

m dm 18 09 2023

10 Septembre, 2023

Lucas

Exercice 1:

1.

$$f_1'(x) = 2x^2 + x - 6$$

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1'(x) = 0$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-8}{4} = -2$$

Variation	Interval
positive	on $x < -2$
zero	at $x = -2$
negative	on $-2 < x < 3/2$
zero	at $x = 3/2$
positive	on $x > 3/2$
increase	from $-\infty$ to -2
decrease	from -2 to $3/2$
increase	from $3/2$ to $+\infty$

2.

$$f_2'(x) = \frac{-11}{(4x-3)^2}$$

Valeurs interdites : $4p - 3 = 0 \Rightarrow 4p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4} \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$

Ensemble de définition $f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

Variation	Interval
negative	from $-\infty$ to $3/4$
not defined	at $3/4$
negative	from $3/4$ to $+\infty$
decrease	from $-\infty$ to $3/4$
not defined	at $3/4$
decrease	from $3/4$ to $+\infty$

3.

$$f_3'(x) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}} \quad f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Variation	Interval
positive	on $0 < x$ to $+\infty$
increase	on $0 < x$ to $+\infty$

Exercice 2

- elle prend deux arguments f et x soit une fonction et un nombre
- Le résultat est < positif >
- elle donne le signe d'un nombre après avoir appliqué une fonction f
- L'instruction lambda sert à définir une fonction anonyme (sans nom)
 - < positif >
-

```
from math import *
def racine(f, x):
    if (2*f(x)-1)>=0:
        return sqrt(2*f(x)-1)
    else:
        return 'non défini'
```

```
def f(x):
    return 5-2*x
```

```
print(racine(f, -5))
print(racine(f, 10))
```

- $x = -5 \rightarrow y = 5.385164807134504$ $x = 10 \rightarrow$ < non défini >

Exercice 3

Soit à démontrer:

$$(P_n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Initialisation:

pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x k^2 &= 1 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$

On va montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1$$

$$= \frac{2p^3 + 3p^2 + p + 6p^2 + 12p + 6}{6}$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{(p^2 + 3p + 2)(2p + 3)}{6}$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

donc la propriété (P_n) est vraie au rang $p+1$

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Maths DM