Analyse 1 Cours 2

13/09/2024

2024-09-13

Lucas Duchet-Annez
EPFL
2024/2025
Génie Mécanique

1 Nombre réels: $\mathbb{R}$

1.1 Réels

1.1.1 Théorème 1

π est irrationnel.

Pour un triangle rectange de coté 1, 1, x

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

$$x^2 = 2$$

1.1.2 Théorème 2

$\exists x \geq 0 \mid x^2 = 2 \; x \quad \text{est irrationnel.}$

1.1.2.1 Preuve

Par l'absurde, supposons que $x \in \mathbb{Q} \iff \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \text{ tq } x = \frac{p}{q}$
On suppose que $\frac{p}{q}$ est irréductible Alors $p^2 = 2q^2$

Ainsi $2 \mid p^2 \iff 2 \mid p \iff \exists k \in N^* \text{ tq } p = 2k$

$$(2k)^2 = 2q^2 \implies 2 \mid q^2 \implies 2 \mid q$$

p et q sont divisibles par 2 contradiction avec le présupposé.
$x \notin \mathbb{Q}$.

Notation : $x = \sqrt{2}$

1.2 Règles de calcul: $+, -, \times, \div$

1.2.1 Addition

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $x + 0 = 0 + x = x$
4. $x + (-x) = 0$

1.2.2 Soustraction

$$x - y = x + (-y)$$

1.2.3 Multiplication

1. $x \times y = y \times x$
2. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
3. $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
4. $x \times 1 = 1 \times x = x$
5. $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1, x \in \mathbb{R}^*$

1.2.4 Division

$$\frac{x}{y} := x \times y^{-1}$$

1.3 Ordre $\leq, \geq, <, >$

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} x \leq y \quad \text{ou/et } y \leq x$
2. $x \leq w$
3. $x \leq y, y \leq z, x \leq z$
4. $x \leq y, x + y \leq y + z \forall z \in \mathbb{R}$
5. $0 \leq x, 0 \leq y \implies 0 \leq x \times y$

1.4 Intervalles

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, +\inf[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]a, +\inf[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$]-\inf, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$]-\inf, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

1.5 Valeur Absolue

$$|x| := \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. $|-x| = |x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $a \geq 0 \to |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
5. $|x \times y| = |x| \times |y|$
6. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1.5.1 Propriété Inégalité triangulaire

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

1.6 Distance

$$d(x, y) := |x - y|$$

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

1.6.1 Equivalence

$$d(x, a) \leq \varepsilon \Longleftrightarrow |x - a| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$$

1.7 Supremum et Infimum

1.7.1 Minimum et Maximum

$$\max(A) = x^* \Longleftrightarrow \forall x \in Ax \leq x^*$$

$$\min(A) = x_* \Longleftrightarrow \forall x \in Ax \geq x_*$$

1.7.1.1 Ex

1. $A = \mathbb{N} \Rightarrow \min(A) = 0, \text{pas de} \max(A)$
2. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow \max(A) = 1, \text{pas de} \min(A)$
3. $A = [0, 1[\Rightarrow \min(A) = 0, \text{pas de} \max(A)$

1.7.2 Majorants et Minorants

Soit $A \subset \mathbb{R}$

1. A est majoré $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in A, x \leq M$
2. A est minoré $\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in A, x \geq m$
3. A est borné $\Longleftrightarrow$ A est majoré et minoré

1.7.2.1 Ex

1. $A = [0, 1[\text{est borné}$
2. $A = \mathbb{N}$ est minoré et non majoré, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in N$ tq $n > M$

1.7.3 Supremum, Infimum

$A \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$

$s \in \mathbb{R}$ est supremum de A si

1. s majore A
2. $s \leq s', \forall s' \in Maj(A)$

$\Longleftrightarrow s = \sup A$

$s \in \mathbb{R}$ est infimum de A si

1. s minore A
2. $s \geq s', \forall s' \in Min(A)$

$\Longleftrightarrow s = \inf A$

1.7.3.1 Remarque

Si A possède un $\max(A)$

$$\sup(A) = \max(A)$$

Si A possède un $\min(A)$

$$\inf(A) = \min(A)$$

1.7.3.2 Ex

1. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \Longleftrightarrow \max(A) = \sup(A) = 1, \nexists \min(A), \inf(A) = 0$
   - En effet 0 minore A $0 \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
   - 0 est le plus grand minorant $s' > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, n > \frac{1}{s'} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < s'$ Or $n \in A$, s' ne minore pas A
2. $A = [0, 1[, \inf(A) = \min(A) = 0, \sup(A) = 1$