## Maths Devoir Maison 5

8 Janvier, 2024

## **Lucas Duchet-Annez**

## Exercice 1

Question 1

b.

Question 2

a.

Question 3

c.

Question 4

b.

Question 5

b.

Question 6

h.

## Exercice 2

Partie A

1. a.

$$lim_{x\to -\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 0.5 \, x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{0.5 x - 2} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + x - e^{0.5 \, x - 2} = -\infty$$

b. 
$$f(x) = 1 + x + e^{0.5 x - 2} = 1 + 0.5 x (2 - 2e^{0.5 x - 2}) = 1 + 0.5 x (2 - \frac{e^{0.5 x}}{0.5 x} \times e^{-2})$$

2. a.

$$f(x) = 1 + x - e^{X}$$

$$f'(x) = 1 - X'(x)e^{X}$$

$$X(x) = 0.5 x - 2$$

$$X'(x) = 0.5$$

$$f'(x) = 1 - 0.5 (e^{0.5 x - 2})$$

b.

$$1 - 0.5 (e^{0.5 x - 2}) < 0$$

$$- 0.5 (e^{0.5 x - 2}) < -1$$

$$e^{0.5 x - 2} > 2$$

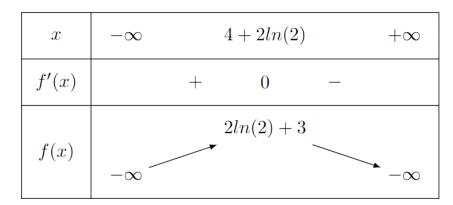
$$0.5 x - 2 > ln(2)$$

$$x > 2(ln(2) + 2)$$

$$x > 4 + 2ln(2)$$

Donc f'(x) < 0 quand  $x \in ]4 + 2ln(2); +\infty[$ 

3.



4. On montre que la fonction  $f(x) = 1 + x - e^{0.5 \times x - 2}$  est continue sur l'intervalle [-1; 0].

La fonction  $x\mapsto 1+x$  est continue sur  $\mathbb R$ . La fonction  $x\mapsto e^{0.5\,x-2}$  est continue sur  $\mathbb R$  car c'est une fonction exponentielle. La somme, la composition et la multiplication de fonctions continues sont continues, donc  $f(x)=1+x-e^{0.5\,x-2}$  est continue sur  $\mathbb R$ .

En particulier, f(x) est continue sur [-1; 0].

D'après le tableau de variation f(x) est croissante sur [-1;0] car  $0 < 4 + 2ln(2) \approx 5.4$  Finalement  $f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0.9$  et  $f(1) = 2 - e^{-1.5} \approx -0.08$  Donc  $0 \in [1 - e^{-2}; 2 - e^{-1.5}]$ 

Selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation f(x) = 0 a une unique solution sur l'intervalle [-1;0]

Partie B

1. a.

Soit à démontrer: P(n): «  $u_n \le u_{n+1} \le 4$  »

Initialisation: au rang n = 0  $u_0 = 0$   $u_1 = f(0) = 1 + 0 - e^{-2} = 1 - e^{-2} > 0$ 

 $4 \ge 1 - e^{-2} \ge 0$  Donc la propriété est initialisée.

Hérédité: On suppose qu'il existe un entier k naturel tel que  $u_k \le u_{k+1} \le 4$  On cherche à démontrer que la propriété est vraie au rang suivant.

On sait que sur [0;4] f est croissante. Donc  $f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(4)$   $u_{k+1} \le u_{k+2} \le 1 + 4 - e^{0.5 \times 4 - 2} = 4$ Par conséquent la propriété est héréditaire.

Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire selon le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a:  $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ 

b. On sait que f est un fonction continue sur [0;4] et que pour tout entier appartenant à [0;4]  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans [0;4]; De plus  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4 donc elle converge vers un réel l appartenant à [0;4] et l est l'une des solutions de l'équation f(x) = x

$$1 + x - e^{0.5 \times -2} = x + x - x = e^{0.5 \times -2} \ln(1) = 0.5 \times -24 + 2\ln(1) = x + 4 = x \text{ Donc } l = 4$$

2. On en déduit que pour que  $u_n \ge 3.99$ ,  $n \ge 12$