Maths Devoir Maison 5

8 Janvier, 2024

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Question 1

b.

Question 2

a.

Question 3

c.

Question 4

b.

Question 5

b.

Question 6

b.

Exercice 2

Partie A

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 0.5x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{0.5x-2} = \lim_{Xto-\infty} e^X = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + x - e^{0.5x - 2} = -\infty$$

b.
$$f(x) = 1 + x + e^{0.5x - 2} = 1 + 0.5x \left(2 - 2e^{0.5x - 2}\right) = 1 + 0.5x \left(2 - \frac{e^{0.5x}}{0.5x} \times e^{-2}\right)$$

2. a.

$$f(x) = 1 + x - e^{X}$$

$$f'(x) = 1 - X'(x)e^{X}$$

$$X(x) = 0.5x - 2$$

$$X'(x) = 0.5$$

$$f'(x) = 1 - 0.5(e^{0.5x-2})$$

b.

$$1 - 0.5(e^{0.5x-2}) < 0$$

$$-0.5(e^{0.5x-2}) < -1$$

$$e^{0.5x-2} > 2$$

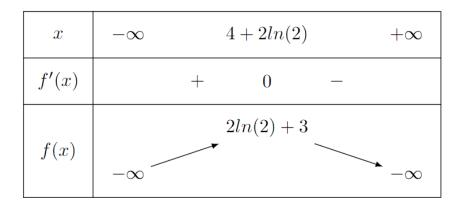
$$0.5x - 2 > \ln(2)$$

$$x > 2(\ln(2) + 2)$$

$$x > 4 + 2\ln(2)$$

Donc f'(x) < 0 quand $x \in]4 + 2\ln(2); +\infty[$

3.



4. On montre que la fonction $f(x) = 1 + x - e^{0.5x-2}$ est continue sur l'intervalle [-1; 0].

La fonction $x\mapsto 1+x$ est continue sur $\mathbb R$. La fonction $x\mapsto e^{0.5x-2}$ est continue sur $\mathbb R$ car c'est une fonction exponentielle. La somme, la composition et la multiplication de fonctions continues sont continues, donc $f(x)=1+x-e^{0.5x-2}$ est continue sur $\mathbb R$.

En particulier, f(x) est continue sur [-1; 0].

D'après le tableau de variation f(x) est croissante sur [-1;0] car $0 < 4 + 2\ln(2) \approx 5.4$ Finalement f(0) = $1 - e^{-2} \approx 0.9$ et f(1) = $2 - e^{-1.5} \approx -0.08$ Donc $0 \in [1 - e^{-2}; 2 - e^{-1.5}]$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation f(x) = 0 a une unique solution sur l'intervalle [-1;0]

Partie B

1. a.

Soit à démontrer: P(n): « $u_n \le u_{n+1} \le 4$ »

Initialisation: au rang n = 0 $u_0 = 0$ $u_1 = f(0) = 1 + 0 - e^{-2} = 1 - e^{-2} > 0$

 $4 \ge 1 - e^{-2} \ge 0$ Donc la propriété est initialisée.

Hérédité: On suppose qu'il existe un entier k naturel tel que $u_k \le u_{k+1} \le 4$ On cherche à démontrer que la propriété est vraie au rang suivant.

On sait que sur [0;4] f est croissante. Donc $f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(4)$ $u_{k+1} \le u_{k+2} \le 1 + 4 - e^{0.5 \times 4 - 2} = 4$

Par conséquent la propriété est héréditaire.

Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire selon le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \le u_{n+1} \le 4$

b. On sait que f est un fonction continue sur [0;4] et que pour tout entier appartenant à [0;4] (u_n) est une suite à valeurs dans [0;4]; De plus (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle converge vers un réel l appartenant à [0;4] et l est l'une des solutions de l'équation f(x) = x

$$1 + x - e^{0.5x-2} = x \ 1 + x - x = e^{0.5x-2} \ln(1) = 0.5x - 2 \ 4 + 2\ln(1) = x \ 4 = x$$
 Donc $1 = 4$

2. On en déduit que pour que $u_n \ge 3.99$, $n \ge 12$