Maths Devoir Maison 5

8 Janvier, 2024

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Question 1

b.

Question 2

a.

Question 3

c.

Question 4

b.

Question 5

b.

Question 6

b.

Exercice 2

Partie A

1. a.
$$\mathrm{lim}_{x \longrightarrow -\infty} x = -\infty$$
$$\mathrm{lim}_{x \longrightarrow -\infty} 0.5x - 2 = -\infty$$
$$\mathrm{lim}_{x \longrightarrow -\infty} e^{0.5x-2} = \mathrm{lim}_{X to -\infty} e^{X} = 0$$
$$\mathrm{lim}_{x \longrightarrow -\infty} 1 + x - e^{0.5x-2} = -\infty$$

   b.
$$f(x) = 1 + x + e^{0.5x-2} = 1 + 0.5x\left(2 - 2e^{0.5x-2}\right) = 1 + 0.5x\left(2 - \frac{e^{0.5x}}{0.5x} \times e^{-2}\right)$$

2. a.

$$f(x) = 1 + x - e^X$$
$$f'(x) = 1 - X'(x)e^X$$
$$X(x) = 0.5x - 2$$
$$X'(x) = 0.5$$
$$f'(x) = 1 - 0.5\left(e^{0.5x-2}\right)$$

b.

$$1 - 0.5\left(e^{0.5x-2}\right) < 0$$
$$-0.5\left(e^{0.5x-2}\right) < -1$$
$$e^{0.5x-2} > 2$$
$$0.5x - 2 > \ln(2)$$
$$x > 2(\ln(2) + 2)$$
$$x > 4 + 2\ln(2)$$

Donc $f'(x) < 0$ quand $x \in]4 + 2\ln(2); +\infty[$

3.

x	$-\infty$		$4 + 2ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2ln(2) + 3$	$\searrow$	$-\infty$

4. On montre que la fonction $f(x) = 1 + x - e^{0.5x-2}$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$.

La fonction $x \mapsto 1 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{0.5x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction exponentielle. La somme, la composition et la multiplication de fonctions continues sont continues, donc $f(x) = 1 + x - e^{0.5x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $f(x)$ est continue sur $[-1; 0]$.

D'après le tableau de variation $f(x)$ est croissante sur $[-1; 0]$ car $0 < 4 + 2\ln(2) \approx 5.4$ Finalement $f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0.9$ et $f(1) = 2 - e^{-1.5} \approx -0.08$ Donc $0 \in [1 - e^{-2}; 2 - e^{-1.5}]$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$

Partie B

1. a.

Soit à démontrer: P(n): « $u_n \le u_{n+1} \le 4$ »

Initialisation: au rang $n = 0$ $u_0 = 0$ $u_1 = f(0) = 1 + 0 - e^{-2} = 1 - e^{-2} > 0$

$4 \ge 1 - e^{-2} \ge 0$ Donc la propriété est initialisée.

Hérédité: On suppose qu'il existe un entier k naturel tel que $u_k \le u_{k+1} \le 4$ On cherche à démontrer que la propriété est vraie au rang suivant.

On sait que sur $[0; 4]$ f est croissante. Donc $f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(4)$ $u_{k+1} \le u_{k+2} \le 1 + 4 - e^{0.5\times4-2} = 4$

Par conséquent la propriété est héréditaire.

Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire selon le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \le u_{n+1} \le 4$

b. On sait que f est un fonction continue sur $[0; 4]$ et que pour tout entier appartenant à $[0; 4]$ (u_n) est une suite à valeurs dans $[0; 4]$; De plus (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle converge vers un réel l appartenant à $[0; 4]$ et l est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$

$1 + x - e^{0.5x-2} = x$ $1 + x - x = e^{0.5x-2}$ $\ln(1) = 0.5x - 2$ $4 + 2\ln(1) = x$ $4 = x$ Donc $l = 4$

2. On en déduit que pour que $u_n \ge 3.99$, $n \ge 12$