Maths Devoir Maison 4

4 Décembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Rédacteur Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Partie A

On sait que (Cf) admet deux asymptotes d'équations $x = 1$ et $x = -1$ cela veut dire que f n'est pas définie quand $x = 1$ ou $x = -1$ or f est une fonction rationnelle définie tant que son dénominateur est différent de 0 soit quand $x^2 - c \neq 0$ Donc $c = (1)^2$ ou $c = (-1)^2$ soit $c = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) - (x+2) &= \frac{ax^3 + bx^2}{x^2 - 1} - x - 2 \\ &= \frac{(a-1)x^3 + (b-2)x^2 + x + 2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x^3\left(a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= x\frac{a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

On sait que $lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0$ donc $lim_{x\to+\infty}a - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = a - 1$ et $lim_{x\to+\infty}1 - \frac{1}{x^2} = 1$ De plus $lim_{x\to+\infty}x = +\infty$ Donc $lim_{x\to+\infty}f(x) - (x+2) = lim_{x\to+\infty}x(a-1) = 0$

Pour que la limite soit 0 il faut que $a - 1 = 0$ soit $a = 1$

Finalement On peut noter

$$\begin{aligned} f(x) - (x+2) &= x\frac{1 - 1 + \frac{b-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{b-2}{+}\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

A nouveau $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par conséquent on obtient $lim_{x\to+\infty}f(x) - (x+2) = lim_{x\to+\infty}b - 2 = 0$ Donc $b = 2$

Partie B

1. Pour étudier les variations de g on analyse le signe de sa dérivée. $g'(x) = 3x^2 - 3$ $g'(x) > 0$ $3x^2 - 3 > 0$ $x^2 > \frac{3}{3}$ $x^2 > 1$ $x > 1$ ou $x < -1$

Pour calculer les limites de g on factorise par le terme prépondérant. $g(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$ On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Par conséquent $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ On en déduit

x	-∞		-1		1		+∞
signe de g'(x)		+	0	-	0	+	
var de g	-∞	↗	g(-1)=-2	↘	g(1)=-6	↗	+∞

2. a. On peut étudier chaque intervalle à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Premièrement g est une fonction polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ g est croissante et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $g(-1) = -2$ donc (Cg) ne coupe pas l'axe des abscisses et l'équation $g(a) = 0(E)$ n'as pas de solution de manière analogue sur $[-1;1]$ g est décroissante et comme $g(-1) < 0$ (E) n'as pas non plus de solution. Finalement sur $[1;+\infty[$ g est croissante et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$, $g(1) = -6 < 0$ Donc d'après le théorème des valeurs intermédiares (E) a une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$
   b. $g(2.19) = -0.066541$ et $g(2.20) = 0.048$ ce qui veut dire que $g(2.19) < a < g(2.20)$ soit d'après le théorème des valeurs intermédiares $2.19 < a < 2.20$

3. $g(x) > 0$ $x^3 - 3x - 4 > 0$ $x > a$ On en déduit le tableau suivant

x	-∞		a		+∞
signe de g(x)		-	0	+	

Partie C

1. f est définie quand son dénominateur est différent de 0 soit quand $x^2 - 1 \neq 0$ donc quand $x \neq 1$ et $x \neq -1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ De plus $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^3 + 2x^2$ et $v(x) = x^2 - 1$ donc son ensemble de dérivabilité est $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ car v n'est pas définie quand $x = 1$ et $x = -1$

2. f satisfait les conditions de la partie A car $f(0) = \frac{0^3+2(0^2)}{0^2-1} = 0$ donc f passe par l'origine. De plus f n'est pas définie en -1 et 1 comme dans la partie A et la limite de $f(x) - (x+2) = \frac{x^3+2x^2-x^3+x-2x^2+2}{x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+2) = 0$ et de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = 0$

3. a. $f'(x) = \frac{(x^2-1)(3x^2+4x)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
   b.

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ car $x < -1$ $x^2 > 1$ car x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ $x^2 - 1 > 0$

et de manière analogue $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ car $x > -1$ $x^2 < 1$ car x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ $x^2 - 1 < 0$

De plus $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ car $x > 1$ $x^2 > 1$ car x^2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ $x^2 - 1 > 0$ Finalement $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ car $x < 1$ $x^2 < 1$ car x^2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ $x^2 - 1 < 0$

x	-∞		-1		0		1		+∞
signe de xg(x)		+		+	0	-		-	
var de f	x+2	↗	||	↗	0	↘	||	↘	x+2

4. a. $x+2+\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2+(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x+2-2-x+x^3+2x^2}{x^2-1} = f(x)$

   b. Par conséquent $f(x)-(x+2) = \frac{x+2}{x^2-1}$ Donc quand x tend vers $-\infty$ (Cf) sera légèrement en dessous de Δ et inversement quand x tend vers $+\infty$

5.

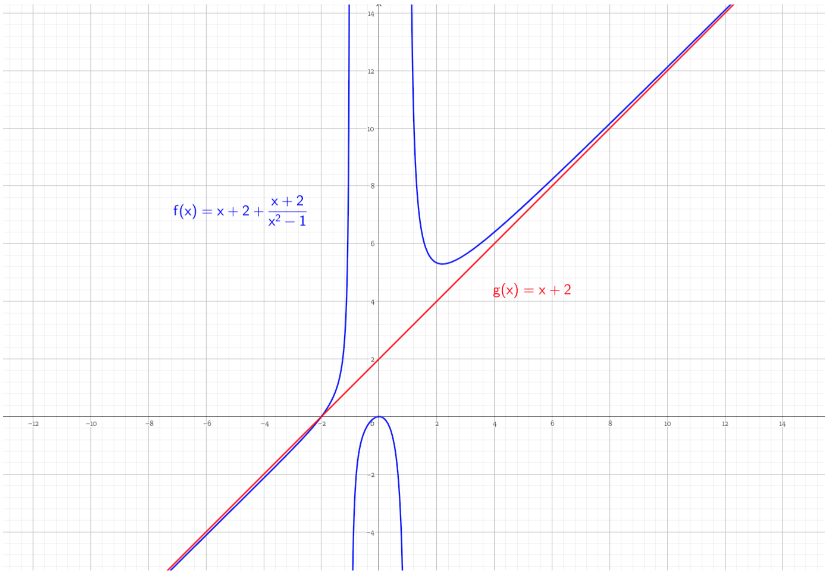

Figure 1: Graphique

Partie D

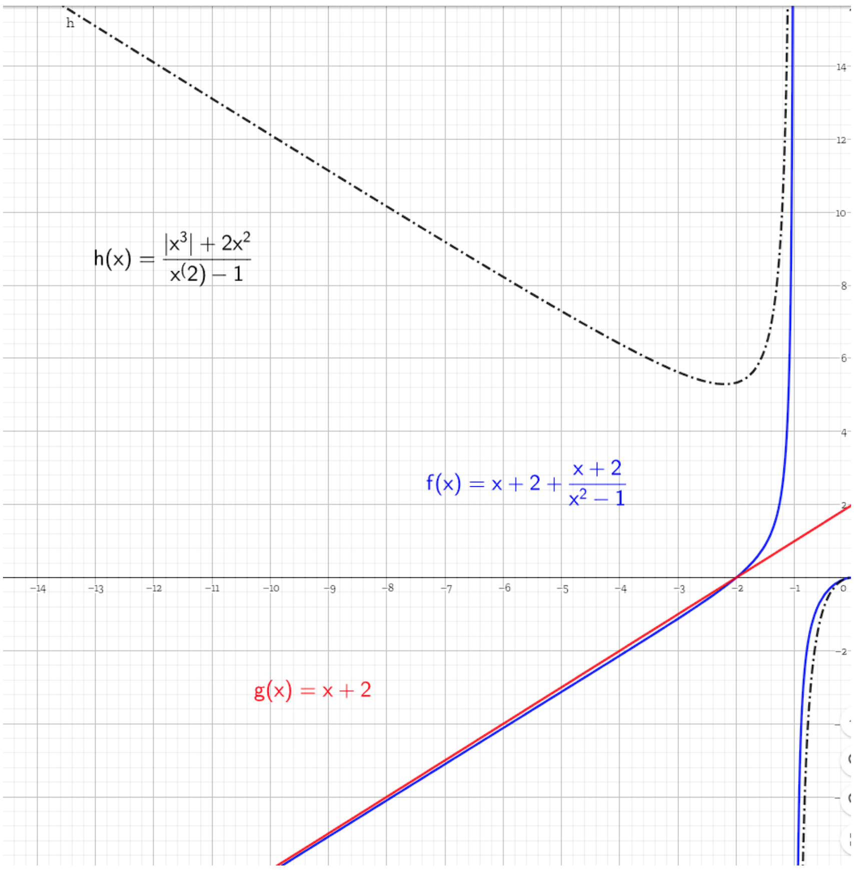

Figure 2: h(x) en pointillé

Exercice 3