m exercices 11 09 2023

8 Octobre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

Soit à démontrer:
$(P_n) : \sum_{k=1}^{n}(k) = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation:
pour n=1 $\sum_{k=1}^{1}(k) = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc (P_n) est vraie pour n = 1.

Hérédité:
On suppose que la propriété est vraie au rang $n = p$
$\sum_{k=1}^{p}(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$
On va montrer que:
$\sum_{k=1}^{p+1}(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p + 1) = \frac{(p+1)(p+1+1)}{2}$
$\frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p^2+2p+p+2}{2}$
$= \frac{p^2+3p+2}{2}$
ou

$\sum_{k=1}^{\cdot p+1}(k) = \sum_{k=1}^{p}(k) + p + 1$
$= \frac{p(p+1)}{2} + p + 1$
$= \frac{p^2+3p+2}{2}$

donc (P_n) est vraie au rang $p + 1$
=> (P_n) est héréditaire

Conclusion:
D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(k) = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 19 p 27

Soit à démontrer:
$(P_n) : u_n = \frac{n}{n+1}$

Initialisation:
pour $n = 0, u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$ donc la propriété (P_n) est vraie.

Hérédité:
On suppose que la propriété est vraie au rang $n = k$
$u_k = \frac{k}{k+1}$

On va montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$:
$(P_{k+1}) : u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2-u_k} \\ &= \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} \\ &= \left(\frac{2k+2-k}{k+1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{-1} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

donc (P_n) est héréditaire

Conclusion:
D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$

Maths Exercices