

Guilherme Mitsuo Morais Hirata  
Gustavo Sanches Marcello  
Luca Augusto Paniago  
Osman Rodrigues de Paula

## **Exercício 1 - PME3380**

São Paulo

2023

Guilherme Mitsuo Morais Hirata  
Gustavo Sanches Marcello  
Luca Augusto Paniago  
Osman Rodrigues de Paula

## **Exercício 1 - PME3380**

Universidade de São Paulo - USP  
Escola Politécnica  
Programa de Graduação em Engenharia Mecânica

São Paulo  
2023

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pêndulo duplo analisado para modelagem . . . . .	5
Figura 2 – Comparação entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando os métodos $M1$ e $M2$ com as condições iniciais $C1$ . . . . .	10
Figura 3 – Comparação entre $M1$ e $M2$ utilizando as soluções linearizada e não linearizada com as condições iniciais $C1$ . . . . .	11
Figura 4 – Diferença entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando o Método de Runge-Kutta . . . . .	12
Figura 5 – Diferença entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando o Método dos Trapézios . . . . .	12
Figura 6 – Diferença entre os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios para a equação não linearizada . . . . .	13
Figura 7 – Diferença entre os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios para a equação linearizada . . . . .	13
Figura 8 – Energia mecânica para o caso não linearizado utilizando a condição $C2$ . . . . .	14

# Sumário

<b>1</b>	<b>DADOS PARA CÁLCULOS . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>PARTE I . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1	Item - a) . . . . .	5
2.2	Item - b) . . . . .	6
2.3	Item - c) . . . . .	7
2.4	Item - d) . . . . .	8
<b>3</b>	<b>PARTE II . . . . .</b>	<b>9</b>
3.1	Item - e) . . . . .	9
3.2	Item - f) . . . . .	9
3.3	Item - g) . . . . .	10
3.4	Item - h) . . . . .	13

# 1 Dados para cálculos

- Guilherme Mitsuo Morais Hirata - NUSP: 12553761
- Gustavo Sanches Marcello - NUSP: 12552089
- Luca Augusto Paniago - NUSP: 7640313
- Osman Rodrigues de Paula - NUSP: 12552093

Cálculo do  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2} = 1 + \sum_j \frac{D_j}{20} = 1 + \frac{1}{20} + \frac{9}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Cálculo de  $l_1$  e  $l_2$ :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l_1}} = 1 \text{ rad/s} \implies l_1 = g \quad \text{e} \quad l_2 = \frac{5g}{9}$$

Cálculo de  $m_1$  e  $m_2$ :

$$m_1 = \mu l_1 \quad \text{e} \quad m_2 = \mu l_2 \implies m_1 = \mu g \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{5\mu g}{9}$$

## 2 Parte I

### 2.1 Item - a)

No desenvolvimento das equações cinemáticas e dinâmicas, foi considerado um sistema de coordenadas com origem no ponto  $O$  com eixo  $x$  para a direita e eixo  $y$  para cima, conforme a [Figura 1](#)

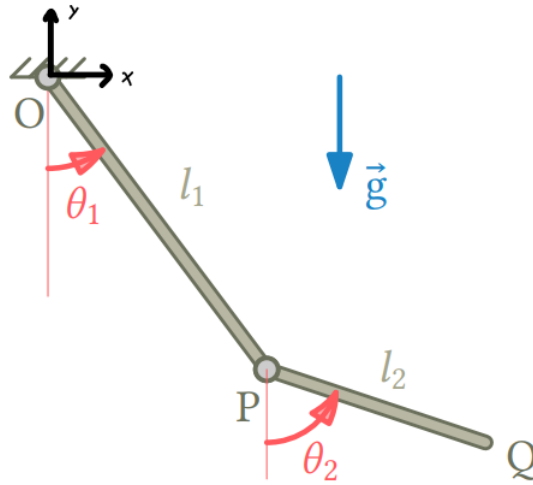


Figura 1 – Pêndulo duplo analisado para modelagem

Definindo as coordenadas generalizadas e as quasi-velocidades utilizadas para resolução do exercício

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t)) \\ \mathbf{v}(t) = (\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t)) \end{cases}$$

pode-se chegar nos vetores velocidade angular das barras 1 e 2, considerando o eixo  $z$  perpendicular ao plano da imagem, além da velocidade do ponto  $P$ , por meio do campo de velocidades utilizada na dedução da equação da Energia Cinética abordada nas próximas páginas

$$\begin{cases} \omega_1 = [0, 0, \dot{\theta}_1(t)]^T \\ \omega_2 = [0, 0, \dot{\theta}_2(t)]^T \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega_1 \times (P - O) = [l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos(\theta_1(t)), l_1 \dot{\theta}_1(t) \sin(\theta_1(t)), 0]^T$$

Para o cálculo da Energia Cinética, será utilizado o Teorema da Energia Cinética (TEC), a partir dos polos  $O$  para a barra 1 e  $P$  para a barra 2. A forma geral do TEC é dada por

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + m\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \times (G - O) + \frac{1}{2}J_{O\omega}|\vec{\omega}|^2$$

Atribuindo essa equação para as barras 1 e 2, chega-se em

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}J_{O1\omega}|\omega_1|^2 \\ T_2 = \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_P|^2 + m_2\mathbf{v}_P \cdot \omega_2 \times (G_2 - P) + \frac{1}{2}J_{O2\omega}|\omega_2|^2 \\ T = T_1 + T_2 \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{1}{6}l_1^2m_1\theta_1'(t)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{6}m_2 \left( 3l_1^2\theta_1'(t)^2 + l_2^2\theta_2'(t)^2 + 3l_1l_2\theta_2'(t)\theta_1'(t)\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right)$$

$$T = \frac{1}{6} \left( l_1^2(m_1 + 3m_2)\theta_1'(t)^2 + l_2^2m_2\theta_2'(t)^2 + 3l_1l_2m_2\theta_2'(t)\theta_1'(t)\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right)$$

Já para a Energia potencial, considerando o plano do ponto  $O$  a referência, basta calcular para ambas as barras

$$V_n = mg(G_n - O) \cdot \tilde{\mathbf{j}}$$

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{1}{2}g(l_1(m_1 + 2m_2)\cos(\theta_1(t)) + l_2m_2\cos(\theta_2(t)))$$

## 2.2 Item - b)

Para chegar na equação do espaço de estados, deve-se encontrar a equação dinâmica que rege o sistema. Para isso foi utilizado a equação de Lagrange, dada por

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

sendo  $L$  a função Lagrangeano dada por

$$L = T - V$$

e  $q_i$  a  $i$ -ésima coordenada generalizada do sistema.

Resolvendo a equação de Lagrange para as coordenadas generalizadas especificadas anteriormente, obtém-se os valores de  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$  que serão representadas abaixo pelo espaço de estados.

Assim, considerando o vetor de estados da forma  $\mathbf{y} = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$ , chega-se que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1(t) = & -\frac{3\omega_p^2((4\lambda + 5)\sin(\theta_1(t)) + 3\sin(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)))}{8\lambda - 9\cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15} \\ & + \frac{9\theta_1'(t)^2 \sin(2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))}{-8\lambda + 9\cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) - 15} - \frac{6\theta_2'(t)^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{\lambda(4(\lambda + 3) - 9\cos^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))} \\ \ddot{\theta}_2(t) = & -\frac{3\lambda\omega_p^2((\lambda + 6)\sin(\theta_2(t)) - 3(\lambda + 2)\sin(2\theta_1(t) - \theta_2(t)))}{8\lambda - 9\cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15} \\ & + \frac{6\lambda(\lambda + 3)\theta_1'(t)^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{4(\lambda + 3) - 9\cos^2(\theta_1(t) - \theta_2(t))} + \frac{9\theta_2'(t)^2 \sin(2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))}{8\lambda - 9\cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15} \end{aligned}$$

## 2.3 Item - c)

Para o caso linearizado, o espaço de estados se dá na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

sendo, neste caso,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}$ , ou seja, a diferença do caso anterior do vetor de estados e o estado de equilíbrio. Já a matriz  $\mathbf{A}$  é dada, segundo a teoria de linearização, por

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}}}$$

No exercício, foi considerado a posição de equilíbrio trivial, isto é,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  e  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$

Logo, chega-se que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{6(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} & \frac{9\omega_p^2}{4\lambda+3} & 0 & 0 \\ \frac{9\lambda(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} & -\frac{6\lambda(\lambda+3)\omega_p^2}{4\lambda+3} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores numéricos, a matriz  $\mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.23529 & 0.882353 & 0 & 0 \\ 6.03529 & -5.08235 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2.4 Item - d)

Para o cálculo das frequências naturais, considerando que a equação diferencial dinâmica linearizada é da forma  $\ddot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i(\theta_1, \theta_2, t)$ , pode-se inferir que a solução da equação é da forma  $\theta_1 = \Theta_1 \cos(\omega_n t + \phi)$  e  $\theta_2 = \Theta_2 \cos(\omega_n t + \phi)$ , visto que trata-se de uma equação diferencial segunda ordem, desconsiderando o termo do amortecimento viscoso. Substituindo no sistema de equações, chega-se em

$$\begin{cases} \left[ \left\{ \omega_n^2 - \frac{6(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} \right\} \Theta_1 + \left\{ \frac{9\omega_p^2}{4\lambda+3} \Theta_2 \right\} \right] \cos(\omega_n t + \phi) = 0 \\ \left[ \left\{ \frac{9\lambda(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} \right\} \Theta_1 + \left\{ \omega_n^2 - \frac{6\lambda(\lambda+3)\omega_p^2}{4\lambda+3} \right\} \Theta_2 \right] \cos(\omega_n t + \phi) = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema chegue em uma solução diferente da trivial, para todos os instantes de  $t$ , o determinante dos coeficientes  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  deve ser nulo, chegando no polinômio característico do problema de autovalores e autovetores, como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \omega_n^2 - \frac{6(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} & \frac{9\omega_p^2}{4\lambda+3} \\ \frac{9\lambda(\lambda+2)\omega_p^2}{4\lambda+3} & \omega_n^2 - \frac{6\lambda(\lambda+3)\omega_p^2}{4\lambda+3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{(3\lambda+4)\omega_n^4 - 6(3\lambda(\lambda+2)+2)\omega_n^2\omega_p^2 + 9\lambda(2\lambda+1)\omega_p^4}{3\lambda+4} = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação, chega-se nos valores das frequências naturais

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= \sqrt{\frac{3(\lambda(\lambda+4)+2) - 3\sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)}}{4\lambda+3}} \omega_p; \\ \omega_{n2} &= \sqrt{3} \sqrt{\frac{(\lambda(\lambda+4)+2) + \sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)}}{4\lambda+3}} \omega_p \end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos de  $\lambda$  e  $\omega_p$  dados no [Capítulo 1](#), chega-se em

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 0.973356 \text{ rad/s;} \\ \omega_{n2} &= 2.52393 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

## 3 Parte II

### 3.1 Item - e)

Para o cenário  $C1$  foram escolhidas as seguintes condições iniciais

$$C1 = \begin{cases} \theta_1 = 0rad \\ \theta_2 = 0.2rad \\ \dot{\theta}_1 = 0rad/s \\ \dot{\theta}_2 = 0rad/s \end{cases}$$

Nesse caso foi pensado em uma pequena condição inicial apenas para demonstrar a diferença entre as equações linearizada e não linearizada, que por a perturbação ser pequena, espera-se que as soluções sejam muito similares.

Já o caso  $C2$  tem como objetivo mostrar diferenças significativas entre as equações linearizada e não linearizada, assim, o caso é definido por uma condição inicial que não se encaixa às "pequenas oscilações", ou seja, espera-se que não seja razoável utilizar o caso linearizado para modelar o sistema fielmente. A condição  $C2$  é dada por

$$C2 = \begin{cases} \theta_1 = 3rad \\ \theta_2 = 0rad \\ \dot{\theta}_1 = 0rad/s \\ \dot{\theta}_2 = 0rad/s \end{cases}$$

Por fim, o tempo escolhido para a simulação foi arbitrário, mas verificado que seria o suficiente para observar as diferenças entre as equações. Nesse sentido, o tempo de simulação foi de  $10s$ , com um passo de  $0.001s$ .

### 3.2 Item - f)

Os métodos foram escolhidos de maneira arbitrária buscando aqueles que possuem diferença na precisão da integração para posterior análise e comparação, de acordo com os disponíveis no software *Matlab*, assim, foram escolhidos o Método de Runge-Kutta, de alta precisão e o Método dos Trapézios, que possui precisão inferior.

- $M1$ : O método  $M1$  foi utilizado com o comando *ode45*, esse comando resolve a EDO utilizando o Método de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem

- *M2*: O método *M2* foi utilizado com o comando *ode23t*, que resolve a equação diferencial utilizando o métodos dos trapézios com um interpolador livre

### 3.3 Item - g)

Para estudar o comportamento dinâmico da estrutura foram *plotados* os gráficos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  pelo tempo.

A Figura 2 ilustra a comparação das soluções obtidas para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ao longo do tempo, considerando tanto o modelo linearizado quanto o não-linearizado. Utilizando as condições iniciais *C1*, observamos que, nos 10 segundos escolhidos para simulação, as curvas são notavelmente próximas entre os modelos linearizado e não-linearizado. Esse resultado sugere que o modelo linearizado é uma boa aproximação do comportamento dinâmico do sistema nas condições iniciais escolhidas.

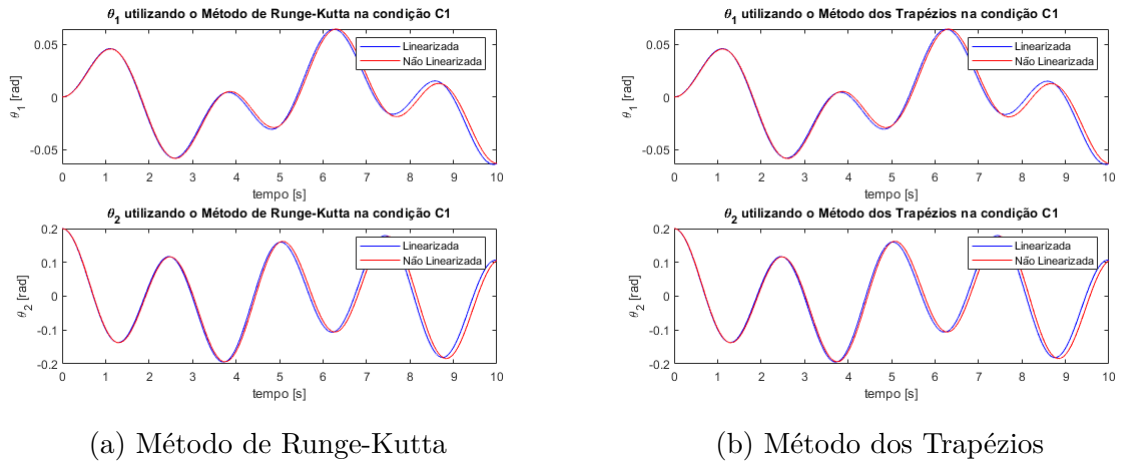


Figura 2 – Comparação entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando os métodos *M1* e *M2* com as condições iniciais *C1*

A comparação dos métodos de integração *M1* (Runge-Kutta) e *M2* (Método dos Trapézios) também é relevante neste contexto, pois influencia a precisão das soluções. No entanto, a Figura 3 mostra que ambos os métodos resultam em curvas de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  muito semelhantes para os modelos linearizado e não-linearizado com as condições iniciais *C1*, reforçando a robustez das soluções obtidas. É evidente que os resultados das posições angulares para ambos os métodos de integração são altamente consistentes. Isso indica que, nas condições iniciais escolhidas, tanto *M1* quanto *M2* são eficazes na simulação do sistema, apesar de conter uma diferença visível entre elas.

Esses resultados reforçam a precisão dos modelos utilizados, bem como a eficácia dos métodos de integração empregados. Não foi utilizado neste exercício, com fins de comparação, a solução exata do sistema de equações diferenciais para buscar encontrar o

método mais preciso, porém, com experiências anteriores em simulações numéricas, o mais provável é que o método M1 é o mais preciso.

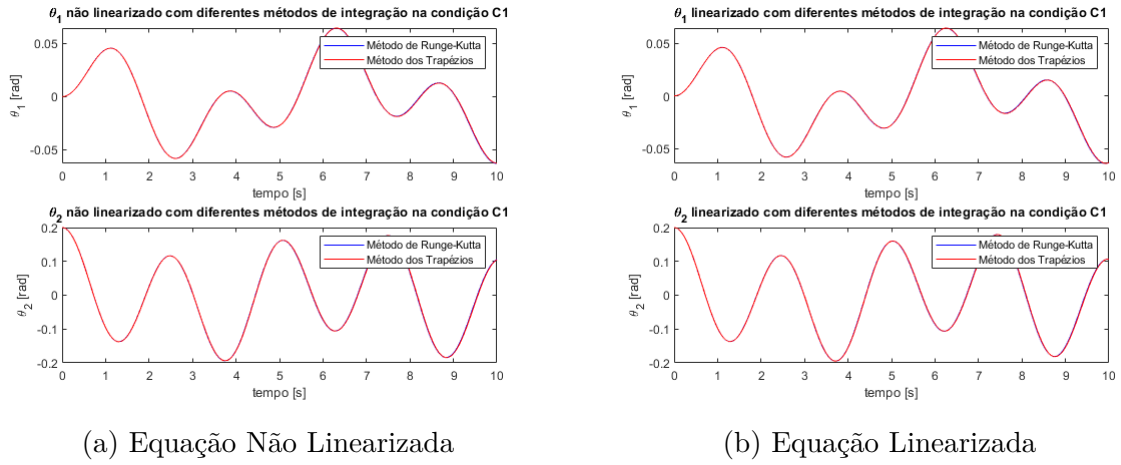


Figura 3 – Comparação entre  $M1$  e  $M2$  utilizando as soluções linearizada e não linearizada com as condições iniciais  $C1$

A proximidade dos resultados das equações nas condições iniciais  $C1$  pelas diferentes equações também pode ser verificada pelas [Figura 4](#) e [Figura 5](#), em que estão representados a diferença entre as soluções em módulo para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por meio dos gráficos é possível notar que essa diferença é da ordem de milésimos de radianos para  $\theta_1$  e centésimos de radianos para  $\theta_2$ , sendo assim, a diferença é realmente pouco significativa, isso se deve pelas condições iniciais, que favorecem a utilização da equação linearizada.

Os gráficos resultantes apresentam um padrão interessante que se assemelha a senoides retificadas, mostrando uma tendência crescente ao longo do tempo. Essa tendência reflete a acumulação de pequenas discrepâncias entre as equações a medida que a simulação progride.

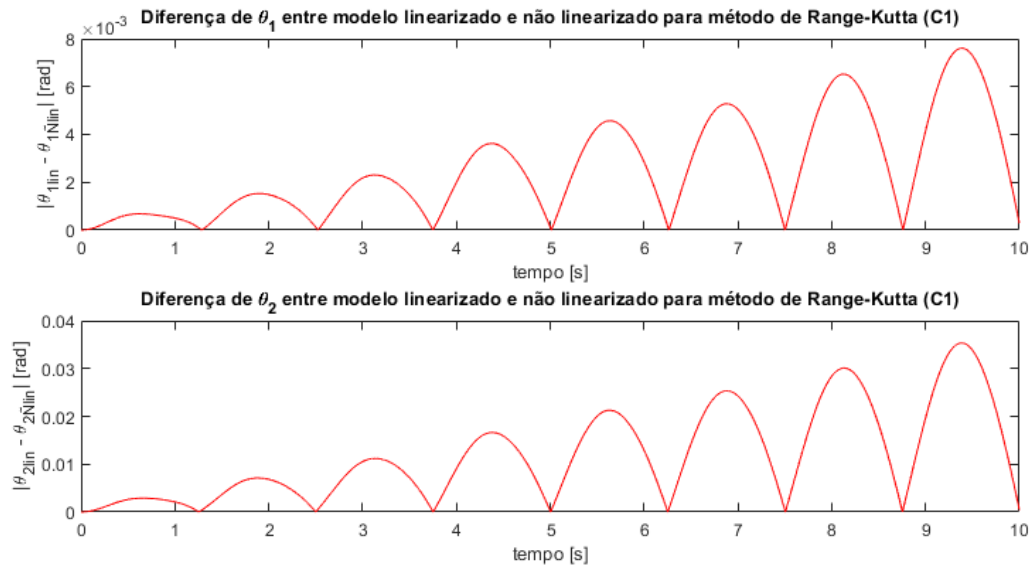


Figura 4 – Diferença entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando o Método de Runge-Kutta

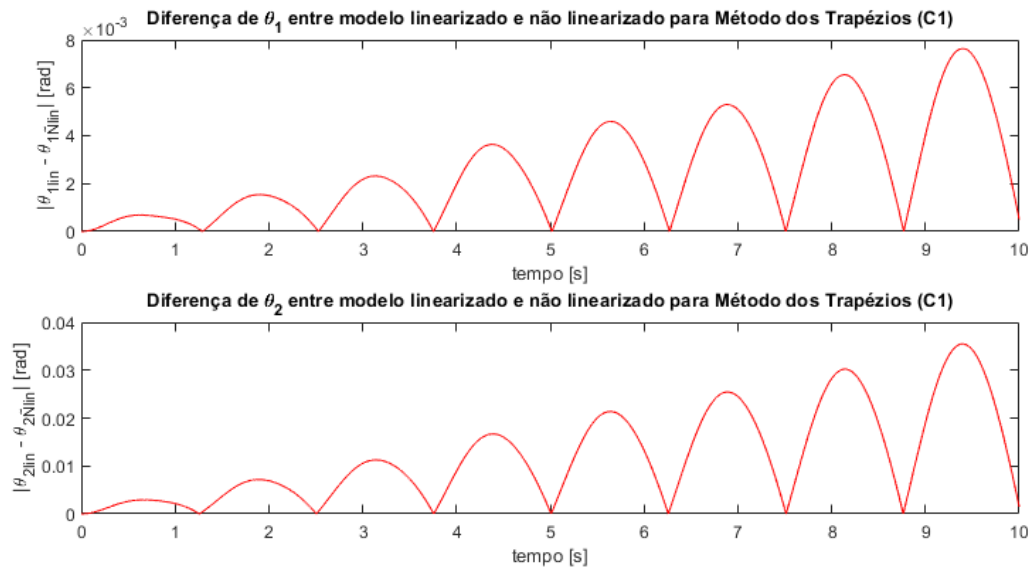


Figura 5 – Diferença entre as soluções linearizada e não linearizada utilizando o Método dos Trapézios

A [Figura 6](#) apresenta o módulo da diferença entre as soluções obtidas com os métodos  $M1$  e  $M2$  para as equação não-linearizada. Podemos notar que a diferença entre os métodos é pequena, mesmo quando aplicada à equação não-linearizada do sistema.

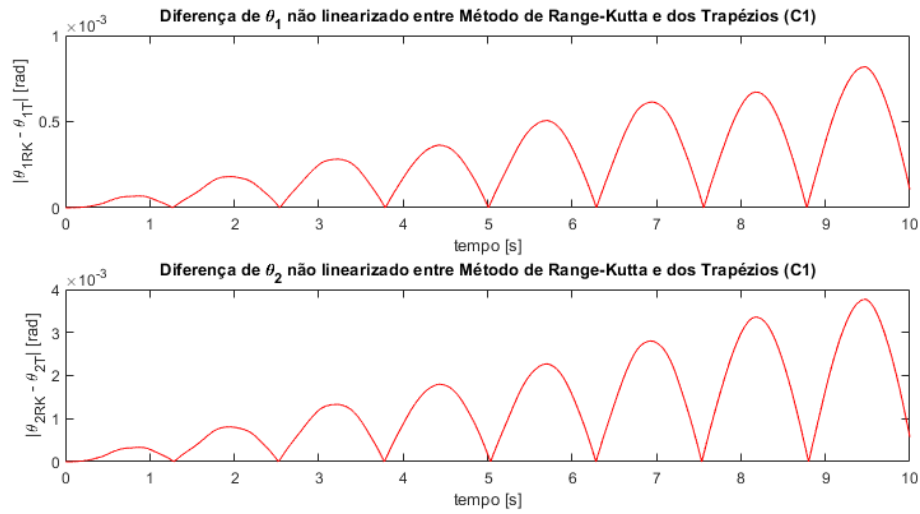


Figura 6 – Diferença entre os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios para a equação não linearizada

Da mesma forma, na [Figura 7](#), apresentamos o módulo da diferença entre as soluções obtidas com os métodos  $M1$  e  $M2$  para a equação linearizada. Mais uma vez, observam-se oscilações que aumentam ao longo do tempo, mas a amplitude dessas oscilações permanece da ordem de  $10^{-3}$ . Esses resultados indicam que, mesmo quando aplicados ao modelo linearizado, os métodos de integração  $M1$  e  $M2$  produzem resultados altamente semelhantes.

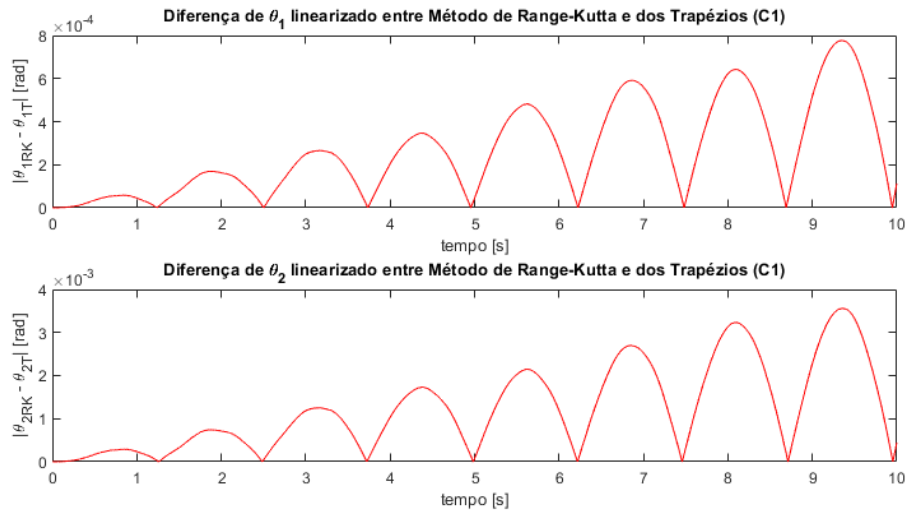


Figura 7 – Diferença entre os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios para a equação linearizada

### 3.4 Item - h)

Nesta seção, apresentamos os resultados das simulações do modelo não-linear no cenário  $C2$ , utilizando tanto o método  $M1$  (Runge-Kutta) quanto o método  $M2$  (Método

dos Trapézios). O foco da análise recai sobre a variação da energia mecânica do sistema em função do tempo.

Inicialmente, é importante observar que, para esta análise, assumimos  $\mu = 1$  para simplificação, deixando de fora a dependência da energia em relação à densidade linear.

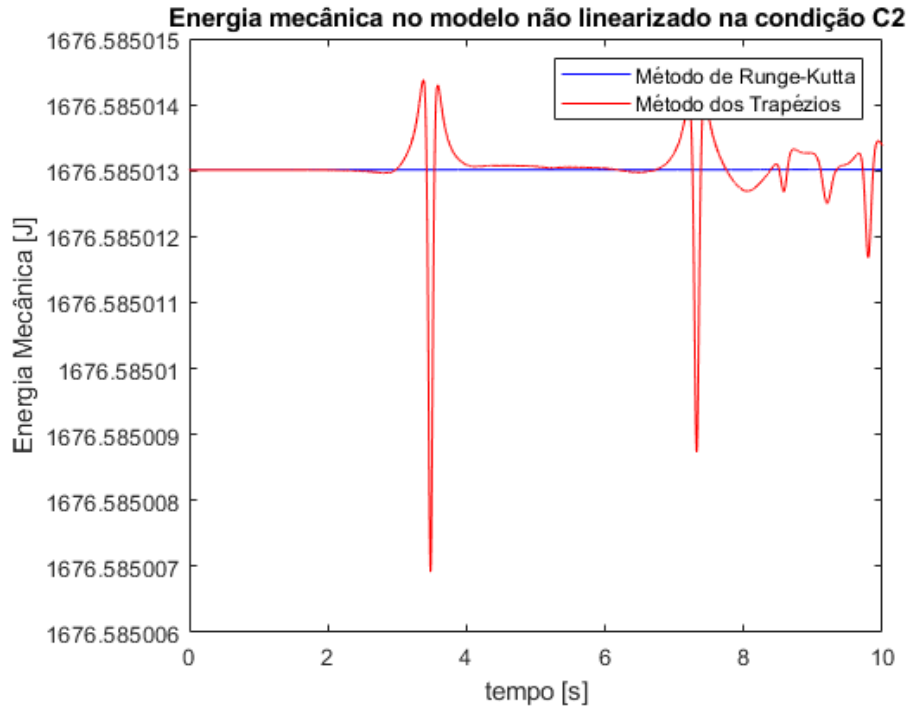


Figura 8 – Energia mecânica para o caso não linearizado utilizando a condição *C2*

O gráfico da variação da energia mecânica em função do tempo, para o Método de Runge-Kutta representado na [Figura 8](#), demonstra uma tendência de aproximação a uma linha reta, indicando uma conservação satisfatória da energia. Esse comportamento é característico de um método de integração de alta precisão, como o Range-Kutta. A curva correspondente ao Método dos Trapézios, também apresentado no gráfico, revela algumas oscilações da energia mecânica do sistema, com pequenos picos de oscilação na ordem de  $10^{-5}$ . Essas oscilações podem ser atribuídas à natureza do método e à maneira como ele realiza a integração, tornando evidente a menor precisão comparado ao Range-Kutta. No entanto, é importante destacar que, apesar das oscilações, a energia mecânica permanece aproximadamente constante ao longo do tempo, dado o pequeno erro de integração, o que é condizente com a realidade.