Maths Prepa MPSI Chap1 Ex

30 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Ex 2

1) Prouvons par l'absurde $\forall x \in \mathbb{R}$ et $x > 2$ Supposons que $x \geq 3$ Si $x = 2,1$ On a $x > 2$ et $x \in \mathbb{R}$ Or $2,1 < 3$ donc $x \ngeq 3$ Soit la propriété non vraie pour tout les x appartenant à $\mathbb{R}$

2) $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2, x < y$ Posons la fonction f avec $f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ $x > 0$ ou $x < 0$ Pour $x > 0$ $f'(x) < 0$ $x < 0$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0[$ Donc en composant par f(x) l'égalité devient Pour $x > 0$ et $y > 0$ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ et pour $x < 0$ et $y < 0$ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ce qui est différent de la proposition De plus l'égalité est indéterminable dans les autres cas

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a : $x < \sqrt{x}$
   $\Leftrightarrow x^2 < x \Leftrightarrow x(x-1) < 0$

On en déduit que : - Si $x \in]0, 1[$, alors $x(x-1) < 0$ et donc $x < \sqrt{x}$. - Si $x \geq 1$, alors $x(x-1) \geq 0$ et donc $x \geq \sqrt{x}$.

Donc l'énoncé « $\exists x \in \mathbb{R}_+$, $x < \sqrt{x}$ » est vrai, puisqu'il existe des réels strictement positifs inférieurs à 1 qui vérifient cette inégalité.

6) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Prenons un contre-exemple Posons $x = -\frac{1}{4}$ alors $x^2 + x = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16} < 0$ Donc la propriété n'est pas vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$