Maths Devoir Maison 5

7 Janvier, 2024

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Question 1

b.

Question 2

a.

Question 3

c.

Question 4

b.

Question 5

b.

Question 6

b.

Exercice 2

Partie A

1. a.

$$lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$lim_{x \to -\infty}\ 0.5\ x - 2 = -\infty$$

$$lim_{x \to -\infty} e^{0.5\ x-2} = lim_{X to -\infty} e^{X} = 0$$

$$lim_{x \to -\infty} 1 + x - e^{0.5\ x-2} = -\infty$$

   b.

$$f(x) = 1 + x + e^{0.5\ x-2} = 1 + 0.5\ x\left(2 - 2e^{0.5\ x-2}\right) = 1 + 0.5\ x\left(2 - \frac{e^{0.5\ x}}{0.5\ x} \times e^{-2}\right)$$

2. a.

$$f(x) = 1 + x - e^{X}$$

$$f'(x) = 1 - X'(x)e^{X}$$

$$X(x) = 0.5\ x - 2$$

$$X'(x) = 0.5$$

$$f'(x) = 1 - 0.5\left(e^{0.5\ x-2}\right)$$

b.

$$1 - 0.5\left(e^{0.5\,x-2}\right) < 0$$

$$-\,0.5\left(e^{0.5\,x-2}\right) < -1$$

$$e^{0.5\,x-2} > 2$$

$$0.5\,x - 2 > ln(2)$$

$$x > 2(ln(2) + 2)$$

$$x > 4 + 2ln(2)$$

Donc $f'(x) < 0$ quand $x \in]4 + 2ln(2); +\infty[$

3.

x	$-\infty$		$4 + 2ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2ln(2) + 3$	$\searrow$	$-\infty$

4. On montre que la fonction $f(x) = 1 + x - e^{0.5\,x-2}$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$.

La fonction $x \mapsto 1 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{0.5\,x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction exponentielle. La somme, la composition et la multiplication de fonctions continues sont continues, donc $f(x) = 1 + x - e^{0.5\,x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $f(x)$ est continue sur $[-1; 0]$.

D'après le tableau de variation $f(x)$ est croissante sur $[-1; 0]$ car $0 < 4 + 2ln(2) \approx 5.4$ Finalement $f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0.9$ et $f(1) = 2 - e^{-\,1.5} \approx -\,0.08$ Donc $0 \in \left[1 - e^{-2}; 2 - e^{-\,1.5}\right]$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$

Partie B

1. a.