

# Olympiades Groupes Partie 2

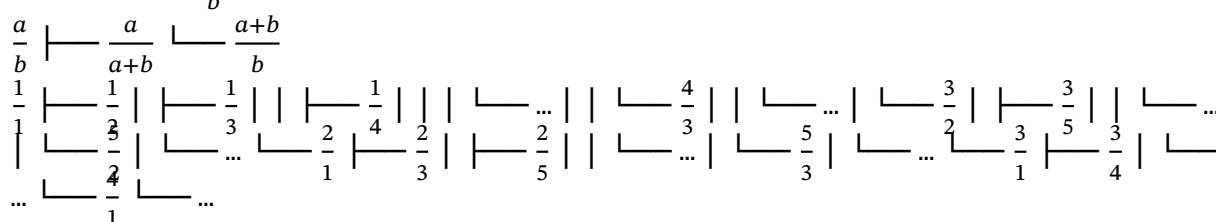
4 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

## Exercices académique n°2

### Généalogie des fractions.

Dans cet exercice, on considère des fractions écrites sous la forme  $\frac{a}{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels non nuls. On construit un arbre généalogique de fractions en partant de la fraction  $\frac{1}{1}$ . Chaque fraction  $\frac{a}{b}$  donne naissance à deux fractions : - la fille benjamine:  $\frac{a}{a+b}$ , qu'on écrit à gauche ; - la fille aînée:  $\frac{a+b}{b}$ , qu'on écrit à droite.



On peut ainsi numéroter toutes les fractions irréductibles strictement positives en considérant les lignes successives de l'arbre généalogique parcourues de haut en bas et de gauche à droite.

On peut représenter les choses comme sur l'arbre ci-dessous.

```

F_1 ┤── F_2 ┤ ┤── F_4 ┤ ┤ ┤──
F_8 ┤ ┤ ┤── F_9 ┤ ┤── F_5 ┤ ┤── F_10 ┤ ┤── F_11 ┤── F_3 ┤── F_6 ┤ ┤── F_12 ┤ ┤── F_13
├── F_7 ┤── F_14 ┤── F_15

```

On admet que dans cette situation, chaque fraction  $F_n$  a pour fille benjamine  $F_{2n}$  et pour fille aînée  $F_{2n+1}$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

1. Calculer le produit de deux fractions soeurs.  
En déduire la valeur du produit de toutes les fractions d'une même génération.
2. Combien vaut  $F_{2023}$  ?
3. Déterminer l'entier  $n$  tel que  $F_n = \frac{31}{43}$
4. Ecris un programme qui calcule  $F_n$  pour un entier  $n$  donné.
5. Ecris un programme qui calcule  $n$  pour une fraction donnée.