

# Maths Devoir Maison 2

30 Octobre, 2023

**Lucas Duchet-Annez**

## Exercice 1

### Partie A

1.

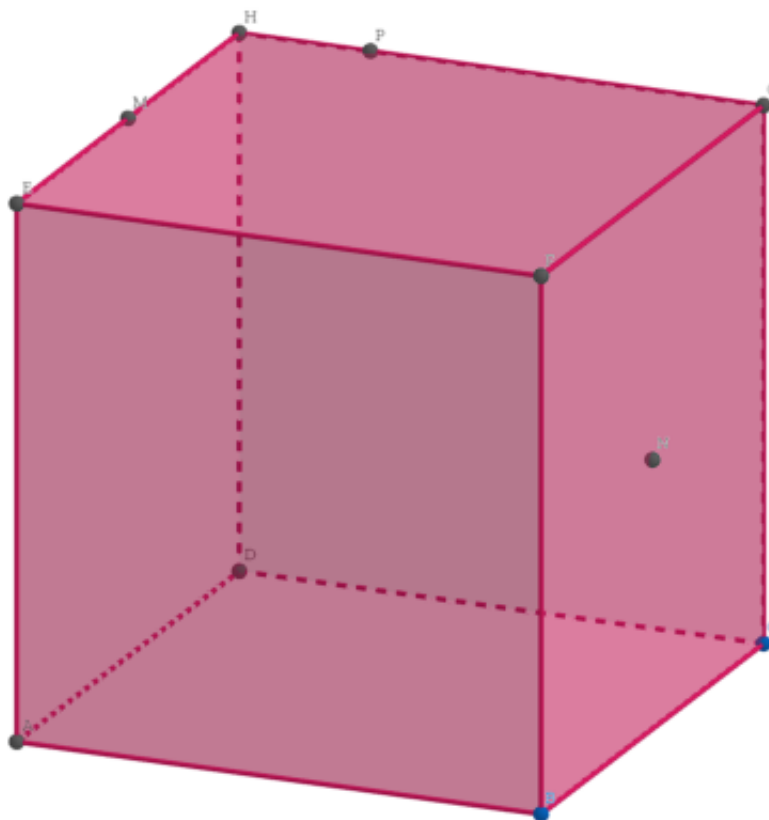


Figure 1: Cube

2. Les points  $M, P, F, G$  sont coplanaires si et seulement si  $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MF} + b\overrightarrow{MG}$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} \text{ (Chasles)}$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} \text{ (Données)}$$

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} \text{ (Chasles)}$$

$$\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{HG} \text{ (Car EFGH est un carré)}$$

$$\overrightarrow{MF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Données)}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Chasles)}$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Données)}$$

On peut transcrire le problème sous forme d'un système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4} = a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{4} - a = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - a\right) = -\frac{1}{2}a \\ b = \frac{1}{4} - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left( -\frac{3}{8}; \frac{5}{8} \right) \right\}$$

donc  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MF}$  sont coplanaires  $\Rightarrow M, P, E, G$  sont coplanaires

b.  $(MP)$  et  $(FG)$  sont parallèles si et seulement si  $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{FG}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \text{ (Question précédente) } \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} \text{ (car EFGH est un carré)}$$

On peut poser le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible

donc  $(MP)$  et  $(FG)$  ne sont pas parallèles.

## Partie B

- On sait que  $(MP) \subset (EHG)$  et  $(FG) \subset (EHG)$  donc que  $(MP)$  et  $(FG)$  sont coplanaires Or  $(MP)$  et  $(FG)$  ne sont pas parallèles d'après la question précédente et deux droites coplanaires sont soit parallèles ou sécantes donc  $(MP)$  et  $(FG)$  sont sécantes en un point d'intersection  $L$

$$(LN) \subset (FGC)$$

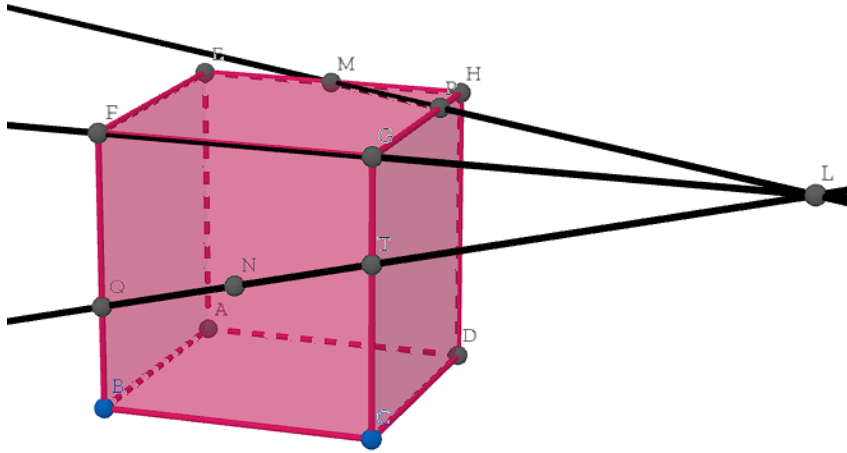
$$(CG) \subset (FGC)$$

$$\Rightarrow (LN) \text{ et } (GC) \text{ sont coplanaires}$$

Or d'après la figure  $(LN)$  n'est pas parallèle à  $(GC)$  donc  $(LN)$  et  $(CG)$  sont sécantes en un point d'intersection  $T$

- $(LN) \subset (FGC)$   
 $(BF) \subset (FGC) \Rightarrow (LN) \text{ et } (BF) \text{ sont coplanaires}$

Si on considère 3 droites:  $(d), (d'), (t)$  avec  $(d) \parallel (d')$  si  $(t)$  est sécante à  $(d)$  alors  $(t)$  est sécante à  $(d')$   
 Or  $(LN)$  est sécante à  $(CG)$  et  $(CG) \parallel (BF)$  car  $FGCB$  est un carré et  $[GC]$  est le côté opposé à  $[BF]$   
 Donc  $(LN)$  est sécante à  $(BF)$  en un point d'intersection  $Q$



- b. La section  $(MNP)$  de  $(FGC)$  est la droite  $(TQ)$  et d'après le théorème des parallèles la section pas un même plan de deux plan forment de deux droites parallèles or  $(FGC) \parallel (HEA)$  donc  $(QT)$  est parallèle à la droite  $(MY)$  avec  $Y$  le point d'intersection entre  $(EA)$  et la parallèle de  $(QT)$  au point  $M$ .

$P \in (HDC)$  La section  $(MNP)$  de  $(HGCD)$  est  $[TP]$   
 $T \in (HDC)$

$Q \in (EFB)$   
 $Y \in (EFB)$

donc la section  $(MNP)$  de  $(AEFB)$  est  $[YQ]$

On en déduit que la section  $(MNP)$  du cube  $(EHGFADCB)$  est  $(MPTQY)$

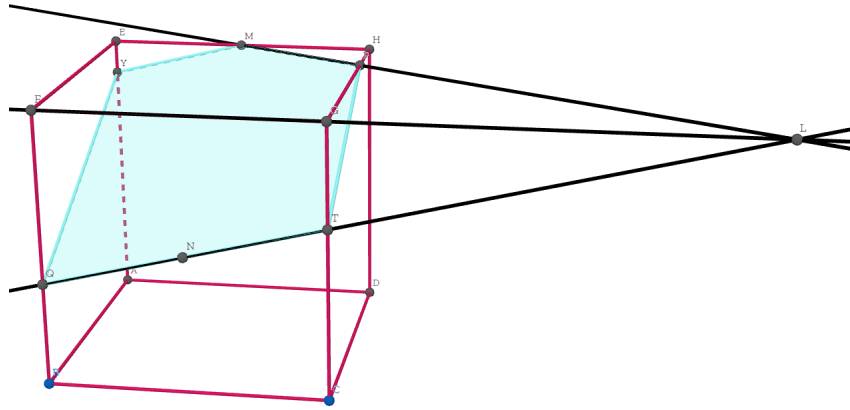


Figure 2: Section (MNP) de (EHGFADCB)

Partie C

1.  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$   $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$   $P\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$

2.  $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  La longueur de  $[MN]$  est égale à la norme de  $\overrightarrow{MN}$  définit comme :

$$= \sqrt{1^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

donc la longueur de MN est  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3.

$$\overrightarrow{TP} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - \frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TP} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TN} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TN} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

D'après la réciproque théorème de pythagore un triangle est un triangle rectangle si et seule-

ment si le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des autres côtés.

soit si  $\|\vec{PN}\|^2 = \|\vec{TP}\|^2 + \|\vec{TN}\|^2$

$$\begin{aligned} (\|\vec{PN}\|)^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{17}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\|\vec{TP}\|)^2 + (\|\vec{TN}\|)^2 &= \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \\ &= \frac{31}{32} \end{aligned}$$

Donc TPN n'est pas un triangle rectangle

Maths DM