Maths Expertes Ex 14 11 2023

11 Novembre, 2023

Lucas Duchet-Annez

Exercice 1

1. L'équation az+b=0 à une seule solution $-\frac{b}{a}$ avec $a \neq 0$ ou aucune solution si $a = 0$ donc L'équation a bien au plus une solution. Or l'équation est de degré 1 donc l'équation a au plus n solutions.
2. Si P n'a pas de solution l'équatio $P(z) = 0$ n'a pas de solution donc elle a bien moins de $(n+1)$ solutions.
3. On sait que $P(z)$ est un polynôme de degré $n+1$ et peut être écris sous la forme $(z-a)Q(z)$, le polynôme $(z-a)$ est de degré 1 car z est à la première puissance Or deux polynôme multiplié on pour degré leur puissance respective additionnée soit pour trouver $P(z)$ avec un degré $n+1$ le polynôme $Q(z)$ a un degré n.
4. $P(z) = 0 \to (z-a)Q(z) = 0$ donc $z = a$ ou $Q(z) = 0$ or d'après l'hypothèse de récurrence un polynôme de degré n a au plus n solutions donc $P(z) = 0$ a au plus $(n+1)$ solutions
5. Car les racines d'un polynôme P sont les solutions de $P(z) = 0$

Exercice 2

1. Lorsque $q \neq 1$ on a $1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$ donc par produit en croix des fractions on obtient $q^n - 1 = (q-1)\left(1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$ et pour $q = 1$ on a $q^n - 1 = 0$ et $q - 1 = 0$. Quand $a = 0$ on a $z^n = z^{n-1}z$ donc la propriété est vraie. Quand $a \neq 0$ $\frac{z^n}{a^n} - 1 = \left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(1 + \frac{z}{a} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$ $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-2}\right)$
2. Soit P un polynôme de degré n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = 0$$

$$P(z) - P(a) = a_n(z^n - a^n) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - a^{n-1}\right) + \ldots + a_1(z-a)$$

$$P(z) - P(a) = a_n(z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k\right) + a_{n-1}(z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k\right) + \ldots + a_1(z-a)$$

$$P(z) = P(z) - P(a) = (z-a)\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k + \ldots + a_1\right)$$

Donc il existe bien un polynôme Q tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$ avec $Q(z) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k}a^k + \ldots + a_1$