

m exercices 11 09 2023

24 Septembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Soit à démontrer:

$$(P_n) : \sum_{k=1}^n (k) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation:

pour $n=1$ $\sum_{k=1}^1 (k) = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc (P_n) est vraie pour $n = 1$.

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$

$$\sum_{k=1}^p (k) = 1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$\sum_{k=1}^{p+1} (k) = 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p+1) = \frac{(p+1)(p+1+1)}{2}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p^2+2p+p+2}{2}$$

$$= \frac{p^2+3p+2}{2}$$

ou

$$\sum_{k=1}^{p+1} (k) = \sum_{k=1}^p (k) + p + 1$$

$$= \frac{p(p+1)}{2} + p + 1$$

$$= \frac{p^2+3p+2}{2}$$

donc (P_n) est vraie au rang $p + 1$

$\Rightarrow (P_n)$ est héréditaire

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (k) = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 19 p 27

Soit à démontrer:

$$(P_n) : u_n = \frac{n}{n+1}$$

Initialisation:

pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$ donc la propriété (P_n) est vraie.

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang $n = k$

$$u_k = \frac{k}{k+1}$$

On va montrer que la propriété est vraie au rang $k + 1$:
 $(P_{k+1}) : u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2 - u_k} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} \\ &= \left(\frac{2k + 2 - k}{k + 1} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{k + 2}{k + 1} \right)^{-1} \\ &= \frac{k + 1}{k + 2} \end{aligned}$$

donc (P_n) est héréditaire

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$

Maths Exercices