Analyse 1 Cours 3

18/09/2024

2024-09-18

Lucas Duchet-Annez
EPFL
2024/2025
Génie Mécanique

1 Rappel

Si A est minoré son infimum est le réel s

1. $s \leq x, \forall x \in A$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s \leq x \leq s + \varepsilon$

2 Solutions de $x^2 = 2$

2.1 Théorème

$\exists x > 0, x^2 = 2$

2.2 Preuve

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}_+^* : x^2 < 2\}$ Ex: $1 \in A, 2 \notin A$

Lemme A n'a pas de $\max(A)$

Preuve

Soit $x \in A$, $x' := x + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ On a $x'^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$

$$x'^2 \leq x^2 + \frac{2x+1}{n}$$

Prenons n tq $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$ sachant que $2 - x^2 > 0$

$x'^2 \leq x^2 + \frac{2x+1}{n} < x^2 + 2 - x^2 = 2$ Ainsi $x' \in A$ A n'a pas de $\max(A)$

Remarque A est majoré, par $M = 2$. En effet $\forall x > 3, x^2 > 9 > 2, x \notin A$

Considérons $s := \sup(A)$

Lemme 2 $s^2 = 2$

Preuve 2 On va montrer que
$s^2 \geq 2$ Comme A n'a pas de max. $s^2 \leq 2$ Soit $M := \frac{2+s^2}{2s}$

$$\begin{aligned} x^2 = (s + (x - s))^2 &= s^2 + 2s(x - s) + (x - s)^2 \\ &\geq s^2 + 2s(x - s) \\ &> s^2 + 2s(M - s) \\ &= s^2 + 2s\left(\frac{2+s^2}{2s} - s\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$x \notin A$ alors $x \leq M$ donc M majore A. Or s est le $\sup(A)$ donc $s \leq M$

$$s \leq \frac{2+s^2}{2}s$$

$$2s^2 \leq 2 + s^2$$

$$s^2 \leq 2$$

Ainsi $s^2 = 2$ On appelle $s = \sqrt{2}$

2.3 Théorème

$$\forall y > 0 \ \exists x > 0, x^2 = y$$

Donc $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \to f(x) = x^2$ est une bijection. Sa réciproque s'appelle la fonction racine carrée. $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \to f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

2.4 Théorème

$$\forall y > 0 \ \exists x > 0, x^n = y$$

Donc $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \to f(x) = x^n$ est une bijection. Sa réciproque s'appelle la fonction racine carrée. $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \to f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

3 Densité

3.1 Définition

Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dense (dans $\mathbb{R}$) si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists z \in E$ tq $x < z < y$

3.2 Théorème

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

3.3 Définition

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor :=$ plus grand entier n $\in \mathbb{Z}$ tq $n \leq x$

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

3.3.1 Preuve

Soit $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ Posons $r := \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$ tq $n > \frac{1}{y-x}$ $r \in \mathbb{Q}$

$$\frac{nx}{n} < r \leq \frac{nx+1}{n}$$

$$x < r \leq x + \frac{1}{n}$$

$$x < r \leq x + y - x$$

$$x < r < y$$

Ainsi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

3.4 Corollaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r = \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \text{ tq } \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon$$

3.5 Théorème 2

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

4 Ensembles ouverts et fermés

4.1 Définition

$G \subset \mathbb{R}$ est ouvert si $\forall x \in G, \exists \varepsilon > 0$ tq, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G$

$F \subset \mathbb{R}$ est fermé si son complémentaire $F^c := \mathbb{R} \setminus F$ est ouvert

4.1.1 Ex

1. $G =]0, 1[$ est ouvert
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$

4.2 Propriété

Soit $G, F \subset \mathbb{R}$ ouvert alors $G \cup F$ est ouvert

4.2.1 Ex

1. $\mathbb{Z}$ est fermé car $\mathbb{Z}^c = \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ ouvert
2. $[a, b[$ n'est pas ouvert car $\forall \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\not\subset [a, b[$

$([a, b[)^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$ n'est pas ouvert donc $[a, b[$ n'est pas fermé

1. $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, ni fermé pareil pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

5 Suites réelles

5.1 Définition

Une suite est une famille infinie de réels indexée par des entiers $\iff f : F \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$