Maths Expertes

Pour le 15/05/2024

2024-05-13

Lucas Duchet-Annez
LHB
2023/2024
101

1 Exercices

1.1 Numéro 27 page 196

1.1.1

En calculant on trouve :

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Par conséquent

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 9 & -12 & 9 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 & -3+3 & -3+3 \\ -9+9 & 10+2-12 & -9+9 \\ -3+3 & 3-3 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

   Or

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times 4 \times 0 + 1 \times (-3) \times (-1) + (-1) \times (-3) \times (1) - (-1) \times 4 \times (-1) - 1 \times (-3) \times 0 - 0 \times (-3) \times 1 = 2$$

   Donc A est une matrice inversible et son inverse est A^{-1} On a $AX = I$ admet une solution avec $X = A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ou

$$\frac{1}{2}(3A - A^2) = I$$

$$A\left(\left(\frac{3}{2}\right)I - \frac{A}{2}\right) = I$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$$

1.2 Ex 30

1.2.1

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \times 2 - 1 \times (-1)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{5 \times 2 - 2 \times 0}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.2.2

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{45} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{45} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

On remarque que le résultat est différent donc les deux opérations ne sont pas équivalentes en général

1.2.3

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que pour toutes matrices inversibles A et B $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1.2.4

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

1.3 Ex 50

1.3.1

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ $BA = \begin{pmatrix} 22 & -44 \\ 11 & -22 \end{pmatrix}$

1.3.2

La multiplication de matrice n'est pas commutative en général.

1.3.3

$\det(A) = 2 \times 6 - ((-4) \times (-3)) = 0$ et $\det(B) = 2 \times (-3) - (-6 \times 1) = 0$

Donc A et B ne sont pas inversible.

1.3.4

La matrice nulle convient mais il n'y a pas d'unicité car la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient aussi de plus d'après le cours il y a dans ce cas une infinité de solution ou aucune solution or O est solution donc il y a une infinité de solution et il n'y a pas d'unicité.

1.3.5

On pose $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors $BC = O$ si seulement si

$$\begin{cases} 2a - 6c = 0 \\ a - 3c = 0 \\ 2b - 6d = 0 \\ b - 3d = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 3c \\ b = 3d \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des matrices C tel que $BC = O$ est l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ c & d \end{pmatrix} c, d \in \mathbb{R} \right\}$

1.4 Ex 54

1.4.1

$\det(P) = 1 \times 2 - (-1 \times -1) = 1 \neq 0$ donc P est inversible

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.4.3

Initialisation: pour $n = 0$

On a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

Donc la propriété est initialisée.

Hérédité: On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $A^k = PD^kP^{-1}$

Alors

$$A^{k+1} = A^k \times A$$

$$A^{k+1} = PD^kP^{-1} \times PDP^{-1}$$

$$A^{k+1} = PD^kDP^{-1}$$

$$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion: La propriété étant initialisée et héréditaire selon le principe de récurrence, pour tout n entier naturel on a $A^n = PD^nP^{-1}$

1.4.4

On trouve $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

Par conséquent $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n+(-1)^{n+1} \\ -2^{n+1}+2(-1)^n & -2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$