\alpha')}(p') \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p), \\ j_{(p)}^\mu &= \bar{u}^{(\beta')}(k') M^\mu(k, k') u^{(\beta)}(k), \end{aligned}$$

où $M^\mu(k, k')$ est l'expression la plus générale compatible avec la conservation du courant électromagnétique, $q_\mu j_{(p)}^\mu = 0$, et l'invariance sous parité. Pour obtenir $M^\mu(k, k')$, on commence par écrire la matrice la plus générale se transformant sous parité comme un vecteur:

$$M_\mu(k, k') = M^{-1} \left(G_1(k+k')_\mu + G_2 q_\mu \right) + G_3 \gamma_\mu + M^{-1} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \left(G_4(k+k')^\nu + G_5 q^\nu \right),$$

la masse du proton M étant introduite pour uniformiser la dimension physique des différents termes, et $q = k' - k$. Les coefficients G_i sont des fonctions de q^2 . A l'aide de l'équation de Dirac

$$(\not{k} - M)u^{(\beta)}(k) = 0, \quad \bar{u}^{(\beta')}(k')(\not{k}' - M) = 0,$$

on montre facilement l'*identité de Gordon*,

$$2M \bar{u}^{(\beta')}(k') \gamma^\mu u^{(\beta)}(k) = \bar{u}^{(\beta')}(k') \left((k+k')^\mu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (k' - k)_\nu \right) u^{(\beta)}(k),$$

ainsi que

$$\bar{u}^{(\beta')}(k')[\gamma_\mu, \gamma_\nu](k+k')^\nu u^{(\beta)}(k) = 2(k'-k)_\mu \bar{u}^{(\beta')}(k')u^{(\beta)}(k).$$

Ces deux identités impliquent que, par exemple, les deux fonctions G_1 et G_4 sont inutiles et peuvent être choisies nulles sans restreindre la généralité:

$$M_\mu(k, k') = M^{-1}G_2q_\mu + G_3\gamma_\mu + M^{-1}G_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]q^\nu M_\mu(q).$$

Comme d'autre part $\bar{u}^{(\beta')}(k') \not{q} u^{(\beta)}(k) = 0$, il vient:

$$\bar{u}^{(\beta')}(k') [q^\mu M_\mu(q)] u^{(\beta)}(k) = M^{-1}q^2 G_2 \bar{u}^{(\beta')}(k')u^{(\beta)}(k),$$

dont l'annulation requiert simplement $G_2 = 0$. Le courant électromagnétique du proton s'exprime donc au moyen de deux *facteurs de forme*, qu'on définit par

$$j_{(p)}^\mu = \bar{u}^{(\beta')}(k') \left[F_1(q^2)\gamma^\mu - \frac{\kappa}{4M}F_2(q^2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]q_\nu \right] u^{(\beta)}(k), \quad (5.74)$$

κ étant le moment magnétique anormal du proton, $\kappa = 1.79$. Les fonctions F_1 et F_2 sont réelles par hermiticité du courant.

Le lien entre les facteurs de forme F_1 et F_2 et les fonctions \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 suit de

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \sum_{\beta, \beta'} j_{(p)\mu} j_{(p)\nu}^\dagger \\ &= \frac{1}{4M^2} \text{Tr} \left[(\not{k}' + M) M_\mu(q) (\not{k} + M) \gamma^0 M_\nu^\dagger(q) \gamma^0 \right]. \end{aligned}$$

En comparant avec l'expression (5.70), on trouve

$$\tilde{W}_1 = -\frac{q^2}{2M^2}(F_1 + \kappa F_2)^2, \quad \tilde{W}_2 = 2F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{2M^2}F_2^2, \quad (5.75)$$

et la limite d'une particule ponctuelle correspond à $F_1 = 1$ et $F_2 = 0$, c'est-à-dire à $j_p^\mu = \bar{u}^{(\beta')}(k')\gamma^\mu u^{(\beta)}(k)$.

Les facteurs de forme ou les fonctions de structure contiennent l'information sur la structure du proton qu'une diffusion par un photon virtuel est en mesure de mettre en évidence, à l'ordre α^2 . Elles peuvent être extraites de la mesure de la section efficace différentielle (en fonction de θ ou E').

5.5.3 Diffusion inélastique profonde

Il s'agit du processus inclusif $e^-p \longrightarrow e^-X$, X étant n'importe quel état de nombre baryonique unité. Par rapport au cas élastique, la cinématique diffère uniquement par le fait que k'^2 n'est plus fixé. Les relations (5.61) ne sont plus

valables et deux invariants de Lorentz sont indépendants. Comme la masse invariante de X est donnée par

$$M_X^2 = k'^2 = (k + q)^2 = M^2 + 2M\nu + q^2 \quad (5.76)$$

dans le référentiel du laboratoire où $k = (M, \vec{0})$, il est commode de prendre

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \nu = E - E' = \frac{1}{M}kq,$$

comme variables invariantes de Lorentz, ou l'angle θ et l'énergie E' de l'électron sortant, comme variables indépendantes propres au référentiel du laboratoire.

L'état X ayant nombre baryonique unité, on a nécessairement l'inégalité $M_X > M$ qui implique, puisque $\nu > 0$ et $q^2 < 0$,

$$0 < x_B = -\frac{q^2}{2M\nu} < 1, \quad (5.77)$$

d'après (5.76).

La section efficace différentielle peut à nouveau s'exprimer en utilisant les équations

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu},$$

$$W_{\mu\nu} = W_1(q^2, kq) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} W_2(q^2, kq) \left(k_\mu - \frac{kq}{q^2} q_\mu \right) \left(k_\nu - \frac{kq}{q^2} q_\nu \right).$$

Elle contient deux *fonctions de structure inélastiques* W_1 et W_2 , qui dépendent des deux variables q^2 et ν . Par contre, la deuxième expression (5.66) n'est plus valable puisque la contribution $\delta(\nu + \frac{q^2}{2M})$, qui est équivalente à $2M\delta(k'^2 - M^2)$, n'a plus lieu d'être: la masse invariante de l'état final X n'est pas fixée. Dans la section efficace, le facteur d'espace de phase contiendra une intégration sur les quatre composantes de k' , d^4k' , qui sera effectuée en utilisant la conservation d'impulsion $\delta^4(k + p - k' - p')$. Il est conventionnel d'écrire $d\sigma$ avec la substitution

$$4M^2(2\pi)^4 \delta^4(p + k - p' - k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \longrightarrow 8\pi M$$

dans l'expression (5.63) de la diffusion élastique. Cette convention fixe la normalisation du tenseur $W_{\mu\nu}$. La section efficace inélastique est alors donnée par

$$d\sigma = \frac{1}{4ME} (8\pi M) \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} (4m_e^2) \frac{1}{4} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2,$$

le premier facteur correspondant au flux incident de particules. Avec à nouveau

$$4m_e^2 L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 16EE' \left[\frac{1}{2} W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dans le référentiel du laboratoire et $d^3p' = E'^2 dE' d\Omega'$, on obtient finalement

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (5.78)$$

En comparant avec l'expression (5.64), il apparaît que la section efficace de diffusion élastique d'une particule ponctuelle de charge Qe est obtenue en effectuant dans (5.78) les substitutions

$$\begin{aligned} W_1(q^2, \nu) &\longrightarrow -\frac{q^2}{4M^2} Q^2 \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \frac{Q^2}{2M} \delta(1 - x_B), \\ W_2(q^2, \nu) &\longrightarrow Q^2 \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \frac{Q^2}{\nu} \delta(1 - x_B). \end{aligned}$$

La dépendance en q^2 est supprimée par la condition $x_B = 1$.

5.5.4 Partons

Pour $|q^2|$ assez grand, il apparaît expérimentalement que l'électron incident interagit avec des constituants ponctuels du proton, les *partons*, qui sont identifiés aux quarks (et aux gluons qui n'interagissent cependant pas avec le photon à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations). Dans le modèle des partons, la section efficace du processus $e^-p \longrightarrow e^-X$ est donnée par la somme (incohérente) des sections efficaces de toutes les diffusions électron-quark/parton possibles sur un proton cible, le parton diffusé étant considéré comme un fermion de Dirac libre. Les hypothèses sous-jacentes sont les suivantes: premièrement, la présence d'autres partons dans le nucléon n'a pas d'influence sur le processus élémentaire $e^-Q \longrightarrow e^-Q$, qui est caractérisé par une distance $\sim |q^2|^{-1/2}$ très petite par rapport à la taille du nucléon ($\sim 1 \text{ GeV}^{-1}$); ensuite, chaque quark/parton diffusé conduit avec probabilité unité à un état final hadronique, la conversion du parton en hadrons (hadronisation) n'interférant pas avec le processus élémentaire.

Pour concrétiser ce modèle, on introduit la probabilité $q_i(x)$ qu'un parton (quark) de l'espèce i porte une fraction x de l'impulsion du proton. L'indice i se réfère aux saveurs u, d, s, c, b, t des quarks, ainsi qu'aux saveurs d'antiquarks. Il est cependant clair que les fonctions $q_i(x)$ n'auront des valeurs importantes que pour les quarks de valence u et d du proton. Par définition,

$$\sum_i \int_0^1 dx x q_i(x) = 1.$$

Un parton d'impulsion xk aura donc une "masse" $[x^2 k^2]^{1/2} = xM$, et le processus élémentaire sera la diffusion d'un quark de charge Qe , $Q = 2/3, -1/3$ et de "masse" xM par l'électron. Sa section efficace différentielle est donnée par l'expression (5.64), avec une masse de la particule cible égale à xM . Comme

les quarks/partons sont ponctuels, les fonctions W_1 et W_2 pour la diffusion d'un parton de saveur i et de "masse" xM seront données par

$$\begin{aligned} MW_{1,i,x}(q^2, \nu) &= -Q_i^2 \frac{q^2}{4x^2 M\nu} \delta\left(1 + \frac{q^2}{2xM\nu}\right) = Q_i^2 \frac{x_B}{2x} \delta(x - x_B), \\ \nu W_{2,i,x}(q^2, \nu) &= Q_i^2 \delta\left(1 + \frac{q^2}{2xM\nu}\right) = Q_i^2 x \delta(x - x_B). \end{aligned}$$

La section efficace du processus $e^-p \longrightarrow e^-X$ est alors donnée par

$$d\sigma = \sum_i \int_0^1 dx q_i(x) d\sigma_{i,x}, \quad (5.79)$$

où $d\sigma_{i,x}$ est la section efficace différentielle de la diffusion d'un parton d'impulsion xk et de saveur i . Elle est de la forme générale (5.78), avec

$$\begin{aligned} MW_1 &= \sum_i \int_0^1 dx q_i(x) MW_{1,i,x} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 q_i(x_B), \\ \nu W_2 &= \sum_i \int_0^1 dx q_i(x) \nu W_{2,i,x} = x_B \sum_i Q_i^2 q_i(x_B). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Les fonctions

$$F_1 = MW_1, \quad F_2 = \nu W_2$$

ne dépendent que de la variable sans dimension $x_B = -\frac{q^2}{2M\nu}$. Cette *invariance d'échelle* est due au fait que le processus $e^-p \longrightarrow e^-X$ est vu dans ce modèle comme une somme de diffusions de partons ponctuels. Finalement, l'égalité

$$F_2 = 2x_B F_1$$

est la relation de *Callan-Gross*, une conséquence du spin 1/2 des quarks/partons. Expérimentalement, vérifier cette relation donne un test de la valeur du spin des quarks, alors que la vérification de l'invariance d'échelle est un test du modèle des partons. Dans le Modèle standard cependant, l'invariance d'échelle n'est qu'approximativement vérifiée: les corrections d'ordres supérieurs de la théorie des perturbations introduisent des violations dont la mesure teste le Modèle standard par rapport au modèle "naïf" des partons.

5.6 Désintégration en deux photons du boson de Higgs

Le Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques contient un champ scalaire réel H^0 , le *boson de Higgs*. La densité lagrangienne ne comprend pas d'interaction de ce champ avec le photon: une telle interaction serait dictée par le principe d'invariance de jauge et serait proportionnelle à la charge

électrique de H^0 , qui est nulle. Le boson de Higgs possède par contre des interactions de Yukawa avec les quarks et les leptons, ou des interactions de jauge avec W^\pm , qui sont chargés et interagissent avec le photon. L'interaction de Yukawa est de la forme

$$\sum_i \lambda_i H^0 \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (5.81)$$

où la sommation sur l'indice i parcourt tous les quarks et leptons massifs. Cette interaction conserve la parité. La constante de couplage est proportionnelle à la masse m_i du fermion décrit par le spineur ψ_i :

$$\lambda_i = \frac{e}{2 \sin \theta_W} \frac{m_i}{M_W} = [\sqrt{2} G_F]^{1/2} m_i, \quad (5.82)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg, M_W la masse du boson de jauge W^\pm et G_F la constante de Fermi¹⁸. Par rapport à l'ordre de grandeur typique d'une constante de couplage de l'interaction faible, λ_i est multiplié par un facteur m_i/M_W qui est très petit ($< .06$) sauf pour le quark top.

Lorsque la cinématique le permet, l'interaction (5.81) induit la désintégration

$$H^0 \longrightarrow F_j \bar{F}_j,$$

F_j étant un quark ou un lepton massif. La règle de Feynman qui lui correspond associe un facteur $i\lambda_j$ au vertex $H^0 - F_j - \bar{F}_j$. L'amplitude du processus est donc simplement

$$\mathcal{M}_{F_j \bar{F}_j} = i\lambda_j \bar{u}^{(\alpha_1)}(q_1) v^{(\alpha_2)}(q_2),$$

en désignant respectivement par q_1, α_1 et q_2, α_2 les impulsions et polarisations de F_j et \bar{F}_j . D'après l'équation (3.110), la largeur de désintégration est alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{F_j \bar{F}_j} &= \frac{1}{16\pi M} 4m_j^2 \sqrt{1 - \frac{4m_j^2}{M^2}} \sum_{pol.} \sum_{couleurs} |\mathcal{M}_{F_j \bar{F}_j}|^2 \\ &= N_j \frac{G_F m_j^2}{4\sqrt{2}\pi} M \left[1 - \frac{4m_j^2}{M^2} \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

La somme sur les trois couleurs des quarks introduit la constante N_j qui vaut donc 3 pour un quark, 1 pour un lepton. Pour un boson de Higgs de masse $M = 115$ GeV, on aurait par exemple¹⁹

$$\Gamma_{b\bar{b}} \sim 2.0 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\tau^+\tau^-} \sim .24 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\mu^+\mu^-} \sim .83 \text{ keV}.$$

Si le boson de Higgs a une masse supérieure à $2M_Z$, sa désintégration est fortement dominée par les modes $H^0 \longrightarrow W^+W^-$ et $H^0 \longrightarrow Z^0Z^0$: la constante de couplage de l'interaction H^0 – bosons de jauge est d'ordre $G_F^{1/2} M_W$, au lieu de

¹⁸Chapitre 8.

¹⁹La masse du quark b à $M = 115$ GeV est ~ 3 GeV (“*running mass*”).

(5.82) et la largeur est une fonction rapidement croissante de M . Si par contre $M < 2M_W$, la petitesse de la largeur $\Gamma_{F_j \bar{F}_j}$, elle-même due à la faiblesse de l'interaction de Yukawa (5.82), rend des modes d'ordres supérieurs tels que $H^0 \longrightarrow \gamma\gamma$ expérimentalement intéressants.

La contribution perturbative dominante au calcul du processus $H^0 \longrightarrow \gamma\gamma$ est due aux boucles de fermions (quarks et leptons) et de W^\pm . Les fermions massifs et chargés sont couplés à la fois au boson de Higgs (par l'interaction (5.81)) et au photon (du fait de leur charge électrique). Comme la constante de couplage de Yukawa est proportionnelle à la masse du fermion, on s'attend à ce que la contribution des quarks lourds (singulièrement celle du top) soit dominante.

Le calcul de la contribution des bosons de jauge W^\pm implique l'utilisation de l'ensemble du Modèle standard à l'ordre d'une boucle. Certaines sophistications liées à la symétrie de jauge non abélienne et à la brisure spontanée de cette symétrie²⁰ ne sont pas développées ici et ce calcul est donc hors d'atteinte. Par contre, la contribution d'un fermion massif et chargé peut être évaluée avec le formalisme dont nous disposons. Ce calcul donne un exemple d'une contribution finie à l'ordre d'une boucle à un processus qui n'est pas présent à l'ordre des diagrammes de Feynman "en arbres".

5.6.1 Le modèle

Le modèle que nous allons considérer correspond à l'électrodynamique d'un fermion ψ de masse m , interagissant avec un champ de spin zéro réel et donc sans charge électrique H , de masse M . Il est défini par la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - \frac{1}{2}M^2 H^2 \\ & + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \lambda\bar{\psi}\psi H + i\lambda'\bar{\psi}\gamma_5\psi H \\ & - \frac{1}{3}\delta_3 H^3 - \frac{1}{4}\delta_4 H^4. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Les couplages de Yukawa λ et λ' correspondent respectivement à des couplages scalaire et pseudoscalaire. L'hermiticité de \mathcal{L} impose que λ et λ' soient réels. Pour un fermion de charge eQ , la dérivée covariante est

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu,$$

A_μ étant le champ du photon. De plus, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La théorie (5.84) est invariante sous les transformations de jauge abéliennes

$$\begin{cases} \psi & \longrightarrow e^{i\alpha(x)Q}\psi \\ H & \longrightarrow H \\ A_\mu & \longrightarrow A_\mu + e^{-1}\partial_\mu\alpha \end{cases}$$

comme il se doit.

²⁰Chapitre 7.

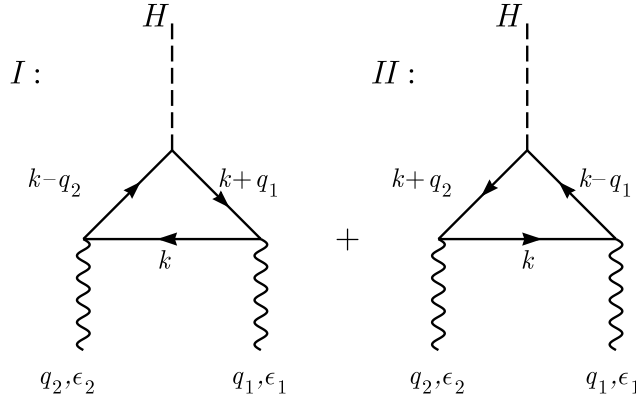


Fig. 5.13 $H \longrightarrow \gamma\gamma$: diagrammes d'ordre $\lambda e^2, \lambda' e^2$

Le terme λ' , qui viole la conservation de la parité, est absent dans le Modèle standard où λ est donné par (5.82) avec $m_i = m$. Nous allons cependant garder le couplage de Yukawa le plus général puisque ceci n'introduit pas de complication importante. Les interactions scalaires $-\frac{1}{3}\delta_3 H^3 - \frac{1}{4}\delta_4 H^4$ sont requises par la cohérence de la théorie mais ne joueront pas de rôle dans le processus qui nous intéresse.

La densité lagrangienne libre peut être quantifiée par les méthodes discutées dans le chapitre 2, en ajoutant un terme de fixation de la jauge. Les règles de Feynman des interactions sont simples. Le vertex $A_\mu - \psi - \bar{\psi}$ est celui de l'électrodynamique quantique; on lui associe donc un facteur $ieQ\gamma^\mu$. Le vertex $H - \psi - \bar{\psi}$ correspond au facteur

$$i(\lambda + i\lambda'\gamma_5).$$

Les contributions du plus bas ordre au processus $H \longrightarrow \gamma\gamma$ sont données par les deux diagrammes de Feynman de la figure 5.13. Ils sont topologiquement distincts. D'après les règles de Feynman, la contribution du diagramme I s'écrit:

$$\mathcal{M}_I = -i^6 e^2 Q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu t_{\mu\nu}}{[(k - q_2)^2 - m^2][k^2 - m^2][(k + q_1)^2 - m^2]}, \quad (5.85)$$

$$t_{\mu\nu} = \text{Tr}[(\lambda + i\lambda'\gamma_5)(\not{k} - \not{q}_2 + m)\gamma_\nu(\not{k} + m)\gamma_\mu(\not{k} + \not{q}_1 + m)].$$

Le signe négatif est dû à la boucle fermionique. En effectuant la trace, il vient

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = & 4\lambda m [4k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu} - 2k_\mu q_{2\nu} + 2k_\nu q_{1\mu} - q_{1\mu} q_{2\nu} + q_{2\mu} q_{1\nu} \\ & - (q_1 q_2) \eta_{\mu\nu} + m^2 \eta_{\mu\nu}] - 4\lambda' m \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho q_2^\sigma. \end{aligned} \quad (5.86)$$

La contribution \mathcal{M}_{II} du second diagramme est obtenue par l'échange

$$\epsilon_1, q_1 \longleftrightarrow \epsilon_2, q_2$$

dans l'amplitude (5.85). Mais l'expression $\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu t_{\mu\nu}$ et le dénominateur apparaissant dans \mathcal{M}_I restent inchangés lorsqu'on substitue

$$q_1, \epsilon_1, q_2, \epsilon_2, k \longrightarrow q_2, \epsilon_2, q_1, \epsilon_1, -k.$$

Il en résulte que les contributions des deux diagrammes sont égales, $\mathcal{M}_{II} = \mathcal{M}_I$, et l'amplitude totale est donc

$$\mathcal{M} = 2\mathcal{M}_I.$$

Les polarisations des photons de l'état final sont transverses: $q_1\epsilon_1 = q_2\epsilon_2 = 0$. On a alors:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu t_{\mu\nu} &= 4\lambda m \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [4k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}] \\ &\quad + 4\lambda m [(\epsilon_1 q_2)(\epsilon_2 q_1) - (\epsilon_1 \epsilon_2)(q_1 q_2 - m^2)] - 4\lambda' m \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma. \end{aligned}$$

Le premier terme semble indiquer que l'intégrale d^4k présente dans \mathcal{M} est logarithmiquement divergente:

$$\mathcal{M} = \int d^4k F(k), \quad F(k) \sim k^{-4}, \quad k \text{ grand.}$$

Lorsqu'une intégrale est finie, nous pouvons par exemple changer de variable d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale et obtenir de l'information sur cette valeur. Dans le cas qui nous intéresse, l'argument suivant serait valable.

Comme $F(k + \Delta) = F(k) + \frac{\partial F}{\partial k^\mu} \Delta^\mu + \dots$, avec $\frac{\partial F}{\partial k^\mu} \sim k^{-5}$ à grand k ,

$$\int d^4k F(k) = \int d^4k F(k + \Delta),$$

et un changement de variable de la forme $k' = k + \Delta$ laisse l'intégrale inchangée. On utilise alors l'identité suivante²¹:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k + q_1)^2 - m^2} \frac{1}{(k - q_2)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1 - x - y - z) \\ &\quad \cdot [x\{(k + q_1)^2 - m^2\} + y\{(k - q_2)^2 - m^2\} + z\{k^2 - m^2\}]^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k'^2 - m^2 + xyM^2]^{-3}, \end{aligned} \tag{5.87}$$

en utilisant la variable

$$k' = k + xq_1 - yq_2, \tag{5.88}$$

et la conservation d'impulsion

$$q_1 q_2 = \frac{1}{2}[(q_1 + q_2)^2 - q_1^2 - q_2^2] = \frac{1}{2}M^2.$$

Comme le dénominateur de l'intégrand de \mathcal{M} est une fonction paire de la variable k' , seuls les termes pairs du numérateur $\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu t_{\mu\nu}$ contribuent à l'intégration sur d^4k' . Ainsi, l'amplitude devient

$$\mathcal{M} = 16me^2 Q^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy I_{\mu\nu}, \tag{5.89}$$

²¹Dans ce paragraphe, nous utilisons quelques méthodes ou résultats qui seront discutés dans le chapitre suivant (à la section 6.3 notamment), dans le cadre du traitement général des intégrales divergentes des diagrammes en boucles.

où

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= I_{\mu\nu}^1 + I_{\mu\nu}^2, \\
I_{\mu\nu}^1 &= \lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [k^2 - m^2 + xyM^2]^{-3} \left\{ 4k_\mu k_\nu - [k^2 - m^2 + xyM^2] \eta_{\mu\nu} \right\}, \\
I_{\mu\nu}^2 &= \left\{ \lambda(1 - 4xy)(q_{2\mu}q_{1\nu} - \frac{1}{2}M^2\eta_{\mu\nu}) - \lambda' \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho q_2^\sigma \right\} \\
&\quad \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [k^2 - m^2 + xyM^2]^{-3}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

L'intégrale $I_{\mu\nu}^2$ est finie et vérifie $q_1^\mu I_{\mu\nu}^2 = 0 = q_2^\nu I_{\mu\nu}^2$. En fait²²,

$$I_{\mu\nu}^2 = -\frac{i}{32\pi^2} [m^2 - xyM^2]^{-1} \left\{ \lambda(1 - 4xy)(q_{2\mu}q_{1\nu} - \frac{1}{2}M^2\eta_{\mu\nu}) - \lambda' \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho q_2^\sigma \right\}. \tag{5.91}$$

L'évaluation de l'intégrale $I_{\mu\nu}^1$ est plus problématique puisque chaque terme est potentiellement divergent. On peut l'écrire également sous la forme

$$I_{\mu\nu}^1 = 4\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2 + xyM^2]^3} - \lambda \eta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + xyM^2]^2}. \tag{5.92}$$

Elle ne dépend que de la quantité scalaire $m^2 - xyM^2$ et doit donc être le produit de $\eta_{\mu\nu}$ et d'une fonction de cette quantité. L'invariance de jauge de la théorie impose que l'amplitude \mathcal{M} reste inchangée lorsqu'on ajoute au vecteur de polarisation ϵ_1 une contribution proportionnelle à q_1 (de même pour q_2 ajouté à ϵ_2). Ceci implique les conditions

$$q_1^\mu I_{\mu\nu} = 0 = q_2^\nu I_{\mu\nu} \tag{5.93}$$

qui ne peuvent être vérifiées par $I_{\mu\nu}^1$ que si cette intégrale proportionnelle à $\eta_{\mu\nu}$ s'annule. L'invariance de jauge semble donc exiger

$$I_{\mu\nu}^1 = 0,$$

auquel cas l'amplitude deviendrait²³

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -\frac{i\lambda}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 \left[(\epsilon_1 q_2)(\epsilon_2 q_1) - \frac{1}{2} M^2 (\epsilon_1 \epsilon_2) \right] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - 4xy}{1 - \frac{M^2}{m^2} xy} \\
&\quad + \frac{i\lambda'}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 [\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [1 - \frac{M^2}{m^2} xy]^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.94}$$

Le problème est donc de montrer l'annulation de $I_{\mu\nu}^1$, qui semble diverger. Pour cela, il convient de *régulariser l'intégrale*, c'est-à-dire de la rendre finie par une

²²L'évaluation de telles intégrales sera discutée dans le chapitre 6 [sect. 6.3, éq. (6.51)]; nous utilisons ces résultats ici, ainsi que dans l'évaluation de $I_{\mu\nu}^1$, ci-dessous.

²³Ce résultat a été obtenu par J. Steinberger (1949) [23].

modification, puis de montrer que l'intégrale modifiée s'annule et que cette annulation survit lorsque, par une procédure de limite, la modification est retirée. Notez que puisque l'annulation est prédite par l'invariance de jauge, la régularisation utilisée devrait préserver cette invariance. Il est donc légitime de l'évaluer en régularisation dimensionnelle²⁴, ceci d'autant plus que l'intégrale $I_{\mu\nu}^1$ apparaît dans le secteur de la théorie qui ne fait intervenir ni γ_5 , ni $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. On passe donc en dimension n pour calculer l'intégrale sous forme analytique. En utilisant les formules:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2 + xyM^2]^3} = \frac{i\pi^{n/2}}{4(2\pi)^n} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \eta_{\mu\nu} [m^2 - xyM^2]^{\frac{n}{2}-2},$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - m^2 + xyM^2]^2} = \frac{i\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) [m^2 - xyM^2]^{\frac{n}{2}-2},$$

il vient immédiatement

$$I_{\mu\nu}^1 = 0, \quad (5.95)$$

comme demandé par l'invariance de jauge, indépendamment de n et donc aussi lorsque $n = 4$. Le résultat (5.94) est donc confirmé par l'évaluation directe de l'intégrale, mais il est essentiel pour cela d'utiliser une procédure de calcul de $I_{\mu\nu}^1$ qui soit compatible avec l'invariance de jauge.

D'après (3.111), la largeur de la désintégration $H \rightarrow \gamma\gamma$ est alors donnée par

$$\Gamma_{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{q}|}{8\pi M^2} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2, \quad (5.96)$$

un facteur 1/2 tenant compte de la présence de deux particules identiques dans l'état final. Dans le référentiel au repos de H , les impulsions des deux photons sont

$$q_1 = (|\vec{q}|, \vec{q}), \quad q_2 = (|\vec{q}|, -\vec{q}), \quad |\vec{q}| = \frac{M}{2};$$

on peut ensuite choisir

$$\epsilon_1 = (0, \vec{\epsilon}_1), \quad \epsilon_2 = (0, \vec{\epsilon}_2), \quad \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 1$$

comme vecteurs de polarisation. Avec ces choix,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{i\lambda}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 \left[(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{q}) - \frac{1}{2} M^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) \right] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - 4xy}{1 - \frac{M^2}{m^2} xy} \\ & - \frac{i\lambda' M}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 [\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2)] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [1 - \frac{M^2}{m^2} xy]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Pour les polarisations physiques qui sont transverses,

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{q}_1 = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{q} = 0 = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{q}_2 = -\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{q},$$

²⁴Section 6.3, équations (6.52) et (6.51).

il vient finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{i\lambda M^2}{4\pi^2 m} e^2 Q^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1-4xy}{1-\frac{M^2}{m^2}xy} \\ & -\frac{i\lambda' M}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 [\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2)] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [1 - \frac{M^2}{m^2}xy]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Pour effectuer la somme sur les polarisations dans la largeur (5.96), on commence par choisir

$$\vec{q} = (0, 0, M/2),$$

et à écrire l'amplitude \mathcal{M} sous la forme

$$\mathcal{M} = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu}.$$

L'invariance de jauge $q_1^\mu \epsilon_2^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = \epsilon_1^\mu q_2^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = 0$ conduit à

$$\mathcal{M}_{0\nu} = -\mathcal{M}_{3\nu}, \quad \mathcal{M}_{\mu 0} = -\mathcal{M}_{\mu 3}.$$

La sommation sur les polarisations physiques n'implique que les directions transverses 1 et 2:

$$\sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{11}|^2 + |\mathcal{M}_{12}|^2 + |\mathcal{M}_{21}|^2 + |\mathcal{M}_{22}|^2.$$

Mais l'invariance de jauge permet de lui ajouter les polarisations non physiques pour obtenir une expression manifestement covariante:

$$\sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \mathcal{M}_{\mu\rho} \mathcal{M}_{\nu\sigma}^*;$$

les contributions des directions non physiques s'annulent mutuellement. On en déduit une règle de sommation des polarisations:

$$\sum_{pol.} \epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu*} \longrightarrow -\eta^{\mu\nu}, \quad \sum_{pol.} \epsilon_2^\rho \epsilon_2^{\sigma*} \longrightarrow -\eta^{\rho\sigma}. \quad (5.99)$$

Cette règle²⁵ n'est une égalité que lorsqu'on l'associe à un élément de matrice invariant de jauge:

$$\begin{aligned} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{pol.} \epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu*} \epsilon_2^\rho \epsilon_2^{\sigma*} \mathcal{M}_{\mu\rho} \mathcal{M}_{\nu\sigma}^* \\ &= \sum_{pol.} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \mathcal{M}_{\mu\rho} \mathcal{M}_{\nu\sigma}^* = \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^*. \end{aligned}$$

Dans le cas général que nous avons étudié jusqu'ici, $\sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2$ contient en principe trois termes d'ordre λ^2 , $\lambda\lambda'$ et λ'^2 . On voit cependant facilement que le terme d'interférence s'annule:

$$\Gamma_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 Q^4}{16\pi^3} \frac{M^3}{m^2} [\lambda^2 |I_1|^2 + \lambda'^2 |I_2|^2], \quad (5.100)$$

²⁵Similaire à l'équation (2.114).

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1-4xy}{1-\frac{M^2}{m^2}xy}, \\ I_2 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{1-\frac{M^2}{m^2}xy}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Notez que

$$I_1 = 2\frac{m^2}{M^2} + [1 - 4\frac{m^2}{M^2}] I_2.$$

La contribution d'un quark q de masse m à $\Gamma_{\gamma\gamma}$ dans le Modèle standard peut être estimée en posant

$$\lambda = \frac{em}{2M_W \sin \theta_W}, \quad \lambda' = 0,$$

dans (5.100), et en ajoutant dans l'amplitude \mathcal{M} un facteur $N = 3$ indiquant que chaque couleur de quark contribue aux diagrammes de manière équivalente. Il vient alors

$$\Gamma = \frac{\alpha^3 N^2 Q^4}{16\pi^2 \sin^2 \theta_W} \frac{M^3}{M_W^2} |I_1|^2 = \frac{\alpha^2 N^2 Q^4}{8\sqrt{2}\pi^3} G_F M^3 |I_1|^2. \quad (5.102)$$

Seule l'intégrale I_1 dépend de la masse du quark m . Elle s'annule lorsque $m \ll M$, ce qui est le cas des quarks et leptons autres que le top. D'autre part, comme $0 \leq xy \leq x(1-x) \leq 1/4$, I_1 est réelle lorsque

$$M < 2m,$$

c'est-à-dire lorsque le processus $H^0 \longrightarrow q\bar{q}$ est cinématiquement interdit. C'est par exemple le cas de la contribution du quark top si $M < 2M_W$. Lorsque $M < 2m$, on obtient

$$I_1 = 2s - 2s(4s-1) \left[\arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} \right) \right]^2, \quad s = \frac{m^2}{M^2} > \frac{1}{4}. \quad (5.103)$$

Cette fonction décroît de $I_1(1/4) = 1/2$ vers sa valeur asymptotique à grand s ,

$$I_1(s) \longrightarrow \frac{1}{3} + \mathcal{O}(s^{-1}).$$

Elle diffère très peu de la valeur $1/3$ lorsque $m > M$, si bien que $N^2 |I_1|^2$ est proche de l'unité²⁶. En fait, pour la contribution du top, on peut poser $I_1 \simeq 1/3$, puisque le cas $M < 2M_W$ est considéré ici. Numériquement, pour $M = 115$ GeV,

$$\Gamma \sim 5 \times 10^{-4} \text{ MeV}.$$

Il faut cependant noter que l'expression (5.102) est calculée dans le modèle simple défini par la densité lagrangienne (5.84); elle ne comprend pas les contributions des boucles de W^\pm , qui s'ajoutent dans l'amplitude \mathcal{M} et créent un terme

²⁶L'écart entre I_1 et $1/3$ est de 6% lorsque $m = M$.

d'interférence avec la contribution des quarks et leptons. La contribution de W^\pm augmente la largeur en deux photons d'environ un ordre de grandeur si bien que le rapport de branchement du processus $H^0 \longrightarrow \gamma\gamma$ est de l'ordre de 10^{-3} dans le Modèle standard.

L'expression (5.102) peut également être utilisée pour la désintégration en deux gluons, pour laquelle il n'y a pas de contribution due aux W^\pm . La seule différence est le remplacement du facteur $\alpha^2 N^2 Q^4$ par

$$N_g \alpha_s^2,$$

α_s étant la constante de couplage forte et N_g un facteur de couleur résultant de la somme sur les couleurs du quark sur la boucle et des gluons de l'état final. En termes des matrices de Gell-Mann λ^a ,

$$N_g = \sum_{a,b=1}^8 \left[\text{Tr} \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \right]^2 = 2$$

puisque $\text{Tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$. Il vient donc

$$\Gamma_{gg} = \frac{\alpha_s^2}{4\sqrt{2}\pi^3} G_F M^3 |I_1|^2 = \frac{\alpha \alpha_s^2}{8\pi^2 \sin^2 \theta_W} \frac{M^3}{M_W^2} |I_1|^2 \sim \frac{\alpha \alpha_s^2}{72\pi^2 \sin^2 \theta_W} \frac{M^3}{M_W^2}, \quad (5.104)$$

en n'incluant que la contribution du quark top. Numériquement, $\Gamma_{gg} \sim .1 \text{ MeV}$, avec $\alpha_s = .12$. Par rapport à l'expression (5.83), $\Gamma_{gg} \sim .06 \times \Gamma_{b\bar{b}}$.

Finalement, la désintégration en deux photons d'une particule pseudoscalaire, pour laquelle

$$\lambda = 0, \quad \lambda' \neq 0,$$

est décrite par la largeur

$$\Gamma_{ps.} = \frac{\lambda'^2 \alpha^2 Q^4}{16\pi^3} \frac{M^3}{m^2} |I_2|^2. \quad (5.105)$$

Ce résultat peut par exemple être utilisé pour la désintégration en deux photons du méson η , ou dans une moindre mesure pour celle du π^0 .

5.6.2 Une densité lagrangienne effective

Le modèle défini par la densité lagrangienne (5.84) est une théorie de champs quantique (renormalisable) qui prédit la désintégration $H \longrightarrow \gamma\gamma$ avec l'amplitude (5.94) et la largeur (5.100). Ce résultat est obtenu en théorie des perturbations à l'ordre $e^2 \lambda$ ou $e^2 \lambda'$ du calcul de l'amplitude. La largeur est exprimée en fonction des paramètres de \mathcal{L} , c'est-à-dire les masses, la charge électrique du fermion ψ et les constantes de Yukawa λ et λ' . Ces quantités peuvent être mesurées à partir d'autres processus tels que des collisions fermion-photon ou fermion-scalaire.

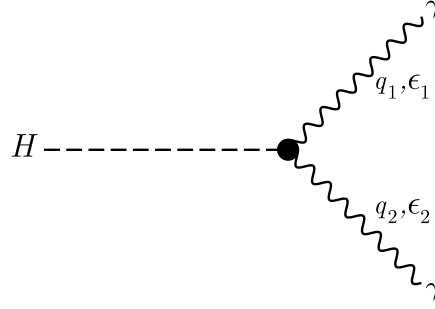


Fig. 5.14 Vertex de l'interaction effective $H \rightarrow \gamma\gamma$

Dans la limite où le fermion est beaucoup plus lourd que le scalaire, $m \gg M$, il peut être intéressant de décrire les processus physiques impliquant des énergies $E \ll m$ au moyen d'une densité lagrangienne *effective* qui ne contienne que le champ scalaire H et le photon. Cette théorie devra inclure une interaction permettant la désintégration $H \rightarrow \gamma\gamma$, qui n'est pas nécessairement négligeable. D'après (5.100), la largeur se comporte comme $\lambda^2 m^{-2}$ ou $\lambda'^2 m^{-2}$. Si, comme dans le Modèle standard, la constante de couplage λ est elle-même proportionnelle à m , Γ ne dépend que faiblement de m par l'intermédiaire de l'intégrale I_1 . Cette théorie effective dépendra de nouveaux paramètres et ne sera pas renormalisable: elle ne peut être utile que dans le domaine des énergies inférieures à la masse du fermion m .

L'invariance de jauge de l'interaction électromagnétique doit être imposée à l'interaction effective $H \rightarrow \gamma\gamma$. Il y a deux termes possibles,

$$\mathcal{L}_{I,eff.} = \frac{1}{2}\alpha H F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\beta H \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (5.106)$$

et l'interaction contient deux paramètres arbitraires α et β , les constantes de couplage de la théorie. Ces paramètres ont une dimension physique (masse) $^{-1}$ et l'interaction effective (5.106) n'est pas renormalisable²⁷. Si le boson H est un scalaire, la conservation de la parité par les interactions électromagnétiques indique que $\beta = 0$. L'interaction d'un pseudoscalaire utilisera l'autre terme, $\alpha = 0$.

La règle de Feynman pour l'interaction (5.106) associe un facteur

$$-i\alpha[(q_1 q_2)\eta_{\mu\nu} - q_{1\nu}q_{2\mu}] - i\beta\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_1^\rho q_2^\sigma$$

au vertex de la figure 5.14. Il en résulte que l'amplitude du processus $H \rightarrow \gamma\gamma$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{eff.} &= \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \{ -i\alpha[(q_1 q_2)\eta_{\mu\nu} - q_{1\nu}q_{2\mu}] - i\beta\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_1^\rho q_2^\sigma \} \\ &= i\alpha[(\epsilon_1 q_2)(\epsilon_2 q_1) - \frac{1}{2}M^2(\epsilon_1 \epsilon_2)] - i\beta\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma. \end{aligned}$$

²⁷Voir la section 6.6.

La comparaison des amplitudes \mathcal{M} [équ. (5.94)] et $\mathcal{M}_{eff.}$ montre la même dépendance dans les impulsions et les polarisations: la description effective est suffisante pour déterminer la forme de l'amplitude de probabilité. Mais celle-ci est exprimée en fonction des paramètres α et β , alors que la connaissance de la théorie (5.84) implique que

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\lambda}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 I_1, \\ \beta &= -\frac{\lambda'}{2\pi^2 m} e^2 Q^2 I_2,\end{aligned}$$

les intégrales I_1 et I_2 étant définies dans (5.101). D'un point de vue pratique, la mesure de la largeur $\Gamma_{\gamma\gamma}$ est une mesure de α , si on suppose que H est scalaire ($\beta = 0$). La relation ci-dessus, entre α , λ , eQ et m est inutile tant que l'existence du fermion ψ et les valeurs des nombres quantiques eQ et m ne sont pas connues. Dans le Modèle standard, λ et λ' sont connus:

$$\alpha = -\frac{e^3}{4\pi^2 M_W \sin \theta_W} I_1 \simeq -\frac{e^3}{12\pi^2 M_W \sin \theta_W}, \quad \beta = 0.$$

Références

La littérature propose un nombre considérable d'exemples physiques étudiés en théorie des perturbations. C'est en particulier le cas des ouvrages de Renton [10], Halzen et Martin [8], Commins et Bucksbaum [21], Aitchison et Hey [9].

Pour l'électrodynamique quantique, voir également:
Akhiezer et Berestetskii [24].

Sur le modèle des partons, en plus des références ci-dessus:
Ynduráin [20], ou encore l'ouvrage de Feynman [25].

Les problèmes d'états liés sont traités par exemple dans:
Itzykson et Zuber [1], chapitre 10.

Exercices

5.1 Etablir l'identité de Gordon:

$$2m \bar{u}^{(\beta')}(k') \gamma^\mu u^{(\beta)}(k) = \bar{u}^{(\beta')}(k') \left((k + k')^\mu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (k' - k)_\nu \right) u^{(\beta)}(k),$$

lorsque $(\not{k} - m)u^{(\beta)}(k) = 0$. Montrer que

$$\bar{u}^{(\beta')}(k')[\gamma_\mu, \gamma_\nu](k + k')^\nu u^{(\beta)}(k) = 2(k' - k)_\mu \bar{u}^{(\beta')}(k')u^{(\beta)}(k).$$

5.2 Adapter la discussion de la diffusion inélastique profonde électron–proton (sect. 5.5) au cas de la diffusion neutrino+nucléon \rightarrow lepton chargé+ X , par échange d’un boson W^\pm (interaction faible à courant chargé):

- calculer le tenseur leptonique $L_{\mu\nu}$ à partir de l’interaction faible à courant chargé des leptons (sect. 4.5);
- calculer $q^\mu J_{(lept.)\mu}^+$, q étant l’impulsion transférée (par échange du W^\pm) du courant leptonique au courant hadronique. En déduire que la conservation du courant leptonique faible est violée par la différence de masse entre le neutrino et le lepton chargé;
- donner l’expression la plus générale du tenseur hadronique $W_{\mu\nu}$, dans la limite où toutes les impulsions sont grandes par rapport aux masses des leptons;
- identifier dans $L_{\mu\nu}$ et $W_{\mu\nu}$ les contributions violant la parité P ;
- donner l’expression de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}$ (selon la notation utilisée dans la section 5.5).

Chapitre 6

Renormalisation

Dans le chapitre 3, nous avons développé la théorie des perturbations en divisant la densité lagrangienne en une partie libre, quadratique dans les champs, qui peut être résolue et quantifiée exactement, et une partie d'interaction qui ne contient que des termes d'ordres supérieurs à deux dans les champs et qui est traitée comme une perturbation. Il s'avère cependant impossible d'utiliser sans modification ce développement perturbatif au-delà de l'ordre le plus bas de l'expansion. On rencontre en effet rapidement des quantités divergentes, par l'intermédiaire de diagrammes de Feynman comprenant des boucles et donc des intégrations d^4k sur des impulsions internes non contraintes par la conservation d'énergie-impulsion aux vertex. Il apparaît alors des intégrales telles que par exemple

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - M^2 + i\epsilon},$$

qui diverge dans le domaine ultraviolet des grandes valeurs de l'impulsion k circulant sur la boucle, d'où le qualificatif de *divergence ultraviolette*.

L'apparition de divergences dans certains termes de l'expansion perturbative n'est pas nécessairement le signe d'une incohérence fatale de la théorie de champs en interaction. Elle peut plus simplement indiquer que la théorie des perturbations utilisée n'est pas appropriée. La contribution d'un diagramme de Feynman n'a pas de signification physique propre: seuls les éléments de matrice S ont un sens physique (ainsi que dans une certaine mesure les fonctions de Green qui permettent de les calculer par la formule de réduction). Le problème posé par l'apparition de divergences est alors celui de l'existence d'une formulation de la théorie des perturbations qui conduise à des éléments de matrice S finis et des fonctions de Green bien définies à *chaque ordre perturbatif*¹.

Pour aborder ce problème, il s'avère utile de commencer par introduire une généralisation de la théorie des perturbations faisant usage de contre-termes. Il convient ensuite de se donner une prescription permettant d'"évaluer les infinis"

¹Sans même parler de convergence ou de sommabilité de l'expansion perturbative.

de manière non ambiguë: c'est la *régularisation*. Les contre-termes seront ensuite utilisés pour *renormaliser* la théorie, de manière à obtenir par une procédure de limite mathématique une expansion perturbative des grandeurs physiques qui soit finie et bien définie à chaque ordre. La théorie sera *renormalisable*, et donc utilisable comme théorie physique, si l'ensemble de cette procédure peut être menée à bien.

Ce chapitre n'a pas l'ambition de traiter de manière complète la renormalisation des théories de champs utiles à la description des interactions fondamentales. Il se bornera à introduire les idées et les techniques de la renormalisation en considérant l'exemple concret de l'électrodynamique quantique, une théorie de jauge *abélienne*, et à l'ordre d'une boucle uniquement. Bien que les techniques utilisées dans cet exemple soient applicables dans un contexte plus général, la renormalisation des théories de jauge non abéliennes telles que la chromodynamique quantique ou la théorie de Glashow, Salam et Weinberg de l'interaction électrofaible nécessite l'introduction, entre autres subtilités, de champs "fantômes" (de Faddeev et Popov) qui ne seront pas discutés ici.

6.1 Contre-termes et théorie des perturbations

L'approche de la théorie des perturbations utilisée jusqu'ici n'est certainement pas unique puisque, en particulier, la division entre partie libre et partie d'interaction est arbitraire. Pour concrétiser ce point, considérons la densité lagrangienne de l'électrodynamique quantique d'un fermion de Dirac de charge e ²,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \delta\mathcal{L}, \quad (6.1)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu.$$

Ainsi qu'expliqué dans la section 2.4, il convient d'ajouter un terme fixant la jauge: nous avons utilisé

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2.$$

Pour développer la théorie des perturbations, nous avons précédemment défini la partie libre par

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (6.2)$$

et la densité lagrangienne d'interaction par

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (6.3)$$

²Les ordres normaux seront omis.

Supposons maintenant que les normalisations des champs A_μ et ψ soient modifiées par des facteurs constants (réels):

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sqrt{Z_3} A_\mu^r, \\ \psi &= \sqrt{Z_2} \psi_r. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Les indices r indiquent des champs *renormalisés*. La densité lagrangienne devient alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu}^r F^{r\mu\nu} + Z_2 [\bar{\psi}_r (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_r] + e Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_r \gamma^\mu A_\mu^r \psi_r + \delta\mathcal{L}^r,$$

avec

$$F_{\mu\nu}^r = \partial_\mu A_\nu^r - \partial_\nu A_\mu^r.$$

On peut de même renormaliser les paramètres m (la masse du fermion) et e (sa charge électrique) en posant:

$$\begin{aligned} m &= Z_0 Z_2^{-1} m_r, \\ e &= Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e_r, \end{aligned} \quad (6.5)$$

pour obtenir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu}^r F^{r\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi}_r i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_r - Z_0 m_r \bar{\psi}_r \psi_r + e_r Z_1 \bar{\psi}_r \gamma^\mu A_\mu^r \psi_r + \delta\mathcal{L}^r. \quad (6.6)$$

Chacun des quatre termes, décrivant la propagation du photon, celle du fermion, la masse du fermion et l'interaction, fait apparaître une constante de normalisation. On peut montrer³ que le paramètre λ apparaissant dans le terme fixant la jauge n'a pas besoin d'être renormalisé; nous utiliserons donc

$$\delta\mathcal{L}^r = -\frac{1}{2} \lambda (\partial^\mu A_\mu^r)^2.$$

A l'exception de $\delta\mathcal{L}$, la théorie (6.6) est invariante sous les transformations de jauge

$$\begin{aligned} A_\mu^r &\longrightarrow A_\mu^r + e_r^{-1} \partial_\mu \alpha, \\ \psi_r &\longrightarrow e^{i\alpha(Z_1/Z_2)} \psi_r, \end{aligned} \quad (6.7)$$

pour une fonction $\alpha(x)$ arbitraire. Ceci n'a de sens que si le rapport Z_1/Z_2 reste fini. Et si Z_1/Z_2 est un nombre fini, on peut toujours choisir $Z_1 = Z_2$ par une redéfinition finie de e . Nous verrons plus loin⁴ que $Z_1 = Z_2$ à l'ordre d'une boucle. La généralisation de cette égalité à tous les ordres est une *identité de Ward*. On en déduit que

$$\begin{aligned} e A_\mu &= Z_1 Z_2^{-1} e_r A_\mu^r = e_r A_\mu^r, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ie A_\mu = \partial_\mu - ie_r A_\mu^r. \end{aligned}$$

³Nous le verrons à l'ordre d'une boucle dans le paragraphe 6.4.2, et dans la section 6.5.

⁴Dans le paragraphe 6.4.4 et à la section 6.5.

La notion de couplage minimal par l'introduction de dérivées covariantes est préservée par l'introduction des constantes de renormalisation.

Dans la densité lagrangienne (6.6), le champ de jauge A_μ^r est couplé par un terme $Z_1 A_\mu^r j_r^\mu$ au courant

$$j_r^\mu = e_r \bar{\psi}_r \gamma^\mu \psi_r. \quad (6.8)$$

Par le théorème de Noether et l'invariance de jauge (6.7), ce courant est conservé: $\partial_\mu j_r^\mu = 0$.

Dans la limite $e_r \rightarrow 0$, la théorie est libre. Il n'y a donc pas lieu d'introduire des constantes Z_i , $i = 0, \dots, 3$ dans cette limite. On posera donc

$$Z_i = 1 + \Delta_i, \quad \lim_{e_r \rightarrow 0} \Delta_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (6.9)$$

Chaque quantité Δ_i est, formellement, d'ordre e_r , et la présence de ces grandeurs est donc caractéristique de la théorie interactive. Il est alors naturel de considérer la densité lagrangienne (6.6) comme une somme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I^r \quad (6.10)$$

d'une partie libre \mathcal{L}_0 , quadratique dans les champs, identique à (6.2) mais fonction des champs renormalisés A_μ^r et ψ^r , et de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^r = & e_r \bar{\psi}_r \gamma^\mu A_\mu^r \psi_r \\ & - \frac{1}{4} \Delta_3 F_{\mu\nu}^r F^{r\mu\nu} + \bar{\psi}_r (\Delta_2 i \gamma^\mu \partial_\mu - \Delta_0 m_r) \psi_r + e_r \Delta_1 \bar{\psi}_r \gamma^\mu A_\mu^r \psi_r, \end{aligned} \quad (6.11)$$

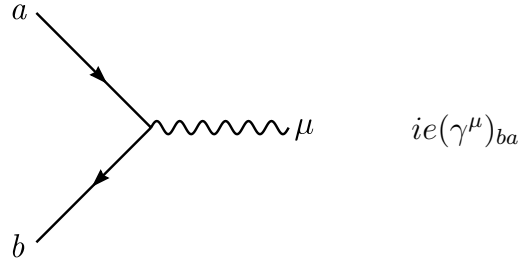
la seconde ligne contenant les *contre-termes*. Bien que cette expression comprenne également des contributions quadratiques dans les champs, nous allons la traiter en théorie des perturbations comme une interaction: elle s'annule en effet dans la limite $e_r \rightarrow 0$, d'après (6.9).

L'intérêt de l'utilisation de la densité lagrangienne (6.10), au lieu de (6.1), est que la même physique est décrite au moyen de paramètres arbitraires plus nombreux du fait de la présence des quantités Δ_i . L'idée à la base de la renormalisation est d'utiliser la liberté de choix de ces quantités pour compenser les divergences de certains diagrammes de Feynman de manière à assurer que la somme de toutes les contributions à un élément de matrice S soit finie, à chaque ordre de la théorie des perturbations. Ceci impose cependant d'admettre des valeurs infinies pour les constantes Δ_i , et une procédure de limite qui permette de sommer formellement des quantités divergentes. La forme des contre-termes introduits par l'intermédiaire des constantes Δ_i ne pourra donc être établie qu'avec l'adoption d'une régularisation.

Il est important de remarquer que nous ne disposons que de *quatre*⁵ grandeurs arbitraires Δ_i à ajuster pour renormaliser toutes les divergences potentielles de l'expansion perturbative de toutes les amplitudes physiques de la théorie.

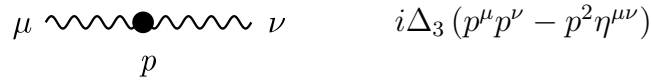
⁵Trois avec l'identité de Ward $Z_1 = Z_2$.

Les règles de Feynman utilisées lors du traitement perturbatif de la théorie (6.10), contiennent quatre vertex correspondant aux quatre termes de la partie interactive \mathcal{L}_I^r . Le premier terme est l'interaction fermion–fermion–photon usuelle de l'électrodynamique quantique, dont la règle de Feynman est, en omettant les indices r :

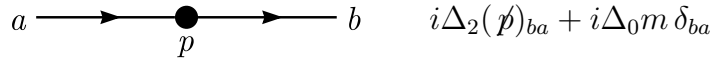


$$ie(\gamma^\mu)_{ba}$$

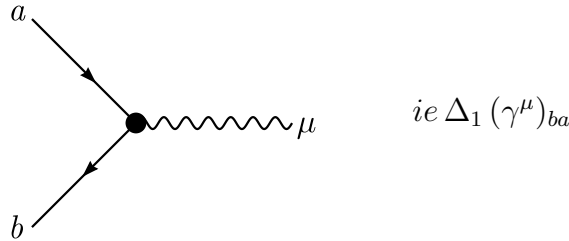
Les règles de Feynman associées aux trois interactions générées par les contre-termes seront:



$$i\Delta_3(p^\mu p^\nu - p^2 \eta^{\mu\nu})$$



$$i\Delta_2(p)_{ba} + i\Delta_0 m \delta_{ba}$$



$$ie \Delta_1(\gamma^\mu)_{ba}$$

Ces trois nouvelles “interactions” seront respectivement d’ordres e^2 , e^2 et e^3 puisque le calcul des Δ_i montrera qu’ils sont d’ordre e^2 . Elles seront utilisées pour construire l’ensemble des diagrammes de Feynman qui contribuent à un ordre fixé e^k de la théorie des perturbations.

A l’ordre non banal le plus bas, les quantités Δ_i peuvent être évaluées à partir des fonctions de Green:

- $\langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle$ (fonction à deux points du fermion, propagateur fermionique), à l’ordre e^2 .
- $\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$ (fonction à deux points du photon, propagateur pho-

tonique), à l'ordre e^2 .

- $\langle 0 | T \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) A_\mu(z) | 0 \rangle$ (fonction à trois points, vertex), à l'ordre e^3 .

Le calcul est effectué en espace des impulsions, à l'aide des règles de Feynman établies dans le paragraphe 3.3.4 et ci-dessus.

À l'ordre e^2 , la fonction à deux points du fermion est donnée par la somme des diagrammes de la figure 6.1. D'après les règles de Feynman, cette somme s'écrit⁶

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [i\Delta_2 \not{p} + i\Delta_0 m] \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i\tilde{\Sigma}(p)] \frac{i}{\not{p} - m} \\ & \equiv \frac{i}{\not{p} - m} [-i\sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

où $-i\tilde{\Sigma}(p)$ est la contribution du diagramme à une boucle amputé de ses propagateurs externes et on a défini la quantité

$$\sigma(p) = \not{p} - m - \Delta_2 \not{p} - \Delta_0 m + \tilde{\Sigma}(p).$$

La contribution $\tilde{\Sigma}(p)$ contient une intégrale divergente sur l'impulsion parcourant la boucle. Notez qu'à l'ordre e^2 , on peut écrire

$$[-i\sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} = 1 - \frac{\Delta_2 \not{p} + \Delta_0 m - \tilde{\Sigma}(p)}{\not{p} - m} = \left[1 + \frac{\Delta_2 \not{p} + \Delta_0 m - \tilde{\Sigma}(p)}{\not{p} - m} \right]^{-1}$$

et la fonction à deux points du fermion devient

$$\frac{i}{\not{p} - m + \Delta_2 \not{p} + \Delta_0 m - \tilde{\Sigma}(p)}.$$

La quantité

$$\not{p} - m + \Delta_2 \not{p} + \Delta_0 m - \tilde{\Sigma}(p) \equiv \not{p} - m - \Sigma(p),$$

est alors le *propagateur inverse* du fermion, et

$$\Sigma(p) = -\Delta_2 \not{p} - \Delta_0 m + \tilde{\Sigma}(p) \quad (6.13)$$

est la *self-énergie* du fermion.

Il existe une généralisation de cette discussion valable au-delà de l'ordre e^2 . Supposons que $-i\Gamma(p)$ soit la somme de tous les diagrammes de Feynman *irréductibles à une particule* ($1PI^7$) de l'expansion perturbative de la fonction à

⁶Nous utilisons

$$\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Et les contributions $i\epsilon$ aux dénominateurs seront presque toujours omises dans ce chapitre.

⁷ $1PI$: *one-particle irreducible*.

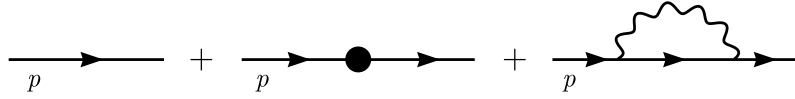


Fig. 6.1 Propagateur fermionique à l'ordre d'une boucle.

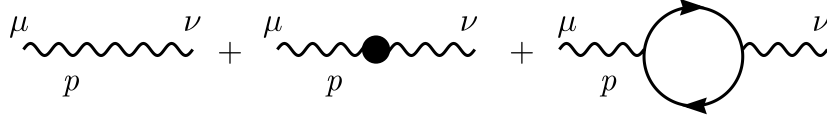


Fig. 6.2 Propagateur photonique à l'ordre d'une boucle.

deux points; un diagramme est 1PI s'il reste connexe lorsqu'on coupe n'importe laquelle de ses lignes internes; on amputera de plus l'expression de ces diagrammes des deux propagateurs externes. La fonction de Green à deux points s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Gamma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Gamma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Gamma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\Gamma(p)}{\not{p} - m} \right)^n = \frac{i}{\not{p} - m} \left(1 - \frac{\Gamma(p)}{\not{p} - m} \right)^{-1} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - \Gamma(p)}, \end{aligned}$$

et le propagateur inverse est simplement $\not{p} - m - \Gamma(p)$. En conséquence,

$$\Sigma(p) = \Gamma(p). \quad (6.14)$$

A l'ordre e^2 , $-i\Gamma(p) = i\Delta_2 \not{p} + i\Delta_0 m - i\tilde{\Sigma}(p)$.

La fonction de Green à deux points du photon est donnée à l'ordre e^2 par la somme des diagrammes de la figure 6.2. Son expression est de la forme:

$$\frac{-i}{p^2} \left[\eta_{\mu\rho} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right] [-i\Pi^{\rho\sigma}(p)] \frac{-i}{p^2} \left[\eta_{\sigma\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\sigma p_\nu}{p^2} \right], \quad (6.15)$$

avec

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (1 - \Delta_3)(p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) - \lambda p_\mu p_\nu + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p), \quad (6.16)$$

la contribution du diagramme à une boucle amputé des lignes externes étant décrite par la quantité $-i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p)$, qui comprend également une intégrale divergente.

Finalement, la figure 6.3 contient les diagrammes à inclure dans le calcul jusqu'à l'ordre e^3 de la fonction de vertex. Comme précédemment, on peut écrire cette somme de diagrammes sous la forme:

$$\frac{-i}{(q-p)^2} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{(q-p)_\mu (q-p)_\nu}{(q-p)^2} \right] \frac{i}{\not{q} - m} [ie\Lambda^\nu(p, q)] \frac{i}{\not{p} - m}. \quad (6.17)$$

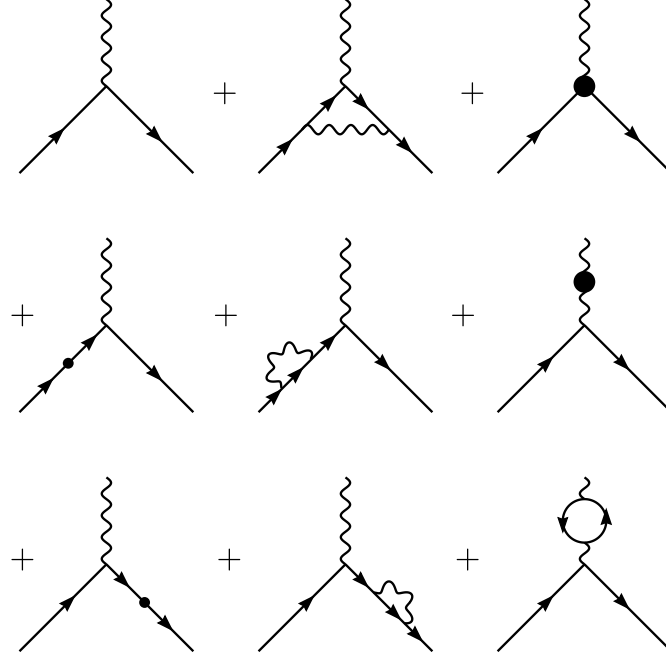


Fig. 6.3 Fonction de vertex à l'ordre d'une boucle.

Les impulsions p et q sont respectivement liées aux lignes fermioniques entrantes et sortantes. Le photon aura donc une impulsion entrante $q - p$.

Les contributions des six derniers diagrammes de la figure 6.3 sont clairement obtenues à partir de celles correspondant aux figures 6.1 et 6.2. Par opposition aux diagrammes 1PI, ces six diagrammes sont qualifiés de *réductibles*: il est possible de les rendre non connexes en coupant une ligne interne. Contrairement à celle d'un diagramme 1PI, la contribution d'un diagramme réductible est toujours factorisée, chaque facteur pouvant être tiré d'un diagramme de Feynman plus simple.

Avec les résultats (6.12) et (6.15) et en ne tenant compte que des termes d'ordre e et e^3 , on peut certainement écrire:

$$\begin{aligned}
 ie\Lambda^\nu(p, q) = & \left[1 + \frac{\Sigma(q)}{\not{q} - m} \right] \Gamma^\nu(p, q) \left[1 + \frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m} \right] \\
 & \cdot \frac{-i}{(q - p)^2} \left[\eta_{\rho\sigma} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{(q - p)_\rho (q - p)_\sigma}{(q - p)^2} \right] [-i\Pi^{\sigma\nu}(q - p)],
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

où $\Gamma^\nu(p, q)$ est la fonction de Green irréductible à une particule (1PI) de vertex, amputée des lignes externes, aussi appelée *fonction de vertex propre*. Son expression suit des trois premiers diagrammes de la figure 6.3:

$$\Gamma^\nu(p, q) = ie \left[(1 + \Delta_1) \gamma^\nu + \tilde{\Lambda}^\nu(p, q) \right], \tag{6.19}$$

la contribution divergente du deuxième diagramme amputé de ses lignes externes étant représentée par $ie\tilde{\Lambda}^\nu(p, q)$.

Chacune des trois fonctions de Green considérées ci-dessus comprend un diagramme à une boucle divergent: les infinités sont cachées dans les quantités $\tilde{\Sigma}(p)$, $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p)$ et $\tilde{\Lambda}^\rho(p, q)$. On peut alors déterminer les quatre constantes de renormalisation Δ_i au deuxième ordre de la théorie des perturbations en demandant que les fonctions de Green soient libres de divergences⁸. Prouver à cet ordre la renormalisabilité de l'électrodynamique quantique revient à montrer que les quatre constantes ainsi déterminées suffisent à supprimer les divergences de toutes les fonctions de Green calculées à cet ordre perturbatif.

6.2 L'électrodynamique à l'ordre d'une boucle: divergences

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence trois diagrammes à une boucle divergents qui apparaissent dans le calcul des fonctions à deux points du fermion et du photon à l'ordre e^2 , ainsi que dans la fonction de vertex à l'ordre e^3 . Avant de construire une procédure de régularisation qui permette d'évaluer les quantités divergentes $\tilde{\Sigma}(p)$, $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p)$ et $\tilde{\Lambda}^\rho(p, q)$, il convient de considérer brièvement l'ensemble des divergences susceptibles d'apparaître dans un calcul de fonction de Green à l'ordre d'une boucle.

Les règles de Feynman en espace des impulsions associées à la densité lagrangienne (6.1) indiquent qu'un diagramme de Feynman à une boucle contenant n_F propagateurs fermioniques et n_γ propagateurs photoniques aura un degré de divergence "naïf" donné par

$$d = 4 - n_F - 2n_\gamma,$$

puisque son expression contient une intégration d^4k sur une impulsion interne. Le diagramme ne peut diverger que si $d \geq 0$. Seules les fonctions de Green pour deux fermions [propagateur fermionique, $(n_F, n_\gamma) = (1, 1)$], deux photons [propagateur photonique, $(n_F, n_\gamma) = (2, 0)$], deux photons et un fermion [vertex, $(n_F, n_\gamma) = (2, 1)$], trois photons [$(n_F, n_\gamma) = (3, 0)$] et quatre photons [$(n_F, n_\gamma) = (4, 0)$] sont donc susceptibles d'être divergentes à l'ordre d'une boucle. L'invariance sous conjugaison de charge de l'électrodynamique (ou le théorème de Furry⁹) impose cependant l'annulation de l'interaction à trois photons, et donc du diagramme avec $(n_F, n_\gamma) = (3, 0)$. D'autre part, la fonction de Green à quatre photons est finie. Son calcul montre que les conditions imposées par l'invariance de jauge sont parfois capables de réduire le degré de divergence d'un diagramme de Feynman. Nous allons également le voir en étudiant le propagateur du photon à l'ordre d'une boucle. On en conclut que les trois diagrammes de Feynman des figures 6.4, 6.5 et 6.6 contiennent toutes les divergences de l'électrodynamique quantique

⁸Autres que les pôles physiques des fonctions de Green, sur la couche de masse des champs externes.

⁹Paragraphe 3.3.4.

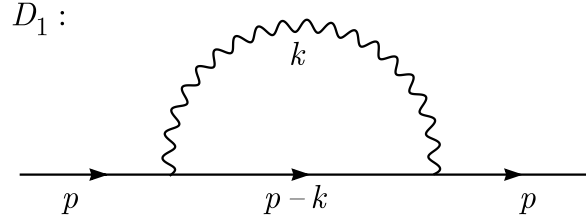


Fig. 6.4 Propagateur fermionique: diagramme divergent à une boucle.

à l'ordre d'une boucle. Avant d'en donner une régularisation, il est utile d'étudier rapidement leur structure.

Propagateur fermionique, diagramme D1

A l'ordre e^2 , la fonction à deux points du fermion est donnée par l'expression (6.12), correspondant aux diagrammes de la figure 6.1. La contribution du diagramme divergent D1 de la figure 6.4 est:

$$\frac{i}{\not{p} - m} [-i\tilde{\Sigma}(p)] \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (6.20)$$

avec

$$-i\tilde{\Sigma}(p) = (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\nu. \quad (6.21)$$

L'intégrant se comporte comme k^{-3} aux grandes valeurs de k : si on introduisait une coupure Λ de l'intégration¹⁰ à grand k , on s'attendrait à voir l'intégrale diverger linéairement en Λ . D'autre part, la quantité $\tilde{\Sigma}(p)$ a la dimension d'une énergie, elle dépend de l'impulsion p et du paramètre m . Il est tentant de poser

$$\tilde{\Sigma}(p) = A\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \not{p} - B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) m,$$

avec deux fonctions A et B de la variable sans dimension p^2/m^2 déterminées par l'intégrale (6.21). Celle-ci est cependant divergente et cette décomposition n'a guère de sens tant que l'intégrale n'est pas régularisée.

Propagateur du photon, diagramme D2

Le propagateur du photon, calculé à l'ordre e^2 , correspond aux diagrammes de la figure 6.2 et aux expressions (6.15) et (6.16). La contribution du diagramme D2 (figure 6.5) s'écrit:

$$\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\rho} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\rho}{p^2 + i\epsilon} \right] [-i\tilde{\Pi}^{\rho\sigma}(p)] \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\sigma\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\sigma p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right],$$

¹⁰Un *cut-off* Λ .

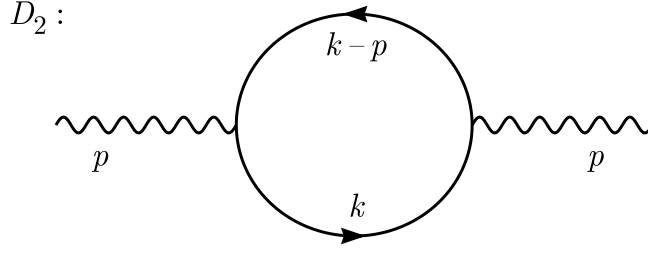


Fig. 6.5 Propagateur photonique: diagramme divergent à une boucle.

avec

$$-i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (6.22)$$

Le signe $-$ est dû à la boucle fermionique. Il est à noter que $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p)$ ne dépend pas du paramètre de jauge λ .

L'expression (6.22) contient une intégrale infinie qui se comporte apparemment comme $\int d^4k k^{-2}$ à grand k : la divergence est potentiellement quadratique. Nous allons pour l'instant manipuler cette intégrale indéfinie sans nous préoccuper de lui donner un sens. Premièrement,

$$p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\not{p} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \right].$$

Ensuite, puisque $\not{p} = \not{k} - m - (\not{k} - \not{p} - m)$, il vient:

$$p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\nu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} - \gamma_\nu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right].$$

En passant de la variable d'intégration k à $k' = k - p$ dans la première intégrale, une manipulation qui n'a cependant guère de sens pour une intégrale quadratiquement divergente, on obtient

$$p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = 0. \quad (6.23)$$

En fait, le résultat (6.23) est une conséquence de l'invariance de jauge. Il est en particulier vérifié par le propagateur inverse¹¹ à l'ordre le plus bas,

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2,$$

lorsque le terme fixant la jauge $-\lambda p_\mu p_\nu$ est omis. Puisqu'en général

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = C(p^2)\eta_{\mu\nu} + D(p^2)p_\mu p_\nu, \quad (6.24)$$

la condition (6.23) conduirait à

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \tilde{\Pi}(p^2). \quad (6.25)$$

¹¹Equation (6.16).

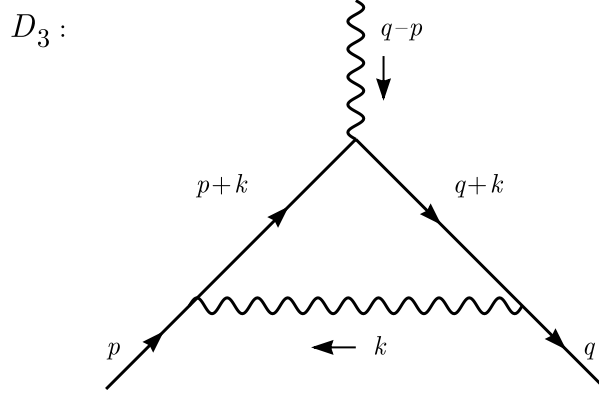


Fig. 6.6 Vertex: diagramme divergent à une boucle.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}(p^2) &= -\frac{1}{3p^2} \eta^{\mu\nu} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) \\
 &= \frac{ie^2}{3p^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
 &= \frac{8ie^2}{3p^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2m^2 - k^2 + kp}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon]}.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

La décomposition (6.24) suit uniquement du caractère tensoriel de $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ qui ne dépend que du vecteur p^μ : les seuls tenseurs symétriques possibles sont alors $p_\mu p_\nu$ et $\eta_{\mu\nu}$. Par contre, l'équation (6.25) suit du résultat (6.23) qui n'est applicable qu'après régularisation des intégrales, et pour autant que cette régularisation respecte l'invariance de jauge de la théorie.

Vertex, diagramme D3

A l'ordre e^3 , la fonction de vertex reçoit les contributions des diagrammes de la figure 6.3, rassemblées dans les expressions (6.17) et (6.18). La contribution du diagramme D3 de la figure 6.6, amputé des lignes externes, s'écrit

$$\begin{aligned}
 ie\tilde{\Lambda}^\mu(p, q) &= -i^3 (ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\rho\sigma} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2 + i\epsilon} \right] \\
 &\quad \cdot \gamma^\rho \frac{\not{k} + \not{q} + m}{(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{p} + m}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\sigma.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

L'intégrale infinie se comporte à grand k comme $\int d^4k k^{-4}$; elle diverge logarithmiquement.

Il s'agit ensuite d'introduire une régularisation des divergences apparaissant dans les expressions (6.21), (6.22) et (6.27) des diagrammes D1, D2 et D3. La régularisation n'est pas une opération physique; il s'agit d'une procédure

mathématique qui doit rester sans influence sur les résultats de la théorie des perturbations. Il existe différentes méthodes de régularisation. Dans le cas considéré ici d'une théorie de jauge invariante sous parité, la régularisation dimensionnelle est la plus satisfaisante puisqu'elle préserve explicitement les symétries de la théorie de champs.

6.3 Régularisation dimensionnelle

Le problème consiste à donner un sens à des intégrales divergentes du type

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (6.28)$$

sans détruire les symétries de la théorie (symétrie de jauge, invariance de Lorentz). On aimerait également que des manipulations analogues à celles menant à l'équation (6.23) soient valables puisque cette condition reflète l'invariance de jauge de la théorie. Ces manipulations utilisent des changements de variables tels que $k' = k - p$ et il n'est donc pas judicieux de régulariser les intégrales en limitant le domaine d'intégration par une coupure sur la variable k^μ : une telle coupure générerait des termes de bord lors de changements de variables d'intégration. De même, les propagateurs résultent de la densité lagrangienne qu'on aimerait ne pas modifier.

Sans être unique, la régularisation dimensionnelle remplit naturellement ces conditions. L'idée de base est l'observation que des intégrales telles que I deviennent finies en dimension d'espace-temps suffisamment petite. Il est ensuite possible de les définir par continuation analytique pour les dimensions d'espace-temps n complexes. Finalement, les divergences apparaissant en $n = 4$ seront précisément définies comme la limite pour $n \rightarrow 4$ de la valeur de l'intégrale en n complexe. Cette procédure permet de formellement sommer des quantités divergentes: ces quantités sont bien définies dans le plan complexe n où il est possible de les sommer; ensuite, la somme sera finie si la limite $n \rightarrow 4$ est finie.

6.3.1 La fonction gamma

La *fonction gamma*, $\Gamma(\alpha)$, joue un rôle important dans la procédure de régularisation dimensionnelle. Ce bref paragraphe a pour but de mentionner ses propriétés utiles dans la suite. Tout d'abord, l'égalité

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \quad (6.29)$$

sert en fait de définition de $\Gamma(\alpha)$. Ensuite, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction méromorphe¹² de la variable complexe α qui possède des pôles simples lorsque

$$\alpha = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

¹²Ses seules singularités sont des pôles.

Le résidu du pôle en $\alpha = -n$ est $(-1)^n/n!$. Il en existe une représentation intégrale (dite d'Euler), qui est valable (analytique) dans le demi-plan complexe droit:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\alpha-1}, \quad \text{Re } \alpha > 0. \quad (6.30)$$

Une continuation analytique dans le plan complexe entier amputé des pôles en $\alpha = -n$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) existe. La propriété (6.29) peut en particulier être utilisée pour prolonger la représentation (6.30) dans la région $\text{Re } \alpha < 0$, $\text{Im } \alpha \neq 0$. Il suit de (6.30) et de (6.29) que

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (6.31)$$

D'autre part, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Nous utiliserons également les deux limites:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} - \gamma + \mathcal{O}(\alpha), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha) A^\alpha &= \frac{1}{\alpha} - \gamma + \ln A + \mathcal{O}(\alpha), \end{aligned} \quad (6.32)$$

où γ est la *constante d'Euler*,

$$\gamma = .577215 \dots \quad (6.33)$$

Finalement, par le changement de variable $Du = t$ dans (6.30), on obtient

$$\frac{1}{D^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-uD}, \quad \text{Re } \alpha > 0, \quad D > 0. \quad (6.34)$$

Cette égalité sera utilisée pour représenter les dénominateurs D des propagateurs (élevés à une puissance entière α) sous la forme d'une intégrale sur un *paramètre de Schwinger* u .

6.3.2 Une intégrale en dimension n

Considérons tout d'abord l'intégrale

$$I = \int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + A)^\alpha},$$

où le vecteur $\tilde{k} = (\tilde{k}^1, \dots, \tilde{k}^n)$ est *euclidien*, c'est-à-dire

$$\tilde{k}^2 = (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^2)^2 + \dots + (\tilde{k}^n)^2.$$

D'après (6.34), on peut écrire¹³

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-uA} \int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} e^{-u\tilde{k}^2}.$$

¹³Il faut pour cela que A soit positif.

L'intégration sur $d^n \tilde{k}$ est gaussienne:

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} e^{-u\tilde{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ux^2} \right)^n = \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\sqrt{\frac{\pi}{u}} \right)^n = \frac{1}{(4\pi u)^{n/2}}.$$

Il vient:

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty du u^{\alpha-\frac{n}{2}-1} e^{-uA}.$$

Par comparaison avec (6.34), on trouve finalement que

$$\int \frac{d^n \tilde{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + A)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} A^{\frac{n}{2}-\alpha}. \quad (6.35)$$

Cette expression a un prolongement naturel pour les valeurs complexes de n .

Pour relier le résultat (6.35) aux intégrales divergentes de la théorie quantique des champs, considérons par exemple l'extension en dimension entière n de l'intégrale (6.28):

$$I_n = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (6.36)$$

Dans cette expression, les vecteurs tels que p et k possèdent n composantes, $p = (p^0, p^1, \dots, p^{n-1})$, et, par exemple, $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$, $\vec{p}^2 = (p^1)^2 + \dots + (p^{n-1})^2$. La généralisation du facteur $(2\pi)^{-4}$ en dimension n est purement conventionnelle. La première étape consiste à récrire cette intégrale en introduisant un *paramètre de Feynman* x défini par l'identité

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx [Ax + B(1-x)]^{-2}. \quad (6.37)$$

Avec (6.37), et après le changement de variable d'intégration

$$q = k - xp,$$

qui est permis dans une dimension n qui évite les divergences, l'intégrale (6.36) devient

$$I_n = \int_0^1 dx \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} [M^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x) - q^2 - i\epsilon]^{-2}, \quad (6.38)$$

en permutant l'ordre des intégrations. Cette expression est de la forme

$$I_n = \int_0^1 dx I_{n,\alpha=2}(x), \quad I_{n,\alpha}(x) = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} [A(x) - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha}, \quad (6.39)$$

avec

$$A(x) = M^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x).$$

L'intégrale $I_{n,\alpha}(x)$ est proche de celle calculée en (6.35), mais il s'agit ici d'intégrer sur une variable q minkowskienne.

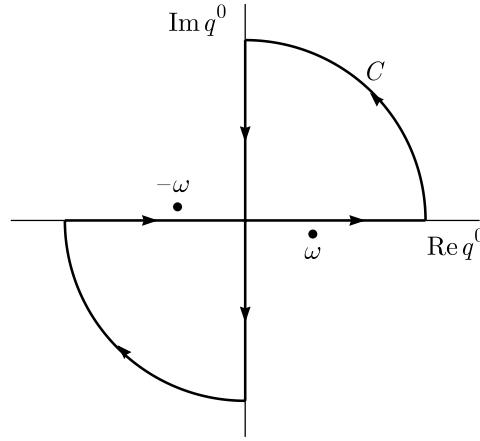


Fig. 6.7 Rotation de Wick: contour d'intégration.

Pour se ramener à une intégration sur une variable euclidienne et pouvoir utiliser (6.35), il convient d'effectuer une *rotation de Wick* dans l'intégrale $I_{n,\alpha}(x)$. Comme

$$A - q^2 - i\epsilon = A - (q^0)^2 + \vec{q}^2 - i\epsilon,$$

l'intégrant de $I_{n,\alpha}(x)$ est singulier en

$$q^0 = \pm\omega, \quad \omega = [\vec{q}^2 + A - i\epsilon]^{1/2}. \quad (6.40)$$

Supposons que $\vec{q}^2 + A > 0$ ¹⁴. Le pôle avec $\text{Re } q^0 > 0$ est dans le demi-plan inférieur, celui avec $\text{Re } q^0 < 0$ est dans le demi-plan supérieur. Considérons ensuite une intégrale dans le plan q^0 complexe le long du contour \mathcal{C} défini par la figure 6.7, les quarts de cercle étant à $|q_0| \rightarrow \infty$. L'intégrale s'annule puisque le contour n'entoure pas de pôle de l'intégrant. Elle ne reçoit pas de contribution lorsque $|q^0| \rightarrow \infty$. Il vient donc:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}} dq^0 [A - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 [A - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha} - \int_{-i\infty}^{i\infty} dq^0 [A - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable¹⁵

$$q^n = -iq^0,$$

dans le deuxième terme, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 [A - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha} = i \int_{-\infty}^{\infty} dq^n [A + \vec{q}^2 + (q^n)^2]^{-\alpha}, \quad (6.41)$$

¹⁴Le contour et l'argument sont identiques si $\vec{q}^2 + A < 0$; mais la position des pôles change.

¹⁵ n est un indice et non un exposant.

la limite $\epsilon \rightarrow 0$ pouvant être prise sans difficulté dans le membre droit qui n'est jamais singulier. L'égalité (6.41) est le résultat de la rotation de Wick. Finalement,

$$I_{n,\alpha} = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} [A - q^2 - i\epsilon]^{-\alpha} = i \int \frac{d^n \tilde{q}}{(2\pi)^n} [A + \tilde{q}^2]^{-\alpha}, \quad (6.42)$$

où la variable d'intégration \tilde{q} désigne le vecteur euclidien $\tilde{q} = (q^1, \dots, q^n)$, avec $\tilde{q}^2 = (q^1)^2 + \dots + (q^n)^2$. La valeur de $I_{n,\alpha}$ est alors donnée par l'expression (6.35).

D'après (6.39) et avec $\Gamma(2) = 1$,

$$I_n = \frac{i}{16\pi^2} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) (4\pi)^{2 - \frac{n}{2}} \int_0^1 dx [M^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x)]^{\frac{n}{2} - 2}. \quad (6.43)$$

Ce résultat, qui est l'expression régularisée de l'intégrale I_n , diverge lorsque n est un entier pair supérieur ou égal à quatre. Dans le voisinage de la valeur d'intérêt physique, $n = 4$, la seconde limite (6.32) indique que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 4} I_n &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \\ &\quad - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln [M^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x)]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

La partie divergente de l'intégrale est contenue dans le premier terme, avec la constante d'Euler γ qui accompagne toujours le pôle et la contribution $\ln(4\pi)$ qui est due à l'extension conventionnelle $(2\pi)^4 \rightarrow (2\pi)^n$ dans l'expression (6.36).

6.3.3 D'autres intégrales

La régularisation dimensionnelle de l'intégrale I_n présentée ci-dessus se généralise facilement à l'ensemble des intégrales qui apparaissent dans le calcul des diagrammes de Feynman comprenant des boucles. Les représentations des dénominateurs des propagateurs sous la forme d'intégrales paramétriques de Schwinger:

$$\frac{1}{D^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-uD}, \quad \text{Re } \alpha > 0, \quad D > 0, \quad (6.45)$$

et de Feynman:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx [Ax + B(1-x)]^{-2}, \quad (6.46)$$

y jouent un rôle important. L'égalité (6.46) possède une généralisation à des produits arbitraires:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_m} &= (m-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_m \delta(x_1 + \dots + x_m - 1) \\ &\quad \cdot [A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_m x_m]^{-m}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

En général, le problème est de régulariser une intégrale de la forme

$$I_{\mu_1 \dots \mu_m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_m}}{A_1 A_2 \dots A_s}, \quad (6.48)$$

où chaque dénominateur A_i provient d'un propagateur et s'écrit

$$A_i = M_i^2 - k^2 - 2kp_i - i\epsilon, \quad i = 1, \dots, s,$$

les quantités M_i^2 et p_i^μ étant indépendantes de la variable d'intégration k^μ . A l'aide de (6.47), (6.48) se ramène à une intégrale sur les paramètres de Feynman de l'expression plus simple

$$J_{\mu_1 \dots \mu_m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_m}}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^s}, \quad (6.49)$$

où M^2 et p^μ dépendent des paramètres x_1, x_2, \dots, x_s :

$$M^2 = \sum_{i=1}^s x_i M_i^2, \quad p = \sum_{i=1}^s x_i p_i.$$

Notez cependant que

$$J_{\mu_1 \dots \mu_m} = \frac{1}{2(s-1)} \frac{\partial}{\partial p^{\mu_m}} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_{\mu_1} \dots k_{\mu_{m-1}}}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^{s-1}}, \quad (6.50)$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} J_\mu &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^s} \\ &= \frac{1}{2(s-1)} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^{s-1}}. \end{aligned}$$

Mais, avec $k' = k + p$ et d'après (6.42) et (6.35),

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^\alpha} &= \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{[M^2 + p^2 - k'^2 - i\epsilon]^\alpha} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi)^{2-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} [M^2 + p^2]^{\frac{n}{2}-\alpha}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

et l'équation (6.50) permet ensuite de calculer par itérations les intégrales (6.49). Par exemple,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^\alpha} &= -\frac{ip^\mu}{16\pi^2} (4\pi)^{2-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} [M^2 + p^2]^{\frac{n}{2}-\alpha}, \\ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^\alpha} &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi)^{2-\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [M^2 + p^2]^{\frac{n}{2}-\alpha} \\ &\quad \cdot \left\{ \Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) p^\mu p^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} [M^2 + p^2] \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Finalement, puisqu'en n dimensions $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = n$, il vient

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^\alpha} &= \eta_{\mu\nu} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[M^2 - k^2 - 2kp - i\epsilon]^\alpha} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi)^{2-\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [M^2 + p^2]^{\frac{n}{2}-\alpha} \left\{ \Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) p^2 - \frac{n}{2} [M^2 + p^2] \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Les quatre intégrales (6.51), (6.52) et (6.53) sont suffisantes pour régulariser les diagrammes divergents de l'électrodynamique quantique à l'ordre d'une boucle.

6.4 Régularisation dimensionnelle de l'électrodynamique

Le principe de la régularisation dimensionnelle est d'effectuer le calcul des fonctions de Green en dimension n d'espace-temps, de manière à assurer la convergence des intégrations. Il s'avère également judicieux de généraliser la densité lagrangienne (6.1) en dimension n .

6.4.1 La densité lagrangienne

En dimension n , l'action devient

$$S_n = \int d^n x \mathcal{L}_n,$$

avec la densité lagrangienne habituelle¹⁶

$$\mathcal{L}_n = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie_n A_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Comme S_n est une quantité sans dimension, la dimension de \mathcal{L}_n est [masse] ^{n} . Les dimensions physiques des quantités apparaissant dans l'action en n dimensions sont alors:

$$\begin{aligned} x &: [\text{masse}]^{-1}, & \partial_\mu, m &: [\text{masse}]^1, \\ \mathcal{L}_n &: [\text{masse}]^n, \\ F_{\mu\nu} &: [\text{masse}]^{\frac{n}{2}}, & A_\mu &: [\text{masse}]^{\frac{n}{2}-1}, \\ \psi &: [\text{masse}]^{\frac{n-1}{2}}, \\ e_n &: [\text{masse}]^{2-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

¹⁶Le terme fixant la jauge est ici omis: il ne joue aucun rôle dans l'argument.

Pour tenir compte de la dimension physique inusitée de la constante de couplage e_n , on introduit une masse arbitraire μ et on pose

$$e_n = e\mu^{2-\frac{n}{2}} = e \exp \left[\left(2 - \frac{n}{2}\right) \ln \mu \right] = e + \frac{4-n}{2} e \ln \mu + \mathcal{O} \left((4-n)^2 \right). \quad (6.55)$$

Le rôle du paramètre μ sera d'assurer que les quantités calculées par la procédure dimensionnelle gardent leur dimension physique lorsque la limite $n \rightarrow 4$ est prise. La règle de Feynman du vertex en n dimensions fait intervenir e_n et non e .

En n dimensions, il est clair que

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\mu} = \eta^\mu{}_\mu = \text{Tr}(I_n) = n, \quad (6.56)$$

et l'algèbre des matrices de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I \quad (6.57)$$

impose une généralisation en dimension n . On aura donc

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = n I, \\ \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= -\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu + 2\eta_{\mu\nu} \gamma^\mu = (2-n)\gamma_\nu, \end{aligned} \quad (6.58)$$

et ainsi de suite. L'opération de trace sur les produits de matrices de Dirac pose cependant un problème puisqu'il est impossible de réaliser matriciellement l'algèbre (6.57) dans un nombre n arbitraire et continu de dimensions. La méthode que nous utiliserons consiste à procéder au calcul des traces en quatre dimensions et à ensuite étendre le résultat en dimension quelconque. Dans (6.58), I sera donc la matrice unité en quatre dimensions, avec $\text{Tr } I = 4$. Par contre, les produits de matrices γ^μ seront calculés en dimension n , comme dans les égalités (6.58). On aura par exemple:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \text{Tr } I = 4\eta^{\mu\nu}. \quad (6.59)$$

Le point le plus délicat de la procédure dimensionnelle est la généralisation de la matrice γ_5 qui en quatre dimensions est donnée par $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. L'existence d'une matrice jouant un rôle analogue à γ_5 n'est garantie que pour les dimensions paires. Ce problème est sans importance pour le cas de l'électrodynamique quantique qui est invariante sous parité: γ_5 n'apparaît pas dans les règles de Feynman. Il existe cependant lorsqu'on applique la procédure dimensionnelle au cas d'un processus d'interaction faible¹⁷. Le tenseur antisymétrique $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ en n dimensions conduit à une difficulté similaire.

En résumé, les substitutions

$$\begin{aligned} d^4k &\longrightarrow d^n k, \\ e &\longrightarrow e\mu^{2-\frac{n}{2}}, \\ (2\pi)^4 &\longrightarrow (2\pi)^n, \\ \eta^\mu{}_\mu = 4 &\longrightarrow \eta^\mu{}_\mu = n, \end{aligned} \quad (6.60)$$

¹⁷Pour plus de détails, voir par exemple Collins [11], sections 4.5 et 4.6.

déterminent la généralisation en dimension n des règles de Feynman de l'électrodynamique quantique.

Avec ces règles, nous allons maintenant établir les expressions dimensionnellement régularisées des diagrammes à une boucle D1, D2 et D3 des figures 6.4, 6.5 et 6.6 de la section 6.2.

6.4.2 Propagateur du photon: polarisation du vide

En n dimensions, la contribution au tenseur de *polarisation du vide* (6.22) due au diagramme D2 de la figure 6.5 devient

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k-p)^2 - m^2} \right]. \quad (6.61)$$

On effectue premièrement la trace:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu (\not{k} - \not{p} + m)] &= m^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] + \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu (\not{k} - \not{p})] \\ &= 4[(m^2 - k^2 + kp)\eta_{\mu\nu} + 2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu]. \end{aligned}$$

On introduit ensuite deux paramètres de Feynman avec l'identité (6.47):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu} &= -4ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-x-y) \\ &\quad \cdot [(m^2 - k^2 + kp)\eta_{\mu\nu} + 2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu] \\ &\quad \cdot [k^2(x+y) - m^2(x+y) - 2xpk + xp^2]^{-2} \\ &= -4ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx [(m^2 - k^2 + kp)\eta_{\mu\nu} + 2k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu] \\ &\quad \cdot [-k^2 + 2xpk - xp^2 + m^2]^{-2}. \end{aligned}$$

Les intégrales (6.51–6.53) mènent ensuite à:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right)^{\frac{4-n}{2}}. \quad (6.62)$$

Il est à remarquer que le dernier facteur est sans dimension grâce à l'introduction de μ . Lorsque n est proche de la valeur d'intérêt physique $n = 4$, puisque

$$\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) A^{\frac{4-n}{2}} = \frac{2}{4-n} - \gamma + \ln A + \mathcal{O}(4-n),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= -\frac{\alpha}{3\pi} (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right. \\ &\quad \left. - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.63)$$

avec la constante de structure fine $\alpha = e^2/4\pi$ et en négligeant les contributions s'annulant lorsque $n \rightarrow 4$. Le tenseur de polarisation du vide $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ est transverse: $p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = 0$, une conséquence de l'invariance de jauge qui implique (6.25).

L'expression (6.63) est la somme d'une partie infinie

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^\infty(p) = \tilde{\Pi}^\infty(p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}), \quad \tilde{\Pi}^\infty = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \quad (6.64)$$

et d'une partie finie,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^F(p) &= \tilde{\Pi}^F(p^2)(p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}), \\ \tilde{\Pi}^F(p^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Cette division en parties finie et infinie est évidemment arbitraire. Cependant, comme la contribution $-\gamma + \ln(4\pi)$ est générée par la procédure de régularisation utilisée, par l'intermédiaire du développement de $\Gamma(2 - \frac{n}{2})$, il est naturel de l'associer à la partie divergente.

L'expression régularisée du diagramme à une boucle D2 nous permet ensuite d'obtenir le tenseur de polarisation du vide à l'ordre e^2 , correspondant aux diagrammes de la figure 6.2 et à l'équation (6.16). En divisant le coefficient Δ_3 en une partie divergente Δ_3^∞ et une contribution finie Δ_3^F , il vient

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \left[1 + (\tilde{\Pi}^\infty - \Delta_3^\infty) + (\tilde{\Pi}^F(p^2) - \Delta_3^F) \right] (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) - \lambda p_\mu p_\nu. \quad (6.66)$$

Le terme fixant la jauge ne reçoit pas de correction: il n'est pas nécessaire de renormaliser λ , une observation qui reste vraie à tous les ordres. Pour obtenir un résultat fini lorsque $n \rightarrow 4$, il suffit de choisir

$$\Delta_3^\infty = \tilde{\Pi}^\infty = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right), \quad (6.67)$$

alors que la partie finie du contre-terme, qui ne dépend pas de p , permet d'imposer une condition de normalisation du tenseur de polarisation du vide: le choix de cette condition fait partie de la définition d'un *schéma de renormalisation*. On peut par exemple imposer

$$\Pi_{\mu\nu}(p)|_{p^2=\mu^2} = p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu} - \lambda p_\mu p_\nu,$$

la masse μ étant arbitraire, en choisissant

$$\Delta_3^F = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} - x(1-x) \right),$$

c'est-à-dire

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2 - x(1-x)\mu^2} \right) \right] - \lambda p_\mu p_\nu.$$

Un autre choix couramment utilisé¹⁸ exige

$$\Pi_{\mu\nu}^{cm}(p)\Big|_{p^2=0} = p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu} - \lambda p_\mu p_\nu, \quad (6.68)$$

qui se traduit par le choix

$$\Delta_3^{cm,F} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right).$$

Dans ce schéma,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{cm}(p) &= (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) [1 + \Pi(p^2)] - \lambda p_\mu p_\nu, \\ \Pi(p^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right), \end{aligned} \quad (6.69)$$

et la constante de renormalisation Δ_3^{cm} s'écrit

$$\Delta_3^{cm} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (6.70)$$

L'étude du tenseur de polarisation du vide à l'ordre α et de son contenu physique sera poursuivie dans la section 6.7.

6.4.3 Propagateur du fermion, self-énergie

En dimension n , l'expression (6.21) du diagramme D1 de la figure 6.4 devient

$$\tilde{\Sigma}(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma_\nu, \quad (6.71)$$

en omettant les contributions $i\epsilon$. Cependant,

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu &= (2-n)(\not{p} - \not{k}) + nm, \\ k^\mu k^\nu \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu &= k^2(m - \not{p} - \not{k}) + 2(pk) \not{k}. \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{\Sigma}(p)$ dépend du choix de la jauge par l'intermédiaire du paramètre λ : nous calculons une fonction de Green et non un élément de matrice S . Pour simplifier, nous allons évaluer $\tilde{\Sigma}(p)$ dans la jauge de Feynman $\lambda = 1$, où

$$\tilde{\Sigma}(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(\not{p} - \not{k}) + nm}{[k^2 - 2xpk + xp^2 - xm^2]^2},$$

d'après (6.37). Par le changement de variable $k - xp \rightarrow k$, il vient:

$$\tilde{\Sigma}(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)[- \not{k} + (1-x) \not{p}] + nm}{[-k^2 - x(1-x)p^2 + xm^2]^2}.$$

¹⁸Il s'agit du schéma de renormalisation sur la couche de masse (*on-shell*), d'où la notation $\Pi_{\mu\nu}^{cm}(p)$.

D'après (6.51) et (6.52),

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) = & \frac{e^2}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{xm^2 - x(1-x)p^2} \right)^{2-\frac{n}{2}} \\ & \cdot \{4m - 2(1-x)\not{p} + (4-n)[(1-x)\not{p} - m]\}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Pour n proche de la valeur physique 4,

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) = & \frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) [4m - \not{p}] + \not{p} - 2m \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx [4m - 2(1-x)\not{p}] \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) \right] + \mathcal{O}(4-n). \end{aligned} \quad (6.73)$$

La partie divergente de cette expression est

$$\tilde{\Sigma}^\infty(p) = \frac{\alpha}{4\pi} [4m - \not{p}] \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right),$$

la partie finie étant

$$\tilde{\Sigma}^F(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\not{p} - 2m - \int_0^1 dx [4m - 2(1-x)\not{p}] \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) \right].$$

Il en résulte que la self-énergie du fermion, définie par l'équation (6.13) et calculée à l'ordre e^2 , est donnée par

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \not{p} \left[-\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \Delta_2 + \frac{\alpha}{4\pi} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) \right] \\ & - m \left[-\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + \Delta_0 + \frac{\alpha}{2\pi} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir un résultat fini lorsque $n \rightarrow 4$, il suffit de poser

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + \Delta_2^F, \\ \Delta_0 &= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + \Delta_0^F, \end{aligned} \quad (6.74)$$

les contre-termes finis Δ_2^F et Δ_0^F étant fixés par le choix du schéma de renormalisation. En conséquence,

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= A(p^2)\not{p} - B(p^2)m, \\ A(p^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} - \Delta_2^F + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right), \\ B(p^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} + \Delta_0^F + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right).\end{aligned}\quad (6.75)$$

Comme le propagateur inverse est

$$\begin{aligned}\not{p} - m - \Sigma(p) &= [1 - A(p^2)]\not{p} - [1 - B(p^2)]m \\ &= [1 - A(p^2)](\not{p} - [1 + A(p^2) - B(p^2)]m) + \mathcal{O}(\alpha^2),\end{aligned}$$

le propagateur de la théorie en interaction calculé à l'ordre α aura un pôle en

$$\not{p} \equiv m_F = [1 + A(m_F^2) - B(m_F^2)]m,$$

c'est-à-dire en

$$m_F = \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi} - (\Delta_0^F + \Delta_2^F) - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)m_F^2}{\mu^2} \right) \right] m. \quad (6.76)$$

La position de ce pôle correspond à la valeur physique de la masse du fermion, qui est donc m_F . Cette grandeur physique est reliée par l'expression (6.76) aux paramètres e et m de la densité lagrangienne (renormalisée), par l'intermédiaire du contre-terme arbitraire $\Delta_0^F + \Delta_2^F$. Un choix naturel, mais non indispensable, de ce contre-terme revient à identifier la masse physique du fermion m_F avec m . Le schéma de renormalisation sur la couche de masse revient ainsi à choisir

$$\Delta_0^F + \Delta_2^F = -\frac{\alpha}{4\pi} - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{x^2 m^2}{\mu^2} \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left[1 - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (6.77)$$

pour obtenir

$$m = m_F.$$

Le paramètre m [noté m_r dans la densité lagrangienne renormalisée (6.6)] est alors la masse physique du fermion, à l'ordre α de la théorie des perturbations.

Avec ce premier choix, le propagateur inverse devient

$$[1 - A(p^2)] \left(\not{p} - \left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{xp^2 + m^2 - p^2}{xm^2} \right) \right] m \right),$$

$A(p^2)$ dépendant de Δ_2^F . Et la self-énergie s'écrit

$$\Sigma(p) = A(p^2)[\not{p} - m] - \frac{\alpha m}{2\pi} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{xp^2 + m^2 - p^2}{xm^2} \right).$$

Comme deuxième condition de normalisation à imposer pour déterminer Δ_2^F , on peut demander que le résidu du pôle du propagateur lorsque $\not{p} = m$ soit unité¹⁹. Ce résidu peut être obtenu en calculant

$$\left[\frac{\not{p} - m}{\not{p} - m - \Sigma(p)} \right]_{\not{p}=m} = 1 + \left[\frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m} \right]_{\not{p}=m} + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

Il faut donc annuler le coefficient du premier terme du développement en puissances de $(\not{p} - m)$ de $\Sigma(p)$, qui, d'après (6.75), est

$$2m^2 \left[\frac{\partial}{\partial p^2} [A(p^2) - B(p^2)] \right]_{p^2=m^2} + A(m^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} + A(m^2),$$

puisque $p^2 = \not{p}^2$. La condition est alors

$$\Delta_2^F = -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x}. \quad (6.78)$$

Cette équation contient une divergence en $x \rightarrow 0$ de la dernière intégrale. Il s'agit d'une *divergence infrarouge* due à l'absence de masse du photon. Pour le voir, il suffit de modifier le dénominateur k^2 de l'expression (6.71) en lui ajoutant une masse fictive du photon M : $k^2 \rightarrow k^2 - M^2$. L'effet de cette modification est la substitution

$$xm^2 - x(1-x)p^2 \longrightarrow xm^2 + (1-x)M^2 - x(1-x)p^2$$

dans les expressions (6.75), et le dernier terme de (6.78) devient

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x^2)}{x^2 + (1-x)\frac{M^2}{m^2}},$$

qui diverge logarithmiquement lorsqu'on annule la masse M du photon. Le traitement des divergences infrarouges dues à l'absence de masse de certaines particules ne sera pas abordé ici²⁰: la nature de ces infinités est entièrement différente des divergences ultraviolettes éliminées par renormalisation. Nous nous bornerons à considérer l'expression (6.78) comme définissant la partie finie du contre-terme Δ_2 .

En conclusion, le propagateur inverse à l'ordre α est

$$\left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{xp^2 + m^2 - p^2}{xm^2} \right) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right] \cdot \left(\not{p} - \left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{xp^2 + m^2 - p^2}{xm^2} \right) \right] m \right),$$

¹⁹C'est-à-dire que la singularité du propagateur $[\not{p} - m - \Sigma(p)]^{-1}$ en $\not{p} = m$ soit de la forme $\frac{1}{\not{p}-m}$.

²⁰Voir par exemple: Peskin et Schroeder [6], sections 6.4 et 6.5, Weinberg [2], chapitre 13.

dans le schéma de renormalisation sur la couche de masse. La self-énergie devient

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = (\not{p} - m) & \left[\frac{3\alpha}{8\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx x \ln\left(1 - x \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right] \\ & - m \left[\frac{5\alpha}{8\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2-x) \ln\left(1 - x \frac{p^2}{m^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Son développement en puissances de $\not{p} - m$,

$$\Sigma(p) = [\Sigma_0(p)]_{\not{p}=m} + [\Sigma_1(p)]_{\not{p}=m} [\not{p} - m] + \mathcal{O}\left((\not{p} - m)^2\right),$$

débute à l'ordre $(\not{p} - m)^2$ seulement: $[\Sigma_0(p)]_{\not{p}=m} = [\Sigma_1(p)]_{\not{p}=m} = 0$.

Et les constantes de renormalisation utilisées pour définir le propagateur du fermion s'écrivent:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 4 \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \\ \Delta_0 &= \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \end{aligned} \quad (6.80)$$

aux corrections de l'ordre suivant (α^2) de la théorie des perturbations près.

6.4.4 Correction de vertex

Dans la jauge de Feynman $\lambda = 1$, la contribution (6.27) du diagramme de vertex D3 (fig. 6.6) s'écrit

$$\begin{aligned} ie\mu^{2-\frac{n}{2}} \tilde{\Lambda}_\nu(p, q) &= e^3 \mu^{6-\frac{3n}{2}} I_\nu, \\ I_\nu &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \gamma^\rho \frac{\not{q} + \not{k} + m}{(q+k)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \gamma_\rho. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Comme le dénominateur est d'ordre k^6 , la partie infinie sera clairement due au terme

$$\gamma^\rho \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\rho = (2-n) \gamma^\mu (2k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu})$$

présent au numérateur de l'intégrant.

Afin d'évaluer l'intégrale I_ν , introduisons deux paramètres de Feynman x et y , et la variable d'intégration $k' = k + xq + yp$:

$$\begin{aligned} I_\nu &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma^\rho (\not{q} + \not{k} + m) \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\rho}{[k^2 + 2xqk + 2ypk + xq^2 + yp^2 - (x+y)m^2]^3} \\ &= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \\ &\quad \frac{\gamma^\rho (\not{k}' + (1-x)\not{q} - y\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{k}' + (1-y)\not{p} - x\not{q} + m) \gamma_\rho}{[(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq - k'^2]^3} \\ &= I_\nu^\infty + I_\nu^F, \end{aligned}$$

la partie divergente étant contenue dans l'intégrale

$$I_\nu^\infty = -2(2-n)\gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (2k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}) \cdot [(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq - k^2]^{-3}, \quad (6.82)$$

alors que l'intégrale

$$I_\nu^F = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \gamma^\rho [(1-x)\not{d} - y\not{p} + m] \gamma_\nu [(1-y)\not{p} - x\not{d} + m] \gamma_\rho \cdot \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq - k^2]^{-3}, \quad (6.83)$$

dont l'intégrand se comporte comme k^{-6} à grand k , est finie en $n = 4$ dimensions. A l'aide des résultats (6.51–6.53) et de l'expansion (6.32), on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\nu(p, q) &= -ie^2 \mu^{4-n} [I_\nu^\infty + I_\nu^F] \\ &= -ie^2 [1 + (4-n) \ln \mu] [I_\nu^\infty + I_\nu^F] + \mathcal{O}(4-n), \\ I_\nu^\infty &= \frac{i}{16\pi^2} \gamma_\nu \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 - 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \right. \\ &\quad \cdot \ln [(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq] \left. \right] + \mathcal{O}(4-n), \\ I_\nu^F &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma^\rho [(1-x)\not{d} - y\not{p} + m] \gamma_\nu [(1-y)\not{p} - x\not{d} + m] \gamma_\rho}{(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq}. \end{aligned}$$

A ce stade du calcul, la fonction de vertex propre définie par l'équation (6.19) s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu(p, q) &= ie \left[\gamma_\nu \left\{ 1 + \Delta_1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \frac{\alpha}{2\pi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left(\frac{(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq}{\mu^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - ie^2 I_\nu^F \right]. \end{aligned}$$

Cette expression est libre de divergence ultraviolette si on pose

$$\Delta_1 = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \Delta_1^F, \quad (6.84)$$

avec une contribution finie Δ_1^F à déterminer en prescrivant le schéma de renormalisation.

Pour étudier la partie finie, il est utile de revenir à une amplitude physique au lieu d'une simple fonction de Green. Considérons donc la quantité

$$\mathcal{M}_\nu(p, q) = \bar{u}(q) ie \Lambda_\nu(p, q) u(p), \quad (6.85)$$

les deux fermions étant sur la couche de masse $p^2 = q^2 = m^2$ et les spineurs vérifiant l'équation de Dirac

$$(\not{p} - m)u(p) = (\not{q} - m)u(q) = 0.$$

La comparaison avec la fonction de Green (6.17) montre que cette quantité peut être vue comme l'élément de matrice S réduit pour le vertex fermion-photon, calculé ici à l'ordre e^3 .

D'après l'équation (6.18) et dans la jauge de Feynman,

$$\mathcal{M}_\nu(p, q) = -\frac{1}{(q-p)^2} \Pi_{\nu\rho}(q-p) \left[\bar{u}(q) \frac{\sigma(q)}{\not{q} - m} \Gamma^\rho(p, q) \frac{\sigma(p)}{\not{p} - m} u(p) \right].$$

Dans le schéma de renormalisation sur la couche de masse utilisé pour définir le propagateur fermionique, le développement en puissances de $(\not{p} - m)$ de la self-énergie débute à l'ordre $(\not{p} - m)^2$. Donc, si $p^2 = m^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(p)}{\not{p} - m} &= 1 + \frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m} = 1 + \mathcal{O}(\not{p} - m), \\ \frac{\sigma(p)}{\not{p} - m} u(p) &= u(p), \end{aligned} \quad (p^2 = m^2).$$

En conséquence,

$$\mathcal{M}_\nu(p, q) = -\frac{1}{(q-p)^2} \Pi_{\nu\rho}(q-p) \left[\bar{u}(q) \Gamma^\rho(p, q) u(p) \right], \quad (6.86)$$

avec

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(q-p)^2} \Pi_{\nu\rho}(q-p) &= \eta_{\nu\rho} - \Pi((q-p)^2) \left[\frac{(q-p)_\nu(q-p)_\rho}{(q-p)^2} - \eta_{\nu\rho} \right], \\ \Pi((q-p)^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{(q-p)^2}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\bar{u}(q)[\not{q} - \not{p}]u(p) = 0$, il vient à l'ordre e^3

$$\mathcal{M}_\nu(p, q) = \bar{u}(q) \Gamma_\nu(p, q) u(p) + ie \Pi((q-p)^2) \bar{u}(q) \gamma_\nu u(p).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \bar{u}(q) \Gamma_\nu(p, q) u(p) &= ie \left[\bar{u}(q) \gamma_\nu u(p) \left\{ 1 + \Delta_1^F - \frac{\alpha}{2\pi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left(\frac{(x+y)^2 m^2 - xy(p-q)^2}{\mu^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Y_\nu}{(x+y)^2 m^2 - xy(p-q)^2} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Y_\nu &= \bar{u}(q) \left\{ \gamma^\rho [(1-x)\not{q} - y\not{p} + m] \gamma_\nu [(1-y)\not{p} - x\not{q} + m] \gamma_\rho \right\} u(p) \\ &= \bar{u}(q) \left\{ 2[(x+y-2)^2 - 2] m^2 \gamma_\nu - 2(1-x)(1-y)(p-q)^2 \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. + 4[x(1-y) - y^2] m p_\nu + 4[y(1-x) - x^2] m q_\nu \right\} u(p). \end{aligned}$$

A l'aide de l'identité de Gordon

$$2m \bar{u}(q) \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(q) \left((p+q)^\mu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (q-p)_\nu \right) u(p)$$

et de

$$(q-p)^\mu \bar{u}(q) u(p) = \frac{1}{2} \bar{u}(q) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p+q)_\nu u(p),$$

on obtient

$$\begin{aligned} p^\mu \bar{u}(q) u(p) &= \bar{u}(q) \left(m \gamma^\mu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] p_\nu \right) u(p), \\ q^\mu \bar{u}(q) u(p) &= \bar{u}(q) \left(m \gamma^\mu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] q_\nu \right) u(p), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_\nu &= -2 \bar{u}(q) \gamma_\nu u(p) \left\{ m^2 [(x+y+1)^2 - 3] + (p-q)^2 (1-x)(1-y) \right\} \\ &\quad - m \bar{u}(q) [\gamma_\nu, \gamma_\rho] u(p) \left\{ (p-q)^\rho (x+y)(1-x-y) \right. \\ &\quad \left. + (p+q)^\rho (x-y)(1+x+y) \right\}. \end{aligned}$$

A l'exception du dernier terme de Y_ν , l'amplitude $\bar{u}(q) \Gamma_\nu(p, q) u(p)$ ne dépend que de l'impulsion transférée au photon,

$$k = p - q,$$

et les paramètres de Feynman n'apparaissent que dans les combinaisons symétriques $x+y$ et xy ; cependant, pour toutes fonctions $f(x, y)$ et $g(x+y, xy)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy f(x, y) &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx f(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy f(y, x), \\ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x-y) g(x+y, xy) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (y-x) g(x+y, xy) = 0, \end{aligned}$$

et le terme en question s'annule. Comme $\bar{u}(q)(\not{q} - \not{p})u(p) = 0$,

$$\bar{u}(q) \Gamma_\nu(p, q) u(p) (q-p)^\nu = 0,$$

comme exigé par l'invariance de jauge, et on peut alors poser

$$\mathcal{M}_\nu(p, q) = ie \bar{u}(q) \left\{ \gamma_\nu + F_1(k^2) \gamma_\nu - \frac{1}{4m} [\gamma_\nu, \gamma_\rho] k^\rho F_2(k^2) \right\} u(p), \quad (6.87)$$

les deux facteurs de forme étant donnés par les expressions

$$\begin{aligned}
F_1(k^2) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left(\frac{(x+y)^2 m^2 - xy k^2}{\mu^2} \right) - \frac{\alpha}{2\pi} + \Delta_1^F \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2[(x+y+1)^2 - 3] + k^2(1-x)(1-y)}{(x+y)^2 m^2 - xy k^2} \\
&\quad + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right), \\
F_2(k^2) &= -\frac{\alpha m^2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)(1-x-y)}{(x+y)^2 m^2 - xy k^2} \\
&= -\frac{\alpha m^2}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^z dx \frac{z(1-z)}{z^2 m^2 - x(z-x)k^2}.
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Le facteur de forme F_1 est une correction à la charge du fermion: à l'ordre α^0 , $\mathcal{M}_\nu(p, q) = ie \bar{u}(q) \gamma_\nu u(p)$. Une condition naturelle de normalisation du facteur de forme F_1 est d'imposer

$$F_1(k^2 = 0) = 0, \quad \mathcal{M}_\nu(p, q)|_{k^2=0} = ie \bar{u}(q) \gamma_\nu u(p) - \frac{ie}{4m} \bar{u}(q) [\gamma_\nu, \gamma_\rho] u(p) k^\rho F_2(0). \tag{6.89}$$

Dans ce cas, e est la charge électrique du fermion dans la limite $k^2 = 0$ d'un photon "test" d'impulsion k . Ce choix correspond à:

$$\Delta_1^F = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\ln \left[(x+y)^2 \frac{m^2}{\mu^2} \right] - \frac{(x+y+1)^2 - 3}{(x+y)^2} \right) \right].$$

Comme pour une fonction g de la variable $x+y$,

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy g(x+y) = \int_0^1 dz g(z) \int_0^z dx = \int_0^1 dz z g(z),$$

on obtient

$$\Delta_1^F = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - 2 + 4 \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \tag{6.90}$$

et $\Delta_1 = \Delta_2$, conformément à l'identité de Ward. La forme finale du facteur de forme $F_1(k^2)$ est:

$$\begin{aligned}
F_1(k^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{m^2[(x+y+1)^2 - 3] + k^2(1-x)(1-y)}{(x+y)^2 m^2 - xy k^2} \right. \\
&\quad \left. - \ln \left(1 - \frac{xy}{(x+y)^2} \frac{k^2}{m^2} \right) \right] - \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x},
\end{aligned} \tag{6.91}$$

le dernier terme contenant la divergence infrarouge. Notez que la première contribution est identique à la correction d'ordre α au tenseur de polarisation du vide, obtenue dans l'équation (6.69).

Comme $F_2(0) = -\frac{\alpha}{2\pi}$, il vient alors

$$\mathcal{M}_\nu(p, q)|_{k^2=0} = ie\bar{u}(q)\gamma_\nu u(p) + \frac{ie\alpha}{8\pi m}\bar{u}(q)[\gamma_\nu, \gamma_\rho]u(p)(p-q)^\rho. \quad (6.92)$$

Le second terme décrit le *moment magnétique anormal* du fermion. Il suit de la définition (6.87) des facteurs de forme que le moment magnétique du fermion est

$$\mu = \frac{e}{2m} [1 - F_2(0)] = \frac{e}{2m} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right].$$

La correction d'ordre α a été obtenue par Schwinger en 1948. Notez que le calcul du facteur de forme $F_2(k^2)$, et donc du moment magnétique, ne dépend que des termes finis de la fonction de vertex. La procédure de renormalisation n'intervient que par le biais de la normalisation de la charge électrique, $F_1(0) = 0$.

6.4.5 Résumé

Le schéma de renormalisation sur la couche de masse que nous avons établi utilise les constantes de renormalisation suivantes:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \\ Z_1 &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 4 \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \\ Z_2 &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 4 \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{x} \right], \\ Z_3 &= 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.93)$$

L'identité de Ward $Z_1 = Z_2$ est bien vérifiée. Les valeurs obtenues dépendent de la jauge utilisée, sauf pour la constante Z_3 dont le calcul ne dépend pas du propagateur photonique²¹. Les parties finies des contre-termes ont été déterminées en imposant quatre conditions qui définissent le schéma de renormalisation:

1. Le propagateur photonique est normalisé sur la couche de masse du photon, en $p^2 = 0$. Cette condition détermine Z_3 qui est la *constante de renormalisation de la fonction d'onde du photon* [éq. (6.4)].

²¹A l'ordre d'une boucle seulement.

2. Le propagateur fermionique a un pôle en $\not{p} = m$, qui est donc la masse physique du fermion. Cette condition définit en fait Z_0 , la *constante de renormalisation de la masse du fermion* [équ. (6.5)].
3. Le propagateur fermionique est normalisé sur la couche de masse, $\not{p} = m$: cette condition détermine Z_2 , la *constante de renormalisation de la fonction d'onde fermionique* [équ. (6.4)].
4. La constante de couplage (la charge électrique du fermion) est définie à partir de la fonction de vertex pour un photon avec $k^2 = 0$. Elle est égale à e : cette condition fixe la *constante de renormalisation de la constante de couplage de jauge*, Z_1 [équ. (6.5)].

La densité lagrangienne renormalisée (6.6), avec les valeurs (6.93) des constantes de renormalisation, permet d'effectuer n'importe quel calcul perturbatif jusqu'à l'ordre d'une boucle sans rencontrer de divergence ultraviolette. La procédure de renormalisation a donc permis de construire une théorie des perturbations cohérente à cet ordre. C'est le propre des théories *renormalisables* de permettre l'extension de cette procédure à tous les ordres perturbatifs.

Des quatre conditions imposées pour définir les constantes de renormalisation, il ressort que la fonction de chaque contre-terme est de soustraire une divergence et une partie finie afin de définir une fonction de Green normalisée à une échelle d'énergie choisie. Dans le schéma de renormalisation²² sur la couche de masse, les échelles utilisées sont $k^2 = 0$ (masse du photon) dans les conditions 1 et 4, et m , la masse physique du fermion.

Le choix des quatre conditions imposées pour définir les parties finies des contre-termes est arbitraire. Nous verrons plus loin que ce caractère arbitraire est formellement exprimé par le groupe de renormalisation, qui décrit l'effet sur les grandeurs physiques d'un changement de schéma de soustraction. Il faut noter que les conditions de normalisation n'influent pas sur les valeurs régularisées des divergences ultraviolettes: en particulier, l'identité de Ward $\Delta_1^\infty = \Delta_2^\infty$ pour les parties divergentes des contre-termes sera vérifiée dans n'importe quel schéma de renormalisation.

6.5 L'identité de Ward

Pour localiser l'origine de la relation observée entre Z_1 et Z_2 , reprenons tout d'abord l'expression régularisée (6.81) du diagramme de vertex D3 de la figure 6.6, lorsque $p = q$ et dans la jauge de Feynman:

$$\tilde{\Lambda}_\nu(p, p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_\rho. \quad (6.94)$$

²²On utilise aussi le terme de *schéma de soustraction*.

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} = - \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m},$$

on peut écrire

$$\tilde{\Lambda}_\nu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \gamma^\rho \frac{\not{k} + \not{p} + m}{(k+p)^2 - m^2} \gamma_\rho \right].$$

Et, en comparant avec l'expression (6.71) du diagramme de self-énergie,

$$\tilde{\Lambda}_\nu(p, p) = - \frac{\partial}{\partial p^\nu} \tilde{\Sigma}(p). \quad (6.95)$$

Cette égalité sera vraie dans n'importe quelle jauge, puisque sa dérivation n'utilise pas la forme du propagateur du photon.

D'autre part, nous avons choisi les constantes Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 de manière à soustraire les divergences de la self-énergie

$$\Sigma(p) = -\Delta_2 \not{p} - \Delta_0 m + \tilde{\Sigma}(p)$$

et de la fonction de vertex propre

$$\Gamma^\mu(p, q) = ie[(1 + \Delta_1)\gamma^\mu + \tilde{\Lambda}^\mu(p, q)].$$

Il suit alors de (6.95) que

$$\Gamma_\mu(p, p) + ie \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) - ie\gamma_\mu = ie(\Delta_1 - \Delta_2)\gamma_\mu. \quad (6.96)$$

Comme le membre gauche de l'égalité est sans divergence, les parties divergentes de Δ_1 et Δ_2 doivent nécessairement coïncider. Et si $(\Delta_1 - \Delta_2)$ est fini, on peut toujours l'annuler par une renormalisation finie²³ de e :

$$e(1 + \Delta_1 - \Delta_2) = Z_1 Z_2^{-1} e \longrightarrow e,$$

c'est-à-dire $Z_1 = Z_2$.

L'extension de ce résultat à $q \neq p$ est simple: à l'aide des expressions régularisées (6.71) et (6.81), on montre facilement que

$$\begin{aligned} (p-q)^\mu \Gamma_\mu(p, q) &= ie(1 + \Delta_1)(\not{p} - \not{q}) - ie\tilde{\Sigma}(p) + ie\tilde{\Sigma}(q) \\ &= ie[\not{p} - m - \Sigma(p)] - ie[\not{q} - m - \Sigma(q)] \\ &\quad + ie(\Delta_1 - \Delta_2)(\not{p} - \not{q}) \\ &= -ie\Sigma(p) + ie\Sigma(q) + ieZ_1 Z_2^{-1}(\not{p} - \not{q}), \end{aligned} \quad (6.97)$$

²³Comparer avec (6.5).

une relation entre propagateurs inverses et fonction de vertex. A nouveau, puisque les fonctions de vertex et de self-énergie sont sans divergence, $\Delta_1 - \Delta_2$ est fini. En fait, le résultat (6.96) est la limite $p \rightarrow q$ de l'équation (6.97).

Les égalités (6.97) suivent d'un calcul perturbatif à l'ordre d'une boucle (e^2). On peut en fait montrer qu'une telle égalité existe à tous les ordres, et qu'elle est la conséquence de l'existence d'une symétrie continue de la densité lagrangienne. L'argument utilise le courant de Noether conservé $j_\mu(x)$ associé à cette symétrie qui, dans le cas de la théorie (6.6), est donné par l'expression (6.8). Ce courant vérifie les règles de commutation suivantes²⁴:

$$\begin{aligned} [j^0(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)] &= -e\psi(\vec{y}, t)\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), & [j^0(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{y}, t)] &= e\bar{\psi}(\vec{y}, t)\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [Q, \psi(x)] &= -e\psi(x), & [Q, \bar{\psi}(x)] &= e\bar{\psi}(x), \end{aligned}$$

la charge (indépendante du temps) étant $Q = \int d^3x j^0(\vec{x}, t)$. Considérons ensuite la fonction de Green

$$\langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle.$$

Un calcul simple qui utilise la conservation du courant $\partial_\mu j^\mu = 0$ conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T [j^0(x), \psi(y)] \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\ &\quad + \delta(x^0 - z^0) \langle 0 | T \psi(y) [j^0(x), \bar{\psi}(z)] | 0 \rangle \\ &= -e\delta^4(x - y) \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\ &\quad + e\delta^4(x - z) \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction de Green $\langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle$ est donc reliée à la fonction à deux points, au propagateur du fermion. Et ce résultat est une conséquence de l'existence de la symétrie puisque la conservation du courant a été utilisée. En transformée de Fourier, cette relation s'écrit

$$k_\mu V^\mu(k, q, -p) = -e(2\pi)^4 \delta^4(k + q - p) [\tilde{S}(q) - \tilde{S}(p)], \quad (6.98)$$

avec les définitions

$$V^\mu(k, q, -p) = \int d^4x \int d^4y \int d^4z e^{ikx + iqu - ipz} \langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle$$

et

$$\langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle = \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} e^{-ir(y-z)} i\tilde{S}(r)$$

pour la fonction à deux points, $\tilde{S}(r)$ étant le propagateur en espace des impulsions.

A l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, il vient avec $j^\mu(x) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$ et à l'aide du théorème de Wick,

$$V^\mu(k, q, -p) = e(2\pi)^4 \delta^4(k + q - p) \frac{i}{\not{q} - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m},$$

²⁴Voir par exemple les sections 2.2 et 2.3.

qui vérifie bien (6.98) avec $\tilde{S}(p) = [\not{p} - m]^{-1}$. Comme à cet ordre, la fonction de vertex est $\Gamma^\mu(p, q) = ie\gamma^\mu$, ce dernier résultat suggère que

$$V^\mu(k, q, -p) = i(2\pi)^4 \delta^4(k + q - p) \tilde{S}(q) \Gamma^\mu(p, q) \tilde{S}(p). \quad (6.99)$$

Cette égalité est en fait vraie au-delà de l'ordre le plus bas. En effet, puisque l'interaction du champ de jauge est de la forme $j_\mu A^\mu$, on se convainc facilement²⁵ que la fonction de Green $\langle 0 | T j^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle$ est obtenue à partir de la fonction à trois points

$$\langle 0 | T A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle$$

en omettant²⁶ dans celle-ci le propagateur du champ de jauge externe $A_\mu(x)$, d'où l'égalité (6.99).

En conséquence, il vient

$$(p - q)_\mu \Gamma^\mu(p, q) = -ie[\tilde{S}^{-1}(q) - \tilde{S}^{-1}(p)], \quad (6.100)$$

qui est l'identité de Ward-Takahashi²⁷. En écrivant le propagateur inverse sous la forme $\tilde{S}^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p)$, on obtient

$$(p - q)_\mu \Gamma^\mu(p, q) = ie[\not{p} - m - \Sigma(p)] - ie[\not{q} - m - \Sigma(q)].$$

Il est clair que la procédure utilisée pour dériver la relation (6.100) à partir de l'invariance continue de la théorie peut être appliquée à n'importe quelle fonction de Green impliquant le courant. Il existe donc une infinité d'identités de Ward-Takahashi similaires à (6.100). L'une d'entre elles implique que la partie longitudinale du propagateur du photon qui est générée par le terme de fixation de la jauge ne reçoit pas de correction. En conséquence, le terme

$$-\frac{1}{2} \lambda (\partial_\mu A^\mu)^2$$

de la densité lagrangienne ne requiert pas de contre-terme.

6.6 Ordres plus élevés, renormalisabilité

Considérons un diagramme de Feynman connexe irréductible à une particule²⁸ (1PI) comprenant:

²⁵En se référant à l'expansion perturbative des fonctions de Green, l'expression (3.81).

²⁶A un facteur i près.

²⁷Due à Takahashi (1957). L'équation obtenue dans la limite $p - q \rightarrow 0$,

$$\Gamma^\mu(p, p) = ie \frac{\partial}{\partial p^\mu} \tilde{S}^{-1}(p),$$

est due à Ward (1950).

²⁸C'est-à-dire qui reste connexe lorsque n'importe quelle ligne interne est coupée.

- m_γ et m_F lignes photoniques et fermioniques externes,
- n_γ et n_F lignes photoniques et fermioniques internes,
- N vertex de l'interaction fermion–photon.

Ce diagramme intervient dans le calcul de la fonction de Green pour m_γ photons et m_F fermions, en espace des impulsions et à l'ordre N de la théorie des perturbations. Les règles de Feynman associent à chaque vertex une distribution de Dirac $\delta^4(\dots)$ de conservation d'impulsion. Puisque l'une d'entre elles exprime la conservation des impulsions externes, il y aura $N - 1$ impulsions associées aux lignes internes qui seront fixées par la conservation d'impulsion. L'expression du diagramme contiendra alors

$$M = n_\gamma + n_F - N + 1 \quad (6.101)$$

intégrations d^4k_i ($i = 1, \dots, M$) sur des impulsions internes non contraintes; M est le nombre de boucles du diagramme. Une première contrainte lie les nombres de lignes et de vertex: chaque ligne photonique interne est connectée à deux vertex, chaque ligne photonique externe à un vertex, et chaque vertex comprend une ligne photonique:

$$N = m_\gamma + 2n_\gamma.$$

Un argument similaire appliqué aux lignes fermioniques conduit à

$$2N = m_F + 2n_F.$$

(Par conservation du moment cinétique, m_F est toujours pair). Comme les dimensions (en énergie) des propagateurs photonique et fermionique sont respectivement -2 et -1 , le degré de divergence naïf²⁹ du diagramme sera

$$d = 4M - 2n_\gamma - n_F = 4 - m_\gamma - \frac{3}{2}m_F,$$

qui ne dépend que du nombre de lignes externes. Le nombre de fonctions de Green potentiellement divergentes ($d \geq 0$) est donc fini, avec un degré de divergence indépendant de l'ordre N . Il suffira d'un nombre fini de contre-termes pour définir la théorie des perturbations et la théorie est *renormalisable*. La liste des fonctions de Green potentiellement divergentes en théorie des perturbations est la suivante:

- $m_\gamma = 1$, $m_F = 2$, $d = 0$: fonction de vertex, logarithmiquement divergente.
- $m_\gamma = 0$, $m_F = 2$, $d = 1$: propagateur fermionique inverse. En fait, le propagateur inverse est toujours de la forme $A(p^2)\not{p} - B(p^2)m$, et le degré de divergence de A et B est seulement logarithmique.

²⁹Le degré de divergence naïf du diagramme est d si, lorsqu'on multiplie les impulsions intégrées k_i par une constante λ , l'intégrand et les mesures d'intégration d^4k_i se comportent comme λ^d . Si $d = 0$, l'intégrale se comporte comme $\int d\kappa \kappa^{-1}$ et diverge logarithmiquement; si $d > 0$, l'intégrale se comporte comme $\int d\kappa \kappa^{d-1}$, et diverge comme une puissance; l'intégrale converge si $d < 0$.

- $m_\gamma = 2, m_F = 0, d = 2$: propagateur photonique inverse; par invariance de jauge, la divergence n'est que logarithmique.
- $m_\gamma = 3, m_F = 0, d = 1$: par invariance sous conjugaison de charge, cette fonction de Green est nulle à tous les ordres³⁰.
- $m_\gamma = 4, m_F = 0, d = 0$: par invariance de jauge, les diagrammes de Feynman contribuant à cette fonction de Green sont convergents.

On constate d'après cette énumération que l'invariance de jauge ou des arguments purement dimensionnels peuvent conduire à un degré de divergence réel inférieur au degré naïf d . Ces divergences correspondent à celles obtenues dans le calcul à l'ordre d'une boucle de la section 6.4.

L'évaluation du degré de divergence naïf peut être effectuée pour une théorie comprenant des interactions arbitraires. Une interaction (de type i) a la forme d'un produit de p_B^i champs bosoniques (champs scalaires ou de jauge) et de p_F^i champs fermioniques, elle comprend p_i dérivées spatiales et une constante de couplage λ_i . Puisqu'une interaction est un terme d'une densité lagrangienne de dimension quatre (en énergie), que les dimensions des champs bosoniques et fermioniques sont respectivement³¹ 1 et $3/2$, la dimension de la constante de couplage est

$$\delta_i = 4 - p_B^i - \frac{3}{2}p_F^i - p_i.$$

Considérons à nouveau un diagramme de Feynman connexe avec:

- m_B lignes bosoniques externes, m_F lignes fermioniques externes,
- n_B lignes bosoniques internes, n_F lignes fermioniques internes,
- N_i vertex de l'interaction de type i .

Puisque le nombre total de vertex est $N = \sum_i N_i$, on devra intégrer sur $M = n_B + n_F - N + 1$ impulsions internes non contraintes: le diagramme a M boucles. Le degré de divergence naïf est donc

$$d = 4M - 2n_B - n_F + \sum_i p_i N_i,$$

puisque chaque dérivée dans une interaction introduit une impulsion en espace des impulsions. La structure des interactions requiert d'autre part les conditions

$$\sum_i N_i p_F^i = 2n_F + m_F, \quad \sum_i N_i p_B^i = 2n_B + m_B,$$

³⁰A l'ordre d'une boucle, le théorème de Furry impose cette annulation.

³¹On le voit par exemple dans les termes cinétiques $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, $(\partial_\mu\varphi^\dagger)(\partial^\mu\varphi)$ ou $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ de la densité lagrangienne, ou dans les règles de commutation obtenues dans le chapitre 2.

si bien que

$$d = 4 - m_B - \frac{3}{2}m_F - \sum_i N_i \delta_i. \quad (6.102)$$

Le degré de divergence peut augmenter avec l'ordre de la théorie des perturbations, défini par le nombre de vertex $\sum_i N_i$, si un ou plusieurs δ_i sont négatifs, c'est-à-dire si la théorie possède une ou plusieurs constantes de couplage dont la dimension est une puissance inverse de l'énergie. Dans ce cas, il y aura un nombre infini de fonctions de Green divergentes et un nombre infini de contre-termes seront en principe nécessaires pour les rendre finies, introduisant un nombre infini de paramètres arbitraires (les parties finies des contre-termes) et vidant la théorie de son contenu prédictif. La théorie est alors qualifiée de *non renormalisable*.

En fait, on peut démontrer rigoureusement que la théorie de champs renormalisable la plus générale combine tous les termes permis par la condition

$$\delta_i \geq 0,$$

en imposant de plus que les interactions de chaque champ de spin un soient invariantes sous une symétrie de jauge. Cette théorie a été décrite dans la section 1.5.

6.7 Groupe de renormalisation, couplages effectifs

Il est temps de revenir sur la signification en termes de grandeurs physiques des paramètres de la densité lagrangienne renormalisée, en relation avec le problème du choix du schéma de renormalisation. Au niveau de la densité lagrangienne classique, on identifie les deux paramètres e et m avec la charge électrique et la masse du fermion. Cette identification suit des équations d'Euler-Lagrange de la théorie (Maxwell et Dirac). Notez cependant que changer la normalisation des champs A_μ et ψ influe sur cette identification qui n'est exacte que lorsque les champs sont *canoniquement normalisés*, comme dans la densité lagrangienne (6.1). Dans la théorie quantique renormalisée, nous avons des éléments de matrice S et des fonctions de Green, calculés dans un schéma perturbatif de renormalisation (qui introduit parfois une masse arbitraire telle que μ) en fonction de paramètres renormalisés e_r et m_r , mais aussi en fonction des variables cinématiques du processus. Le lien entre grandeurs physiques (éléments de matrice S) et paramètres renormalisés, dans un schéma de soustraction donné, se fera donc dans une configuration cinématique qui est arbitraire mais qui doit être définie.

Dans la section 6.4, nous avons obtenu les expressions régularisées suivantes pour l'électrodynamique quantique à l'ordre d'une boucle:

Propagateur photonique inverse, polarisation du vide (jauge de Feynman $\lambda = 1$):

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) - \Delta_3^F \right] - p_\mu p_\nu.$$

Self-énergie fermionique:

$$\Sigma(p) = A(p^2) \not{p} - B(p^2) m,$$

$$A(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \, (1-x) \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) - \Delta_2^F,$$

$$B(p^2) = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, \ln \left(\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) + \Delta_0^F.$$

Fonction de vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu(p, q) = & ie\gamma_\nu \left\{ 1 + \Delta_1^F - \frac{\alpha}{2\pi} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \ln \left(\frac{(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq}{\mu^2} \right) \right\} \\ & - ie \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{\gamma^\rho [(1-x)\not{q} - y\not{p} + m] \gamma_\nu [(1-y)\not{p} - x\not{q} + m] \gamma_\rho}{(x+y)m^2 - x(1-x)q^2 - y(1-y)p^2 + 2xypq}. \end{aligned}$$

Ces expressions contiennent des contre-termes finis qui sont fixés par le choix d'un schéma de renormalisation. On les déduit de la densité lagrangienne *renormalisée*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu}^r F_r^{\mu\nu} + iZ_1 \bar{\psi}_r \gamma^\mu (\partial_\mu - ie_r A_\mu^r) \psi_r - Z_0 m_r \bar{\psi}_r \psi_r,$$

en omettant le terme de fixation de la jauge et en réintroduisant la notation de la section 6.1 pour distinguer les quantités renormalisées des quantités *nues*, non renormalisées, dépourvues d'indice r . Dans le schéma de renormalisation sur la couche de masse de la section 6.4, par exemple, on veut pouvoir directement interpréter les paramètres e_r et m_r comme étant la charge électrique et la masse du fermion, ces quantités étant définies à partir d'amplitudes physiques évaluées (ou mesurées) dans une situation cinématique précise: amplitude de vertex en $k^2 = 0$ ou pôle du propagateur fermionique en $\not{p} = m_r$. La densité lagrangienne *nue* ou non renormalisée

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi$$

ne conduit à des résultats perturbatifs finis qu'en imposant

$$\begin{aligned} m &= Z_0 Z_1^{-1} m_r, & e &= Z_3^{-1/2} e_r, \\ A_\mu &= Z_3^{1/2} A_\mu^r, & \psi &= Z_1^{1/2} \psi_r. \end{aligned}$$

Les paramètres e et m sont alors dépourvus de sens physique: ils doivent être choisis divergents et définis à l'aide d'une régularisation spécifique, elle-même sans signification physique.

Le choix d'un schéma de renormalisation résulte d'un ensemble de conventions, de conditions de normalisation de certaines amplitudes de la théorie. Il est donc arbitraire. On pourrait par exemple poser simplement

$$\Delta_1^F = \Delta_2^F = \Delta_3^F = \Delta_0^F = 0, \quad (6.103)$$

et adopter un schéma de *soustraction minimale*³². L'identité de Ward $\Delta_1 = \Delta_2$ est évidemment vérifiée. Dans ce cas, les amplitudes physiques dépendent explicitement de la masse μ apparue lors de la procédure de régularisation dimensionnelle, en plus des paramètres renormalisés e_r et m_r .

Pour discuter le contenu du schéma de renormalisation, nous allons nous concentrer sur le tenseur de polarisation du vide calculé dans trois schémas de soustraction différents.

Soustraction sur la couche de masse

Le schéma utilisé dans la section 6.4 est basé sur des conditions sur la couche de masse du photon ou de l'électron, appliquées aux fonctions de Green de la théorie. La dépendance en μ des quantités calculées à l'ordre d'une boucle est entièrement éliminée par le choix des parties finies des contre-termes, au profit d'une dépendance dans la masse physique m ($= m_r$) du fermion. Les grandeurs physiques sont en général des fonctions du rapport p^2/m^2 . Le tenseur de polarisation du vide

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -p^2\eta_{\mu\nu} + (p_\mu p_\nu - p^2\eta_{\mu\nu})\Pi(p^2), \quad (6.104)$$

(jauge de Feynman), qui sera abondamment utilisé dans cette section, s'écrit

$$\Pi(p^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right). \quad (6.105)$$

Il est normalisé par la condition

$$\Pi(p^2 = 0) = 0,$$

sur la couche de masse du photon. Notez également que $\Pi(p^2)$ devient complexe lorsque l'argument du logarithme peut être négatif, c'est-à-dire, puisque $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$, lorsque

$$p^2 > 4m^2,$$

qui est le seuil de production d'une paire fermion-antifermion.

Pour des valeurs de genre espace ou *euclidiennes*³³ telles que $|p^2| \gg m^2$, le schéma sur la couche de masse n'est pas nécessairement le plus approprié. Par

³²Il s'agit du schéma de soustraction " \overline{MS} ".

³³C'est-à-dire $p^2 < 0$. On les rencontre lorsque le photon virtuel d'impulsion p est échangé dans les canaux t ou u , par exemple dans la diffusion profondément inélastique, section 5.5.

exemple, dans cette limite,

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right], \quad (6.106)$$

d'après l'équation (6.105), et le logarithme de $|p^2|/m^2$ peut facilement devenir grand. En fait, la théorie des perturbations pourrait être mise en danger lorsque

$$|p^2| \simeq \Lambda^2, \quad \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \equiv 1.$$

Pour l'électrodynamique quantique,

$$\Lambda = m e^{\frac{3}{2}\pi\alpha^{-1}} \simeq m \times 10^{280}, \quad (6.107)$$

et l'échelle d'énergie $|p^2| \simeq \Lambda^2$ est bien au-delà du domaine de validité de la théorie. Il faut cependant noter que l'expression (6.106) n'est pas compatible avec la limite de masse nulle, $m \rightarrow 0$.

Soustraction minimale

Dans le schéma minimal de soustraction (6.103), la polarisation du vide est

$$\begin{aligned} \Pi_{s.m.}(p^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) \\ &= \Pi(p^2) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (6.108)$$

l'indice *s.m.* distinguant la soustraction minimale du schéma sur la couche de masse, sans indice. Elle coïncide avec l'expression obtenue en soustrayant sur la couche de masse lorsque $\mu = m$. Dans la limite $|p^2| \gg m^2$,

$$\Pi_{s.m.}(p^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{3} \right] \quad (6.109)$$

ne dépend pas de la masse du fermion et s'annule en $p^2 = -\mu^2 e^{5/3}$.

Soustraction à l'échelle M

La soustraction minimale a l'inconvénient d'être fortement reliée à la séparation des parties finies et infinies des contre-termes, effectuée en régularisation dimensionnelle. La condition de normalisation de la polarisation du vide dans la soustraction minimale n'est pas particulièrement intuitive. Il peut être utile de définir un autre schéma de renormalisation adapté au calcul de processus impliquant des photons virtuels d'impulsion $|p^2| \gg m^2$ et défini par une condition de normalisation de $\Pi(p^2)$ dans ce domaine de la variable p^2 . Le schéma va donc dépendre d'une masse arbitraire M et les grandeurs définies dans ce schéma porteront un

indice M . Comme condition de normalisation du contre-terme fini $\Delta_{3,M}^F$, on impose l'annulation de $\Pi(p^2)$ lorsque³⁴ $p^2 = M^2$:

$$\Pi(p^2 = M^2) = 0.$$

Il vient alors

$$\Delta_{3,M}^F = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)M^2}{\mu^2} \right), \quad (6.110)$$

et

$$\Pi_M(p^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2 - x(1-x)M^2} \right). \quad (6.111)$$

La relation avec les schémas de soustraction précédents est simplement

$$\Pi_M(p^2) = \Pi(p^2) - \Pi(M^2) = \Pi_{s.m.}(p^2) - \Pi_{s.m.}(M^2). \quad (6.112)$$

Dans la limite de masse du fermion nulle, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{3,M}^F &\xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left(-\frac{M^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{3} \right], \\ \Pi_M(p^2) &\xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{p^2}{M^2} \right). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Dans cette limite, ce dernier schéma est relié à la soustraction minimale par

$$\mu^2 = -M^2 e^{-5/3}. \quad (6.114)$$

L'intérêt de ce schéma de renormalisation réside dans la possibilité de choisir l'échelle d'énergie arbitraire M de manière à minimiser les logarithmes qui apparaissent lors du calcul d'un processus physique à l'ordre d'une boucle au moins. Il est en cela similaire à la soustraction minimale si la masse m peut être négligée. Par exemple, dans une diffusion profondément inélastique³⁵ échangeant un photon d'impulsion q , $q^2 \ll 0$, choisir $M^2 = -q^2$ supprime les corrections d'ordre α à la polarisation du vide de ce photon.

Nous avons donc obtenu trois expressions différentes (6.105), (6.108) et (6.111) de la polarisation du vide, dans trois schémas de soustraction appliqués à la même théorie renormalisée. Les trois cas contiennent cependant la même information en termes de grandeurs physiques. La différence réside dans l'interprétation des paramètres

$$\alpha = \frac{e_r^2}{4\pi}$$

et m_r par rapport à la mesure de ces grandeurs physiques. Pour mettre en évidence le rôle du schéma de renormalisation dans la signification des paramètres

³⁴L'utilisation de M^2 a pour but de rappeler la dimension de p^2 ; à ce stade, M^2 peut être positif ou négatif (euclidien).

³⁵Section 5.5.

de la densité lagrangienne renormalisée, considérons le propagateur photonique à l'ordre d'une boucle (e_r^2), dans la limite de basse énergie, $p^2 \ll m^2$. Dans la jauge de Feynman,

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= \frac{-i}{p^2} \eta_{\mu\rho} [-i\Pi^{\rho\sigma}(p)] \eta_{\sigma\nu} \frac{-i}{p^2} = \frac{i}{p^4} \Pi_{\mu\nu}(p) \\ &= -\frac{i}{p^2} \eta_{\mu\nu} - \frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (\tilde{\Pi}(p^2) - \Delta_3^F) \\ &= -\frac{i}{p^2} \frac{1}{1 - \tilde{\Pi}(p^2) + \Delta_3^F} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (\tilde{\Pi}(p^2) - \Delta_3^F) \right] + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\Pi}(p^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right).$$

Comme Δ_3^F est une constante indépendante de p^2 , on peut écrire, pour $|p^2|$ petit par rapport à m^2 ,

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= -\frac{i}{p^2} \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - \Delta_3^F - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2} \right] + \mathcal{O}(p^4) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\quad + \text{termes de jauge.} \end{aligned} \tag{6.115}$$

Les termes de jauge incluent les contributions proportionnelles à $p_\mu p_\nu$. Ils dépendent du choix de la jauge et ne contribuent pas aux amplitudes physiques puisque le photon est couplé à un courant fermionique conservé.

La quantité $D_{\mu\nu}(p)$ est la transformée de Fourier de la fonction de Green à deux points du champ du photon renormalisé $\langle 0|T A_\mu^r(x) A_\nu^r(y)|0\rangle$ qui, d'après (6.4), est reliée à celle du champ non renormalisé $A_\mu(x)$ par

$$\langle 0|T A_\mu^r(x) A_\nu^r(y)|0\rangle = Z_3^{-1} \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = \frac{1}{1 + \Delta_3} \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle.$$

$D_{\mu\nu}(p)$ est une grandeur finie, alors que Δ_3 et $\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle$ évalués à partir de la densité lagrangienne nue divergent.

Le terme d'ordre α obtenu dans l'équation (6.115) conduit dans le cas statique $p^2 = -\vec{p}^2$ à une correction au potentiel de Coulomb. En effet, comme

$$\int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{1}{\vec{p}^2},$$

il vient³⁶

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\Delta}{m^2} \right) \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} &= \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) \\ &= \frac{1}{\vec{p}^2} \left(1 + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\vec{p}^2}{m^2} \right). \end{aligned}$$

³⁶ Δ est ici l'opérateur Laplacien.

L'énergie potentielle d'un électron de charge $-e$ dans le champ d'un noyau de charge Ze (en $\vec{x} = 0$) devient alors

$$E_{pot.} = -4\pi Z\alpha \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - \Delta_3^F \right] + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right), \quad (6.116)$$

$\psi(\vec{x})$ étant la fonction d'onde stationnaire de l'électron. Le dernier terme³⁷ apporte une contribution aux niveaux d'énergie atomiques de moment cinétique orbital $\ell = 0$ (états S) puisque seules les fonctions d'onde $\ell = 0$ ne s'annulent pas à l'origine. Il constitue l'une des contributions au *déplacement de Lamb*, qui lève la dégénérescence des niveaux atomiques $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ en abaissant le niveau $2S_{1/2}$. L'expression (6.116), complétée par l'ensemble des contributions au déplacement de Lamb, est directement accessible par la mesure des niveaux d'énergie atomiques. On peut donc directement mesurer la quantité

$$\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - \Delta_3^F \right] + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (6.117)$$

comme étant le coefficient de la contribution coulombienne $-Z|\vec{x}|^{-1}$ à l'énergie potentielle électrostatique.

Soustraction sur la couche de masse

Dans le schéma de renormalisation sur la couche de masse,

$$\Delta_3^F = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)$$

et

$$E_{pot.} = -4\pi Z\alpha \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right).$$

Par définition du schéma, le coefficient du terme coulombien est

$$\alpha = \frac{e_r^2}{4\pi} = (137.035\dots)^{-1}, \quad (6.118)$$

la constante de structure fine. Le potentiel coulombien exprimé en fonction de e_r n'est pas corrigé à l'ordre α puisqu'on a imposé $\Pi(p^2 = 0) = 0$. Dans ce schéma, e_r est la constante de couplage électromagnétique statique; c'est la charge électrique du fermion mesurée par son interaction statique dans le potentiel de Coulomb.

Soustraction minimale

Puisque $\Delta_3^F = 0$ dans le schéma minimal, le coefficient du terme coulombien est

$$\alpha_{s.m.}(\mu) \left[1 + \frac{1}{3\pi} \alpha_{s.m.}(\mu) \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] = (137.035\dots)^{-1}, \quad (6.119)$$

³⁷Le terme de Uehling.

pour toute valeur de μ . Il est exprimé en fonction de la constante de couplage $\alpha_{s.m.}(\mu)$ caractéristique de la soustraction minimale et dépendant de l'échelle de soustraction arbitraire μ . Puisque

$$\alpha_{s.m.}(\mu = m) = \alpha = (137.035 \dots)^{-1}, \quad (6.120)$$

on aura pour une échelle arbitraire

$$\alpha_{s.m.}(\mu) = \frac{\alpha_{s.m.}(m)}{1 + \frac{1}{3\pi} \alpha_{s.m.}(m) \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)} + \mathcal{O}(\alpha_{s.m.}^3), \quad (6.121)$$

qui est la solution de l'équation différentielle

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_{s.m.}(\mu) = \frac{2}{3\pi} \alpha_{s.m.}^2(\mu) + \mathcal{O}(\alpha_{s.m.}^3). \quad (6.122)$$

Comme cette équation est du premier ordre, fixer sa solution requiert une constante d'intégration fournie par l'égalité (6.120). Les équations (6.120) et (6.122) déterminent complètement la valeur de la constante de couplage renormalisée e_r dans la soustraction minimale, quelle que soit l'échelle μ . La première est de nature expérimentale alors que la seconde est une *équation du groupe de renormalisation* qui décrit l'évolution du paramètre $\alpha_{s.m.}(\mu)$ lorsque l'échelle de référence μ est variée. Elle exprime l'absence de dépendance des grandeurs physiques dans le choix de l'échelle de soustraction μ ; dans notre exemple, le coefficient du terme coulombien ne dépend pas de μ grâce à (6.122). La solution (6.121) permet d'exprimer $\alpha_{s.m.}(\mu)$ en fonction de sa valeur pour n'importe quelle autre échelle μ' , pas nécessairement égale à m .

Il convient ici de préciser la définition du schéma de soustraction minimale avec une échelle arbitraire μ' . Dans l'expression (6.117) dont découle (6.119), l'apparition de l'échelle μ est le résultat de la régularisation dimensionnelle introduite dans la section 6.4. Il n'y a aucune raison d'identifier cette échelle à priori fixée avec une échelle de soustraction variable. L'introduction de l'échelle variable μ' dans (6.119) doit être effectuée en utilisant dans l'expression (6.117) le contre-terme fini

$$\Delta_3^F = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu'^2}{\mu^2} \right). \quad (6.123)$$

Il s'annule lorsque $\mu' = \mu$: c'est ce choix qui a servi à définir la soustraction minimale dans les équations (6.103).

L'équation (6.121) définit $\alpha_{s.m.}(\mu)$ en fonction de la constante de structure fine (statique) $\alpha_{s.m.}(m) = \alpha \simeq 137^{-1}$. On peut de même définir $\alpha_{s.m.}(\mu)$ par

$$\alpha_{s.m.}(\mu) = \frac{3\pi}{\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)}. \quad (6.124)$$

L'échelle

$$\Lambda = \mu \exp \left(\frac{3\pi}{2\alpha_{s.m.}(\mu)} \right) \quad (6.125)$$

est un *invariant du groupe de renormalisation*:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Lambda = 0,$$

grâce à (6.122). La valeur de Λ est indépendante du choix de μ qui doit rester arbitraire et sans effet physique. On peut donc par exemple choisir $\mu = m$ dans (6.125) et

$$\Lambda \simeq m \exp\left(\frac{3\pi}{2} 137\right) \simeq m \times 10^{280}, \quad (6.126)$$

une échelle déjà rencontrée plus haut³⁸. Notez que $\alpha_{s.m.}(\mu)$ diverge en $\mu = \Lambda$: c'est le *pôle de Landau* qui signale que la théorie n'a de sens en théorie des perturbations que pour des énergies $\mu < \Lambda$. L'électrodynamique quantique est une théorie de champs *asymptotiquement divergente*: elle est bien définie dans l'intervalle d'énergie $0 < \mu < \Lambda$, borné supérieurement par le pôle de Landau.

La notion de groupe de renormalisation peut se comprendre de la manière suivante. A l'ordre α , dans la soustraction minimale à l'échelle μ ,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) &= (p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2)[1 + \Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2)] - p_\mu p_\nu, \\ \Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2) &= \Pi(p^2) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right). \end{aligned}$$

$\Pi(p^2)$, le résultat obtenu en soustrayant sur la couche de masse, ne dépend pas de μ . La notation $\Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2)$ vise à mettre l'échelle de soustraction en évidence. Comme μ est arbitraire, on peut en changer:

$$\mu \longrightarrow \mu' : \quad \Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2) \longrightarrow \Pi_{s.m.}(p^2|\mu'^2) = \Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu'^2}\right).$$

Autrement dit, à l'ordre α ,

$$\begin{aligned} 1 + \Pi_{s.m.}(p^2|\mu'^2) &= Z(\mu'^2, \mu^2)[1 + \Pi_{s.m.}(p^2|\mu^2)], \\ Z(\mu'^2, \mu^2) &= 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu'^2}\right). \end{aligned} \quad (6.127)$$

Changer d'échelle de soustraction revient à multiplier la fonction de Green par $Z(\mu'^2, \mu^2)$.

Il existe une loi de composition des facteurs $Z(\mu'^2, \mu^2)$:

$$Z(\mu'^2, \mu^2) Z(\mu^2, \mu''^2) = Z(\mu'^2, \mu''^2); \quad (6.128)$$

et comme

$$Z(\mu^2, \mu'^2) Z(\mu'^2, \mu^2) = Z(\mu^2, \mu^2) = 1, \quad (6.129)$$

³⁸Equation (6.107).

chaque $Z(\mu^2, \mu'^2)$ possède un inverse pour l'élément neutre $Z(\mu^2, \mu^2) = 1$. Ces propriétés suggèrent que les quantités $Z(\mu'^2, \mu^2)$ forment un groupe, d'où l'appellation de groupe de renormalisation. La structure reste cependant incomplète (et la terminologie abusive) puisque le produit

$$Z(\mu^2, \mu'^2)Z(\mu''^2, \mu'''^2)$$

n'est pas une loi interne lorsque $\mu'^2 \neq \mu''^2$.

Les propriétés (6.128) et (6.129) suivent généralement du caractère multiplicatif de la renormalisation. Par exemple, la fonction de Green renormalisée à deux points du photon est

$$\langle 0|TA_r^\mu(x)A_r^\nu(y)|0\rangle = Z_3^{-1}\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle.$$

La constante de renormalisation Z_3 dépend du schéma de soustraction alors que la fonction de Green nue $\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$ en est indépendante³⁹. Un changement de schéma se manifestera ainsi par

$$\langle 0|TA_r^\mu(x)A_r^\nu(y)|0\rangle_{\text{schéma 1}} = \left[Z_3^{-1}{}_{\text{schéma 1}} \times Z_3{}_{\text{schéma 2}} \right] \langle 0|TA_r^\mu(x)A_r^\nu(y)|0\rangle_{\text{schéma 2}}, \quad (6.130)$$

et donc par l'apparition d'un facteur similaire à $Z(\mu^2, \mu'^2)$ et vérifiant les mêmes propriétés. L'argument conduisant à l'équation (6.130) se généralise évidemment à n'importe quelle fonction de Green de la théorie, avec un autre facteur Z . Notez aussi que ce résultat implique, puisque

$$\alpha_r = \frac{e_r^2}{4\pi} = Z_3\alpha,$$

que dans la soustraction minimale

$$Z(\mu'^2, \mu^2) = \frac{(Z_3)_{s.m., \mu^2}}{(Z_3)_{s.m., \mu'^2}} = \frac{\alpha_{s.m.}(\mu)}{\alpha_{s.m.}(\mu')},$$

une égalité qui peut être vérifiée à l'ordre α à l'aide de (6.123), (6.121) et (6.127).

Soustraction à l'échelle M

Selon l'équation (6.110), le coefficient du terme coulombien est cette fois

$$\alpha_M(M) \left[1 - \frac{2}{\pi} \alpha_M(M) \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{M^2}{m^2} \right) \right] = (137.035 \dots)^{-1}, \quad (6.131)$$

en distinguant la constante de couplage dans la soustraction à l'échelle M par un indice M . L'égalité (6.131) étant valable pour toute valeur de l'échelle de soustraction M , on en déduit l'équation du groupe de renormalisation

$$M \frac{d}{dM} \alpha_M(M) = \frac{4}{\pi} \alpha_M^2(M) \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{x(1-x) - \frac{m^2}{M^2}} + \mathcal{O}(\alpha_M^3(M)). \quad (6.132)$$

³⁹Mais ces quantités divergent: elles sont soumises au choix de la procédure de régularisation.

Comme le contre-terme fini (6.110) dépend de la masse m du fermion (contrairement à la soustraction minimale) l'équation d'évolution de $\alpha_M(M)$ dépend aussi de m . Dans la limite $m = 0$, elle devient

$$M \frac{d}{dM} \alpha_M(M) \Big|_{m=0} = \frac{2}{3\pi} \alpha_M^2(M) + \mathcal{O}(\alpha_M^3(M)), \quad (6.133)$$

qui est identique à l'équation (6.122) de la soustraction minimale: dans la limite de masse nulle, la soustraction à l'échelle M est équivalente à la soustraction minimale⁴⁰.

Le facteur $Z(M'^2, M^2)$ similaire à celui défini dans l'équation (6.127) pour la soustraction minimale et contrôlant le changement d'échelle de M^2 à M'^2 est

$$\begin{aligned} Z(M'^2, M^2) &= 1 + \Delta_{3,M}^F - \Delta_{3,M'}^F \\ &= 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)M^2}{m^2 - x(1-x)M'^2} \right), \end{aligned}$$

d'après (6.110). Il vérifie les propriétés (6.128) et (6.129).

L'intégrale paramétrique contenue dans l'équation (6.132) peut être effectuée:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{x(1-x) - \frac{m^2}{M^2}} &= \frac{1}{6} + \frac{m^2}{M^2} + \frac{m^4}{M^4} \int_0^1 dx \left(x(1-x) - \frac{m^2}{M^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{m^2}{M^2} + \frac{m^4}{M^4} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}} \right), \end{aligned}$$

en supposant que $M^2 > 4m^2$.

Dans les deux schémas de renormalisation impliquant une échelle de soustraction arbitraire μ ou M , il est possible de formuler la théorie des perturbations en fonction de la constante de couplage $\alpha_{s.m.}(\mu)$ ou $\alpha_M(M)$ pour n'importe quelle valeur de μ ou M . La valeur numérique de la constante de couplage est fixée par la mesure d'une grandeur physique, par exemple par les relations (6.119) ou (6.131). Dans la soustraction minimale, choisir $\mu = m$ conduit à $\alpha_{s.m.}(m) = \alpha \simeq 137^{-1}$ et le terme coulombien (6.119) est particulièrement simple. Par contre un processus impliquant un photon d'impulsion q , $-q^2 \gg m^2$, sera décrit par une expression dépendant du propagateur du photon et donc de la quantité

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \alpha_{s.m.}(m) \left[1 + \Pi_{s.m.}(q^2) \right] \\ &= \alpha_{s.m.}(m) \left[1 + \frac{2}{\pi} \alpha_{s.m.}(m) \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{q^2}{m^2} \right) \right] \\ &\simeq \alpha_{s.m.}(m) \left[1 + \frac{1}{3\pi} \alpha_{s.m.}(m) \left[\ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right] \right]. \end{aligned}$$

⁴⁰Equation (6.114).

Comme $-q^2/m^2 \gg 1$, la force de l'interaction électromagnétique dans la région cinématique du photon n'est pas correctement décrite par $\alpha_{s.m.}(m) \simeq 137^{-1}$: le logarithme de $-q^2/m^2$ est grand et l'expansion perturbative dans cette région cinématique est organisée en puissances de

$$\alpha_{s.m.}(m) \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \gg \alpha_{s.m.}(m),$$

au lieu de puissances de la constante de structure fine $\alpha_{s.m.}(m)$. Par construction, $\alpha_{s.m.}(m)$ est la constante de couplage appropriée à la limite de basse énergie. Cependant, l'équation du groupe de renormalisation (6.121) indique que

$$\alpha_{s.m.}(m) = \alpha_{s.m.}(Q) \left[1 + \frac{1}{3\pi} \alpha_{s.m.}(Q) \ln \left(\frac{m^2}{M^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_{s.m.}^3(Q)),$$

où nous choisissons $Q = \sqrt{-q^2}$. En conséquence,

$$\mathcal{A} = \alpha_{s.m.}(Q) \left[1 - \frac{5}{9\pi} \alpha_{s.m.}(Q) \right] + \mathcal{O}(\alpha_{s.m.}^3(M)).$$

La transformation du groupe de renormalisation de m à l'échelle Q caractéristique du processus a permis d'éliminer le grand logarithme⁴¹. Il reste comme seule correction perturbative un terme d'ordre $\alpha_{s.m.}^2(Q)$. On en conclut que la constante de couplage $\alpha_{s.m.}(Q)$ dont la valeur est tirée de l'équation (6.121) décrit correctement la force de l'interaction électromagnétique dans la région cinématique $Q^2 = -q^2 \gg m^2$. Il y a donc une information physique dans la dépendance d'échelle des paramètres $\alpha_{s.m.}(\mu)$ ou $\alpha_M(M)$: elle décrit l'évolution de l'intensité de l'interaction selon le régime cinématique dans lequel elle agit.

En général, on qualifie la constante de couplage $\alpha(\mu)$ définie dans un schéma de renormalisation impliquant une échelle de soustraction arbitraire μ , de *constante de couplage effective*⁴². Elle vérifie une équation du groupe de renormalisation de la forme

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \beta(\alpha(\mu)). \quad (6.134)$$

La *fonction bêta* $\beta(\alpha(\mu))$ peut aussi dépendre d'autres paramètres tels que la masse m du fermion. Elle admet une expansion perturbative dans le domaine de μ où la constante de couplage effective $\alpha(\mu)$ est petite:

$$\beta(\alpha) = \sum_{n \geq 1} b_n \alpha^{n+1}. \quad (6.135)$$

Chaque coefficient b_n résulte en principe d'un calcul à n boucles, par exemple de la polarisation du vide: il faut obtenir Δ_3 puisque la renormalisation de la constante de couplage de jauge est contrôlée par ce contre-terme. Nous avons montré

⁴¹ "Leading logarithm".

⁴² "Running coupling constant".

que pour l'électrodynamique quantique d'un fermion de charge e en soustraction minimale ou à l'échelle M dans la limite de masse nulle $m = 0$,

$$b_1 = \frac{2}{3\pi}.$$

L'extension de ce résultat à une théorie décrivant un ensemble de fermions (de Dirac, à quatre composantes) de charges $Q_i e$, $i = 1, \dots, n$ est

$$b_1 = \frac{2}{3\pi} \sum_{i=1}^n Q_i^2. \quad (6.136)$$

Il suffit en effet de remplacer pour chaque fermion e par $Q_i e$ au long de cette section.

La généralisation au cas d'une théorie de jauge non abélienne joue un rôle important dans la physique du Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques. Le calcul de la fonction bêta non abélienne est hors d'atteinte: le formalisme requis pour quantifier les théories de jauge non abéliennes n'a pas été développé ici. Pour une théorie décrivant:

- les champs de jauge du groupe G ,
- des fermions de Weyl (à deux composantes) se transformant selon la représentation \mathbf{R}_f du groupe de jauge,
- des champs scalaires réels se transformant selon la représentation \mathbf{R}_s du groupe de jauge,

l'équation d'évolution de la constante de jauge effective s'écrit

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \beta_0 \alpha^2(\mu), \\ \beta_0 &= -\frac{11}{3} C(G) + \frac{2}{3} T(\mathbf{R}_f) + \frac{1}{6} T(\mathbf{R}_s), \end{aligned} \quad (6.137)$$

à l'ordre d'une boucle, les corrections perturbatives négligées étant d'ordre α^3 . Le nombre $C(G)$ est le Casimir quadratique du groupe de jauge G . Il se calcule à l'aide des constantes de structure de G :

$$C(G) \delta^{AB} = \sum_{C,D} f^{ACD} f^{BCD}. \quad (6.138)$$

Le nombre $T(\mathbf{R})$ se calcule à partir des générateurs $T_{\mathbf{R}}^A$ de l'algèbre de Lie de G pour la représentation \mathbf{R} :

$$T(\mathbf{R}) \delta^{AB} = \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^A T_{\mathbf{R}}^B). \quad (6.139)$$

Pour les représentations **3** de $SU(3)$ et **2** de $SU(2)_L$ qui interviennent dans le Modèle standard⁴³,

$$T(\mathbf{3}) = T(\mathbf{2}) = \frac{1}{2},$$

qui peut être vu comme une normalisation des générateurs. Il suit alors que

$$C(SU(N)) = N.$$

Le groupe de jauge de l'électrodynamique quantique est $U(1)$: $C(U(1)) = 0$. Et un fermion de Dirac de charge Qe est équivalent à deux spineurs de Weyl de charge Qe ; sa contribution à β_0 est donc

$$\frac{2}{3} \times 2 \times Q^2 = \frac{4}{3}Q^2,$$

en accord avec le résultat (6.136).

L'information cruciale contenue dans les équations (6.137) est le signe de la contribution à β_0 due aux interactions entre champs de jauge non abéliens. En résolvant, on obtient

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(M)}{1 - \frac{\beta_0}{4\pi} \alpha(M) \ln\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)}, \quad (6.140)$$

pour deux échelles arbitraires d'énergie μ et M . Cette égalité peut aussi s'écrire

$$\alpha(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)}, \quad (6.141)$$

où

$$\Lambda = \mu \exp\left(\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha(\mu)}\right) \quad (6.142)$$

est l'échelle à laquelle la constante de couplage effective $\alpha(\mu)$ diverge. Λ est un invariant du groupe de renormalisation:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Lambda = 0,$$

d'après (6.137). Il caractérise la force de l'interaction.

Si le coefficient β_0 est positif, comme dans le cas de l'électrodynamique, alors la constante de couplage effective $\alpha(\mu)$ croît lorsque l'échelle d'énergie augmente: la théorie est asymptotiquement divergente, elle possède un pôle de Landau de haute énergie Λ . Les équations (6.140) et (6.141) n'ont de sens que pour $\mu, M < \Lambda$. Le domaine perturbatif des petites valeurs de $\alpha(\mu)$ est à basse énergie, $\mu \ll \Lambda$.

Par contre, si β_0 est négatif et dominé par la contribution des champs de jauge non abéliens, la théorie est *asymptotiquement libre*. La constante de couplage

⁴³Chapitre 8.

effective décroît lorsque l'échelle d'énergie μ augmente. Les équations (6.140) et (6.141) n'ont de sens que pour $\mu, M > \Lambda$. Le domaine perturbatif où $\alpha(\mu)$ est petit se situe à haute énergie. Il n'y a en principe pas d'objection à prolonger le domaine de validité de la théorie jusqu'aux énergies asymptotiques, $\mu \rightarrow \infty$. A basse énergie par contre, $\mu \sim \Lambda$, $\alpha(\mu)$ est grand et la dynamique est non perturbative.

La chromodynamique quantique avec n_f quarks, pour laquelle

$$C(G) = 3, \quad T(\mathbf{R}_f) = n_f, \quad T(\mathbf{R}_s) = 0,$$

est asymptotiquement libre lorsque $n_f \leq 16$:

$$\beta_{QCD} = -11 + \frac{2}{3}n_f.$$

La valeur expérimentale de la constante de couplage forte $\alpha_s(90 \text{ GeV}) \simeq .12$ implique approximativement⁴⁴

$$\Lambda_{QCD} \sim 100 - 200 \text{ MeV}$$

(avec $n_f = 5$; le quark t dont la masse est supérieure à 90 GeV n'intervient pas ici).

Références

La littérature citée dans la bibliographie propose en général un traitement de la renormalisation plus complet que celui donné ici. On y trouvera en particulier d'autres méthodes de régularisation, des discussions des théories de jauge non abéliennes et du problème des divergences infrarouges. Pour une présentation particulièrement étendue, voir:

Collins [11].

Sur la renormalisation des théories de jauge non abéliennes, une revue:
Abers et Lee [26].

Sur la régularisation dimensionnelle:
Leibbrandt [27]; Collins [11], chapitre 4.

Sur la fonction gamma, par exemple:
Morse et Feshbach [47], pages 419–424; Magnus, Oberhettinger et Soni [48], section 1.1.

Sur les problèmes infrarouges, voir aussi:
Yennie, Frautschi et Suura [28].

⁴⁴Le traitement à l'ordre d'une boucle seulement n'est évidemment pas fiable à basse énergie.

Anomalies dans les identités de Ward: par exemple, les revues et articles rassemblés dans:

Treiman, Jackiw, Zumino et Witten [29]. Ou Peskin et Schroeder [6], chapitre 19.

Groupe de renormalisation: parmi beaucoup d'excellentes revues, voir: Coleman [30], Gross [31] ou Politzer [32].

Exercices

- 6.1** Moment magnétique anormal et facteur de Landé. Par comparaison avec la diffusion d'un électron non relativiste dans un champ magnétique, il est d'usage d'écrire le moment magnétique de l'électron sous la forme

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

où \vec{S} est le vecteur de spin de l'électron et g est le *facteur de Landé*. Ainsi, selon le paragraphe 6.4.4,

$$\mu = |\vec{\mu}| = g \left(\frac{e}{4m} \right), \quad g = 2 + \frac{\alpha}{\pi},$$

puisque le spin de l'électron est $1/2$. Le facteur de Landé vaut 2 à l'ordre le plus bas, mais les corrections perturbatives quantiques se manifestent par une valeur non nulle de $g - 2$.

Supposons qu'en plus de son interaction électromagnétique avec le photon, l'électron interagit avec un champ scalaire réel $\varphi(x)$ et avec un champ pseudoscalaire $\sigma(x)$.

- La densité lagrangienne d'interaction du champ scalaire et de l'électron est de la forme

$$\lambda h(x) \bar{\psi}(x) \psi(x).$$

Calculer le moment magnétique anormal de l'électron induit par cette interaction, à l'ordre des diagrammes à une boucle. En déduire la valeur de $g - 2$.

- La densité lagrangienne d'interaction du champ pseudoscalaire et de l'électron est de la forme

$$i\alpha\sigma(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x).$$

Calculer le moment magnétique anormal de l'électron induit par cette interaction, à l'ordre des diagrammes à une boucle.

Utiliser le propagateur scalaire obtenu dans la section 2.5. Les règles de Feynman associent un facteur $i\lambda$ au vertex électron–scalaire et un facteur $-\alpha\gamma_5$ au vertex électron–pseudoscalaire.

6.2 Vérifier l'identité à la base des paramètres de Feynman,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx [Ax + B(1-x)]^{-2},$$

et sa généralisation, l'équation (6.47).

Dans une première étape, récrire l'identité ci-dessus sous la forme

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx dy \delta(1-x-y) [Ax + By]^{-2},$$

et obtenir une identité pour $\frac{1}{A^m B^n}$ par dérivation par rapport à A ou B .

Procéder par induction pour établir l'identité généralisée.

6.3 Montrer à l'ordre d'une boucle que la fonction de Green à quatre photons $\langle 0 | T A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) A_\sigma(x_4) | 0 \rangle$ est libre de divergence. Utiliser l'espace des impulsions.

Chapitre 7

Symétrie spontanément brisée

La quantification des champs de spin un ne s'avère possible que si chacun d'eux est associé à une symétrie de jauge. La conséquence est alors que ces champs de jauge restent sans masse. Cette situation est satisfaisante pour les interactions électromagnétiques et fortes, qui font intervenir un photon et des gluons de masse nulle. Elle est certainement inacceptable pour les interactions faibles et leurs bosons massifs Z^0 et W^\pm de spin unité.

La description des interactions des Z^0 et W^\pm au moyen d'une théorie quantique de champs impose donc de concevoir une généralisation de la théorie de jauge qui admette des champs vectoriels massifs sans détruire la cohérence de la théorie quantifiée. Cette généralisation fait appel au phénomène de *brisure spontanée de la symétrie*, qui est décrit à l'aide de deux résultats fondamentaux, le *théorème de Goldstone*, qui s'adresse aux symétries continues d'une théorie de champs, qu'elles soient globales ou locales, et le *mécanisme de Higgs* qui intervient lorsque des symétries de jauge sont spontanément brisées. En plus de l'apparition de champs massifs de spin un, la brisure spontanée de symétries de jauge a pour conséquence inévitable l'existence de particules élémentaires de spin nul dénommées génériquement *bosons de Higgs*.

7.1 Le théorème de Goldstone

La quantification canonique du champ scalaire réel libre et massif telle qu'elle a été décrite dans le chapitre 2 implique que la *valeur moyenne dans le vide* de l'opérateur de champ $\varphi(x)$ est nulle:

$$\langle \varphi(x) \rangle \equiv \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0.$$

Ce résultat découle de l'équation de Klein-Gordon $(\square + m^2)\varphi(x) = 0$, qui interdit $\varphi(x) = v \neq 0$ lorsque $m \neq 0$. L'expansion en ondes planes du champ,

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}],$$

ne comprend pas de terme constant puisque $k^0 = \omega_k \geq m$. Pour un champ de masse nulle par contre, il existe un opérateur hermitique $a(0) + a^\dagger(0)$ qui commute avec tous les opérateurs de création et d'annihilation de la théorie puisque $\omega_{k=0} = 0$:

$$[a(0) + a^\dagger(0), a(q)] = [a(0) + a^\dagger(0), a^\dagger(q)] = 0.$$

Cet opérateur est donc proportionnel à l'opérateur identité dans l'espace de Fock et la constante de proportionnalité réelle est définie par l'action de $a(0) + a^\dagger(0)$ sur l'état du vide,

$$[a(0) + a^\dagger(0)]|0\rangle = v|0\rangle,$$

qui correspond à

$$\langle \varphi(x) \rangle = v.$$

Une valeur moyenne dans le vide v non nulle n'entre pas en conflit avec la covariance relativiste: comme $\varphi(x)$ est scalaire, v est un invariant de Lorentz. Elle est permise par l'équation de Klein-Gordon $\square\varphi = 0$. Dans une théorie libre de masse nulle cependant, la valeur de v n'a aucune signification physique. Dans une théorie interactive, elle interviendrait dans la physique du modèle.

Considérons ensuite une théorie *classique* d'un ensemble de champs scalaires $\varphi^i(x)$, qui seront choisis réels sans restreindre la généralité. Ces champs sont solutions des équations du mouvement (d'Euler-Lagrange) obtenues à partir de la fonctionnelle d'action. On peut envisager cette théorie scalaire comme la limite d'une théorie de jauge dans laquelle les champs de jauge et les spineurs ont été annulés, un choix compatible avec les équations du mouvement et les symétries de la théorie de jauge. Il peut alors exister des solutions des équations du mouvement pour lesquelles les valeurs moyennes des champs scalaires sont constantes sans être nulles. La densité lagrangienne de la théorie scalaire est simplement

$$\mathcal{L}_{scal.} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^i)(\partial^\mu \varphi^i) - V(\varphi^i), \quad (7.1)$$

le potentiel V étant un polynôme du quatrième degré en φ^i . Et les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\square\varphi^i + \frac{\partial V}{\partial \varphi^i} = 0. \quad (7.2)$$

Ces équations admettent des valeurs constantes des champs, $\varphi^i(x) = c^i$, pour autant qu'elles vérifient

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi^i} \right]_{\varphi^i=c^i} = 0. \quad (7.3)$$

D'autre part, comme l'Hamiltonien est

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \varphi^i)(\partial_0 \varphi^i) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \varphi^i) \cdot (\vec{\nabla} \varphi^i) + V(\varphi^i) \right],$$

la solution $\varphi^i = c^i$ correspond à une densité d'énergie $V(\varphi^i = c^i)$. Classiquement, cette solution est stable si les valeurs c^i minimisent localement le potentiel, c'est-à-dire si

$$V(c^i + \delta \varphi^i) \geq V(c^i)$$

pour des petites fluctuations $\delta \varphi^i$ arbitraires des champs. C'est le cas si la matrice des deuxièmes dérivées partielles,

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \right]_{\varphi^k = c^k},$$

n'a que des valeurs propres positives ou nulles. Dans la théorie classique, chaque minimum local de V est un état stable. Quantiquement, seul un minimum absolu du potentiel est stable. Cet état fondamental ou *état du vide* sera désigné par les valeurs $\varphi^i = v^i$. Son existence est indispensable; le potentiel V doit donc être inférieurement borné. Comme V est un polynôme de degré quatre, ceci impose des conditions sur les coefficients de ses termes quartiques.

Supposons que la densité lagrangienne $\mathcal{L}_{scal.}$ est invariante sous un groupe G de transformations continues, dont l'action sur les champs scalaires est

$$\varphi^i \longrightarrow U(\alpha^A)^{ij} \varphi^j, \quad (7.4)$$

ou infinitésimalement,

$$\varphi^i \longrightarrow \varphi^i + \delta \varphi^i, \quad \delta \varphi^i = i \alpha^A (T_s^A)^{ij} \varphi^j. \quad (7.5)$$

Les matrices T_s^A forment un ensemble de générateurs hermitiques ($T_s^A = T_s^{A\dagger}$) de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie et les paramètres infinitésimaux α^A sont des nombres réels. La réalité des champs impose $T_s^{A*} = -T_s^A$ et les matrices T_s^A sont imaginaires et antisymétriques. Ceci indique que le groupe de symétrie est nécessairement un sous-groupe de $O(N)$, N étant le nombre de champs scalaires φ^i , $i = 1, \dots, N$ et $O(N)$ le groupe des rotations d'un vecteur à N composantes. Comme les termes cinétiques de la densité lagrangienne sont invariants sous $O(N)$,

$$\delta \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial^\mu \varphi^i) \right] = i \alpha^A (T_s^A)^{ij} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial^\mu \varphi^j) = 0$$

par antisymétrie de T_s^A , le groupe de symétrie ne dépend que de la forme du potentiel. L'invariance du potentiel $V(\varphi^i + \delta \varphi^i) = V(\varphi^i)$ s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^j} \delta \varphi^j = i \alpha^A \frac{\partial V}{\partial \varphi^j} (T_s^A)^{jk} \varphi^k = 0, \quad (7.6)$$

ou

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^j} (T_s^A)^{jk} \varphi^k = 0, \quad A = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

puisque les paramètres α^A sont arbitraires. Ces équations sont vraies pour toutes les valeurs des champs. Elles peuvent être vues comme déterminant le groupe de symétrie pour une théorie donnée (c'est-à-dire des équations pour T_s^A , V étant donné) ou comme des contraintes sur le potentiel V , le groupe de symétrie étant fixé à priori.

Supposons que l'état fondamental de la théorie soit donné par $\langle \varphi^i \rangle = v^i$. Si $v^i = 0$, $i = 1, \dots, N$, alors l'état fondamental est invariant sous le groupe de symétrie de \mathcal{L}_{scal} :

$$\delta \langle \varphi^i \rangle = 0. \quad (7.8)$$

Par contre, si certains v^i sont non nuls, on peut diviser les générateurs de l'algèbre de Lie en deux catégories notées \tilde{T}_s^A et \mathcal{T}_s^A et définies par

$$\begin{aligned} i : \quad & (\tilde{T}_s^A)^{ij} v^j = 0, \\ ii : \quad & (\mathcal{T}_s^A)^{ij} v^j \neq 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

L'état fondamental est laissé invariant par les symétries \tilde{T}_s^A . L'ensemble des générateurs \tilde{T}_s^A génère un sous-groupe H du groupe de symétrie G de \mathcal{L}_{scal} , qualifié de *petit groupe* de v^i ¹. Les générateurs \mathcal{T}_s^A correspondent aux symétries de G spontanément brisées par l'état fondamental.

L'invariance de la densité lagrangienne implique que si v^i est un état du vide avec les symétries non brisées de H , alors

$$v'^i = U^{ij} v^j$$

est encore un état du vide pour n'importe quel élément U du groupe G ; l'état du vide est ainsi (continûment) dégénéré dans une théorie avec une symétrie spontanément brisée. Et si U_H est un élément de H , $U_H^{ij} v^j = v^i$, alors

$$(UU_H U^{-1})^{ij} v'^j = v'^i.$$

Pour chaque U fixé, le petit groupe de v'^i est donné par les éléments $UU_H U^{-1}$, $U_H \in H$: il est donc à nouveau égal à H ².

Notons qu'il est en principe possible que $v^i \neq 0$ ne brise pas de symétrie. C'est le cas si les transformations des champs (7.5) n'agissent pas sur une ou plusieurs composantes de φ^i . Si par exemple la composante φ^1 est elle-même invariante sous les transformations de G , $\delta \varphi^1 = 0$, alors il est clair qu'une valeur $\langle \varphi^1 \rangle = v^1 \neq 0$ ne brise pas de symétrie.

¹Ou de *stabilisateur* de v^i dans G , ou encore de *groupe d'isotropie* de v^i .

²Le lien entre théorie des groupes et symétries spontanément brisées est développé par O'Raifeartaigh [44].

Une théorie dont l'état fondamental correspond à des valeurs dans le vide $\langle \varphi^i \rangle = v^i$ non nulles peut toujours être reformulée en fonction de nouveaux champs

$$\tilde{\varphi}^i = \varphi^i - v^i, \quad (7.10)$$

pour lesquels l'état du vide est

$$\langle \tilde{\varphi}^i \rangle = 0.$$

La densité lagrangienne est alors

$$\mathcal{L}_{scal.} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\varphi}^i)(\partial^\mu \tilde{\varphi}^i) - \tilde{V}(\tilde{\varphi}^i), \quad \tilde{V}(\tilde{\varphi}^i) = V(\tilde{\varphi}^i + v^i). \quad (7.11)$$

Le potentiel s'écrit également

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\varphi}^i) &= \langle V \rangle + \left[\frac{\partial V}{\partial \varphi^i} \right]_{\varphi^k=v^k} \tilde{\varphi}^i + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \right]_{\varphi^k=v^k} \tilde{\varphi}^i \tilde{\varphi}^j \\ &+ \text{termes cubiques et quartiques en } \tilde{\varphi}^i, \end{aligned} \quad (7.12)$$

où $\langle V \rangle = V(v^i)$. Le premier terme, la constante $\langle V \rangle$, est sans signification physique: on peut toujours choisir le “zéro de l'énergie” tel que $\langle V \rangle = 0$ ³. Le deuxième terme, linéaire en $\tilde{\varphi}^i$, s'annule d'après (7.3). Le terme quadratique en $\tilde{\varphi}^i$ est la matrice du carré des masses des nouveaux champs scalaires,

$$(\mathcal{M}_{\tilde{\varphi}}^2)_{ij} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \right]_{\varphi^k=v^k}. \quad (7.13)$$

Puisque v^i correspond au minimum de V , elle n'a que des valeurs propres positives ou nulles.

En prenant la dérivée de l'équation d'invariance du potentiel (7.7) par rapport à φ^i et en l'évaluant en $\varphi^i = v^i$, il vient, pour chaque générateur T_s^A ,

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \right]_{\varphi^\ell=v^\ell} (T_s^A)^{jk} v^k = 0. \quad (7.14)$$

Seuls les générateurs des symétries brisées T_s^A contribuent à ces équations, qui deviennent

$$(\mathcal{M}_{\tilde{\varphi}}^2)_{ij} (T_s^A)^{jk} v^k = 0. \quad (7.15)$$

Comme $(T_s^A)^{jk} v^k \neq 0$, la matrice de masse des champs scalaires possèdera une valeur propre nulle pour chaque générateur d'une symétrie spontanément brisée. D'après (7.15), les vecteurs propres h^A associés à chaque masse nulle et à chaque générateur de symétrie brisée ont pour composantes $(h^A)^j = (T_s^A)^{jk} v^k$.

³La prescription d'ordre normal joue ce rôle (§ 2.2.1).

Nous avons ainsi obtenu le *théorème de Goldstone* [38]:

A chaque symétrie continue (globale ou locale) de l'action qui n'est pas une symétrie de l'état du vide, il correspond un champ scalaire réel de masse nulle qui est le *boson de Goldstone* de la symétrie spontanément brisée.

La discussion ci-dessus est formulée dans le cadre de la théorie classique. Son extension à des champs scalaires quantifiés est schématiquement la suivante. L'état du vide de la théorie quantique n'est pas défini à partir du potentiel classique V présent dans la densité lagrangienne. Il est défini à partir du *potentiel scalaire effectif*, qui inclut les corrections quantiques $\Delta V_{quant.}$ au potentiel classique⁴ V :

$$V_{eff.} = V + \Delta V_{quant.}$$

On calcule ce potentiel effectif⁵ en principe en théorie des perturbations, après quantification des champs. Selon la procédure décrite dans le chapitre 2, cette quantification se fait à partir de la densité lagrangienne, en déterminant l'état du vide classique v^i et en séparant la partie quadratique libre des termes d'interactions. Le fait que v^i minimise le potentiel classique V n'implique pas que ce soit le cas du potentiel quantique $V_{eff.}$. En général l'état du vide quantique \hat{v}^i , pour lequel

$$\left[\frac{\partial V_{eff.}}{\partial \varphi^i} \right]_{\varphi^j = \hat{v}^j} = 0,$$

diffère de l'état du vide classique. La situation la plus commune est que si le potentiel classique V détermine complètement les valeurs v^i , alors les corrections quantiques $\hat{v}^i - v^i$ sont de natures perturbatives: le sous-groupe des symétries non brisées H n'est pas modifié par les corrections quantiques. Mais il peut arriver que le sous-groupe H des symétries non brisées par l'état du vide de la théorie quantique ne soit correctement identifié qu'en tenant compte des corrections quantiques.

La dérivation du théorème de Goldstone donnée ici utilise explicitement la densité lagrangienne ou le potentiel scalaire effectif. Il est également possible de l'obtenir à partir de l'existence des courants conservés associés par le théorème de Noether à chaque symétrie continue⁶.

L'exemple le plus simple de brisure spontanée d'une symétrie continue fait appel à un champ scalaire complexe ϕ avec le potentiel

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \frac{\lambda}{2} \left(\phi^\dagger \phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 = -\frac{\mu^2}{2} \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + \frac{\mu^4}{8\lambda}. \quad (7.16)$$

⁴Complété par les contre-termes nécessaires à la renormalisation de la théorie.

⁵Pour une discussion du potentiel effectif et de son évaluation, voir par exemple Weinberg [2], chapitre 16, Peskin et Schroeder [6], chapitre 11, ou Itzykson et Zuber [1], paragraphe 9.2.2.

⁶Voir par exemple, Weinberg [2], section 19.2, Itzykson et Zuber [1], paragraphe 11.2.2.

La constante réelle λ est positive afin d'assurer que V (et donc l'énergie) soit inférieurement borné et on choisit $\mu^2 > 0$. Ce potentiel est invariant sous les transformations continues

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha Q} \phi, \quad (7.17)$$

du groupe unitaire $U(1)$. Une variation infinitésimale s'écrit $\delta\phi = i\alpha Q\phi$, le nombre (fixé) Q étant le générateur unique de la symétrie $U(1)$ et α le paramètre arbitraire. Le minimum du potentiel est atteint lorsque $\langle\phi^\dagger\phi\rangle = \mu^2/2\lambda$, ou lorsque

$$\langle\phi\rangle = e^{i\beta} v, \quad v = \sqrt{\mu^2/2\lambda}, \quad \beta \text{ réel.}$$

La symétrie $U(1)$ est donc spontanément brisée. On introduit ensuite le champ $\tilde{\phi}$ pour lequel le minimum du potentiel correspond à $\langle\tilde{\phi}\rangle = 0$:

$$\tilde{\phi} = \phi - e^{i\beta} v.$$

Il convient également de décomposer $\tilde{\phi}$ en deux champs réels selon

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta} [A(x) + iB(x)].$$

Finalement, la transformation (7.17) indique que la valeur de β correspond à un choix de jauge; il est donc légitime de choisir $\beta = 0$. En fonction des nouveaux champs A et B , le potentiel s'écrit:

$$V(A, B) = \frac{1}{2}\mu^2 A^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}v A(A^2 + B^2) + \frac{\lambda}{8}(A^2 + B^2)^2, \quad v = \sqrt{\mu^2/2\lambda}. \quad (7.18)$$

Il ne possède plus d'invariance $U(1)$. Il décrit un champ réel A de masse μ , en interaction avec un champ réel de masse nulle B , le boson de Goldstone de la symétrie brisée.

7.2 Le mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Higgs [39] crée le lien entre symétries continues locales spontanément brisées et bosons de jauge massifs.⁷ Le paramètre de chaque symétrie de jauge est une fonction, un champ. L'invariance de jauge implique que cette fonction est inobservable, qu'on peut la choisir arbitrairement sans modifier la physique du modèle. Elle a pour conséquence de rendre non physique l'une des composantes du champ $A_\mu(x)$: un champ de jauge n'a que deux composantes, deux polarisations transverses.

Nous allons voir que lorsqu'une symétrie de jauge est spontanément brisée, son champ de jauge acquiert une masse et le boson de Goldstone associé n'est pas

⁷L'usage commun de la terminologie "mécanisme de Higgs" ne rend pas compte de la contribution de Brout et Englert.

un état physique indépendant. La liberté de formuler la théorie dans n'importe quelle jauge subsiste et il existe une jauge particulière dans laquelle le boson de Goldstone n'est plus présent: il est "absorbé" par le champ de jauge massif. Le champ de jauge et le boson de Goldstone forment donc une entité. Ce phénomène est en accord avec la nécessité de compléter le champ de jauge et ses deux états transverses par un troisième degré de liberté: un champ massif de spin un a trois composantes, de polarisations transverses (deux) ou longitudinale. Le boson de Goldstone joue ce rôle.

Pour décrire le mécanisme de Higgs, il convient de coupler les champs scalaires φ^i aux champs de jauge d'une symétrie locale⁸. La théorie de champs s'écrit⁹

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{jauge} + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi^i)(D^\mu \varphi^i) - V(\varphi^i), \quad (7.19)$$

avec

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g^A \sum_{BC} f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C,$$

et

$$D_\mu \varphi^i = \partial_\mu \varphi^i - i \sum_A g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} \varphi^j. \quad (7.20)$$

Supposons à nouveau que le potentiel conduit à l'état du vide $\langle \varphi^i \rangle = v^i \neq 0$. En introduisant comme dans la section précédente des champs de valeur moyenne dans le vide nulle $\tilde{\varphi}^i = \varphi^i - v^i$, la densité lagrangienne devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{jauge} + \frac{1}{2}(D_\mu \tilde{\varphi}^i)(D^\mu \tilde{\varphi}^i) - V(\tilde{\varphi}^i + v^i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{AB} g^A g^B [v^i (T_s^A T_s^B)^{ij} v^j] A_\mu^A A^{B\mu} - i \sum_A g^A A_\mu^A (D^\mu \tilde{\varphi}^i)(T_s^A)^{ij} v^j, \end{aligned} \quad (7.21)$$

puisque $D_\mu v^i = -i \sum_A g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} v^j$. Deux nouveaux termes quadratiques dans les champs apparaissent: premièrement des termes de masse des champs de jauge de la forme

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}_1^{AB} A_\mu^A A^{B\mu}, \quad \mathcal{M}_1^{AB} = g^A g^B [v^i (T_s^A T_s^B)^{ij} v^j]; \quad (7.22)$$

deuxièmement des termes de propagation mélangeant les champs de jauge A_μ^A et les champs scalaires¹⁰:

$$-i \sum_A g^A A_\mu^A (\partial^\mu \tilde{\varphi}^i)(T_s^A)^{ij} v^j = i \sum_A g^A (\partial^\mu A_\mu^A) \tilde{\varphi}^i (T_s^A)^{ij} v^j + \partial^\mu (\dots). \quad (7.23)$$

Il est clair que seuls les champs de jauge associés aux symétries de jauge brisées pour lesquelles $(T_s^A)^{ij} v^j \neq 0$ contribuent aux expressions (7.22) et (7.23).

⁸Les fermions n'interviennent pas et sont donc omis.

⁹Section 1.5.

¹⁰Ce terme est réel: les générateurs T_s^A sont imaginaires et antisymétriques.

La théorie (7.19) est invariante sous les transformations de jauge

$$\begin{aligned}\varphi^i &\longrightarrow \varphi'^i = [e^{i\alpha^A T_s^A}]^{ij} \varphi^j, \\ \sum_A g^A A_\mu^A T_s^A &\longrightarrow \sum_A g^A A'_\mu{}^A T_s^A = e^{i\alpha^B T_s^B} \left[i\partial_\mu + \sum_A g^A A_\mu^A T_s^A \right] e^{-i\alpha^C T_s^C},\end{aligned}\tag{7.24}$$

mais la décomposition $\varphi^i = \tilde{\varphi}^i + v^i$ et la densité lagrangienne (7.21), qui dépend du vide v^i , ne le sont pas. On peut cependant récrire (7.19) dans n'importe quelle jauge.

Pour identifier le contenu physique de la théorie et éliminer le terme de mélange (7.23), il est utile d'adopter une paramétrisation particulière du multiplet de champs scalaires. Nous avons N champs réels φ^i , et nous supposons que l'algèbre de Lie du groupe de jauge G a dimension M et que le vide v^i brise p symétries. Il y a donc p bosons de Goldstone et, nécessairement, $p < N$. Les p vecteurs $(T_s^A)^{ij} v^j$, $A = 1, \dots, p$, dans l'espace N -dimensionnel des champs engendrent les directions des bosons de Goldstone. On peut donc représenter les champs de Goldstone par

$$[\exp(i\xi^A(x) T_s^A)]^{ij} v^j,$$

avec p champs $\xi^A(x)$. Les autres champs scalaires sont ensuite ajoutés en posant

$$\varphi^i = [\exp(i\xi^A(x) T_s^A)]^{ij} (h^j(x) + v^j)\tag{7.25}$$

étant entendu que le vecteur $h^i(x)$ ne contient que $N - p$ champs réels, et qu'il est orthogonal aux directions des bosons de Goldstone,

$$h^i(x) (T_s^A)^{ij} v^j = 0.\tag{7.26}$$

Notez que le vecteur $h(x)v^i$ est toujours solution de cette équation puisque les générateurs sont antisymétriques: il y a toujours au moins un champ réel dans $h^i(x)$ (et donc $N - p > 0$). L'expression (7.25) peut être directement introduite dans la densité lagrangienne invariante de jauge (7.19). Mais on peut aussi la simplifier en lui appliquant une transformation de jauge (7.24) avec les paramètres

$$\alpha^A(x) = -\xi^A(x)\tag{7.27}$$

lorsque A correspond à une symétrie brisée, $T_s^A = T_s^A$, et $\alpha^A = 0$ pour les générateurs du petit-groupe H de v^i . Donc,

$$\varphi^i \longrightarrow \varphi'^i = [\exp(-i\xi^A T_s^A)]^{ij} \varphi^j = h^i(x) + v^i.$$

Exprimée en fonction de φ'^i , la densité lagrangienne ne dépend pas des bosons de Goldstone qui ont été éliminés lors du choix de jauge:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{unit.} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_1^{AB} A_\mu^A A^{B\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} (D_\mu h^i) (D^\mu h^i) - V(h^i + v^i),\end{aligned}\tag{7.28}$$

la matrice de masse des champs de jauge étant

$$\mathcal{M}_1^{AB} = g^A g^B [v^i (T_s^A T_s^B)^{ij} v^j],$$

comme dans (7.22). Le terme de mélange (7.23) est absent du fait de l'équation (7.26). Ce choix correspond à la *jauge unitaire* (ou jauge physique). La théorie décrit donc un ensemble de champs de spin un massifs correspondant aux symétries de jauge spontanément brisées, en interaction avec les champs de jauge sans masse du groupe de jauge non brisé H et avec un multiplet de *bosons de Higgs* h^i qui comprend au moins un champ scalaire. Il est à noter que les interactions sont entièrement déterminées par la structure de la théorie de jauge originale et par l'état du vide v^i ; les interactions de jauge sont fixées par les constantes de structure et les générateurs du groupe G . Et les masses des champs de jauge sont reliées (par diagonalisation de la matrice de masse \mathcal{M}_1^{AB}) aux valeurs de $\langle \varphi^i \rangle = v^i$, et donc aux paramètres du potentiel.

Une autre méthode de dérivation de la jauge unitaire consiste à éliminer le terme de mélange (7.23) par une transformation des champs de jauge associés aux symétries brisées. La densité lagrangienne (7.21) contient en particulier les termes quadratiques suivants¹¹:

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{1}{2} [(\partial_\mu \tilde{\varphi}^i)(\partial^\mu \tilde{\varphi}^i) + \mathcal{M}_1^{AB} A_\mu^A A^{B\mu} - 2ig^A A_\mu^A (\partial^\mu \tilde{\varphi}^i)(T_s^A)^{ij} v^j] \\ &= -\frac{1}{2} [g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} v^j + i(\partial_\mu \tilde{\varphi}^i) [g^B A^{B\mu} (T_s^B)^{ik} v^k + i(\partial^\mu \tilde{\varphi}^i)]] . \end{aligned}$$

Comparons la dernière expression avec la transformation de jauge (7.24) multipliée par v^j , au premier ordre puisqu'on ne retient ici que les termes quadratiques de la densité lagrangienne:

$$g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} v^j = g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} v^j + (\partial_\mu \alpha^A)(T_s^A)^{ij} v^j.$$

On choisit alors des paramètres vérifiant

$$\alpha^A (T_s^A)^{ij} v^j = i\tilde{\varphi}^i,$$

une équation reliant p paramètres associés aux symétries spontanément brisées à p composantes du multiplet de champs $\tilde{\varphi}^i$. On arrive ainsi à

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} [g^A A_\mu^A (T_s^A)^{ij} v^j] [g^B A^{B\mu} (T_s^B)^{ik} v^k] + \frac{1}{2} (\partial_\mu h^i)(\partial^\mu h^i) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{M}_1^{AB} A_\mu^A A^{B\mu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h^i)(\partial^\mu h^i), \end{aligned}$$

les champs h^i représentant les $N - p$ composantes de $\tilde{\varphi}^i$ laissées inchangées par la transformation de jauge:

$$\tilde{\varphi}^i = h^i - i\alpha^A (T_s^A)^{ij} v^j, \quad h^i (T_s^A)^{ij} v^j = 0.$$

¹¹Les générateurs sont antisymétriques.

Cette dernière expression correspond bien à la jauge unitaire (7.27) appliquée à la paramétrisation (7.25) des champs au premier ordre, et à la condition d'orthogonalité (7.26).

La jauge unitaire est particulièrement utile à l'identification des états physiques de la théorie. Elle s'avère cependant à l'origine de complications excessives si on l'adopte pour quantifier la théorie et développer la théorie des perturbations.

A titre d'illustration, revenons à la symétrie $U(1)$ spontanément brisée examinée à la fin de la section précédente, mais avec cette fois une invariance de jauge. Comme auparavant le potentiel scalaire est

$$V = \frac{\lambda}{2} \left(\phi^\dagger \phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2,$$

qui conduit à $\langle \phi \rangle = e^{i\beta} v$, $v = \sqrt{\mu^2/2\lambda}$. Au lieu de poser $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta} [A + iB + v]$, on utilise la paramétrisation

$$\phi(x) = e^{i\sigma(x)+i\beta} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} h(x) + v \right],$$

avec deux champs scalaires réels σ et h . Comme le potentiel scalaire ne dépend que de $\phi^\dagger \phi$, σ est de masse nulle: c'est le boson de Goldstone. On change ensuite de jauge,

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-i\sigma(x)-i\beta} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} h(x) + v,$$

pour passer à la jauge unitaire qui ne contient plus que le boson de Higgs h , de masse μ . Et le boson de jauge de la symétrie $U(1)$ acquiert une masse $M = gQv$, d'après la transformation de jauge (7.17).

7.3 Un exemple: le doublet scalaire complexe

A titre d'exemple, étudions la brisure spontanée de la symétrie d'une théorie décrivant un doublet de champs scalaires complexes,

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad H^\dagger = (H_1^\dagger \quad H_2^\dagger). \quad (7.29)$$

Cet exemple est à la fois simple et important puisqu'il correspond au secteur scalaire du Modèle standard de l'interaction électrofaible¹². Le potentiel scalaire est de la forme

$$V(H, H^\dagger) = -\mu^2 (H^\dagger H) + \frac{\lambda}{2} (H^\dagger H)^2, \quad (7.30)$$

¹²Chapitre 8.

avec

$$\mu^2 > 0, \quad \lambda > 0, \quad \mu^2, \lambda \text{ réels,}$$

et $H^\dagger H = H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2$. Le minimum du potentiel se trouve en

$$\langle H^\dagger H \rangle = \mu^2 / \lambda. \quad (7.31)$$

Le potentiel (7.30) est invariant sous les transformations du groupe¹³ $SU(2) \times U(1)_Y$ [ou de manière équivalente $U(2)$]. Ces symétries agissent sur le doublet H par

$$\begin{aligned} U(1)_Y : \quad H &\longrightarrow H' = e^{i\alpha Y} H, \\ SU(2) : \quad H &\longrightarrow H' = UH, \end{aligned} \quad (7.32)$$

où la matrice (2×2) U est unitaire, $U^\dagger U = I$, et unimodulaire ($\det U = 1$). On peut écrire

$$U = e^{iw^a T^a}, \quad T^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (7.33)$$

les matrices σ^a désignant les trois matrices de Pauli. Les générateurs de l'algèbre de Lie de $SU(2)$ vérifient

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c, \quad \epsilon^{abc} = -\epsilon^{bac} = \epsilon^{cab}, \quad \epsilon^{123} = 1.$$

La constante réelle Y est le générateur de $U(1)_Y$. Comme sa valeur est arbitraire, nous allons poser

$$Y = -\frac{1}{2}. \quad (7.34)$$

En fait, le potentiel (7.30) possède une symétrie plus étendue que $SU(2) \times U(1)_Y$; il est invariant sous les rotations $O(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ des quatre composantes réelles de H . Nous ne nous intéressons ici qu'au sous-groupe $SU(2) \times U(1)$, qui sera promu au rang de symétrie de jauge.

A ce stade, les paramètres α et w^a peuvent être constants ou locaux. La condition de minimum (7.31) est évidemment invariante sous l'ensemble du groupe de symétrie et l'état du vide est continûment dégénéré. Il est donc possible de choisir

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}, \quad (7.35)$$

et n'importe quel état du vide est alors obtenu en agissant sur cette forme de $\langle H \rangle$ avec une transformation de $SU(2) \times U(1)$ de paramètres constants.

L'état du vide (7.35) brise spontanément $SU(2) \times U(1)_Y$. On vérifie facilement que la symétrie résiduelle laissant $\langle H \rangle$ invariant est

$$\exp \left(iw[T^3 + Y] \right) \langle H \rangle = \langle H \rangle. \quad (7.36)$$

¹³L'indice Y identifie le groupe $U(1)_Y$ par rapport à un autre groupe $U(1)$ qui apparaîtra plus loin.

Le petit groupe de $\langle H \rangle$ est donc $U(1)_Q$, généré par

$$Q = T^3 + Y, \quad (7.37)$$

dont l'action sur les composantes de H est:

$$U(1)_Q : \quad H_1 \longrightarrow H_1, \quad H_2 \longrightarrow e^{-iw} H_2.$$

Trois symétries sont spontanément brisées. Les quatre composantes réelles de H se divisent donc en trois bosons de Goldstone et un boson de Higgs massif.

Poursuivons en couplant le doublet scalaire aux champs de jauge de $SU(2) \times U(1)_Y$ qui devient donc une symétrie locale. Il faut introduire les champs de jauge W_μ^a , $a = 1, 2, 3$, de $SU(2)$, celui de $U(1)_Y$ noté B_μ et deux constantes de couplage de jauge g et g' pour respectivement $SU(2)$ et $U(1)_Y$. La densité lagrangienne invariante de jauge est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H, H^\dagger), \quad (7.38)$$

avec, en reprenant les résultats de la section 1.5,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ D_\mu H &= \partial_\mu H - \frac{i}{2}gW_\mu^a \sigma^a H - ig'B_\mu Y H, \quad (Y = -\frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (7.39)$$

La forme de la dérivée covariante de H suit de la transformation de jauge (7.32). Avec la valeur moyenne dans le vide $\langle H \rangle$, il est plus facile d'identifier le contenu physique de la théorie en se plaçant dans la jauge unitaire. Selon la discussion de la section précédente, on l'obtient en paramétrisant les champs de Goldstone par

$$\exp \left[i\xi^1(x)T^1 + i\xi^2(x)T^2 + i\xi(x)(T^3 - Y) \right] \langle H \rangle,$$

les trois symétries brisées étant générées par T^1 , T^2 et

$$T^3 - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose ensuite

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[i\xi^1(x)T^1 + i\xi^2(x)T^2 + i\xi(x)(T^3 - Y) \right] \begin{pmatrix} h(x) + v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.40)$$

avec un champ réel $h(x)$ qui sera le seul boson de Higgs physique de la théorie. La vérification de la condition d'orthogonalité (7.26) requiert quelques précautions puisque nous utilisons ici des champs complexes et des générateurs non anti-symétriques. Dans notre cas, la condition devient

$$h_i(x)(T_s^A)^{ij} \langle H_j^* \rangle = [h_i(x)(T_s^A)^{ij} \langle H_j^* \rangle]^\dagger \quad h_1(x) = h(x), \quad h_2(x) = 0.$$

Et elle est bien vérifiée ici:

$$\langle H \rangle^\tau T^1 \begin{pmatrix} h(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \langle H \rangle^\tau T^2 \begin{pmatrix} h(x) \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

alors que

$$\langle H \rangle^\tau [T^3 - Y] \begin{pmatrix} h(x) \\ 0 \end{pmatrix} = v h(x)$$

et $h(x)$ est un champ réel. Il suit de (7.40) que le doublet scalaire H se ramène à

$$H_{unit.} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h(x) + v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

dans la jauge unitaire. La densité lagrangienne dans cette jauge sera obtenue en substituant simplement $H_{unit.}$ dans l'expression invariante de jauge (7.38). Afin de diagonaliser les termes de masse des champs de jauge, il convient d'utiliser les redéfinitions suivantes:

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2), & W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) = (W_\mu^+)^{\dagger}, \\ Z_\mu &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, & A_\mu &= \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \end{aligned} \quad (7.42)$$

l'angle de mélange θ_W étant défini par

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (7.43)$$

Dans le Modèle standard, θ_W est l'*angle de Weinberg*, ou l'angle de mélange faible. Avec les définitions

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, & Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \\ W_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+, & W_{\mu\nu}^- &= \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-, \end{aligned}$$

on obtient alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{unit.} &= -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{g^2 + g'^2}{4}v^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{g^2}{4}v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \mu^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\mu h^3 - \frac{\lambda}{8}h^4 + \frac{\mu^4}{2\lambda} \\ &\quad + \mathcal{L}_{int.} \end{aligned} \quad (7.44)$$

La première ligne contient les termes de propagation des champs de jauge, la deuxième les masses des champs de jauge associés aux symétries brisées et la

troisième la densité lagrangienne du boson de Higgs. Finalement, $\mathcal{L}_{int.}$ contient les interactions de jauge:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int.} = & -ig \sin \theta_W \left[(A^\mu + \cotg \theta_W Z^\mu) (W_{\mu\nu}^+ W^{-\nu} - W_{\mu\nu}^- W^{+\nu}) \right. \\
& \left. - (A_{\mu\nu} + \cotg \theta_W Z_{\mu\nu}) W^{+\mu} W^{-\nu} \right] \\
& + (g \sin \theta_W)^2 \left[(A_\mu W^{+\mu}) (A_\nu W^{-\nu}) - (A_\mu A^\mu) (W_\nu^+ W^{-\nu}) \right. \\
& + \cotg \theta_W \left\{ (Z_\mu W^{+\mu}) (A_\nu W^{-\nu}) + (Z_\mu W^{-\mu}) (A_\nu W^{+\nu}) \right. \\
& \left. \left. - 2(A_\mu Z^\mu) (W_\nu^+ W^{-\nu}) \right\} \right. \\
& \left. + \cotg^2 \theta_W \left\{ (Z_\mu W^{+\mu}) (Z_\nu W^{-\nu}) - (Z_\mu Z^\mu) (W_\nu^+ W^{-\nu}) \right\} \right] \\
& - \frac{1}{2} g^2 \left[(W_\mu^+ W^{-\mu})^2 - (W_\mu^+ W^{+\mu}) (W_\nu^- W^{-\nu}) \right] \\
& + \frac{g^2}{4} (h^2 + 2vh) \left[W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \right].
\end{aligned} \tag{7.45}$$

La théorie décrit donc:

- Un champ de jauge de masse nulle¹⁴ A_μ associé à la symétrie non brisée $U(1)_Q$;
- Un champ complexe et son conjugué, W_μ^- et W_μ^+ , de spin un et de masse

$$M_W = \frac{gv}{2}. \tag{7.46}$$

Par rapport à la symétrie de jauge exacte $U(1)_Q$, leur charge est¹⁵ $Q = \pm 1$;

- Un champ Z_μ de spin un et de masse

$$M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \tag{7.47}$$

invariant (neutre, sans charge) sous $U(1)_Q$;

- Un champ scalaire réel $h(x)$ invariant (neutre, sans charge) sous $U(1)_Q$ et de masse

$$m_h^2 = 2\mu^2 = \lambda v^2 = \frac{4\lambda}{g^2} M_W^2, \tag{7.48}$$

le boson de Higgs unique de la théorie.

¹⁴Le champ du photon dans le Modèle standard.

¹⁵Comme $U(1)_Y$ n'agit pas sur les champs de jauge de $SU(2)$, $Y = 0$ et $Q = T^3$ pour ces états.

Il est à noter que toutes les interactions du champ de jauge A_μ de la symétrie de jauge résiduelle $U(1)_Q$ sont contrôlées par la constante de couplage

$$g \sin \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}.$$

En effet, les interactions de A_μ proviennent uniquement des contributions aux courbures de jauge $W_{\mu\nu}^a$ de la combinaison

$$gW_\mu^3 T^3 = g \sin \theta_W (A_\mu + \cotg \theta_W Z_\mu) T^3 = g \sin \theta_W (A_\mu + \cotg \theta_W Z_\mu) Q,$$

puisque $Y = 0$ pour les champs de jauge de $SU(2)$. La dérivée covariante agissant sur $H_{unit.}$ ne dépend pas de A_μ : le boson de Higgs parallèle à la direction de l'état du vide $\langle H \rangle$, qui existe dans toute théorie avec des symétries spontanément brisées, est nécessairement neutre sous le groupe de jauge non brisé qui laisse $\langle H \rangle$ invariant. Dans notre exemple, il n'y a pas d'autre boson de Higgs.

La densité lagrangienne définie par les expressions (7.44) et (7.45) décrit dans la jauge unitaire les contributions des champs bosoniques au Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques. Elle réapparaîtra dans le chapitre 8, avec les termes impliquant les quarks et les leptons.

Références

Le phénomène de brisure spontanée de la symétrie ne concerne pas que les symétries de jauge des théories de champs. On le rencontre en particulier en relation avec la symétrie chirale (globale) associée aux quarks légers, dans les théories effectives qui en découlent, dans l'algèbre des courants:

Itzykson et Zuber [1], chapitre 11; Weinberg [2], chapitre 19; Treiman, Jackiw, Zumino et Witten [29].

Ou en physique statistique; par exemple:

Parisi [71], Itzykson et Drouffe [68].

En physique de la matière condensée, en supraconductivité (théorie de Ginzburg–Landau):

Weinberg [2], section 21.6.

Il joue également un rôle important en cosmologie (défauts topologiques):

Vilenkin et Shellard [33]; Peebles [34].

Le potentiel scalaire effectif est dérivé à l'ordre d'une boucle dans:

Coleman et Weinberg [35].

Voir également Weinberg [36], Coleman [37] ou encore:

Peskin et Schroeder [6], chapitre 11; Itzykson et Zuber [1], paragraphe 9.2.2;

Weinberg [2], chapitre 16.

Les aspects de théorie des groupes sont décrits dans:
O’Raifeartaigh [44].

Exercices

7.1 On considère la théorie de jauge (7.19) utilisée dans la description du mécanisme de Higgs (sect. 7.2). Dans la jauge unitaire, la densité lagrangienne (7.28) décrit des champs massifs de spin un dont le propagateur a été discuté dans la section 4.4. Ce propagateur a un comportement problématique dans le domaine des grandes impulsions qui rend difficile le calcul des corrections quantiques. Nous allons utiliser l’invariance de jauge de la théorie pour construire une autre jauge possédant un comportement plus favorable mais sans éliminer les bosons de Goldstone.

Pour simplifier, limitons le groupe de jauge à $U(1)$ et le multiplet de scalaires à un champ complexe ϕ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) + \mathcal{L}_{fix.},$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$ et $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igX_\mu\phi$. Le choix du potentiel

$$V = \frac{\alpha}{2} \left(\phi^\dagger\phi - \frac{\mu^2}{2\alpha} \right)^2$$

implique que le champ scalaire complexe ϕ brise spontanément la symétrie de jauge avec $\langle\phi\rangle = v = \sqrt{\mu^2/2\alpha}$ choisi réel. Le terme fixant la jauge ajouté à la théorie invariante de jauge est

$$\mathcal{L}_{fix.} = -\frac{\lambda}{2} \left(\partial^\mu X_\mu + \frac{igv}{\lambda}(\phi^\dagger - \phi) \right)^2.$$

En l’absence de valeur moyenne sur le vide, ce terme de fixation de la jauge est identique à celui utilisé pour quantifier le champ de jauge (sect. 2.4).

- Montrer que la densité lagrangienne (à une dérivée près) ne contient pas de terme mélangeant ϕ et X_μ : le terme fixant la jauge compense les contributions (7.23).
- En introduisant les champs réels A et B par $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + iB) + v$, calculer la densité lagrangienne libre.
- Montrer que le propagateur de X_μ en espace des impulsions est

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \lambda M^2} \right] \\ &= \frac{-1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \right] - \frac{p_\mu p_\nu / M^2}{p^2 - M^2/\lambda + i\epsilon}, \end{aligned}$$

avec $M^2 = 2g^2v^2$. Il se comporte comme $1/p^2$ pour p très grand et non comme $1/M^2$ dans la jauge unitaire.

- Montrer que les propagateurs de A et B sont respectivement

$$\frac{1}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p^2 - M^2/\lambda + i\epsilon}.$$

On retrouve la jauge unitaire dans la limite $\lambda \rightarrow 0$: le propagateur du boson de Goldstone B s'annule et celui de X_μ a la forme attendue pour un champ de spin un massif. Le choix $\lambda = 1$ est la jauge de 't Hooft–Feynman.

- 7.2** Pour la densité lagrangienne de l'exercice précédent, dériver les règles de Feynman des interactions des champs A , B et X_μ .

Ecrire à l'ordre le plus bas l'élément de matrice S du processus

$$A + X_\mu \rightarrow A + X_\mu$$

et montrer qu'il ne dépend pas du paramètre de jauge λ . Vérifier qu'un calcul effectué dans la jauge unitaire conduit au même résultat. (Utiliser le fait que le produit $\epsilon(k)k = 0$ s'annule pour le vecteur de polarisation du champ vectoriel.)

Il est possible de prouver à tous les ordres que la matrice S ne dépend pas du paramètre de jauge λ . La jauge ainsi définie est souvent qualifiée de *renormalisable*: tous les propagateurs ont un bon comportement à grandes impulsions, mais le boson de Goldstone B est présent dans les lignes internes des diagrammes.

- 7.3** Généraliser l'exercice 7.1 au cas d'une symétrie de jauge non abélienne quelconque et donc à la densité lagrangienne (7.19).

Chapitre 8

Le Modèle standard

Le Modèle standard de Glashow, Salam et Weinberg [40], qui décrit les interactions fortes, faibles et électromagnétiques des quarks et des leptons, est une théorie de jauge dont la densité lagrangienne est construite selon les règles énoncées dans la section 1.5. Sa structure est motivée par l'observation de multiples processus physiques élémentaires et par quelques principes théoriques développés dans le cadre de la théorie quantique des champs. Des expériences en grand nombre ont vérifié la presque totalité de ses prédictions, souvent avec une précision extraordinaire, sans rencontrer de contradiction¹. Le but de ce chapitre est de construire la densité lagrangienne qui définit le Modèle standard sans cependant discuter ses justifications ou vérifications expérimentales.

Le groupe de jauge du Modèle standard est

$$G_{MS} = SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (8.1)$$

Le premier facteur, $SU(3)$, est le groupe de jauge de la chromodynamique quantique (QCD), le groupe de la couleur. Le facteur $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est le groupe de jauge unifiant les interactions faibles et électromagnétiques dans la théorie *électrofaible*. Il contient l'*isospin faible* $SU(2)_L$, l'indice L indiquant que seuls les fermions de chiralité gauche se transforment sous ce groupe, et l'*hypercharge faible* $U(1)_Y$. Le groupe de jauge de l'interaction électromagnétique $U(1)_{e.m.}$ est contenu dans $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Le mécanisme de Higgs est utilisé pour briser spontanément les symétries de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ autres que $U(1)_{e.m.}$ et générer la masse des bosons de jauge faibles W^\pm et Z^0 . Les symétries de jauge non brisées sont donc celles du groupe de jauge $SU(3) \times U(1)_{e.m.}$ des interactions fortes et électromagnétiques, dont la théorie de champs a été brièvement discutée dans la section 4.2.

¹Les quatre grandes expériences du collisionneur électron-positon du CERN, le LEP, ont notamment collecté une quantité considérable de résultats de très haute précision. Une synthèse [41] peut être consultée sur le site du “LEP Electroweak Working Group” (<http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/>).

8.1 Groupe et bosons de jauge

Pour nos besoins, il est suffisant de définir les groupes $U(N)$ à partir de leur représentation la plus simple, formée de matrices $N \times N$ unitaires U , $U^\dagger U = U U^\dagger = I$. Le groupe $SU(N)$ est alors le sous-groupe de $U(N)$ des matrices de déterminant unité, ou *unimodulaires*. L'algèbre de Lie est obtenue en posant

$$U = e^{iT},$$

l'unitarité imposant $T^\dagger = T$, et l'unimodularité $\text{Tr} T = 0$. Il en résulte que l'algèbre de Lie de $U(N)$ est engendrée par N^2 générateurs hermitiques alors que la dimension de celle de $SU(N)$ est $N^2 - 1$ puisqu'une condition supplémentaire, l'absence de trace, est appliquée:

$$T = \sum_{A=1}^d \omega^A T^A, \quad U(N) : d = N^2, \quad SU(N) : d = N^2 - 1. \quad (8.2)$$

Les groupes $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ ont donc respectivement 8, 3 et 1 générateurs (chacun associé à un paramètre réel ω^A). Le groupe $U(1)$ est représenté par les phases complexes

$$e^{i\omega T}, \quad \omega = \text{paramètre réel},$$

le générateur T étant un nombre réel appelé *charge* du champ sur lequel la transformation de phase agit. Pour $SU(3)$ et $SU(2)$, nous utiliserons les représentations des générateurs suivantes:

- La représentation tri-dimensionnelle **3** de $SU(3)$ (section 4.2): les huit générateurs sont des matrices 3×3 hermitiques de trace nulle

$$T_{\mathbf{3}}^A = \frac{1}{2} \lambda^A, \quad A = 1, \dots, 8, \quad \lambda^A = \text{matrices de Gell - Mann.}$$

Il n'est pas nécessaire d'en donner une réalisation; elles vérifient les relations

$$[T_{\mathbf{3}}^A, T_{\mathbf{3}}^B] = i f^{ABC} T_{\mathbf{3}}^C, \quad \text{Tr}(T_{\mathbf{3}}^A T_{\mathbf{3}}^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (8.3)$$

les nombres réels f^{ABC} étant les constantes de structure de $SU(3)$; la seconde relation est une normalisation conventionnelle des générateurs.

- La représentation bi-dimensionnelle **2** de $SU(2)$: les trois générateurs sont

$$T_{\mathbf{2}}^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad \sigma^a = \text{matrices de Pauli};$$

ils vérifient

$$[T_{\mathbf{2}}^a, T_{\mathbf{2}}^b] = i \epsilon^{abc} T_{\mathbf{2}}^c, \quad \text{Tr}(T_{\mathbf{2}}^a T_{\mathbf{2}}^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (8.4)$$

Les constantes de structure de $SU(2)$ sont $\epsilon^{abc} = -\epsilon^{bac} = \epsilon^{cab}$, $\epsilon^{123} = 1$.

Le principe de jauge associe un champ de jauge à chaque symétrie locale et donc à chaque paramètre ou générateur. En conséquence, le Modèle standard contient 12 bosons de jauge:

$$\begin{aligned} SU(3) : & \quad A_\mu^A, & A &= 1, \dots, 8, & (\text{gluons}), \\ SU(2)_L : & \quad W_\mu^a, & a &= 1, 2, 3, \\ U(1)_Y : & \quad B_\mu. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Les quatre bosons de jauge W_μ^a , $a = 1, 2, 3$ et B_μ donneront naissance après brisure spontanée de la symétrie aux bosons W^+ , W^- , Z^0 et au photon. D'après l'équation (1.171), les courbures de jauge qui apparaîtront dans la densité lagrangienne s'écrivent:

$$\begin{aligned} SU(3) : & \quad F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \\ SU(2)_L : & \quad W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ U(1)_Y : & \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Elles contiennent les constantes de couplage de la chromodynamique quantique g_s et de l'interaction faible g .

8.2 Quarks et leptons

Les champs spinoriels du Modèle standard décrivent les *quarks* et les *leptons*. Ils se différencient par leurs interactions, c'est-à-dire par l'existence ou non d'un couplage aux gluons ou aux bosons de jauge de $SU(2)_L$ et par l'intensité de leur interaction avec B_μ caractérisée par l'hypercharge faible du fermion. Les interactions faibles violent la conservation de la parité; d'après la discussion du paragraphe 4.1.3, une violation de parité dans l'interaction fermions-champs de jauge apparaît lorsque les transformations de jauge des composantes de chiralités gauche et droite des spineurs diffèrent. Il est alors commode de caractériser les transformations de jauge indépendamment pour chaque chiralité. En fait, il sera plus simple de travailler uniquement avec des fermions de chiralité gauche, en remplaçant les fermions droits par leur conjugué de charge²:

$$\psi_R \longrightarrow (\psi_R)^c = C\gamma^0(\psi_R^\dagger)^\tau = (\psi^c)_L.$$

Puisque la conjugaison de charge comprend une conjugaison hermitique, elle conjugue aussi les nombres quantiques de jauge: elle échange particules et antiparticules. Ainsi, au lieu d'introduire les composantes gauches et droites des quarks et des leptons, nous définirons les composantes gauches des quarks, antiquarks, leptons et antileptons.

²Paragraphe 4.1.1.

Les quarks et les leptons sont classifiés selon leurs transformations de jauge, c'est-à-dire selon la représentation du groupe de jauge G_{MS} qu'ils portent. Cette classification suit de l'expérience. Il y a trois règles de base:

1. Les quarks interagissent fortement, ils sont *triplets* de couleur, c'est-à-dire qu'ils se transforment selon la représentation **3** de $SU(3)$. Les antiquarks se transforment selon la représentation conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$. Les leptons et antileptons n'ont pas d'interaction forte, ils sont *singlets* (invariants) de $SU(3)$.
2. Les fermions (quarks et leptons) de chiralité gauche sont des *doublets* de $SU(2)_L$: ils se transforment selon la représentation **2** de $SU(2)_L$. Les antifermions de chiralité gauche, et donc les fermions de chiralité droite, sont des *singlets* de $SU(2)_L$.
3. La classification des fermions forme une séquence de générations identiques du point de vue des nombres quantiques de $SU(3)$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. L'observation a mis en évidence trois générations³.

Ces règles empiriques conduisent à la classification suivante:

	<i>Notation</i>	<i>Représentation</i>	$\begin{cases} n = 1, 2, 3, \\ j = 1, 2, 3, \\ \alpha = 1, 2. \end{cases}$
Quarks gauches	$\psi_Q^{(n)j\alpha}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)$	
Antiquarks gauches	$\psi_{U^c}^{(n)j}$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	
	$\psi_{D^c}^{(n)j}$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)$	
Leptons gauches	$\psi_L^{(n)\alpha}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	
Antileptons gauches	$\psi_{E^c}^{(n)}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$	
	$\begin{pmatrix} \psi_{N^c}^{(n)} \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	

La notation utilisée pour les champs spinoriels est celle de la section 4.2. L'indice L de chiralité gauche est omis: sauf mention du contraire, tous les spineurs sont gauches. Les fermions sont caractérisés par un indice Q, U^c, D^c, L, E^c, N^c lié à la valeur de l'hypercharge faible⁴. Ensuite, n numérote les trois générations de quarks et leptons; j est un indice de $SU(3)$, de triplet **3** lorsqu'il se trouve en position supérieure, d'antitriplet $\bar{\mathbf{3}}$ en bas; et α est un indice de doublet **2** de $SU(2)$. L'identification de ces champs spinoriels avec les quarks u, d, s, c, b, t , les leptons e, μ, τ et leurs neutrinos interviendra plus bas, après construction de l'ensemble du modèle. Les parenthèses entourant les champs $\psi_{N^c}^{(n)}$, qui correspondent aux composantes de chiralité droite des neutrinos, indiquent que ceux-ci peuvent être omis du modèle: en fait, le Modèle standard minimal ne contient pas de neutrino droit. Nous y reviendrons plus bas.

La dernière colonne de la table ci-dessus contient les nombres quantiques de $SU(3)$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ de chaque fermion. Elle indique que, par exemple, la

³Mais il n'y a pas de contrainte théorique sur le nombre de générations.

⁴Et à celle de la charge électrique, voir plus bas.

transformation de jauge du doublet de quarks gauches $\psi_Q^{(n)j\alpha}$ est celle d'un triplet de $SU(3)$ (représentation $\mathbf{3}$), d'un doublet de $SU(2)$ (représentation $\mathbf{2}$), avec une hypercharge faible $Y = 1/6$:

$$\delta\psi_Q^{(n)j\alpha} = i\omega^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_Q^{(n)k\alpha} + i\omega^a (T_{\mathbf{2}}^a)^\alpha_\beta \psi_Q^{(n)j\beta} + \frac{1}{6}i\omega \psi_Q^{(n)j\alpha}, \quad (8.7)$$

pour une transformation de paramètres infinitésimaux ω^A , ω^a et ω pour respectivement $SU(3)$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. Ou encore, pour l'antiquark gauche U^c dans la représentation $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$,

$$\delta\psi_{U^c}^{(n)j} = -i\omega^A (T_{\mathbf{3}}^A)^k_j \psi_{U^c}^{(n)k} - \frac{2}{3}i\omega \psi_{U^c}^{(n)j}. \quad (8.8)$$

Par rapport à la transformation (8.7), le premier signe négatif est caractéristique de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$, au lieu de $\mathbf{3}$. Par conjugaison de charge, la transformation de jauge du quark droit U sera alors:

$$\delta\psi_{U,R}^{(n)j} = i\omega^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_{U,R}^{(n)k} + \frac{2}{3}i\omega \psi_{U,R}^{(n)j}. \quad (8.9)$$

Sa représentation est $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)$.

Chaque génération de quarks et leptons du Modèle standard minimal comprend donc quinze spineurs de chiralité gauche, dans des représentations de G_{MS} dont le choix ne relève pas à ce stade de contraintes théoriques⁵.

8.3 Champs scalaires

Le mécanisme de Higgs requiert la présence de champs scalaires se transformant sous les symétries de jauge qui doivent être spontanément brisées. Le Modèle standard utilise un multiplet de champs scalaires complexes H^α , $\alpha = 1, 2$, dont les nombres quantiques de G_{MS} sont

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2).$$

Les transformations de jauge infinitésimales sont alors

$$\begin{aligned} SU(3) : \quad \delta H^\alpha &= 0, \\ SU(2)_L : \quad \delta H^\alpha &= i\omega^a (T_{\mathbf{2}}^a)^\alpha_\beta H^\beta, \\ U(1)_Y : \quad \delta H^\alpha &= -\frac{1}{2}i\omega H^\alpha. \end{aligned} \quad (8.10)$$

⁵A l'exception de la condition d'absence d'anomalie, discutée dans l'appendice B.

Il va être utile de définir⁶

$$H = \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = i\sigma^2 H^* = \begin{pmatrix} H^{2\dagger} \\ -H^{1\dagger} \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

En effet, puisque $\sigma^{a*} = i\sigma^2 \sigma^a i\sigma^2$, il vient

$$\begin{aligned} SU(3) : \quad \delta \bar{H}^\alpha &= 0, \\ SU(2)_L : \quad \delta \bar{H}^\alpha &= i\omega^a (T_2^a)_\beta^\alpha \bar{H}^\beta, \\ U(1)_Y : \quad \delta \bar{H}^\alpha &= +\frac{1}{2}i\omega \bar{H}^\alpha. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Les nombres quantiques du conjugué \bar{H}^α sont donc

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2).$$

La quantité

$$\epsilon_{\alpha\beta} \bar{H}^\alpha H^\beta = H^{1\dagger} H^1 + H^{2\dagger} H^2 = H^\dagger H, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1,$$

est un invariant de G_{MS} qui sera utile à la construction de la densité lagrangienne. En fait, tout invariant construit avec H et \bar{H} est une fonction de ce seul invariant de G_{MS} .

8.4 Dérivées covariantes, densité lagrangienne

Les nombres quantiques des fermions et des scalaires permettent de construire leurs dérivées covariantes⁷. Pour un multiplet de champs ϕ (spinoriels ou scalaires) dans la représentation $(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2, Y)$ de G_{MS} , l'expression générale est:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig_s m_3 A_\mu^A (T_3^A \phi) - ig m_2 W_\mu^a (T_2^a \phi) - ig' Y B_\mu \phi,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_3 = \mathbf{3} : m_3 &= 1, & \mathbf{n}_3 = \bar{\mathbf{3}} : m_3 &= -1, & \mathbf{n}_3 = \mathbf{1} : m_3 &= 0, \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{2} : m_2 &= 1, & \mathbf{n}_2 = \mathbf{1} : m_2 &= 0. \end{aligned}$$

Il est sous-entendu que $(T_3^A \phi)$ et $(T_2^a \phi)$ contiennent la sommation appropriée sur les indices de $SU(3)$ et $SU(2)_L$ des générateurs et de ϕ . Pour les champs spinoriels

⁶Les matrices de Pauli sont

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et, pour des champs quantifiés, $H^* = H^{\dagger\tau}$.

⁷Selon la procédure décrite dans la section 1.5, et l'équation (1.170).

et scalaires du Modèle standard, il vient:

$$\begin{aligned}
D_\mu \psi_Q^{(n)j\alpha} &= \partial_\mu \psi_Q^{(n)j\alpha} - ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_Q^{(n)k\alpha} - ig W_\mu^a (T_{\mathbf{2}}^a)_\beta^\alpha \psi_Q^{(n)j\beta} \\
&\quad - \frac{1}{6} ig' B_\mu \psi_Q^{(n)j\alpha}, \\
D_\mu \psi_{U^c}^{(n)j} &= \partial_\mu \psi_{U^c}^{(n)j} + ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_{U^c}^{(n)k} + \frac{2}{3} ig' B_\mu \psi_{U^c}^{(n)j}, \\
D_\mu \psi_{D^c}^{(n)j} &= \partial_\mu \psi_{D^c}^{(n)j} + ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)^j_k \psi_{D^c}^{(n)k} - \frac{1}{3} ig' B_\mu \psi_{D^c}^{(n)j}, \\
D_\mu \psi_L^{(n)\alpha} &= \partial_\mu \psi_L^{(n)\alpha} - ig W_\mu^a (T_{\mathbf{2}}^a)_\beta^\alpha \psi_L^{(n)\beta} + \frac{1}{2} ig' B_\mu \psi_L^{(n)\alpha}, \\
D_\mu \psi_{E^c}^{(n)} &= \partial_\mu \psi_{E^c}^{(n)} - ig' B_\mu \psi_{E^c}^{(n)}, \\
\left(D_\mu \psi_{N^c}^{(n)} \right) &= \partial_\mu \psi_{N^c}^{(n)}, \\
D_\mu H^\alpha &= \partial_\mu H^\alpha - ig W_\mu^a (T_{\mathbf{2}}^a)_\beta^\alpha H^\beta + \frac{1}{2} ig' B_\mu H^\alpha, \\
D_\mu \bar{H}^\alpha &= \partial_\mu \bar{H}^\alpha - ig W_\mu^a (T_{\mathbf{2}}^a)_\beta^\alpha \bar{H}^\beta - \frac{1}{2} ig' B_\mu \bar{H}^\alpha.
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Avec ces expressions, la densité lagrangienne à la base du Modèle standard est de la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin.} + \mathcal{L}_{Yuk.} - V(H, H^\dagger) + \mathcal{L}_{N^c}. \tag{8.14}$$

Les trois premiers termes contiennent respectivement les termes cinétiques et les interactions de jauge de tous les champs, les interactions de Yukawa fermions–scalaires et le potentiel scalaire. Le quatrième terme rassemble les contributions des antineutrinos gauches: ce dernier terme est absent du Modèle standard minimal. Les interactions de jauge sont toutes obtenues par covariantisation des dérivées [équ. (8.13)] ou par l'intermédiaire des courbures de jauge (8.6):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cin.} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
&\quad + i \sum_{n=1}^3 \left[\bar{\psi}_Q^{(n)j\alpha} \gamma^\mu D_\mu \psi_Q^{(n)j\alpha} + \bar{\psi}_{U^c}^{(n)j} \gamma^\mu D_\mu \psi_{U^c}^{(n)j} + \bar{\psi}_{D^c}^{(n)j} \gamma^\mu D_\mu \psi_{D^c}^{(n)j} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}_L^{(n)\alpha} \gamma^\mu D_\mu \psi_L^{(n)\alpha} + \bar{\psi}_{E^c}^{(n)} \gamma^\mu D_\mu \psi_{E^c}^{(n)} \right] \\
&\quad + (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H).
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Les interactions de Yukawa sont obtenues en formant tous les invariants de jauge fermion–fermion–scalaire:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yuk.} &= - \sum_{n,m=1}^3 \left[\lambda_D^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} H^\alpha (\psi_{D^c}^{(n)j})^\tau C \psi_Q^{(m)j\beta} + \lambda_U^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} \bar{H}^\alpha (\psi_{U^c}^{(n)j})^\tau C \psi_Q^{(m)j\beta} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_E^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} H^\alpha (\psi_{E^c}^{(n)})^\tau C \psi_L^{(m)\beta} \right] + \text{conjugué hermitique}.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Puisque pour n'importe quel spineur⁸ $\psi_L^\tau C = \bar{\psi}_R^c$, ces interactions s'écrivent

⁸Paragraphe 4.1.1.

également sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk.} = & - \sum_{n,m=1}^3 \left[\lambda_D^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} H^\alpha (\bar{\psi}_{D,Rj}^{(n)} \psi_{Q,L}^{(m)j\beta}) + \lambda_U^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} \bar{H}^\alpha (\bar{\psi}_{U,Rj}^{(n)} \psi_{Q,L}^{(m)j\beta}) \right. \\ & \left. + \lambda_E^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} H^\alpha (\bar{\psi}_{E,R}^{(n)} \psi_{L,L}^{(m)\beta}) \right] + \text{conjugué hermitique}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

en réintroduisant les indices de chiralité L et R . Notez que puisqu'il n'existe pas d'invariant de G_{MS} de la forme fermion–fermion, aucun terme de masse fermionique ne peut être ajouté à la densité lagrangienne: le fait que $SU(2)_L$ ne transforme que les composantes gauches des quarks et des leptons l'interdit. Ceci est vrai *avant* la brisure spontanée de la symétrie: le mécanisme de Higgs qui produira la masse de W^\pm et Z^0 générera également la masse des fermions.

Finalement, le potentiel scalaire est le polynôme du quatrième degré le plus général en H et H^\dagger (ou \bar{H}) laissé invariant par les transformations du groupe de jauge G_{MS} :

$$V(H, H^\dagger) = -\mu^2 H^\dagger H + \frac{1}{2} \lambda (H^\dagger H)^2. \quad (8.18)$$

A ce stade, la théorie contient les constantes de couplage (sans dimension) arbitraires

$$g_s, g, g', \lambda_U^{nm}, \lambda_D^{nm}, \lambda_E^{nm}, \lambda,$$

et le paramètre μ qui introduit une échelle d'énergie elle aussi arbitraire. Contrairement aux constantes de couplage de jauge, les constantes de Yukawa sont des nombres complexes. Il faut cependant remarquer que les phases de certaines d'entre elles n'ont pas de signification physique: elles peuvent être éliminées par une redéfinition de la phase des champs spinoriels et ne sont pas observables.

La contribution des composantes de chiralité droite des neutrinos $\psi_{N,R}^{(n)}$ (ou de chiralité gauche des antineutrinos $\psi_{N^c,L}^{(n)}$) est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N^c} = & i \sum_{n=1}^3 \bar{\psi}_{N^c,L}^{(n)} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{N^c,L}^{(n)} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^3 M_{nm} (\psi_{N^c,L}^{(n)})^\tau C \psi_{N^c,L}^{(m)} + \text{conjugué hermitique} \quad (8.19) \\ & - \sum_{n,m=1}^3 \lambda_N^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} \bar{H}^\alpha \bar{\psi}_{N,R}^{(n)} \psi_{L,L}^{(m)\beta} + \text{conjugué hermitique}. \end{aligned}$$

A une dérivée près, le premier terme est égal à $i \sum_{n=1}^3 \bar{\psi}_{N,R}^{(n)} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{N,R}^{(n)}$. Comme le neutrino de chiralité droite est lui-même invariant de jauge, il n'a pas d'interaction de jauge: il ne peut être directement détecté par un processus d'interaction faible, forte ou électromagnétique. La deuxième ligne contient les masses de Majorana des neutrinos droits⁹. L'invariance de jauge qui n'agit pas sur les spineurs $\psi_{N^c}^{(n)}$

⁹Paragraphe 4.1.2.

n'interdit pas ce terme. Les trois valeurs propres de la matrice M_{nm} seront donc les masses des neutrinos droits, trois paramètres arbitraires. Finalement, l'existence d'une interaction de Yukawa avec les doublets leptoniques $\psi_L^{(n)}$ aura une conséquence importante: la présence dans le modèle de neutrinos droits conduit *naturellement* à des neutrinos gauches et droits massifs; par contre, l'absence des neutrinos droits implique l'absence de masse des neutrinos gauches.

La densité lagrangienne (8.14) devrait encore être complétée par des termes fixant l'invariance de jauge pour permettre la construction de la théorie quantifiée. Ce problème ne sera pas abordé ici.

8.5 Mécanisme de Higgs et jauge unitaire

La brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ par un doublet scalaire soumis au potentiel (8.18) a été abondamment discutée dans la section 7.3, dont nous reprenons ici les résultats. Dans la jauge unitaire,

$$H_{unit.} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h(x) + v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda}, \quad (8.20)$$

en supposant que $\mu^2 > 0$, $\lambda > 0$. La valeur moyenne dans le vide $\langle H \rangle$ brise $SU(2)_L \times U(1)_Y$, laissant invariant le sous-groupe $U(1)_Q$ généré par

$$Q = T^3 + Y. \quad (8.21)$$

Le générateur Q est la *charge électrique* et $U(1)_Q$ est la symétrie de jauge de l'interaction électromagnétique, $U(1)_Q = U(1)_{e.m.}$. Comme le doublet scalaire H est invariant sous les transformations du groupe de jauge de la chromodynamique quantique $SU(3)$, le sous-groupe de G_{MS} laissé non brisé par la valeur moyenne dans le vide $\langle H \rangle$ est $SU(3) \times U(1)_{e.m.}$. Ce groupe est la symétrie de jauge exacte du Modèle standard.

Les charges électriques des fermions de chiralité gauche d'une génération sont récapitulées dans la table ci-dessous, avec leurs autres nombres quantiques du Modèle standard minimal. Chaque génération contient donc les trois couleurs et les quatre composantes (spineurs de Dirac) d'un quark $U^{(n)}$ de charge $2/3$ et d'un quark $D^{(n)}$ de charge $-1/3$, les quatre composantes d'un lepton $E^{(n)}$ de charge -1 , ainsi qu'un neutrino $N_L^{(n)}$ de chiralité gauche seulement, la composante droite étant supposée absente.

Champ	G_{MS}	T_3	Y	$Q = T_3 + Y$
$\psi_Q^{(n)j\alpha} = \begin{pmatrix} \psi_U^{(n)j} \\ \psi_D^{(n)j} \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)$	$\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	$1/6$	$\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
$\psi_{U^c}^{(n)}{}_j$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	0	$-2/3$	$-2/3$
$\psi_{D^c}^{(n)}{}_j$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)$	0	$1/3$	$1/3$
$\psi_L^{(n)\alpha} = \begin{pmatrix} \psi_N^{(n)} \\ \psi_E^{(n)} \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	$\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	$-1/2$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$
$\psi_{E^c}^{(n)}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$	0	1	1

La densité lagrangienne dans la jauge unitaire est obtenue en substituant la forme (8.20) du doublet scalaire dans les expressions (8.14), (8.15), (8.17) et (8.18) et en effectuant les redéfinitions des champs de jauge et des fermions qui diagonalisent leurs matrices de masse. Nous allons la diviser en trois parties,

$$\mathcal{L}_{unit.} = \mathcal{L}_{bos.} + \mathcal{L}_{ferm.,1} + \mathcal{L}_{ferm.,2}, \quad (8.22)$$

décrivant respectivement les contributions des bosons, les termes de masse des fermions, leurs interactions (et termes cinétiques).

Bosons

La partie bosonique $\mathcal{L}_{bos.}$ a été entièrement dérivée dans la section 7.3. Son expression est donnée par les équations (7.44) et (7.45), en termes des nouveaux champs vectoriels

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2), & W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) = (W_\mu^+)^{\dagger}, \\ Z_\mu &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, & A_\mu &= \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \end{aligned} \quad (8.23)$$

et de l'angle de mélange faible ou angle de Weinberg θ_W , défini par

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (8.24)$$

Le champ A_μ , de masse nulle, est le champ de jauge de la symétrie exacte $U(1)_Q$, le champ du photon. Au-delà du simple fait qu'il est le seul champ de jauge de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ resté sans masse, on peut s'en convaincre en observant par exemple que les dérivées covariantes (8.13) font intervenir la combinaison

$$gW_\mu^3 T^3 + g'B_\mu Y = g \sin \theta_W [A_\mu Q + Z_\mu (\cotg \theta_W T^3 - \tg \theta_W Y)].$$

Le champ A_μ est bien couplé à la charge électrique Q et la constante de couplage de l'interaction électromagnétique est

$$e = g \sin \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (8.25)$$

Les interactions entre champs de jauge de l'équation (7.45) correspondent au cas particulier $Y = 0$ puisque ces champs n'ont pas d'hypercharge faible. Chaque champ A_μ y est associé à la constante de couplage $e = g \sin \theta_W$, alors que Z_μ est accompagné par $g \sin \theta_W \cotg \theta_W = g \cos \theta_W$. Pour le boson de Higgs par contre, $T^3 = 1/2 = -Y$; la constante de couplage associée à chaque Z_μ est alors

$$\frac{1}{2}g \sin \theta_W [\cotg \theta_W + \tg \theta_W] = \frac{g}{2 \cos \theta_W},$$

qui se retrouve dans la dernière des interactions de (7.45). Les interactions cubiques et quartiques des gluons sont contrôlées par la constante de couplage forte g_s , alors que l'interaction à quatre W^\pm est d'ordre g^2 . Le boson de Higgs a des interactions de jauge avec $W^+ - W^-$ et $Z^0 - Z^0$, mais ses interactions purement scalaires sont contrôlées par la constante λ .

La connaissance de la masse de W^\pm détermine la combinaison

$$M_W = \frac{1}{2}gv, \quad (8.26)$$

alors que la relation¹⁰

$$M_W = \cos \theta_W M_Z \quad (8.27)$$

découle de l'utilisation d'un doublet scalaire pour briser la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$. La masse du boson de Higgs est

$$m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{\lambda}v, \quad (8.28)$$

indépendante de M_W ou M_Z . La mesure de M_W , M_W/M_Z et e permet ainsi de déterminer g , g' et v .

Masse des fermions

L'interaction de Yukawa (8.17) est à l'origine des masses des fermions lorsque le doublet H prend sa valeur moyenne dans le vide $\langle H \rangle$. Il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ferm.,1} = & -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{n,m=1}^3 \left[\lambda_D^{nm} (\bar{\psi}_{D,Rj}^{(n)} \psi_{D,L}^{(m)j}) + \lambda_U^{nm} (\bar{\psi}_{U,Rj}^{(n)} \psi_{U,L}^{(m)j}) \right. \\ & \left. + \lambda_E^{nm} (\bar{\psi}_{E,R}^{(n)} \psi_{E,L}^{(m)}) \right] + \text{conjugué hermitique.} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Dans cette base des champs spinoriels, les matrices de masse ne sont pas naturellement diagonales. Comme jusqu'ici l'indice de génération n ou m n'a pas de signification physique, on effectue un changement de base des spineurs au moyen de matrices unitaires:

$$\begin{aligned} \psi_{D,L}^{(n)j} &= (\mathcal{U}_D)_m^n \Psi_{D,L}^{(m)j}, & \psi_{D,R}^{(n)j} &= (\mathcal{O}_D)_m^n \Psi_{D,R}^{(m)j}, \\ \psi_{U,L}^{(n)j} &= (\mathcal{U}_U)_m^n \Psi_{U,L}^{(m)j}, & \psi_{U,R}^{(n)j} &= (\mathcal{O}_U)_m^n \Psi_{U,R}^{(m)j}, \\ \psi_{E,L}^{(n)} &= (\mathcal{U}_E)_m^n \Psi_{E,L}^{(m)}, & \psi_{E,R}^{(n)} &= (\mathcal{O}_E)_m^n \Psi_{E,R}^{(m)}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

¹⁰Cette relation reçoit des corrections en théorie des perturbations.

On les choisit¹¹ de manière à diagonaliser les matrices $\mathcal{O}_D^\dagger \lambda_D \mathcal{U}_D$, $\mathcal{O}_U^\dagger \lambda_U \mathcal{U}_U$ et $\mathcal{O}_E^\dagger \lambda_E \mathcal{U}_E$, avec des valeurs propres réelles :

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_D^\dagger \lambda_D \mathcal{U}_D)^{nm} &= \lambda_{D,n} \delta^{nm}, \\ (\mathcal{O}_U^\dagger \lambda_U \mathcal{U}_U)^{nm} &= \lambda_{U,n} \delta^{nm}, & (n, m = 1, 2, 3) \\ (\mathcal{O}_E^\dagger \lambda_E \mathcal{U}_E)^{nm} &= \lambda_{E,n} \delta^{nm}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Il est d'usage d'ordonner les valeurs propres en valeurs croissantes :

$$\lambda_{\#,1} < \lambda_{\#,2} < \lambda_{\#,3}, \quad \# = D, U, E.$$

Avec ces manipulations, les termes de masses (8.29) deviennent simplement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ferm.,1} = & - \sum_{n=1}^3 \left[m_{D,n} (\bar{\Psi}_{D,Rj}^{(n)} \Psi_{D,L}^{(n)j}) + m_{U,n} (\bar{\Psi}_{U,Rj}^{(n)} \Psi_{U,L}^{(n)j}) + m_{E,n} (\bar{\Psi}_{E,R}^{(n)} \Psi_{E,L}^{(n)}) \right] \\ & + \text{conjugué hermitique}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

C'est dans cette nouvelle base des états propres des matrices de masse fermioniques que les champs spinoriels sont identifiés aux quarks u, d, s, c, b, t et aux leptons chargés e, μ, τ . La génération $n = 1$ contient les fermions les plus légers e, d et u ,

$$m_e = m_{E,1} = \lambda_{E,1} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = m_{D,1} = \lambda_{D,1} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = m_{U,1} = \lambda_{U,1} \frac{v}{\sqrt{2}},$$

le neutrino associé à l'électron, ν_e , étant sans masse. La génération $n = 2$ comprend μ, s, c et ν_μ , la dernière ($n = 3$) τ, b, t et ν_τ . Notez cependant que la base naturelle des champs des neutrinos n'a pas encore été fixée: sans masse des neutrinos, cette base ne peut se définir que par l'interaction faible de ces particules.

Les masses des quarks et des leptons sont données par les valeurs propres des matrices des couplages de Yukawa multipliées par $v/\sqrt{2}$: elles sont donc arbitraires. Le Modèle standard ne prédit pas de relation entre les masses des fermions.

Interactions des fermions, termes cinétiques

Les interactions des fermions sont de deux types: premièrement les interactions de jauge contenues dans les dérivées covariantes de l'expression (8.15) et naturellement associées aux termes de propagation des champs spinoriels; et deuxièmement les interactions de Yukawa avec le boson de Higgs qui suivent de l'équation (8.17). On posera donc

$$\mathcal{L}_{ferm.,2} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{Yuk}. \quad (8.33)$$

pour distinguer ces deux types d'interactions.

¹¹C'est toujours possible.

Puisque le groupe de jauge non brisé est $SU(3) \times U(1)_Q$, on peut certainement écrire les termes cinétiques des fermions à l'aide de dérivées covariantes de ce groupe. Et puisque les interactions de ce groupe de jauge respectent la parité, on peut les formuler en termes de spineurs de Dirac (à quatre composantes):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jauge} = & \sum_{n=1}^3 \left[i\bar{\Psi}_{Dj}^{(n)} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \Psi_D^{(n)j} + i\bar{\Psi}_{Uj}^{(n)} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \Psi_U^{(n)j} + i\bar{\Psi}_E^{(n)} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \Psi_E^{(n)} \right. \\ & \left. + i\bar{\Psi}_{N,L}^{(n)} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_{N,L}^{(n)} \right] + \mathcal{L}_{WZ}. \end{aligned}$$

\mathcal{L}_{WZ} contient toutes les interactions des fermions avec les bosons massifs W_μ^\pm et Z_μ et les dérivées covariantes de $SU(3) \times U(1)_Q$ sont

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu \Psi_D^{(n)j} &= \partial_\mu \Psi_D^{(n)j} - ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)_k^j \Psi_D^{(n)k} + \frac{1}{3} ie A_\mu \Psi_D^{(n)j}, \\ \tilde{D}_\mu \Psi_U^{(n)j} &= \partial_\mu \Psi_U^{(n)j} - ig_s A_\mu^A (T_{\mathbf{3}}^A)_k^j \Psi_U^{(n)k} - \frac{2}{3} ie A_\mu \Psi_U^{(n)j}, \\ \tilde{D}_\mu \Psi_E^{(n)} &= \partial_\mu \Psi_E^{(n)} + ie A_\mu \Psi_E^{(n)}, \end{aligned}$$

avec à nouveau $e = g \sin \theta_W$. L'interaction électromagnétique est de la forme

$$e A_\mu j_{e.m.}^\mu, \quad j_{e.m.}^\mu = \sum_{n=1}^3 \left[-\bar{\Psi}_E^{(n)} \gamma^\mu \Psi_E^{(n)} + \frac{2}{3} \bar{\Psi}_{Uj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_U^{(n)j} - \frac{1}{3} \bar{\Psi}_{Dj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_D^{(n)j} \right].$$

Ces résultats reproduisent ceux de la théorie des interactions fortes et électromagnétiques développée dans la section 4.2.

L'interaction faible des fermions prend la forme suivante:

$$\mathcal{L}_{WZ} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ j^{-\mu} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- j^{+\mu} + g Z_\mu j^{0\mu}. \quad (8.34)$$

Cette forme générale déjà évoquée dans la section 4.5 va recevoir une expression précise en termes des paramètres de la théorie de jauge. Les courants fermioniques chargés sont

$$\begin{aligned} j^{-\mu} &= \sum_{n=1}^3 \bar{\Psi}_{N,L}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{E,L}^{(n)} + \sum_{m,n=1}^3 (\mathcal{U})^{mn} \bar{\Psi}_{U,Lj}^{(m)} \gamma^\mu \Psi_{D,L}^{(n)j}, \\ j^{+\mu} &= \sum_{n=1}^3 \bar{\Psi}_{E,L}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{N,L}^{(n)} + \sum_{m,n=1}^3 (\mathcal{U}^\dagger)^{mn} \bar{\Psi}_{D,Lj}^{(m)} \gamma^\mu \Psi_{U,L}^{(n)j} = [j^{-\mu}]^\dagger. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Le courant leptonique chargé définit la base naturelle des champs spinoriels des neutrinos $\Psi_{N,L}^{(n)}$. Nous avons posé

$$\psi_{N,L}^{(n)} = (\mathcal{U}_E)_m^n \Psi_{N,L}^{(m)} \quad (8.36)$$

et défini le neutrino associé au lepton chargé $\Psi_E^{(n)}$ comme étant celui qui lui est couplé par l'interaction faible du boson chargé W^\pm . Cette définition est

légitime puisqu'il n'y a pas de matrice de masse des neutrinos à diagonaliser et pas d'autre base naturelle de ces champs. La notion de mélange entre générations est donc absente de l'interaction faible chargée des leptons dans le Modèle standard minimal sans neutrinos de chiralité droite. Il y a alors un nombre leptonique conservé indépendant pour chaque génération.

Il existe par contre un mélange entre générations dans l'interaction faible à courant chargé des quarks, par l'intermédiaire de la matrice

$$\mathcal{U}^{mn} = (\mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D)^{mn}, \quad (8.37)$$

qui est la *matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*. Comme \mathcal{U} est unitaire, $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = I$, elle contient en principe neuf paramètres réels, y compris les trois angles d'une rotation dans l'espace des trois générations. Il est cependant encore possible de redéfinir les six phases des spineurs $\Psi_{U,L}^{(n)j}$ et $\Psi_{D,L}^{(n)j}$ sans altérer la structure diagonale des matrices de masse des quarks ou celle des autres interactions¹². Comme une phase globale est sans effet sur \mathcal{U} , cinq des neuf paramètres de \mathcal{U} sont sans signification. Il en résulte que la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa contient trois angles décrivant le couplage faible entre quarks de différentes générations et une phase complexe. Cette dernière signale une source de violation de CP dans les interactions faibles à courant chargé¹³. En effet, la transformation de CP du terme hadronique contenu dans $W_\mu^+ j^{-\mu}$ est¹⁴

$$\sum_{m,n=1}^3 W_\mu^+ (\mathcal{U})^{mn} \bar{\Psi}_{U,Lj}^{(m)} \gamma^\mu \Psi_{D,L}^{(n)j} \xrightarrow{CP} \sum_{m,n=1}^3 W_\mu^- (\mathcal{U}^\tau)^{mn} \bar{\Psi}_{D,Lj}^{(m)} \gamma^\mu \Psi_{U,L}^{(n)j}.$$

Le terme obtenu diffère de celui présent dans l'interaction $W_\mu^- j^{+\mu}$ lorsque la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa est complexe: $\mathcal{U}^\tau \neq \mathcal{U}^\dagger$. Même si elle se manifeste dans l'interaction quarks- W^\pm , l'origine de la violation de CP est à rechercher dans la forme des couplages de Yukawa λ_D^{mn} et λ_U^{mn} . C'est en effet de leur diagonalisation (8.31) que découle la forme de la matrice \mathcal{U} et donc la présence ou non d'une phase violant CP .

¹²Il suffit pour cela d'appliquer la redéfinition opposée aux spineurs $\Psi_{U,R}^{(n)j}$ et $\Psi_{D,R}^{(n)j}$ qui n'interviennent pas dans le courant chargé.

¹³Avec deux générations seulement, \mathcal{U} aurait quatre paramètres, un angle de rotation et trois phases. Comme on peut éliminer 4 – 1 phases dans ce cas, le seul paramètre de mélange avec deux générations est l'*angle de Cabibbo* et la symétrie CP n'est pas violée.

¹⁴Paragraphe 4.1.4.

Le courant neutre apparaissant dans l'interaction fermions- Z_μ est

$$\begin{aligned}
 j_\mu^0 = & \frac{1}{\cos \theta_W} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi}_{N,L}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{N,L}^{(n)} \right. \\
 & + \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \bar{\Psi}_{E,L}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{E,L}^{(n)} + \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_{E,R}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{E,R}^{(n)} \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{\Psi}_{U,Lj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{U,L}^{(n)j} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_{U,Rj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{U,R}^{(n)j} \\
 & \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{\Psi}_{D,Lj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{D,L}^{(n)j} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_{D,Rj}^{(n)} \gamma^\mu \Psi_{D,R}^{(n)j} \right].
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

L'interaction faible à courant neutre ne permet pas le mélange entre générations: il n'y a pas de *courants neutres à changement de saveur*¹⁵.

Dans la jauge unitaire et dans la base des fermions diagonalisant leurs matrices de masse, les interactions de Yukawa s'obtiennent d'après (8.20) en remplaçant v par h dans $\mathcal{L}_{ferm.,1}$. Il vient donc:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Yuk.} = & -\frac{1}{\sqrt{2}} h \sum_{n=1}^3 \left[\lambda_{D,n} (\bar{\Psi}_{D,Rj}^{(n)} \Psi_{D,L}^{(n)j}) + \lambda_{U,n} (\bar{\Psi}_{U,Rj}^{(n)} \Psi_{U,L}^{(n)j}) + \lambda_{E,n} (\bar{\Psi}_{E,R}^{(n)} \Psi_{E,L}^{(n)}) \right] \\
 & + \text{conjugué hermitique},
 \end{aligned} \tag{8.39}$$

en fonction des valeurs propres (8.31). La constante de couplage d'un fermion de masse m_f au boson de Higgs est donc

$$\frac{m_f}{v} = \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W}.$$

Elle est proportionnelle à la masse du fermion. Il s'agit d'une interaction faible (la constante g) avec un facteur de suppression $m_f/M_W \ll 1$ pour tous les fermions autres que le top.

Masse des neutrinos

Pour que les neutrinos deviennent massifs, il suffit d'introduire les champs $\psi_{Nc}^{(n)}$ des antineutrinos gauches (ou des neutrinos droits) et d'ajouter les termes (8.19) à la densité Lagrangienne. Nous avons défini les champs des neutrinos ν_e, ν_μ et ν_τ par leur couplage faible aux trois leptons chargés, par le biais du changement de base unitaire (8.36). Nous allons conserver cette base des champs et obtenir la matrice de masse des neutrinos, qui ne sera pas diagonale, dans cette base. Les termes de masse découlant de (8.19) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^3 \left(M_{nm}^* (\Psi_{N,R}^{(n)})^\tau C \Psi_{N,R}^{(m)} + \sqrt{2} v \tilde{\lambda}_{Nnm} \bar{\Psi}_{N,R}^{(n)} \Psi_{N,L}^{(m)} \right) \\
 & + \text{conjugué hermitique},
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

¹⁵ "Flavour changing neutral currents" (FCNC).

avec $\tilde{\lambda}_{Nnm} = \lambda_N^{np}(\mathcal{U}_E)_m^p$, en notant cependant que la matrice \mathcal{U}_E n'est pas observable. La matrice de masse des neutrinos implique ainsi à la fois les masses de Majorana M_{mn} des neutrinos droits et les termes induits par la brisure de symétrie et proportionnels aux couplages de Yukawa $\tilde{\lambda}_{Nnm}$. Clairement, cette modification du Modèle standard minimal permet l'introduction de masses des neutrinos, sans aucune prédiction ou contrainte sur celles-ci.

Interactions à trois champs de jauge: règle de Feynman

La formulation du Modèle standard donnée ici est suffisante pour effectuer des calculs de diagrammes de Feynman "en arbres". Elle doit être modifiée au-delà de l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, comme pour toute théorie de jauge non abélienne. Les règles de Feynman peuvent être obtenues par les méthodes développées pour l'électrodynamique dans le chapitre 3 et pour les interactions dérivatives ou les champs de spin un massifs dans le chapitre 4.

La discussion de la section 4.3 et la règle de Feynman (4.96) trouvent une application dans l'interaction dérivative entre bosons faibles et photons, $\gamma-W^+-W^-$ et $Z^0-W^+-W^-$. Cette interaction est définie par les deux premières lignes de l'expression (7.45),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WWZA} = & i(g \cos \theta_W Z^\mu + e A^\mu)[W^{\nu+}(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) \\ & - W^{\nu-}(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\ & - i\partial_\mu(g \cos \theta_W Z_\nu + e A_\nu)[W^{\mu-}W^{\nu+} - W^{\mu+}W^{\nu-}].\end{aligned}$$

En utilisant le résultat (4.96), la règle de Feynman pour l'interaction $\gamma-W^+-W^-$ (fig. 8.1) est la suivante:

$$ie[(q-p)_\nu \eta_{\mu\rho} + (p-p')_\rho \eta_{\mu\nu} + (p'-q)_\mu \eta_{\nu\rho}]. \quad (8.41)$$

La règle de Feynman du vertex de l'interaction $Z^0-W^+-W^-$ s'obtient en remplaçant e par $g \cos \theta_W$ dans (8.41).

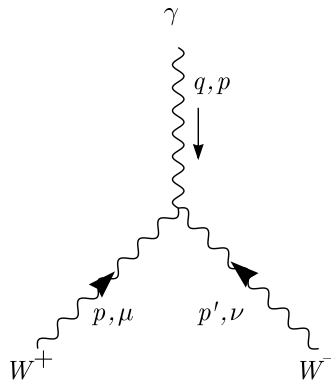


Fig. 8.1 Vertex $\gamma-W^+-W^-$

8.6 Paramètres et valeurs numériques

Au total, le Modèle standard contient dix-huit paramètres¹⁶:

- Trois constantes de couplage de jauge g_s , g et g' .
L'usage recommande de les caractériser au moyen de

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad (\text{constante de couplage forte}),$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (\theta_W : \text{angle de Weinberg}),$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq (137)^{-1}, \quad e = g \sin \theta_W, \quad (\text{constante de structure fine}).$$

Expérimentalement¹⁷, $\sin^2 \theta_W(M_Z) = .231$, $\alpha_s(M_Z) = .12$, $\alpha(m_e) = 137^{-1}$ (alors que $\alpha(M_Z) \simeq 128^{-1}$).

- La masse M_W du boson faible W^\pm , ou la constante de Fermi G_F .
À l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, ces deux quantités sont reliées par¹⁸

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}G_F.$$

En conséquence, $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \simeq 246$ GeV. Et, avec $M_W = 80.4$ GeV, $g \simeq .65$ ($\frac{g^2}{4\pi} \simeq .034$).

- Les neuf masses des quarks u, d, s, c, b, t et des leptons e, μ, τ .
Les quarks ne se manifestant que sous la forme d'états liés, les hadrons, la mesure de leurs masses peut être difficile et ambiguë. Celles des quarks légers u , d et s ne peuvent être évaluées directement: ces quarks forment des états liés dont la masse, qui est mal comprise théoriquement, est en grande partie due à la dynamique de la chromodynamique quantique et non à la masse des constituants. On les évalue à partir de leurs interactions faibles, dont certaines contributions dépendent des masses: $m_u = 1 - 5$ MeV, $m_d = 3 - 9$ MeV et $m_s = 75 - 170$ MeV. Les quarks c et b forment des états liés plus ordinaires; les masses des états $c\bar{c}$ (charmonium) et $b\bar{b}$ (bottomonium) en particulier donnent une bonne évaluation des masses: $m_c = 1.15 - 1.35$ GeV et $m_b = 4.0 - 4.4$ GeV. La masse du quark t s'obtient par l'observation directe de processus impliquant ce quark: $m_t = 174.3 \pm 5.1$ GeV.

¹⁶Il faudrait leur ajouter un paramètre de nature non perturbative résultant de la structure de l'état du vide de la couleur $SU(3)$, la symétrie non abélienne exacte du Modèle standard.

¹⁷Il s'agit de constantes de couplage effectives, dépendant de l'échelle d'énergie (sect. 6.7).

¹⁸Sections 5.3 et 5.4. Les processus d'interaction faible aux énergies très inférieures à M_W donnent une mesure de G_F (par exemple section 5.4).

- Les quatre paramètres (trois angles et une phase violant CP) de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.
Leurs valeurs se mesurent à partir des processus faibles à courants chargés, qui mélangent les générations, et la violation de CP est (difficilement) accessible dans les systèmes¹⁹ $K^0-\bar{K}^0$ et $B^0-\bar{B}^0$.
- La masse du boson de Higgs m_h [équ. (8.28)].
L'existence du boson de Higgs n'est pas encore avérée, et sa masse n'est pas connue.

¹⁹Les mésons neutres K^0 et B^0 sont des états $\bar{s}d$ et $\bar{b}d$.

Appendice A

Formulaire, conventions et notations

Groupe de Lorentz

Les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur relativement aux transformations du groupe de Lorentz (propre, orthochrone) portent un ou plusieurs indices grecs μ, ν, τ , etc... prenant les valeurs 0, 1, 2, 3. En particulier, les coordonnées d'un point de l'espace-temps sont notées x^μ , avec $x^0 = ct$ (c : vitesse de la lumière, t : temps) et $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Les composantes spatiales d'un vecteur seront également notées x^i , $i = 1, 2, 3$. Par convention, nous utilisons des unités dans lesquelles $c = \hbar = 1$.

La métrique de l'espace-temps de Minkowski, notée $\eta_{\mu\nu}$, est

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Cette notation est conforme à la pratique usuelle en relativité générale, où $g_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps dans des coordonnées quelconques alors que $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique d'un espace de Minkowski, sans courbure, donnée par (A.1) dans des coordonnées dites de de Minkowski. Elle diffère cependant de beaucoup d'ouvrages dans lesquels la métrique de Minkowski est notée $g_{\mu\nu}$. La métrique inverse $\eta^{\mu\nu}$ est numériquement égale à $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu, \quad \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4.$$

La convention de sommation sur les indices répétés (ou indices contractés) est systématiquement utilisée:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \sum_{\nu=0}^3 \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}.$$

Le “produit scalaire” de deux vecteurs x^μ et y^ν est alors

$$xy \equiv x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (\text{A.2})$$

Avec

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu,$$

ce produit scalaire s’écrit également

$$xy = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu.$$

Lorsqu’un vecteur est désigné sans indiquer son indice, il s’agit pas convention du quadrivecteur contravariant: x désignera x^μ , dont les composantes sont (x^0, \vec{x}) et non x_μ , de composantes $(x^0, -\vec{x})$.

Avec la métrique (A.1), si p est le quadrivecteur énergie-impulsion d’une particule de masse m , $p = (p^0 = E/c, \vec{p})$ [E : énergie],

$$p^2 = m^2 c^2 = m^2.$$

Le quadrivecteur des dérivées partielles est

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Puisque $x^\mu = (x^0 = t, \vec{x})$,

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right),$$

$\vec{\nabla}$ étant l’opérateur gradient. Il suit de (A.3) que

$$\partial^\mu j_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial t} j^0(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x),$$

sans le signe $-$ caractéristique du produit scalaire minkowskien (A.2). L’opérateur d’alembertien est

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{A.4})$$

La notation suivante est également utilisée:

$$A(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu B(x) = A(x) [\partial_\mu B(x)] - [\partial_\mu A(x)] B(x). \quad (\text{A.5})$$

La convention utilisée pour le symbole antisymétrique de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est

$$\epsilon_{0123} = 1.$$

Comme $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\rho\gamma}\eta_{\sigma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$\epsilon^{0123} = -1.$$

Les identités suivantes sont utiles:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} &= -\left(\delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\rho\delta_\gamma^\sigma + \delta_\beta^\nu\delta_\gamma^\rho\delta_\alpha^\sigma + \delta_\gamma^\nu\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\nu\delta_\alpha^\rho\delta_\gamma^\sigma - \delta_\alpha^\nu\delta_\gamma^\rho\delta_\beta^\sigma - \delta_\gamma^\nu\delta_\beta^\rho\delta_\alpha^\sigma\right), \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} &= -2\left(\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\rho\delta_\alpha^\sigma\right), \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} &= -6\delta_\alpha^\sigma, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Matrices de Dirac

L'algèbre des matrices de Dirac est

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I_4,\tag{A.7}$$

(I_4 : matrice unité de dimension 4). On définit ensuite

$$\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad \gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Comme $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, $i = 1, 2, 3$,

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_0\gamma^\mu\gamma_0.\tag{A.8}$$

Dans les représentations utilisées ici,

- γ^0 , γ^1 et γ^3 sont réelles, γ^2 est imaginaire: $(\gamma^\mu)^* = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2$.
- En conséquence de (A.8), γ^0 et γ^2 sont symétriques, γ^1 et γ^3 sont anti-symétriques: $(\gamma^\mu)^\tau = \gamma^0\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0$.

Ces deux dernières propriétés ne découlent cependant pas de l'algèbre de Dirac mais d'un choix de sa représentation.

La matrice γ_5 est:

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.\tag{A.9}$$

Elle vérifie ($I \equiv I_4$)

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = I, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5,$$

et permet de définir les projecteurs de chiralité

$$\begin{aligned}P_L &= \frac{1}{2}(I + \gamma_5), & P_R &= \frac{1}{2}(I - \gamma_5), \\ P_L^2 &= P_L, & P_R^2 &= P_R, & P_L P_R &= P_R P_L = 0, & P_L + P_R &= I.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Avec la notation (*Feynman slash*)

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu,$$

les projecteurs d'énergie pour un quadrivecteur impulsion vérifiant $k^2 = m^2$ sont:

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \frac{\not{k} + m}{2m}, & \Lambda_- &= -\frac{\not{k} - m}{2m}, \\ \Lambda_+^2 &= \Lambda_+, & \Lambda_-^2 &= \Lambda_-, & \Lambda_+ \Lambda_- &= \Lambda_- \Lambda_+ = 0, & \Lambda_+ + \Lambda_- &= I. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Nous utilisons deux représentations des matrices de Dirac. Celle de Weyl (ou représentation chirale):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

pour laquelle γ_5 est diagonale

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de Pauli σ_i vérifient:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I_2.$$

Et la représentation de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

qui, par rapport à (A.12), échange γ^0 et γ_5 .

Matrices de Dirac: traces, identités, etc.

La trace du produit d'un nombre impair de matrice de Dirac est nulle:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] &= \text{Tr}[\gamma_5^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5] \\ &= -\text{Tr}[\gamma_5^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = -\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0. \end{aligned}$$

La deuxième égalité utilise la cyclicité de la trace alors que la troisième utilise $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ pour ramener la matrice γ_5 en deuxième position dans le produit. Donc:

$$\text{Tr} \gamma^\mu = 0, \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5] = 0. \quad (\text{A.14})$$

En général, la trace d'un produit de $2n$ matrices γ^μ peut se ramener à une trace de $2n - 2$ matrices de Dirac en utilisant l'algèbre de Dirac (A.7) et la cyclicité de la trace:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}] &= \text{Tr}[\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1}] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_{2n}}] + 2\eta^{\mu_1 \mu_{2n}} \text{Tr}[\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}] + X \end{aligned}$$

où X est une combinaison de $2n - 1$ termes comprenant une trace de $2n - 2$ matrices de Dirac, tels que $2\eta^{\mu_1\mu_{2n}} \text{Tr}[\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}]$. Donc :

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}] = \frac{1}{2}X.$$

A partir de

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}] = \eta^{\mu\nu} \text{Tr}[I_4] = 4\eta^{\mu\nu},$$

on obtient par exemple

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}), \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta] &= \eta^{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta] - \eta^{\mu\rho} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta] \\ &\quad + \eta^{\mu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta] - \eta^{\mu\alpha} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\beta] \\ &\quad + \eta^{\mu\beta} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

D'après (A.15),

$$\text{Tr} \gamma_5 = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] = 0, \quad (\text{A.16})$$

alors que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.17})$$

Identités de contraction:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 4I, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, & \gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu &= -2\not{k}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4\eta^{\nu\rho} I, & \gamma^\mu \not{k} \not{p} \gamma_\mu &= 4\not{k} \not{p} I. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Finalement,

$$\not{k} \not{k} = \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = k^2 I.$$

Spineurs

Conjugué de Dirac:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma_0. \quad (\text{A.19})$$

Les spineurs de chiralité gauche ou droite sont:

$$\psi_L = P_L \psi = \frac{1}{2}(I + \gamma_5)\psi, \quad \psi_R = P_R \psi = \frac{1}{2}(I - \gamma_5)\psi.$$

Leurs conjugués de Dirac sont notés:

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \bar{\psi} P_R, \quad \bar{\psi}_R = \psi_L^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} P_L.$$

Dans la représentation chirale (A.12),

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix},$$

les spineurs à deux composantes χ_L et χ_R étant qualifiés de spineurs de Weyl.

Champ de Dirac

Expansion en ondes planes:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b_{\alpha}(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_{\alpha}^{\dagger}(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right],$$

avec $k = (\omega_k, \vec{k})$ et

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} (\not{k} + m) u^{(\alpha)}, \\ v^{(\alpha)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+\omega_k)}} (-\not{k} + m) v^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Anticommutateurs non nuls:

$$\{b_{\alpha}^{\dagger}(k), b_{\beta}(q)\} = \{d_{\alpha}^{\dagger}(k), d_{\beta}(q)\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}).$$

Les normalisations utilisées sont:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= \delta^{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= -\delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) = 0, \\ u^{(\alpha)\dagger}(k) u^{(\beta)}(k) &= v^{(\alpha)\dagger}(k) v^{(\beta)}(k) = \frac{\omega_k}{m} \delta^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} = \Lambda_+, \quad \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} - m}{2m} = -\Lambda_-.$$

Champ de Klein-Gordon

Expansion en ondes planes:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + b^{\dagger}(k) e^{ikx} \right], \quad k = (\omega_k, \vec{k}), \quad \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Commutateurs non nuls:

$$[a(k), a^{\dagger}(q)] = [b(k), b^{\dagger}(q)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q}).$$

Pour un champ réel (ou hermitique), $a(k) = b(k)$.

Champ vectoriel de masse nulle, de jauge

Expansion en ondes planes:

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 \left[a^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) e^{-ikx} + a^{(\kappa)\dagger}(k) \epsilon_{\mu}^{(\kappa)*}(k) e^{ikx} \right],$$

avec $\omega_k = |\vec{k}|$ puisque $k^2 = 0$. Dans la jauge de Feynman,

$$[a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(q)] = -2\omega_k(2\pi)^3 \eta^{\kappa\kappa'} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}).$$

Les autres commutateurs s'annulent. La base des vecteurs de polarisation $\epsilon^{(\kappa)}(k)$ est choisie réelle avec les normalisations

$$\begin{aligned} \epsilon^{(\kappa)}(k) \epsilon^{(\kappa')}(k) &= \eta^{\kappa\kappa'}, \\ \sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 \eta_{\kappa\kappa'} \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\nu}^{(\kappa')}(k) &= \eta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Les polarisations $\kappa = 1, 2$ sont transverses:

$$\kappa = 1, 2 : \quad k \epsilon^{(\kappa)}(k) = n \epsilon^{(\kappa)}(k) = 0,$$

n étant un vecteur unitaire de genre temps ($n^2 = 1, n^0 > 1$) fixé quelconque.

Section efficace différentielle

Pour une collision de particules d'impulsions k_1 et k_2 et un état final d'impulsions p_1, \dots, p_ℓ , la section efficace différentielle est:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{S} \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_{p_i}} \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - \dots - p_\ell) \\ &\quad |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | k_1, k_2, in \rangle|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

le facteur $1/S$ évitant le comptage multiple d'états finaux identiques. Pour chaque fermion de masse m , ajouter un facteur $2m$ à $d\sigma$.

Largeur de désintégration

La désintégration d'une particule de masse M en un état final d'impulsions p_1, \dots, p_ℓ est décrite par la largeur

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow f} &= \frac{(2\pi)^4}{2M} \frac{1}{S} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \dots \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2\omega_{p_\ell}} \delta^4(P - p_1 - \dots - p_\ell) \\ &\quad \cdot |\langle p_1, \dots, p_\ell, in | i\tau | P, in \rangle|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

La signification de S est comme dans $d\sigma$ ci-dessus. Chaque fermion de masse m ajoute un facteur $2m$ à cette expression. Pour une désintégration en deux particules d'impulsions p_1 et p_2 (et sans polarisation),

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M^3} \sqrt{\Delta(M^2, m_1^2, m_2^2)} |\langle p_1, p_2, in | i\tau | P, in \rangle|^2, \quad (\text{A.22})$$

avec un facteur $1/2$ lorsque l'état final contient deux particules identiques, et

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Espace de phase

L'expression d'une section efficace ou d'une largeur de désintégration contient une intégrale d'espace de phase invariant de Lorentz (*Lorentz invariant phase space, Lips*):

$$\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\omega_{p_1}} \cdots \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2\omega_{p_\ell}} \delta^4(P - p_1 - \cdots - p_\ell). \quad (\text{A.23})$$

Cette intégration pour une collision ou désintégration avec un état final à deux ou trois particules est discutée dans le paragraphe 3.4.3.

Règles de Feynman

Localisation des règles de Feynman en espace des impulsions et pour les éléments de matrice S mentionnées dans le texte:

	Section	Equation	Page
Propagateur, champ scalaire	2.5	2.153	83
Propagateur, champ spinoriel	2.5	2.160	85
	3.3		127
Propagateur, champ de jauge	2.5	2.166	87
	3.3		128
Propagateur, champ de spin un massif	4.4	4.110	178
Théorie φ^4	3.3		121
Electrodynamique	3.3		127
Interaction à trois champs de jauge	4.3	4.96	174
Interaction à quatre champs de jauge	4.2	4.77	168
Interaction scalaire–scalaire–champ de jauge	4.3	4.97	175
QCD: interaction à trois gluons	4.3	4.96	174
QCD: interaction à quatre gluons	4.2	4.77	168
Interaction γ – W^+ – W^-	8.5	8.41	320
Interaction Z^0 – W^+ – W^-	8.5	8.41	320
Interaction W^\pm –quarks/leptons	4.5		180
Interaction Z^0 –quarks/leptons	5.3.4		204
Contre-termes, électrodynamique	6.1		235

Constantes physiques, unités, facteurs de conversion [49]

Constante de structure fine, à basse énergie:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = (137.036)^{-1};$$

à la masse du Z , $\alpha(M_Z) = (127.9 \pm .2)^{-1}$. Cette expression de α est valable dans le système d'unités SI (ou MKSA), dans lequel la charge de l'électron est $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C et $\epsilon_0 = 10^7(4\pi c^2)^{-1}$. Il est d'usage en physique des particules

d'utiliser le système d'unités de Heavyside-Lorentz pour la charge électrique, avec $\epsilon_0 = 1$, $\alpha = e^2(4\pi\hbar c)^{-1}$, qui conduit à $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ lorsqu'on prend $\hbar = c = 1$.

Constante de couplage forte²:

$$\alpha_s(M_Z) = .1185 \pm .0020, \quad \alpha_s(10 \text{ GeV}) \simeq .18.$$

Angle de Weinberg:

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) = .231.$$

Constante de Fermi:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

Masses:

W^\pm	: 80.419 \pm .056 GeV	Z^0	: 91.1882 \pm .0022 GeV
p	: 938.27 MeV	n	: 939.57 MeV
e	: .5110 MeV	μ	: 105.7 MeV
τ	: 1.777 GeV		

Masses des quarks: $m_u = 1$ à 5 MeV, $m_d = 3$ à 9 MeV, $m_s = 75$ à 170 MeV, $m_c = 1.15$ à 1.35 GeV, $m_b = 4.0$ à 4.4 GeV, $m_t = 174.3 \pm 5.1$ GeV.

Unités d'énergie: 1 GeV = 10^9 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 keV = 10^3 eV, 1 eV = 1.602×10^{-19} Joule.

En posant $\hbar = c = 1$, on mesure les longueurs et les temps en unité d'énergie inverse (GeV^{-1}), et les sections efficaces en $(\text{énergie})^{-2}$. Comme

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ \hbar c &= 197.33 \text{ MeV fm}, \\ (\hbar c)^2 &= .3894 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn}, \end{aligned}$$

avec 1 fm = 10^{-15} m, 1 barn = 10^{-28} m², on aura les conversions suivantes:

Largeur, en MeV \longrightarrow temps de vie, en secondes:

$$\Gamma = X \text{ MeV} \quad \longrightarrow \quad \tau = \hbar \Gamma^{-1} = 6.582 \times 10^{-22} \times X^{-1} \text{ s}.$$

Section efficace, en GeV^{-2} \longrightarrow section efficace, en barn:

$$\sigma = X \text{ GeV}^{-2} \quad \longrightarrow \quad \sigma = .3894 \times X \text{ mbarn}.$$

¹La valeur de α , qui est un nombre pur (sans dimension physique) ne dépend pas des unités.

²Une valeur très précise des constantes des interactions faibles et fortes dépend des conventions choisies pour les définir (schéma de renormalisation).

Glossaire des symboles

\dagger	Conjugué hermitique (d'un opérateur)
$*$	Conjugué complexe
τ	Transposée d'une matrice (avec la signature de la permutation des opérateurs fermioniques)
$\delta_{\nu}^{\mu}, \delta_j^i, \delta^{ij}$	Symbole de Kronecker (1 si $\mu = \nu$ ou $i = j$, 0 sinon)
ϵ^{ijk}	Symbole antisymétrique ($\epsilon^{ijk} = \epsilon^{jki} = -\epsilon^{jik}$, $\epsilon^{123} = 1$)
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$	Symbole antisymétrique (Levi-Civita)
$\delta^4(\dots)$	Distribution de Dirac dans l'espace-temps
$\delta^3(\dots)$	Distribution de Dirac dans l'espace
$\theta(u)$	Fonction de Heavyside (1 si $u \geq 0$, 0 sinon)
$\Delta(x, y, z)$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
d^4x	Mesure d'intégration sur l'espace-temps
d^3x	Mesure d'intégration sur l'espace
I	Matrice unité
σ_i	Matrices de Pauli
$[A, B]$	Commutateur $AB - BA$
$\{A, B\}$	Anticommutateur $AB + BA$
\not{p}	"Feynman slash" $p_{\mu}\gamma^{\mu}$
∂_{μ}	Dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$
\square	D'Alembertien $\partial^{\mu}\partial_{\mu}$
$A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu} B$	$A(\partial_{\mu}B) - (\partial_{\mu}A)B$
$ 0\rangle$	Etat du vide
\mathcal{L}	Densité lagrangienne
$\Pi(x)$	Impulsion canonique du champ $\varphi(x)$
H	Opérateur hamiltonien
$T_{\mu\nu}$	Tenseur énergie-impulsion
$:\dots:$	Produit ou ordre normal
$T\dots$	Produit ou ordre chronologique
$\hat{\varphi}$	Opérateur de champ omis dans un produit
σ	Section efficace
Γ	Largeur de désintégration
f^{ABC}	Constantes de structure
$\psi_{L,R}$	Spineur de chiralité gauge (L) ou droite (R)
$\psi^{c,p,t}$	Conjugué de charge, de parité, de renversement du temps du spineur ψ
C	Opération de conjugaison de charge, ou: matrice de conjugaison de charge du spineur
\mathcal{C}	Opérateur de conjugaison de charge, réalise C dans l'espace des états
P	Opération de parité
\mathcal{P}	Opérateur de parité, réalise P dans l'espace des états
T	Opération de renversement du temps ou: matrice de renversement de temps du spineur
\mathcal{T}	Opérateur de renversement du temps, réalise T dans l'espace des états

Appendice B

L'anomalie chirale

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le théorème de Noether associe un courant conservé à chaque symétrie continue, locale ou globale, de l'action définissant la théorie de champs. Et dans la section 6.5, nous avons montré par un exemple seulement que les équations de conservation de ces courants se transcrivent en identités de Ward reliant leurs fonctions de Green. Dans la théorie de champs quantifiée, la preuve des identités de Ward équivaut à la preuve de l'existence de la symétrie.

Supposons que la densité lagrangienne d'une théorie de champs classique possède une symétrie *globale* et donc un courant classiquement conservé. Il n'est pas garanti que la quantification de la théorie respecte cette symétrie: une *anomalie* peut apparaître lors du calcul des corrections quantiques à l'une des identités de Ward, impliquant que la symétrie classique n'est pas présente dans la théorie quantifiée. L'exemple typique d'une symétrie classique anormale est offert par la symétrie chirale caractéristique des théories de fermions de masse nulle, déjà rencontrée dans la section 1.5. Dans le cas d'une symétrie globale, l'anomalie signale une brisure quantique de la symétrie. Elle implique que les relations entre certaines grandeurs physiques prédites par la symétrie sont violées par des corrections quantiques calculables et conduit donc à des prédictions nouvelles sur la physique du modèle. Mais elle n'a pas de conséquence néfaste à la cohérence de la théorie quantifiée.

La situation est différente si la symétrie anormale est *locale*. Une symétrie de jauge est nécessairement réalisée à l'aide d'un champ de jauge dont la quantification n'est cohérente que si la symétrie de jauge est exacte (ou spontanément brisée). L'anomalie d'une symétrie de jauge est donc fatale à la cohérence de la théorie quantifiée et il faut imposer l'absence d'anomalie comme une contrainte à la construction de la densité lagrangienne.

Ce problème a cependant un traitement extrêmement simple du fait de deux observations importantes. Premièrement, il n'existe qu'un seul type d'anomalie, celle liée à la présence de symétries classiques chirales. Et deuxièmement, la

présence d'une anomalie est entièrement reliée à la non-annulation d'une contribution bien identifiée d'un seul diagramme de Feynman à une boucle¹. Ce dernier résultat, dont la formulation rigoureuse est le *théorème d'Adler-Bardeen*, implique qu'il suffit d'annuler cette contribution unique pour garantir l'absence d'anomalie à tous les ordres de la théorie des perturbations.

Considérons une théorie de jauge décrivant un multiplet de spineurs de Weyl de chiralité gauche², sans masse, dans une représentation du groupe de jauge caractérisée par les générateurs T_ℓ^A . Dans la notation de la section 1.5, la densité lagrangienne est

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + i\bar{\psi}_{LJ}\gamma^\mu D_\mu\psi_L^J, \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + gf^{ABC}A_\mu^B A_\nu^C, \\ D_\mu\psi_L^J &= \partial_\mu\psi_L^J - igA_\mu^A(T_\ell^A)^J_K\psi_L^K,\end{aligned}\tag{B.1}$$

g étant la constante de couplage de jauge. La règle de Feynman du vertex d'interaction fermions–champ de jauge est donc

$$ig(T_\ell^A)^J_K\gamma^\mu P_L = \frac{ig}{2}(T_\ell^A)^J_K\gamma^\mu(I + \gamma_5).\tag{B.2}$$

La densité lagrangienne conduit aux équations du mouvement suivantes:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu D_\mu\psi_L^J &= 0, \\ (\partial^\mu\delta^{AC} + gf^{ABC}A^{B\mu})F_{\mu\nu}^C + g(T_\ell^A)^J_K\bar{\psi}_{LJ}\gamma_\nu\psi_L^K &= 0.\end{aligned}$$

Comme $\partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu}^A = 0$, la seconde assure la conservation des courants

$$J_\nu^A = (T_\ell^A)^J_K\bar{\psi}_{LJ}\gamma_\nu\psi_L^K + f^{ABC}A^{B\mu}F_{\mu\nu}^C, \quad \partial^\mu J_\mu^A = 0,\tag{B.3}$$

que le théorème de Noether associe aux symétries de jauge.

L'anomalie chirale est alors générée par la somme des deux diagrammes de la figure B.1, qui ne diffèrent que par l'orientation de la boucle. Si on ampute les lignes externes, ces diagrammes peuvent être vus comme des contributions à une boucle à la fonction de Green de trois courants fermioniques:

$$G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z) = \langle 0|Tj_\mu^A(x)j_\nu^B(y)j_\rho^C(z)|0\rangle, \quad j_\mu^A = (T_\ell^A)^J_K\bar{\psi}_{LJ}\gamma_\mu\psi_L^K.$$

L'équation de conservation (B.3) permet de dériver trois identités de Ward pour les quantités

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z), \quad \frac{\partial}{\partial y_\nu}G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z_\rho}G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z).$$

¹Plus précisément: des deux orientations d'un diagramme de Feynman à une boucle.

²Ce choix peut toujours être fait; nous l'avons utilisé dans l'appendice 8, sur le Modèle standard. Un spineur de Dirac est équivalent à un spineur de Weyl de chiralité gauche et un spineur de Weyl de chiralité droite. Un spineur de Weyl de chiralité droite peut toujours être remplacé par son conjugué de charge de chiralité gauche.

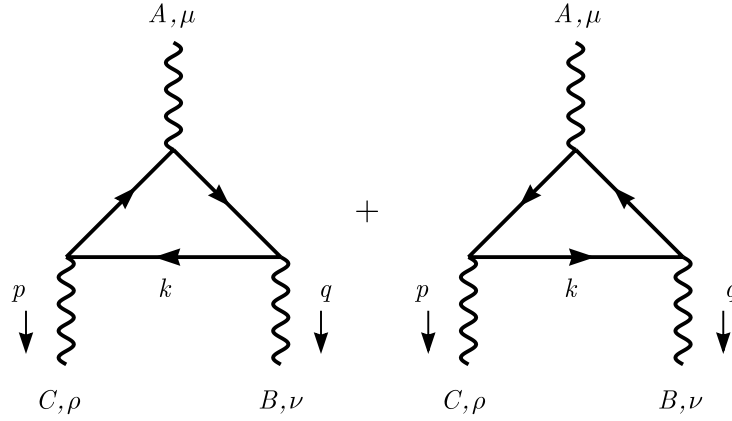


Fig. B.1 Diagrammes générant l'anomalie chirale.

Par exemple³,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z) &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T[j_0^A(x), j_\nu^B(y)] j_\rho^C(z) | 0 \rangle \\ &+ \delta(x^0 - z^0) \langle 0 | T[j_\nu^B(y)] [j_0^A(x), j_\rho^C(z)] | 0 \rangle \\ &- f^{ADE} \langle 0 | T \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(F_{\mu\sigma}^D(x) A^{E\sigma}(x) \right) j_\nu^B(y) j_\rho^C(z) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Cette expression est à calculer à l'ordre le plus bas, et donc avec des champs libres; le dernier terme s'annule⁴ et

$$[j_0^A(t, \vec{x}), j_\nu^B(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) f^{ABC} j_\nu^C(t, \vec{y}), \quad (\text{B.4})$$

à l'aide des relations d'anticommutation des spineurs libres. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z) &= i\delta^4(x - y) f^{ABD} \langle 0 | T j_\nu^D(y) j_\rho^C(z) | 0 \rangle \\ &+ i\delta^4(x - z) f^{ACD} \langle 0 | T j_\nu^B(y) j_\rho^D(z) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

une relation entre fonctions de Green à deux et trois courants qui dépend des constantes de structure f^{ABC} . Cette identité doit être vérifiée pour assurer l'invariance de jauge de la théorie, ainsi que les deux identités analogues pour $\frac{\partial}{\partial y_\nu} G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z)$ et $\frac{\partial}{\partial z_\rho} G_{\mu\nu\rho}^{ABC}(x, y, z)$.

L'expression en espace des impulsions de la somme des diagrammes de la figure B.1 peut facilement être écrite au moyen de la règle (B.2) et des propagateurs

³Le calcul est identique à celui précédant l'équation (6.98), section 6.6.

⁴Le théorème de Wick interdit les contractions sur un seul point x .

fermioniques. En omettant les lignes externes, il vient⁵

$$\begin{aligned}\Gamma_{1\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q) &= -\frac{1}{2}(ig)^3 \text{Tr}(T_\ell^A T_\ell^C T_\ell^B) I_{\mu\rho\nu}(p, q), \\ I_{\mu\rho\nu}(p, q) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i^3}{k^2(k+q)^2(k-p)^2} \text{Tr}[(I - \gamma_5)\gamma_\mu(\not{k} - \not{p})\gamma_\rho \not{k}\gamma_\nu(\not{k} + \not{q})],\end{aligned}\tag{B.6}$$

pour le premier diagramme, et

$$\Gamma_{2\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q) = -\frac{1}{2}(ig)^3 \text{Tr}(T_\ell^A T_\ell^B T_\ell^C) I_{\mu\nu\rho}(q, p)\tag{B.7}$$

pour le second qui diffère du premier par l'échange $q, B, \nu \leftrightarrow p, C, \rho$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\text{Tr}(T_\ell^A T_\ell^B T_\ell^C) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(T_\ell^A [T_\ell^B, T_\ell^C]) + \frac{1}{2} \text{Tr}(T_\ell^A \{T_\ell^B, T_\ell^C\}) \\ &= \frac{i}{2} \tau_\ell f^{ABC} + d^{ABC},\end{aligned}$$

avec $\tau_\ell \delta^{AB} = \text{Tr}(T_\ell^A T_\ell^B)$, et les diagrammes de la figure B.1 génèrent en principe une première contribution proportionnelle aux constantes de structure et une seconde proportionnelle au coefficient symétrique $d^{ABC} = \frac{1}{2} \text{Tr}(T_\ell^A \{T_\ell^B, T_\ell^C\})$.

L'identité de Ward (B.5) en espace des impulsions relie la quantité

$$(q+p)^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q), \quad \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q) = \Gamma_{1\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q) + \Gamma_{2\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q)$$

aux fonctions à deux points multipliées par les constantes de structure f^{ABC} . Deux identités similaires existent pour $q^\nu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q)$ et $p^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q)$. Le problème consiste donc à évaluer $(q+p)^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q)$, qui contient par exemple la trace

$$\begin{aligned}\text{Tr}[(I - \gamma_5)(\not{p} - \not{k} + \not{k} + \not{q})(\not{k} - \not{p})\gamma_\rho \not{k}\gamma_\nu(\not{k} + \not{q})] \\ = -(p-k)^2 \text{Tr}[(I - \gamma_5)\gamma_\rho \not{k}\gamma_\nu(\not{k} + \not{q})] + (q+k)^2 \text{Tr}[(I - \gamma_5)\gamma_\rho \not{k}\gamma_\nu(\not{k} - \not{p})] \\ = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\mu [(p-k)^2 q^\sigma + (q+k)^2 p^\sigma] + \dots,\end{aligned}$$

à montrer que les termes proportionnels à f^{ABC} sont ceux prédits par (B.5) et à calculer ceux proportionnels à d^{ABC} qui devraient s'annuler selon (B.5). Les intégrales apparaissant dans $(p+q)^\mu I_{\mu\nu\rho}(p, q)$ sont linéairement divergentes. Comme la quantité $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ n'a pas d'extension naturelle en dimension continue, la régularisation dimensionnelle est inapte à évaluer leur divergence linéaire; il faut donc utiliser une autre procédure de régularisation. Nous ne décrivons pas ici ce calcul⁶. Le résultat se résume en deux points:

- les contributions proportionnelles aux constantes de structure sont celles prédites par l'identité de Ward de la symétrie de jauge,

⁵Avec un signe négatif pour la boucle fermionique.

⁶Voir en particulier: Weinberg [2], section 22.3.

- les contributions proportionnelles à d^{ABC} ne peuvent être annulées simultanément pour les trois identités de Ward requises. Elle portent donc l'anomalie chirale.

En conséquence, la condition à vérifier pour garantir l'absence d'anomalie de la symétrie de jauge est

$$d^{ABC} = \frac{1}{2} \text{Tr}(T_\ell^A \{T_\ell^B, T_\ell^C\}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

pour tous les générateurs de la représentation des fermions qui sont tous de chiralité gauche. L'équation (B.8) est donc une contrainte sur le contenu en fermions de la théorie de jauge. Elle n'est cependant significative que lorsque le groupe de jauge comprend des facteurs $SU(N)$ ou $U(1)$. Dans les autres cas, d^{ABC} s'annule quel que soit le choix de la représentation des fermions. Mais l'absence d'anomalie est une condition significative dans le cas du Modèle standard.

Sous conjugaison de charge,

$$T_\ell^A \xrightarrow{C} -T_\ell^A, \quad d^{ABC} \xrightarrow{C} -d^{ABC}.$$

On en déduit qu'une première catégorie de solutions à la condition (B.8) est fournie par les théories dont l'interaction fermions–champ de jauge est invariante sous parité⁷, quelle que soit la représentation des fermions gauches. Seules les interactions de jauge violant la parité sont donc susceptibles d'être anormales.

Lorsque le groupe de jauge contient des facteurs $SU(N)$ ou $U(1)$, la condition d'absence d'anomalie (B.8) impose toujours des contraintes sur le choix des fermions. Des solutions violant la parité existent cependant: le Modèle standard est l'une d'elles.

Absence d'anomalie chirale dans le Modèle standard

Pour élucider le contenu de la condition (B.8) dans le Modèle standard, il faut étudier tous les choix possibles de champs de jauge externes dans les diagrammes de la figure B.1 et dans les coefficients symétriques d^{ABC} . On utilisera la notation suivante:

Indices A, B ou C : générateurs de $SU(3)$;

Indices a, b ou c : générateurs de $SU(2)_L$;

Indice Q : générateur de la charge électrique.

Comme $Q = T^3 + Y$, l'hypercharge faible Y n'est pas directement nécessaire. Certaines conditions (B.8) sont banalement vérifiées:

⁷Et donc sous conjugaison de charge C puisque cette interaction conserve toujours CP .

1. $d^{ABC} = d^{ABQ} = d^{AQQ} = d^{QQQ} = 0$: les interactions fortes et électromagnétiques conservent la parité.
2. Les générateurs de $SU(2)_L$ et de $SU(3)$ sont sans trace: $d^{aBC} = d^{aBQ} = d^{aQQ} = d^{Abc} = d^{AQQ} = 0$.
3. Comme $\text{Tr}(\sigma^a \{\sigma^b, \sigma^c\}) = 2\delta^{bc} \text{Tr}(\sigma^a) = 0$, $d^{abc} = 0$.

Il reste une seule condition non triviale, $d^{abQ} = 0$. Sous $SU(2)_L$, les fermions sont soit des doublets,

$$T_2^a = \frac{1}{2}\sigma^a, \quad \{T_2^a, T_2^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}I,$$

soit des singlets $T_1^a = 0$. Comme

$$d^{abQ} = \frac{1}{2} \text{Tr}(Q\{T^a, T^b\}),$$

la condition $d^{abQ} = 0$ s'écrit

$$\sum_I Q_I = 0, \tag{B.9}$$

l'indice I parcourant les fermions de chiralité gauche d'isospin faible $T^3 = \pm\frac{1}{2}$ uniquement. Sur une génération de quarks et leptons, la contribution leptonique est -1 (le lepton chargé $\psi_{E,L}^{(n)}$); celle des quarks est

$$3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1;$$

chaque quark $\psi_{U,L}^{(n)j}$ et $\psi_{D,L}^{(n)j}$ y contribue avec un facteur 3 puisqu'il possède trois couleurs $j = 1, 2, 3$. Les contributions des quarks et des leptons se compensent et chaque génération est donc libre d'anomalie.

Il est à noter que la condition d'absence d'anomalie chirale (B.9), imposée par la cohérence quantique de la théorie de jauge, est la seule relation entre les nombres quantiques des quarks et ceux des leptons dans la construction du Modèle standard. Avec la structure séquentielle en générations identiques de fermions, elle impose la quantification de l'hypercharge faible Y : si on normalise Y en choisissant la valeur $-1/2$ pour les doublets leptoniques, alors l'hypercharge des doublets de quarks doit être $1/6$ pour annuler l'anomalie avec trois couleurs.

Bibliographie

Ouvrages de référence, cités dans le texte

- [1] Itzykson C. & Zuber J.-B. (1980), *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York), 705 pages. Ou: International Student Edition (McGraw-Hill, Singapore, 1985).
- [2] Weinberg S. (1995–6), *The Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), 609 pages.
Volume II: Modern Applications (Cambridge University Press, 1996), 489 pages.
- [3] Ramond P. (1990), *Field Theory: a Modern Primer, second edition* (Addison-Wesley, Redwood City), 329 pages.
- [4] Bjorken J. D. & Drell S. D. (1964), *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York), 300 pages.
- [5] Huang K. (1992), *Quarks, Leptons & Gauge Fields, second edition* (World Scientific, Singapore), 333 pages.
- [6] Peskin M. E. & Schroeder D. V. (1995), *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Reading), 842 pages.
- [7] Pokorski S. (2000), *Gauge Field Theories, second edition* (Cambridge University Press, Cambridge), 629 pages.
- [8] Halzen F. & Martin A. D. (1984), *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (J. Wiley & Sons, New York), 396 pages.
- [9] Aitchison I. J. R. & Hey A. J. G. (1989), *Gauge Theories in Particle Physics, second edition* (Adam Hilger, Bristol), 571 pages.
- [10] Renton P. (1990), *Electroweak Interactions, an Introduction to the Physics of Quarks & Leptons* (Cambridge University Press, Cambridge), 596 pages.
- [11] Collins J. (1984), *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge), 380 pages.

Autres références citées dans le texte

- [12] Soper D. E. (1976), *Classical Field Theory* (John Wiley & Sons, New York), 259 pages.
- [13] Goldstein H. (1980), *Classical Mechanics, second edition* (Addison-Wesley, Reading), 672 pages.
- [14] Moussa P. & Stora R. (1968), “Angular Analysis of Elementary Particle Reactions”, dans *Analysis of Scattering and Decay*, édité par M. Nikolic (Gordon and Breach, New York), pages 101 à 176.
- [15] Feynman R. P. & Hibbs A. R. (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York).
- [16] Rivers R. J. (1987), *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge), 339 pages.
- [17] Byckling E. & Kajantie K. (1973), *Particle Kinematics* (John Wiley & Sons, New York), 319 pages.
- [18] Hagedorn R. (1963), *Relativistic Kinematics* (Benjamin, New York), 166 pages.
- [19] Streater R. F. & Wightman A. S. (1964), *PCT, Spin and Statistics, and All That* (Benjamin, New York), 181 pages.
- [20] Ynduráin F. J. (1983), *Quantum Chromodynamics. An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons* (Springer-Verlag, New York), 227 pages.
- [21] Commins E. D. & Bucksbaum P. H. (1983), *Weak Interactions of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press, Cambridge), 473 pages.
- [22] Georgi H. (1984), *Weak Interactions and Modern Particle Theory* (Benjamin/Cummings, Menlo Park), 165 pages.
- [23] Steinberger J. (1949), “On the Use of Subtraction Fields and the Lifetimes of some Types of Meson Decay”, *Physical Review* **76**, 1180.
- [24] Akhiezer A. I. & Berestetskii V. R. (1965), *Quantum Electrodynamics* (Interscience Publishers, New York).
- [25] Feynman R. P. (1972), *Photon-Hadron Interactions* (Benjamin, Reading), 282 pages.
- [26] Abers E. S. & Lee B. W. (1973), “Gauge Theories”, *Physics Reports* **9C**, NO. 1, pages 1–141.
- [27] Leibbrandt G. (1975), “Introduction to the Technique of Dimensional Regularization”, *Review of Modern Physics* **47**, 849.

- [28] Yennie D. R., Frautschi S. C. & Suura H. (1961), “The Infrared Divergence Phenomena and High-Energy Processes”, *Annals of Physics (New York)* **13**, pages 379–452.
- [29] Treiman S. B., Jackiw R., Zumino B. & Witten E. (1985), *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore), 537 pages.
- [30] Coleman S. (1971), “Dilatations”, dans *Properties of the Fundamental Interactions*, édité par A. Zichichi (Editrice Compositori, Bologna, 1973), ou dans *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [31] Gross D. J. (1975), “Applications of the Renormalization Group to High-Energy Physics”, dans: *Methods in Field Theory* (Les Houches 1975), édité par R. Balian et J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1976).
- [32] Politzer H. D. (1974), “Asymptotic Freedom: an Approach to Strong Interaction”, *Physics Reports* **14C**, NO. 4, pages 129–180.
- [33] Vilenkin A. & Shellard E. P. S. (1994), *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge), 517 pages.
- [34] Peebles P. J. E. (1993), *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton), 718 pages.
- [35] Coleman S. & Weinberg E. (1973), “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking”, *Physical Review* **D7**, 1888–1910.
- [36] Weinberg S. (1973), “Perturbative Calculations of Symmetry Breaking”, *Physical Review* **D7**, 2887–2910.
- [37] Coleman S. (1973), “Secret Symmetry: an Introduction to Spontaneous Symmetry Breakdown and Gauge Fields”, dans *Laws of Hadronic Matter*, édité par A. Zichichi (Academic Press, London, 1975), ou dans *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [38] Goldstone J. (1961), “Field Theories with Superconductor Solutions”, *Nuovo Cimento* **9**, 154–164;
Nambu Y. & Jona-Lasinio G. (1961), “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity”, *Physical Review* **122**, 345–358;
Goldstone J., Salam A. & Weinberg S. (1961), “Broken Symmetries”, *Physical Review* **127**, 965–970.
- [39] Englert F. & Brout R. (1964), “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Bosons”, *Physical Review Letters* **13**, 321–323;
Higgs P. W. (1964), “Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields”, *Physics Letters* **12**, 132–133;

- Guralnik G. S., Hagen C. R. & Kibble T. W. B. (1964), “Global Conservation Laws and Massless Particles”, *Physical Review Letters* **13**, 585–587.
- [40] Glashow S. L. (1961), “Partial Symmetries of Weak Interactions”, *Nuclear Physics* **B 22**, 579–588;
 Weinberg S. (1967), “A Model of Leptons”, *Physical Review Letters* **19**, 1264–1266;
 Salam A. (1968), “Weak and Electromagnetic Interactions”, dans: *Elementary Particle Theory*, édité par N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm), 367–377.
- [41] LEP Electroweak Working Group: rapport CERN-EP-2001-021 (février 2001), disponible sur le site du groupe, ou sur les archives de physique des hautes énergies (<http://xxx.lanl.gov/archive/>): hep/ex/0103048.

Théorie des groupes, mathématiques

- [42] Gilmore R. (1974), *Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications* (John Wiley & Sons, New York), 587 pages.
- [43] Georgi H. (1982), *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading), 255 pages.
- [44] O’Raifeartaigh L. (1986), *Group Structure of Gauge Theories* (Cambridge University Press, Cambridge), 172 pages.
- [45] Gourdin M. (1982), *Basics of Lie Groups* (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette), 215 pages.
- [46] Cornwell J. F. (1984), *Group Theory in Physics, volumes 1 et 2* (Academic Press, London), 933 pages.
Volume 3 (Academic Press, London, 1989), 628 pages.
- [47] Morse P. M. & Feshbach H. (1953), *Methods of Theoretical Physics, 2 volumes* (McGraw-Hill, New York), 1978 pages.
- [48] Magnus W., Oberhettinger F & Soni R. P. (1966), *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Springer-Verlag, Berlin), 508 pages.

Les valeurs expérimentales sont tirées de

- [49] Particle Data Group, “The Review of Particle Physics”, *European Journal of Physics* **C15** (2000) 1. Ou: <http://pdg.lbl.gov>

**Autres ouvrages de référence (liste non exhaustive
par ordre alphabétique)**

Théorie quantique des champs en général

- [50] Bailin D. & Love A. (1993), *Introduction to Gauge Field Theory, Revised Edition* (Adam Hilger, Bristol), 348 pages.
- [51] Bjorken J. D. & Drell S. D. (1965), *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York), 396 pages. Traduction allemande, édition de poche: B. I. Mannheim, volume 101.
- [52] Brown L. S. (1992), *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge), 542 pages.
- [53] De Wit B. & Smith J. (1986), *Field Theory in Particle Physics, volume 1* (North Holland, Amsterdam), 490 pages.
- [54] Faddeev L.D. & Slavnov A. A. (1980), *Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory* (Benjamin/Cummings, Reading), 232 pages.
- [55] Jauch J. M. & Rohrlich F. (1955), *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge), 488 pages.
- [56] Kaku M. (1993), *Quantum Field Theory, a Modern Introduction* (Oxford University Press, Oxford), 785 pages.
- [57] Mandl F. & Shaw G. (1993), *Quantum Field Theory, revised edition* (John Wiley & Sons, Chichester), 358 pages.
- [58] Nash C. (1978), *Relativistic Quantum Fields* (Academic Press, London), 223 pages.
- [59] Ryder L. H. (1985), *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge), 443 pages.
- [60] Stermann G. (1993), *An Introduction to Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge), 572 pages.

Théorie des champs et physique des particules

- [61] Cheng T.-P. & Li L.-F (1984), *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press, Oxford), 536 pages.
- [62] Leader E. & Predazzi E. (1982), *An Introduction to Gauge Theories and the 'New Physics'* (Cambridge University Press, Cambridge), 509 pages.
- [63] Lee T. D. (1981), *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Harwood Academic Publishers, Chur), 865 pages.

- [64] Quigg C. (1983), *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions* (Benjamin/Cummings, Reading), 334 pages.
- [65] Taylor J. C. (1976), *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge University Press, Cambridge), 166 pages.

Théorie des champs et physique statistique ou de la matière condensée

- [66] Abrikosov A. A., Gorkov L. P. & Dzyaloshinski I. E. (1963), *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Publications, New York), 352 pages.
- [67] Fradkin E. (1991), *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison-Wesley, Redwood City), 350 pages.
- [68] Itzykson C. & Drouffe J.-M. (1989), *Théorie statistique des champs, 2 volumes* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris) 786 pages. Traduction anglaise: *Statistical Field Theory, 2 volumes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989), 810 pages.
- [69] Le Bellac M. (1991), *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford University Press, Oxford), 592 pages.
- [70] Martin P. A. & Rothen F. (1990), *Problème à N-corps et champs quantiques* (Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne), 404 pages. Traduction anglaise à paraître chez Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [71] Parisi G. (1988), *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, Redwood City), 352 pages.
- [72] Zinn-Justin J. (1993), *Quantum Field Theory and Critical Phenomena, second edition* (Oxford University Press, Oxford), 996 pages.

Sur l'histoire du sujet

- [73] Pais, A. (1986), *Inward Bound. Of Matter and Forces in the Physical World* (Oxford University Press, New York), 666 pages.
- [74] Schweber S. S. (1994), *QED and the Men Who Made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton), 732 pages.

Index

- Action, **3**
- Adler-Bardeen, théorème d', 334
- Algèbre de Lie, **5**
- Angle
 - de Cabibbo, 318
 - de diffusion, 140
 - de mélange faible, ou de Weinberg, 181, 300, **314**, 321
- Annihilation e^+e^- , **184**
 - amplitude, 186
 - en hadrons, 190
 - section efficace, 188
- Anomalie chirale, 333, 337
 - dans le Modèle standard, 337
- Anticommutateur, 26
- Asymptotique,
 - divergence, 277, 282
 - liberté, **283**
- Belinfante, tenseur de, 45
- Bethe-Heitler, formule de, 196
- Bhabha, diffusion de, 190
- Bose-Einstein, statistique de, 52
- Boson
 - de Higgs, 218, 287, **296**, 301
 - de Goldstone, **292**, 294
 - de jauge, voir: Champ de jauge
- Bremsstrahlung*, 195
- Brisure
 - explicite d'une symétrie, 176
 - spontanée d'une symétrie, 287, **290**, 292
- Cabibbo, angle de, 318
- Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, matrice
 - de, 180, 202, 318
- Callan-Gross, relation de, 218
- Casimir, opérateur de, 15
- Champ de Klein-Gordon, **23**
- Champ de jauge, **36**
 - hamiltonien, 77
 - polarisation scalaire, 68
 - polarisations transverses, 68
 - propagateur, 87
 - relations de commutation, 72
 - somme de polarisations, 225
- Champ massif de spin un, 66, **175**
 - propagateur, 178
 - somme de polarisations, 177
- Champ pseudoscalaire, 157
- Champ scalaire complexe,
 - hamiltonien, 58
 - opérateur de charge, 57
 - opérateurs de nombre, 57
 - propagateur, 83
 - relations de commutation, 56
- Champ scalaire réel,
 - espace des états, 52
 - hamiltonien, 54
 - opérateur de nombre, 50
 - propagateur, 84
 - relations de commutation, 50
- Champ spinoriel,
 - antiparticule, 65
 - hamiltonien, 60, 64
 - impulsion, 60
 - opérateur de charge, 65
 - opérateurs de nombre, 63
 - propagateur, 85
 - relations d'anticommutation, 62, 63
- Charge
 - de Noether, **7**
 - électrique, 313
- Chirale, symétrie, 29, 35, 333
- Chiralité, 33
- Choix de jauge, 68, 70
- Chromodynamique quantique, **163**, 305
 - facteurs de couleur, 199
- Collision: voir diffusion
- Compton, diffusion, **191**
 - amplitude, 192

- section efficace (Klein-Nishina), 195
- Condition de Gupta et Bleuler, **75**
- Conjugaison de charge C , **146**
- Constante
 - de Fermi, 179, 202, **321**, 331
 - de structure, **6**, 306
 - de structure fine, 166, 188, 275, 321
 - d'Euler γ , 244
- Constante de couplage
 - de jauge, **40**
 - effective, **280**
 - forte, 165, 321, 331
 - faible, 179
- Constante de renormalisation, 262
 - de la constante de couplage de jauge, 263
 - de la fonction d'onde du fermion, 263
 - de la fonction d'onde du photon, 263
 - de la masse du fermion, 263
- Contraction, 114
- Contre-terme, 232, **234**
- Couleur, 164, 305
 - facteurs de, 199
- Coupure, *cut-off*, 240
- Courant
 - axial, 29, 156, 179
 - chargé, **317**
 - chiral, 29
 - de Noether, **7**
 - neutre, **319**
 - neutre à changement de saveur, 181, 204, **319**
 - vectorel, 156
- Courbure de jauge, **38**
- CP , **157**, 162, 318
 - violation de, 159, 180, 318
- CPT , 146, 162
- Cut-off*, coupure, 240
- D'alembertien, 324
- Dalitz, graphe de, 142
- Degré de divergence, 267
- Densité lagrangienne, **3**
- Déplacement de Lamb, 275
- Dérivée covariante de jauge, **36**
- Désintégration
 - bêta, 206
 - du muon, 206
 - amplitude, 207
 - largeur, temps de vie, 209
 - du W^\pm , 199
 - du Z^0 , 203
 - en deux particules, 137
- Diagramme de Feynman 1PI, 236
- Diffusion
 - Compton, 191
 - amplitude, 192
 - section efficace (Klein-Nishina), 195
 - de Bhabha, 190
 - électron-proton, 212
 - électron-quark, 210
 - état final à deux particules, 139
 - état final à trois particules, 140
 - inélastique profonde, 210, 215
- Dimension canonique, 40
- Dirac,
 - algèbre de, **13**
 - conjugué de, 28
 - courant, 29
 - densité lagrangienne, 27
 - équation de, **26**
 - solutions, 29, 31
 - états d'hélicité, 34
 - projecteurs d'énergie, 30
 - projecteur d'hélicité, 34
 - projecteur de spin, 33
 - spineur de, **14**
- Divergence
 - infrarouge, 256, 262
 - ultraviolette, 231
- Electrodynamique quantique, 43, 163, **165**
- Electrofaible, théorie, 305
- Energie du champ, 22
- Energie-impulsion, **20**
- Espace
 - de Fock, 51
 - de phase: intégrales, 137
- Etat
 - asymptotique, 91
 - du vide, 51, 289, 292
- Euclidien, vecteur, 244
- Euler, constante d', 244
- Euler-Lagrange, équation d', **4**

- Facteur
 - de couleur, 199
 - de forme, 214, 215, 261
 - de Landé, g , 284
 - de symétrie, 118, 122
- FCNC, 181, 204, **319**
- Fermi, constante de, 179, 202, **321**, 331
- Fermi-Dirac, statistique de, 64
- Fermions bilinéaires, 150, 155, 157, 162
 - pseudoscalaire, 155
 - scalaire, 155
 - tenseur, 155
 - vecteur, 155
 - vecteur axial, 155
- Feynman, jauge de, 71
 - paramètre de, 245, **247**
 - propagateur de, 84
 - slash*, 30, 326
 - Voir: Règles de Feynman
- Fixation de la jauge, 70
- Flavour changing neutral current*, 181, 204, **319**
- Fonction(s)
 - bêta, 281
 - théorie de jauge, 281
 - de Green, **81**, 98, 103
 - expression perturbative, 110, 173
 - 1PI, 236
 - de Lagrange, **3**
 - de vertex propre, 238, 258
 - gamma, Γ , 243
- Fonctions de structure
 - élastiques, 213
 - inélastiques, 216
- Formule, de Bethe-Heitler, 196
 - de Gell-Mann et Low, **110**
 - de Klein-Nishina, 195
 - de Rosenbluth, 212
- Furry, théorème de, 128
- Gamma, fonction, 243
- Gell-Mann et Low, formule de, **110**
- Gell-Mann, matrices de, 164
- Générateurs, 5
- Gluons, 164
- Goldstone, boson de, **292**, 294
 - théorème de, 287, **292**
- Gordon, identité de, 214, 260
- Groupe
 - de Lie, 5
 - de Lorentz, **7**, 12, 146
 - de Poincaré, **7**
 - de renormalisation, 276, **277**, 279
 - d'isotropie, 290
- Gupta et Bleuler, condition de, **75**
- Hamiltonien, **22**, 48
 - d'interaction, 108
- Hélicité, **18**, 33
 - base des états d', 34, 149
- Higgs, boson de, 218, 287, **296**, 301
 - couplage aux fermions, 219
 - désintégration en deux photons, 218
 - largeur en deux gluons, 227
 - largeur en deux photons, 225
 - largeur en fermion–antifermion, 219
 - mécanisme de, **293**
- Hypercharge faible, 305
- Identité
 - de Gordon, 214, 260
 - de Ward, 233, 261, 263, **264**, 333
 - d'une symétrie de jauge, 263, 334
 - de Ward-Takahashi, 266
- Impulsion du champ, 22
- Intégrales d'espace de phase, 137
- Interaction de Yukawa, violation de CP , 159
- Interaction faible,
 - courant chargé, 179, 317
 - courant neutre, 179, 319
- Invariance
 - d'échelle, 218
 - de jauge, **35**, 269
- Isospin faible, 305
- Jauge
 - de Feynman, 71
 - de Lorentz, 68
 - de radiation, 70, 78
 - de 't Hooft–Feynman, 304
 - renormalisable, 304
 - temporelle, 70
 - unitaire, **296**
- Klein-Gordon,
 - champ de, **23**

- équation de, 23
 - courant, 25
 - densité lagrangienne, 24
 - solution de l'équation, 24
- Klein-Nishina, formule de, 195
- Lagrange, fonction de, **3**
- Lamb, déplacement de, 275
- Landau, pôle de, 277, 282
- Landé, facteur de, 284
- Largeur de désintégration, **136**
 - en deux particules, 138
 - en trois particules, 142
 - partielle, 137
 - totale, 137
- Leptons, **165, 307**
- Levi-Civita, tenseur de, 324
- Liberté asymptotique, **283**
- Lorentz,
 - groupe de, **7, 12, 146**
 - générateurs de l'algèbre de Lie, 9
 - transformation propre
 - orthochrone, 8
 - jauge de, 68
- Majorana,
 - condition de, 152
 - masse de, 153, 213
 - spineur de, **152**
- Mandelstam, variables de, 139
- Masse, 15
 - de Majorana, 153, 312
 - des neutrinos, 312, 319
- Matrice(s)
 - de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, 180, 202, 318
 - S , 91, **92**, 109
 - de Dirac γ^μ , 13
 - représentation chirale, de Weyl, 14
 - de Gell-Mann, 164
- Mécanisme de Higgs, **293**
- Métrique de Minkowski, 8, 323
- Modèle des partons, 217
- Moindre action, principe de, 3
- Moment magnétique anormal, **262**
- Muon, désintégration, 206
 - amplitude, 207
 - largeur, temps de vie, 209
- Neutrinos, masse des, 312, 319
- Noether, théorème, courant, charge, **7**
- Nombres leptoniques, 180, 318
- Non renormalisable, théorie, **269**
- Onde
 - d'énergie négative, 24
 - d'énergie positive, 24
- Opérateur
 - de Casimir, 15
 - d'évolution, 106, 109
 - de nombre total de particules, 52
- Ordre normal, **53**
- Paramètre
 - de Feynman, 245, **247**
 - de Schwinger, 244, 247
- Parité P , 8, 146, **154**
- Partons, modèle des, 217
- Pauli-Lubanski, vecteur de, **16**
- Pauli, principe de, 64
- Petit groupe, 290
- Photon: somme de polarisations, 225
- Poincaré, groupe de, **7**
 - algèbre de Lie, **10**
- Polarisation
 - du vide, 251
 - longitudinale, 72
 - scalaire, 72
 - transverse, 72
- Pôle de Landau, 277, 282
- Potentiel scalaire effectif, 292
- Principe
 - de moindre action, 3
 - d'exclusion de Pauli, 64
- Proca, équation de, 67, 176
- Produit chronologique, **81**
- Projecteur
 - de chiralité, 15
 - d'énergie, 30
 - d'hélicité, 34
 - de spin, 33
- Propagateur de Feynman, ou causal, 84
 - du champ de jauge, 87
 - du champ massif de spin un, 178
 - du champ scalaire complexe, 83
 - du champ scalaire réel, 84
 - du champ spinoriel, 85
- Propagateur inverse, 236

- QCD, **163**, 305
 - facteurs de couleur, 199
- QED, 43, 163, **165**
- Quarks, **165**, **307**
- Rapport de branchement, 137
- Rayonnement de freinage, 195
- Réduction, 92, **95**, 103
 - champ scalaire, 99
 - fermions, 100, 104
 - photons, 105
- Règles de commutation, voir: Relations de commutation
- Règles de Feynman,
 - champ scalaire, espace de configuration, 118
 - champ scalaire, espace des impulsions, 121
 - électrodynamique quantique, 127, 130, 167
 - interaction à quatre gluons, 168
 - interaction de jauge trlinéaire, 174
 - interaction dérivative, 168
 - interaction faible, courant chargé, 180
 - interaction faible, courant neutre, 181
 - interaction γ - W^+ - W^- , 320
 - interaction quark-gluon, 167
 - interaction scalaire dérivative, 175
 - interaction Z^0 - W^+ - W^- , 320
- Régularisation, 232, 242
 - dimensionnelle, **243**
- Relation de Callan-Gross, 218
- Relations de commutation
 - à temps égaux, 48
 - canoniques, **48**
 - champ de jauge (jauge de Feynman), 72
 - champ scalaire complexe, 56
 - champ scalaire réel, 50
 - champ spinoriel, 62, 63
- Renormalisabilité, **267**
- Renormalisable, théorie, 232, 263, **267**, 269
- Renormalisation,
 - constantes de, 262
 - groupe de, 276, **277**, 279
 - schéma de, 252, 255, 259, 263, 271
- Renversement du temps T , 9, 146, **159**
- Représentation chirale, de Weyl, 14
- Rosenbluth, formule de, 212
- Rotation de Wick, 246
- Running coupling constant*, 280
- Schéma de renormalisation ou schéma de soustraction, 252, 255, 259, 263, 271
 - “à l’échelle M ”, **272**, 278
 - minimale, **271**, 272, 276
 - sur la couche de masse, 253, 255, 257, 259, **262**, 271, 275
- Schwinger, paramètre de, 244, 247
- Section efficace, 131, **133**
 - différentielle, 133
 - référentiel du laboratoire, 133
 - état final à deux particules, 140
 - fermions, 135
 - inclusive, 134
 - polarisations, 134
 - totale, 134
- Self-énergie du fermion, 236, 253, 257
- Somme de polarisations,
 - photon, 225
 - champ massif de spin un, 177
- Spin, **17**
- Spineur
 - de Dirac, **14**
 - de Majorana, **152**
 - de Weyl, 15
- Stabilisateur, 290
- Statistique
 - de Bose-Einstein, 52
 - de Fermi-Dirac, 64
- $SU(N)$, groupe, algèbre de Lie, **306**
- $SU(3)$, **164**
- Symétrie, 5
 - brisure explicite, 176
 - brisure spontanée, 287, **290**, 292
 - chirale, 29, 35, 333
 - de jauge, 5, **36**, 269
 - d’espace-temps, 7
 - globale, 5
 - interne, 5
- T : produit chronologique, **81**
- T : renversement du temps, 9, 146, **159**
- τ^- , temps de vie, 209

- Tachyon, 16
- Temps de vie, 136
- Tenseur
 - de Belinfante, 45
 - de Levi-Civita, 324
 - énergie-impulsion, **20**
- Théorème
 - d'Adler-Bardeen, 334
 - CPT*, 146
 - de Furry, 128
 - de Goldstone, 287, **292**
 - de Noether, symétrie d'espace-temps, 22
 - de Noether, symétrie interne, 7
 - de Wick, 112
 - champ scalaire, 113, 114
 - fermions, 116
- Théorie
 - asymptotique, 92
 - chirale, 156
 - de jauge, densité lagrangienne, 42
 - des perturbations, 106
 - électrofaible, 305
 - non renormalisable, **269**
 - renormalisable, 232, 263, **267**, 269
 - vectorielle, 156
- 't Hooft–Feynman, jauge de, 304
- Translations, 10, 11
- Uehling, terme de, 275
- $U(N)$, groupe, algèbre de Lie, **306**
- Unimodularité, 306
- Unitaire, jauge, **296**
- Valeur moyenne dans le vide, 287
- Variables de Mandelstam, 139
- Vecteur
 - de Pauli-Lubanski, **16**
 - de polarisation, 71
- Violation de CP , 159, 180, 318
- W^\pm ,
 - largeur hadronique, 203
 - largeur leptonique, 202
 - largeur totale, 203
 - rapports de branchement, 203
- Ward, identité de, 233, 261, 263, **264**, 333
 - symétrie de jauge, 263, 334
- Ward-Takahashi, identité de, 266
- Weinberg, angle de, 181, 300, **314**, 321
- Weyl, spineur de, 15
- Wick,
 - rotation de, 246
 - théorème de, **112**
- Yang-Mills, densité lagrangienne de, **38**
- Yukawa, interaction de, 41, 311
 - violation de CP dans les interactions de, 159
- Z^0 , largeurs leptonique, hadronique, invisible, totale, 205