

Olympiades Groupes Partie 2

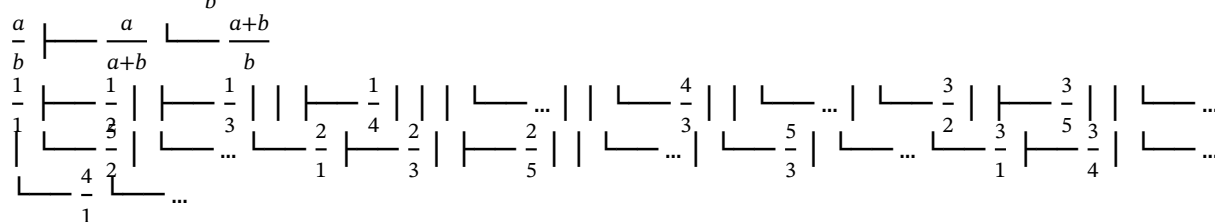
10 Septembre, 2023

Lucas

Exercices académique n°2

Généalogie des fractions.

Dans cet exercice, on considère des fractions écrites sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls. On construit un arbre généalogique de fractions en partant de la fraction $\frac{1}{1}$. Chaque fraction $\frac{a}{b}$ donne naissance à deux fractions : - la fille benjamine: $\frac{a}{a+b}$, qu'on écrit à gauche ; - la fille aînée: $\frac{a+b}{b}$, qu'on écrit à droite.



On peut représenter les choses comme sur l'arbre ci-dessous.

```

F_1 |— F_2 | |— F_4 | |—
F_8 | |— F_9 | |— F_5 | |— F_10 | |— F_11 |— F_3 |— F_6 | |— F_12 | |— F_13
|— F_7 |— F_14 |— F_15

```

On admet que dans cette situation, chaque fraction F_n a pour fille benjamine F_{2n} et pour fille aînée F_{2n+1} où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer le produit de deux fractions soeurs.
En déduire la valeur du produit de toutes les fractions d'une même génération.
2. Combien vaut F_{2023} ?
3. Déterminer l'entier n tel que $F_n = \frac{31}{43}$
4. Ecrire un programme qui calcule F_n pour un entier n donné.
5. Ecrire un programme qui calcule n pour une fraction donnée.