m dm 18 09 2023

16 Septembre, 2023

Lucas

Exercice 1:

1.
$f_1'(x) = 2x^2 + x - 6$
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_1'(x) = 0$
$2x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 1 - 4*2*(-6)$
$\Delta = 49$
$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$

Variation/Signe	Interval
positif	pour x < -2
zéro	à x = -2
négatif	pour -2<x<3/2
zéro	at x = 3/2
positif	pour x>3/2
croissante	de -inf à -2
décroissante	de -2 à 3/2
croissante	de 3/2 à +inf

2.
$f_2'(x) = \frac{-11}{(4x-3)^2}$
Valeurs interdites :
$4p - 3 = 0$
$4p = 3$
$p = \frac{4}{3}$

$x \neq \frac{4}{3}$
Ensemble de définition:
$f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

Variation/Signe	Interval
négatif	de -inf à 3/4
indéfini	à 3/4
négatif	de 3/4 à +inf
décroissante	de -inf à 3/4
indéfini	at 3/4
décroissante	de 3/4 à +inf

3.
$f_3{}'(x) = e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}}$
Ensemble de définition :
$f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

Variation/Signe	Interval
positif	on 0<x à +inf
croissante	on 0<x à +inf

Exercice 2

1. elle prend deux arguments f et x soit une fonction et un nombre
2. Le résultat est ‹ positif ›
3. elle donne le signe d'un nombre après avoir appliqué une fonction f
4.

a. L'instruction lambda sert à définir une fonction anonyme (sans nom)
b. ‹ positif ›

5.

```
from math import *
def racine(f, x):
  if (2*f(x)-1)>=0:
    return sqrt(2*f(x)-1)
  else:
    return 'non défini'

def f(x):
  return 5-2*x

print(racine(f, -5))
print(racine(f, 10))
```

6. $x = -5 \to y = 5.385164807134504$
   $x = 10 \to 'non\ d\acute{e}fini'$

Exercice 3

Soit à démontrer:
$(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation:
pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{x} k^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:
On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$
On va montrer que :
$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1$$

$$= \frac{2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 12p + 6}{6}$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{\left(p^2 + 3p + 2\right)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{2^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang p+1

Conclusion:
D'après le principe de récurrence pour àut entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4

On commence par calculer l'aire d'un cercle en posant x comme le périmètre du cercle:

$A = \pi r^2$ et $P = 2\pi r$

soit $r = \frac{P}{2\pi}$
donc $A_c(x) = \frac{\pi x^2}{4\pi^2}$
On calcule l'aire du triangle équilatéral avec $(1-x)$ comme le périmètre du triangle

$A_te = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ avec $a = \frac{(1-x)}{3}$ donc comme un côté du triangle
$\Rightarrow A_te(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1-x}{3}\right)^2$

On obtient l'aire totale

$$A_t(x) = \frac{\pi x^2}{4\pi^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1-x}{3}\right)^2$$

$$A_t(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{18}\sqrt{3}(1-2x+x^2)$$

Pour miniser A_t on calcule sa dérivée

$$A_t'(x) = \frac{8x\pi}{(4\pi)^2} + \frac{1}{18}\sqrt{3}(2x-2)$$

$$A_t'(x) = \frac{8\pi}{(4\pi)^2}x + \frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

On calcule maitenant la racine de A_t'

$$A_t'(x) = 0$$

$$\frac{8\pi}{(4\pi)^2}x + \frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{9} = 0$$

$$x\left(\frac{8\pi}{(4\pi)^2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right) - \frac{\sqrt{3}}{9} = 0$$

$$x(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$x\left(\frac{2\sqrt{3}\pi+9}{18\pi}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{9} * \frac{18\pi}{2\sqrt{3}\pi+9}$$

$$x = \frac{18\sqrt{3}\pi}{18\sqrt{3}\pi+81}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{3}\pi+9}$$

$x \approx 0.55\ m$
Donc la longeur du morceaux formant le cercle est d'environ 0.55m
et celle formant le triangle équilatéral :

$(1-x) = \frac{2\sqrt{3}\pi+9-2\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{3}\pi+9}$

$(1-x) = \frac{9}{2\sqrt{3}\pi+9}$

$(1-x) \approx 0.45$

La longeur du deuxième morceaux est d'environ 0.45m

<u>Maths DM</u>