ESERCIZI

programmazione matematica:

- unico decisore
- unico obbiettivo
- nessuna incertezza

OTTIMIZZAZIONE MONODIMENSIONALE

condizione necessaria

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0$$

// deve ovviamente essere derivabile

condizione suff.

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x^*} \geq 0 \; (\leq 0)$$

trovo così i punti di minimo / massimo locale della funzione

ESEMPIO 1 SLIDE 2

FUNZIONE DI PREZZO

$$D = 2500 - 800p$$

$$x = D$$

$$x = 2500 - 800p$$

$$p = \frac{2500 - x}{800} = 3 - 0,00125\,x$$

funzione obiettivo

$$z = (3 - 0,00125\,x)\,x - (250 + 0.5x)$$

$$= 3x - 0.5x - 0,00125\,x^2 - 250$$

$$= -0,00125\,x^2 + 2,5x - 250$$

$$2,5\,T = 2500\ kg$$

$$0 \leq x \leq 2500$$

$$\frac{df}{dx} = -0,00250\,x + 2,5 = 0$$

$$x^* = \frac{2,5}{0,00250} = 1000$$

$$\frac{d^2 f}{d x^2} = 0{,}00250 > 0$$

$$z^* = -0{,}00125(1000)^2 + 2{,}5(1000) - 250 = 1000$$

$$x^* = 1000$$
$$z^* = 1000$$

OTTIMIZZAZIONE MONODIMENSIONALE

ALGORITMO DI RICERCA DICOTOMICA

RIDUZIONE INTERVALLO DI INCERTEZZA SENZA DERIVATA

Ho una funzione

$$f(x) = -0{,}00125x^2 + 29x - 25000$$

ed ho un intervallo di incertezza

$$0 < x < 5000$$

parto dal centro dell'intervallo (2500)

$$c = 2500 - eps = 2499$$

$$f(c) = 222122{,}25$$

$$d = 2500 + eps = 2501$$

$$f(d) = 222287{,}75$$

$$f(c) < f(d) \Rightarrow \qquad b = d \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nuovo intervallo

$7599 < x < 25000$

$$\frac{7501}{2} = 3750{,}5$$

$25000 - 3750{,}5 = 22259{,}5$

$c = 22259{,}5 - EPS = 22258{,}5$

$d = 22259{,}5 + EPS = 22250{,}5$

$f(c) = 253055{,}56$

$f(d) = 253057{,}32$

$f(c) < f(d)$

$\Rightarrow$ nuovo intervallo

$22258{,}5 < x < 25000$

$$\frac{11250,5}{2} = 5625,5$$

$$15000 - 5625,5 = 9375,5$$

$$c = 9373,5$$

$$d = 9375,5$$

$$f(c) = 137003,37$$

$$f(d) = 137025,50$$

$$f(c) < f(d)$$

nuovo intervallo

$$137003,37 < x < 15000$$

$f(x) = x^5 + x^2 - 5x$

$0 \leq x \leq 2$ metà intervallo = 1

$c = 1 - EPS = 0$

$d = 1 + EPS = 2$

$f(c) = 0$

$f(d) = 12$

$f(c) < f(d) \Rightarrow$ nuovo intervallo

$0 < x \leq 2$

$\frac{2}{2} = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$

$c = 1 - EPS = 0$

$d = 1 + EPS = 2$

LOOP

ALGORITMO DI BISEZIONE

RIDUZIONE INTERVALLO DI INCERTEZZA CON DERIVATA

$$f(x) = -0{,}00125x^2 + 29x - 25000$$

$0 < x < 15000$ punto medio 7500

$$f'(x) = -0{,}00250x + 29$$

p. medio 7500

$$f'(7500) = 10{,}25$$

derivata positiva ⇒ crescente ⇒ punto di ottimo a destra

$$7500 < x < 15000$$

punto medio dell'intervallo : $\dfrac{15000 - 7500}{2} =$

$= 3750 \Rightarrow 15000 - 3750 = 11250$

$$f'(11250) = 0{,}875$$

funzione crescente punto di ottimo a destra

$11250 < x < 15000$

$$15000 - \frac{15000 - 11250}{2}$$

punto medio 13125

$f'(13125) = -3,812$

derivata negativa $\Rightarrow$ punto di ottimo a sinistra

$11250 < x < 13125$

$$\text{p. medio} = 13125 - \frac{13125 - 11250}{2} = 12187,5$$

$f'(12187,5) = -1,569$

$11250 < x < 12187,5$

$f'(11718,75) = -0,296$

$11250 < x < 11718,75$

$f'(22585,325) = 0,289$

positiva fin di ottimo a destra

$22585,38 < x < 22778,25$

punto ottimo: $22602,56$

$f(x) = x^5 + x^2 - 5x$

$0 \leq x \leq 2$

$f'(x) = 5x^3 + 2x - 5$

$f'(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ ottimo a destra

$1 \leq x \leq 2$

$f'(1,5) = 22,5 > 0 \Rightarrow$ destra so l'ottimo

$1,5 \leq x \leq 2$

$f'(1,75) = 11 > 0$

$1,75 \leq x \leq 2$

$f'(1,875) = 26,12 > 0$

$1,875 \leq x \leq 2$

LOOP

$f'(1,95) = 108$

ALGORITMO DELLA TANGENTE

$y = x^3 - 5x^2 + 2x + 15 \quad y' = 3x^2 - 8x + 2 \quad y'' = 6x - 8$

intervallo $[1, 5]$

$x_0 = 5$

$$x_1 = 5 - \frac{18}{16} = 2,8125$$

$$x_2 = 2,8125 - \frac{3(2,8125)^2 - 8(2,8125) + 2}{6(2,8125) - 8} = 2,565$$

$$x_3 = 2,565 - \frac{f'(2,565)}{f''(2,565)} = 2,380$$

OTTIMIZZAZIONE MULTIDIMENSIONALE NON VINCOLATA

METODO DEL GRADIENTE

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy$$

$x^0 = (1, 1)$ $\varepsilon = 0,1$ $f(x_0) = 4$

calcolo il gradiente di f

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 4y + x \end{bmatrix}$$

il gradiente in $f(x^0)$

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - \theta_0 \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \theta_0 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 3\theta_0 \\ 1 - 5\theta_0 \end{bmatrix}$$

$$f(x^1) = (\underset{x}{1 - 3\theta_0},\ \underset{y}{1 - 5\theta_0})$$

Sostituisco nella funzione

$$f(x^1) = \varphi(\theta_0) = (1 - 3\theta_0)^2 + 2(1 - 5\theta_0)^2 + (1 - 3\theta_0)(1 - 5\theta_0)$$

$$= 1 + 9\theta_0^2 - 6\theta_0 + 2(1 + 25\theta_0^2 - 10\theta_0) +$$

$$+ 1 - 5\theta_0 - 3\theta_0 + 15\theta_0^2 =$$

$$= 1 + 9\theta_0^2 - 6\theta_0 + 2 + 50\theta_0^2 - 20\theta_0 + 1 - 5\theta_0 - 3\theta_0 + 15\theta_0^2 =$$

$$= 4 - 160\theta_0 + 155\theta_0^2$$

Calcolo il punto di massimo di $\varphi(\theta_0)$ con il metodo delle tangente

$$\varphi'(\theta_0) = -160 + 320\theta_0$$

$$\varphi''(\theta_0) = 320$$

$$\theta_0 = \frac{4 - 160 - 320 \cdot 4}{320} = 0{,}5$$

$\cancel{x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ ~~→ prossimo punto~~ $\cancel{f(x^1) = 4}$ $\cancel{\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}$

$\cancel{\|\nabla f(x^1)\| > \varepsilon}$ ~~non è un punto di uscita~~

PROGRAMMAZIONE LINEARE

ALLOCAZIONE OTTIMA DI RISORSE

Una ditta ha la possibilità di attivare, per l'anno corrente, la produzione di quattro tipi di prodotti A, B, C e D. Per ogni tipo di produzione, se attivata, la ditta si impegna a produrre un quantitativo minimo pari rispettivamente a 1000, 1500, 3000 e 2000 unità. La produzione di A, B, C e D richiede un costo fisso per l'attivazione delle rispettive linee di produzione ed una quantità di forza lavoro per ogni unità prodotta. Infine ogni unità venduta fornisce un profitto come specificato dalla seguente tabella (in euro).

Prodotto	Costo fisso	Forza lavoro unit.	Profitto unit.
A	14500	10	50
B	10000	15	60
C	8000	5	55
D	9000	14	80

La ditta dispone per l'anno in corso di 200000 unità complessive di forza lavoro. Inoltre i committenti per i quali essa lavora richiedono che nel caso venga attivata la produzione di A venga anche prodotto almeno uno tra C o D, almeno nei quantitativi minimi sopra indicati. Formulare il problema di programmazione lineare mista intera per decidere le produzioni da attivare e pianificarne i quantitativi al fine di massimizzare il saldo costi-profitti.

necessito solo di modellare il problema

$$\text{MAX}\begin{cases} 50x_A - 10x_A - 14500 \\ 60x_B - 15x_B - 10000 \\ 55x_C - 5x_C - 8000 \\ 80x_B - 14x_D - 9000 \end{cases}$$

$$10x_A + 15x_B + 5x_C + 14x_D \leq 200000$$

$$x_A \geq 1000$$

$$x_B \geq 1500$$

$$x_C \geq 3000$$

$$x_D \geq 2000$$

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

METODO A 2 FASI

min $5x_1 + x_2 + x_3$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$$

normalizziamo : segno "=" ⇒ big M

$$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + M h_1 + M h_2 + M h_3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + h_1 = 5$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + h_2 = 3$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 + h_3 = -5$$

$$h_1 = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5$$
$$h_2 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 3$$
$$h_3 = x_1 - x_2 + 3x_3 - 5$$

$$w = h_1 + h_2 + h_3 = -5x_1 - 5x_2 + 2$$

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	B
h_1	2	1	2	1	0	0	0	0	5
h_2	3	3	1	0	2	0	0	0	3
h_3	-1	1	-3	0	0	1	0	0	-5
$-z$	5	1	2	0	0	0	1	0	0
w	-5	-5	0	0	0	0	0	1	2

ERRORE → avremmo dovuto prendere di volta in volta i valori più piccoli non questo

$\frac{3}{3}=1$ valore ≥ 0 più piccolo

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	B
h_1	0	1	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	0	0	0	-2
x_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1
h_3	0	2	$-\frac{8}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	-5
$-z$	0	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	1	0	5
w	0	-1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	1	6

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	B
h_1	0	0	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	3
x_2	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1
h_3	0	0	$\frac{10}{3}$	0	0	-1	0	0	5
$-z$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	-1
w	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	1	7

$\frac{5}{3} r -$

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	B
h_1	0	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_2	1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{9}{10}$	0	0	$-\frac{11}{2}$
x_3	0	0	1	0	0	$-\frac{3}{10}$	0	0	$-\frac{3}{2}$
$-z$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	-2
w	0	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{19}{2}$

$w = 0 \Rightarrow$ cancello le colonne h

e riga colonna w

	x_1	x_2	x_3	$-z$	B
h_1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_2	1	1	0	0	$-\frac{11}{2}$
x_3	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$
$-z$	0	0	0	1	-2

$-z \geq 0$

$h_1 = \frac{1}{2}, \ h_2 = 0, \ h_3 = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = -\frac{11}{2}$

$x_3 = -\frac{3}{2}$

PL INTERA

BRANCH AND BOUND

S_0

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-5x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

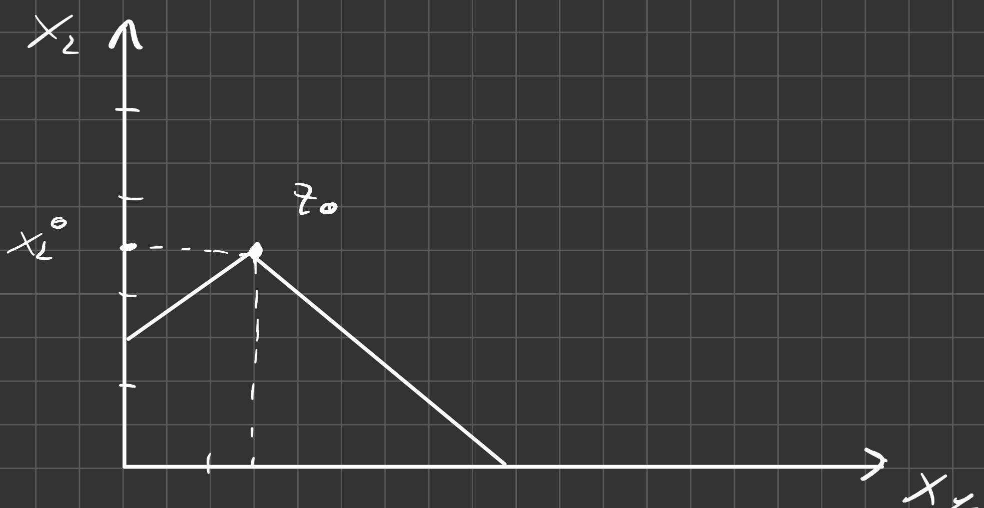
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ -5(5 - x_2) + 6x_2 = 9 \end{cases}$$

$$-16 + 5x_2 + 6x_2 = 9$$

$$x_2 = \frac{25}{10} = 2{,}5 \qquad \boxed{z = 3{,}5}$$

$$x_1 = 2{,}5$$



S1

$\max z = -x_1 + 2x_2$

$-5x_1 + 6x_2 \le 8$

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{13}{6}$

$z_1 = 3{,}33$

S2

$\max z = -x_1 + 2x_2$

$-5x_1 + 6x_2 \le 8$

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 \ge 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

$z_2 = 2$

S_3

$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \le 9$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 \le 1$

$x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 3/4$

$x_2 = 2$

$z_3 = 3,25$

S_4

$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \le 9$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 \le 1$

$x_2 \ge 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$-4x_1 = -9$

$x_1 = \frac{9}{4} = 2,25$

$x_2 = 3$

$z_4 = 3,75 > z_0$ fuori dal dominio

S5

$\max z = -x_1 + 2x_2$

$-5x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 2$

$x \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2.5 \end{cases}$

$z^5 = 3$

S6

$\max z = -x_1 + 2x_2$

$-5x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 1$

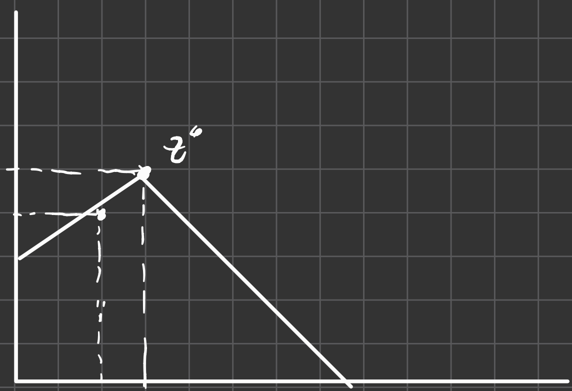
$x_1, x_2 \geq 0$

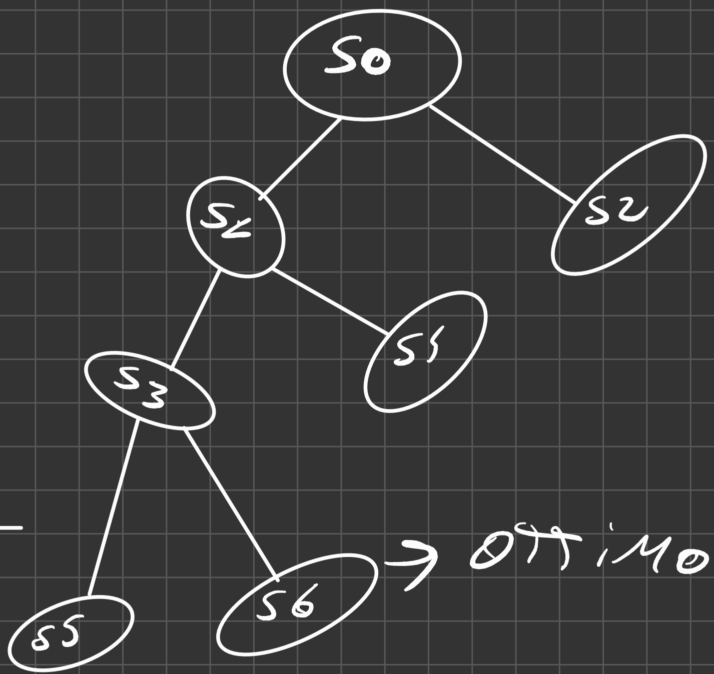
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2,16$

$z^6 = 3,32$





$$\text{Max } z = x_1 + x_2 \qquad S^0$$

s.t.

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$

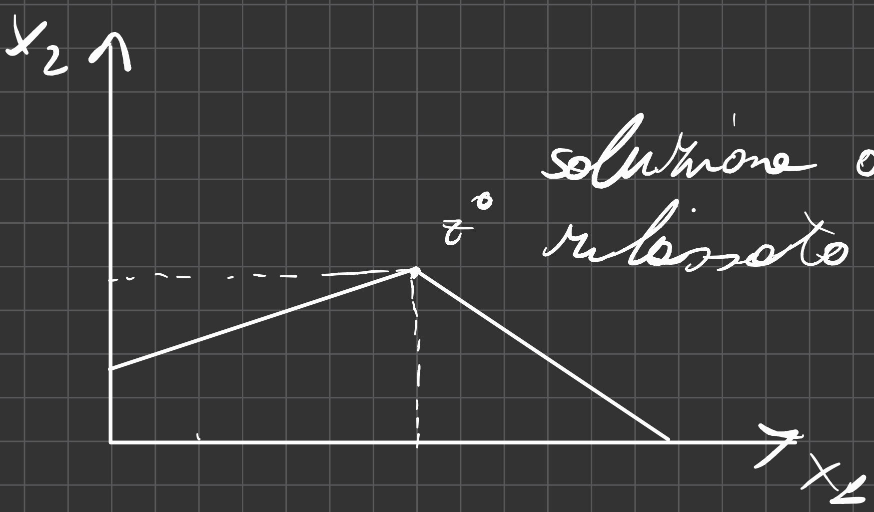
$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

x_1, x_2 interi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{16 - 5x_2}{2} \\ \overset{3}{\cancel{6}}\left(\dfrac{16 - 5x_2}{\cancel{2}}\right) + 5x_2 = 30 \end{cases}$$

$$48 - 15x_2 + 5x_2 = 30 \Rightarrow -10x_2 = -18$$

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}5 \\ x_2 = 1{,}8 \end{cases} \qquad \boxed{z^0 = 5.3}$$



soluzione del problema rilassato

S^1

$\text{Max } z = x_1 + x_2$

s.t.

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \leq 3$

x_1, x_2 interi

$x_1 = 3$

$x_2 = \frac{16-6}{5} = 2$

$z^1 = 5$

S^2

$\text{Max } z = x_1 + x_2$

s.t.

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \geq 4$

x_1, x_2 interi

$x_1 = 4$

$x_2 = 1,6$

$z^2 = 5,6$ // fuori dal dominio

S^3

$\text{Max } z = x_1 + x_2$

s.t.

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 1$

x_1, x_2 interi

$x_1 = 5,5$ $z^3 = 6,5$

$x_2 = 1$ // fuori dom

S^4

$\text{Max } z = x_1 + x_2$

s.t.

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

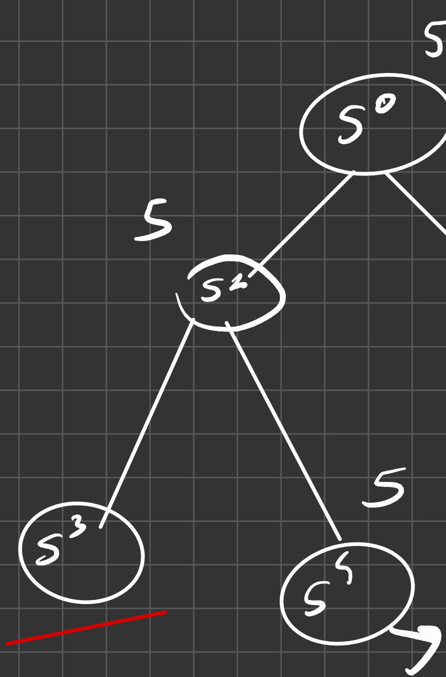
$x_1 \leq 3$

$x_2 \geq 2$

x_1, x_2 interi

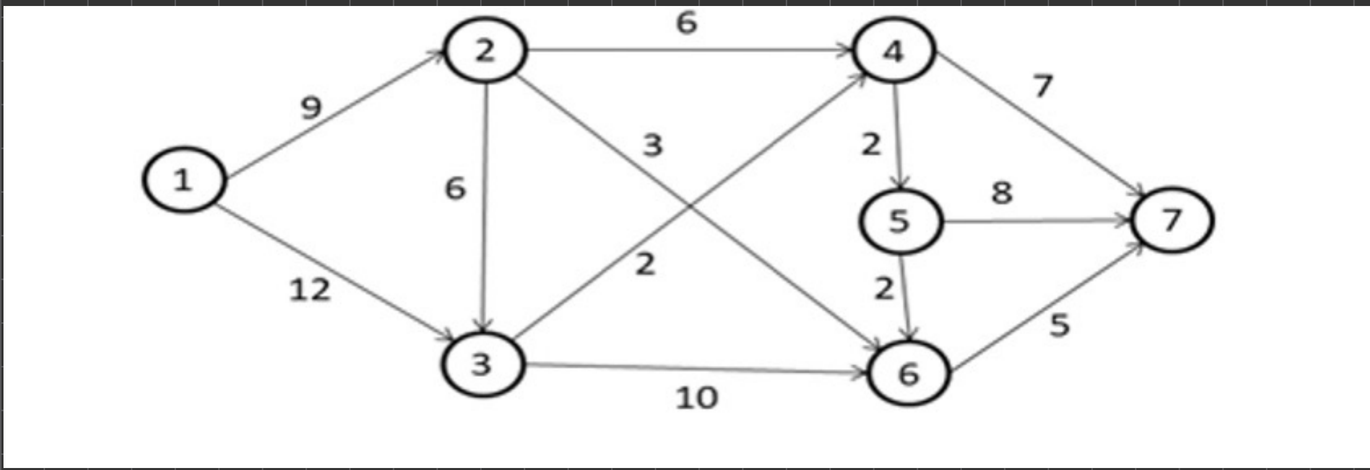
$x_1 = 3$ $z^4 = 5$

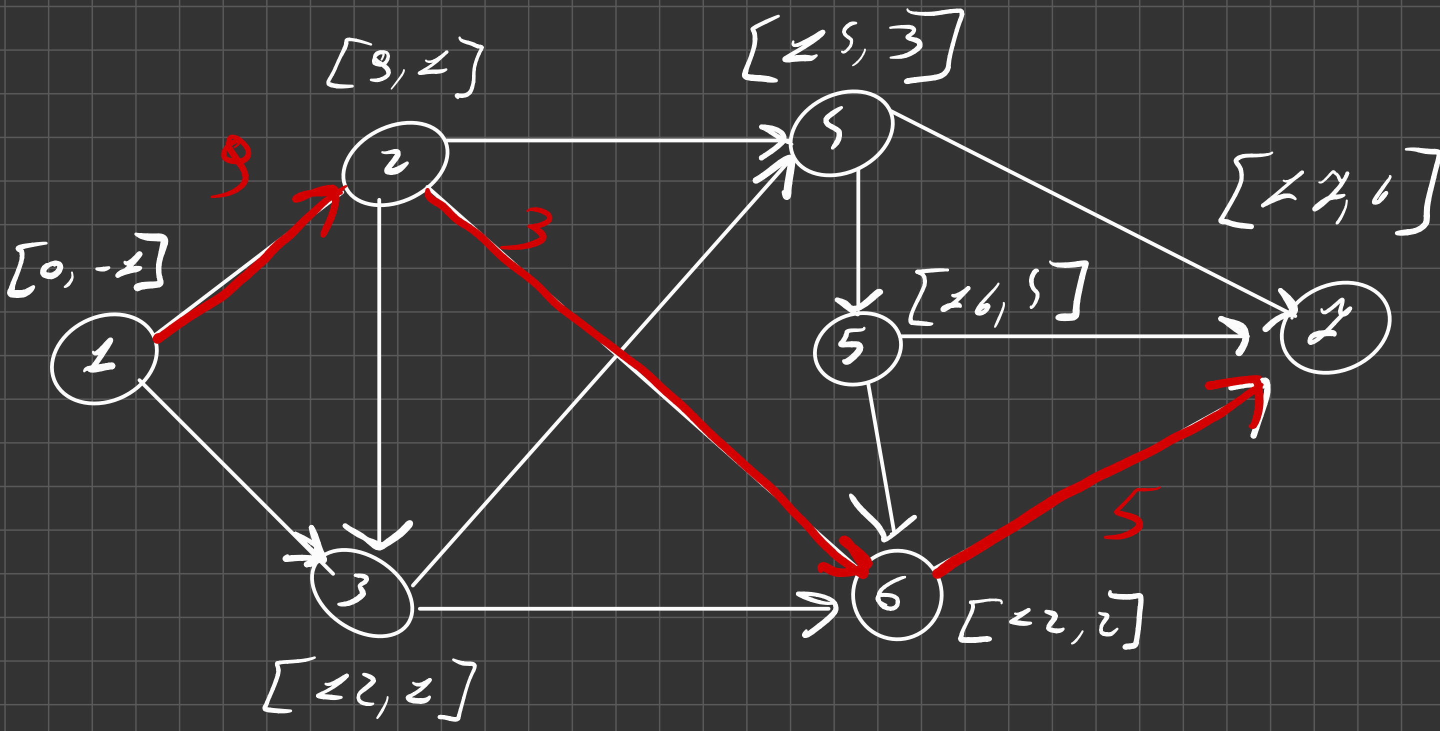
$x_2 = 2$



SOLUZIONE MIGLIORE

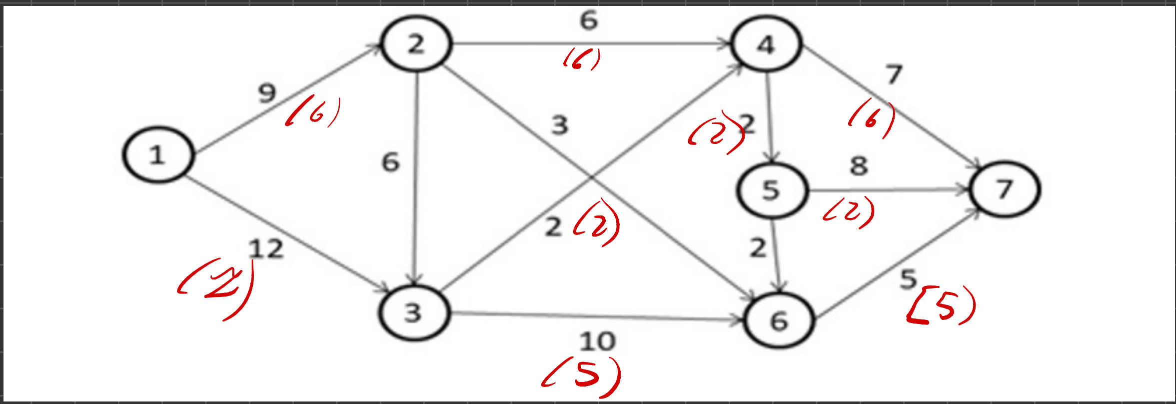
Cammini minimi

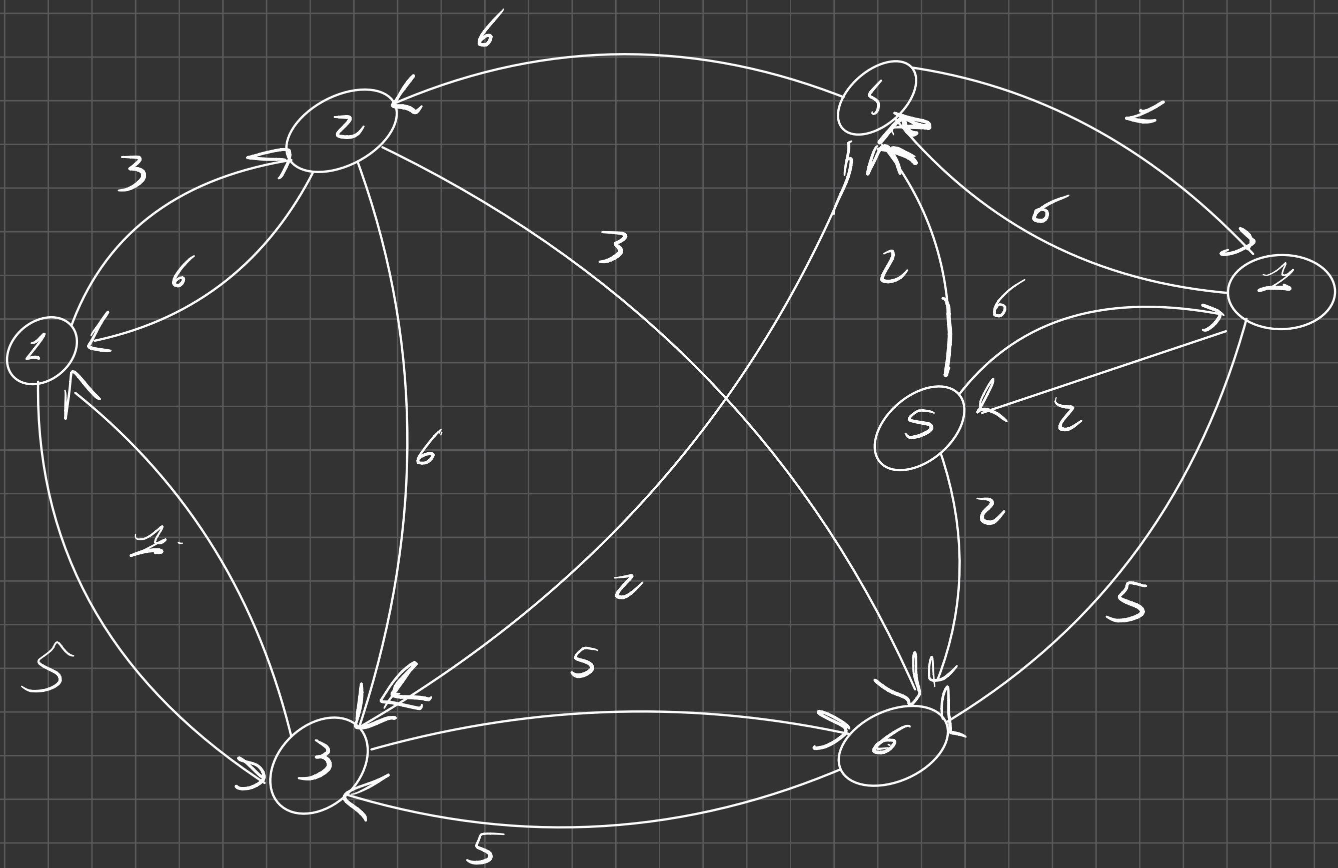




17 Km passando per 1 → 2 → 6 → 7

PROBLEMA DEL MASSIMO FLUSSO





MAX = 13

ESAME DEL 3/03/2021

1)

$f(x,y) = 3x^2 + 0.1y^2 + 0.5xy - 150x - 60y + 15$

algoritmo di discesa rapido

$\nabla f(x,y) = [6x + 0{,}5y - 150,\ 1.5y + 0{,}5x - 60]$

$\nabla f(x^*,y^*) = [6x^* + 0{,}5y^* - 150,\ 1.5y^* + 0.5x^* - 60] = [0,0]$

$$\begin{cases} 6x + 0.5y - 150 = 0 \\ 1.5y + 0.5x - 60 = 0 \end{cases}$$

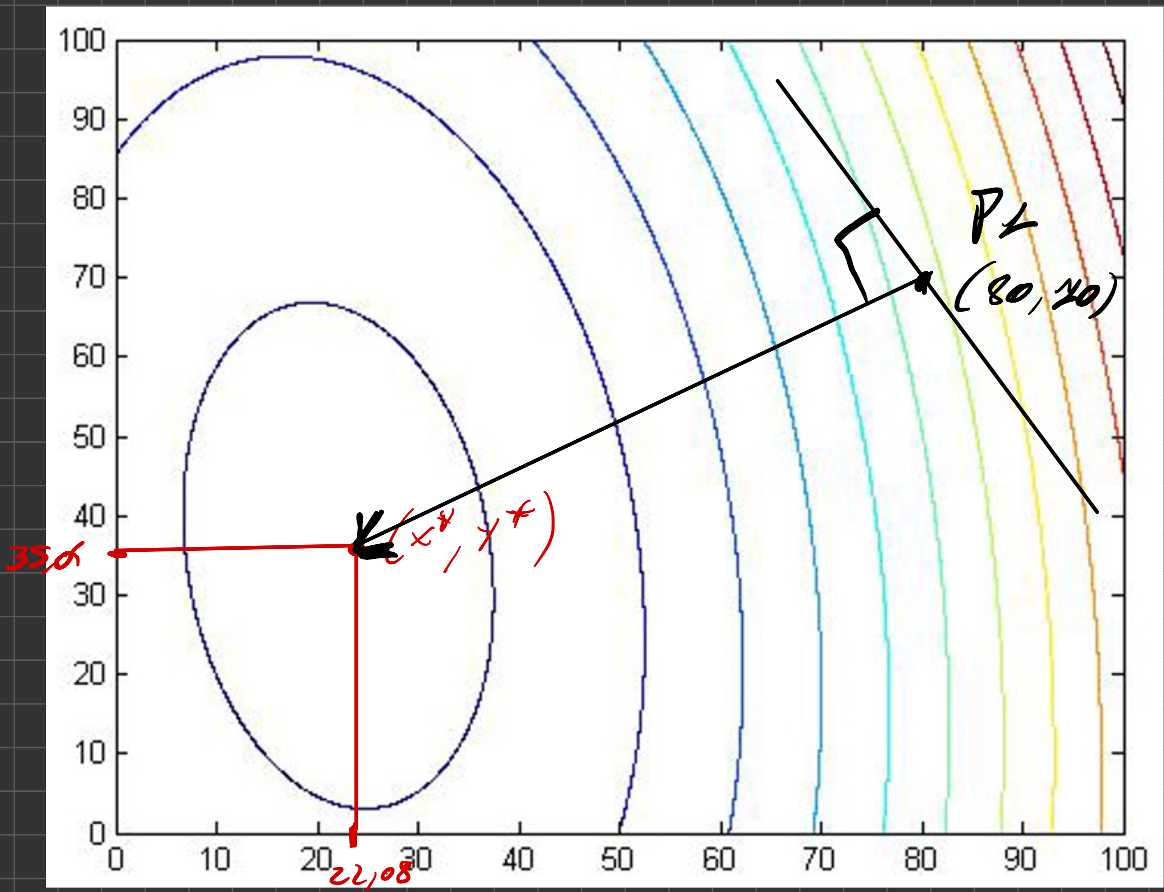
$$\begin{cases} y = \dfrac{150 - 6x}{0.5} = 300 - 12x \\ 1.5(300 - 12x) + 0.5x = 60 \end{cases}$$

$-16{,}8x + 0{,}5x = -360$

$-16{,}3x = -360$

$x = \dfrac{360}{16{,}3} = 22{,}08 \quad y = 35{,}05$

$$[x^*, y^*] = [22.08, 35.05]$$



algoritmo del gradiente (1 step.)

$$f(x,y) = 3x^2 + 0.1y^2 + 0.5xy - 150x - 60y + 15$$

$$x^0 = [80, 10]$$

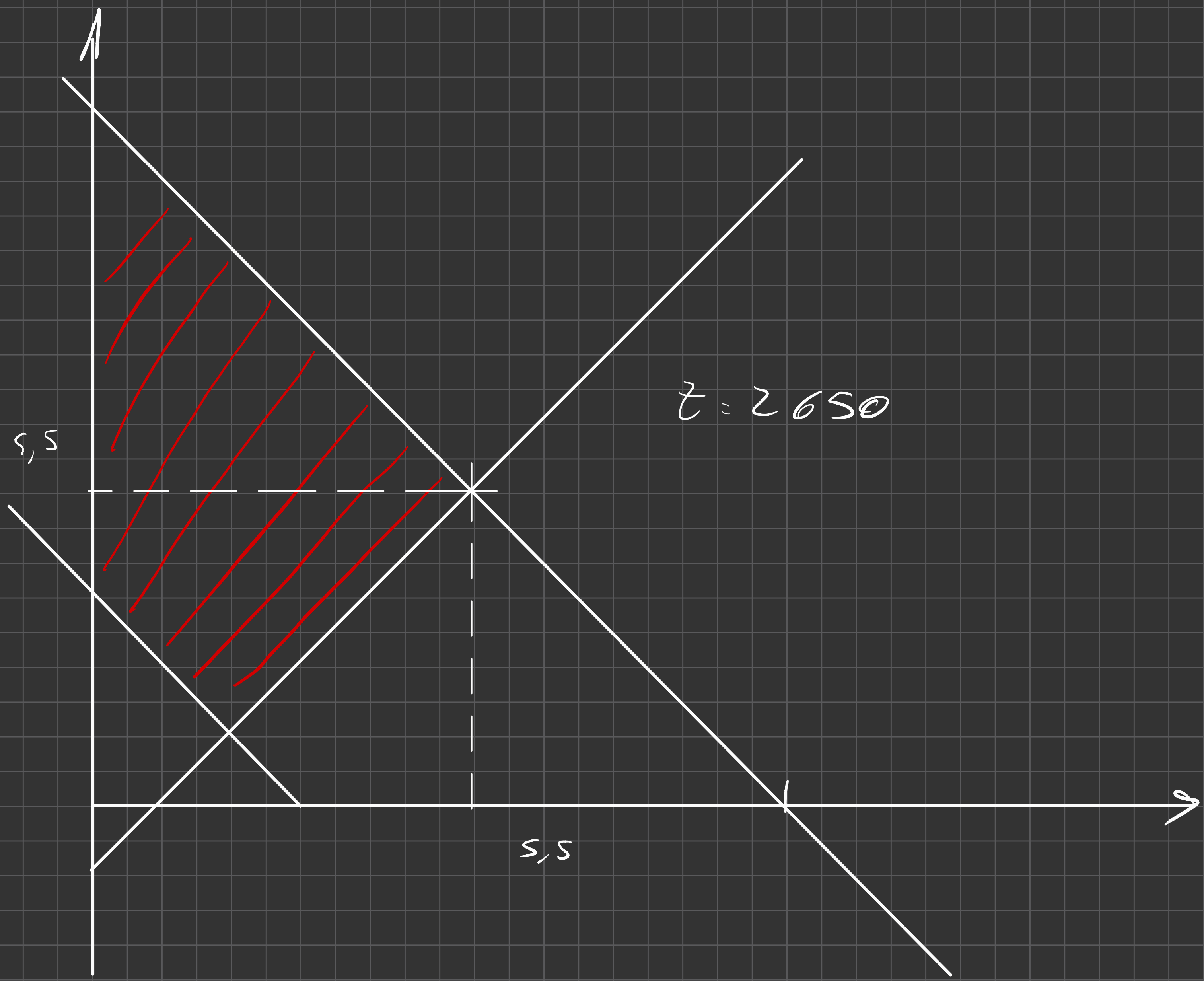
$$\nabla f(x,y) = [6x + 0{,}5y - 150,\ 1.5y + 0{,}5x - 60]$$

$$\max\ z = 500 x_A + 200 x_B$$

$$x_A + x_B \le 10$$

$$x_A + x_B \ge 3$$

$$x_A - x_B \le 2$$



$$\max \ z = 500x_A + 200x_B$$

$$x_A + x_B \leq 20$$

$$-x_A - x_B \leq -3$$

$$x_A - x_B \leq 2$$

$$\begin{cases} x_A + x_B + y_1 = 20 \\ -x_A - x_B + y_2 = -3 \\ x_A - x_B + y_3 = 2 \end{cases}$$

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_2	$-z$	b
y_1	0	0	1	1	0	0	1
x_B	0	1	1/2	0	-1/2	0	3,5
x_A	1	0	1/2	0	1/2	0	5,5
$-z$	0	0	350	0	350	1	-3151

$z = 3x_1 + 3x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 12$

$2x_1 + 3x_2 \leq 18$