

RO: risoluzione di esercizi di PL e PLi:

- Esercizio 1:

	A	B
P1	4	10
P2	7	7

quantità usata di P1 ≥ 40

quantità usata di P2 ≤ 49

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\text{quantità prodotto di A}}{\text{quantità prodotto di B}} \leq 4$$

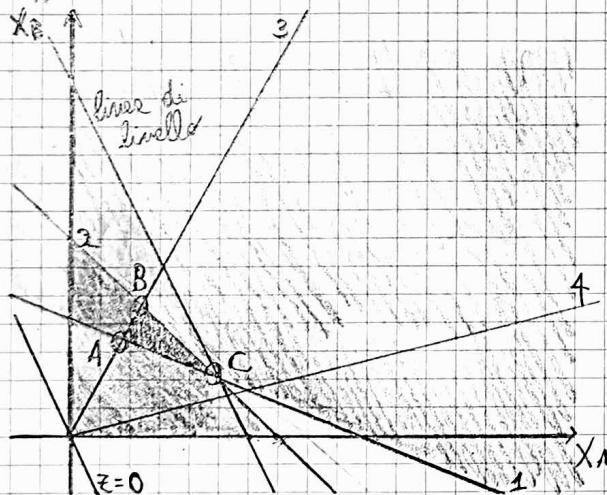
profitto A = 2 profitto B

obiettivo \rightarrow max profitto

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 2X_A + X_B \\ 4X_A + 10X_B \geq 40 \\ 7X_A + 7X_B \leq 49 \\ X_A - \frac{1}{2}X_B \geq 0 \\ X_A - 4X_B \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} X_A = \text{quantità prodotto di A} \\ X_B = \text{quantità prodotto di B} \\ \Rightarrow X_A + X_B \leq 7 \end{array}$$

$X_A, X_B \geq 0 \rightarrow$ vincolo superfluo

Rappresentazione del dominio di ammissibilità:



introduzione le variabili slack:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 2X_A + X_B \\ -4X_A - 10X_B + Y_1 = -40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ -X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{array} \right.$$

Risolviamo prima il modello:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4X_A - 10X_B \leq -40 \\ X_A + X_B \leq 7 \\ -X_A + \frac{1}{2}X_B \leq 0 \\ \max 2X_A + X_B \\ X_A, X_B \geq 0 \end{array} \right.$$

composizione della s.l.c.:

$$\begin{array}{lllll} X_A & X_B & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \hline A: & >0 & >0 & =0 & >0 =0 \\ B: & >0 & >0 & >0 & =0 =0 \\ C: & >0 & >0 & =0 =0 & >0 \end{array}$$

Risolviamo il modello matematico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 2X_A + X_B \\ -4X_A - 10X_B + Y_1 = -40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ -X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{array} \right.$$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1	-4	-10	1				-40
Y_2	1	1		1			7
Y_3	-1	$\frac{1}{2}$			1		0
$-Z$	2	1				1	0

← qui fanno andare
poco Y_3 come
variabile uscente

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1		-6	1	4			-12
X_A	1	1		1			7
Y_3		$\frac{3}{2}$		1	1		7
$-Z$		-1		-2	1		-14

$$\begin{matrix} & & & & & & \uparrow \\ Y_1 + 4Y_2 & & & & & & \\ Y_3 + Y_2 & & & & & & \\ -Z - 2Y_2 & & & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -12 & 1 & 0 & -4 & 0 & -40 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ +1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & +2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

svolgo i calcoli alle pagine successive:

caso in cui si sceglie y_3 come variabile uscente.

$-2x_A \rightarrow$ per ottenere 1

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	0	-12	1	0	-4	0	-10
y_2	0	$\frac{3}{2}$	0	1	1	0	7
x_A	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	0
$-z$	0	2	0	0	2	1	0

↑

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	-24	0	1	0	20	0	-40
y_2	3	0	0	1	-3	0	7
x_B	-2	1	0	0	2	0	0
$-z$	4	0	0	0	4	1	0

$$y_1 + 12x_B$$

$$y_2 - \frac{3}{2}x_B$$

$$-z - 2x_B$$

Non ho ancora ben capito come funziona il simplex.

Dovrò approfondire le scelte delle variabili uscite e capire se in questo caso c'è necessario applicare il big M o il metodo delle due fasi.

Domande:

Se dovessemo avere un $b_i = 0$ ($b_i = 0$), e tutti gli altri termini $\frac{b_j}{a_{ij}} > 0$, dovremmo scegliere c_{is} come pivot?

Pongo queste domande perché ho il dubbio che sia illegale.

Probabilmente deve essere riscritto il modello:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = 2X_A + X_B \\ \min W = h_1 + h_2 \\ 4X_A + 10X_B - Y_1 + h_1 = 40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ X_A - \frac{1}{2}X_B - Y_3 + h_2 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{array} \right.$$

operazione di pivoting: $h_1 = 40 - 4X_A - 10X_B + Y_1$

$$h_2 = Y_3 - X_A + \frac{1}{2}X_B$$

$$W = 40 - 5X_A - \frac{19}{2}X_B + Y_1 + Y_3 \rightarrow -W + 5X_A + \frac{19}{2}X_B - Y_1 - Y_3 = 40$$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-W$	$-z$	b
h_1	4	10	-1			1				40
Y_2	1	1		1						7
h_2	1	$-\frac{1}{2}$			-1	1				
$-z$	2	1						1	0	
$-W$	5	$\frac{19}{2}$	-1		-1		1			40

↑ ↑

come mai gli zis sono tutti negativi o nulli?

Nei problemi di minimizzazione non esistono variabili con coefficienti negativi?

← Non riesco a capire
il motivo per cui
esse non ci sono
variabili candidate
per entrare in base.

Puoi ora risolvere il problema con il grafico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z = 2X_A + X_B - Mh_1 - Mh_2 \\ 4X_A + 10X_B - Y_1 + h_1 = 40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ X_A - \frac{1}{2}X_B - Y_3 + h_2 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{array} \right.$$

$$h_1 = 40 - 4X_A - 10X_B + Y_1$$

$$h_2 = \frac{1}{2}X_B - X_A + Y_3$$

$$\begin{aligned} \max Z &= 2X_A + X_B - M(40 - 4X_A - 10X_B + Y_1) - M(-X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3) = \\ &= 2X_A + X_B - 40M + 4MX_A + 10MX_B - MY_1 + MX_A - \frac{1}{2}MX_B - MY_3 = \\ &= (2+5M)X_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{19}{2}M\right)X_B - MY_1 - MY_3 - 40M \end{aligned}$$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-Z$	b
h_1	4	10	-1			1			40
Y_2	1	1		1					7
h_2	1	$-\frac{1}{2}$			-1		1		
$-Z$	$2+5M$	$\frac{1+19M}{2}$	$-M$		$-M$			1	$40M$

↑

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-Z$	b
Y_2	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	4
Y_3	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	0	3
h_2	$\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	-1	$\frac{1}{20}$	1	0	2
$-Z$	$\frac{8+6M}{5}$	0	$\frac{2-14}{20}$	0	-1	$-\frac{2+4M}{20}$	0	0	$2M-2$

↑

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-Z$	b
Y_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
Y_3	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
X_A	1	0	$-\frac{1}{54}$	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{3}$
	0	0	$\frac{1+14M}{6}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1+2M}{10}$	$-\frac{4}{3}+M$	0	$-\frac{14}{3}$

$$\frac{5}{6}h_2 = X_A$$

$$X_B = \frac{2}{5}X_A$$

$$Y_2 = \frac{3}{5}X_A$$

$$-Z = \left(\frac{8+6M}{5}\right)X_A$$

↑ devo aver sbagliato i valori, perché qui dovrà far riapparire la h_2 (?)

Esercizio 2:

$$\min z = 4x_1 + x_2$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

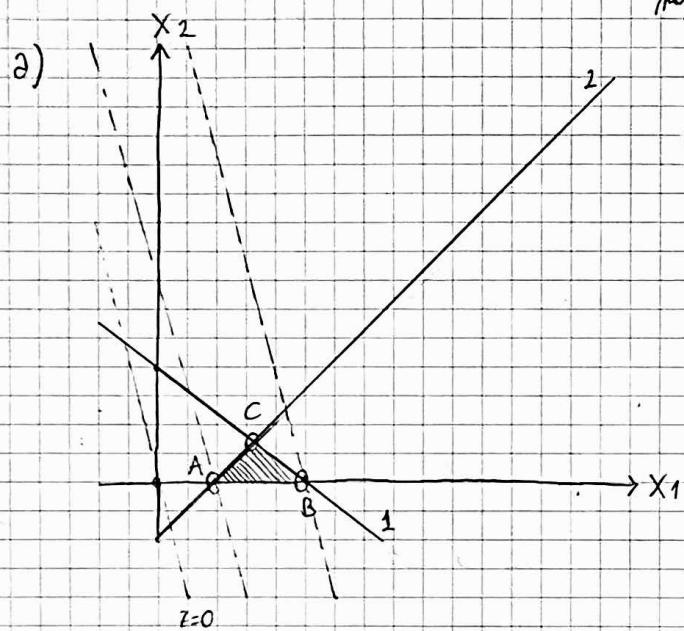
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) disegna dominio e risolvi graficamente

b) indica le componenti delle s.l.c. ed evidenzia quelle degeneri

c) esegui uno step del simplex e portalo alle indicate e specifica i vertici di partenza e di destinazione.

mo, il problema è di minimizzazione: A è ottimo



B dovrebbe essere il vertice ottimo.

$$\begin{array}{llllll} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & h_1 & h_2 \\ \hline A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5 variabili $\rightarrow m = 5$

2 vincoli $\rightarrow m = 2$

non dovrebbero esserci soluzioni degeneri.

c)

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	$-z$	b
y_1	4	5	1	0	0	0	20	
h_2	1	-1	0	-1	1	0	2	
$-z$	$4-H$	$1+H$	0	H	0	$\frac{1}{2}$	$-2H$	

$$\begin{matrix} x_1, x_2, y_1, y_2, h_1, h_2 \\ V = (0, 0, 20, 0, 0, 2) \end{matrix}$$

ho dei dubbi sulla correttezza di questo vertice.

operazioni da compiere:

$$y_1 - 4h_2$$

$$-z - (4-H)h_2$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	$-z$	b
y_1	0	9	1	4	-4	0	12	
x_1	1	-1	0	-1	1	0	2	
$-z$	0	5	0	4	$H-4$	$\frac{1}{2}$	-8	

soluzione ottima: $P = (2, 0, 12, 0, 0) \equiv A$

$$z = 8$$

Esercizio 3:

4 Tipi di merce (notole) conosciuto anche il
ogni notole ha un proprio : volume, peso; numero di notole
de recuperare

7 veicoli, ognuno con capacità massima 20 pallet e 400 kg.

costo giornaliero / veicolo = 200 €

obiettivo : minimizzare veicoli utilizzati

SCATOLA	# ESEMPLARI	# PALLETTI	VOLUME	PESO
1	3	8	70	
2	5	7	180	
3	2	3	90	
4	2	4	110	
e _i	v _i	p _i		

$x_{ij} \rightarrow$ numero di esemplari di Tipo i trasportati dal veicolo j

$y_j \rightarrow$ variabile binaria che mi indica se quel veicolo j è utilizzato

$\min \sum_{j=1}^7 y_j \rightarrow$ minimizzare numero di veicoli utilizzati

$\sum_{i=1}^4 x_{ij} p_i \leq 400 y_j \quad \forall j \in 1,..,7 \rightarrow$ vincolo sul peso

$\sum_{i=1}^4 x_{ij} v_i \leq 20 y_j \quad \forall j \in 1,..,7 \rightarrow$ vincolo sul volume

$\sum_{j=1}^7 x_{ij} = e_i \quad \forall i \in 1,..,4 \rightarrow$ vincoli sul numero di

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in 1,..,4, \forall j \in 1,..,7 \rightarrow$ esemplari

$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in 1,..,7$

Rimane ancora da implementare Transite Garobi

Esercizio 1:

5 clienti da rifornire: C1, C2, C3, C4, C5

si vuole costruire un massimo di due depositi

oltre che possibili sono due costruirli

A seconda di dove vengono costruiti, i due possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi.

costi $\rightarrow k \in$ capacità \rightarrow Tabelle

	costo di costruzione	capacità massima	$c'_i = \text{costo di costruzione}$
deposito 1	10000	180	
deposito 2	15000	230	
deposito 3	13000	500	$c''_i = \text{capacità massima}$

Nelle prossime Tabelle sono riportati il quantitativo di merce (in Tonnellate) richiesto da ciascun cliente e i costi (in k€) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	C1	C2	C3	C4	C5
deposito 1	15	13	27	9	7
deposito 2	12	21	34	21	3
deposito 3	7	10	2	17	12
Richiesta	91	170	135	153	110

$c_{ij} = \text{costo di trasporto}$

$r_{ij} = \text{richiesta del cliente}$

Ottimizzazione: minimizzare il costo complessivo

Ipotesi: non ci sono limitazioni sulle quantità di merce trasportabili.

$x_{ij} \rightarrow$ quantità di merce trasportata dal magazzino i verso il cliente j (espressa in Tonnellate)

$y_i \rightarrow$ variabile binaria che indica la costruzione del deposito i

$$\min \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 x_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^3 c'_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq c''_i y_i \quad \forall i = 1, \dots, 3 \rightarrow \text{vincoli di capacità massima}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad y_i \in \{0, 1\}$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i \leq 2$$

(proseguo alle pagine succ.)

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = r_j \quad \forall j = 1, \dots, 5 \rightarrow \text{vincoli sulla richiesta dei clienti}$$

Sposto per eventuali osservazioni:

Esercizio 5:

7 centri di domanda

5 punti $\rightarrow A, B, C, D, E$ nei quali poter costruire nuovi ipermercati

i clienti non devono distare più di 30 minuti da un qualsiasi ipermercato.

Costi di apertura dei centri di vendita: $A = 310, B = 250,$
 $C = 260, D = 330,$
 $E = 280 \leftarrow c_j$

Ottivivo: minimizzare i costi di apertura

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	34	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	47	51	26	19

$d_{ij} \rightarrow$ distanze del centro i dell'ipermercato j

$x_{ij} \rightarrow$ variabile binaria che indica l'offerta del centro all'ipermercato j

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^E c_j y_j \quad \leftarrow \text{sembra una sorta di set covering} \\ x_{ij} d_{ij} \leq 30 y_j \quad \forall i = 1, \dots, 7 \text{ e } \forall j = A, \dots, E \\ \sum_{j=1}^E x_{ij} \geq 1 \quad \rightarrow \text{vincolo di copertura} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad y_j \in \{0,1\} \end{array} \right.$$

b) Si suppone che l'orologio rilegge ottimale il centro B se almeno uno dei centri C o D sia attivato. Come cambia il modello?

$$y_B \leq y_c + y_d$$

si deve aggiungere il vincolo appena descritto. Il modello sarà dunque:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=A}^E c_j y_j \\ \text{s.t.} & x_{ij} d_{ij} \leq 30 y_j \quad \forall i=1, \dots, 7 \text{ e } \forall j=A, \dots, E \\ & \sum_{j=A}^E x_{ij} \geq 1 \quad \forall i=1, \dots, 7 \end{aligned}$$

$$y_B \leq y_c + y_d$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i=1, \dots, 7 \text{ e } \forall j \in A, \dots, E$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = A, \dots, E$$

Esercizio 6:

dimensioni totali = 95 cm^2

argomenti = 10

S_i

c_i

Argomento	Spazio richiesto (cm^2)	% copertura dell'esame
1	10	5
2	18	10
3	22	15
4	16	10
5	14	10
6	20	5
7	32	20
8	12	5
9	12	15
10	10	5

Tre dei foglietti $\{2, 3, 7, 8, 9\}$

O porto il 9, o il 10.

Porto il 5 solo se c'è anche il 4.

$y_i \rightarrow$ variabile binaria che indica se il foglietto è messo nella scatola

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{10} c_i y_i \rightarrow \text{massimizzo le coperture} \\ y_2 + y_3 + y_7 + y_8 + y_9 \geq 3 \\ y_9 \leq y_7 \\ y_{10} \leq H(1-y) \\ y_5 \leq y_4 \\ \sum_{i=1}^{10} S_i y_i \leq 95 \end{array} \right.$$

Esercizio 7:

1 macchina \rightarrow capace di un lavoro (1 lavoro per volta)

3 lavori, con tempo di processamento, rispettivamente:

$$P_1 = 2 \quad P_2 = 3 \quad P_3 = 4$$

determinare le sequenze che minimizzano il medio dei tempi di completamento dei lavori, tenendo conto che:

- se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del 2° lavoro deve aspettare un tempo $\Delta_3 = 2$ dopo il termine del 1° lavoro
- se il Terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve aspettare un tempo $\Delta_2 = 3$ dopo il termine del 1° lavoro

Esercizio 8:

$G(N, A) \rightarrow$ non orientato

nove dislocate delle pattuglie nei nodi \rightarrow 2 Tipi: fisse e mobili
 Le Truppe fisse difendono solo il nodo i e per dislocare su spende 2.
 Le Truppe mobili difendono il nodo i e Tutti i nodi adiacenti, ma
 per dislocare le truppe si spende 3.

Oggetto: difendere Tutti i nodi del grafo con costo minimo.

$$\min \sum_i 2Y_{i1} + \sum_i 3Y_{i2} \rightarrow \text{minimizzare i costi}$$

costo delle \downarrow variabile binaria che indica
 localizzazione se nel nodo i c'è stata posizionata
 delle pattuglie fisse una pattuglia fissa.

ipotesi: ogni nodo ha una variabile che indica se è difeso $\rightarrow E_i$

$$E_i \geq Y_{i1}$$

$$E_i \geq Y_{i2}$$

$$E_i \geq Y_{j2}, \forall j \in S(i)$$

$$E_i \leq Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{j2} \quad \forall j \in S(i)$$

$$E_i \in \{0, 1\} \quad Y_{i1}, Y_{i2} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, |N|$$

\downarrow
ordinamento dei
nodi

ogni nodo deve:

- d'essere difeso da una pattuglia fissa ($Y_{i1} = 1$)
 - d'essere difeso da una pattuglia mobile localizzata su di lui. ($Y_{i2} = 1$)
 - d'essere difeso da una pattuglia mobile localizzata su un nodo e lui vicino ($\sum_{j \in S(i)} Y_{j2} \geq 1$)
- (quindi almeno una $Y_{j2} = 1 \quad \forall j \in S(i)$)

Dovrò ancora impostare il vincolo di copertura:

$$\sum_{i=1}^{|N|} E_i = |N|$$

Il modello, se non ho fatto errori, dovrebbe essere:

$$\min \sum_{i=1}^{|N|} 2Y_{i1} + \sum_{i=1}^{|N|} 3Y_{i2}$$

$$E_i \geq Y_{i1} \quad \forall i = 1, \dots, |N|$$

$$E_i \geq Y_{i2} \quad \forall i = 1, \dots, |N|$$

$$E_i \geq Y_{j2} \quad \forall i = 1, \dots, |N| \text{ e } \forall j \in S(i)$$

$$E_i \leq Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{j2} \quad \forall i = 1, \dots, |N| \text{ e } \forall j \in S(i)$$

$$\sum_{i=1}^{|N|} E_i = |N| \quad E_i, Y_{i1}, Y_{i2} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, |N|$$

Esercizio 9:

$$\# \text{ bamboline} = 15000 = Y_1$$

$$\# \text{ automobili} = 17000 = Y_2$$

$$\# \text{ libri} = 12000 = Y_3$$

$r_j \rightarrow$ quantità richiesta di risorse j

$d_{ij} \rightarrow$ numero di oggetti di Tipo j
nello stock i

STOCK				c_i
	$j=1$ BAMBOLINE	$j=2$ AUTOMOBILINE	$j=3$ LIBRI	
$i=1$	1	100	40	90
$i=2$	2	50	90	75
$i=3$	3	80	60	80
$i=4$	4	25	125	100

non è possibile acquistare pochi sia dello stock 1 che 2

Bollo noto riceve uno sconto di 2000€ se il numero complessivo di stock 3 e 4 acquistati è maggiore di 120

obiettivo: minimizzare i costi

$$\min \sum_{i=1}^4 x_i c_i - 2000 \text{ €}$$

$$\# \text{ stock } i \text{ acquistati:}$$

$$\sum_{i=1}^4 d_{ij} x_i = Y_j \quad \forall j = 1, \dots, 3 \rightarrow \text{vincolo sulle richieste}$$

$$x_1 \leq M Y_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq M Y_2$$

$$x_2 \geq 0$$

$$Y_1 + Y_2 = 1$$

→ vincoli di alternativa sugli stock di tipo 1 e 2

pensate sia che → $x_3 + x_4 \geq 121 \text{ €}$] → vincolo per lo sconto di imprecisione su $\epsilon \in \{0, 1\}$] 2000€ di superamento delle soglie (120)

Le Threccie non

costruisce il modello

a essere intero, quindi

il 121 non ha molto

significato, ma d'altronde

$x_3 + x_4 \geq 120 \text{ €}$ Teme

non funzionerebbe. Probabilmente, anche per senso logico, il modello deve essere intero.

in realtà mi trovo con il vincolo

descritto nell'ultima osservazione

↑ ↳ continua ↳

$$\min \sum_{i=1}^4 C_i X_i - 2000 Y_3$$

$$\sum_{i=1}^4 d_{ij} X_i = Y_j \quad \forall j = 1, \dots, 3$$

$$X_1 \leq M Y_1$$

$X_1 \geq 0 \rightarrow$ ridondanti, ma inseriti per chiarezza

$$X_2 \leq M Y_2$$

$$X_2 \geq 0$$

$Y_1 + Y_2 \leq 1 \rightarrow$ corretto rispetto al modello precedente

$$X_3 + X_4 > 120 Y_3$$

$X_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \rightarrow$ volendo possono essere considerate intere, ma dovrebbe essere modificato il vincolo:

$$\sum_{i=1}^4 d_{ij} X_i = Y_j$$

in:

$$\sum_{i=1}^4 d_{ij} X_i \geq Y_j$$

Siccome non sono sicuro del risultato, lascio dello spazio per eventuali osservazioni:

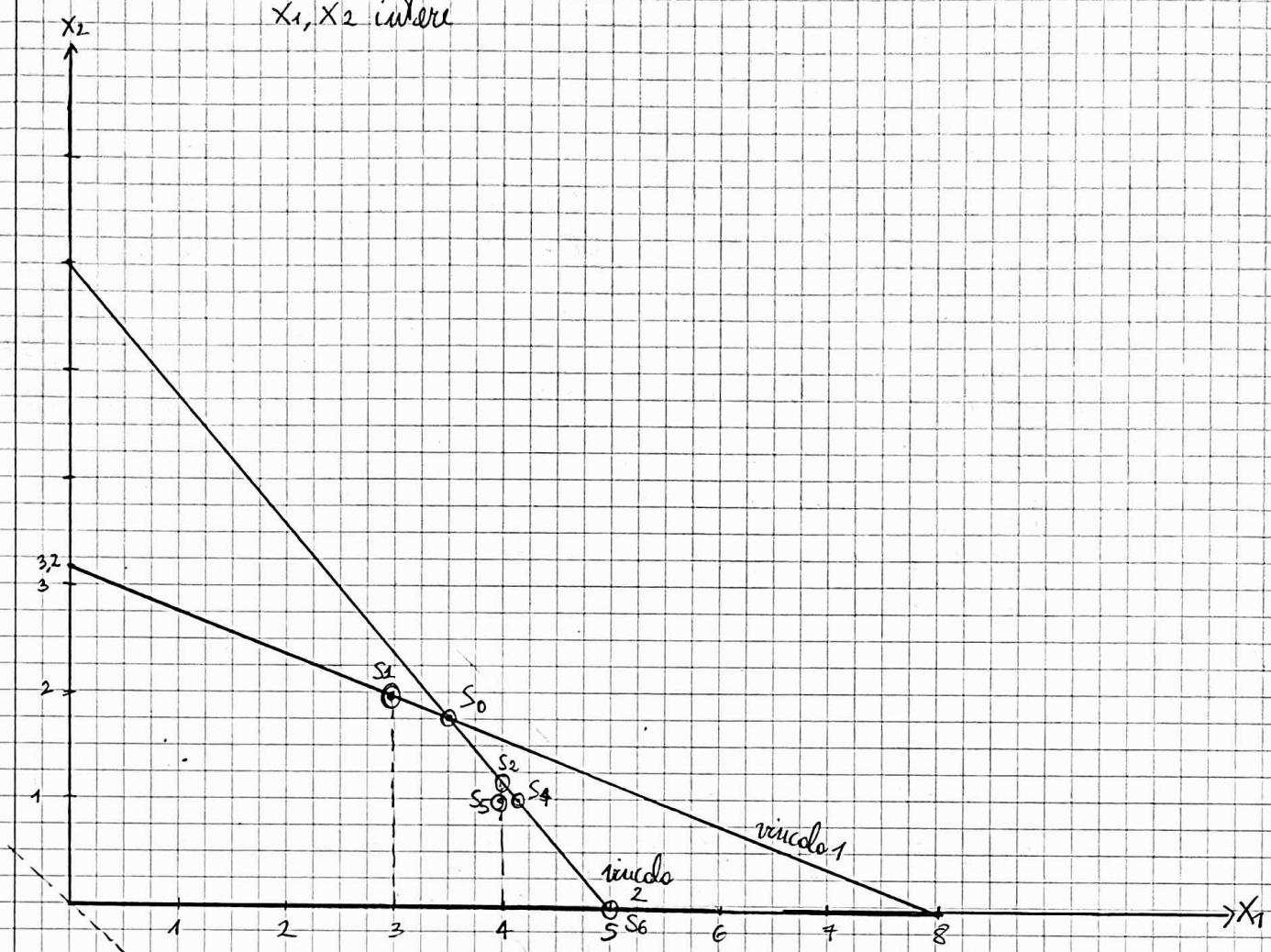
Esercizio 10:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

$$2X_1 + 5X_2 \leq 16$$

$$6X_1 + 5X_2 \leq 30$$

X_1, X_2 intere



$$S_0 \\ x_1 \leq 3 \\ U_0 \approx 5,3$$

$$S_1 \\ Y_1 = (3, 2) \\ U_1 = 5 \\ x_2 \geq 2 \\ S_2 \\ U_2 \approx 5,2$$

$$S_3 \\ \text{inomiss.} \\ S_4 \\ x_2 \leq 1 \\ U_4 \approx 5,2$$

$$S_5 \\ Y_5 = (4, 1) \\ U_5 = 5 \\ x_1 \leq 4 \\ S_6 \\ Y_6 = (5, 0) \\ U_6 = 5 \\ x_1 \geq 5$$

Esercizio 16:

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + h_1 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - 3x_3 + h_2 - Y_2 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$W = h_1 + h_2 =$$

$$= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 +$$

$$+ 6 - 3x_1 - x_2 + 3x_3 \cancel{+} +$$

$$+ Y_2 =$$

$$= 9 - 4x_1 + x_2 + x_3 \cancel{+} + Y_2$$

$$- W - 4x_1 + x_2 + x_3 + Y_2 \cancel{=} = -9$$

ragiono minimo per W .

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-W$	b
h_1	1	-2	+2	0	1	0	0	0	3
$\rightarrow h_2$	(3)	1	-3	-1	0	1	0	0	6
$-W$	-4	1	1	1	0	0	0	1	-9
$-z$	3	2	4	0	0	0	1	0	0



	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-W$	b
$\rightarrow h_1$	0	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
x_1	1	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	2
$-W$	0	$\frac{7}{3}$	-3	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	1	-1
$-z$	0	1	7	1	0	-1	1	0	-6



	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-W$	b
x_3	0	$-\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x_1	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{7}{3}$
$-W$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1	0
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{25}{3}$

	x_1	x_2	x_3	y_2	$-z$	b
x_3	0	$-\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	0	$\frac{7}{3}$
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	1	$-\frac{25}{3}$

→ soluzione ottima: $x_1 = x_2 = y_2 = 0$

$$x_1 = \frac{7}{3} \quad x_3 = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{25}{3}$$

Esercizio 11:

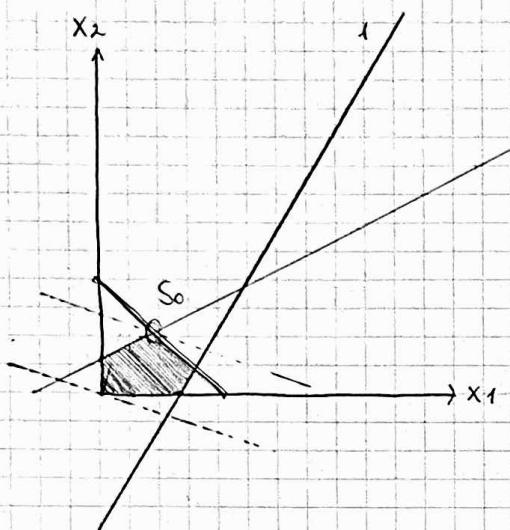
$$\max x_1 + 3x_2$$

$$1) 4x_1 - 2x_2 \leq 11$$

$$2) -2x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$3) x_1 + x_2 \leq 4$$

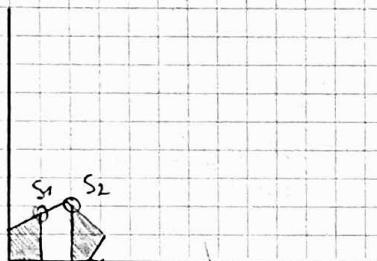
$x_1, x_2 \geq 0$ (intere)



$$\begin{array}{ll} S_0 & U_0 \approx 8,1 \\ x_1 \leq 1 & \\ S_1 & U_1 \approx 6,4 \\ x_1 \geq 2 & \\ S_2 & U_2 \approx 8 \end{array}$$

$$Y_2 = (2, 2)$$

soluzione ottima



Esercizio 12:

disponibilità \rightarrow 14 milioni

4 Tipi di investimenti

	i			
INVESTIMENTO	1	2	3	4
RITORNO NETTO	16	22	12	8
CAPITALE DA INVESTIRE	5	7	4	3

$$\max \sum_{i=1}^4 r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^4 c_i x_i \leq 14$$

$$x_i \text{ intero } \forall i = 1, \dots, 4$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

↓

$$\max 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

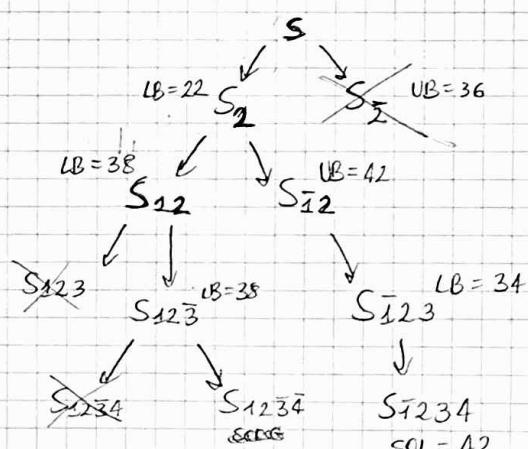
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e intere}$$

Osservazione: questo modello è in PLI, ma le frasi elencate allude alla possibilità di scegliere intervenire o non scegliere effettuare di effettuare l'investimento. Per cui, vista anche la difficoltà di effettuare manualmente un branch and bound con 4 variabili, non rimane altro che modellare il problema come un problema di ZCINO.

$$\max 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$



incrivendo l'elemento di ricorso 22 (quindi con $x_2 = 1$) ho un $LB = 22$ (lo uso per ridurre i nodi)

Esercizio 13:

due Tipi di solventi $\rightarrow 1 \text{ e } 2$

due Tipi di vernici $\rightarrow A \text{ e } B$

$$\text{quintali} \rightarrow 1B = 1 \text{ solv. } 1 + 3 \text{ solv. } 2$$

$$\rightarrow 1A = 6 \text{ solv. } 1 + 1 \text{ solv. } 2$$

l'isogone usere almeno 12 unità di solvente 1 e almeno 12 unità di solvente 2.

Si devono produrre in Totale, Tra A e B, massimo 9 quintali di vernice.

i costi di A e B sono equivalenti

obiettivo: minimizzare il costo di produzione

a) modellare il problema in PL

b) risolvere graficamente

c) branch and bound s'intendesi con "analisi grafica".

a) $i \in \{1, 2\} \rightarrow$ indice dei solventi
 $j \in \{A, B\} \rightarrow$ indice delle vernici \rightarrow non userò gli indici, particolarizzero il modello

$$\min X_A + X_B$$

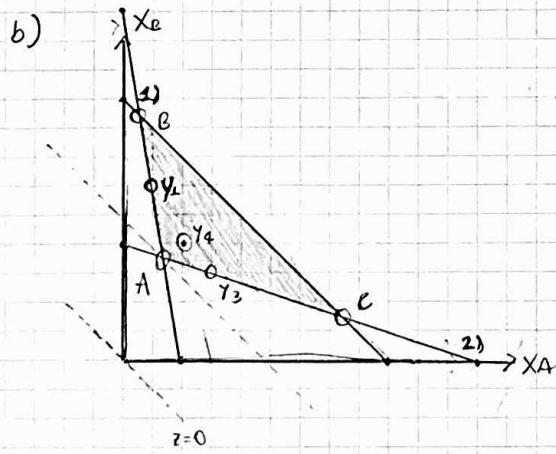
$$1) 6X_A + X_B \geq 12$$

$$2) X_A + 3X_B \geq 12$$

$$3) X_A + X_B \leq 9$$

$$X_A, X_B \geq 0$$

note: le variabili non sono intere



A è il vertice ottimo

c)

$$S_0 \quad x_0 \approx 4,8$$

$$x_A \leq 1$$

$$S_1 \quad y_1 = (1,6)$$

$$L_1 = 7$$

$$x_A \geq 2$$

$$S_2 \quad y_2 \approx 5,5$$

$$x_B \leq 3$$

$$x_B \geq 4$$

$$S_3 \quad y_3 = (3,3)$$

$$y_4 = (2,4)$$

$$L_3 = 6$$

$$L_4 = 6$$

Esercizio 14:

10 display

18 logica di controllo

12 Trasmettitori

21 Vestierini

9 moduli di navigazione

10 led

Telecomandi \rightarrow 2 Tipi \rightarrow A e B

A \rightarrow 1 display, 1 modulo di navigazione, 2 Vestierini, 2 moduli di logica, 1 Trasmettitore, 1 led

B \rightarrow 2 display, 3 Vestierini, 2 moduli di logica e 3 Trasmettitori
guadagno netto di A \rightarrow 3 €
" " " B \rightarrow 8 €

Ottimizzazione del guadagno

$$\max 3X_A + 8X_B$$

$$X_A + 2X_B \leq 10 \rightarrow \text{vincolo sui display}$$

$$X_A \leq 9 \rightarrow \text{vincolo sui moduli di navigazione}$$

$$2X_A + 3X_B \leq 21 \rightarrow \text{vincolo sui Vestierini}$$

$$2X_A + 2X_B \leq 18 \rightarrow \text{vincolo sui moduli di logica}$$

$$X_A + 3X_B \leq 12 \rightarrow \text{vincolo sui Trasmettitori}$$

$$X_A \leq 10 \rightarrow \text{vincolo sui led}$$

Ripulisce il modello:

$$\max 3X_A + 8X_B$$

$$X_A + 2X_B \leq 10$$

$$X_A \leq 9$$

$$2X_A + 3X_B \leq 21$$

$$X_A + X_B \leq 9$$

$$X_A + 3X_B \leq 12$$

$$X_A, X_B \geq 0 \text{ e intere}$$

Esercizio 15:

$$\begin{aligned} \max & \quad z = x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} & \quad x_1 - x_2 \leq 3 \\ & \quad 5x_1 - 2x_2 = 8 \\ & \quad -x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

usare il metodo
delle righe fatte

$$\max z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \min w &= b_2 + b_3 \rightarrow w = 8 - 5x_1 + 2x_2 + \\ & \quad x_1 - x_2 + y_1 = 3 \quad + 1 + x_1 - 3x_2 + y_3 = \\ & \quad 5x_1 - 2x_2 + b_2 = 8 \quad = -4x_1 - x_2 + y_3 + 9 \\ & \quad -x_1 + 3x_2 - y_3 + b_3 = 1 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	y_1	y_3	b_2	b_3	$-w$	$-z$	b
y_1	1	-1	1						3
b_2	(5)	-2		1					8
b_3	-1	3		-1	1				1
$-w$	-4	-1		1		1			-9
$-z$	1	5	0	0	0	0	0	1	0

	x_1	x_2	y_1	y_3	b_2	b_3	$-w$	$-z$	b
y_1	0	$-\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{7}{5}$
x_1	1	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{8}{5}$
b_3	0	$(\frac{1}{5})$	0	-1	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{13}{5}$
$-w$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{4}{5}$	0	1	0	$-\frac{13}{5}$
$-z$	0	$\frac{21}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	$-\frac{25}{5}$

	x_1	x_2	y_1	y_3	b_2	b_3	$-w$	$-z$	b
y_1	0	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	0	2
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	0	2
x_2	0	1	0	$-\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	1
$-w$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$-z$	0	0	0	$\frac{21}{13}$	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{21}{13}$	0	1	$-\frac{4}{5}$

$$y_1 - x_1 :$$

$$1 - 1 = 0$$

$$-w + 4x_1 :$$

$$-4 + 4(1) = 0$$

$$-1 + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$-1 + 4(\frac{2}{5}) = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 4(0) = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$1 + 4(0) = 0$$

$$0 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$0 + 4(\frac{1}{5}) = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 + 4(0) = 0$$

$$3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$$

$$1 + 4(0) = 0$$

$$b_3 + x_1 :$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$-9 + 4(\frac{8}{5}) = 0$$

$$3 - \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$-2 + x_1 :$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$-1 + 0 = -1$$

$$5 + \frac{2}{5} = \frac{27}{5}$$

$$0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$0 - 0 = 0$$

$$\frac{1}{5} + 0 = 1$$

$$0 - 0 = 0$$

$$1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$$

$$0 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$\frac{1}{5} + 0 = 1$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - \frac{8}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

→ posso rimuovere $b_2, b_3, -w$

continua i

calcoli su un

altro foglio.

	x_1	x_2	y_1	y_2	$= 1$	b
y_1	0	0	1	-3	0	1
x_1	1	0	0	-\frac{1}{3}	0	2
x_2	0	1	0	-\frac{2}{3}	0	1
$-t$	0	0	0	\frac{2}{3}	1	-t

↑

Esercizio 17:

$$\max Z = 10X_1 + 12X_2 + 5X_3 + 7X_4 + 9X_5$$

$$5X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 2X_4 + 7X_5 \leq 14$$

$$X_i = \{0,1\} \quad \forall i=1,\dots,5$$

volare "speciale" assunto alle variabili:

$$X_1 \rightarrow 2 = 2$$

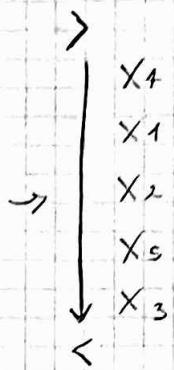
$$X_2 \rightarrow 3/2 = 1,5$$

$$X_3 \rightarrow 5/6 = 0,83$$

$$X_4 \rightarrow 7/2 = 3,5$$

$$X_5 \rightarrow 9/7 \approx 1,28$$

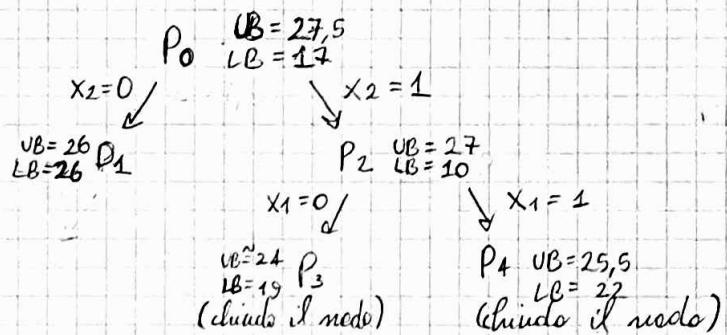
\rightarrow ordino le variabili
in ordine di convenienza



17

↑

soluzione ottima $\Rightarrow (X_4=1, X_1=1, X_2=\frac{7}{8})$ sol. ommissibile $\Rightarrow (X_4=1, X_1=1)$



Esercizio 18:

produzione max = 10 Tonnellate

2 prodotti $\rightarrow A \circ B$

produzione di $B = 7$ Tonnellate

produzione $A = 2.5$ produzione B

$$\frac{\text{profitto } A}{\text{profitto } B} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{profitto } A = \frac{2}{3} \text{ profitto } B$$

Euroto

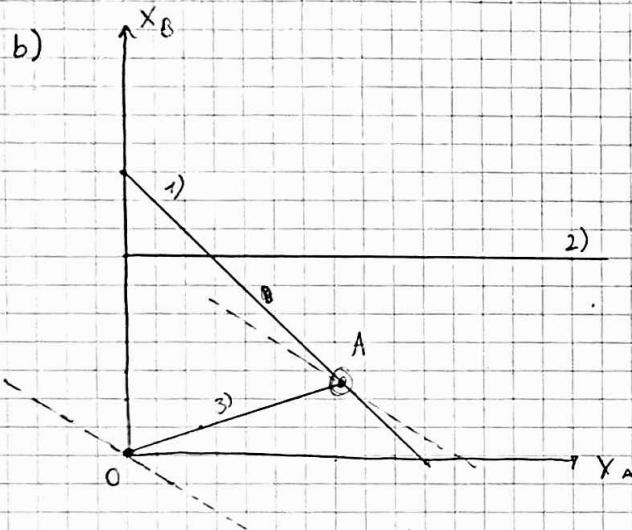
a) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B$

1) $X_A + X_B \leq 10$

2) $X_B \leq 7 \rightarrow X_B + Y_2 = 7$

3) $X_A -$

$X_A, X_B \geq 0$



f) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B - h$

$X_A + X_B + Y_1 = 10$

$X_A - 2.5X_B + h = 0$

c) $X_A \quad X_B \quad Y_1 \quad Y_2 \quad h_3$
 $0 := 0 \quad = 0 \quad > 0 \quad > 0 \quad = 0$
 $A := > 0 \quad > 0 \quad = 0 \quad > 0 \quad = 0$

e) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B$

$X_A + X_B \leq 10$

$X_A - 2.5X_B = 0$

$X_A, X_B \geq 0$

	X_A	X_B	Y_1	h	-2	b
Y_1	1	1	1	0	0	10
h	1	-2.5	0	1	0	0
-2	$\frac{2}{3}$	1	0	-4	1	0

	X_A	X_B	Y_1	h	-2	b
Y_1	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	10
X_B	$-\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0
-2	$\frac{16}{15}$	0	0	$-\frac{54}{5}$	1	0

	X_A	X_B	Y_1	h	-2	b
X_A	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
X_B						

-7

Esercizio 18:

produzione max = 10 tonnellate

produzione di B = 7 tonnellate

produzione di A = produzione B = 2.5

profitto di A = $\frac{2}{3}$ profitto di B

2 prodotti $\Rightarrow A \text{ e } B$

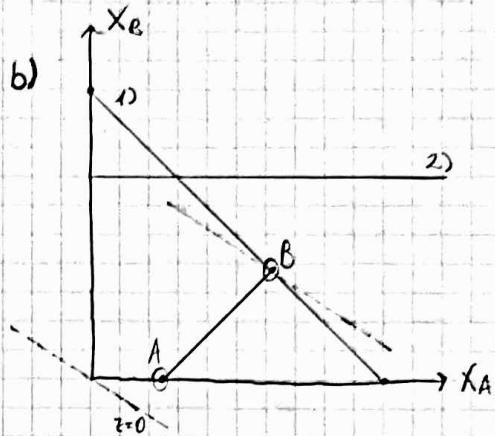
$$\text{a) } \max \frac{2}{3}X_A + X_B$$

$$X_A + X_B \leq 10$$

$$X_B \leq 7$$

$$X_A - X_B = 2.5$$

$$X_A, X_B \geq 0$$



$$\text{c) } X_A \quad X_B \quad Y_1 \quad h$$

$$A: > 0 \quad = 0 \quad > 0 = 0$$

$$B: > 0 \quad > 0 \quad = 0 = 0$$

$$\text{d) } \max \frac{2}{3}X_A + X_B$$

$$X_A + X_B \leq 10$$

$$X_A - X_B = 2.5$$

$$X_A, X_B \geq 0$$

$$\text{f) } \max \frac{2}{3}X_A + X_B - Mh$$

$$X_A + X_B + Y_1 = 10$$

$$X_A - X_B + h = 2.5 \rightarrow h = 2.5 - X_A + X_B$$

$$X_A, X_B, Y_1, h \geq 0$$

$\overline{\text{II}}$

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
Y_1	1	1	1	0	0	10
$\rightarrow h$	0	-1	0	1	0	2.5
$-z$	$\frac{2+H}{3}$	$1-H$	0	0	1	$2.5H$

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{3}X_A + X_B - M(2.5 - X_A + X_B) = \\ &= \left(\frac{2}{3} + H\right)X_A + (1-H)X_B - M2.5 = \end{aligned}$$

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
Y_1	0	(2)	1	-1	0	7.5
X_A	1	-1	0	1	0	2.5
$-z$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-(\frac{2+H}{3})$	1	$-\frac{5}{3}$

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
X_B	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{4}$
X_A	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{25}{4}$
$-z$	0	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} + H$	1	$-\frac{95}{12}$

soluzione ottima: $X_A = \frac{25}{4}$ $X_B = \frac{15}{4}$ $Y_1 = 0$ $h = 0$

$$z = \frac{25}{12}$$

Esercizio 20:

due prodotti $\rightarrow P_1$ e P_2

due risorse $\rightarrow R_1$ e R_2

$$P_1 = 6R_1 + 9R_2$$

$$P_2 = 10R_1 + 6R_2$$

$$R_1 \leq 80$$

$$R_2 \leq 54$$

$$P_1 > P_2 + 2$$

$$P_1 + P_2 \geq 5$$

$$5P_1 + 2P_2$$

obiettivo: minimizzare i costi di produzione

d) min $5X_1 + 2X_2$

1) $6X_1 + 10X_2 \leq 80$

2) $9X_1 + 6X_2 \leq 54$

3) $X_1 - X_2 \geq 2$

4) $X_1 + X_2 \geq 5$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

min $5X_1 + 2X_2 + Mh_2 + Mh_3$

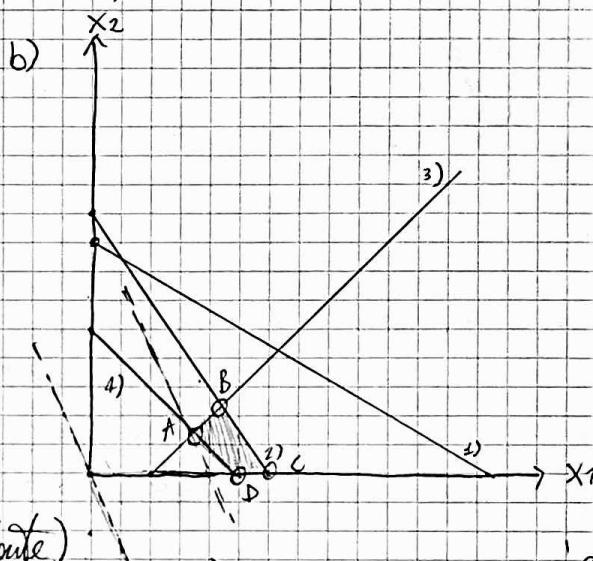
e) (il primo vincolo è ridondante)

$$9X_1 + \cancel{6}X_2 + Y_1 = 54$$

$$X_1 - X_2 - Y_2 + h_2 = 2$$

$$X_1 + X_2 - Y_3 + h_3 = 5$$

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, h_2, h_3 \geq 0$$



c) $X_1 \ X_2 \ Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ | \ h_2 \ h_3$

A: $>0 \ >0 \ >0 = 0 = 0 = 0 = 0$

B: $>0 >0 = 0 = 0 >0 = 0 = 0$

C: $>0 = 0 = 0 >0 >0 = 0 = 0$

D: $>0 = 0 >0 >0 = 0 = 0 = 0$

d) A è il vertice ottimo

f) operazioni preliminari: $h_2 = 2 - X_1 + X_2 + Y_2 - ?$

$$h_3 = 5 - X_1 + X_2 - Y_3$$

$$h_2 + h_3 = 7 - 2X_1 + 2X_2 + Y_2 - Y_3$$

dunque: $Z = 5X_1 + 2X_2 + 7M - 2M X_1 + 2M X_2 + M Y_2 - M Y_3 + 7M - 1$

Ora possiamo impostare le tabelline del simplex.

$$Z = (5 - 2M)X_1 + (2 + 2M)X_2 + M Y_2 - M Y_3 + 7M - 1$$

Test A

**Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 14-06-2021**

Esercizio 1:

Una ditta di trasporti distribuisce frigoriferi in 4 città A, B, C e D a partire da 3 centri di distribuzione 1, 2 e 3 e vuole valutare la convenienza ad aprire il centro 4. Il costo di trasporto di un frigorifero in euro, le richieste delle città e le disponibilità dei centri di distribuzione (già aperti o potenziali) sono sintetizzati nella seguente tabella:

c

	Città A	Città B	Città C	Città D	Disponibilità centri
Centro 1	4	3	2	3	1800
Centro 2	2	4	3	1	3000
Centro 3	2	3	4	5	1800
Centro 4	3	1	2	2	1000
Richieste città	1000	2000	1700	1300	

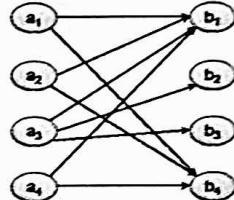
Scrivere il modello di programmazione lineare che permetta di minimizzare i costi di trasporto e di valutare la convenienza a d aprire il nuovo centro 4 considerando che:

- il costo di apertura del nuovo centro è di 1000 euro;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire una domanda di almeno 600 frigoriferi;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire almeno 2 città diverse.

Esercizio 2:

Sia dato il grafo bipartito in figura che rappresenta un problema di matching di cardinalità massima in cui si vuole determinare il massimo numero di archi non adiacenti.

- 1) Si formuli il problema come un problema di programmazione lineare intera.
- 2) Si trasformi il problema in un problema di massimo flusso equivalente e lo si risolva utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson.



Esercizio 3:

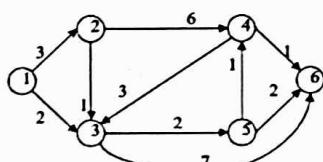
Una ditta produce leghe per la saldatura (L1, L2, L3) a partire da tre elementi base: stagno, zinco e rame. Le leghe vengono vendute in barre. Le quantità degli elementi (in grammi) per ogni barra sono:

	Lega 1	Lega 2	Lega 3
Stagno	40	30	20
Zinco	70	90	20
Rame	80	70	120

L'azienda possiede 300, 800 e 1000 Kg di stagno, zinco e rame. I guadagni per una barra di lega sono: 16 per la lega1, 10 per la lega2 e 2 per la lega3. Si determini, formulando il problema come un problema di Pl e risolvendolo mediante l'algoritmo del simplex, il numero di barre da realizzare per ogni lega, al fine di massimizzare i guadagni.

Esercizio 4:

Si consideri il seguente grafo:

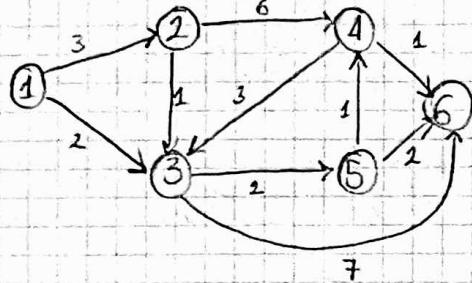


- si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati al corso per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo);

c) si disegni l'albero dei cammini minimi.

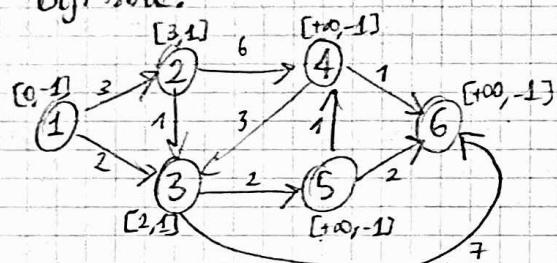
Prova del 14/06/2021 \Rightarrow esercizio 4

Test A

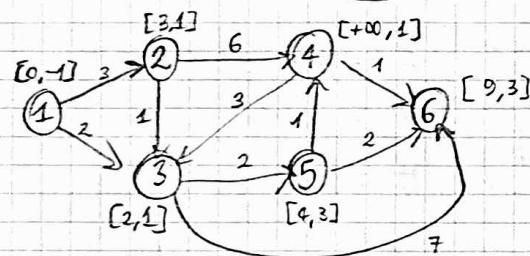


- a) Il grafo è aclico, non ha arci negativi, né arci di costo totale negativo.

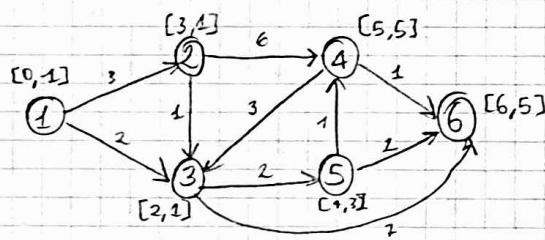
- b) Possiamo usare l'algoritmo label setting come quello di Dijkstra.



Rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 3.
Aggiorniamo l'etichetta temporanea di 2.

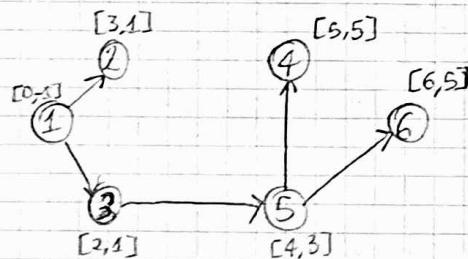


Rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 5.
Aggiorniamo l'etichetta del nodo 6.



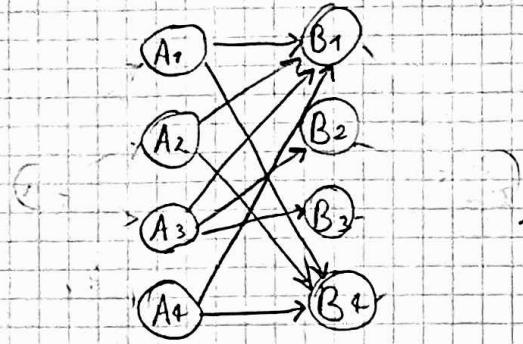
Rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 4.
Aggiorniamo l'etichetta del nodo 6.

- c) Visitando il nodo 4, si scopre che non è possibile migliorare l'etichetta di nessun nodo nelle vicinanze, per cui rendiamo definitive tutte le etichette rimanenti.



Prova del 14/06/2021 → Esercizio 2:

Test A



$$i \in A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$j \in B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

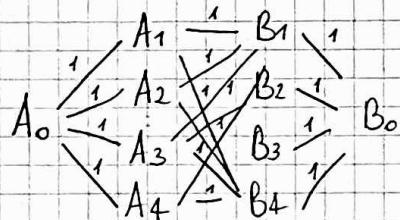
$$1) \max \sum_i \sum_j x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in B$$

$$\sum_j x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in A$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

2)



min i

$$G(N, A)$$

$$i, j \in N$$

$$(i, j) \in A$$

$$\max f$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \delta(i)} x_{ji} = \begin{cases} f, & \forall i = A_0 \\ 0, & \forall i \in N \setminus \{A_0, B_0\} \\ -f, & \forall i = B_0 \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

modo precedente simbolico

$$\text{Iterazione 1: } Q = A_0 \quad \dots \quad A_0 \rightarrow [0]$$

$$\text{"/ 2: } Q = [A_1, A_2, A_3, A_4] \quad A_1, A_2, A_3, A_4 \rightarrow [A_0]$$

$$\text{"/ 3: } Q = [A_2, A_3, A_4, B_1, B_4] \quad B_1, B_4 \rightarrow [A_1]$$

$$\text{"/ 4: } Q = [A_3, A_4, B_1, B_4]$$

$$\text{"/ 5: } Q = [A_4, B_1, B_4, B_2, B_3] \quad B_2, B_3 \rightarrow [A_3]$$

$$\text{"/ 6: } Q = [B_1, B_4, B_2, B_3]$$

$$\text{"/ 7: } Q = [B_2, B_3, B_4, B_0] \quad B_0 \rightarrow B_1$$

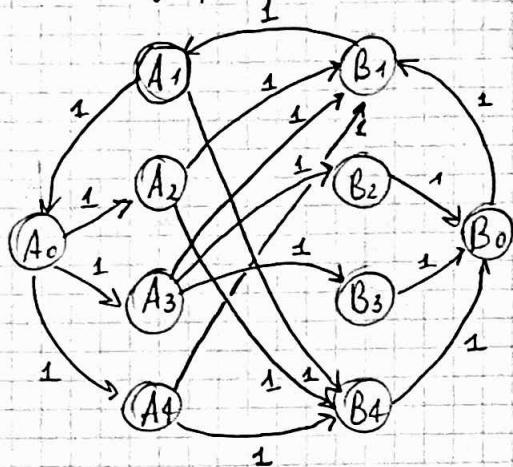
condizione di Terminatione

comune aumentante:

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0$$

$$\text{flusso} = 1$$

Ridisegno il grafo residuo:



Iterazione 1: $Q = [A_0]$ $A_0 \rightarrow [0]$

2: $Q = [A_2, A_3, A_4]$

$A_2, A_3, A_4 \rightarrow [A_0]$

3: $Q = [A_3, A_4, B_1, B_4]$

$B_1, B_4 \rightarrow [A_2]$

4: $Q = [A_4, B_1, B_4, B_2, B_3]$

$B_2, B_3 \rightarrow [A_3]$

5: $Q = [B_1, B_4, B_2, B_3]$

6: $Q = [B_4, B_2, B_3]$

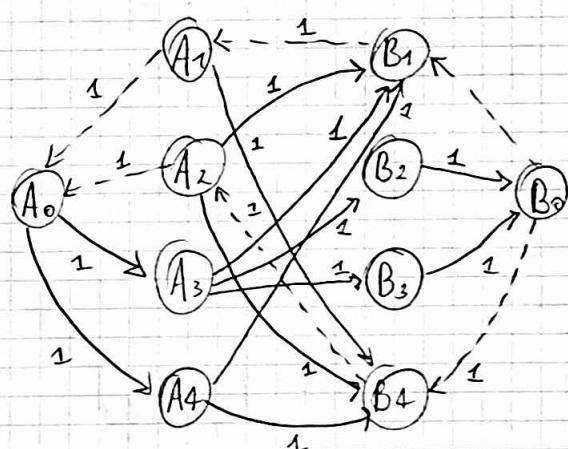
7: $Q = [B_2, B_3, B_0]$

$B_0 \rightarrow [B_4]$

condizione di terminazione verificata.

per cammino aumentante: $A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow B_4 \rightarrow B_0$ flusso = 2

Per evitare confusione, gli archi "inversi" si tratteggiano:



1: $Q = [A_0]$ $A_0 \rightarrow [0]$

2: $Q = [A_3, A_4]$ $A_3, A_4 \rightarrow [A_0]$

3: $Q = [A_4, B_2]$ $B_2 \rightarrow [A_3]$

4: $Q = [B_2, B_4]$ $B_4 \rightarrow [A_4]$

5: $Q = [B_4, B_0]$ $B_0 \rightarrow [B_2]$

cammino aumentante: $A_0 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_0$
flusso = 3

1: $Q = [A_0]$ $A_0 \rightarrow [0]$

2: $Q = [A_4]$ $A_4 \rightarrow [A_0]$

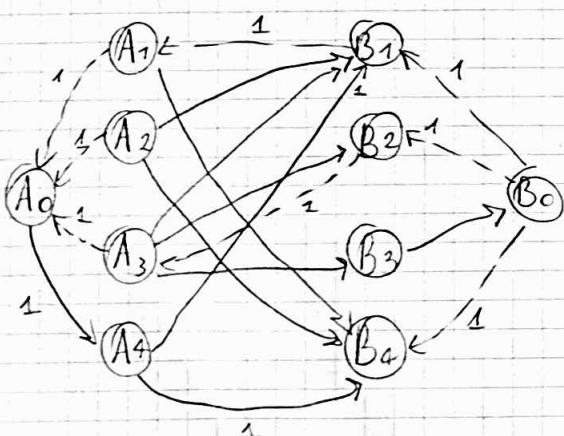
3: $Q = [B_4]$ $B_4 \rightarrow [A_4]$

4: $Q = []$

condizione di terminazione

↓

flusso massimo = 3



Prova d'esame del 14/06/2021
Esercizio 1:

Test A

3 centri di distribuzione (1, 2, 3)

+ ulter.

	A	B	C	D	disponibilità
1	4	3	2	3	1800
2	2	4	3	1	3000
3	2	3	4	5	1800
4	3	1	2	2	1000
richieste	1000	2000	1700	1300	
ulter.					

$$\begin{aligned}
 \text{min} \quad & 4X_{1A} + 3X_{1B} + 2X_{1C} + 3X_{1D} + \\
 & + 2X_{2A} + 4X_{2B} + 3X_{2C} + X_{2D} + \\
 & + 2X_{3A} + 3X_{3B} + 4X_{3C} + 5X_{3D} + \\
 & + 3X_{4A} + X_{4B} + 2X_{4C} + 2X_{4D} + \\
 & + 1000 Y_4
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{iA} = 1000$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{iB} = 2000$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{iC} = 1700$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{iD} = 1300$$

$$\sum_{j=1}^D X_{1j} \leq 1800$$

$$\sum_{j=1}^D X_{2j} \leq 3000$$

$$\sum_{j=1}^D X_{3j} \leq 1800$$

$$\sum_{j=1}^D X_{4j} \leq 1000$$

→ vincoli sulle richieste

$$\left[\sum_{j=1}^D X_{ij} \geq 600 Y_4 \right] \text{ vincolo di offerta su domanda}$$

$$X_{1A} \leq 1000 Y_{4A}$$

$$X_{1B} \leq 1000 Y_{4B}$$

$$X_{1C} \leq 1000 Y_{4C}$$

$$X_{1D} \leq 1000 Y_{4D}$$

→ vincoli di offerta in base alle ulteriori servite

$$X_{ij} \geq Y_{4j} \quad \forall j = A, \dots, D$$

Vanno aggiunti anche:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

e intre' $\forall j = 1, \dots, D$

$$Y_1, Y_{4A}, Y_{4B}, Y_{4C}, Y_{4D} \in \{0, 1\} \quad 2Y_4 \leq Y_{4A} + Y_{4B} + Y_{4C} + Y_{4D}$$

$$Y_{4A} + Y_{4B} + Y_{4C} + Y_{4D} \leq 4Y_4$$

Prove del 16/06/2021

Test A

Esercizio 3:

$L_1, L_2, L_3 \rightarrow$ leghe

Tre elementi \rightarrow stezzo, zinco, rame

le Tabelle
di destra
è in grammi,
per cui deve
essere
convertite.

(ogni rea
convertite
le disponibilità)

	legge 1	legge 2	legge 3	disponibilità
Stezzo	40 g	30 g	20 g	300 kg
Zinco	70 g	90 g	20 g	800 kg
Rame	80 g	70 g	120 g	1000 kg
guadagni	16 g	10 g	2 g	

i \rightarrow indice di legge

$$\max 16x_1 + 10x_2 + 2x_3$$

j \rightarrow indice di risorse

$$40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 300'000$$

$$70x_1 + 90x_2 + 20x_3 \leq 800'000$$

$$80x_1 + 70x_2 + 120x_3 \leq 1000'000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max 16x_1 + 10x_2 + 2x_3$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_1 = 30'000$$

$$7x_1 + 9x_2 + 2x_3 + y_2 = 80'000$$

$$8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + y_3 = 100'000$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
$\rightarrow y_1$	4	3	2	1	0	0	0	30'000
y_2	7	9	2	0	1	0	0	80'000
y_3	8	7	12	0	0	1	0	100'000
-z	16	10	2	0	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	7500
y_2	0	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	1	0	0	27500
y_3	0	1	8	-2	0	1	0	100000
-z	0	-2	-6	-4	0	0	1	-120'000

$$x_1 = 7500 \quad y_1 = 0$$

$$y_2 = 27500 \quad x_2 = 0$$

$$y_3 = 40000 \quad x_3 = 0$$

$$z = 120'000$$

Prov. d'esame del 14/06/2021 Test B

Esercizio 1:

3 celle

2 attrezzi uguali

due orni di tempo

CELLA	COSTO ACQUISTO	CAPACITÀ PROD.	ATTR. 1	COSTO PROD.	ATTR. 2
1	30 000 €	500	200 €	120 €	
2	25 000 €	400	180 €	150 €	
3	23 000 €	450	225 €	160 €	

ATREZZO	PREZZO VENDITA	DOMANDA
1	350 €	8000
2	320 €	10500

Budget celle = 250 000 €

obiettivo: max profitto

~~i = 1, ..., 3~~ → indice di celle

j = 1, 2 → indice di attrezzo

k = 1, 2 → indice di anno

x_{ijk} → attrezzi j prodotti delle celle i nell'anno k

$$\max \quad 350 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 x_{1ik} + 320 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 x_{2ik} - c$$

$$c = -200 \sum_{k=1}^2 x_{11k} + 120 \sum_{k=1}^2 x_{12k} + 180 \sum_{k=1}^2 x_{21k} + 150 \sum_{k=1}^2 x_{22k} + \\ + 225 \sum_{k=1}^2 x_{31k} + 160 \sum_{k=1}^2 x_{32k} + 30000 y_1 + 25000 y_2 + 23000 y_3$$

c ≤ 250000 → vincolo sul budget

$$\sum_{j=1}^2 x_{ijk} \leq 500 y_1 \quad \forall k = 1, 2 \quad \leftarrow$$

$$\sum_{j=1}^2 x_{2jk} \leq 400 y_2 \quad \forall k = 1, 2 \quad \leftarrow$$

$$\sum_{j=1}^2 x_{3jk} \leq 450 y_3 \quad \forall k = 1, 2 \quad \leftarrow$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{1ik} \leq 8000 \quad \forall k = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{2ik} \leq 10500 \quad \forall k = 1, 2$$

vincoli sulle capacità produttive

$x_{ijk} \geq 0$ e intero $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, \forall k = 1, 2$

$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, 3$

Ejercicio 3:

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0 \quad \rightarrow$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min W = b_1 + b_2$$

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_2 - y_1 + b_1 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + y_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 - y_3 + b_3 = -3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, b_1, b_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_1	b_2	$-W$	$-z$	b
b_1	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	1
y_2	1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0
b_3	-1	+1	0	0	+1	0	-1	0	0	+3
$-W$	-1	0	1	0	1	0	0	1	0	2
$-z$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

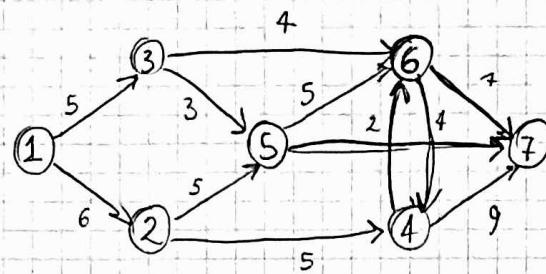
↑

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_1	b_2	$-W$	$-z$	b
b_1										
x_1										
b_3										
$-W$										
$-z$										

ERRATO

Prova del 14/06/2021, Test B:

Esercizio 2:



disegno il grafo senza gli archi di capacità 0 e senza archi residui.

a) modello del massimo flusso fra 1 e 7

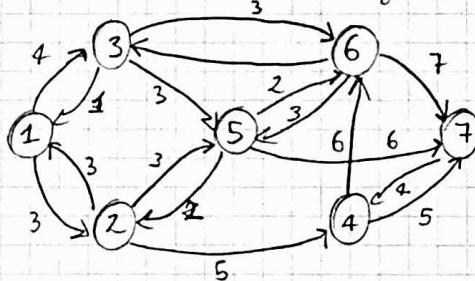
$$\max f$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in S(i)} x_{ji} = \begin{cases} f & \text{se } i=1 \\ 0 & \text{se } i \neq 1, i \neq 7 \\ -f & \text{se } i=7 \end{cases}$$

$$x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A$$

$$x_{ij} \geq 0$$

b) Rappresento il grafo residuo, mi servirà per applicare Ford - Fulkerson (con algoritmo di Edmonds - Karp):



$$1: Q=[1] \quad 1 \rightarrow [0]$$

$$2: Q=[3,2] \quad 3,2 \rightarrow [1]$$

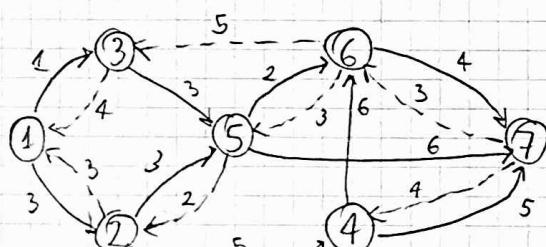
$$3: Q=[2,6,5] \quad 6,5 \rightarrow [3]$$

$$4: Q=[6,5,4] \quad 4 \rightarrow [2]$$

$$5: Q=[5,4,7] \quad 7 \rightarrow [6]$$

condizione di Terminatione \Rightarrow flusso = $4 + 3 = 7$

cammino aumentante = $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$



$$1: Q=[1] \quad 1 \rightarrow [0]$$

$$2: Q=[3,2] \quad 3,2 \rightarrow [1]$$

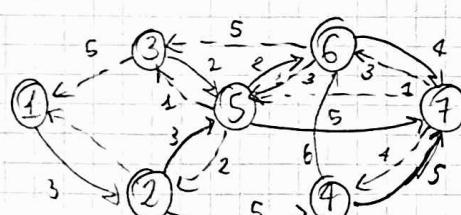
$$3: Q=[2,5] \quad 5 \rightarrow [3]$$

$$4: Q=[5,4] \quad 4 \rightarrow [2]$$

$$5: Q=[4,6,7] \quad 6,7 \rightarrow [5]$$

cammino aumentante: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$

flusso = 8



$$1: Q=[1] \quad 1 \rightarrow [0]$$

$$2: Q=[2] \quad 2 \rightarrow [1]$$

$$3: Q=[5,4] \quad 5,4 \rightarrow [2]$$

$$4: Q=[4,6,7] \quad 6,7 \rightarrow [5]$$

cammino aumentante: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ flusso = 11

Terminato

Esercizio 3:

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0 \rightarrow$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$x_2 - y_1 + b_1 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + y_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, b_1 \geq 0$$

$$b_1 = 1 - x_2 + y_1$$

$$W = 1 - x_2 + y_1 \rightarrow -W - x_2 + y_1 = -1$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_1	$-W$	$-z$	b
$\rightarrow b_1$	0	① -1 0 0 1 0 0 1							
y_2	1	-2 0 1 0 0 0 0 0							
y_3	-1	1 0 0 1 0 0 0 3							
$-W$	0	-1 ② 0 0 0 1 0 -1							
$-z$	1	1 0 0 0 0 0 1 0							

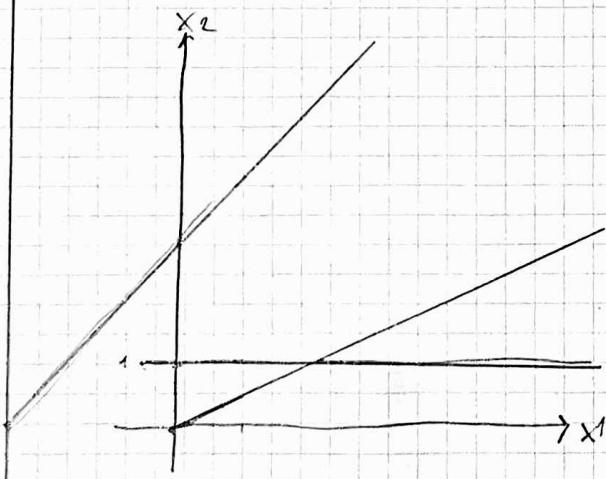
↑

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_1	$-W$	$-z$	b
x_2	0	1 -1 0 0 1 0 0 1							
$\rightarrow y_2$	1	0 -2 1 0 2 0 0 2							
y_3	-1	0 1 0 1 -1 0 0 2							
$-W$	0	0 0 0 0 0 1 ③ 0 0							
$-z$	1	0 1 0 0 -1 0 1 1							

↑

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_2	0	1 -1 0 0 0 1						x_2	0	1 -1 0 0 0 1				
$\rightarrow y_2$	1	0 -2 1 0 0 2						x_2	1	0 -2 1 0 0 2				
y_3	-1	0 1 0 1 0 2						y_3	0	0 -1 1 1 0 4				
$-z$	1	0 1 0 0 1 1						$-z$	0	0 3 -1 0 1 -1				

↑



non c'è un vertice massimo

Esercizio 1:

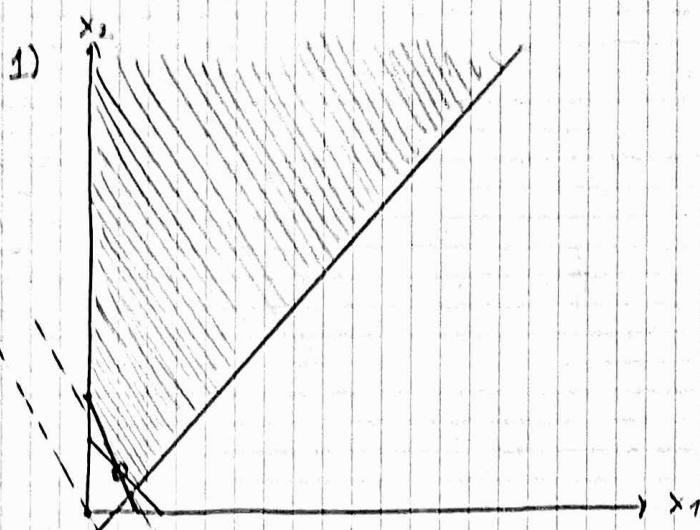
$$\min 2x_1 + x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$-x_1 + x_2 \geq -1$$

$x_1, x_2 \geq 0$ e intere



$$x_1 + \frac{8}{5}x_2 \rightarrow y_1 = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}x_2 = 1$$

$$2(2 + \frac{3}{5}x_2) + 5 \rightarrow 10 + \frac{6}{5}x_2 + 5 = 15 + \frac{6}{5}x_2 = 5$$

$$\frac{6}{5}x_2 = 15 - 5 = 10 \rightarrow x_2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$y_2 = \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$$

$$S_0 \\ L_0 = \frac{1}{2}, \underline{x}_0 = 3,5$$

$$x_2 \leq 2$$

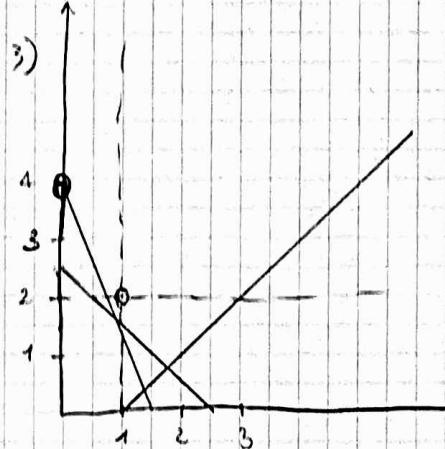
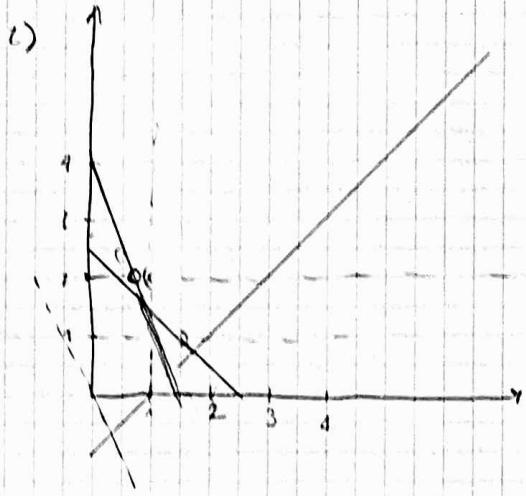
$$S_1$$

$$L_1 = \frac{1}{5} = 3,6 \\ y_1 = (\frac{1}{5}, 2)$$

$$L_2 = \frac{4}{3} \\ y_2 = (\frac{4}{3}, 1)$$

$$x_1 \geq 0 \\ L_3 = 4 \\ y_3 = (0, 4)$$

$$x_1 \geq 1 \\ L_4 = 2 + 2 = 4 \\ y_4 = (1, 2)$$



Esercizio1:

La FinDomestic vuole investire un capitale di 1000000 € in 6 tipi di azioni. La tabella riporta, per ogni azione, il paese d'origine, la categoria (T: tecnologico; N: non-tecnologico) ed il guadagno stimato, in percentuale rispetto al capitale investito.

Azione	Paese	Categoria	Guadagno %
1	Giappone	T	5.3
2	UK	T	6.2
3	Francia	T	5.1
4	USA	N	4.9
5	Germania	T	6.5
6	Francia	N	3.4

La FinDomestic vuole investire almeno metà del capitale iniziale in azioni Europee ed al massimo il 30% in azioni tecnologiche. Inoltre vuole investire tra 4000 e 40000 € in ogni tipo di azione eccetto quelle del tipo 5 per cui il capitale investito deve essere minore o uguale di 10000 € oppure non inferiore a 150000 €.

Si scriva un modello di programmazione lineare che aiuti la FinDomestic a determinare il piano di investimento di guadagno massimo.

Esercizio2:

Si vuole investire in modo ottimo un capitale di 90 milioni in obbligazioni della BEI e/o della Federal Reserve (FR). Le obbligazioni possono essere acquistate solo in "tagli" da 15 o da 18 milioni, rispettivamente. Le obbligazioni BEI rendono 2 milioni per ogni "taglio" acquistato, mentre quelli della FR rendono 3 milioni per taglio. Per motivi di diversificazione dell'investimento si sceglie inoltre che il numero di tagli di obbligazioni BEI sia al massimo pari a quello dei tagli di obbligazioni FR. Si formuli il problema con un modello di PLI e lo si risolva con il metodo del Branch and Bound.

Esercizio3:

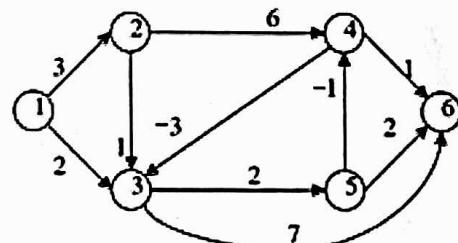
Si consideri il seguente problema di ottimizzazione lineare continua elo si risolva con il metodo del simplex in due fasi.

$$\begin{aligned} \max & 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio4:

Si consideri il seguente grafo:

- si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati al corso per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo);



Puote del 16/06/2021 Test A

Esercizio 1:

$$capitale = 1\ 000\ 000 \text{ €}$$

6 Tipi di azioni.

investire almeno metà del capitale in azioni Europee
massimo 30% in azioni Tecnologiche

investire fra 4000 e 400'000 € in ogni Tipo di azione, tranne
che per il Tipo 5 per cui il capitale deve essere $\leq 10\ 000$
oppure non inferiore a 150'000

obiettivo: guadagno massimo

AZIONE	PAESE	CATEGORIA	GUADAGNO %
1	GIAPPONE	T	5.3
2	UK	T	6.2
3	FRANCIA	T	5.1
4	USA	N	4.9
5	GERMANIA	T	6.5
6	FRANCIA	N	3.4

$$\max 0,053X_1 + 0,062X_2 + 0,051X_3 + 0,049X_4 + 0,065X_5 + 0,034X_6$$

$$X_3 + X_5 + X_6 \geq 500\ 000$$

$$\sum_{i=1}^6 X_i \leq 1\ 000\ 000$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 300\ 000$$

$$X_i \geq 4000 \quad \forall i = 1, \dots, 4, 6$$

$$X_i \leq 400\ 000 \quad \forall i = 1, \dots, 4, 6$$

$$X_5(1-y) \leq 10\ 000$$

$$X_5 \geq 150\ 000y$$

$$y \in \{0, 1\}$$

Esercizio 2: Test A

capitale 90

\downarrow Tipi
1 2

2 Tipi di obbligazioni \rightarrow BEI, FR

Tagli \rightarrow 15, 18
guadagno \rightarrow 2, 3

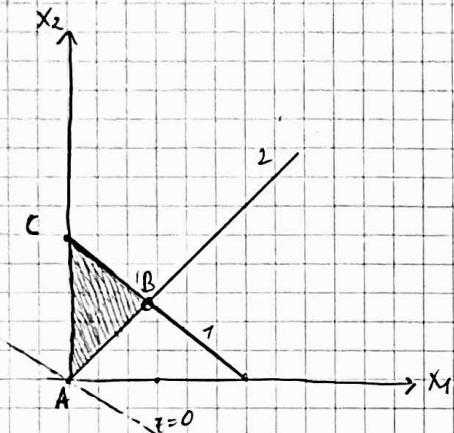
$$\max z = 2X_1 + 3X_2$$

$$1) 15X_1 + 18X_2 \leq 90$$

$$2) X_1 - X_2 \leq 0$$

$X_1, X_2 \geq 0$ e intere

$X_i \rightarrow$ numero di Tagli del
Tipo i da acquistare



$$\begin{cases} 15X_1 + 18X_2 = 90 \\ X_1 = X_2 \end{cases}$$

$$15X_2 + 18X_2 = 90$$

$$X_2 = \frac{90}{33} \approx 13,64$$

$$B \approx (2,72,2,72)$$

$$U_0 \approx 13,64$$

$$B \approx (2,72,2,72)$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$S_1$$

$$U_1 = 14$$

$$D = (2; 3, \overline{3}) =$$

$$= (2, \overline{\frac{10}{3}})$$

incommensurabile

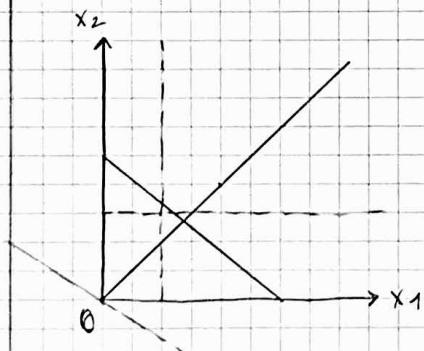
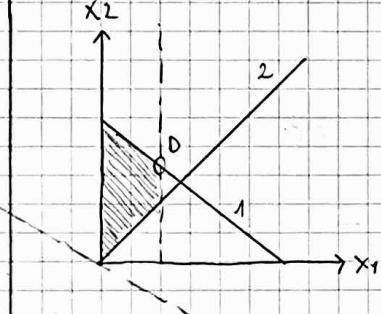
$$x_2 \geq 4$$

$$S_3$$

$$x_2 \leq 3$$

incommis.

errore!



Esercizio 2: Test A

capitale 90

2 Tipi di obbligazioni \rightarrow BEI, FR

Tagli \rightarrow 15, 18

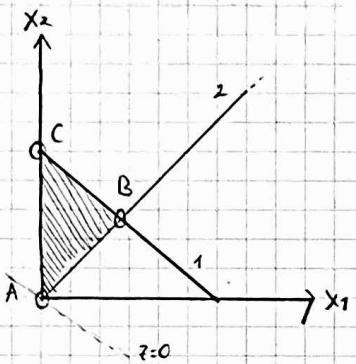
guadagno \rightarrow 2, 3

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$1) \quad 15x_1 + 18x_2 \leq 90$$

$$2) \quad x_1 - x_2 \leq 0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ e intere



$$C = (0, 5) \rightarrow Z_C = 15$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 = 90 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$15x_2 + 18x_2 = 90$$

$$x_2 = \frac{90}{33} \approx 2,727$$

$$B \approx (2,727, 2,727) \rightarrow Z_B \approx 13,64$$

C è il vertice ottimo del problema rilassato, ed essendo una soluzione intera, risulta essere anche la migliore soluzione del problema originario.

Esercizio 3:

$$\max 7x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max 7x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + h_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + h_2 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$h_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 + y_1$$

$$h_2 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$W = h_1 + h_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 + y_1 - x_1 - x_2 - x_3 = \\ = x_1 - 2x_2 + y_1$$

$$\min W$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-W$	\bar{z}	b
$\rightarrow h_1$	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
h_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0
$-W$	1	-2	0	1	0	0	1	0	0
$-\bar{z}$	7	3	2	0	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-W$	\bar{z}	b
x_2	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
$\rightarrow h_2$	3	0	2	1	1	1	0	0	0
$-W$	-3	0	-2	-1	2	0	1	0	0
$-\bar{z}$	13	0	5	3	-3	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-W$	\bar{z}	b
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
$-W$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$-\bar{z}$	0	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{13}{3}$	0	1	0

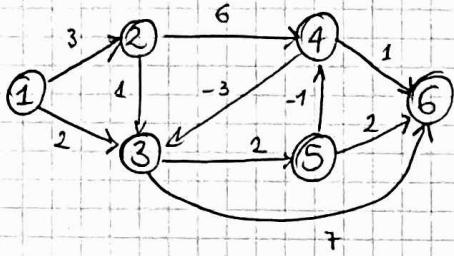
$$\text{solutions: } x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = 0$$

$$\bar{z} = 0$$

↓

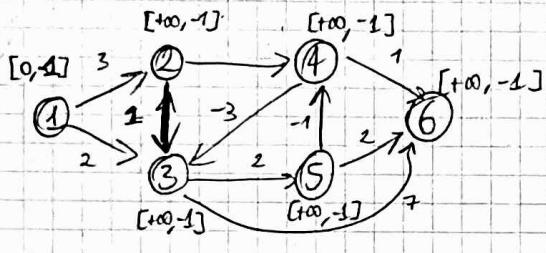
graficando con Geogebra ho verificato che
è il risultato corretto.

Esercizio 4:



a) Usare Bellman-Ford

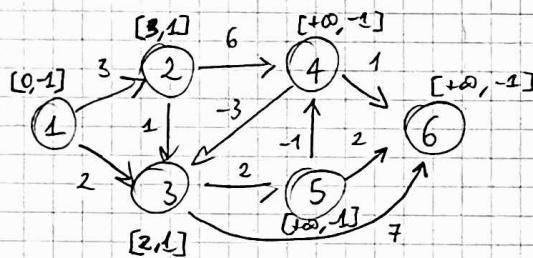
$K=1$



$K=1$

modo etichette

1	0, -1
2	+∞, -1
3	+∞, -1
4	+∞, -1
5	+∞, -1
6	+∞, -1



$K=2$

modo etichette

1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	+∞, -1
5	+∞, -1
6	+∞, -1

$K=3$

modo etichette

1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	9, 2
5	4, 3
6	9, 3

$K=4$

modo etichette

1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	4, 5
5	4, 3
6	6, 5

$K=5$

modo etichette

1	0, -1
2	3, 1
3	1, 4
4	3, 5
5	4, 3
6	6, 5

$K=6$

modo etichette

1	0, -1
2	3, 1
3	0, 4
4	3, 5
5	3, 3
6	6, 5

→ cond. di terminazione



ciclo con costo Totale
negativo

Esercizio1:

Un'azienda produce pc e deve acquistare le scorte di materie prime necessarie per la produzione dei case. Per produrre i case nel mese corrente sono necessari i seguenti materiali:

1. Viti: 15000 unità
2. Plastica: 1300 kg
3. Acciaio: 2900 kg

Per effettuare gli acquisti l'azienda si può appoggiare a quattro fornitori i quali le forniscono le materie prime in lotti contenenti le seguenti quantità di materiale:

	viti	plastica	acciaio
F1	50	3	5
F2	30	4	7
F3	25	1	3
F4	10	8	1

Nell'ottica di gestire al meglio il proprio magazzino, l'azienda intende avere, alla fine del mese, la minore quantità di materiale non utilizzato possibile e, a tal fine, è disposta anche a comprare una quantità di materie prime inferiore alle proprie necessità. Il costo per lo stocaggio e per il mancato acquisto di una unità di materiale è il seguente:

Viti	0,2 euro/pezzo
Plastica	1 euro/kg
Acciaio	3 euro/kg

Formulare il modello di programmazione lineare che minimizzi i costi derivanti dallo scostamento tra le quantità di materiali acquistate e quelle necessarie, tenendo conto che non è possibile comprare porzioni di lotto di materiali (variabili intere).

Esercizio2:

Dato il problema descritto nell'esercizio 1, si supponga che per motivi commerciali l'azienda, se acquista dei lotti di materiale dal fornitore F1, è impossibilitata a rifornirsi dai fornitori F2 ed F4. Riformulare il problema come un problema di programmazione lineare intera.

Esercizio3:

Sia assegnato il problema intero:

$$\begin{aligned} & \max x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & -4x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{e intere} \end{aligned}$$

- 1) Lo si risolva con il metodo del branch and Bound.
- 2) Si riporti l'albero di Branch and Bound ottenuto: a fianco di ciascun nodo, ove possibile, si indichino le coordinate del punto di ottimo del rilassamento continuo e i valori di lower e upper bound.

Esercizio4:

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione lineare continua elo si risolva con il metodo del simplex in due fasi.

$$\begin{aligned} & \max 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Prova del 16/06/2024 Test B

Esercizio 1:

$$viti \rightarrow 15000$$

$$plastica \rightarrow 1300 \text{ Kg}$$

$$acciaio \rightarrow 2900 \text{ Kg}$$

	viti	plastica	acciaio
F1	50	3	5
F2	30	4	7
F3	25	1	3
F4	10	8	1

formulari \rightarrow

costi per lo stocaggio:

$$viti \quad 0,2 \text{ €/kg} \quad \text{plastica}$$

$$\text{plastica} \quad 1 \text{ €/kg}$$

$$\text{acciaio} \quad 3 \text{ €/kg}$$

e fine mese si vuole avere le minore quantità di materiale non utilizzato.

obiettivo: minimizzare i costi derivanti dello scartamento tra le quantità di materiali acquistate e quelle necessarie non è possibile comprare porzioni di letti.

$$\min 0,2 \left| \sum_{i=1}^4 x_{i1} - 15000 \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^4 x_{i2} - 1300 \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^4 x_{i3} - 2900 \right|$$

$i \rightarrow$ indice formulari

$e_i \rightarrow$ elemento

della matrice
formulari -

$j \rightarrow$ indice materie
l = viti

2 = plastica

3 = acciaio

$$y_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^4 x_{i1} - 15000, 15000 - \sum_{i=1}^4 x_{i1} \right\}$$

$$y_2 = \max \left\{ \sum_{i=1}^4 x_{i2} - 1300, 1300 - \sum_{i=1}^4 x_{i2} \right\}$$

$$y_3 = \max \left\{ \sum_{i=1}^4 x_{i3} - 2900, 2900 - \sum_{i=1}^4 x_{i3} \right\}$$

$$y_1 \geq \sum_{i=1}^4 x_{i1} - 15000 \quad y_1 \geq 15000 - \sum_{i=1}^4 x_{i1}$$

$$y_2 \geq \sum_{i=1}^4 x_{i2} - 1300 \quad y_2 \geq 1300 - \sum_{i=1}^4 x_{i2}$$

$$y_3 \geq \sum_{i=1}^4 x_{i3} - 2900 \quad y_3 \geq 2900 - \sum_{i=1}^4 x_{i3}$$

modello errato,
vedi elle pag.
successive

$$\min 0,2 y_1 + y_2 + 3 y_3$$

$$\text{con } x_{ij} \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, 4 \quad \forall j=1, 2, 3 \quad \text{e intere}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad \text{e intere}$$

Prove del 16/06/2021 Test B

Esercizio 1:

$$\min 0,2Y_1 + Y_2 + 3Y_3$$

$$Y_1 \geq \sum_{i=1}^4 a_{i1} X_i - 15000 \quad Y_1 \geq 15000 - \sum_{i=1}^4 a_{i1} X_i$$

$$Y_2 \geq \sum_{i=1}^4 a_{i2} X_i - 1300 \quad Y_2 \geq 1300 - \sum_{i=1}^4 a_{i2} X_i$$

$$Y_3 \geq \sum_{i=1}^4 a_{i3} X_i - 2900 \quad Y_3 \geq 2900 - \sum_{i=1}^4 a_{i3} X_i$$

$$X_i \geq 0 \text{ e intero } \forall i = 1, 2, 3, 4$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \text{ e intere}$$

$i \rightarrow$ indice formatori

$a_{ij} \rightarrow$ elemento della matrice formatori - risorse

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3$$

Esercizio 2:

$$\text{Aggiungiamo al vincolo: } X_1 \leq M z$$

$$X_2 + X_4 \leq M(1-z)$$

Esercizio 3:

$$\max X_1 + X_2$$

$$-4X_1 + 5X_2 \leq 5$$

$$6X_1 + 5X_2 \leq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ e intere}$$

Graficamente il vertice B

Risulta essere ottimo per il problema rilevato.

$$\begin{cases} -4X_1 + 5X_2 = 5 \\ 6X_1 + 5X_2 = 30 \end{cases}$$

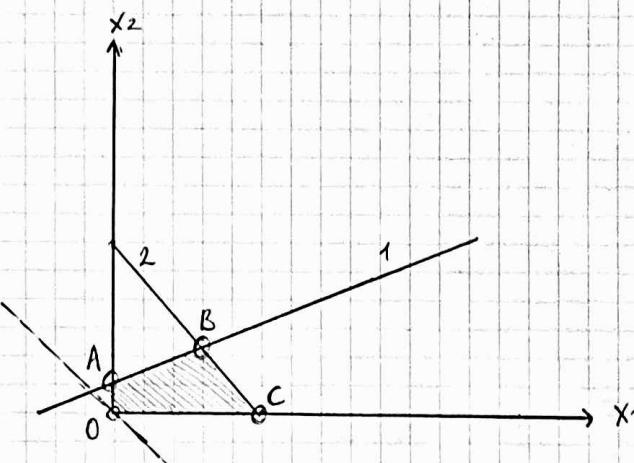
$$X_1 = \frac{20}{6} - \frac{5}{6}X_2 = 5 - \frac{5}{6}X_2$$

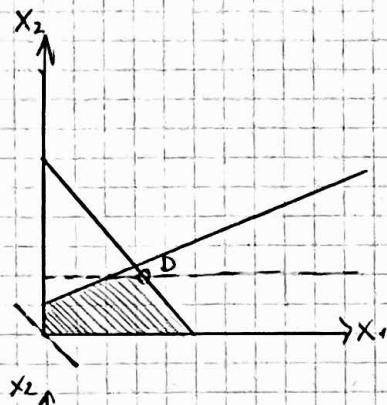
$$-4\left(5 - \frac{5}{6}X_2\right) + 5X_2 = 5$$

$$-20 + \frac{10}{3}X_2 + 5X_2 = 5$$

$$\frac{25}{3}X_2 = 25$$

$$X_2 = 3 \Rightarrow X_1 = 5 - \frac{5}{6} \cdot 3 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow B = (3; 2,5)$$

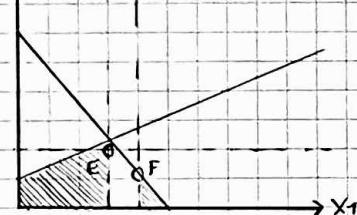




$$P_0 \\ B = (3; 2, 5) \\ U_0 = 5, 5$$

$x_2 \geq 3 \quad \downarrow \quad x_2 \leq 2$

inommiss.



$$P_1 \\ D = (3, \bar{3}, 2)$$

$$U_1 = 5, \bar{3}$$

$$x_1 \leq 3 \quad \downarrow \quad x_1 \geq 4$$

$$E = (3, 2) \quad F = (4, 1, 2)$$

$$U_2 = 5$$

$$U_3 = 5, 2$$

OPT

$$x_2 \leq 1 \quad \downarrow \quad x_2 \geq 2$$

$$G = (4, \frac{1}{6}, 1)$$

$$V_4 = 5, \frac{1}{6}$$

$$\text{inommiss.}$$

$$x_1 \leq 4 \quad \downarrow \quad x_1 \geq 5$$

$$H = (4, 1) \quad I = (5, 0)$$

$$\text{OPT}$$

$$U_7 = 5$$

$$\text{OPT}$$

$$U_6 = 5$$

Esercizio 1:

La vostra azienda assembla due tipi di laptop, standard e lusso, che vende ottenendone guadagni unitari rispettivamente pari a 300 euro e 500 euro. Sapendo che ciascun laptop dei due tipi contiene rispettivamente 1 hard-disk e un kit base il primo, 2 hard-disk e un kit premium il secondo, e che le scorte in magazzino sono di 120 hard-disk, 60 kit base e 50 kit premium:

- si formuli il problema di massimizzazione del guadagno;
- si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;
- si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata;
- si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo;
- si risolva analiticamente utilizzando l'algoritmo del simplex.

Esercizio 2:

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare un campione significativo di persone: almeno 100 uomini non sposati, almeno 120 uomini sposati, almeno 110 donne non sposate e almeno 150 donne sposate. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella. Si noti come le telefonate srali siano più costose, ma permettano di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% di esse infatti va a vuoto.

	Mattino	Sera
Uomini non sposati	10%	10%
Uomini sposati	15%	30%
Donne non sposate	20%	20%
Donne sposate	25%	30%
Nessuno	30%	5%

- 1) Si formuli un modello di programmazione lineare intera per decidere quante telefonate effettuare (alla mattina e/o alla sera), minumizzando il costo complessivo e facendo in modo di raggiungere un campione significativo di persone.
- 2) Si illustri come deve essere modificato il modello proposto qualora per effettuare le telefonate sia necessario affittare una sala che costa 65 euro al mattino e 80 euro la sera. Se si decide di effettuare anche una sola telefonata in una fascia oraria, verrà addebitato all'azienda l'intero costo della sala.

Esercizio 3:

Risolvere il seguente problema di knapsack con il metodo del branch and bound:

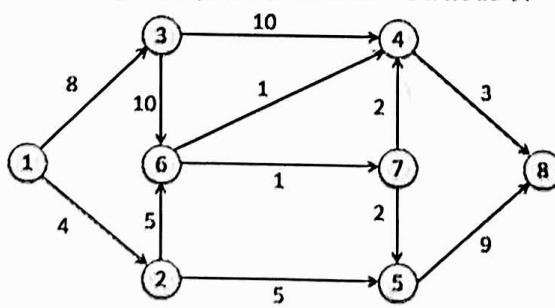
$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 9$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

Esercizio 4:

Si determini il taglio di capacità minima sul seguente grafo tra il nodo 1 e il nodo 8:



Esercizio 1:

- $x_1 \rightarrow$ laptop Standard : 1 hard disk, 1 Kit base
 $x_2 \rightarrow$ laptop di lusso : 2 hard disk, 1 Kit premium

300€

500€

scorte:

hard disk 120

Kit base 60

Kit premium 50

direttivo: massimizzare il guadagno

$$\max 300x_1 + 500x_2$$

$$1) x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$2) x_1 \leq 60$$

$$3) x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max 300x_1 + 500x_2$$

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 120$$

$$x_1 + y_2 = 60$$

$$x_2 + y_3 = 50$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

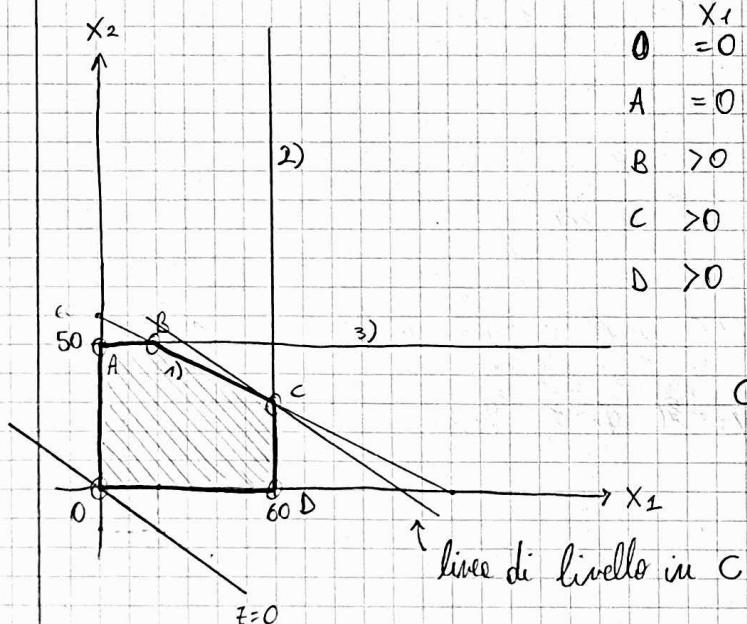
$$0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad y_3 > 0$$

$$A \quad x_1 = 0 \quad x_2 > 0 \quad y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad y_3 = 0$$

$$B \quad x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad y_1 = 0 \quad y_2 > 0 \quad y_3 = 0$$

$$C \quad x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 > 0$$

$$D \quad x_1 > 0 \quad x_2 = 0 \quad y_1 > 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 > 0$$



C è il vertice ottimo

Ora risolve il modello con il Simplex.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	1	2	1	0	0	0	120
y_2	1	0	0	1	0	0	60
$\rightarrow y_3$	0	①	0	0	1	0	50
$-z$	300	500	0	0	0	1	0
							↑

Tabelle 1

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
$\rightarrow y_1$	①	0	1	0	-2	0	20
y_2	1	0	0	1	0	0	60
x_2	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	300	0	0	0	-500	1	-25000
							↑

Tabelle 2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	0	1	0	-2	0	20
$\rightarrow y_2$	0	0	-1	1	②	0	40
x_2	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	0	0	-300	0	100	1	-31000
							↑

Tabelle 3

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	0	1	0	-2	0	20
y_2	0	0	-1	1	②	0	40
x_2	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	0	0	-300	0	100	1	-31000
							↑

Tabelle 4

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	0	0	1	0	0	60
y_3	0	0	- $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	30
$-z$	0	0	-250	-50	0	1	-33000
							↑

 $z = 33000 \rightarrow$ valore finale di f. o.soluzione: $x_1 = 60 \quad x_2 = 30 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 20$

→ vertice C

Esercizio 2:

1) min $1.1X_1 + 1.6X_2$
 $0.1X_1 + 0.1X_2 \geq 100$
 $0.15X_1 + 0.3X_2 \geq 120$
 $0.2X_1 + 0.2X_2 \geq 110$
 $0.25X_1 + 0.3X_2 \geq 150$
 $X_1, X_2 \geq 0$ e intere

2) min $1.1X_1 + 1.6X_2 + 65Y_1 + 80Y_2$
 $0.1X_1 + 0.1 \geq 100$
 $0.15X_1 + 0.3X_2 \geq 120$
 $0.2X_1 + 0.2X_2 \geq 110$
 $0.25X_1 + 0.3X_2 \geq 150$
 $X_1 \leq M Y_1$
 $X_2 \leq M Y_2$
 $X_1, X_2 \geq 0$ e intere
 $Y_1, Y_2 \in \{0, 1\}$

Note:

le tracce veolo
presenti un errore.
Le percentuali delle
colonne delle vere
sommette fra loro
rest. Tuiscono valore
95%. All'esame
ho interpretato
diversamente le
tracce, per cui,
per farvi avere
un perugone, ho
deciso di pubblicare
entrambe le modellizzazioni.

Esercizio 2:

- almeno 100 uomini non spesi
- almeno 120 uomini spesi
- almeno 110 donne non spesi
- almeno 150 donne spesi

costo Tel. al mattino $\rightarrow 1,1 \text{ €}$

costo Tel. la sera $\rightarrow 1,6 \text{ €}$

		MATTINO	SERA
i	1 UOMINI NON SP	10%	10%
	2 UOMINI SP	15%	30%
	3 DONNE NON SP	20%	20%
	4 DONNE SP	25%	30%
	5 NESSUNO	30%	5%

obiettivo: minimizzare i costi

$$1) \min 1,1 \sum_{i=1}^5 x_{i1} + 1,6 \sum_{i=1}^5 x_{i2} \quad i \rightarrow \text{indice delle righe delle Tebelle (Tipologie di persone)}$$

$$0,1 x_{11} + 0,1 x_{12} \geq 100 \quad j \rightarrow \text{indice di colonna}$$

$$0,15 x_{21} + 0,3 x_{22} \geq 120 \quad (\text{mattino} = 1, \text{sera} = 2)$$

$$0,2 x_{31} + 0,2 x_{32} \geq 110$$

$$0,25 x_{41} + 0,3 x_{42} \geq 150$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e intere } \forall i=1,2,\dots,5 \quad \forall j=1,2$$

2) dobbiamo aggiungere dei vincoli di costo fisso:

$$\sum_{i=1}^5 x_{i1} \leq M y_1 \rightarrow \text{se almeno un } x_{i1} > 0 \Rightarrow y_1 \text{ deve essere necessariamente } = 1$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i2} \leq M y_2$$

e modificare la funzione obiettivo:

$$\min 1,1 \sum_{i=1}^5 x_{i1} + 1,6 \sum_{i=1}^5 x_{i2} + 65 y_1 + 80 y_2$$

Esercizio 3:

$$\begin{aligned} \max Z &= 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 6X_4 \\ X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 &\leq 9 \\ X_j &\in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Ordino per "pesi specifici" decrescenti le variabili:

PESO SPECIFICO	VAR
2	X_1
1	X_4
4/5	X_3
3/4	X_2

Inserisco le variabili X_2 e X_4 interamente, mentre X_3 viene inserita parzialmente.

La soluzione di questo rafforzamento del problema è quindi:

$$U_0 = 2 + 6 + \frac{2}{5} \cdot 4 = 8 + \frac{8}{5} = \frac{48}{5} = 9,6$$

↑

inserendo X_1 e X_4 , rimane una capacità pari a 2.

Per questo motivo, è possibile inserire solo $\frac{2}{5}$ di X_3 .

Una soluzione ommissibile potrebbe essere: $X_1 = X_4 = 1$ $X_2 = X_3 = 0$ e cui corrisponde un lower bound: $L_0 = 8$

(riducendo
l'elenco)

P_0	$U_0 = 9,6$
$L_0 = 8$	
$X_3 = 1$	$X_3 = 0$
P_1	$U_1 = 9$
$L_1 = 8$	
$X_4 = 1$	$X_4 = 0$
P_3	$U_3 = 8.25$
incommis.	$L_3 = 6$
$X_2 = 1$	$X_2 = 0$
P_5	$SOL_3 = 7$
$y_1(0, 1, 1, 0)$	$y_2(1, 0, 1, 0)$
P_6	$SOL_2 = 6$

P_2 : inserisco interamente X_1, X_4
inserisco $\frac{1}{2}$ di X_2

P_3 : inserisco X_3, X_1 interamente
inserisco $\frac{1}{2}$ di X_4

P_4 : inserisco X_3, X_1 interamente
 $X_4 = 0$

$$X_2 = \frac{3}{4}$$

P_5 : $X_2 = X_3 = 1 \Rightarrow$ è una sol. intera

P_6 : $X_3 = 1 = X_1$
 $X_2 = X_4 = 0$

P_7 : $X_2 = 1 = X_1$ inserisco $\frac{2}{3}$ di X_4
 $X_3 = 0$

(vedere pagine
successive)

P_0 : inserisco x_2, x_4
inserisco 2 di x_3

P_1 : $x_3 = 1 = x_1$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

P_2 : $x_1 = x_4 = 1$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

P_3 : $x_1 = x_4 = 1$

$$x_3 = 0 = x_2$$

P_4 : $x_2 = 1 = x_1$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = \frac{4}{6}$$

P_5 : $x_2 = 1 = x_1$

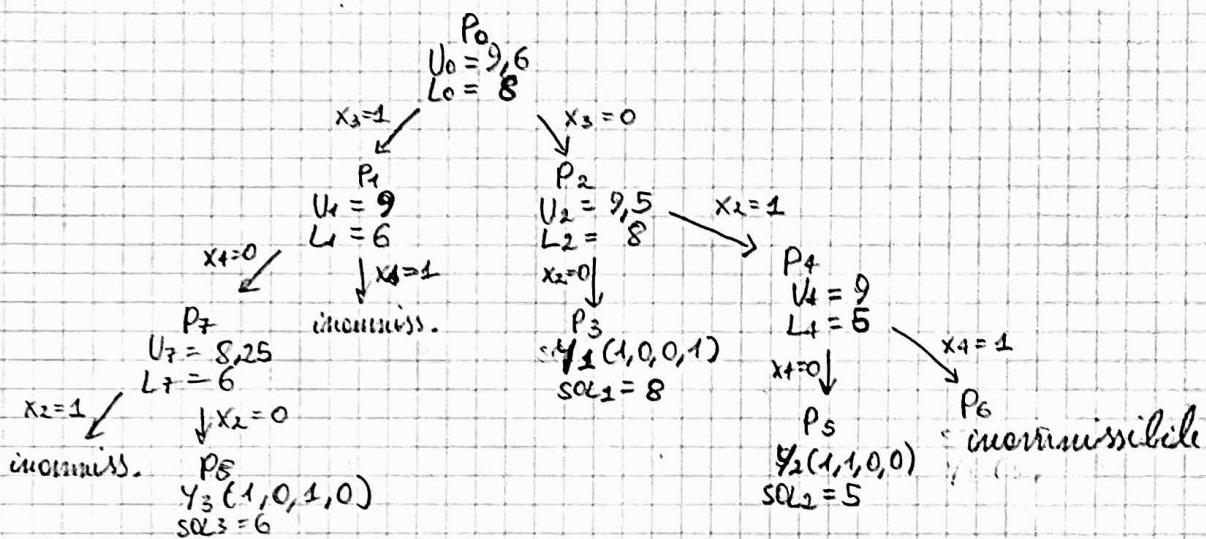
$$x_4 = 0 = x_3$$

P_6 : $x_1 = x_2 = 1$

non è possibile

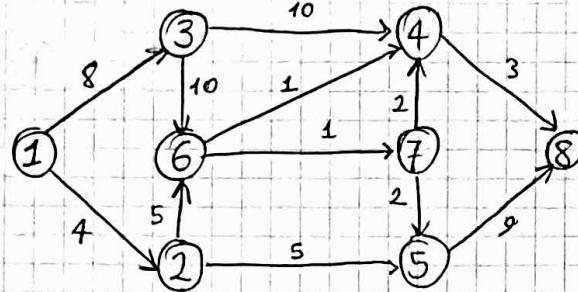
P_7 : $x_3 = 1 = x_1$

$$x_4 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{4}$$



La soluzione ottima è $y_1(1, 0, 0, 1)$ che restituisce $\varepsilon = 8$.

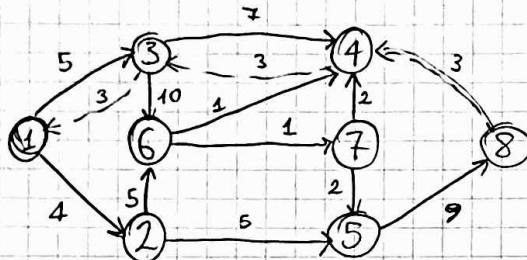
Esercizio 4:



$$\begin{array}{ll}
 Q = [1] & P[1] = 0 \\
 Q = [3, 2] & P[2] = P[3] = 1 \\
 Q = [2, 4, 6] & P[4] = P[6] = 3 \\
 Q = [4, 6, 5] & P[5] = 2 \\
 Q = [6, 5, 8] & P[8] = 4
 \end{array}$$

cammino aumentante: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8$

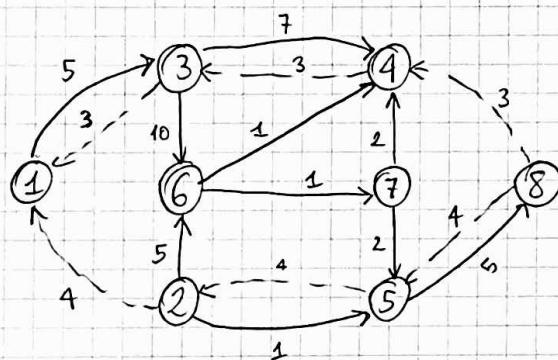
$$\delta = 3 \quad \text{flusso} = 3$$



$$\begin{array}{ll}
 Q = [1] & P[1] = 0 \\
 Q = [3, 2] & P[2] = P[3] = 1 \\
 Q = [2, 4, 6] & P[4] = P[6] = 3 \\
 Q = [4, 6, 5] & P[5] = 2 \\
 Q = [6, 5] & \\
 Q = [5, 7] & P[7] = 6 \\
 Q = [7, 8] & P[8] = 5
 \end{array}$$

cammino aumentante: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8$

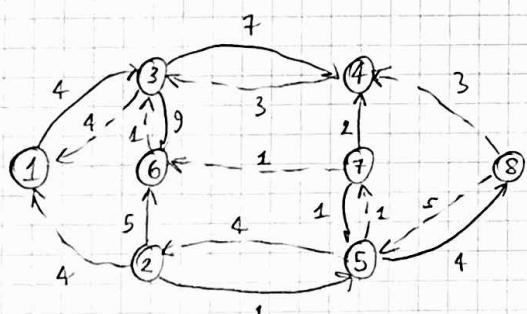
$$\delta = 4 \quad \text{flusso} = 7$$



$$\begin{array}{ll}
 Q = [1] & P[1] = 0 \\
 Q = [3] & P[3] = 1 \\
 Q = [6, 4] & P[6] = P[4] = 3 \\
 Q = [4, 7] & P[7] = 6 \\
 Q = [7] & \\
 Q = [5] & P[5] = 7 \\
 Q = [8] & P[8] = 5
 \end{array}$$

cammino aumentante: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 8$

$$\delta = 1 \quad \text{flusso} = 8$$



$$\begin{array}{ll}
 Q = [1] & P[1] = 0 \\
 Q = [3] & P[3] = 1 \\
 Q = [6, 4] & P[6] = P[4] = 3 \\
 Q = [4] & \\
 Q = [] &
 \end{array}$$

$$V_S = \{1, 3, 6, 4\} \quad \text{flusso} = 8$$