Maths

Devoir Maison n°8

2024-05-12

Lucas Duchet-Annez (Rédacteur) et Ugo Thomas
Fénelon Notre-Dame
2023/2024
Terminale B

Exercice 2

1

Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

On a $\cos(\theta) = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow AD = \frac{4}{\cos(\theta)}$ et $\tan(\theta) = \frac{BD}{4} \Leftrightarrow BD = 4\tan(\theta)$
De plus $CD = CB + BD$ donc $CD = 7 + 4\tan(\theta)$

60 km/h $= \frac{50}{3}$ m/s et 30 km/h $= \frac{25}{3}$ m/s

$v = \frac{d}{t}$

Ainsi $t_1 = AD \times \frac{3}{25} = \frac{12}{25\cos(\theta)}$ et $t_2 = CD \times \frac{3}{50} = \frac{21+12\tan(\theta)}{50}$

2

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

Pour que le lapin travserse avant le passage du camion il faut que la relation suivante soit vraie

$$t_1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{21 + 12\tan(\theta)}{50} > \frac{12}{25\cos(\theta)}$$

$$\Leftrightarrow 21\cos(\theta) + 12\sin(\theta) > 24$$

$$\Leftrightarrow 12\tan(\theta) - \frac{24}{\cos(\theta)} + 21 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)} + \frac{7}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow f(\theta) > 0$$

Ainsi pour que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$

3

Conclure.

On cherche les variations de f

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ avec } v = \cos(\theta) \text{ on a } v'(\theta) = -\sin(\theta)$$

Ainsi

$$\left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)' = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$$

et

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos(\theta)^2} - 4\frac{\sin(x)}{\cos(\theta)^2}$$

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos(\theta)^2}(1 - 2\sin(\theta))$$

$$f'(\theta) > 0$$

$$\Longleftrightarrow 1 - 2\sin(\theta) > 0 \quad \text{car} \quad \frac{2}{\cos(\theta)^2} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin(\theta) < \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$$

Par conséquent f est croissante sur $[0; \frac{\pi}{6}[$ et décroissante sur

$$]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$$

La fonction $\theta \to \frac{1}{\cos(\theta)}$ est continue sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ car c'est la composée de la fonction cosinus (continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$) et de la fonction $\theta \to \frac{1}{x}$ (continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$). De plus, la fonction $\theta \to \tan(\theta)$ est continue sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction f est donc continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ comme somme et produit de fonctions continues sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}[$

f est continue et strictement croissante $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7-4\sqrt{3}}{2} \approx 0.03 > 0$ donc

$$0 \in [-\frac{1}{2}; \frac{7-4\sqrt{3}}{2}[$$

Selon le théorème de la bijection

$$f(\theta) = 0$$

a une solution sur $[0; \frac{\pi}{6}[$ notée α

Sur l'intervalle $]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$ f est continue et strictement décroissante

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7-4\sqrt{3}}{2} \approx 0.03 > 0$$

et

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} f(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{7}{2} + 2\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{4}{\cos(\theta)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)} \left(\frac{7}{2}\cos(\theta) + 2\sin(\theta) - 4 \right)$$

$$\lim_{\theta \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos(\theta)} = +\infty$$

$$\lim_{\theta \to (\frac{\pi}{2})^-} \cos(\theta) = 0$$

$$\lim_{\theta \to (\frac{\pi}{2})^-} \sin(\theta) = 1$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} f(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)}(1-4) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)}(-3) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} -\infty$$

Donc

$$0 \in]-\infty; \frac{7-4\sqrt{3}}{2}[$$

Selon le théorème de la bijection

$$f(\theta) = 0$$

a une solution sur $]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$ notée β

Ainsi le domaine de la solution est $[\alpha; \beta]$

On trouve approximativement à l'aide de la calculatrice par balayage $\alpha \approx 0.395$ et $\beta \approx 0.644$
Par conséquent le lapin survivra si l'angle θ est entre 0.395 radians et 0.644 radians