

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. Fabio Ruggiero – A.A. 2023/24

Luca Maria Incarnato

INDICE DEGLI ARGOMENTI

INFORMAZIONI COMPLEMENTARI

1. RICHIAMI DI ALGEBRA MATRICIALE (p. 3)
2. RICHIAMI ALLE TRASFORMATE DI LAPLACE (p. 14)
3. LA TRASFORMATA ZETA PER SEGNALI A TEMPO DISCRETO (p. 20)
4. INTRODUZIONE ALL'AMBIENTE MATLAB (p. 23)
5. GRAFICI E FUNZIONI IN MATLAB (p. 29)

SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO

6. INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI SISTEMI DINAMICI (p. 32)
7. STRUTTURA E CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI (p. 34)
8. LA MODELLAZIONE DI UN SISTEMA (p. 36)
9. MOVIMENTO LIBERO E FORZATO DI UN SISTEMA LTI (p. 43)
10. LA RISPOSTA IMPULSIVA E L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE (p. 46)
11. EQUILIBRIO E STABILITÀ DI UN SISTEMA (p. 49)
12. ALTRI MODI PER DETERMINARE LA STABILITÀ DI UN SISTEMA LTI (p. 54)
13. STABILITÀ PER SISTEMI NON LTI (p. 64)
14. LE TRAIETTORIE E IL PIANO DELLE FASI (p. 68)
15. ALTRE PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI (p. 74)
16. LA SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN E LA STABILITÀ BIBO (p. 78)
17. RISPOSTA A REGIME PERMANENTE (p. 82)
18. ANALISI DEI SISTEMI LTI NEL DOMINIO DI LAPLACE (p. 84)
19. RAPPRESENTAZIONI POSSIBILI DI UN SISTEMA LTI (p. 88)
20. RAPPRESENTAZIONI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (p. 91)
21. LA RISPOSTA ALLO SCALINO PER LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (p. 96)
22. LA RISPOSTA A REGIME PER LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (p. 104)
23. I DIAGRAMMI DI BODE (p. 109)
24. AZIONI FILTRANTI PER SISTEMI LTI (p. 116)
25. ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI (p. 118)

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO

26. INTRODUZIONE AI SISTEMI A TEMPO DISCRETO (p. 127)
27. EQUILIBRIO E STABILITÀ DI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO (p. 135)
28. LE ALTRE PROPRIETÀ STRUTTURALI A TEMPO DISCRETO (p. 142)
29. LA FDT E LA RISPOSTA ALLO SCALINO A TEMPO DISCRETO (p. 144)
30. SISTEMI FIR (p. 153)
31. SISTEMI A DATI CAMPIONATI (p. 154)

INFORMAZIONI COMPLEMENTARI

RICHIAMI DI ALGEBRA MATRICIALE

Si consideri una **matrice quadrata** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il cui elemento generico è indicato con a_{ij} . Si definisce **diagonale principale della matrice A** l'insieme di elementi a_{ii} , mentre si definisce **sopra – diagonale principale** l'insieme di elementi $a_{i(i+1)}$. Una matrice è detta **triangolare inferiore** (dualmente superiore) se sono nulli tutti gli elementi sopra (dualmente sotto) la **diagonale principale**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{j1} & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & a_{ni} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una matrice quadrata si dice **matrice diagonale** se sono nulli tutti gli elementi al di fuori della **diagonale principale** (non escludendo la possibilità che i suoi elementi possano essere nulli):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Una qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ può essere **partizionata a blocchi**, cioè può essere vista come una **matrice di matrici**:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

Con $B \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$, $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_2}$, $D \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ e $E \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$ tali che $n = n_1 + n_2$ e $m = m_1 + m_2$.

La **matrice quadrata con tutti zeri** verrà detta **matrice nulla** e si indicherà con il simbolo $O_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (o **0**), mentre la **matrice generica con tutti zeri** $O_{nm} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; invece, la **matrice che ha tutti gli elementi nulli ad eccezione di quelli sulla diagonale, che sono unitari**, è detta **matrice identità** (è sempre una matrice quadrata diagonale) ed è indicata con $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La **trasposizione matriciale** è un'operazione che associa ad una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice $B = A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che:

$$a_{ij} = b_{ji} \quad \forall i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$$

Ovvero la matrice **A** a cui sono state invertite le righe e le colonne. Si definisce **traccia di una matrice quadrata** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la somma degli elementi sulla **diagonale principale**:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Per la quale valgono le seguenti proprietà:

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$, proprietà di invarianza per trasposizione;
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, dovuta al fatto che $\sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

La norma in \mathbb{R}^n di un vettore $a = [a_1, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ si definisce come la radice del prodotto tra il vettore e sé stesso trasposto:

$$\|a\| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1, \dots, a_n]} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Se si associa un vettore ad uno spazio cartesiano si può vedere la norma come la distanza del vettore con l'origine del sistema (o la lunghezza del vettore stesso).

Per una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è possibile definire il determinante come:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{a}_{ij} \in \mathbb{R}$$

Dove $\hat{a}_{ij} \in \mathbb{R}$ è il complemento algebrico di A rispetto all'elemento a_{ij} , ossia il determinante della matrice A a cui sono rimosse la riga i -esima e la colonna j -esima, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. Si noti che la definizione di determinante è ricorsiva e si riduce al caso base del determinante di uno scalare, che è lo scalare stesso.

Una matrice con determinante nullo viene detta **singolare o non invertibile**; infatti, una matrice è invertibile quando non è singolare, in tal caso si definisce la matrice inversa $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che:

$$AB = I_n$$

Per cui:

$$A^{-1}AB = A^{-1}I_n$$

$$B = A^{-1}$$

Dove:

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \hat{a}_{ji}$$

Vanno notate due cose: in primis che la moltiplicazione matriciale non è commutativa, e che nella definizione del termine generico b_{ij} della matrice inversa il complemento algebrico è calcolato sugli indici scambiati ji . Sono elencate alcune proprietà del determinante di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$:
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$, con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, proprietà di commutatività;
- $\det(A) = \det(A^T)$, proprietà di invarianza per trasposizione.

Sia considerata una matrice diagonale $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ invertibile, la sua inversa sarà:

$$A^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right\}$$

In questo caso, la matrice è singolare se anche solo uno dei suoi elementi è nullo, dal momento in cui il determinante di una matrice diagonale è la produttoria degli elementi sulla diagonale principale stessa:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_i$$

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matrice generica, si considerino tutte le sottomatrici quadrate (anche con righe e colonne non contigue) di dimensioni $r \times r$, con $r = 1 \dots n$. Il massimo valore di r per cui almeno una di queste matrici quadrate non è singolare è detto rango $\rho(A)$ della matrice; si può facilmente intuire che:

$$0 \leq \rho(A) \leq \min\{n, m\}$$

La matrice è di rango massimo se $\rho(A) = \min\{n, m\}$; una matrice quadrata è invertibile se e solo se è di rango massimo.

Un qualunque insieme di k righe o colonne, $a_i \in \mathbb{R}^n$ con $i = 1 \dots m$, di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ si dice essere linearmente indipendente se:

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i a_i \neq 0$$

Ovvero, qualsiasi siano gli scalari γ_i non tutti nulli, nessuna delle altre colonne si può ottenere come combinazione lineare delle altre. Il rango di una matrice può essere definito anche come il massimo numero di righe e colonne linearmente indipendenti.

Siano considerati un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, associando un sistema cartesiano per una questione di chiarezza grafica, si può dire che il prodotto matrice vettore Av produce una rotazione e una maggiorazione del modulo; ci si chiede se esiste una matrice che produca solo la maggiorazione del modulo, cioè una matrice tale che:

$$Av = \lambda v$$

Con $\lambda \in \mathbb{R}$ (o al più $\lambda \in \mathbb{C}$). Spostando il termine a destra dell'uguaglianza a sinistra e raccogliendo il vettore a destra si può scrivere la relazione nei seguenti termini:

$$Av - \lambda I_n v = \underline{0}$$

$$(A - \lambda I_n)v = \underline{0}$$

Escludendo soluzioni banali, ci si chiede se esistano soluzioni per questa equazione. Estendendo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ii} - \lambda_i & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

In forma di sistema di equazioni lineari con incognite $[v_1, \dots, v_n]^T$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)v_1 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ \dots + (a_{ii} - \lambda_i)v_i + \dots = 0 \\ a_{n1}v_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda_n)v_n = 0 \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché – Capelli, questo sistema **ammette soluzioni non banali se la matrice associata è singolare**, cioè se:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Questa equazione è detta **equazione caratteristica nell'incognita λ** , le cui soluzioni λ_i sono chiamate **autovalori della matrice A** . Sviluppando il determinante in funzione di λ :

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Questo polinomio prende il nome di **polinomio caratteristico e le sue radici sono gli autovalori della matrice A** . Essendo la matrice della quale si calcolano gli autovalori reale, il polinomio caratteristico avrà coefficienti reali e le sue radici (quindi gli autovalori) saranno o reali o complesse coniugate. Si può verificare che:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Quindi, **una matrice è singolare se almeno uno dei suoi autovalori è nullo**. Si individuano i **tre criteri di singolarità di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$** :

1. $\det(A) = 0$;
2. $\rho(A) \neq n$;
3. $\exists \lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} : \lambda_i = 0$.

Gli autovalori di una matrice diagonale a blocchi o di una matrice triangolare a blocchi sono gli autovalori delle matrici sulle diagonali.

$$aut \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \right) \rightarrow aut (A, B)$$

Di conseguenza, **gli autovalori di una matrice diagonale o triangolare sono gli elementi della diagonale**. Con un abuso di notazione, si può mostrare come una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa la propria **equazione caratteristica**:

$$\varphi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0 = \underline{0}$$

Questa relazione permette di vedere **la potenza n – esima di una matrice come una combinazione di tutte le sue $n - 1$ potenze**; anche questa è una **definizione ricorsiva**.

Ogni autovalore di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è associato ad un vettore $v_i \in \mathbb{R}^n$, non nullo, detto autovettore e tale che:

$$(A - \lambda_i I_n)v_i = \underline{0}$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a cui sono associati n autovalori λ_i , ci si chiede se esiste un'altra matrice che abbia gli stessi autovalori. Si consideri una matrice non singolare, quindi invertibile, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si può verificare che:

$$\begin{aligned}\det(TAT^{-1} - \lambda I_n) &= \det(TAT^{-1} - \lambda TT^{-1}) = \det(TAT^{-1} - TT^{-1}\lambda) = \det(T(AT^{-1} - T^{-1}\lambda)) \\ &= \det(T(AT^{-1} - \lambda T^{-1})) = \det(T(A - \lambda I_n)T^{-1}) = \det(T) \det(A - \lambda I_n) \det(T^{-1}) \\ &= \det(T) \frac{1}{\det(T)} \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)\end{aligned}$$

Segue che **il polinomio caratteristico della matrice TAT^{-1} è lo stesso della matrice A** e, quindi, **anche i rispettivi autovalori**. Due matrici che rispettano queste proprietà sono dette **matrici simili**; nello studio dei sistemi **gli autovalori assumeranno un ruolo fondamentale** e poter lavorare con matrici più semplici di quella assegnata dal sistema ma aventi gli stessi autovalori è una possibilità non da poco.

Si introducano i concetti di **molteplicità algebrica e geometrica**. Sia considerata una **matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dotata di h autovalori distinti**, con $0 \leq h \leq n$; la **molteplicità algebrica μ_i dell'autovalore λ_i** (con $i \in [1, h]$) **corrisponde al numero di volte in cui l'autovalore è soluzione del polinomio caratteristico della matrice**. La somma di tutte le molteplicità algebriche degli h autovalori deve **corrispondere a n** , dal momento in cui **n sono tutte le radici** (comprese eventuali sovrapposizioni) **del polinomio caratteristico**:

$$\sum_{i=1}^{h \in [0, n]} \mu_i = n$$

Una matrice è detta di singola struttura se ogni autovalore λ_i ha molteplicità algebrica unitaria, cioè se compare una sola volta come radice del polinomio caratteristico. Formalmente, **si definisce la molteplicità geometrica ν_i di un autovalore λ_i come la dimensione n a cui si sottrare il rango della matrice $A - \lambda_i I_n$** ; concretamente, invece, **la molteplicità geometrica corrisponde al numero di autovettori associati all'autovalore λ_i di molteplicità algebrica μ_i che risolvono l'equazione**:

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

Chiaramente, ci saranno al più tanti autovettori quante volte l'autovalore è soluzione dell'**equazione caratteristica**, individuando la seguente **relazione tra le due tipologie di molteplicità**:

$$1 \leq \nu_i \leq \mu_i \leq n \quad \forall i = 1 \dots h$$

Sia considerata una **matrice di semplice struttura, si vuole trovare una matrice A_D diagonale e simile ad A** , quindi con gli stessi autovalori; cioè una matrice:

$$A_D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Tale operazione prende il nome di **diagonalizzazione** ed è molto utile perché **unisce la comodità della similitudine alla comodità di operare con matrici diagonali**. Per ogni autovalore λ_i è **associato un unico autovettore**, visto che $1 \leq \nu_i \leq \mu_i = 1$:

$$(A - \lambda_1 I_n)v_1 = 0$$

...

$$(A - \lambda_n I_n) v_n = 0$$

Si definisce **matrice degli autovettori** quella matrice che ha come colonna i singoli autovettori:

$$T_D^{-1} = [v_1, \dots, v_n] = \left[\begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che questa matrice è **non singolare**; infatti, essendo associata ad **autovalori tutti distinti**, la matrice **A** ha autovettori tutti **linearmente indipendenti** e la matrice ad essi associata è di **rango massimo**, quindi **non singolare**. La relazione precedente può essere espressa anche nei seguenti termini:

$$\lambda_1 v_1 = A v_1$$

...

$$\lambda_n v_n = A v_n$$

Che, in forma compatta:

$$T_D^{-1} A_D = A T_D^{-1}$$

Infatti:

$$T_D^{-1} A_D = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{cases}$$

Tornando alla forma compatta, moltiplicando da sinistra (dualmente destra) ambo i membri per l'inversa T_D della matrice degli autovettori:

$$A_D = T_D A T_D^{-1} \wedge A = T_D^{-1} A_D T_D$$

Segue che **A_D e A sono simili**, ovvero che **A è diagonalizzabile**. Ci si chiede se matrici non semplici siano diagonalizzabili, ovvero se la diagonalizzazione può essere effettuata quando esistono $h < n$ autovalori distinti; la risposta è affermativa, a patto che le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore siano uguali, ovvero se autovalori uguali generano autovettori distinti (gli autovalori uguali si comportano geometricamente come autovalori distinti). In queste condizioni, ci sono tanti autovalori quanti autovettori, n , permettendo ancora l'operazione di diagonalizzazione come sopra enunciata.

Si supponga che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ abbia solamente h autovalori λ_i distinti, con $0 < h < n$; per ognuno di questi autovalori la molteplicità algebrica è tale che la sommatoria restituisca n ma per qualche λ_i si ha $\mu_i \neq \nu_i$, mentre per ogni λ_i è possibile associare un insieme di μ_i autovettori $v_{ij} \in \mathbb{R}^n$, con $j = 1 \dots \nu_i$. Tuttavia, già dal fatto che l'indice j arriva solo fino a $\nu_i \leq \mu_i$, è intuitivo che potrebbe non essere possibile ricavare tutti i μ_i autovettori dall'equazione $(A - \lambda_i I_n) v_{in} = \underline{0}$, in quanto le due molteplicità potrebbero non coincidere (ovvero due autovalori uguali generano pochi autovettori rispetto a quanti ne servano, non producendo una matrice $n \times n$). In questo caso bisogna ricorrere alla cosiddetta **catena degli autovettori generalizzati**, definita come:

$$(A - \lambda_i I_n) v_{ij} = 0 \quad (1)$$

$$(A - \lambda_i I_n) v_{ij}^{(2)} = v_{ij} \quad (2)$$

$$(A - \lambda_i I_n) v_{ij}^{(3)} = v_{ij}^{(2)} \quad (3)$$

...

$$(A - \lambda_i I_n) v_{ij}^{(\eta_{ij}+1)} = v_{ij}^{(\eta_{ij})} \quad (\eta_{ij} + 1)$$

Il numero fra parentesi alla destra è detto livello della catena degli autovettori generalizzati e il simbolismo $v_{ij}^{(\eta_{ij})}$ indica il generico autovettore incognita al livello $\eta_{ij} > 0$ della catena e termine noto del livello $\eta_{ij} + 1$. Si nota che, **per il singolo autovalore λ_i deve essere rispettata:**

$$\sum_{j=1}^{\nu_i} \eta_{ij} = \mu_i$$

Si vuole trovare una matrice simile ad A tale che abbia una forma quanto più simile possibile ad una matrice diagonale (non perfettamente diagonale perché non si è nelle ipotesi di diagonalizzazione); **questa operazione è detta Jordanizzazione e la matrice in questione, $A_J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è detta matrice di Jordan.** In realtà, **la jordanizzazione è un'operazione eseguibile su tutte le matrici quadrate e più generale della diagonalizzazione**, con la quale esiste un rapporto di inclusione, cioè **la diagonalizzazione è una particolare jordanizzazione**; infatti, una qualsiasi matrice quadrata diagonalizzabile è anche jordanizzabile, non vale però il contrario nelle ipotesi sopra considerate.

Si può dimostrare come **la trasformazione di Jordan possa realizzarsi tramite le seguenti relazioni:**

$$A_J = T_J A T_J^{-1} \wedge A = T_J^{-1} A T_J$$

Con $T_J^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrice di trasformazione di Jordan e A e A_J matrici simili. La matrice A_J è una matrice di Jordan quasi diagonale, ovvero **con tutti gli autovalori di A presenti sulla diagonale principale e qualche 1 sulla sopra – diagonale laddove sono presenti i cosiddetti blocchi di Jordan**; nel dettaglio, A_J può essere partizionata nel seguente modo:

$$A_J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_h\}$$

Con $J_i \in \mathbb{C}^{\mu_i \times \mu_i}$ e $i = 1 \dots h$ blocco di Jordan tale che:

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{i\nu_i}\}$$

Con $J_{ij} \in \mathbb{C}^{\eta_{ij} \times \eta_{ij}}$, $j = 1 \dots \nu_i$ e η_{ij} il livello corrispondente della catena di autovettori generalizzati, detti **mini – blocchi di Jordan** e tale che:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Sulla sopra – diagonale si posiziona 1 in corrispondenza di quegli autovalori la cui molteplicità algebrica e geometrica non coincidono.

La matrice A è detta **jordanizzabile** e T_J^{-1} matrice di trasformazione di Jordan, composta da tutti gli autovettori di A (compresi quelli della catena generalizzata posti l'uno accanto l'altro nella costruzione della matrice); pertanto, **data una matrice A non diagonalizzabile** (se diagonalizzabile la jordanizzazione coincide con la diagonalizzazione) è possibile calcolare la sua matrice A_J in **forma di Jordan** determinando tutti i suoi autovettori, ponendoli in T_J^{-1} e calcolando $T_J A T_J^{-1}$, e viceversa.

Sia considerata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile; si vuole calcolare per ogni $k > 0$ la matrice $A^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ senza ricorrere ad una produttoria infinita di termini, ovvero cercando una forma chiusa dell'operazione. Poiché la matrice è diagonalizzabile:

$$A^k = (T_D^{-1} A_D T_D)^k = (T_D^{-1} A_D T_D)(T_D^{-1} A_D T_D) \dots (T_D^{-1} A_D T_D) = T_D^{-1} A_D^k T_D = T_D^{-1} \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\} T_D$$

Questo risultato permette di dire che **la matrice degli autovettori mette in forma diagonale anche la potenza di una matrice diagonalizzabile**. Se la matrice A non è diagonalizzabile, la si può mettere in **forma di Jordan** e, con una simile dimostrazione, si può dire che:

$$A^k = T_J^{-1} \text{diag}\{J_1^k, \dots, J_h^k\} T_J$$

Ossia che **la matrice di trasformazione di Jordan mette in forma di Jordan anche la potenza di una matrice non diagonalizzabile**. Le singole espressioni dei blocchi di Jordan J_i^k sono date da:

$$J_i^k = \text{diag}\{J_{i1}^k, \dots, J_{iv_i}^k\}$$

Con la generica potenza del mini – blocco di Jordan pari a:

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{\eta_{ij}-2} & \xi_{\eta_{ij}-1} \\ 0 & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{\eta_{ij}-3} & \xi_{\eta_{ij}-2} \\ 0 & 0 & \xi_0 & \cdots & \xi_{\eta_{ij}-4} & \xi_{\eta_{ij}-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_0 \end{bmatrix}$$

Con $i = 1 \dots h, j = 1 \dots v_i$ e:

$$\xi_l = \begin{cases} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l} \Leftrightarrow l \leq k \\ 0 \Leftrightarrow l > k \end{cases}$$

In dimensione 2 e 3:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k}{2}(k-1)\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Sia data **una matrice** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **diagonalizzabile**; si vuole calcolare per $t \geq 0$ la quantità $e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In generale **vale la seguente relazione**:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} (At)^i = I_n + At + \frac{(At)^2}{2} + \dots$$

Che è lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = e^x|_{x=At}$. Questa serie è convergente, quindi **la matrice esponenziale è ben definita**.

Essendo la matrice diagonalizzabile, la si può scomporre in $T_D^{-1}A_DT_D$, per cui:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(T_D^{-1}A_DT_D)t} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} (T_D^{-1}A_DT_D)^i T_D = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} T_D^{-1}(A_D t)^i T_D = T_D^{-1} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} (A_D t)^i \right] T_D \\ &= T_D^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} T_D = T_D^{-1} e^{A_D t} T_D \end{aligned}$$

Quindi, **la matrice degli autovettori mette in forma diagonale anche l'esponenziale di una matrice diagonalizzabile**.

Si vuole illustrare una tecnica per il calcolo dell'esponenziale matriciale, meno generale della precedente, che evita il ricorso esplicito agli autovettori ma sotto le ipotesi di matrici di semplici strutture (ovvero con autovalori tutti distinti). Si può dimostrare la seguente relazione:

$$A^q u_i = \lambda_i^q u_i$$

Con $q > 0$ e $i = 1 \dots n$; infatti, attraverso il principio di induzione:

$$A^{q+1} u_i = A^q A u_i = A^q \lambda_i u_i = \lambda_i A^q u_i = \lambda_i \lambda_i^q u_i = \lambda_i^{q+1} u_i$$

Quindi, λ_i^q è autovalore della matrice A^q con autovettore u_i . Lo stesso vale per la matrice esponenziale:

$$e^{At} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k u_i}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k u_i}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} u_i = e^{\lambda_i t} u_i$$

Quindi, $e^{\lambda_i t}$ è l'autovalore della matrice e^{At} , con autovettore u_i per $i = 1 \dots n$.

È utile richiamare alla mente il **teorema di Caley – Hamilton**, per il quale **A è la soluzione dell'equazione caratteristica e per cui**:

$$A^n = - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$

Per induzione, si può dimostrare anche che:

$$A^{n+q} = - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i$$

Con $\beta_i \neq \alpha_i$, dimostrando che le potenze di una matrice successive alla n – esima richiedono solo le potenze della stessa matrice fino alla $n - 1$ – esima. Infatti:

$$A^n A^q = - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i A^q$$

Ma A^q non aggiunge informazioni, è una costante rispetto a i e all'elevamento a potenza per n e la si può considerare come un contributo ai coefficienti β_i tramite α_i . Il risultato può essere esteso alle matrici esponenziali:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i$$

Con $\gamma_i(t) \propto t^k/k!$ dipendente dal tempo e dalle potenze fino alla $n - 1$ – esima della matrice A ; infatti, dall'esponente $k > n$ la potenza A^k sarà una combinazione lineare delle $n - 1$ precedenti potenze (come conseguenza del teorema di Caley – Hamilton) e la somma infinità potrà essere ridotta ad una somma finita. La tecnica appena mostrata, detta del polinomio interpolante, suppone che $h = n$, ossia che la matrice A sia di semplice struttura. Per le precedenti relazioni si può, quindi, scrivere:

$$e^{At} u_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i u_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \lambda_1^i u_1 = e^{\lambda_1 t} u_1$$

...

$$e^{At} u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \lambda_n^i u_n = e^{\lambda_n t} u_n$$

L'ultima uguaglianza di ogni equazione è vera solo se i due coefficienti che moltiplicano lo stesso vettore sono uguali, quindi se:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \lambda_1^i = e^{\lambda_1 t}$$

...

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \lambda_n^i = e^{\lambda_n t}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda_1 + \dots + \gamma_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda_n + \dots + \gamma_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Che risulta essere un **sistema di equazioni lineari nelle incognite $\gamma_i(t)$** ; poiché ogni singola riga delle equazioni ha valore $u_i \neq 0$, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \Leftrightarrow V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Con $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ definita **matrice di Vandermonde, sempre invertibile nel caso in cui la matrice a cui è associata è di semplice struttura ($\lambda_i \neq \lambda_j$)**; infatti:

$$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Segue che i coefficienti $\gamma_i(t)$ possono essere determinati come segue:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix} = V^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ricavati i coefficienti in funzione del tempo, è **possibile ricavare l'esponenziale dalla matrice attraverso la formula**:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i$$

Considerata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non diagonalizzabile, solo jordanizzabile; con una dimostrazione simile al precedente caso, **si può mostrare la valenza della relazione**:

$$e^{At} = T_J^{-1} \operatorname{diag}\{e^{J_{11}t}, \dots, e^{J_{nn}t}\} T_J$$

Quindi, **la matrice di trasformazione di Jordan mette in forma di Jordan anche l'esponenziale di una matrice non diagonalizzabile.**

Le singole espressioni dei blocchi $e^{J_{ii}t}$ sono date da:

$$e^{J_{ii}t} = \operatorname{diag}\{e^{J_{i1}t}, \dots, e^{J_{ii}t}\}$$

Con la generica matrice esponenziale del mini – blocco di Jordan pari a:

$$e^{\mathbf{J}_{ij}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ij}-2}}{(\eta_{ij}-2)!} & \frac{t^{\eta_{ij}-1}}{(\eta_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{\eta_{ij}-3}}{(\eta_{ij}-3)!} & \frac{t^{\eta_{ij}-2}}{(\eta_{ij}-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{\eta_{ij}-4}}{(\eta_{ij}-4)!} & \frac{t^{\eta_{ij}-3}}{(\eta_{ij}-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

In dimensione 2 e 3 è:

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} \wedge \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

RICHIAMI ALLE TRASFORMATE DI LAPLACE

Si consideri una **funzione complessa** $f(t) \in \mathbb{C}$ di variabile reale $t \in \mathbb{R}$ ed una variabile complessa $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, è detta **trasformata di Laplace** della funzione $f(t)$ la funzione:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Ed esiste solo se l'integrale in questione è definito e converge per almeno alcuni valori di s . L'operatore di trasformata secondo Laplace ha un suo inverso, detto **operatore di antitrasformata** per il quale:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

L'estremo inferiore $\bar{\sigma} > -\infty$ delle parti reali della variabile s per cui la trasformata di Laplace esiste ed è finita è detto **ascissa di convergenza**. In questa sede ci si concentrerà prevalentemente su **funzioni/segnali monolateri**, cioè non nulli solo per tempi positivi e che rendono inutile lo studio dell'integrale di trasformata per tempi negativi; tuttavia, si considera come **estremo inferiore di integrazione 0^-** per includere eventuali **impulsi di Dirac** nell'origine. Le trasformate di Laplace delle funzioni in questione sono funzioni fratte, in cui denominatore e numeratore sono polinomi primi tra loro:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Le singolarità di una trasformata di Laplace di questo tipo sono da ricercare tra:

- **Zeri**, che coincidono con le radici del numeratore ($N(s) = 0$);
- **Poli**, che coincidono con le radici del denominatore ($D(s) = 0$).

Nel caso in cui la funzione di cui è stata fatta la trasformata fosse una funzione reale (quindi $f(t) \in \mathbb{R}$) **le singolarità risulteranno essere reali o complesse coniugate**.

Di seguito sono elencate le **principali proprietà e teoremi di interesse della trasformata di Laplace**:

- **Proprietà di linearità**

$$\begin{aligned} \forall f(t), g(t) \in \mathbb{C} \wedge t \in \mathbb{R} \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \wedge G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

- **Proprietà di traslazione nel tempo**

$$\forall f(t) \in \mathbb{C} \wedge t, \tau \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \Rightarrow \forall \tau > 0, \mathcal{L}[f(t - \tau)](s) = e^{-\tau s} F(s)$$

- **Proprietà di traslazione nella variabile complessa**

$$\forall f(t) \in \mathbb{C} \wedge t \in \mathbb{R} \wedge \alpha \in \mathbb{C} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \Rightarrow \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = F(s - \alpha)$$

- **Proprietà di derivazione nel dominio del tempo**

$$\forall f(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} f(0)}{dt^{i-1}}$$

Per la derivata prima:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right](s) = sF(s) - f(0)$$

- **Proprietà di derivazione nel dominio di Laplace**

$$\forall f(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \wedge F \text{ è derivabile} \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Per la derivata prima:

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

- **Proprietà di integrazione nel dominio del tempo**

$$\forall f(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \wedge f \text{ è integrabile tra } 0 \text{ e } +\infty \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) = \frac{1}{s} F(s)$$

- **Proprietà di convoluzione nel dominio del tempo**

$$\forall f(t), g(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \wedge G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) \Rightarrow \mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = F(s)G(s)$$

- **Teorema del valore iniziale**

$$\forall f(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{N(s)}{D(s)} \wedge \text{grado di } D(s) > \text{grado di } N(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0)$$

- **Teorema del valore finale**

$$\begin{aligned} \forall f(t) \in \mathbb{R} : F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \wedge \text{grado di } D(s) \\ &\geq \text{grado di } N(s) \wedge \text{poli nulli o a parte reale negativa} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sF(s) \end{aligned}$$

Con queste basi a disposizione, si elenchino le trasformate dei seguenti segnali notevoli:

- **Impulso di Dirac**

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

La trasformata dell'impulso di Dirac, tra le trasformate notevoli, è l'unica trasformata non monolatera; infatti, tra gli estremi di integrazione compaiono valori negativi (0^-).

- **Scalino**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-\sigma t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s} [0 - 1] = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Le ipotesi per cui questa trasformata si presenta sotto questa forma sono quelle di ascissa di convergenza $\bar{\sigma} > 0$, in modo tale da rendere le parti reali della variabile s ($\sigma + i\omega$) sempre positive e, quindi, l'esponenziale infinitesimo. Per le trasformate di segnali notevoli di ordine superiore al primo (quindi rampa e parabola) non si userà più la definizione ma si ricorrerà alle proprietà della trasformata di Laplace.

- **Rampa**

$$\mathcal{L}[\delta_{-2}(t)](s) = \mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s^2}$$

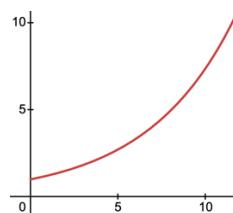
- **Parabola**

$$\mathcal{L}[\delta_{-3}(t)](s) = \mathcal{L}[t\delta_{-2}(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\delta_{-2}(t)](s) = \frac{1}{s^3}$$

- **Esponenziale monolatero discontinuo**

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \alpha) = \frac{1}{s - \alpha}, \forall \alpha > 0$$

L'esponenziale monolatero discontinuo è il segnale seguente:



In genere non verranno usate le sue forme classica e bilatera perché nello studio dei sistemi si incontrano spesso segnali matematici, quindi nulli per tempi negativi.

- **Sinusoida**

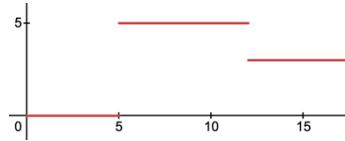
$$\mathcal{L}[\sin(\omega t) \delta_{-1}(t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- **Cosinusoide**

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) \delta_{-1}(t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

- **Composizione di segnali**

Per segnali composti non esiste una regola precisa; ci sono, però, diversi metodi (non univoci e adatti ai casi particolari) con cui riportare il segnale composto ad una somma di segnali notevoli. Ad esempio, sia considerato il seguente segnale:



È possibile ricostruire l'espressione analitica del segnale suddividendo la dinamica in tre blocchi: da 0 a τ_1 , in cui il segnale è nullo, da τ_1 a τ_2 , in cui il segnale è uno scalino di ampiezza α , e da τ_2 in poi, dove il segnale precedente è annullato e rimpiazzato da uno scalino di ampiezza $\alpha - \beta$; quindi:

$$f(t) = 0 \cdot \delta_{-1}(t) + \alpha \delta_{-1}(t - \tau_1) - \alpha \delta_{-1}(t - \tau_2) + (\alpha - \beta) \delta_{-1}(t - \tau_2)$$

Semplificando:

$$f(t) = \alpha \delta_{-1}(t - \tau_1) - \beta \delta_{-1}(t - \tau_2)$$

La cui trasformata è:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\alpha e^{-\tau_1 s}}{s} - \frac{\beta e^{-\tau_2 s}}{s} = \frac{\alpha e^{-\tau_1 s} - \beta e^{-\tau_2 s}}{s}$$

Per ciò che riguarda lo studio dei sistemi, **l'operazione di trasformata secondo Laplace risolve non pochi problemi**, soprattutto quando si va a fare una convoluzione tra due segnali; tuttavia, **essa ha senso quando si dispone di uno strumento che permette di ritornare nel dominio del tempo**, altrimenti si rimarrebbe incalzati nel dominio di Laplace senza poter concludere nulla. **Uno strumento che assolve a questo compito è l'operatore di antitrasformata**:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s) e^{st} ds$$

Grazie a questa formula è possibile instaurare una **relazione biunivoca tra un segnale e la sua trasformata di Laplace**:

$$f(t) \xrightarrow{LT} F(s)$$

In questo modo, **ciò che si può dire su uno vale anche sull’altro.**

All’apparenza traspare una contraddizione: per non svolgere un integrale di convoluzione bisogna svolgerne due di trasformata? In realtà no, perché le trasformate e le antitrasformate che si incontreranno in questa sede non saranno ottenute con alcun integrale, essendo manipolazione semplice di segnali e trasformate notevoli risolvibili senza il passaggio per l’integrale.

Come è stato precedentemente introdotto, **le trasformate più comuni sono funzioni fratte del tipo:**

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Con grado del numeratore minore o uguale del grado del denominatore. Per antitrasformare una funzione di questo tipo è possibile usare lo sviluppo di Heaviside, o scomposizione in fratti semplici, con cui un rapporto è semplificato in una somma di fratti semplici (coefficiente diviso da una variabile) facilmente antitrasformabili. Per approfondire il tema, **si supponga che la funzione abbia:**

- **Poli semplici** (molteplicità unitaria per ogni polo)

Il denominatore, in quanto polinomio, sarà rappresentabile sotto **forma di produttoria di monomi semplici:**

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i)$$

Quindi:

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

Che, in seguito allo sviluppo in fratti semplici diventa:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}$$

Indicando con A_i il residuo del relativo polo. Antitrasformando:

$$f(t) = \mathcal{L} \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} \right] (t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t} \delta_{-1}(t)$$

Bisogna solo individuare un modo con cui calcolare i residui in questione. Si moltiplichì ambo i membri dell’uguaglianza per il monomio semplice j -esimo:

$$F(s)(s + p_j) = \frac{N(s)(s + p_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = (s + p_j) \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}$$

Estraendo il termine j -esimo dalla sommatoria:

$$A_j + (s + p_j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A_i}{s + p_i} = F(s)(s + p_j)$$

Imponendo $s = -p_j$ in modo da annullare la sommatoria al primo termine (tenendo conto che $F(-p_j)(-p_j + p_j) \neq 0$):

$$A_j = \frac{N(-p_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (-p_j + p_i)} = F(-p_j)(-p_j + p_j)$$

Non sempre i residui sono numeri reali; infatti, **quando la radice p_j è complessa**, esistendo anche la radice ad essa complessa coniugata \bar{p}_j , **il residuo A_i sarà complesso ed esisterà anche \bar{A}_i** . Nel caso in cui:

$$F(s) = \frac{A_i}{s + p_j} + \frac{\bar{A}_i}{s + \bar{p}_j}$$

Allora:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_i}{s + p_j} + \frac{\bar{A}_i}{s + \bar{p}_j} \right] (t) = 2|A_i| e^{Re(p_i)t} \cos(Im(p_i)t + \arg(A_i))$$

- **Poli multipli** (molteplicità non unitaria per alcuni poli)

Supponendo il numero di poli distinti h e la molteplicità del polo i – esimo pari a μ_i :

$$D(s) = \prod_{i=1}^h (s + p_i)^{\mu_i}$$

Quindi:

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^h (s + p_i)^{\mu_i}}$$

Che, in seguito allo sviluppo in fratti semplici diventa:

$$F(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{l=1}^{\mu_i} \frac{A_{i,l}}{(s + p_i)^l}$$

Con:

$$A_{i,l} = \frac{1}{(\mu_i - l)!} \cdot \frac{d^{\mu_i - l}}{ds^{\mu_i - l}} [(-p_i + p_i)^{\mu_i} F(-p_i)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^h \sum_{l=1}^{\mu_i} \frac{A_{i,l}}{(s + p_i)^l} \right] (t) = \left(\sum_{i=1}^h \sum_{l=1}^{\mu_i} A_{i,l} \frac{t^{l-1} e^{-p_i t}}{(l-1)!} \right) \delta_{-1}(t)$$

LA TRASFORMATA ZETA PER SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Considerato un segnale (o più generalmente una funzione) **di variabile discreta ma a valori complessi**:

$$k \in \mathbb{Z} \rightarrow f(k) \in \mathbb{C}$$

Si definisce **trasformata zeta del segnale $f(k)$** la funzione:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

Ed esiste se la sommatoria che la definisce converge. Si noti che quest'ultima è una serie unilatera; quindi, se $f(k)$ avesse valori per $k < 0$, questi non concorrerebbero al calcolo della trasformata, che è, pertanto, **definita unilateralmente**. In maniera più sintetica, la trasformata zeta (e il relativo operatore di antitrasformata) sono indicati tramite i seguenti simboli:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z)$$

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)](k)$$

Quanto detto finora può essere tranquillamente ampliato a funzioni vettoriali in \mathbb{C}^n .

Ci si vuole soffermare sulla convergenza della serie, considerando la proprietà dei numeri complessi per cui $z = \rho e^{i\theta}$; sia $\bar{\rho} > 0$ l'estremo inferiore dei moduli di z per cui la serie converge. Si può dimostrare che la trasformata zeta esiste per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che sono all'esterno della circonferenza di raggio $\rho > \bar{\rho}$ (quest'ultimo detto raggio di convergenza).

Nei casi di interesse alla trattazione, i segnali e le funzioni che si incontreranno saranno perlopiù reali e, pertanto, sono di interesse pratico le trasformate del tipo:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Dove $N(z)$ e $D(z)$ sono polinomi a coefficienti reali, dotati di singolarità reali o complesse coniugate. Il raggio di convergenza $\bar{\rho}$ per questa trasformata sarà il massimo tra i moduli dei poli dei polinomi, seppure $F(z)$ possa essere definita per tutti i valori di z diversi dai poli. Si noti che le definizioni e le proprietà delle trasformate di interesse non si discostano molto da quanto è stato detto per le trasformate di Laplace; si noterà a breve come questo sia un pattern ricorrente, che permette di stabilire un'equivaleanza (almeno per quanto riguarda questa sede) **tra i due operatori di trasformata**.

Si vogliono, adesso, elencare le principali proprietà della trasformata zeta:

- **Linearità**

$$\begin{aligned} \forall f(k), g(k) \in \mathbb{C}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \wedge G(z) = \mathcal{Z}[g(k)](z) \\ \Rightarrow \mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)](z) = \alpha F(z) + \beta G(z) \end{aligned}$$

- **Ritardo nel tempo**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \mathcal{Z}[f(k-1)](z) = \frac{1}{z} F(z)$$

Più generalmente:

$$\mathcal{Z}[f(k-n)](z) = \frac{1}{z^n} F(z)$$

- **Anticipo nel tempo**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \mathcal{Z}[f(k+1)](z) = zF(z) - zf(0)$$

Più generalmente:

$$\mathcal{Z}[f(k+n)](z) = z^n F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i}$$

- **Prodotto per esponenziale**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \mathcal{Z}[\alpha^k f(k)](z) = F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

- **Derivata nel dominio zeta**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \mathcal{Z}[kf(k)](z) = -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$$

- **Convoluzione**

$$\forall f(k), g(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \wedge G(z) = \mathcal{Z}[g(k)](z) \Rightarrow \mathcal{Z}[(f * g)(k)](z) = F(z)G(z)$$

- **Teorema del valore iniziale**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

- **Teorema del valore finale**

$$\forall f(k) \in \mathbb{C} : F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Proprio come per Laplace, **tra un segnale e la sua trasformata è possibile instaurare una relazione biunivoca in seno all'esistenza dell'operatore di antitrasformata**; ciò permette anche di definire con certezza delle **trasformate notevoli**, ottenute a partire da una manipolazione del segnale tramite le proprietà appena enunciate:

- **Delta di Kronecker** (analogo dell'impulso a TC)

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k \neq 0 \\ 1 & \Leftrightarrow k = 0 \end{cases} \stackrel{ZT}{\Leftrightarrow} \mathcal{Z}[\delta(k)](z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$$

- **Scalino**

$$\delta_{-1}(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ 1 & \Leftrightarrow k > 0 \end{cases} \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\delta_{-1}(k)](z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Ciò accade solo se:

$$|z| < 1$$

Infatti, solo sotto queste ipotesi la serie converge.

- **Rampa**

$$\delta_{-2}(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ k & \Leftrightarrow k > 0 \end{cases} \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\delta_{-2}(k)](z) = Z[k \cdot \delta_{-1}(k)](z) = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- **Parabola**

$$\begin{aligned} \delta_{-3}(k) &= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ \frac{k}{2}(k-1) & \Leftrightarrow k > 0 \end{cases} \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\delta_{-2}(k)](z) = Z \left[\frac{k}{2} \delta_{-2}(k) - \frac{1}{2} \delta_{-2}(k) \right] (z) \\ &= \frac{1}{2} [Z[k \cdot \delta_{-2}(k)](z) - Z[\delta_{-2}(k)](z)] = \frac{1}{2} \left[-z \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) - \frac{z}{(z-1)^2} \right] \\ &= \frac{z}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

- **Esponenziale**

$$f(k) = \alpha^k \delta_{-1}(k) \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\alpha^k \delta_{-1}(k)](z) = Z[\delta_{-1}(k)] \left(\frac{z}{\alpha} \right) = \frac{\frac{z}{\alpha}}{\frac{z}{\alpha} - 1} = \frac{z}{z - \alpha}$$

- **Seno e coseno**

$$f(k) = \sin(\vartheta k) \delta_{-1}(k) \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\sin(\vartheta k) \delta_{-1}(k)](z) = \frac{z \sin \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}$$

$$f(k) = \cos(\vartheta k) \delta_{-1}(k) \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} Z[\cos(\vartheta k) \delta_{-1}(k)](z) = \frac{z(z - \cos \vartheta)}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}$$

Ci si vuole soffermare, ora, sull'operatore di **antitrasformata**, che **lavora sulla trasformata zeta e restituisce il relativo segnale a tempo discreto**; di conseguenza, **ci si aspetta che questo sia un operatore continuo e non discreto come quello di trasformata**. Formalmente:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

Ed è proprio questa relazione che sancisce la relazione di biunivocità tra i due operatori precedentemente menzionata. Ci si concentrerà su trasformate zeta fratte, come ipotizzato in precedenza, e si analizzerà il modo più semplice con cui riconvertirle in segnali a tempo discreto:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Sulla base dello sviluppo di Heaviside e del calcolo dei residui già approfondito nel dominio di Laplace:

$$\frac{N(z)}{D(z)} = A_0 + \frac{A_1}{(z + p_1)} + \frac{A_2}{(z + p_2)} + \dots$$

Tuttavia, come è stato possibile osservare, **le trasformate zeta non hanno** (come per Laplace) **il numeratore costante**; appare chiaro come **lo sviluppo di Heaviside così formulato non è sufficiente a determinare l'antitrasformata di questa funzione**. Per risolvere questo problema, si consideri **lo sviluppo della funzione**:

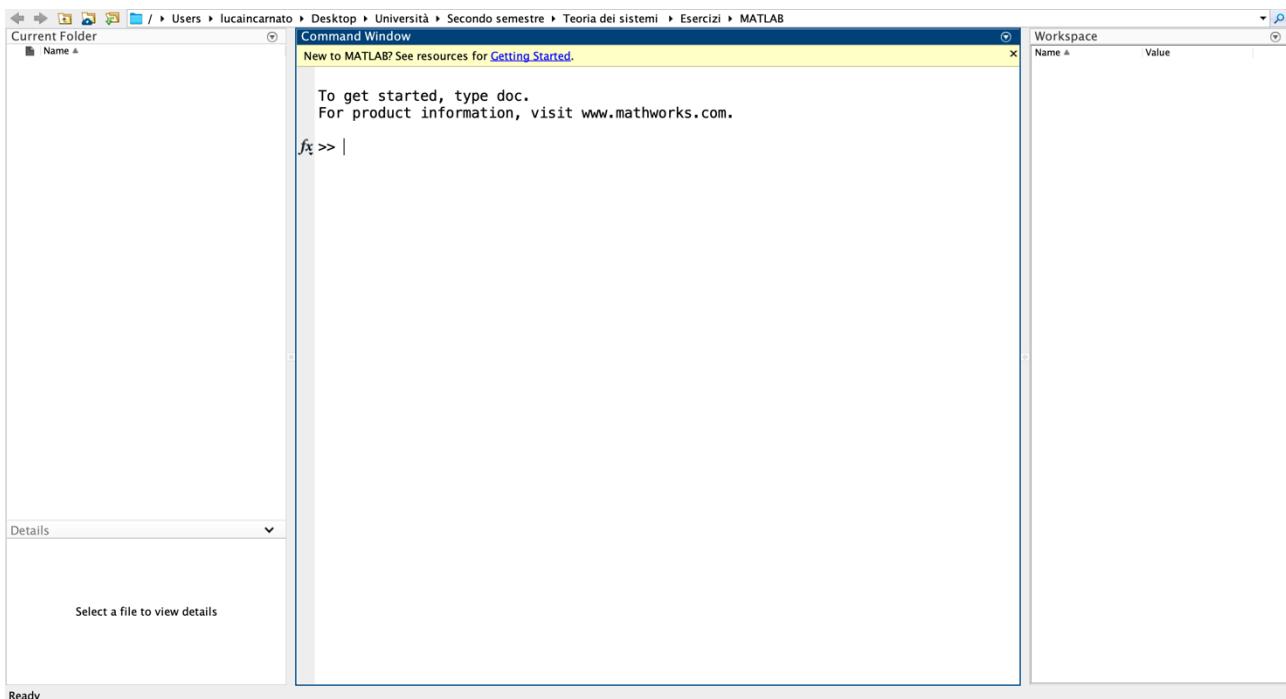
$$F(z) = z \cdot \frac{F(z)}{z} = z \cdot \frac{N(z)}{zD(z)} = \frac{zA_0}{z} + \frac{z\hat{A}_1}{(z + p_1)} + \frac{z\hat{A}_2}{(z + p_2)} + \dots$$

In questo modo ci si è ricondotti ad una forma di trasformata simile a quelle già viste e l'operazione di antitrasformata ne è agevolata.

INTRODUZIONE ALL'AMBIENTE MATLAB

Il programma **MATLAB** nasce con l'esigenza di gestire in maniera pratica le matrici, sebbene nel tempo sia stato ampliato per la gestione e l'analisi di problemi di natura più complessa; il programma implementa un linguaggio di programmazione interpretato, **MATLAB**, con il quale è possibile scrivere delle istruzioni singole nel prompt (indicato con `>>`). Nel prompt è possibile dichiarare variabili, eseguire operazioni elementari, espressioni e funzioni disponibili di default; in MATLAB, una funzione non è altro che un file di testo che contiene diverse istruzioni **MATLAB**, finalizzate all'esecuzione di una task, che può essere chiamato nel prompt digitandone il nome.

Una volta aperto il programma, ci si trova davanti un prospetto divisibile in tre finestre:



- **Project directory**, contenente tutti i file del progetto;
- **Command window**, contenente il prompt e l'editor di testo per eventuali file .m e nel quale è possibile scrivere le istruzioni da eseguire (una alla volta o insieme, in base a quale dei due metodi di programmazione si sta usando);
- **Workspace**, contenente tutte le variabili definite e il loro contenuto.

Esistono diverse istruzioni che permettono al programmatore di accedere a rapidi aiuti per comprendere il funzionamento di alcune funzioni o alla documentazione:

- `help nome_funzione`, restituisce informazioni sulla sintassi della funzione in ingresso;
- `help control`, restituisce una lista di tutte le funzioni della categoria `control` (riguardo il controllo di sistemi dinamici);
- `help`, restituisce le varie categorie di funzioni disponibili (detti toolbox);
- `doc`, restituisce la homepage della guida.

I file di testo .m, una volta che nel prompt è digitato il loro nome senza estensione, vengono interpretati come file di testo ASCII ed eseguiti in MATLAB; all'interno di questi file, i commenti possono essere inseriti se preceduti dal carattere %.

Da quanto finora detto, può sembrare che ci siano due tipologie di istruzioni MATLAB, le istruzioni scritte sul prompt e le istruzioni scritte in file .m; in realtà, questa distinzione è assente e le due istruzioni sono equivalenti, eseguono la stessa operazione allo stesso modo, sono solo conservate in modo diverso. Le istruzioni in questione, in quanto linguaggio interpretato, non hanno bisogno del ; terminale, lo si posiziona solo se non si vuole mostrare a schermo l'esecuzione dell'istruzione; quindi, le due seguenti istruzioni seguenti sono sintatticamente equivalenti, solo che la prima stamperà a video il risultato e la seconda no:

```
var1 = 6  
var2 = linspace(-10, 10, 1000);
```

Per visionare il contenuto della variabile appena dichiarata è sufficiente digitare il nome senza ; (altrimenti non mostrerebbe nulla a schermo), mentre per eliminare dal workspace tutte le variabili dichiarate, si usa l'istruzione `clean`.

In genere, MATLAB impone la doppia precisione (double) per ogni calcolo da eseguire, sebbene ci sia un modo per forzare il formato con i seguenti comandi:

- `format short` → virgola fissa con 4 decimali;
- `format long` → virgola fissa con 15 decimali;
- `format short e` → notazione scientifica con 4 decimali;
- `format long e` → notazione scientifica con 15 decimali.

Il risultato dell'ultima operazione eseguita sarà sempre memorizzato nella variabile `ans`. MATLAB mette a disposizione degli operatori per eseguire le operazioni standard:

- +, -, *, /, ^;
- `sin, cos, tan` (in radianti);
- `sind, cosd, tand` (in gradi);
- `asin, acos, atan`;

- `exp, log` (naturale), `log10` (base 10);
- `abs, sqrt, sign.`

L'unità immaginaria è `i` o `j` ed è predefinita, quindi non è possibile chiamare alcuna altra variabile o indice nel caso in cui fosse usata l'unità complessa. Un numero complesso sarà espresso sempre come somma della sua parte reale e della sua parte immaginaria per `i`:

```
z = 2+i*3
```

Gli operatori applicabili ai numeri complessi sono:

- `abs`, restituisce il modulo;
- `angle`, restituisce la fase;
- `real`, restituisce la parte reale;
- `imag`, restituisce la parte immaginaria.

Per quanto riguarda l'algebra matriciale, **MATLAB** prevede la definizione di matrici e vettori tramite le parentesi quadre `[]`, specificando al loro interno una riga come una sequenza di valori numerici separati da uno spazio o una virgola e separando le diverse colonne dal punto e virgola:

- Vettore riga, `x = [1, 2, 3];`
- Vettore colonna, `y = [1; 2; 3];`
- Matrice, `A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9];`

In alternativa, una matrice può essere definita anche andando a capo ad ogni fine riga:

```
A = [  
    1 2 3  
    4 5 6  
    7 8 9  
]
```

Per accedere all'elemento nella riga `m` e alla colonna `n` si usa la sintassi `A(m,n)`, con la possibilità di accedere a tutta la riga o tutta la colonna specificando come indice della colonna o della riga `:`. Ad esempio, riprendendo la matrice appena definita:

```
A(2,3) % restituisce l'elemento 6  
A(2,:) % restituisce la seconda riga  
A(:,3) % restituisce la terza colonna
```

L'operatore `:` è lo strumento con il quale è possibile accedere a più elementi allo stesso tempo, senza indice superiore ed inferiore specifica per tutta la riga/colonna ma è possibile anche prelevare un sottoinsieme di una riga o di una colonna andando ad indicare da quale a quale posizione si vuole fare l'estrazione; in particolare, è possibile estrarre una sottomatrice, specificando per le righe e per le colonne da quale a quale riga/colonna fare l'estrazione:

```
A(2:3, 1:2) % restituisce la sottomatrice [4, 5; 7, 8]
```

Si noti che, **a differenza di qualsiasi altro linguaggio di programmazione classico, gli indici non partono da 0 ma da 1**. Per quanto riguarda gli operatori:

- $+, -, *, ^$ (effettuano le classiche operazioni algebriche);
- $/, \backslash$ (effettuano, rispettivamente, la divisione a destra $B/A = B \cdot A^{-1}$ e a sinistra $B\backslash A = B^{-1} \cdot A$);
- $'$ (effettua la trasposizione).

Altre funzioni, che operano essenzialmente su vettori (riga o colonna) sono:

- max, min;
- sort;
- sum, prod;
- median;

Esistono, poi, **particolari operatori che permettono di effettuare operazioni su vettori**, elemento per elemento, **senza ricorrere a cicli**. Ad esempio, **sia \mathbf{x} un vettore, è possibile moltiplicare elemento per elemento i vettori $\sin(\mathbf{x})$ e $\cos(\mathbf{x})$** :

$$y = \sin(\mathbf{x}) . * \cos(\mathbf{x})$$

Gli operatori in questione sono $.*$, $./$ e $.^$. **Le funzioni che, invece, operano essenzialmente su matrici sono:**

- inv, effettua l'inversione della matrice;
- det, restituisce il determinante;
- size, restituisce la dimensione della matrice;
- rank, restituisce il rango della matrice;
- eig:
 - restituisce un vettore contenente tutti gli autovalori della matrice in ingresso, se accoppiata ad un vettore ($y = \text{eig}(A)$);
 - restituisce due matrici, una contenente gli autovettori per colonne ed una diagonale con tutti gli autovalori della matrice in ingresso, se accoppiata ad un vettore di due matrici ($[U, D] = \text{eig}(A)$).

Ognuna di queste matrici hanno dei vincoli sugli operandi introdotti (non si può invertire una matrice non quadrata); per ulteriori informazioni sulla sintassi delle funzioni è possibile invocare il comando help.

Per la creazione ex novo di una matrice, è possibile usare una di queste funzioni:

- eye(n), restituisce la matrice identità di n righe e n colonne;
- zeros(n, m), restituisce la matrice nulla di n righe e m colonne;
- ones(n, m), restituisce la matrice con tutti 1 di n righe e m colonne;
- rand(n, m), restituisce la matrice con valori random tra 0 e 1 di n righe e m colonne;
- diag(X):
 - restituisce una matrice quadrata diagonale di dimensione n con gli elementi di X sulla diagonale, se X è un vettore di n elementi;

- restituisce un vettore di n elementi pari a quelli sulla diagonale di X, se X è una matrice quadrata di dimensione n.

Il comando : può essere anche usato per la generazione di un vettore:

- senza specificarne l'incremento, $t = 1:5 \Rightarrow t = [1, 2, 3, 4, 5];$
- con incremento positivo specificato, $t = 0:0.2:0.6 \Rightarrow t = [0, 0.2, 0.4, 0.6];$
- con incremento negativo specificato, $t = 1:-0.2:0.6 \Rightarrow t = [1, 0.8, 0.6];$

MATLAB mette a disposizione una serie di strumenti per poter lavorare anche con polinomi, considerati dall'interprete **come dei vettori riga i cui elementi sono coefficienti dei monomi del polinomio in ordine di potenza decrescente:**

$$as^3 + bs^2 + cs + d \rightarrow [a, b, c, d]$$

Usando la funzione conv si moltiplicano due vettori (quindi due polinomi):

$$(s^2 + s + 1)(s^2 + 111s + 1000) \rightarrow \text{conv}([1, 1, 1], [1, 111, 1000]) = [1, 112, 1112, 1111, 1000]$$

Mentre **roots** calcola le radici del polinomio:

$$p = [1, 3, 5, 2];$$

$$r = \text{roots}(p) \quad \% \text{ calcola le radici del polinomio } s^3 + 3s^2 + 5s + 2$$

Mentre la funzione inversa è **poly**:

$$pp = \text{poly}(r) \quad \% \text{ in pp ci sarà lo stesso vettore contenuto in p}$$

Come in qualsiasi altro linguaggio di programmazione, **anche MATLAB dispone dei classici costrutti di selezione e dei cicli** che ampliano la possibile gamma di operazioni eseguibili; alla fine di ogni costrutto sarà necessaria l'istruzione end; per comunicare all'interprete la fine del blocco.

Per quanto riguarda i **costrutti di selezione**, si farà riferimento alla struttura if – then – else seguente:

```
if condizione1,  
    operazioni1;  
elseif condizione2,  
    operazioni2;  
else  
    operazioni3;  
end;
```

Le condizioni in questione devono essere delle **espressioni booleane** che restituiscono **vero o falso**, al fine di poter indirizzare il flusso del programma verso una delle tre operazioni possibili implementate nella struttura. Le espressioni booleane possono essere **dei semplici confronti o proposizioni più articolate**; tuttavia, **nella maggior parte dei casi verranno utilizzati i seguenti operatori**:

- $<$, $>$, operatori di relazione d'ordine stretta;
- \leq , \geq , operatori di relazione d'ordine larga;
- $=$, operatore di uguaglianza;
- \neq , operatore di disuguaglianza;
- $\&$, and logico;
- \mid , or logico;
- \sim , not logico.

Per quanto riguarda i cicli, esistono **due possibili strutture**:

- **Ciclo for**

Il ciclo esegue le operazioni incrementando la variabile di conteggio k (per convenzione non si scelgono i e j) da 1 a n con il passo step:

```
for k = 1:step:n,  
    operazioni;  
end;
```

- **Ciclo while**

Il ciclo esegue le operazioni finché condizione è vera, non è necessario un condizionamento numerico come nel ciclo for:

```
while condizione,  
    operazioni;  
end;
```

La condizione viene costruita con le stesse regole, gli stessi vincoli e gli stessi operatori della condizione di un costrutto di selezione come il precedente if – then – else. Ovviamente, per evitare l'implementazione di un loop infinito, tra le operazioni del ciclo ci dovrà essere un cambiamento di stato che altera (prima o poi) la veridicità della condizione, così che essa non sia più vera e che si esca dal ciclo.

Per la rappresentazione di un sistema si utilizzano i seguenti comandi **MATLAB** (con sys espressione simbolica della funzione di trasferimento):

- Rappresentazione $i - s - u$, `sys=ss(A, B, C, D);`
- Rappresentazione in fdt, `sys=tf(num, den)` o `s=tf('s');`
- Rappresentazione in zeri e poli, `sys=zpk(zeri,poli,guadagno);`

Mentre per l'interconnessione:

- Serie, `sys=series(sys1,sys2);`
- Parallello, `sys=parallel(sys1,sys2);`
- Retroazione, `sys=feedback(sys1,sys2);`

Mentre per ottenere le risposte del sistema:

- Evoluzione libera, $[y, t, x] = \text{initial}(\text{sys}, x_0);$
- Risposta impulsiva, $[y, t, x] = \text{impulse}(\text{sys});$
- Risposta allo scalino, $[y, t, x] = \text{step}(\text{sys});$
- Risposta ad un generico segnale, $[y, t, x] = \text{lsim}(\text{sys}, u, t, x_0)$, con u (in quanto ingresso con variabile temporale) vettore di campioni del segnale;

Infine, per i diagrammi di Bode l'istruzione è la seguente:

```
[module, phase, pulse] = bode(sys);
```

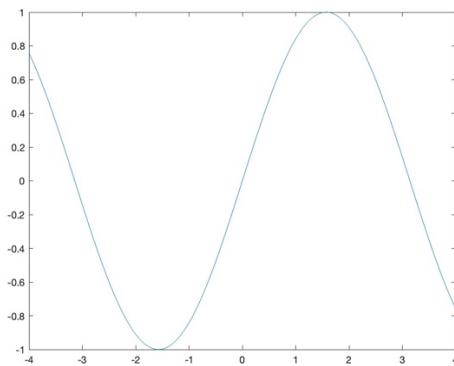
GRAFICI E FUNZIONI IN MATLAB

MATLAB è famoso per la possibilità di creare dei grafici a partire da funzioni scritte in linguaggio **MATLAB**. Con l'istruzione **plot** sarà possibile creare un grafico bidimensionale, ricevendo in ingresso due vettori della stessa lunghezza e stampando i punti corrispondenti alle coordinate fornite da essi; ad esempio, preso un vettore **x** e un vettore **y** della stessa dimensione, con l'istruzione **plot(x, y)** saranno disegnati sul grafico **n** punti, le cui coordinate corrisponderanno agli elementi di stesso indice dei due vettori.

Quindi, per tracciare un grafico è necessario creare un opportuno vettore da usare come ascissa, passarlo ad una funzione matematica e ricevere un vettore di ordinate in uscita, per poi passare i due vettori all'istruzione **plot**:

```
x = -4:0.01:4;  
y = sin(x);  
plot(x, y);
```

Questo set di istruzioni grafica nel piano la funzione seno (discreta ma interpolata) con le **x** che vanno da -4 a +4 con un incremento di 0.01:



Se **plot** viene usata con un solo argomento, il grafico corrispondente andrà a visualizzare le parti reale e immaginaria di ogni elemento del vettore:

```
plot(y) % equivale a plot(real(y), imag(y))
```

Possono essere distinti due grafici sulla base del colore ad esso assegnato e sulla base del simbolo corrispondente ad ogni punto graficato; nel codice, ciò è possibile specificando una stringa come

terzo parametro della funzione `plot`, la quale avrà il colore come primo carattere e il simbolo come secondo:

```
plot(x, y, 'g+'); % funzione verde ed ogni punto sarà un +
```

Questa variante è utile quando si vogliono stampare nello stesso piano più grafici, usando il comando **hold on** dopo il primo `plot` e proseguendo con il successivo:

```
plot(x, y, 'g+');
hold on;
plot(z, w, 'r-');
```

L'insieme delle possibili combinazioni di colore e simbolo sono:

r	red	.	point
g	green	o	circle
b	blue	x	x-mark
w	white	+	plus
m	magenta	*	star
c	cyan	-	solid
y	yellow	:	dotted
k	black	--	dashed
		-.	dash-dot

Altre istruzioni per il plotting di funzioni sono:

- `grid`, sovrappone una griglia al grafico;
- `title`, aggiunge un titolo al grafico;
- `xlabel` e `ylabel`, denota una nominazione per l'asse x e y;
- `axis`, imposta la scala degli assi del grafico;
- `clf`, cancella il grafico corrente;
- `figure`, crea una nuova finestra per un nuovo grafico;
- `figure(n)`, sposta il focus sul n – esimo grafico.
- `subplot`, visualizza diversi grafici sulla stessa finestra ma con assi differenti (richiede tre parametri):
 - In quante parti verticali dividere lo schermo;
 - In quante parti orizzontali dividere lo schermo;
 - In quale parte eseguire il plot successivo.

Fino ad ora, **per la creazione del vettore ci si è affidati al comando : classico; un modo alternativo** con cui è possibile generare il vettore di variabili indipendenti **è con i comandi seguenti**:

- `linspace(x, y, z)`, crea un vettore di z elementi compresi tra x e y separati linearmente;
- `logspace(x, y, z)`, crea un vettore di z elementi compresi tra 10^x e 10^y separati logaritmicamente.

La scala di default di un grafico è quella monometrica cartesiana; è possibile **cambiare la scala degli assi con le seguenti istruzioni** (la sintassi è uguale a quella della funzione `plot`):

- `semilogx` e `semilogy`, generano grafici con le scale delle ascisse e delle ordinate logaritmiche in base 10;
- `loglog`, esegue contemporaneamente le operazioni che vengono eseguite singolarmente da `semilogx` e `semilogy`.

Per i grafici di funzioni discrete si può usare l'istruzione `stem`, con una sintassi del tutto simile a quella del comando `plot`.

Per la creazione di una **funzione ad hoc in MATLAB** basta **creare un file con estensione .m e nome uguale a quella della funzione desiderata**. La **prima riga** del file deve contenere **il nome della funzione e gli argomenti di ingresso e uscita**, successivamente va inserito **il corpo e, infine, end**:

```
function z = fun1(a,b)
    operazioni con a e b
end
function [x,y] = fun2(c,d)
    operazioni con c e d
end
```

Dove `fun1` e `fun2` sono i nomi, `z` e `[x,y]` gli argomenti di uscita e `a, b, c` e `d` gli argomenti di ingresso. Il blocco di linee di commento consecutive che eventualmente segue la prima linea del file viene visualizzato digitando il comando `help nomeFunzione`.

Le variabili definite in una funzione sono sempre locali, sebbene sia possibile usare delle variabili globali a patto che vengano definite sia nell'ambiente chiamante che nella funzione utilizzando il comando `global`, seguito dal nome delle variabili (per convenzione maiuscole e separate con uno spazio):

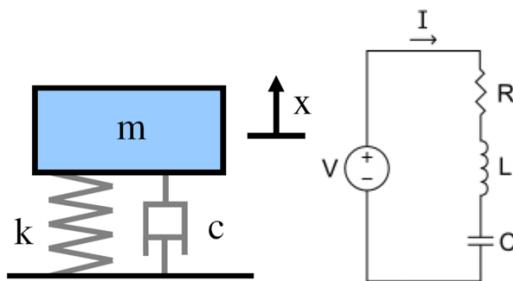
```
global A B C D;
```

SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI SISTEMI DINAMICI

La teoria dei sistemi nasce in seno alla necessità di fornire un approccio unificante nello studio dei fenomeni complessi; come si potrebbe facilmente intuire, essa **si basa sul concetto di sistema.** **Un sistema è un oggetto, fenomeno o processo di cui si vuole studiare il comportamento,** al fine di prevederne **un'evoluzione futura, di osservarne la risposta o di migliorarne il funzionamento.**

Si osservino i due sistemi seguenti, un sistema meccanico (massa – molla – smorzatore) e uno elettrico (circuito RLC), e i relativi modelli matematici:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \wedge L\ddot{q}_C + R\dot{q}_C + \frac{1}{C}q_C = V$$

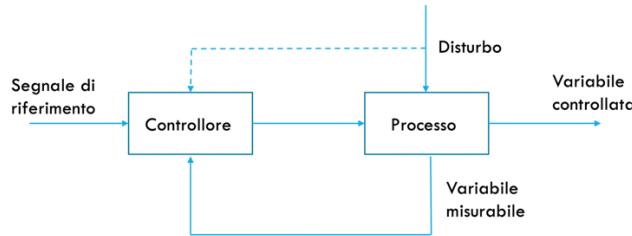
Si può osservare, dal punto di vista analitico, una certa somiglianza. Data la molteplicità dei possibili campi applicativi, si è manifestata sin dal secolo scorso l'esigenza di un approccio unificante allo studio dei sistemi di natura e complessità diversa, con l'obiettivo di **individuare metodologie di validità generale per la formulazione e la risoluzione di problemi.** Tutto ciò ha richiesto lo **sviluppo di strumenti di descrizione formale basati sull'uso di modelli comportamentali astratti per la rappresentazione del sistema, in relazione ai quali il problema può essere anch'esso formulato e risolto in termini astratti.** Tale problema, per giungere alla sua soluzione, **deve passare per i seguenti passi:**

- **Modellistica** (e/o identificazione), ovvero la costruzione di un modello astratto a partire dal sistema reale di interesse e dalla sua osservazione;
 - L'approccio model based prevede di incastonare in un modello matematico le osservazioni e le informazioni disponibili di un sistema;
- **Analisi**, ovvero lo studio delle caratteristiche di comportamento del sistema tramite l'impiego del modello che lo descrive;
- **Sintesi**, determinazione di un modello astratto di un sistema che presenti caratteristiche di comportamento assegnate;
- **Implementazione**, traduzione del modello sintetizzato in un sistema reale.

In questa sede verranno ignorati gli ultimi due passaggi, quello della sintesi e dell'implementazione. Per associare un modello ad un sistema è necessario isolarlo dalla realtà esterna, definendo l'insieme di elementi che lo costituiscono ed individuando un insieme di grandezze atte a descriverne il comportamento e a contestualizzarne lo studio. Questo **isolamento non è univoco**, una resistenza elettrica può essere caratterizzata dalla tensione ai suoi capi e dall'intensità di corrente che la attraversa, ma può essere utilizzata sia come componente elettrico, come produttore di energia termica, come sorgente luminosa, ecc ... È quindi possibile distinguere delle grandezze terminali che caratterizzano l'interazione del sistema con l'esterno:

- **Ingressi del sistema**, quelle grandezze che influenzano (direttamente o meno) l'evoluzione delle uscite del sistema;
- **Uscite del sistema**, quelle grandezze che caratterizzano l'evoluzione del sistema in relazione agli obiettivi dello studio.

Segue che **la scelta degli ingressi e delle uscite per un sistema non è univoco, bensì legato strettamente alle intenzioni di studio del sistema**. Uno schema di principio di un sistema di controllo automatico assume una forma del tipo:



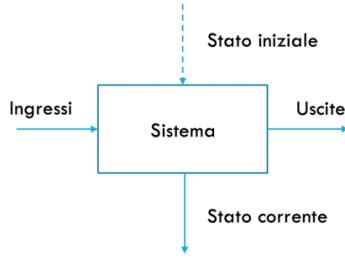
Un modo per associare un modello astratto ad un sistema reale, basato sulla sola considerazione del suo comportamento terminale, **consiste nel costruire l'insieme di tutte le coppie ordinate degli ingressi e delle uscite che si possono ottenere assegnando una generica evoluzione per l'ingresso tra quelle ammissibili**, osservando poi l'evoluzione corrispondente dell'uscita. Questo tipo di sistema viene detto **sistema astratto orientato**, dove l'**aggettivo "astratto"** indica il riferimento a modelli **black box** e l'**aggettivo "orientato"** pone in evidenza l'**assunto implicito di un legame causa – effetto stabilito tramite il sistema**. L'associazione di un sistema astratto orientato ad un sistema reale **non è univoca**, per uno reale esistono diversi sistemi astratti orientati:



Tuttavia, **nella grande maggioranza dei casi di interesse, la conoscenza del valore in un certo istante delle variabili di ingresso non è sufficiente a individuare il valore allo stesso istante delle variabili di uscita** (alcune volte non è nemmeno necessario). Ad esempio, **sia considerato un serbatoio liquido dove l'uscita è il livello del liquido e l'entrata la portata afferente**; è chiaro che **il livello di liquido ad un generico istante non dipende solo dalla portata accumulata a partire da un determinato istante iniziale, ma anche dal livello del liquido contenuto nel serbatoio a quell'istante iniziale**. Dunque, **a seconda del livello iniziale del liquido, sono possibili diverse evoluzioni dell'uscita per uguali evoluzioni dell'ingresso**.

Un approccio alternativo alla costruzione di un sistema astratto orientato è volto a rappresentare il comportamento terminale del sistema reale basandosi anche sulla sua struttura interna: oltre le grandezze terminali si hanno anche delle **grandezze interne al sistema**; l'esigenza di legami strutturali tra le diverse grandezze si traduce in un **insieme di vincoli sulla loro evoluzione temporale**. **Lo scopo del modello matematico è, quindi, la descrizione del comportamento del sistema**, realizzata **rappresentando in maniera astratta sia le grandezze reali e sia i vincoli sul loro andamento**; **uno stesso modello matematico può descrivere diversi sistemi reali e uno stesso sistema reale può essere descritto da diversi modelli matematici**, a seconda dell'ambito di funzionamento considerato.

Le grandezze interne appena introdotte vengono denotate come variabili di stato, spesso indicate come **variabili che tengono memoria dell'evoluzione interna del sistema**:



STRUTTURA E CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Un sistema è spesso descritto da un insieme di equazioni, la cui struttura è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

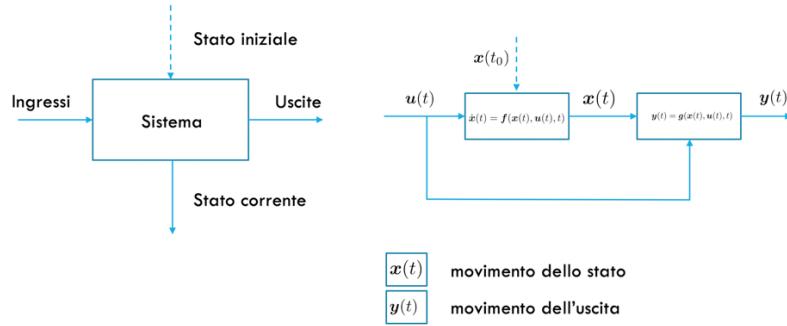
La prima equazione prende il nome di **equazione di stato**, mentre la seconda prende il nome di **trasformazione di uscita**. In queste equazioni si possono individuare le seguenti componenti:

- $x \in \mathbb{R}^n$, detto **vettore dello stato** e la cui dimensione identifica l'**ordine del sistema** e il numero di equazioni differenziali da scrivere;
- $u \in \mathbb{R}^m$, detto **vettore degli ingressi**;
- $y \in \mathbb{R}^p$, detto **vettore delle uscite**;
- $t \in \mathbb{R}$, **variabile temporale continua**;
- $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, detto **funzionale di stato (evolutivo)**, tiene traccia dell'evoluzione delle variabili di stato);
- $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, detto **funzionale di uscita (istantaneo)**, modifica istante per istante l'uscita in funzione dell'ingresso e dello stato).

Un sistema di questo tipo è supportato dalle seguenti ipotesi:

- **Unicità**, il sistema è causale e deterministico, l'uscita futura del sistema a partire da un certo istante dipende univocamente dall'evoluzione dell'ingresso a partire da quello stesso istante, nonché dal valore assunto dalle variabili di stato;
 - Causalità, il valore dell'uscita non dipende dai valori futuri dell'ingresso (opposto all'anticausalità);
 - Sistema deterministico, non vi sono fenomeni aleatori o di incertezza statistica (opposto a stocastico);
- **Sistema a stato vettore**, gli insiemi dei valori ammissibili per l'ingresso, l'uscita e lo stato ammettono la struttura di spazio vettoriale;
- **Dimensione finita** (o a parametri concentrati), gli spazi vettoriali considerati hanno dimensione finita e sono dotati di norma (contrapposto ai sistemi di dimensione infinita, o a parametri distribuiti, in cui la descrizione del sistema è retta da equazioni alle derivate parziali e in cui le grandezze di stato dipendono anche da coordinate spaziali oltre che temporali)

Segue una distinzione di due delle varie possibili rappresentazioni di un sistema: una rappresentazione **ingresso – uscita** (detta anche i – u o esterna) e una **ingresso – stato – uscita** (detta anche i – s – u o interna):



I sistemi possono essere classificati anche in **sistemi monovariabili e multivariabili**, in particolare si individuano sistemi:

- **SISO** (Single Input Single Output), $m = 1 \wedge p = 1$;
- **MIMO** (Multiple Input Multiple Output), $m > 1 \wedge p > 1$;
- **SIMO** (Single Input Multiple Output), $m = 1 \wedge p > 1$;
- **MISO** (Multiple Input Single Output), $m > 1 \wedge p = 1$.

Quelli mostrati finora sono sistemi a Tempo Continuo, caratterizzati da un tempo $t \in \mathbb{R}$, ma **esistono anche sistemi in cui il tempo può assumere valori discreti** ($k \in \mathbb{Z}$), detti **sistemi a Tempo Discreto**:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

L'**equazione differenziale** è sostituita con un'**equazione alle differenze**, visto che in tempo discreto non è definita l'operazione di derivazione.

Un sistema può anche essere classificato in base alla dipendenza dall'ingresso e dalle variabili di stato:

- **Proprio**, il caso generale

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- **Strettamente proprio**, in cui l'uscita non dipende dall'ingresso

$$y(t) = g(x(t), t)$$

- **Statico (o non dinamico o memorylessness)**, in cui l'uscita dipende dall'ingresso ma non dalle variabili di stato (come un resistore, opposta alla proprietà di non dispersività)

$$y(t) = g(u(t), t)$$

Ma anche in base alla dipendenza dal tempo:

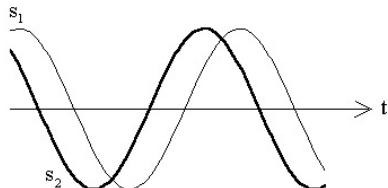
- **Tempo invariante (o stazionario)**, non c'è dipendenza dal tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- **Tempo variante**, il caso generale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Si noti che **in un sistema stazionario la risposta a qualsiasi sollecitazione non dipende dall'istante di applicazione della sollecitazione stessa**; ciò significa che **la stessa applicazione inviata in due istanti di tempo differenti produce due movimenti identici che differiscono per una traslazione temporale**. Sotto queste ipotesi, l'istante iniziale può essere reso arbitrario e lo si può scegliere in base alla convenienza (spesso si sceglie $t_0 = 0$).



L'ultimo tipo di classificazione del sistema distingue sistemi lineari e non lineari; un sistema è lineare quando **l'equazione di stato e la trasformazione di uscita sono descritti da relazioni lineari**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Essendo x e u variabili vettoriali, i coefficienti introdotti saranno delle matrici:

- $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, detta **matrice dinamica** (descrive le proprietà dinamiche del sistema);
- $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, detta **matrice degli ingressi**;
- $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, detta **matrice dell'uscita**;
- $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, detta **matrice di accoppiamento diretto**.

Nel caso in cui il sistema sia lineare e strettamente proprio è nullo il termine $D(t)$, mentre se è lineare e statico è nullo il termine $C(t)$.

Quando i coefficienti scalari sono delle matrici indipendenti dal tempo e le componenti di stato e gli ingressi non sono moltiplicati tra di loro, le due equazioni assumono la forma di una pura combinazione lineare. Un sistema di questo tipo, **lineare e stazionario**, è detto **sistema LTI** (Lineare e Tempo Invariante):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

LA MODELLAZIONE DI UN SISTEMA

Modellare un sistema significa trovare e descrivere le equazioni che ne indichino il comportamento; è necessario, quindi:

1. Isolare concettualmente il sistema di interesse;
2. Definire l'insieme degli elementi che costituiscono il sistema, i componenti;
3. Individuare un insieme di grandezze che ne descrivono il comportamento, come le grandezze terminali;

4. **Descrivere** i legami che intercorrono fra queste grandezze, anche con l'ausilio di variabili di stato (la cui scelta non è univoca);
5. **Rappresentare** astrattamente le grandezze e i vincoli, ovvero definire il modello astratto del sistema.

Per la maggior parte dei sistemi, **tal rappresentazione astratta presenta un formalismo matematico**: si parla, allora, di **modello matematico**. La pipeline che permette la descrizione di un modello matematico **inizia con l'individuare gli ingressi $u \in \mathbb{R}^m$ e le uscite $y \in \mathbb{R}^p$ del sistema**, prosegue con **la scrittura delle relazioni costitutive di ogni componente** (potendo anche far uso di coordinate di comodo se necessario) e **concludendo con la scrittura del modello in forma $i - u$ o in forma $i - s - u$** ; per alcuni sistemi (come quelli meccanici) **conviene la scrittura del modello $i - u$, dal quale ricavare il modello $i - s - u$** , mentre per altri (come quelli elettrici) **la scrittura del modello $i - s - u$ è molto più intuitiva e facile da ottenere**.

Un modello $i - u$ assume la forma di un funzionale implicito:

$$f_{iu}(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t), t) = \underline{0}_p$$

L'ordine del sistema n è individuato dall'ordine massimo della derivata in cui compare l'uscita, n ; questo è anche **l'ordine massimo della derivata degli ingressi e non può essere superiore perché il sistema deve rispettare l'ipotesi di causalità** per poter essere rappresentato in questi termini. Per sistemi LTI il funzionale può essere esplicitato in una combinazione lineare a coefficienti reali costanti (se fossero dipendenti dal tempo il sistema non sarebbe stazionario):

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) \\ = b_nu^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \end{aligned}$$

Nella forma $i - s - u$ del modello matematico del sistema compaiono le variabili di stato, la cui scelta non è univoca: esistono infiniti modelli $i - s - u$ che danno origine allo stesso modello $i - u$, il quale esisterà e sarà unico. La forma funzionale del modello $i - s - u$ in questione è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Per sistemi LTI il sistema può essere esplicitato in una combinazione lineare a coefficienti matriciali costanti (se fossero dipendenti dal tempo il sistema non sarebbe stazionario):

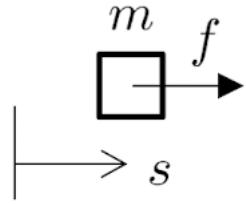
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Di seguito sono proposti degli esempi di componenti elementari per diversi classi di sistemi:

SISTEMI MECCANICI

Si distinguono i seguenti componenti elementari con le rispettive caratteristiche per il moto rettilineo:

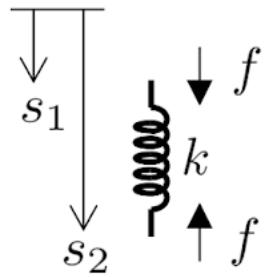
- **Massa** (opposizione all'accelerazione)



$$f = m\ddot{s}(t)$$

$$m = \left[\frac{Ns^2}{m} \right] = [kg]$$

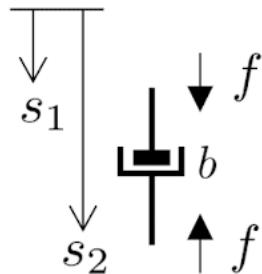
- **Molla** (opposizione allo spostamento, forza elastica)



$$f = k(s_2(t) - s_1(t))$$

$$k = \left[\frac{N}{m} \right]$$

- **Smorzatore** (opposizione alla velocità, attrito viscoso)

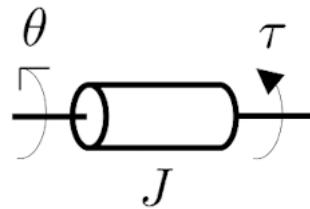


$$f = b(\dot{s}_2(t) - \dot{s}_1(t))$$

$$b = \left[\frac{Ns}{m} \right]$$

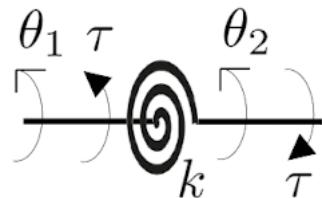
E i corrispettivi componenti per il **moto torsionale**:

- **Inerzia**



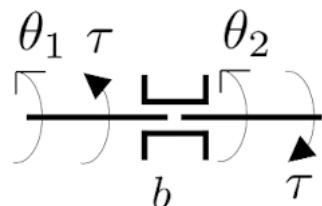
$$\tau = J\ddot{\theta}(t)$$

- **Molla torsionale**



$$\tau = k(\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t))$$

- **Smorzatore torsionale**



$$\tau = k(\dot{\vartheta}_2(t) - \dot{\vartheta}_1(t))$$

Per comporre le relazioni costitutive del modello si ricorre all'equazione di Newton, che mette in relazione la caratteristica di una massa con la sommatoria di tutte le forze agenti sulla massa stessa:

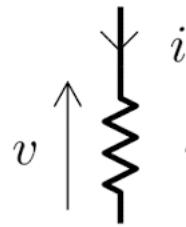
$$\sum F = ma$$

Il segno delle forze di una singola equazione va presa in accordo con la direzione di riferimento scelta arbitrariamente. Segue che ci saranno tante equazioni quante sono le masse in gioco nel sistema.

SISTEMI ELETTRICI

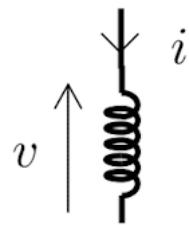
I componenti elementari di un sistema elettrico sono (facendo la **convenzione dell'utilizzatore**):

- **Resistore**



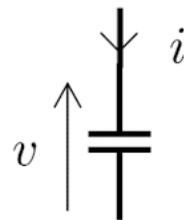
$$v = Ri$$

- **Induttore**



$$\phi = Li \rightarrow \dot{\phi} = v = L \frac{di}{dt}$$

- **Condensatore (o Capacitore)**

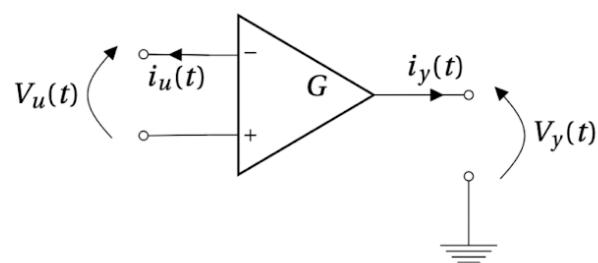


$$q = Cv \rightarrow \dot{q} = i = C \frac{dv}{dt}$$

- **Generatori indipendenti (di tensione e corrente)**



- **Amplificatore operazionale**



Quest'ultimo dispositivo può essere semplificato considerando il circuito equivalente composto da un cortocircuito virtuale in ingresso, con $V_u(t) = 0$, e un generatore controllato di tensione $V_y(t)$ in uscita. In genere questo dispositivo è caratterizzato da un **impedenza di ingresso elevata ($> 10^6 \Omega$) e di uscita trascurabile ($< 10 \Omega$)**, mentre il parametro G ($\geq 10^6 S$) è una conduttanza.

Anche per i sistemi elettrici si potrà osservare uno strumento analogo all'equazione di Newton per i sistemi meccanici: le leggi di Kirchhoff, assegnato un opportuno verso di percorrenza per le maglie e per i vettori entranti nei nodi. La composizione delle relazioni costitutive passa, quindi, per le equazioni:

$$\sum_k i_k(t) = 0$$

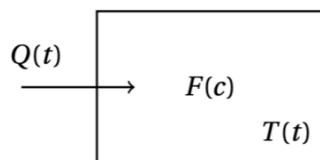
$$\sum_k v_k(t) = 0$$

Per i sistemi elettrici conviene scrivere direttamente il modello $i - s - u$, essendo spesso presenti in forma diretta le variabili di stato (la corrente nell'induttore e la tensione nel condensatore, in quanto parametri che vanno a derivarsi) ed essendo più arduo da effettuare il cambiamento da modello $i - u$ a modello $i - s - u$.

SISTEMI TERMICI

Non verranno analizzati i sistemi termici nel modo più accurato possibile perché non è lo scopo della trattazione; basta solo sapere che **nella realtà un sistema termico è un sistema a parametri non concentrati, descritto da derivazione parziale** (la temperatura in un punto è diversa dalla temperatura in un altro punto). **Nell'approssimazione di una temperatura uniforme**, si possono individuare in un sistema termico **due componenti elementari**:

- **Forno senza pareti**



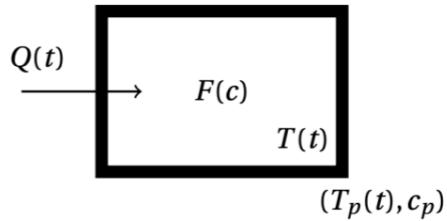
Questo componente è **caratterizzato da un calore scambiato, da una temperatura e da una capacità termica**:

$$Q(t) = c\dot{T}(t)$$

$$Q = [J] \wedge T = [K] \wedge c = \left[\frac{Js}{K} \right]$$

La differenza con un forno con le pareti risiede nel fatto che **le pareti del forno non immagazzinano calore**.

- **Forno con pareti**



La differenza con un forno senza le pareti risiede nel fatto che le pareti del forno possono immagazzinare calore; quindi, il sistema sarà caratterizzato anche da una temperatura e da una capacità termica delle pareti.

Gli scambi di calore in un sistema termico avvengono in accordo con la seguente relazione:

$$Q = k(T_e - T_i)$$

Questa formula richiama una certa somiglianza tra un forno e una molla meccanica. k è la conduttanza termica:

$$k = \left[\frac{J}{K} \right]$$

Per comporre le relazioni costitutive si sceglie un verso arbitrario per il flusso del calore, si scrivono le equazioni costitutive che regolano la variazione di temperatura all'interno dei corpi (forni e pareti) e si osserva il bilancio energetico che regola gli scambi di calore:

$$\sum Q = c \dot{T}(t)$$

Anche in questo caso può essere fatta una similitudine con l'equazione di Newton.

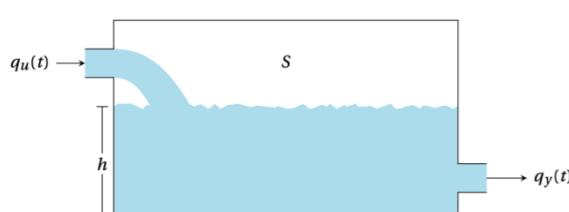
SISTEMI IDRAULICI

I sistemi idraulici possono essere complicati da studiare attraverso le loro relazioni caratteristiche e sono un ottimo esempio di come l'analisi generalizzata di un sistema possa intervenire in aiuto. Ovviamente sono necessarie delle ipotesi di base per poter fare questo discorso, come l'incomprimibilità del fluido, ossia la presenza di una relazione tra la portata volumetrica $q(t)$ e quella massica $m(t)$ attraverso la densità del fluido ρ :

$$m(t) = \rho q(t)$$

$$q(t) = \left[\frac{kg}{m^3} \right] \wedge m(t) = \left[\frac{kg}{s} \right]$$

I sistemi idraulici sono caratterizzati da un solo componente elementare, dotato di portata entrante e uscente (generalmente volumetriche) e di una sezione, il serbatoio liquido:



In genere è automatico scegliere l'altezza della colonna di fluido nel serbatoio come variabile di stato, identificando un **modello i – s – u del tipo**:

$$\begin{cases} S\dot{h}(t) = q_u(t) - q_y(t) \\ q_y(t) = a\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

La trasformazione di uscita è caratteristica di un moto turbolento e dipende da un parametro **a** e dalla radice dell'altezza **h**; quando essa è presente, sostituendo nell'equazione di stato, si può notare l'assenza di linearità, che rende il sistema idraulico in moto turbolento un sistema non lineare.

In conclusione, si osservino tutti i sistemi analizzati finora; si può rilevare che la scelta delle **variabili di stato** (posizione e velocità per sistemi meccanici, corrente dell'induttore e tensione del condensatore per sistemi elettrici, temperatura per sistemi termici e altezza per sistemi idraulici) è legata al calcolo dell'energia del sistema (energia cinetica, energia elettrica, energia termica ed energia potenziale), dal momento in cui lo stato va a descrivere la situazione interna (o la storia passata) del sistema.

MOVIMENTO LIBERO E FORZATO DI UN SISTEMA LTI

Considerato un sistema LTI descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, l'equazione differenziale che modella lo stato del sistema sarà risolvibile come problema di Cauchy attraverso la formula di Lagrange:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

In entrambe le formule di risoluzione si possono osservare dei termini che dipendono unicamente dallo stato iniziale e dei termini che dipendono unicamente dall'ingresso; si parlerà dei primi come **movimenti liberi** e dei secondi come **movimenti forzati**. In particolare, si individuano:

- **Movimento libero dello stato** (dipende da x_0 e non da $u(t)$)

$$x_L(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

- **Movimento forzato dello stato** (dipende da $u(t)$ e non da x_0)

$$x_F(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- **Movimento libero dell'uscita** (dipende da x_0 e non da $u(t)$)

$$y_L(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

- **Movimento forzato dell'uscita** (dipende da $u(t)$ e non da x_0)

$$y_F(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

Si può anche dare una **nomenclatura più semplice alle matrici che compaiono** nelle varie definizioni di questi movimenti:

- **Matrice di trasmissione dello stato**

$$\phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

- **Matrice delle risposte impulsive dello stato**

$$H(t - \tau) = e^{A(t-\tau)}B$$

- **Matrice di trasformazione delle uscite**

$$\psi(t - t_0) = Ce^{A(t-t_0)}$$

- **Matrice delle risposte impulsive delle uscite**

$$W(t - \tau) = Ce^{A(t-\tau)}B$$

Con queste semplificazioni, **un sistema LTI può essere scritto in forma alternativa**:

$$\begin{cases} x(t) = x_L(t) + x_F(t) \\ y(t) = y_L(t) + y_F(t) \end{cases}$$

Si supponga di disporre di un **sistema LTI con condizione iniziale $x(t_0) = x_{01}$; sollecitando il sistema con l'ingresso $u(t) = u_1(t)$** :

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{A(t-t_0)}x_{01} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu_1(\tau)d\tau \\ y_1(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{01} + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu_1(\tau)d\tau + Du_1(t) \end{cases}$$

Si supponga di poter disporre dello **stesso sistema ma a stato iniziale $x(t_0) = x_{02}$; sollecitando il sistema con l'ingresso $u(t) = u_2(t)$** :

$$\begin{cases} x_2(t) = e^{A(t-t_0)}x_{02} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu_2(\tau)d\tau \\ y_2(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{02} + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu_2(\tau)d\tau + Du_2(t) \end{cases}$$

A partire da questi risultati, possono essere fatte delle considerazioni notevoli. **Considerato un qualsiasi sistema LTI, con $[x_1(t), y_1(t)]$ i movimenti generati da x_{01} e $u_1(t)$ e $[x_2(t), y_2(t)]$ i**

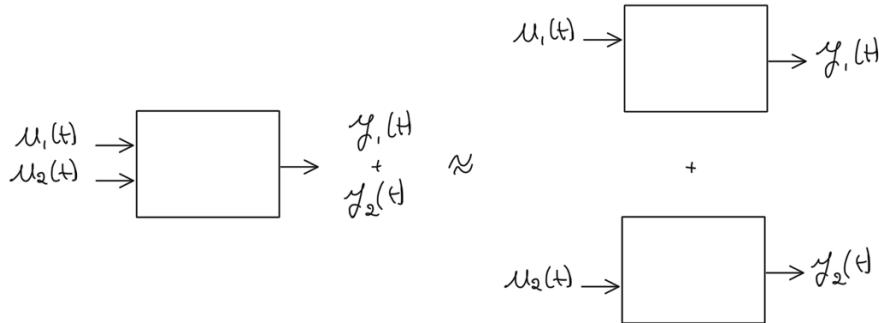
movimenti generati da x_{02} e $u_2(t)$, per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i **movimenti generati dal sistema a partire da:**

$$\begin{cases} x(t_0) = \alpha x_{01} + \beta x_{02} \\ u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \end{cases}$$

Sono la combinazione lineare dei movimenti precedentemente ottenuti, secondo gli stessi coefficienti:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \\ y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{cases}$$

La proprietà appena enunciata prende il nome di **principio di sovrapposizione degli effetti** e viene spesso usata nella forma opposta; infatti, **un sistema LTI MISO o MIMO** (quindi con più ingressi, o anche più stati) **può essere visto come combinazione lineare a coefficienti unitari di più sistemi SISO o SIMO**, ognuno caratterizzato dalla presenza di uno solo degli ingressi al sistema originario.



Questa proprietà risulta particolarmente utile nell'ottica della distinzione tra stato/uscita forzato/a e libero/a precedentemente introdotta.

La rappresentazione di un sistema LTI passa inevitabilmente dalla scelta di uno stato $x(t)$; si vuole trovare una rappresentazione equivalente al sistema in questione ma con uno stato diverso:

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

$\forall T \in \mathbb{R}^{n \times n}: \det(T) \neq 0$, dal momento in cui $x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Nella nuova rappresentazione di stato, **il sistema può essere descritto dalle equazioni:**

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{\hat{x}}(t) = AT^{-1}\hat{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dal momento in cui:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}[T^{-1}\hat{x}(t)] = T^{-1}\dot{\hat{x}}(t)$$

Moltiplicando a sinistra per la matrice T , **il modello del sistema diventa:**

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Denominando $TAT^{-1} = \hat{A}$, $TB = \hat{B}$, $CT^{-1} = \hat{C}$ e $D = \hat{D}$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Se, inoltre, è presente la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, essa diventa $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$. Va notato che le matrici A e \hat{A} sono matrici simili; infatti:

$$\hat{A} = TAT^{-1}$$

In questa nuova rappresentazione il legame tra l'uscita y e l'ingresso u rimane inalterato (infatti la matrice di accoppiamento diretto non cambia, $\hat{D} = D$) e ciò che varia è unicamente la rappresentazione interna del sistema. Le tuple di matrici (A, B, C, D) e $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ sono numericamente differenti nonostante descrivano lo stesso sistema.

LA RISPOSTA IMPULSIVA E L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

Lo studio del movimento libero del sistema avviene tramite lo studio delle proprietà strutturali di stabilità, raggiungibilità e osservabilità, mentre lo studio del movimento forzato avviene con lo studio della risposta impulsiva.

Prima di addentrarsi in particolarizzazioni si vogliono elencare i cosiddetti “ingressi canonici”, ovvero quegli ingressi particolari che sono ricorrenti e che hanno una forma analitica ben definita. Essi sono:

- **Scalino**

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t < 0 \\ 1 & \Leftrightarrow t \geq 0 \end{cases}$$

In Matlab una funzione di questo tipo è la funzione `heaviside`, sebbene in zero valga il limite della semisomma (quindi $\frac{1}{2}$).

- **Rampa**

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t < 0 \\ t & \Leftrightarrow t \geq 0 \end{cases}$$

- **Parabola**

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & \Leftrightarrow t \geq 0 \end{cases}$$

Tra di essi, si individuano le seguenti relazioni:

$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau$$

$$\delta_{-1}(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-2}(t)$$

$$\delta_{-3}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-2}(\tau) d\tau$$

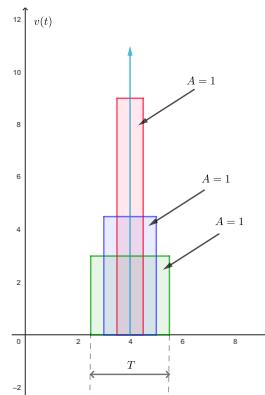
$$\delta_{-2}(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-3}(t)$$

Nel senso classico delle funzioni, $\nexists \delta_n(t) : \delta_{-1}(t) = \int_0^t \delta_n(\tau) d\tau$; infatti, c'è una discontinuità di salto in $t = 0$ che invalida la possibilità di derivazione (negli altri ingressi canonici non c'è). Il problema è risolto, da un punto di vista matematico, introducendo il concetto di distribuzioni e, in particolare, la distribuzione di Dirac (o impulso di Dirac, o delta di Dirac), definita matematicamente tramite queste relazioni:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) u(t) dt = u(t_0) \\ \delta(t - t_0) = 0 \forall t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases}$$

Questa terza relazione mostra che la distribuzione è limitata in un qualsiasi intorno di t_0 .

Si è voluto premere molto sul fatto che questa risoluzione sia matematica perché **un'entità di questo tipo non ha ingegneristicamente senso: non esiste alcun oggetto matematico nullo quasi ovunque ma con area sottesa unitaria**. Nonostante questo, la delta di Dirac è usata spesso nel mondo ingegneristico; ci si chiede, allora, **come è possibile coniugare questa discrepanza tra mondo matematico e mondo reale**. La delta di Dirac, a tal proposito, può essere vista come un segnale nullo ovunque tranne che in un intorno di t_0 , di durata notevolmente minore rispetto alle dinamiche del sistema (alias, i due intervalli differiscono di diversi ordini di grandezza) e nel quale assume un valore maggiore di zero.



Si osservi meglio e si cerchi di dimostrare la legge descrittiva dell'impulso di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)u(t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)u(\tau)d\tau = u(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u(\tau)$$

Quindi, si può intuire che **questa distribuzione agisce come un selettore**: sovrapponendo ad un segnale una delta di Dirac centrata in un punto τ , verrà restituito solo il valore del segnale in quel punto τ , eliminandone l'intera dinamica.

Attraverso determinati procedimenti matematici, **si può concludere che la delta di Dirac è la derivata** (nel senso delle distribuzioni) **della funzione scalino**:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t)$$

$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau$$

Con quanto appena detto, ci si chiede da dove vengono fuori i pedici nell'identificativo di questi segnali (sapendo che indirettamente alla delta di Dirac è 0); applicando la trasformata di Laplace, si può dedurre che:

$$\delta_{-n}(t) \xleftrightarrow{LT} \mathcal{L}[\delta_{-n}(t)](s) = \frac{1}{s^n}$$

Infatti:

$$\delta(t) = \delta_0(t) \xleftrightarrow{LT} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = \frac{1}{s^0} = 1$$

$$\delta_{-1}(t) \xleftrightarrow{LT} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s}$$

$$\delta_{-2}(t) \xleftrightarrow{LT} \mathcal{L}[\delta_{-2}(t)](s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\delta_{-3}(t) \xleftrightarrow{LT} \mathcal{L}[\delta_{-3}(t)](s) = \frac{1}{s^3}$$

Detto questo, **si studi il modo in cui un impulso di Dirac modifica il sistema**.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \wedge u(t) = \delta(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

$$x_F(t) = \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau = e^{At}B$$

L'impulso permette di risolvere l'integrale (che è particolarmente fastidioso) **in una soluzione analitica e pratica da analizzare**. Semplificando l'esponenziale:

$$e^{At}B = T_D^{-1}e^{A_D t}T_D B = g_x(t)$$

Questa funzione del tempo è detta **risposta forzata all'impulso nello stato** ed è una **combinazione lineare dei modi naturali del sistema** (proprio come accade per il movimento libero). Analogamente per l'uscita:

$$y_F(t) = C \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = C \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau) d\tau + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

$$= g_y(t)$$

Detta risposta forzata all'impulso nell'uscita. Si tiene conto che **0^- è scelto per considerare valori negativi, in modo che capitino in un intorno di 0.**

Tuttavia, quanto appena rilevato si limita ad un ingresso ideale ($u(t) = \delta(t)$), si può fare un ragionamento analogo, che semplifica il calcolo dell'integrale matriciale, per ingressi qualsiasi? Si. $\forall u(t) : u(t) = 0 \forall t < 0$:

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t g_x(t-\tau)u(\tau) d\tau = (g_x * u)(t)$$

$$y_F(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = \int_0^t g_y(t-\tau)u(\tau) d\tau = (g_y * u)(t)$$

Sapendo che **quello specificato è un integrale di convoluzione**. Si conclude che, grazie alla **risposta impulsiva, la risposta forzata a qualsiasi ingresso può essere calcolata agevolmente senza ricorrere ad integrali matriciali**.

Riassumendo risposta libera e forzata, **il sistema LTI può essere risolto come segue**:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + (g_x * u)(t) \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + (g_y * u)(t) \end{cases}$$

Si noti l'assenza di integrali matriciali.

EQUILIBRIO E STABILITÀ DI UN SISTEMA

Si consideri un **sistema dinamico stazionario**, descritto dal **modello ingresso – stato – uscita**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Si sottoponga questo sistema ad un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$; sono di particolare interesse nello studio dei sistemi dinamici **quei particolari stati che, in corrispondenza di questi ingressi, sono costanti**, cioè:

$$x(t) = \bar{x} : \dot{x}(t) = 0$$

Per cui:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

L'ingresso e lo stato in questione sono detti **ingresso e stato di equilibrio** e il loro numero può variare in funzione della composizione di f ; imponendo queste grandezze nel funzionale di uscita, si ottiene l'uscita di equilibrio \bar{y} , definita come:

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Dunque, **uno stato di equilibrio è uno stato in cui il sistema, sollecitato da un ingresso costante, permane indefinitamente se vi si trova in almeno un istante di tempo**; ovvero, $\exists \bar{t} : x(\bar{t}) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \forall t \geq \bar{t}$. Se l'ingresso è costante e lo stato non varia per un tempo indefinito, allora anche l'uscita rimarrà costante al valore di equilibrio \bar{y} .

Nel caso in cui il sistema sia LTI la situazione si semplifica notevolmente; in particolare, sotto determinate condizioni, sarà possibile determinare uno stato di equilibrio per ogni ingresso costante:

$$\begin{cases} 0 = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \end{cases}$$

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Questa operazione è possibile solo se A è una matrice invertibile. La differenza sostanziale rispetto a sistemi non LTI è che c'è una vera e propria formula, non si deve risolvere il funzionale $f(\bar{x}, \bar{u}) = \mathbf{0}$ (del quale non si conosce la natura a priori). Osservando l'uscita di equilibrio:

$$\bar{y} = -CA^{-1}B\bar{u} + D\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

Evidenziando la costanza dell'uscita, visto che le matrici A, B, C e D sono tempoinvarianti e che \bar{u} è costante, con il termine $(-CA^{-1}B + D)$ detto **guadagno statico**.

Ci si chiede come siano gli stati di equilibrio quando la matrice A non è invertibile; si ha:

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

E le soluzioni per \bar{x} sono o $\mathbf{0}$ o ∞ .

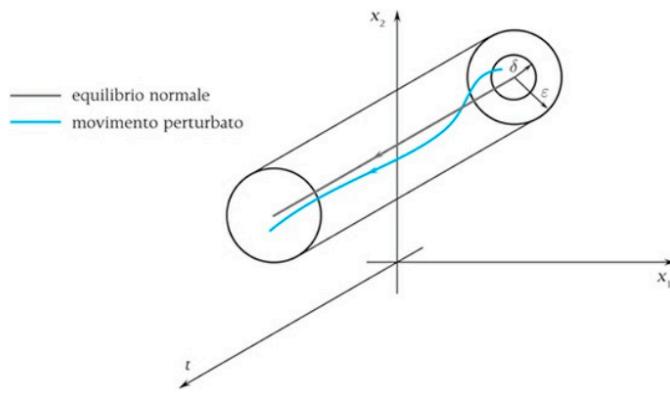
Si consideri un **sistema stazionario** tale che:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t))$$

Al quale è applicato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$; ad esso, corrisponde uno stato di equilibrio \bar{x} per il quale:

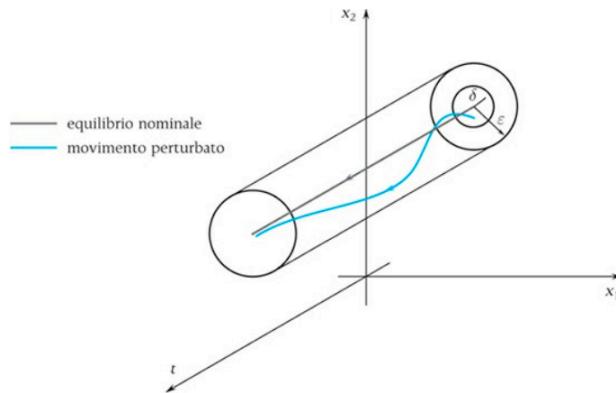
$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$

Lo stato di equilibrio \bar{x} è detto stabile se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0$ stato iniziale $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$, $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \forall t \geq t_0$, dove $x(t)$ è il movimento generato da x_0 .



Dalla definizione, si può dedurre che uno stato di equilibrio \bar{x} è stabile nel momento in cui da qualsiasi stato iniziale ad esso vicino si parta, il movimento $x(t)$ apparterrà sempre ad un intorno di \bar{x} ; inoltre, non c'è alcuna menzione al comportamento asintotico di questo movimento, può raggiungere lo stato \bar{x} come può rimanervi lontano, l'importante è che rimane in un suo intorno abbastanza piccolo. Quando, invece, il movimento tende asintoticamente allo stato di equilibrio, si può dire che questo è uno stato asintoticamente stabile:

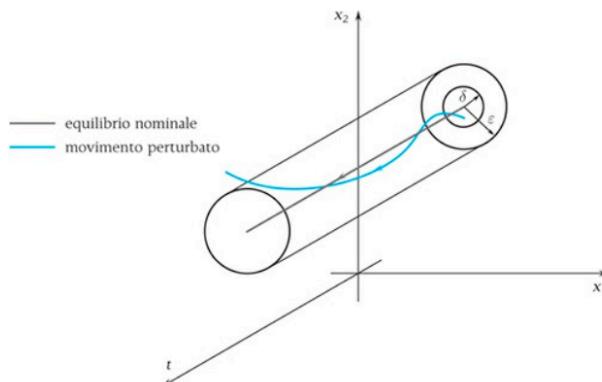
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$



La relazione tra asintotica stabilità e stabilità è di una implicazione unidirezionale; infatti, uno stato asintoticamente stabile è sempre uno stato stabile, mentre il contrario non è garantito:

$$\text{asintotica stabilità} \Rightarrow \text{stabilità}$$

Infine, si può intuire che, quando il movimento dello stato raggiunge lo stato di equilibrio per un $\bar{t} \geq t_0$, si ha $x(t) = \bar{x} \forall t \geq \bar{t}$. Quando uno stato non è né asintoticamente stabile né stabile, si dice instabile.



L'instabilità di uno stato di equilibrio implica che esistono delle perturbazioni arbitrariamente piccole dello stato iniziale che provocano l'allontanamento dallo stato di equilibrio del sistema.

Come si può ben constatare, **la definizione è poco pratica quando si va a studiare praticamente la stabilità del sistema**; esistono diversi teoremi che permettono di individuare delle condizioni (sufficienti, necessarie e necessarie e sufficienti) per le quali la stabilità è individuabile in maniera indiretta. Uno di questi strumenti è il **Metodo di Lyapunov**, che si regge sulla **definizione di funzioni scalari definite positive**.

Una funzione scalare di variabile vettoriale $w: \mathbb{R}^n \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ è **definita positiva** se:

1. $w(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $w(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Mentre è **semi – definita positiva** se:

1. $w(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $w(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Mentre è **definita negativa** se:

1. $w(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $w(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Mentre è **semi – definita negativa** se:

1. $w(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $w(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La funzione scalare in questione è detta **radialmente illimitata** se:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} w(x) = \pm\infty$$

Tra le infinite funzioni scalari di variabile vettoriale, **esiste una classe di funzioni che possono essere definite tramite l'impiego di particolari matrici**; un esempio di queste funzioni sono le **forme quadratiche**:

$$w(x) = x^T F x$$

$\forall F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, detta **nucleo della forma quadratica**. Se la forma quadratica $w(x)$ è (semi) **definita positiva (negativa)**, è (semi) **definito positivo (negativo)** anche il suo nucleo.

Si consideri un **sistema stazionario con equazione di stato**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Tale che lo stato $\bar{x} = 0$ sia uno stato di equilibrio per il sistema all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$:

$$0 = f(0, \bar{u})$$

Si consideri una funzione scalare di variabile vettoriale che assume in ingresso il vettore dello stato $x(t)$:

$$V: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(x) \in \mathbb{R}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) = \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}V(x)f(x(t), u(t))$$

Supponendo che sia $V(x)$ che $\dot{V}(x)$ siano continue in un intorno di $\bar{x} = 0$, si definiscano i seguenti teoremi.

ENUNCIATO CONDIZIONE SUFFICIENTE ALLA ASINTOTICA STABILITÀ

Ipotesi:

$$\exists V: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(x) \in \mathbb{R} \text{ definita positiva : } \dot{V}(x) \text{ è definita negativa}$$

Tesi:

$\bar{x} = 0$ è uno stato asintoticamente stabile

ENUNCIATO CONDIZIONE SUFFICIENTE ALLA STABILITÀ

Ipotesi:

$$\exists V: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(x) \in \mathbb{R} \text{ definita positiva : } \dot{V}(x) \text{ è semi – definita negativa}$$

Tesi:

$\bar{x} = 0$ è uno stato stabile

ENUNCIATO CRITERIO DI LASALLE

Ipotesi:

$$\exists V: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(x) \in \mathbb{R} \text{ definita positiva : } \dot{V}(x) \text{ è semi – definita negativa}$$

$\forall x \in I_{\bar{x}} : \dot{V}(x) = 0 \wedge x(t) = 0$ è l'unico movimento possibile generato da questi stati

Tesi:

$\bar{x} = 0$ è uno stato asintoticamente stabile

Il problema di questi teoremi risiede nel fatto che sono condizioni sufficienti, e quindi deboli; ciò significa che l'esistenza della funzione scalare V non è garantita ma dipende dal sistema: se la si trova, bene, altrimenti non si può dire nulla.

Si vuole estendere quanto detto finora a casi in cui lo stato di equilibrio non sia nullo, $\bar{x} \neq 0$; si supponga che in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = \bar{u}$ lo stato di equilibrio sia \bar{x} :

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$

Si effettui un cambiamento di rappresentazione ponendo il nuovo stato come:

$$z(t) = x(t) - \bar{x}$$

$$x(t) = z(t) + \bar{x}$$

Le nuove rappresentazioni dello stato sono:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(z(t) + \bar{x}, u(t))$$

Confrontando gli stati di equilibrio di queste due rappresentazioni, si può dedurre che $\bar{z} = 0$ è l'unico stato possibile per questa nuova rappresentazione $z(t)$, rientrando nel caso precedentemente affrontato:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{z} + \bar{x}, \bar{u}) \Rightarrow \bar{z} = 0$$

Le proprietà di stabilità per lo stato $\bar{z} = 0$ si estendono allo stato $\bar{x} \neq 0$.

Per sistemi LTI, si può definire l'equazione di Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q$$

Con $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La comodità del criterio seguente è dovuta al fatto che è condizione necessaria e sufficiente, e quindi molto forte, per determinare la stabilità di un sistema (la stabilità di un sistema e non di uno stato sarà approfondita di seguito).

ENUNCIATO METODO DI LYAPUNOV PER SISTEMI LTI

Ipotesi:

\forall sistema LTI

Tesi:

Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \forall Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($Q = Q^T$) e definita positiva, l'equazione di Lyapunov è soddisfatta per una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva.

ALTRI MODI PER DETERMINARE LA STABILITÀ DI UN SISTEMA LTI

Fino ad ora sono state usate sempre definizioni o metodologie più o meno articolate e pratiche da usare; di seguito, però, si vogliono proporre diverse scorciatoie che permettono di associare le definizioni di stabilità e asintotica stabilità a caratteristiche e proprietà del sistema che sono più facili da ottenere. Si consideri un sistema LTI, caratterizzato dalla condizione iniziale $x(0) = x_0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Lo stato di equilibrio \bar{x} è soluzione dell'equazione:

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$

E, come è stato già detto, **se la matrice è invertibile la soluzione esiste ed è unica**. Si vada a considerare uno **stato iniziale x_{01} molto prossimo allo stato di equilibrio \bar{x}** e si individui il **vettore scostamento tra i due**:

$$\delta x_0 = x_{01} - \bar{x}$$

$$x_{01} = \bar{x} + \delta x_0$$

Ponendo in ingresso $u(t) = \bar{u}$ ma partendo da una condizione iniziale diversa, si giunge ad un movimento diverso dello stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + B\bar{u} \\ y(t) = Cx_1(t) + D\bar{u} \\ x(0) = x_{01} \end{cases}$$

La formula di Lagrange permette di determinare questo movimento:

$$x_1(t) = e^{A(t-t_0)}x_{01} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\bar{u}d\tau$$

Si determini **il vettore scostamento tra $x_1(t)$ e \bar{x}** :

$$\delta x(t) = x_1(t) - \bar{x}$$

$$x_1(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

La dinamica dello scostamento, ovvero la sua derivata prima, è:

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + B\bar{u} = A(\delta x(t) + \bar{x}) + B\bar{u} = A\delta x(t) + A\bar{x} + B\bar{u}$$

Ma poiché \bar{x} è **soluzione dell'equazione $0 = A\bar{x} + B\bar{u}$** :

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t)$$

Quindi, **il sistema che segue le dinamiche dello scostamento dallo stato di equilibrio \bar{x} non dipende né dal valore di tale stato né dal segnale di ingresso ma dalla matrice dinamica A** . Si può dedurre che **le proprietà di stabilità di un sistema LTI sono globali** e non associate ad ogni singolo stato di equilibrio (se uno stato è stabile lo sono tutti); quindi, **si potrà parlare di stabilità del sistema** (come è stato fatto parlando del metodo di Lyapunov) e **non più di stabilità del singolo stato**.

Il sistema menzionato è:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) \\ \delta x_0 = x_{01} - \bar{x} \end{cases}$$

La cui soluzione è:

$$\delta x(t) = e^{A(t-t_0)} \delta x_0$$

Si riscriva la **definizione di stabilità per il sistema scostamento appena rilevato**:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\delta x_0\| < \delta, \|\delta x(t)\| \leq \varepsilon$$

Ovvvero:

$$\|e^{A(t-t_0)} \delta x_0\| \leq \varepsilon$$

Ponendo $t_0 = 0$ per semplicità:

$$\|e^{At} \delta x_0\| \leq \varepsilon$$

Il problema si riduce a trovare le condizioni per cui $e^{At} \delta x_0$ è limitato in norma. Per un migliore risultato, **si effettui un cambio di rappresentazione; si supponga la matrice A diagonalizzabile e si scelga la matrice $T = T_D$** , ovvero la matrice inversa degli autovettori:

$$\delta \hat{x}(t) = T_D \delta x(t)$$

$$\delta x(t) = T_D^{-1} \delta \hat{x}(t)$$

Quindi, sapendo che $\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = A_D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$:

$$\begin{cases} \delta \dot{\hat{x}}(t) = A_D \delta \hat{x}(t) \\ \delta \hat{x}_0 = T_D \delta x_0 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è:

$$\delta \hat{x}(t) = e^{A_D t} \delta \hat{x}_0 = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} \delta \hat{x}_0$$

Tornando alle coordinate di partenza:

$$\delta x(t) = T_D^{-1} \delta \hat{x}(t) = T_D^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} T_D \delta x_0$$

Che è una **combinazione lineare di esponenziali**, con λ_i **autovalore della matrice A** e $e^{\lambda_i t}$ **modo naturale del sistema**. La definizione di stabilità si aggiorna:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\delta x_0\| < \delta, \|T_D^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} T_D \delta x_0\| \leq \varepsilon$$

Per individuare un **criterio generale di stabilità sulla base di questa combinazione lineare di modi naturali del sistema**, si ricorre al seguente teorema.

ENUNCIATO TEOREMA DI STABILITÀ SUI MODI NATURALI DEL SISTEMA LTI

Ipotesi:

∀ sistema LTI

Tesi:

Il sistema è stabile $\Leftrightarrow \forall e^{\lambda_i t}$ del sistema, $\exists M > 0 : |e^{\lambda_i t}| < M$

Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \forall e^{\lambda_i t}$ del sistema, $\exists M > 0 : |e^{\lambda_i t}| < M \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$

Il sistema è instabile $\Leftrightarrow \exists e^{\lambda_i t}$ del sistema per cui $\nexists M > 0 : |e^{\lambda_i t}| < M$

La limitatezza di un esponenziale è determinata dal coefficiente che moltiplica la variabile indipendente, in questo caso gli autovalori. In corrispondenza di coefficienti positivi il modo naturale diverge all'infinito, coefficienti negativi a zero e coefficienti nulli ad una costante; va, però, tenuto in mente che **non sempre gli autovalori di una matrice sono numeri reali**, possono essere anche **numeri complessi** (coniugati), per i quali non esistono relazioni d'ordine.

Due numeri complessi coniugati condividono la stessa parte reale ma hanno parte immaginaria opposta; quindi, **la loro somma restituirà il doppio della loro parte reale:**

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)$$

Se un autovalore di una matrice è un numero complesso, automaticamente **ci dovrà essere il suo complesso coniugato;** il modo naturale di un autovalore complesso **non sarà mai associato al singolo numero ma sempre alla coppia complessa coniugata**, per cui $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}$:

$$c(e^{\lambda_i t} + e^{\bar{\lambda}_i t}) = ce^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} (e^{i\operatorname{Im}(\lambda_i)t} + e^{-i\operatorname{Im}(\lambda_i)t}) = 2ce^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)t)$$

Che è l'espressione del **modo naturale di una coppia di autovettori complessi coniugati**.

Quanto detto finora cade sotto le ipotesi di diagonalizzazione della matrice A ; nel caso in cui la matrice in questione sia **solo jordanizzabile, si sceglie comunque un cambio di rappresentazione ma con la matrice $T = T_J$,** ovvero la matrice inversa degli autovettori generalizzati:

$$\delta x(t) = T_J^{-1} \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, \dots, e^{J_h t}\} T_J \delta x_0$$

I cui modi naturali associati sono:

- Per autovalori λ_i reali

$$t^{\eta_{ij}-1} e^{\lambda_i t}$$

- Per autovalori $\lambda_{i,j}$ complessi coniugati

$$t^{\eta_{ij}-1} e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)t)$$

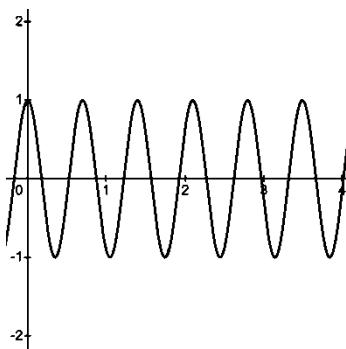
Con queste informazioni, si può intuire che è l'autovalore a discriminare l'andamento del modo naturale, e quindi la stabilità. Si individuino tutte le possibili configurazioni di modi naturali per ogni autovalore generico della matrice dinamica A possibile:

- **A diagonalizzabile**

- $\lambda_i = 0$

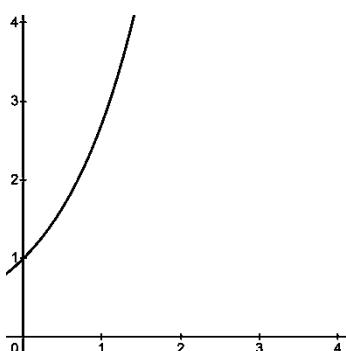


- $Re(\lambda_i) = 0$

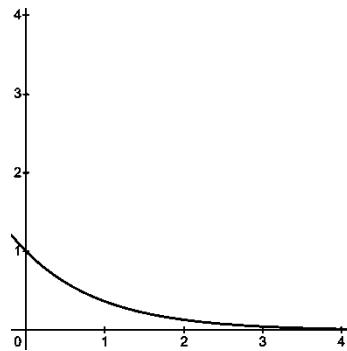


- $Im(\lambda_i) = 0$

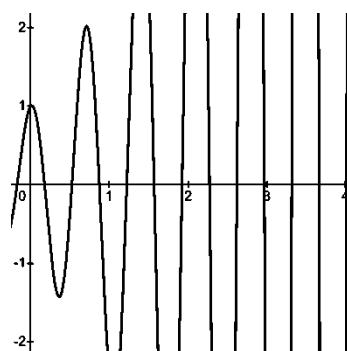
- $Re(\lambda_i) > 0$



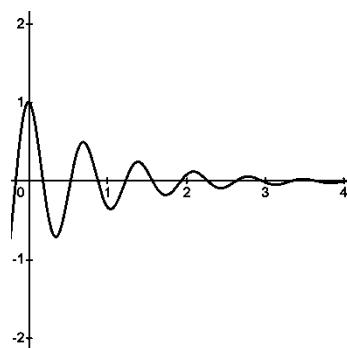
- $Re(\lambda_i) < 0$



- $\lambda_i \in \text{I o IV quadrante}$

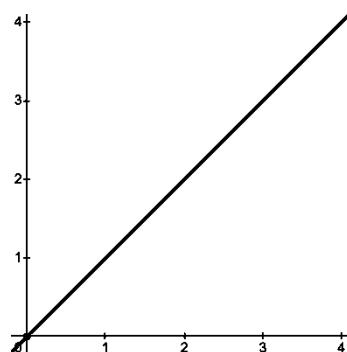


- $\lambda_i \in \text{II o III quadrante}$

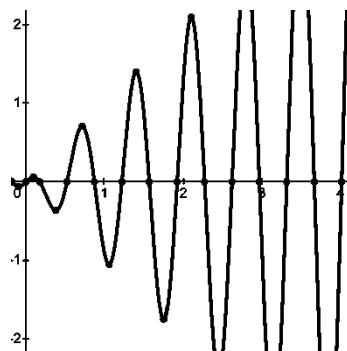


- **A jordanizzabile**

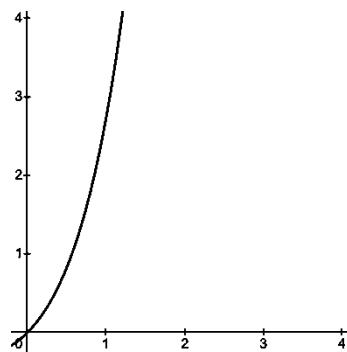
- $\lambda_i = 0$



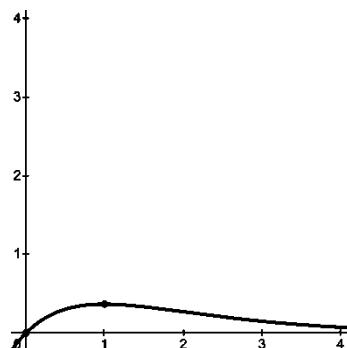
- $Re(\lambda_i) = 0$



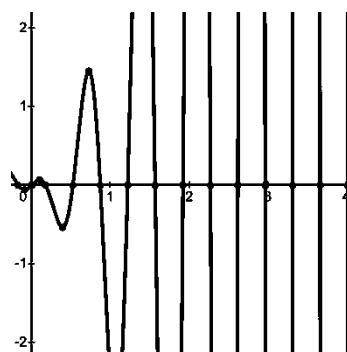
- $Im(\lambda_i) = 0$
- $Re(\lambda_i) > 0$



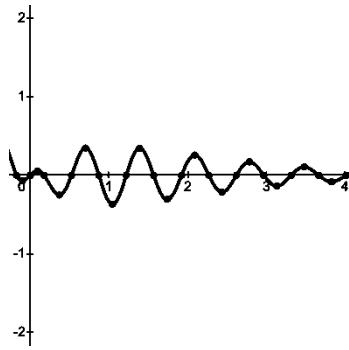
- $Re(\lambda_i) < 0$



- $\lambda_i \in \text{I o IV quadrante}$



- $\lambda_i \in \text{II o III quadrante}$



Si individua così un prospetto per la stabilità, l'asintotica stabilità e l'instabilità di un sistema LTI in funzione degli autovalori della matrice dinamica A :

- Il sistema è **asintoticamente stabile** $\Leftrightarrow \forall \lambda_i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$;
- Il sistema è **instabile** $\Leftrightarrow (\exists \lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0) \vee (\exists \lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \wedge \mu_i \neq \nu_i)$;
- Il sistema è **stabile** \Leftrightarrow detto $I = \{1, \dots, n\}$ e $I^* = \{i \in I : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \wedge \mu_i = \nu_i\} \subseteq I$, si ha $I^* \neq \emptyset \wedge \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0 \forall j \notin I^*$.

Avendo individuato un modo per **discriminare la stabilità attraverso gli autovalori della matrice dinamica**, si può ben capire come si possa **fare lo stesso usando il polinomio caratteristico** (le cui radici sono gli autovalori in questione). Il polinomio caratteristico di A può essere scritto come:

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0 \lambda^n + \varphi_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} \lambda + \varphi_n$$

Fino al quarto ordine, esiste una formula risolutiva analitica (più o meno difficile) **per estrarre le radici**, quindi per poter scrivere agilmente il polinomio come produttoria:

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0 \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

Ovviamente, supponendo $\varphi_0 \neq 0$. Per il polinomio caratteristico in questione, valgono le seguenti affermazioni:

$$-\operatorname{tr}(A) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

$$\det(-A) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\varphi_n}{\varphi_0}$$

Da ciò, si possono enunciare delle condizioni necessarie ad individuare l'asintotica stabilità di un sistema LTI.

ENUNCIATO CONDIZIONE NECESSARIA ALLA ASINTOTICA STABILITÀ

Ipotesi:

\forall sistema LTI asintoticamente stabile

$\varphi(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le sue soluzioni

Tesi:

1. $\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \\ \text{tr}(A) < 0 ; \\ \frac{\varphi_1}{\varphi_0} > 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0 \\ \det(-A) > 0 ; \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_0} > 0 \end{cases}$
3. Tutti i coefficienti φ_i del polinomio caratteristico hanno lo stesso segno.

In un caso particolare, quando il sistema è del secondo ordine e $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, l'ultima implicazione può essere impostata come relazione biunivoca.

ENUNCIATO CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER $n = 2$

Ipotesi:

\forall sistema LTI

$\varphi(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e λ_1, λ_2 le sue soluzioni

Tesi:

Il sistema è asintoticamente stabile \Leftrightarrow Tutti i coefficienti φ_i del polinomio caratteristico hanno lo stesso segno

Tuttavia, le condizioni necessarie sono utili fino ad un certo punto, permettono di affermare solo che il sistema non è asintoticamente stabile (nel caso in cui non siano verificate). Il criterio di Routh permette di individuare una condizione necessaria e sufficiente per discriminare l'asintotica stabilità che non dipenda dall'ordine del sistema (come la condizione precedente) e senza l'esplicito calcolo degli autovalori.

Il criterio di Routh è enunciato sulla base della tabella di Routh, una tabella composta da $n + 1$ righe e costruita a partire dal polinomio caratteristico. Le prime due righe sono riempite posizionandovi, nella prima i coefficienti del polinomio di indice pari ($\varphi_0, \varphi_2, \varphi_4, \dots$) e nella seconda quelli di indice dispari ($\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$):

L'elemento l_i – esimo, invece, è determinato a partire dalla seguente formula:

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix} = h_{i+1} - \frac{h_1}{k_1} k_{i+1}$$

E si continua fino a riempire tutte le $n + 1$ righe:

φ_0	φ_2	φ_4
φ_1	φ_3	φ_5
.
.
h_1	h_2	h_3
k_1	k_2	k_3
l_1	l_2	l_3
.
.
.

La tabella di Routh viene detta ben definita se non ci sono zeri nella colonna di estrema sinistra; per convenzione, gli zeri non vengono esplicitati.

ENUNCIATO CRITERIO DI ROUTH

Ipotesi:

\forall sistema LTI : $\varphi(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica A

Tesi:

Il sistema è asintoticamente stabile (le radici di $\varphi(\lambda)$ sono a parte reale negativa) \Leftrightarrow La tabella di Routh costruita a partire da $\varphi(\lambda)$ è ben definita e tutti i coefficienti della colonna all'estrema sinistra hanno lo stesso segno

Per la costruzione e la valutazione della tabella di Routh, possono essere impiegati i seguenti consigli:

1. Ogni due righe piene, viene persa una colonna;
2. Le ultime due righe hanno solo una colonna;
3. L'ultimo elemento all'estrema destra in basso di due righe piene ($\begin{smallmatrix} no & no & no \\ no & no & lui \end{smallmatrix}$) si propaga nelle successive due righe piene sempre nello stesso punto;
4. È lecito moltiplicare un'intera riga per un coefficiente positivo (affinché non ne sia cambiato il segno ma per semplificare eventuali frazioni);
5. Se appare uno zero nella prima colonna è opportuno fermarsi nello sviluppo della tabella perché non sarà ben definita, si può continuare solo sostituendo allo zero una ε molto piccola e senza avere pretese sulla stabilità del sistema associato;
6. Un cambio di segno fra i coefficienti della prima colonna indica la presenza di una radice a parte reale positiva (quindi all'instabilità).

Si faccia un esempio di costruzione della tabella di Routh a partire dal polinomio di quarto grado:

$$\varphi(\lambda) = 8\lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

4	8	7	1
3	3	2	
2	5	3	
1	1		
0	3		

Per la riga 2:

$$x_{21} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}$$

$$x_{22} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_{23} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Moltiplicata tutta per 3. Per la riga 1:

$$x_{11} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}$$

$$x_{12} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Moltiplicata tutta per 5. Per la riga 0:

$$x_{01} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_{02} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tutti i coefficienti della prima colonna della tabella sono dello stesso segno e il sistema a cui è associato il polinomio in esame è asintoticamente stabile. Si può notare che tutti gli accorgimenti elencati precedentemente possono essere applicati per snellire la costruzione della tabella senza alterare il risultato finale.

STABILITÀ PER SISTEMI NON LTI

Sia considerato un **sistema stazionario non lineare**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sottponendo il sistema all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, si verifica che \bar{x} è stato di equilibrio e \bar{y} uscita di equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$$

Gli strumenti per determinare la stabilità precedentemente introdotti per sistemi non LTI non portano a conclusioni nella maggior parte dei casi, essendo composti da condizioni sufficienti o necessarie. Finora, **l'unica condizione necessaria e sufficiente per discriminare la stabilità è stata individuata per sistemi LTI**; di conseguenza, se si potesse **approssimare un sistema stazionario e non lineare ad uno lineare**, si potrebbero mettere in comunicazione le proprietà di stabilità LTI con le proprietà di stabilità dei singoli stati del sistema non lineare per ottenere un criterio discriminante.

L'obiettivo, quindi, è quello di **approssimare un sistema non lineare ad uno lineare in un intorno di ogni stato di equilibrio del sistema in esame**. Siano considerati gli **spostamenti elementari rispetto alla condizione di equilibrio precedentemente individuata**:

$$\delta x(t)$$

$$\delta u(t)$$

$$\delta y(t)$$

$$\delta x_0$$

Individuando i movimenti:

$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

$$x(t_0) = x_0 + \delta x_0$$

Si studi la dinamica causata da questi spostamenti elementari:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \delta \dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \\ y(t) = \bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \\ x(t_0) = x_0 + \delta x_0 \end{cases}$$

Per motivi che saranno chiariti durante lo svolgimento, **si suppongano vere le seguenti due ipotesi**:

- Le funzioni f e g sono sufficientemente regolari (continue e derivabili) nell'intorno dello stato in esame da poter permettere l'espansione in serie di Taylor;
- Le funzioni f e g sono tali che gli o – piccoli dell'espansione di Taylor di ordine superiore al primo sono trascurabili.

Con queste ipotesi è possibile dire che:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}(t) &= f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} (\delta x(t) - \delta x(t)) \\
 &\quad + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} (\delta u(t) - \delta u(t)) + o(\delta x(t), \delta u(t)) \\
 &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta x(t) + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta u(t) \\
 \\
 \bar{y} + \delta y(t) &= g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} (\delta x(t) - \delta x(t)) \\
 &\quad + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} (\delta u(t) - \delta u(t)) + o(\delta x(t), \delta u(t)) \\
 &= g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta x(t) \\
 &\quad + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta u(t)
 \end{aligned}$$

Sapendo che $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ e che $g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{y}$ per la definizione di stato di equilibrio, il sistema diventa:

$$\left\{
 \begin{aligned}
 \delta \dot{x}(t) &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta x(t) + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta u(t) \\
 \delta y(t) &= \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta x(t) + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \delta u(t) \\
 x(t_0) &= x_0 + \delta x_0
 \end{aligned}
 \right.$$

Ogni derivata parziale particolarizzata in \bar{x} e \bar{u} è il Jacobiano della relativa funzione, quindi è una matrice; è possibile fare la posizione:

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \\
 \hat{B} &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \\
 \hat{C} &= \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \\
 \hat{D} &= \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))}{\partial u} \Big|_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}}
 \end{aligned}$$

E scrivere:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \hat{A}\delta x(t) + \hat{B}\delta u(t) \\ \delta y(t) = \hat{C}\delta x(t) + \hat{D}\delta u(t) \\ x(t_0) = x_0 + \delta x_0 \end{cases}$$

Che è un **sistema LTI**. Il processo che ha portato all'approssimazione di un sistema stazionario non lineare in un intorno di un suo stato di equilibrio ad un sistema LTI è detto **linearizzazione** e può essere effettuato per ogni stato di equilibrio del sistema iniziale. Linearizzare un sistema non lineare è fondamentale per determinarne le proprietà di stabilità; infatti, uno dei corollari del teorema di Hartman – Grobman permette di discriminare la stabilità asintotica e l'instabilità di uno stato di equilibrio a partire dal sistema linearizzato.

ENUNCIATO COROLLARIO DEL TEOREMA DI HARTMAN – GROBMAN

Ipotesi:

$$\forall \text{ sistema stazionario non lineare } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} : \exists \bar{x} \text{ stato di equilibrio per } u(t) = \bar{u}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \hat{A}\delta x(t) + \hat{B}\delta u(t) \\ \delta y(t) = \hat{C}\delta x(t) + \hat{D}\delta u(t) \end{cases} \text{ linearizzazione del sistema in un intorno di } \bar{x}$$

Tesi:

1. Il sistema LTI linearizzato è asintoticamente stabile $\Rightarrow \bar{x}$ è asintoticamente stabile;
2. Il sistema LTI linearizzato è instabile $\Rightarrow \bar{x}$ è instabile;
3. Il sistema LTI linearizzato è stabile \Rightarrow non si può dire nulla sulla stabilità di \bar{x} .

Il motivo per cui resta fuori la semplice stabilità dal teorema risiede nel fatto che è una condizione di confine ed un'approssimazione come il sistema LTI linearizzato non ha abbastanza margine (soprattutto quando si parla degli infinitesimi di ordine superiore trascurati) per ignorarne l'incertezza; infatti, nel caso in cui il sistema LTI linearizzato fosse semplicemente stabile, nel calcolo sarebbero trascurati gli o – piccoli di ordine superiore al primo, che nel sistema originario potrebbero spostare leggermente il movimento dello stato e annullare la stabilità. Per l'asintotica stabilità e l'instabilità non sussiste lo stesso problema perché non sono condizioni di confine, gli o – piccoli spostano comunque il movimento dello stato ma l'approssimazione ha molto più margine ed è ragionevole pensare che non va a modificare le proprietà così come sono individuate nel sistema LTI linearizzato.

Prima di proseguire la trattazione, si vuole fare una digressione sul Jacobiano introdotto nel processo di linearizzazione. Una funzione può essere: scalare di variabile scalare, scalare di variabile vettoriale, vettoriale di variabile scalare o vettoriale di variabile vettoriale; ognuna di esse ha a disposizione lo strumento di derivazione ma sotto forme e nomenclature diverse:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$

La derivata è uno scalare.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x+2 \\ -3x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La derivata è un vettore colonna.

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x_1^2 + x_2 x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right] = [2x_1 + x_2, x_1, -1]$$

La derivata è un vettore riga, detto gradiente.

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + x_2 x_3 \\ x_2 x_1 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La derivata è una matrice, detta matrice Jacobiana.

LE TRAIETTORIE E IL PIANO DELLE FASI

Il tema delle traiettorie verrà affrontato tramite un esempio proposto nel 1988 dal matematico statunitense Strogatz, denominato “**Love affairs**”. Sebbene sia possibile usare le traiettorie per

qualsiasi sistema LTI, in questa sede si utilizzeranno solo sistemi del secondo ordine ($n = 2$) perché all'aumentare dell'ordine aumenta la difficoltà nell'interpretare il piano delle fasi.

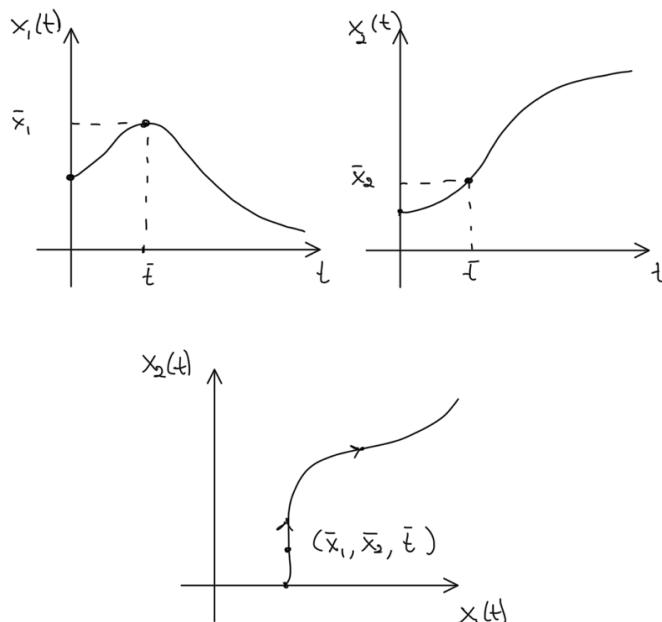
Considerato un sistema LTI del secondo ordine con condizione iniziale $x(t) = x_0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Ricordando che $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e che $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Lo stato sarà composto da due componenti, ognuna delle quali sarà caratterizzata da un proprio sviluppo in funzione del tempo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Si definisce piano delle fasi il sistema cartesiano nel quale le ascisse e le ordinate rappresentano, rispettivamente, la prima e la seconda componente dello stato e i cui punti corrispondono ai loro valori in uno stesso istante di tempo. Ciò che sarà individuato è una **curva parametrica**, il cui **parametro è il tempo e il cui verso rappresenta lo scorrere del tempo**.



L'esempio proposto da Strogatz prende in considerazione un **sistema del secondo ordine in cui lo stato è composto dalle componenti**:

$$x(t) = \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

Dove **$R(t)$ rappresenta i sentimenti di Romeo nei confronti di Juliet e $J(t)$ viceversa; quando uno stato è positivo si parla di amore, quando negativo di odio.** Si affrontino le seguenti situazioni:

1. Odi et amo

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = \alpha J(t) \\ \dot{J}(t) = -\beta R(t) \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

In questa situazione, **la dinamica dei sentimenti dei due prevede che tanto più uno ami l'altro, più l'altro lo odi**. Componendo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}(t) \\ \dot{J}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

Si individuino gli **stati d'equilibrio del sistema**:

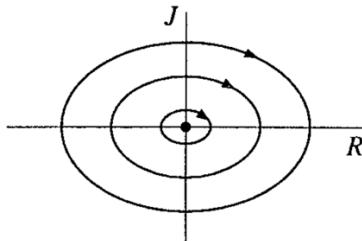
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{J} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \bar{J} = 0 \\ -\beta \bar{R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si studi la **stabilità di questo stato d'equilibrio**:

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ -\beta & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \alpha\beta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta}$$

Il sistema è stabile e i suoi modi naturali sono $\cos(\sqrt{\alpha\beta} \cdot t)$. Osservando sul piano delle fasi le diverse traiettorie, partendo da condizioni iniziali diverse che non facciano cadere lo stato in quello di equilibrio, si può dimostrare che il piano delle fasi assume la seguente forma:



Uno stato di equilibrio che porta il sistema in questa configurazione è detto **centro**.

È interessante notare che **le traiettorie non si intersecano mai**. Questa proprietà non è prerogativa di questo caso ma **si applica a tutti i sistemi LTI**, essendo **composti da un problema di Cauchy che impone l'esistenza e unicità della soluzione**; infatti, **ogni traiettoria rappresenta una soluzione ad un problema di Cauchy** (le cui condizioni iniziali possono essere qualsiasi punto della traiettoria) e **l'intersezione tra due traiettorie implicherebbe che**, partendo con le condizioni iniziali nel punto di intersezione, **le soluzioni** (quindi le traiettorie) **possibili non siano univoche**.

Sia $\dot{x}(t) = f(x(t))$ con $x(0) = x_0$; **supponendo f continua e con tutte le derivate parziali continue**, in qualsiasi insieme aperto e connesso, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tale che $x_0 \in D$, allora $x(t)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale.

2. Amanti considerevoli

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = aR(t) + bJ(t) \\ \dot{J}(t) = bR(t) + aJ(t) \end{cases}$$

In questa situazione, **la dinamica del sentimento non è condizionata solo dai sentimenti che l'uno prova nei confronti dell'altro ma anche da cosa pensa di sé stesso**. In base ai valori di a e b la traiettoria assume forme diverse:

a. Amanti prudenti

Si ha $a < 0$ e $b > 0$ tali che $a \neq b$ e $|a| > |b|$; quindi, **al singolo individuo pesa di più l'opinione su sé stesso che sull'altro**. In questo caso, si ha:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \wedge \det(A) = a^2 - b^2 > 0$$

L'unico stato di equilibrio è quello nullo ed il sistema è stabile:

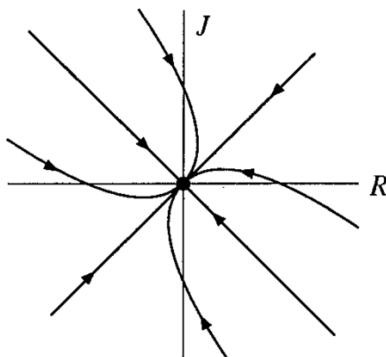
$$\begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = a + b < 0 \wedge \lambda_2 = a - b < 0$$

Di conseguenza, gli autovettori associati sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Costruendo le varie traiettorie partendo da condizioni iniziali diverse, si può osservare il seguente piano delle fasi:



Uno stato di equilibrio che porta il sistema in questa configurazione è detto nodo stabile.

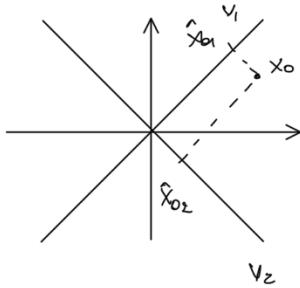
Si noti che anche in questo caso non si intersecheranno mai due traiettorie. È interessante osservare che se $x_0 \in v_i \in \mathbb{R}^2$, ovvero se la traiettoria è tracciata con condizione iniziale sull'autovettore, essa rimane sempre sull'autovettore, non scostandosi minimamente. Si osservi il sistema e si tracci la soluzione $x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \wedge v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} : T_D^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Calcolando la soluzione tramite la formula di Lagrange:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = T_D^{-1}e^{ADt}T_Dx_0 = T_D^{-1}e^{ADt}\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{01} \\ \hat{x}_{02} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{21}e^{\lambda_2 t} \\ v_{12}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{01} \\ \hat{x}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t}\hat{x}_{01} + v_{21}e^{\lambda_2 t}\hat{x}_{02} \\ v_{12}e^{\lambda_1 t}\hat{x}_{01} + v_{22}e^{\lambda_2 t}\hat{x}_{02} \end{bmatrix} \\ &= v_1 e^{\lambda_1 t} \hat{x}_{01} + v_2 e^{\lambda_2 t} \hat{x}_{02} \end{aligned}$$

Il movimento può essere visto, come già rilevato solo teoricamente, **come combinazione lineare dei modi naturali del sistema**. Questo risultato permette di vedere i due autovettori come un nuovo sistema di riferimento:



Un punto del piano sarà quindi caratterizzato da due componenti \hat{x}_{01} e \hat{x}_{02} giacenti sugli assi del nuovo sistema di riferimento; il movimento generato dalla condizione iniziale in quel punto sarà più o meno “attratto” da uno dei due nuovi assi (gli autovettori) in funzione dei modi naturali del sistema (in particolare, sarà attratta verso l'asse in cui il modo naturale è maggiore), giustificando l'andamento rilevato nel sistema di riferimento $R - J$. Infatti, partendo da uno dei due autovettori, la componente lungo l'altro sarà nulla e la traiettoria non ne sarà minimamente attratta:

$$x(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} \hat{x}_{01} \vee x(t) = v_2 e^{\lambda_2 t} \hat{x}_{02}$$

b. Amanti impetuosi

Si ha $a < 0$ e $b > 0$ tali che $a \neq b$ e $|a| < |b|$; quindi, **al singolo individuo pesano di più i sentimenti che prova verso l'altro**. In questo caso, si ha:

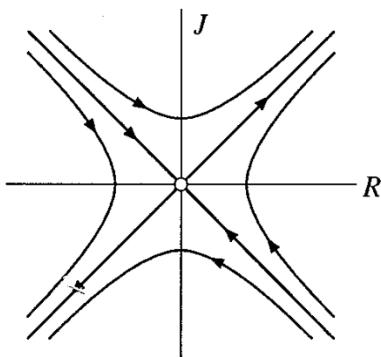
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \wedge \det(A) = a^2 - b^2 < 0$$

L'unico stato di equilibrio è quello nullo ed il sistema è instabile:

$$\begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = a + b > 0 \wedge \lambda_2 = a - b < 0$$

Il piano delle fasi assume la seguente forma:



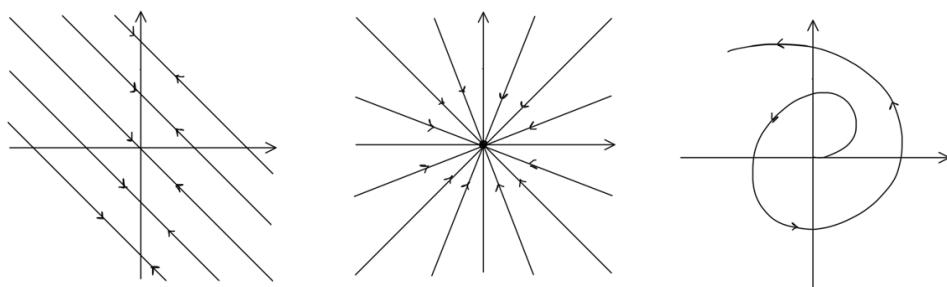
Uno stato di equilibrio che porta il sistema in questa configurazione è detto punto sella.

Si nota che quando le condizioni iniziali giacciono su uno dei due autovettori si ripresenta lo stesso schema del caso degli amanti prudenti.

Si potrebbe andare avanti così ed affrontare tutti i casi possibili; riassumendo e sintetizzando la trattazione, **uno stato di equilibrio può essere valutato e classificato attraverso la sua traiettoria e, in particolare, i suoi autovalori seguendo lo schema seguente:**

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
 - $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **nodo stabile**;
 - $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ **sella**;
 - $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ **nodo instabile**;
 - $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ **equilibrium set stabile**;
 - $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ **equilibrium set instabile**;
 - $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:
 - A diagonalizzabile \Rightarrow **infiniti punti di equilibrio, tutti stabili**;
 - A solo Jordanizzabile \Rightarrow **tutti i punti sulla retta dell'autovettore sono stati di equilibrio instabili**;
 - $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$:
 - A diagonalizzabile \Rightarrow **stella instabile**;
 - A solo Jordanizzabile \Rightarrow **nodo instabile con una sola retta coincidente all'autovettore**;
 - $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$:
 - A diagonalizzabile \Rightarrow **stella stabile**
 - A solo Jordanizzabile \Rightarrow **nodo stabile con una sola retta coincidente all'autovettore**;
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ complessi coniugati $\sigma \pm i\omega$:
 - $\sigma = 0 \Rightarrow$ **centro**
 - $\sigma > 0 \Rightarrow$ **fuoco instabile**
 - $\sigma < 0 \Rightarrow$ **fuoco stabile**

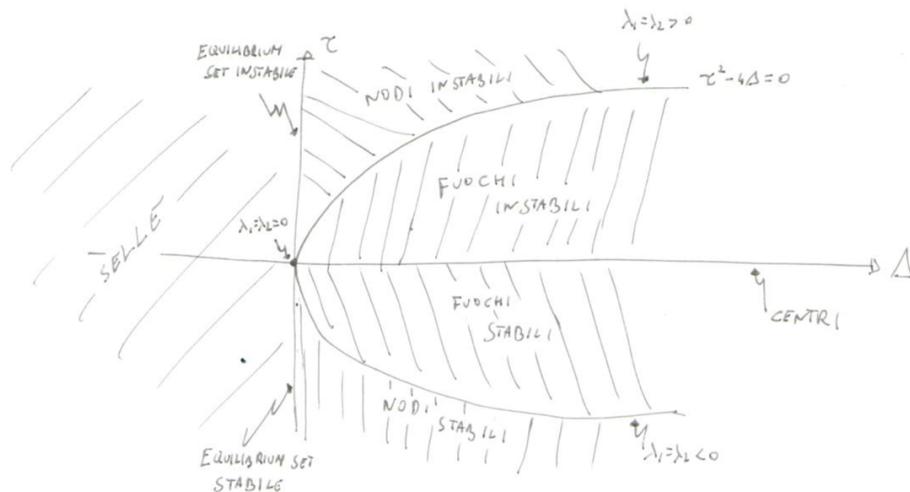
Sono state introdotte diverse classificazioni nuove: un **equilibrium set** (stabile/instabile) è rappresentato da traiettorie che tracciano un fascio di rette parallele (con verso rivolto verso l'interno/esterno) alla retta dell'autovettore, una **stella** (stabile/instabile) è un **nodo degenero** rappresentato da traiettorie che tracciano un fascio di rette proprio (con verso rivolto verso l'interno/esterno), mentre il **fuoco** (stabile/instabile) è rappresentato da traiettorie che tracciano delle **spirali** (con verso rivolto verso l'interno/esterno).



Quanto detto finora può essere raggiunto specularmente senza neanche calcolare gli autovettori, basandosi su traccia e determinante della matrice A :

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2 \wedge \Delta = \lambda_1 \lambda_2$$

- $\Delta = 0$:
 - $\tau < 0 \Rightarrow$ **equilibrium set stabile**
 - $\tau > 0 \Rightarrow$ **equilibrium set instabile**
 - $\tau = 0 \Rightarrow$ equivale al caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ **sella**;
- $\Delta > 0$:
 - $\tau = 0 \Rightarrow$ **centro**
 - $\tau^2 - 4\Delta > 0$:
 - $\tau > 0 \Rightarrow$ **nodo instabile**;
 - $\tau < 0 \Rightarrow$ **nodo stabile**;
 - $\tau^2 - 4\Delta < 0$:
 - $\tau > 0 \Rightarrow$ **fuoco instabile**;
 - $\tau < 0 \Rightarrow$ **fuoco stabile**;
 - $\tau^2 - 4\Delta = 0$:
 - $\tau > 0 \Rightarrow$ **stella instabile**;
 - $\tau < 0 \Rightarrow$ **stella stabile**;



ALTURE PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI

Le proprietà strutturali di un sistema LTI sono tre:

- **Stabilità**;
- **Raggiungibilità**;
- **Osservabilità**.

La stabilità è stata già ampiamente affrontata, è il momento delle altre due proprietà.

RAGGIUNGIBILITÀ

Uno stato $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto raggiungibile se esiste un istante di tempo finito $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ e un ingresso $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ tale che il movimento forzato dello stato $x_F(t) \in \mathbb{R}^n$, generato da $\tilde{u}(t)$ nell'intervallo di tempo $t \in [0, \tilde{t}]$, assuma $x_F(\tilde{t}) = \tilde{x}$; ovvero, **uno stato è detto raggiungibile se esiste un ingresso per cui il movimento forzato dello stato da esso generato raggiunge lo stato in esame in un tempo finito**. Un sistema per cui **tutti gli stati sono raggiungibili** è detto **completamente raggiungibile**.

Ricordando la formula del movimento forzato:

$$x_F(t) = (g_x * u)(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Si può notare la dipendenza dalle matrici A e B .

Si definisce la **matrice di raggiungibilità**:

$$M_r = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

Ogni colonna di questa matrice è il prodotto tra diverse matrici; **manca il termine per cui A è elevata alla $n - 1$ – esima potenza perché non aggiunge informazioni**, dal momento in cui è combinazione lineare delle potenze fino alla $n - 1 -$ esima (per il teorema di Caley – Hamilton). **La matrice di raggiungibilità è utile alla determinazione della completa raggiungibilità di un sistema**, grazie al seguente teorema.

ENUNCIATO TEOREMA DI COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ

Ipotesi:

\forall sistema LTI di ordine $n : M_r \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ è la matrice di raggiungibilità

Tesi:

Il sistema LTI è completamente raggiungibile $\Leftrightarrow \rho(M_r) = n$

Se il sistema è SISO o SIMO, $m = 1$ e la matrice di raggiungibilità è quadrata ($M_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$); quindi, **il sistema è completamente raggiungibile se e solo se $\det(M_r) \neq 0$** .

Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, $\rho(M_r) = n_r < n$, alcuni stati sono raggiungibili e altri no; per scoprire quali stati sono raggiungibili e quali no, è necessario un **cambio di rappresentazione** che permette di separare il sistema in una parte raggiungibile e in una parte non raggiungibile:

$$\hat{x}(t) = T_r x(t)$$

Con $T_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\det(T_r) \neq 0$. Tale matrice viene costruita come segue:

$$T_r^{-1} = [n_r \text{ colonne lin. indip. di } M_r, n - n_r \text{ colonne arbitrarie t : } \det(T_r^{-1}) \neq 0]$$

Con questa scelta, si può mettere il sistema LTI nella nuova rappresentazione di stato:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

Con:

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} : \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}, \hat{A}_{ab} \in \mathbb{R}^{n_r \times (n - n_r)}, \hat{A}_b \in \mathbb{R}^{(n - n_r) \times (n - n_r)}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} : \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_a(t) \\ \hat{x}_b(t) \end{bmatrix} : \hat{x}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_r}, \hat{x}_b(t) \in \mathbb{R}^{n-n_r}$$

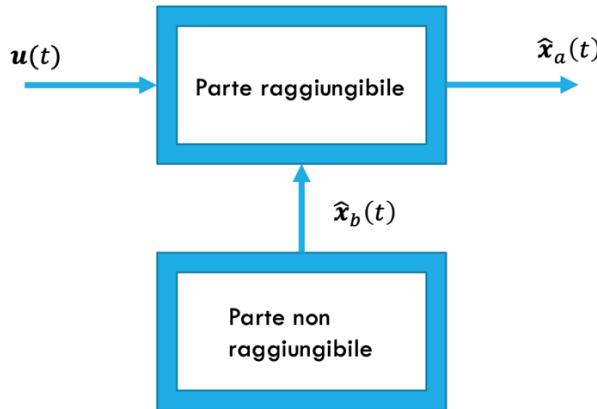
$\hat{x}_a(t)$ è detta parte raggiungibile e $\hat{x}_b(t)$ parte non raggiungibile. In forma estesa:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(t) + \hat{B}_a u(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \end{cases}$$

Si può apprezzare ancora meglio la non raggiungibilità; infatti, **la dinamica della parte non raggiungibile non è dipendente dall'ingresso**. Per verificare, invece, la parte raggiungibile, si consideri il suo sottosistema:

$$\hat{M}_r = [\hat{B}_a, \hat{A}_a \hat{B}_a, \hat{A}_a^2 \hat{B}_a, \dots, \hat{A}_a^{n_r-1} \hat{B}_a] : \rho(\hat{M}_r) = n_r$$

Graficamente, la **dualità tra parte raggiungibile e non raggiungibile** può essere riassunta dal seguente schema:



Evidenziando ancora una volta che la parte non raggiungibile non è minimamente condizionata dall'ingresso.

OSSERVABILITÀ

Per l'osservabilità verrà data la definizione in negativo, quindi si osserva dapprima la non osservabilità e, negandone la definizione, l'osservabilità. Uno stato $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \neq 0$ si dice non osservabile se, $\forall \tilde{t} > 0$ finito, detta $y_L(t) \in \mathbb{R}^p$ l'uscita libera del sistema generata da \tilde{x} , risulta $y_L(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \tilde{t}]$. Quindi, uno stato $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \neq 0$ si dice osservabile se non è non osservabile, mentre un sistema privo di stati non osservabili si dice essere completamente osservabile.

Il fulcro della non osservabilità risiede nella risposta libera dell'uscita:

$$y_L(t) = C e^{At} x_0$$

Essa è nulla quando è nulla la condizione iniziale x_0 . Quindi, se l'uscita è identicamente nulla, non si può sapere se è lo stato iniziale ad essere nullo o se algebricamente è nullo il termine $C e^{At} x_0$ con $x_0 \neq 0$; questa incertezza determina l'inosservabilità dello stato iniziale.

Si nota la dipendenza della definizione dalle matrici A e C ; **si definisce matrice di osservabilità:**

$$M_o = [C^T, A^T C^T, A^{T^2} C^T, \dots, A^{T^{n-1}} C^T] \in \mathbb{R}^{n \times np}$$

Oppure la sua trasposta:

$$M_o^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}$$

Anche per questa proprietà, **è possibile individuare una condizione necessaria e sufficiente per determinare la completa osservabilità di un sistema** grazie alla matrice appena definita.

ENUNCIATO TEOREMA DI COMPLETA OSSERVABILITÀ

Ipotesi:

\forall sistema LTI di ordine $n : M_o \in \mathbb{R}^{n \times np}$ è la matrice di osservabilità

Tesi:

Il sistema LTI è completamente osservabile $\Leftrightarrow \rho(M_o) = n$

Se il sistema è SISO o MISO, $p = 1$ e la matrice di osservabilità è quadrata ($M_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$); **quindi, il sistema è completamente osservabile se e solo se $\det(M_o) \neq 0$.**

Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, $\rho(M_o) = n_o < n$, alcuni stati sono osservabili e altri no; per scoprire **quali stati sono osservabili e quali no**, è necessario un cambio di rappresentazione che permette di separare il sistema in una parte osservabile e in una parte inosservabile:

$$\hat{x}(t) = T_o x(t)$$

Con $T_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\det(T_o) \neq 0$. Tale matrice viene costruita come segue:

$$T_o^{-1} = [n - n_o \text{ vettori } \zeta_i \in \mathbb{R}^n : M_o^T \zeta_i = 0, n_o \text{ colonne libere} : \det(T_o^{-1}) \neq 0]$$

I suddetti vettori $\zeta_i \in \mathbb{R}^n$ non sono nient'altro che gli elementi del kernel di M_o^T e sono $n - n_o$ necessariamente. Con questa scelta, si può mettere il sistema LTI nella nuova rappresentazione di stato:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

Dove:

$$\hat{A} = T_o A T_o^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix} : \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}, \hat{A}_{ba} \in \mathbb{R}^{(n-n_o) \times n_o}, \hat{A}_b \in \mathbb{R}^{(n-n_o) \times (n-n_o)}$$

$$\hat{C} = C T_o^{-1} = [\hat{C}_a, 0] : \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_a(t) \\ \hat{x}_b(t) \end{bmatrix} : \hat{x}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_o}, \hat{x}_b(t) \in \mathbb{R}^{n-n_o}$$

$\hat{x}_a(t)$ è detta **parte osservabile** e $\hat{x}_b(t)$ **parte inosservabile**. In forma estesa:

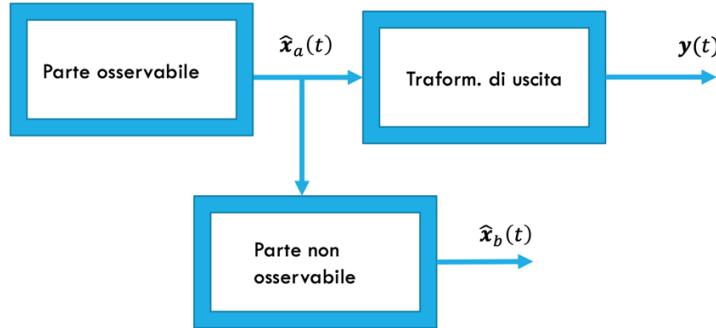
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_{ba} \hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \\ y(t) = \hat{C}_a \hat{x}_a(t) \end{cases}$$

Si può apprezzare ancora meglio la non osservabilità; infatti, **l'uscita non dipende dalla parte non osservabile**, la quale **evolve per fatti suoi senza apparire all'uscita**. È come fare una TAC ($y(t)$) e non rilevare alcuna anomalia sebbene ci sia una malattia ($\hat{x}_b(t)$) che evolve. **Essendo, però, l'uscita non univoca ci potranno essere delle particolari configurazioni in cui $\hat{x}_b(t)$ non è una parte inosservabile**; questa proprietà è riassunta dicendo che **l'uscita discrimina l'osservabilità**.

Per verificare, invece, la parte raggiungibile, si consideri il suo sottosistema:

$$\hat{M}_o = [\hat{C}_a^T, \hat{A}_a^T \hat{C}_a^T, \hat{A}_a^{T^2} \hat{C}_a^T, \dots, \hat{A}_a^{T^{n_o-1}} \hat{C}_a^T] : \rho(\hat{M}_o) = n_o$$

Graficamente, la **dualità tra parte osservabile e non osservabile può essere riassunta dal seguente schema**:



Evidenziando ancora una volta che **la parte non osservabile non condiziona minimamente l'uscita**.

LA SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN E LA STABILITÀ BIBO

È stato mostrato come **un sistema possa essere completamente raggiungibile o meno, completamente osservabile o meno**; poiché le due definizioni sono scollegate (interessano matrici diverse del sistema LTI), è possibile riconoscere in uno stesso sistema **quattro parti** (non necessariamente tutte presenti contemporaneamente):

- **Parte raggiungibile e non osservabile;**
- **Parte raggiungibile e osservabile;**

- **Parte non raggiungibile e non osservabile;**
- **Parte non raggiungibile e osservabile.**

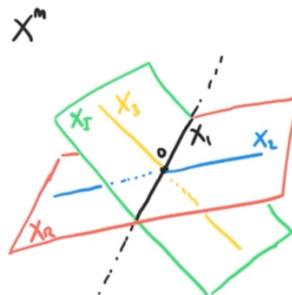
Come fatto per ognuna delle singole proprietà strutturali, per evidenziare queste quattro parti è necessario un cambio di rappresentazione di stato opportuno (sebbene non univoco) attraverso una matrice invertibile $T_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ che porterà il sistema in una sua rappresentazione equivalente, detta **forma canonica di Kalman**.

Per costruire questa matrice ci si riferisce al seguente ragionamento. Sia indicato con $X^n \equiv \mathbb{R}^n$ l'intero spazio vettoriale di stato; si individuano:

- **X_R il sottospazio vettoriale degli stati raggiungibili** (si suppone di poterlo rappresentare come un piano, la cui base sarà sempre indicata con X_R);
- **X_I il sottospazio vettoriale degli stati inosservabili** (si suppone di poterlo rappresentare come un piano, la cui base sarà sempre indicata con X_I).

L'origine dello spazio deve appartenere necessariamente a tutti i suoi sottospazi. Si definisce:

- **X_1** l'intersezione del sottospazio X_R con X_I , rappresentando il **sottospazio di stati raggiungibili e non osservabili**;
- **X_2** tale che $X_1 \cup X_2$ è una base di X_R , rappresentando il **sottospazio di stati raggiungibili e osservabili**;
- **X_3** tale che $X_1 \cup X_3$ è una base di X_I , rappresentando il **sottospazio di stati non raggiungibili e non osservabili**;
- **X_4** tale che $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ è una base di X^n , rappresentando il **sottospazio di stati non raggiungibili e osservabili** e ciò che manca per ricostruire tutto lo spazio vettoriale.



La **matrice di trasformazione per la forma canonica di Kalman** può scriversi come:

$$T_k^{-1} = [X_1, X_2, X_3, X_4]$$

Operativamente, la procedura prevede i seguenti step:

1. Le colonne di $X_1 = X_R \cap X_I$ sono l'intersezione (quelle comuni, ovvero proporzionali) fra quelle di M_r e quelle del kernel di M_o^T ;
2. Dalla definizione, $X_2 = X_R \cap \bar{X}_1$ e si può scrivere $X_2 = X_R \cap (X_{nr} \cup X_o)$, dove X_{nr} è il complemento ortogonale a X_R (il kernel di M_r^T):
 - Ovvero, vanno prese le colonne comuni tra M_r e l'unione delle colonne del kernel di M_r^T e quelle di M_o ;
3. Dalla definizione, $X_3 = X_I \cap \bar{X}_1$ e si può scrivere $X_3 = X_I \cap (X_{nr} \cup X_o)$:

- a. Ovvero, vanno prese le colonne comuni tra quelle del kernel di M_o^T e l'unione delle colonne del kernel di M_r^T e quelle di M_o ;
- 4. Dalla definizione, X_4 chiude la matrice tale che sia invertibile ma si può anche vedere essere pari a $X_{nr} \cap X_o$.

Ottenuta la matrice di trasformazione, si può effettuare il **cambio di rappresentazione**:

$$\hat{x}(t) = T_k x(t)$$

Mettendo il sistema nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dove:

$$\hat{A} = T_k A T_k^{-1}, \hat{B} = T_k B, \hat{C} = C T_k^{-1}$$

Con questa nuova rappresentazione, il vettore di stato è partizionato come segue:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_a(t) \\ \hat{x}_b(t) \\ \hat{x}_c(t) \\ \hat{x}_d(t) \end{bmatrix}$$

Mentre le matrici del sistema equivalente assumono la forma:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = [0, \hat{C}_b, 0, \hat{C}_d]$$

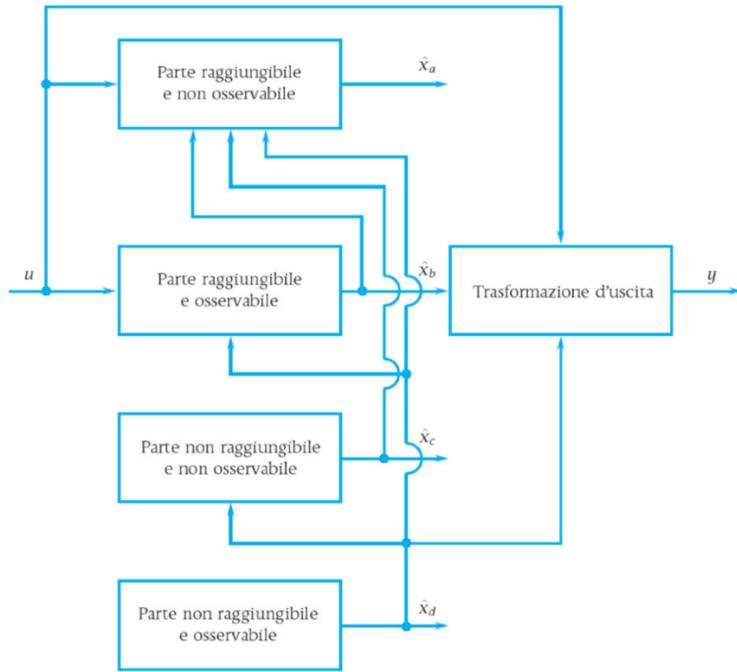
Quindi, le **equazioni del sistema scomposto in forma canonica sono**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(t) + \hat{A}_{ac} \hat{x}_c(t) + \hat{A}_{ad} \hat{x}_d(t) + \hat{B}_a u(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t) + \hat{A}_{bd} \hat{x}_d(t) + \hat{B}_b u(t) \\ \dot{\hat{x}}_c(t) = \hat{A}_c \hat{x}_c(t) + \hat{A}_{cd} \hat{x}_d(t) \\ \dot{\hat{x}}_d(t) = \hat{A}_d \hat{x}_d(t) \\ y(t) = \hat{C}_b \hat{x}_b(t) + \hat{C}_d \hat{x}_d(t) + Du(t) \end{array} \right.$$

Rappresentando, in ordine:

- Parte raggiungibile e non osservabile;
- Parte raggiungibile e osservabile;
- Parte non raggiungibile e non osservabile;
- Parte non raggiungibile e osservabile;
- Uscita.

Graficamente, la suddivisione tra le varie parti del sistema può essere riassunta dal seguente schema:



Riprendendo alla mente le matrici del sistema equivalente, si nota che **la matrice dinamica ha gli stessi autovalori di ciascuna matrice presente sulla diagonale**, che sono gli autovalori relativi alle parti raggiungibile e non osservabile, raggiungibile e osservabile, non raggiungibile e non osservabile e non raggiungibile e osservabile del sistema; una conseguenza di questa proprietà impatta l'esponenziale della matrice in questione:

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\hat{A}_a t} & * & * & * \\ 0 & e^{\hat{A}_b t} & * & * \\ 0 & 0 & e^{\hat{A}_c t} & * \\ 0 & 0 & 0 & e^{\hat{A}_d t} \end{bmatrix}$$

Indicando con * i termini che non saranno di interesse allo scopo della trattazione. **Si riprenda alla mente anche la definizione di risposta impulsiva del sistema** con l'obiettivo di calcolare quella relativa al sistema equivalente appena rilevato:

$$\begin{aligned} g_y(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t) \\ \hat{g}_y(t) &= \hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B} + D\delta(t) = [0, \hat{C}_b, 0, \hat{C}_d]e^{\hat{A}t} \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D\delta(t) = [0, \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t}, *, *] \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D\delta(t) \\ &= \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t} \hat{B}_b + D\delta(t) \end{aligned}$$

Poiché il sistema non cambia nella sua essenza (si sta solo cambiando la rappresentazione interna), le risposte impulsive devono essere uguali:

$$g_y(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t} \hat{B}_b + D\delta(t)$$

Ovviamente, ciò non vuol dire che $C = \hat{C}_b$, $e^{At} = e^{\hat{A}_b t}$ e $B = \hat{B}_b$ ma solo che i loro prodotti sono uguali (così come $2 \neq 4$ e $6 \neq 3$ ma $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$); invece, si può dire che il prodotto $Ce^{At}B$

cancella le componenti matriciali che non sono sulla diagonale, non contribuiscono alla risposta impulsiva.

Detto ciò, si può osservare che la risposta impulsiva di un sistema LTI dipende unicamente dalla parte osservabile e raggiungibile, se le altre parti sono presenti non concorrono a formare la risposta impulsiva. In seno a questa relazione, poiché la risposta forzata è stata associata alla convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva, allora si potrà dire che la risposta forzata del sistema LTI in esame dipenderà anch'essa unicamente dalla parte raggiungibile ed osservabile:

$$y_F(t) = (g_y * u)(t) = \int_0^t g_y(t-\tau)u(\tau)d\tau = \hat{C}_b \int_0^t e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau)d\tau + Du(t)$$

Un sistema LTI che presenta solo la parte raggiungibile e osservabile è detto sistema LTI in forma minima; in tal caso, non è possibile adottare un numero di variabili di stato inferiore alle n del sistema per descrivere la relazione esistente tra ingresso ed uscita.

In genere, la conoscenza della risposta impulsiva permette di conoscere il movimento forzato dell'uscita senza definire le variabili di stato; in particolare, la risposta impulsiva è, per i sistemi LTI in forma minima, un modello effettivo ingresso – uscita ($i - u$) esterno, perché non c'è la descrizione dello stato. Se si vuole calcolare solo tale movimento, le altre parti della scomposizione del sistema sono sovrabbondanti e inutili.

Un sistema LTI è detto BIBO stabile se ad un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata del sistema (Bounded – Input – Bounded – Output):

$$\forall u(t) \exists M, N > 0 : |u(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < N$$

La principale differenza tra stabilità classica e stabilità BIBO risiede nella componente del sistema a cui fanno riferimento: entrambe partono da un particolare tipo di ingresso (costante per la stabilità classica e limitato per la stabilità BIBO) ma divergono in direzioni diverse, verso lo stato per la stabilità classica e verso l'uscita per la stabilità BIBO. Tra le due definizioni sussistono le seguenti relazioni:

$$\forall \text{sistema LTI, asintotica stabilità} \Rightarrow \text{stabilità BIBO}$$

$$\forall \text{sistema LTI in forma minima, asintotica stabilità} \Leftrightarrow \text{stabilità BIBO}$$

Se l'ingresso è limitato, il movimento forzato dell'uscita diverge ad infinito solo se la risposta impulsiva $g_y(t)$ assume lo stesso comportamento, quindi se i modi naturali del sistema divergono, ovvero se gli autovalori sono tali da non rendere asintoticamente stabile il sistema. La relazione inversa richiede l'ipotesi di forma minima perché le parti che non contribuiscono al movimento forzato possono essere instabili, pur non apparendo all'uscita che continua ad essere limitata; in forma minima queste parti, non essendoci, non possono introdurre stati instabili.

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE

Ci si chiede se, dato un ingresso $u(t)$ persistente (almeno da un certo punto in poi), anche lo stato e l'uscita forzata abbiano la stessa forma del segnale di ingresso (esempio: $u(t) = e^{\alpha t} \rightarrow x(t), y(t) = a + be^{\beta t}$); nel caso in cui la risposta fosse affermativa, questo tipo di movimento è detto:

- $x_R(t)$ risposta a regime (permanente) nello stato;
- $y_R(t)$ risposta a regime (permanente) nell'uscita.

Formalizzando:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \exists t_a: \|y_R(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_a$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \exists t_a: \|x_R(t) - x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_a$$

Dove si indica con **t_a il tempo di assestamento**, il tempo necessario affinché l'uscita e lo stato inizino ad avvicinarsi alla propria risposta a regime. La definizione può essere sintetizzata:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_R(t)$$

Detto ciò, **bisogna determinare le ipotesi per le quali le risposte a regime $x_R(t)$ e $y_R(t)$ esistono**; dalla definizione, si può dedurre che **le due risposte in questione devono essere indipendenti dallo stato iniziale**:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_L(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Ce^{At}x_0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_L(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At}x_0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_R(t)$$

Quindi, per essere indipendente dalle condizioni iniziali del sistema, **l'evoluzione libera deve tendere a zero**; ciò accade quando **il sistema è asintoticamente stabile** (in tal caso i modi naturali del sistema, di cui la risposta libera è combinazione lineare, tendono a zero). Sotto le ipotesi in questione, che verranno rilassate in futuro, si può dire:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_L(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = y_R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_L(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = x_R(t)$$

Approfondendo il limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (g_y * u)(t) + Du(t) = y_R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (g_x * u)(t) = x_R(t)$$

Oltre che l'asintotica stabilità, **affinché esista la risposta a regime permanente, deve essere valida questa uguaglianza**; quindi:

- Deve esistere ed essere finito l'integrale di convoluzione (per stato ed ingresso);
- Deve esistere ed essere finito il limite della convoluzione (per stato ed ingresso).

Se l'ingresso è assolutamente continuo, poiché le risposte impulsive nell'uscita e nello stato sono combinazioni lineari dei modi naturali del sistema, tali ipotesi non sono difficili da verificare nella pratica.

Nel caso in cui la risposta a regime permanente esista, è possibile effettuare un'ulteriore suddivisione di stato ed ingresso in:

$$\begin{cases} x(t) = x_L(t) + x_F(t) = x_L(t) + x_T(t) + x_R(t) \\ y(t) = y_L(t) + y_F(t) = y_L(t) + y_T(t) + y_R(t) \end{cases}$$

Indicando con $x_T(t)$ e $y_T(t)$ le **risposte in transitorio**, ossia la componente della risposta forzata che dopo un certo periodo di tempo (t_a) in un sistema LTI asintoticamente stabile va a zero per lasciare spazio alle risposte in regime permanente. Per definizione, il **transitorio non presenta la stessa forma d'onda del segnale di ingresso** (altrimenti sarebbe risposta a regime) ed è proprio il **suo graduale annullamento a permettere allo stato e all'uscita di assumere la forma di regime**; nella stessa parola, **transitorio**, è indicato il **carattere temporaneo e non permanente** che impone alla relativa componente dello stato e dell'uscita di annullarsi dopo un certo periodo di tempo.

Poiché il rapporto ingresso – uscita non cambia al cambiare della rappresentazione di stato e poiché esso determina l'esistenza di una risposta a regime permanente, allora l'esistenza di quest'ultima non sarà discriminata da alcuna rappresentazione di stato equivalente. Riprendendo la scomposizione del sistema in forma canonica, il sistema sarà asintoticamente stabile se lo sono tutte e quattro le parti di cui è composto; tuttavia, l'uscita è condizionata solo dalle parti raggiungibile e osservabile e non raggiungibile e osservabile, il che permette di rilassare la condizione di esistenza della risposta a regime permanente alla sola asintotica stabilità delle parti appena menzionate. Nel caso in cui il sistema parta da condizioni iniziali nulle, l'uscita libera sarà identicamente nulla, quella forzata dipenderà solo dalla parte raggiungibile e osservabile e la condizione di asintotica stabilità potrà essere ristretta solo a tale parte. Infine, se il sistema è in forma minima (quindi se esiste solo la parte raggiungibile e osservabile) la condizione di asintotica stabilità del sistema resta.

Per quanto riguarda lo stato, il sistema LTI ammette una risposta a regime permanente se il sistema è asintoticamente stabile (non è possibile rilassare questa condizione) e se il sistema ha un ingresso tale che il seguente integrale esiste ed è finito:

$$\int_0^{t-t_0} H(\zeta)u(t-\zeta)d\zeta : H(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}B = g_x(t-t_0)$$

Sotto queste ipotesi, è possibile scrivere:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_F(t) = x_R(t) \wedge x_T(t) = x_F(t) - x_R(t)$$

ANALISI DEI SISTEMI LTI NEL DOMINIO DI LAPLACE

Si consideri un **sistema LTI con condizione iniziale $x(0) = x_0$** :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Trasformando ogni termine secondo Laplace e usando la nomenclatura seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = X(s) \in \mathbb{C}^n$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = U(s) \in \mathbb{C}^m$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = Y(s) \in \mathbb{C}^p$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)](s) = sX(s) - x_0 \in \mathbb{C}^n$$

Il sistema LTI prende le seguenti sembianze:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Si noti la completa **sparizione delle componenti differenziale e integrale**, è tutto algebrico.
Raccogliendo per $X(s)$ alla prima equazione:

$$sX(s) - AX(s) = x_0 + BU(s)$$

$$(sI_n - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

Supponendo la matrice $(sI_n - A)$ invertibile:

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0 + (sI_n - A)^{-1}BU(s)$$

Ed è la **rappresentazione nel dominio di Laplace della risposta libera e forzata**, esistenti poiché **la trasformazione di Laplace conserva la linearità**. In maniera del tutto analoga **per la trasformazione di uscita**:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI_n - A)^{-1}x_0 + C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= C(sI_n - A)^{-1}x_0 + [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s) \end{aligned}$$

Il primo termine è la risposta libera e il secondo la risposta forzata nell'uscita nel dominio di Laplace. Riassumendo:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + (g_x * u)(t) \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + (g_y * u)(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0 + (sI_n - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0 + [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

Osservando con più attenzione la dualità tra le varie risposte nel dominio del tempo e nel dominio di Laplace:

- $x_L(t) = e^{At}x_0 \xleftrightarrow{LT} X_L(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0$

Da cui:

$$(sI_n - A)^{-1}x_0 = \mathcal{L}[e^{At}x_0](s) = \mathcal{L}[e^{At}](s)x_0$$

Quindi:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI_n - A)^{-1}$$

Che è un **modo semplificato per determinare l'esponenziale di una matrice**.

- $x_F(t) = (g_x * u)(t) \xleftrightarrow{LT} X_F(s) = (sI_n - A)^{-1}BU(s)$

Da cui:

$$(sI_n - A)^{-1}BU(s) = \mathcal{L}[(g_x * u)(t)](s) = \mathcal{L}[g_x(t)](s) \cdot U(s)$$

Quindi:

$$\mathcal{L}[g_x(t)](s) = (sI_n - A)^{-1}B$$

Si evidenzia anche in questo caso il “nuovo” modo di calcolare l’esponenziale di una matrice:

$$g_x(t) = e^{At}B \xleftrightarrow{LT} (sI_n - A)^{-1}B \Rightarrow e^{At} \xleftrightarrow{LT} (sI_n - A)^{-1}$$

La matrice $(sI_n - A)^{-1}B$ è detta **matrice delle risposte impulsive**:

$$H(s) = (sI_n - A)^{-1}B$$

- $y_F(t) = (g_y * u)(t) \xleftrightarrow{LT} Y_F(s) = [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s)$

Da cui:

$$[C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s) = \mathcal{L}[(g_y * u)(t)](s) = \mathcal{L}[g_y(t)](s) \cdot U(s)$$

Quindi:

$$[C(sI_n - A)^{-1}B + D] = \mathcal{L}[g_y(t)](s)$$

Tale matrice è detta **funzione di trasferimento** e può essere vista anche come **la trasformata di Laplace della risposta impulsiva nell’uscita**:

$$G(s) = \mathcal{L}[g_y(t)](s)$$

$$g_y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t)$$

In precedenza, è stato mostrato come la **risposta impulsiva nell’uscita $g_y(t)$ sia un effettivo modello i – u del sistema**; di conseguenza, date le relazioni qui sopra mostrate, **si può affermare lo stesso per la funzione di trasferimento**. Sfruttando la convoluzione che determina la risposta forzata nell’uscita, **la funzione di trasferimento può essere alternativamente definita**:

$$Y_F(s) = G(s)U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y_F(s)}{U(s)}$$

Quindi, **in un sistema SISO, è il rapporto costante tra la trasformata dell’uscita e la trasformata dell’ingresso secondo Laplace**. Infatti, $Y(s), U(s), G(s) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$; nel caso in cui il sistema non fosse SISO:

$$Y_F(s) = G(s)U(s) \Rightarrow G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

Poiché $Y(s) \in \mathbb{C}^{p \times 1}$ e $U(s) \in \mathbb{C}^{m \times 1}$. La matrice delle risposte impulsive $H(s)$ gioca lo stesso ruolo della funzione di trasferimento ma tra stato e ingresso.

Investigando meglio la **funzione di trasferimento per un dato sistema**:

- **Sistema statico**

$$y(t) = Du(t)$$

Quindi:

$$G(s) = D$$

- **Sistema proprio**

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = C \frac{(sI_n - A)^*}{\det(sI_n - A)} B + D$$

Dove $(sI_n - A)^*$ è il complemento algebrico della matrice $(sI_n - A)$ e $\det(sI_n - A)$ il suo polinomio caratteristico. Scrivendo il rapporto e la somma in una forma più compatta:

$$P(s) = C(sI_n - A)^*B \Rightarrow G(s) = \frac{P(s)}{\det(sI_n - A)} + D = \frac{P(s) + D \det(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Si deduce che **la funzione di trasferimento è una funzione razionale fratta**; il grado del denominatore è al più n e i suoi poli sono al più gli autovalori della matrice A , mentre il grado del numeratore è al più $n - 1$ se il sistema è strettamente proprio ($D = 0$, il grado è determinato per costruzione dal complemento algebrico) ma pari al grado del denominatore se il sistema è proprio ($D \neq 0$, il grado è determinato dal determinante della matrice al numeratore). Quindi, nella sua forma più generale:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_k s^k + \beta_{k-1} s^{k-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Con:

$$k \leq n : \begin{cases} k < n \Leftrightarrow D = 0 \\ k = n \Leftrightarrow D \neq 0 \end{cases}$$

Si definisce grado relativo del sistema la differenza tra il grado del polinomio $D(s)$ e il grado del polinomio $N(s)$; ovviamente, quando il grado relativo del sistema è minore di zero, il sistema è **improprio** e non è trattato in questa sede (si parlerebbe di sistemi anticausalì e, quindi, non fisicamente realizzabili). Le **radici di $N(s)$ sono gli zeri del sistema**, mentre le **radici di $D(s)$ sono i poli del sistema**; i poli di $G(s)$ corrispondono a tutti gli autovalori di A solo se il sistema è in **forma minima**, altrimenti $N(s)$ e $D(s)$ non sarebbero primi tra loro e le radici in comune si cancellerebbero, diminuendo il numero di poli del rapporto. Gli **autovalori di A che non sono poli del sistema** corrispondono agli **autovalori delle parti nascoste del sistema**, che in **forma minima non esisterebbero**.

ENUNCIATO TEOREMA DEI POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Ipotesi:

∀ sistema LTI

Tesi:

I poli della funzione di trasferimento coincidono con gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema.

A partire dalla forma $i - u$ del sistema, è possibile ottenere facilmente la funzione di trasferimento. Il modello $i - u$ è descritto da un'equazione del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}y(t) + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + \alpha_1\frac{d}{dt}y(t) + \alpha_0y(t) \\ = \beta_m\frac{d^m}{dt^m}u(t) + \beta_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + \beta_1\frac{d}{dt}u(t) + \beta_0u(t) \end{aligned}$$

Con $m \leq n$. Assumendo, per semplicità,

$$y(0) = 0 \wedge u(0) = 0$$

$$\frac{d^i}{dt^i}y(0) = 0 \forall i = 1 \dots n \wedge \frac{d^j}{dt^j}u(0) = 0 \forall j = 1 \dots m$$

Si applichi la trasformata di Laplace ad entrambi i membri di questa particolare equazione differenziale:

$$\begin{aligned} s^nY(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + \alpha_1sY(s) + \alpha_0Y(s) \\ = \beta_ms^mU(s) + \beta_{m-1}s^{m-1}U(s) + \cdots + \beta_1sU(s) + \beta_0U(s) \end{aligned}$$

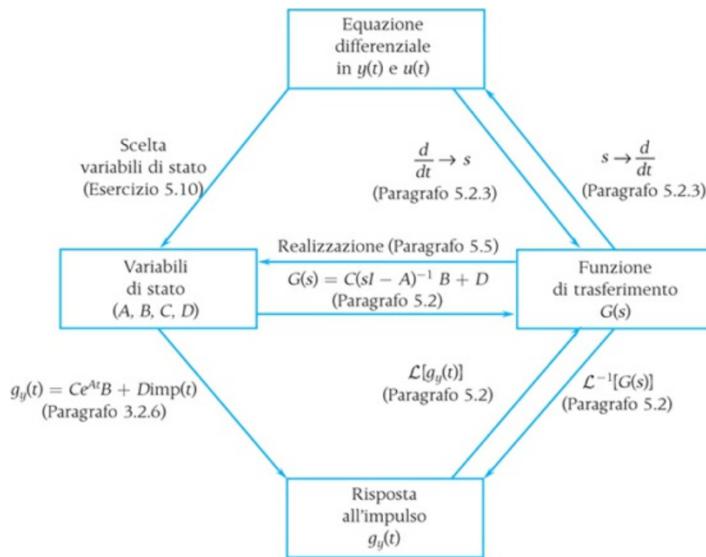
Mettendo in evidenza:

$$\begin{aligned} Y(s)(s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0) &= U(s)(\beta_ms^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) &= \frac{\beta_ms^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} \end{aligned}$$

Che, per definizione, è la funzione di trasferimento; si noti anche che il grado del numeratore è minore di quello del denominatore per ipotesi.

RAPPRESENTAZIONI POSSIBILI DI UN SISTEMA LTI

Quello riportato qui di seguito è lo schema più completo che elenca tutte le possibili rappresentazioni di un sistema LTI e i modi con cui è possibile passare da una rappresentazione ed un'altra:



Si faccia una primissima distinzione: **la rappresentazione sotto forma di variabile di stato è detta rappresentazione interna**, mentre tutte le altre sono rappresentazioni esterne; infatti, ad eccezione della rappresentazione a variabili di stato scelte, nessuna rappresentazione coinvolge lo stato del sistema nel legame ingresso – uscita.

Tra tutti i metodi per passare da una rappresentazione ad un'altra, quello finora non approfondito è il metodo di **realizzazione**, con il quale è possibile **passare dalla rappresentazione in funzione di trasferimento alla rappresentazione in variabili di stato**. In precedenza, è stato detto che, sebbene le rappresentazioni ingresso – uscita fossero univoche per uno stesso sistema, quelle ingresso – stato – uscita fossero infinite; di conseguenza, appare chiaro come **il passaggio da una forma i – u (quale la funzione di trasferimento) ad una forma i – s – u possa avvenire solo tenendo in considerazione una sola delle infinite possibili forme**. In generale, affrontando il processo di realizzazione, in questa sede verranno prese in considerazioni solo due possibili rappresentazioni, quelle in cui le matrici A e B assumono una particolare forma.

Supponendo il sistema SISO, si consideri la forma fratta della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Può accadere che:

- $m > n$, il sistema è improprio e non è argomento della trattazione;
- $m < n$, non andranno fatte trasformazioni;
- $m = n$, andrà posta la frazione in questione come rapporto di due polinomi il cui grado al numeratore è minore di quello al denominatore.

In quest'ultimo caso, la funzione di trasferimento va messa nella forma seguente

$$G(s) = \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \hat{\beta}_{n-2} s^{n-2} + \dots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \beta_n$$

Sapendo che:

$$\hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \beta_n \quad \forall i = 1 \dots n-1$$

A questo punto, si definiscano le due particolari forme $i - s - u$ menzionate precedentemente:

- **Forma canonica di raggiungibilità**, ovvero quella forma per cui la coppia di matrici (A, B) è sempre raggiungibile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$C = [\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \dots \quad \hat{\beta}_{n-1}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$D = \beta_n \in \mathbb{R}$$

- **Forma canonica di osservabilità**, ovvero quella forma per cui la coppia di matrici (A, C) è sempre osservabile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$D = \beta_n \in \mathbb{R}$$

Si noti che **ognuna delle matrici di una delle due forme canoniche in questione è la trasposta dell'omonima dell'altra forma.**

Nel passare da una rappresentazione ad un'altra di uno stesso sistema LTI, **bisogna fare attenzione alla frontiera tra rappresentazioni esterne ed interne**; infatti, se **passare da una rappresentazione esterna ad una interna non costituisce un problema** perché non si perdono ma si aggiungono informazioni (lo stato, scelto arbitrariamente), **fare il viceversa porta inevitabilmente alla perdita di qualcosa**, visto che **i modelli $i - s - u$ lasciano indietro le informazioni sullo stato** che sono, invece, presenti nei modelli $i - s - u$.

RAPPRESENTAZIONI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Per sistemi LTI a tempo continuo, si ricapitolino le evoluzioni dello stato e dell'uscita nel dominio del tempo e di Laplace:

$$\begin{aligned}x_L(t) &= e^{At}x_0 \rightarrow X_L(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0 \\x_F(t) &= (g_x * u)(t) \rightarrow X_F(s) = (sI_n - A)^{-1}BU(s) \\y_L(t) &= Ce^{At}x_0 \rightarrow Y_L(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0 \\y_F(t) &= (g_y * u)(t) \rightarrow Y_F(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s)\end{aligned}$$

Si vogliono **identificare le varie forme con cui è possibile rappresentare la funzione di trasferimento**, al fine di poter disporre della migliore all'occorrenza; tenendo ovviamente conto che **tra una rappresentazione ed un'altra non cambia il contenuto informativo**. Quella già proposta è la rappresentazione polinomiale (`t f (num, den)` in MATLAB):

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Considerando $\alpha_n = 1$ affinché risulti più comoda la trasformazione della rappresentazione del sistema in forma $i - s - u$. In alternativa, **è possibile raccogliere tutte le radici del numeratore e del denominatore e rappresentare il loro rapporto come delle produttorie**:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Questa rappresentazione è detta **rappresentazione per poli/zeri** (`zpk` in MATLAB). $z_i \neq 0$ e $p_i \neq 0$ sono, rispettivamente, gli zeri e i poli reali cambiati di segno e le produttorie il cui termine generico è un monomio rappresentano quelle ad essi associate, mentre il termine s^g è un modo con cui raccogliere i poli e le radici in 0; infatti, se nella produttoria monomia al denominatore ci fossero k radici in 0 e in quella al denominatore h radici in 0 (ovvero se la funzione di trasferimento avesse k zeri e h poli in 0), allora al numeratore comparirebbe s^k e al denominatore s^h , per cui:

$$\frac{s^k}{s^h} = s^g$$

Sulla base del segno di g , detto tipo del sistema, è possibile dire che:

- $g > 0$, la funzione di trasferimento ha g poli in 0;
- $g < 0$, la funzione di trasferimento ha g zeri in 0;
- $g = 0$, la funzione di trasferimento non ha né poli né zeri in 0.

In definitiva, g rappresenta l'eccesso di radici in 0 della funzione di trasferimento, mentre ρ è una costante di trasferimento.

Per quanto riguarda le due produttorie rimanenti, si può dire che esse vadano ad evidenziare le coppie di poli e di zeri complessi coniugati della funzione di trasferimento, indicando con $\alpha_{ni} > 0$ e $\omega_{ni} > 0$ le relative pulsazioni naturali e $|\zeta_i| < 1$ e $|\xi_i| < 1$ i relativi smorzamenti.

L'ultimo tipo di rappresentazione presa in considerazione per la funzione di trasferimento di un sistema è la **rappresentazione ingegneristica** (o di Bode), ottenuta a partire dalla forma **polinomiale e in cui nelle produttorie è stato messo in evidenza affinché il termine noto sia unitario**:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i s}{\alpha_{ni}^2} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i s}{\omega_{ni}^2} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Dove μ è detto **guadagno** e si ottiene:

$$\mu = \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2}$$

Si può invertire il rapporto e dire che:

$$\rho = \frac{\mu \prod_i \tau_i \prod_i \omega_{ni}^2}{\prod_i T_i \prod_i \alpha_{ni}^2}$$

Invece, $T_i \neq 0$ e $\tau_i \neq 0$ sono dette costanti di tempo e sono definite:

$$\tau_i = \frac{1}{z_i} \wedge T_i = \frac{1}{p_i}$$

Ci si chiede il perché è definito μ come **guadagno**; considerando un **sistema LTI SISO asintoticamente stabile tale che $g \leq 0$, $T_i > 0$ e $\xi_i > 0$** , si distingue il caso per cui:

- $g = 0$

Considerando come ingresso:

$$u(t) = \bar{u} \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$$

Allora l'**uscita andrà a tendere ad un valore di regime**, determinato con il teorema del valor finale:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(C(sI_n - A)^{-1}B + D) \frac{\bar{u}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (C(sI_n - A)^{-1}B + D)\bar{u} \\ &= (-CA^{-1}B + D)\bar{u} = G(0)\bar{u} \end{aligned}$$

Ci si ritrova il **guadagno statico del sistema**:

$$\mu = G(0) = -CA^{-1}B + D = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

- $g > 0$

Si può definire un **guadagno generalizzato**:

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

Che corrisponde al **guadagno statico se gli zeri/poli in zero non ci fossero.**

La particolarità di questo caso risiede nel fatto che **il sistema presenta più poli che zeri in zero**; ciò significa che **esistono autovalori nulli e che il sistema non è asintoticamente stabile**. In un sistema di questo tipo, **non esiste una risposta a regime e non è possibile definire un guadagno statico da cui ricavare μ** .

Si può osservare come **un sistema la cui funzione di trasferimento è configurata come da ipotesi si comporti da integratore ideale**. Si consideri il caso più semplice:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Risolvendo il problema della realizzazione con $n = 1$, si ottiene la seguente possibile soluzione:

$$A = 0, B = C = 1, D = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Da cui si evince che **l'uscita è l'integrale dell'ingresso**.

- **$g < 0$**

In questo caso **si hanno degli zeri nell'origine e il sistema può essere asintoticamente stabile**; nelle ipotesi per cui lo fosse, si verifica (tramite il teorema del valore finale) che **l'uscita di regime è nulla a fronte di un ingresso pari ad un gradino di qualunque ampiezza ($u(t)$ precedentemente descritto)**; quindi, **il guadagno μ non è nullo ed è indipendente dal guadagno statico**, il quale, invece, è nullo.

Sulla base di quanto detto, **il sistema svolge un'azione derivativa sull'ingresso**; infatti, la funzione di trasferimento di un derivatore ideale è:

$$G(s) = s$$

Osservando che è comparabile con la forma $G(s) \propto 1/s^g$ in esame. Un sistema di questo tipo, però, **non è fisicamente realizzabile** (è un sistema improprio).

Soffermandosi sulle **costanti di tempo**, già avendo detto che sono definite come i reciproci dell'inverso dei poli/zeri, **si distinguono due casi**:

- **Poli reali a molteplicità algebrica unitaria**

Si può verificare che l'antitrasformata è una combinazione lineare dei modi:

$$e^{-p_i t} = e^{-\frac{t}{T_i}}$$

Quindi, se il sistema è asintoticamente stabile, tali modi si esauriscono (in un transitorio) tanto più velocemente quanto maggiore è il valore assoluto del polo (ovvero quanto più il polo è lontano dall'origine dall'asse immaginario nel piano complesso), che è negativo.

- **Poli reali a molteplicità algebrica non unitaria**

Si può verificare che l'antitrasformata è una combinazione lineare dei modi:

$$t^j e^{-p_i t} = t^j e^{-\frac{t}{T_i}} \forall j = 0, 1 \dots \mu_i - 1$$

Pertanto, si può concludere che le costanti di tempo (sia esse relative ai poli o agli zeri della funzione di trasferimento) rappresentano la velocità con cui il relativo modo naturale va a zero durante il transitorio.

Per quanto riguarda **smorzamento e pulsazione naturale**, si ricordi che sono stati introdotti parlando di coppie di poli complessi coniugati:

$$p_i = a_i \pm i b_i$$

Provenienti dall'equazione:

$$s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2 = 0$$

Per cui risulta:

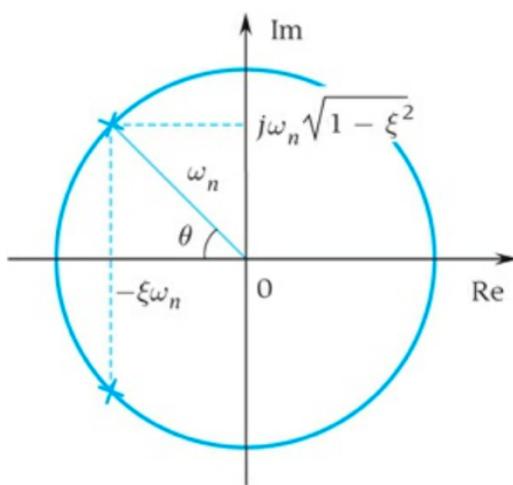
$$a_i = -\xi_i \omega_{ni} \wedge b_i = \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

Quindi:

$$\omega_{ni} = |p_i| \wedge \xi_i = -\cos(\arg(p_i))$$

Da ciò derivano le due ipotesi su questi due parametri:

$$\omega_{ni} > 0 \wedge |\xi_i| < 1$$



Quindi:

- $\xi_i = 0$, si hanno **poli immaginari puri** $\pm i\omega_{ni}$
- $\xi_i > 0$, si hanno **poli complessi coniugati a parte reale negativa**;
- $\xi_i < 0$, si hanno **poli complessi coniugati a parte reale positiva**;

- $\xi_i = 1$, si hanno **poli reali coincidenti in $-\omega_{ni}$** ;
- $\xi_i = -1$, si hanno **poli reali coincidenti in ω_{ni}** .

In definitiva, **si può vedere la pulsazione naturale ω_{ni} come la distanza del polo dall'origine degli assi e lo smorzamento ξ_i l'orientamento del polo rispetto all'origine degli assi**, nel piano di Gauss.

Se il sistema dispone solo di una coppia di poli complessi coniugati, con $\mu = 1$ e condizioni iniziali nulle, allora la risposta all'impulso (mediante procedura di antitrasformazione) è pari a:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \wedge U(s) = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2})$$

Si può così intuire anche perché **ω_n è chiamata pulsazione naturale**; infatti, **in corrispondenza di smorzamenti nulli, è la pulsazione a cui varia la risposta all'impulso**.

Nella forma più generale, **la risposta all'impulso si compone di una parte sinusoidale**, la cui pulsazione è data dalla parte immaginaria dei poli, e **di una parte esponenziale**, regolata dalla parte reale dei poli; **se poi il sistema fosse asintoticamente stabile, $y(t)$ andrebbe a zero tanto più velocemente quanto più sarebbe grande il modulo della parte reale dei poli**.

LA RISPOSTA ALLO SCALINO PER LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Di seguito verranno analizzate le **risposte qualitative dei sistemi sottoposti ad un ingresso a gradino**, a partire dalla conoscenza della relativa funzione di trasferimento; da questo tipo di studio sarà possibile **capire l'andamento nel tempo della risposta allo scalino solamente guardando alcuni parametri della funzione di trasferimento**. Lo studio del comportamento del sistema al passaggio fra diverse condizioni di equilibrio a seguito di una brusca variazione del valore di ingresso e la deduzione della funzione di trasferimento (e quindi di una rappresentazione) **del sistema a partire solo dall'osservazione della relativa risposta allo scalino** (supposta misurabile) sono i due principali motivi per cui è data una tale importanza alla **risposta allo scalino**. Un'ultima premessa, prima di procedere alla trattazione: **i sistemi considerati sono sempre sistemi asintoticamente stabili**.

Per **scalino** si intende un **segnale del tipo**:

$$u(t) = \bar{u}\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \bar{u} & \Leftrightarrow t > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

A partire dalla **forma polinomiale della fdt** ed usando il **teorema del valore iniziale**, si può determinare il **valore iniziale della risposta** (si parla sempre di risposta forzata, visto che quella libera si esaurisce nel transitorio):

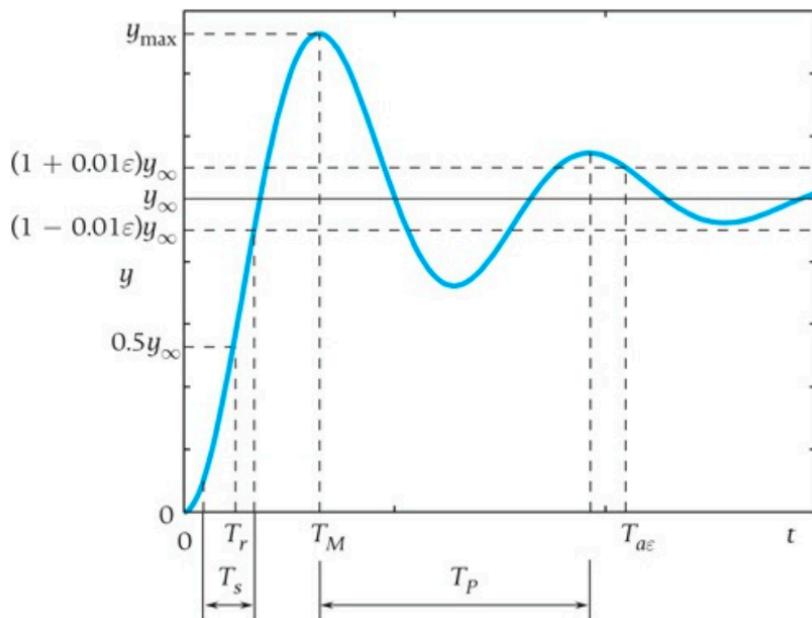
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} : m \leq n \wedge a_n, \beta_m \neq 0 \Rightarrow y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) \frac{1}{s} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow m < n \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & \Leftrightarrow m = n \end{cases} \end{aligned}$$

Nel primo caso **il sistema è strettamente proprio, nel secondo è proprio**. Se vale il primo risultato, è possibile generalizzare anche per il valore iniziale delle derivate della risposta allo scalino:

$$\dot{y}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \left(sG(s) \frac{1}{s} - y(0) \right) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow m < n - 1 \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & \Leftrightarrow m = n - 1 \end{cases}$$

Dunque, sono nulle in $t = 0$ tutte le prime $n - m - 1$ derivate della risposta allo scalino quando il grado relativo della fdt è più grande di 1 (la derivata $n - m - 1$ -esima è la prima diversa da zero in $t = 0$). La discussione sul valore finale è già stata portata avanti quando sono state approfondite le varie rappresentazioni della fdt.

Nello studio della risposta allo scalino sono fondamentali i seguenti parametri, illustrati graficamente nella figura:



- $\bar{y} = y_\infty$, **valore di regime**;
- y_{max} , **valore massimo**;
- $s\% = 100 \cdot (y_{max} - \bar{y})/\bar{y}$, **sovraelongazione massima percentuale** (parametro molto importante nel dimensionamento di un sistema, descrivendo la percentuale massima di eccesso rispetto al valore di regime);
- T_M , **tempo di massima sovraelongazione** (primo istante per cui $y(T_M) = y_{max}$);
- T_s , **tempo di salita** (intervallo di tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10 al 90 percento del valore di regime);
- T_r , **tempo di ritardo** (necessario affinché l'uscita raggiunga per la prima volta $0.5y_\infty$);
- $T_{a\epsilon}$, **tempo di assestamento** (necessario affinché la distanza tra $y(t)$ e \bar{y} rimanga definitivamente al di sotto di $s\%$ con un margine di ϵ punti percentuali);
- T_P , **periodo dell'oscillazione** (intervallo di tempo fra i primi due massimi dell'uscita).

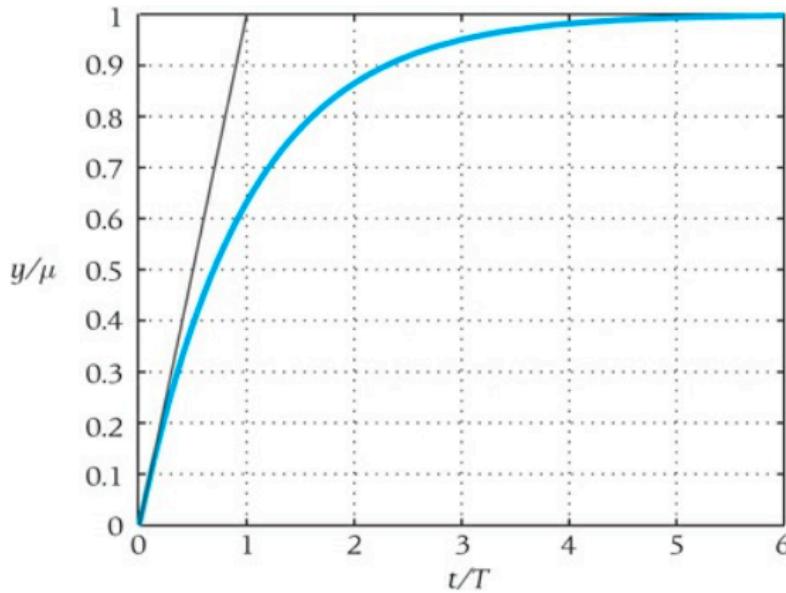
Per lo studio della risposta allo scalino nei singoli sistemi, si sviluppi la seguente distinzione:

- **Sistemi del primo ordine**

L'espressione analitica di un sistema del primo ordine nel dominio di Laplace è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \forall t \geq 0$$

Che, graficamente, corrisponde a:



Studiandone la derivata:

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow \dot{y}(0) = \frac{\mu}{T}$$

Infatti, il grado relativo del sistema è 1 e la derivata prima in zero può che non essere nulla. La tangente alla risposta al gradino per sistemi asintoticamente stabili di questo tipo raggiunge il valore di regime in un tempo T . Il valore di regime stesso è $\bar{y} = \mu$, mentre il tempo di assestamento è:

$$(1 - 0.01\varepsilon)\mu = \mu \left(1 - e^{-\frac{T_{a\varepsilon}}{T}}\right) \Rightarrow T_{a\varepsilon} = T \cdot \ln \frac{1}{0.01\varepsilon} = -T \cdot \ln(0.01\varepsilon)$$

Per quanto riguarda la sovraelongazione, si può notare che $y_{max} = \bar{y}$ e che quindi $s\% = 0$. I parametri caratteristici, invece, sono:

$$T_s \approx 2.2T$$

$$T_r \approx 0.7T$$

$$T_{a5} \approx 3T$$

$$T_{a1} \approx 4.6T$$

- **Sistemi del secondo ordine**

Si tenga in considerazione che il salto di complessità dalla risposta al gradino per sistemi del primo ordine a quella per sistemi del secondo ordine è particolarmente elevato; di conseguenza, sono necessari altri gradi di distinzione che permettono di approfondire con la stessa specificità questo tipo di sistemi:

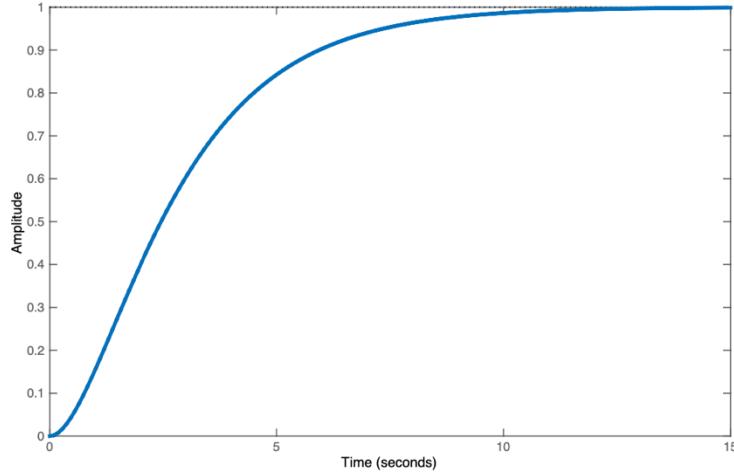
- **Poli reali distinti**

L'espressione analitica per questo tipo di sistemi è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \cdot \frac{1}{s} : T_1 > T_2 > 0$$

Per cui:

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \forall t \geq 0$$



Si noti che, essendo il grado relativo del sistema 2, la tangente all'origine è nulla (si potrebbe dimostrare che la derivata seconda, invece, non lo è). Osservando le caratteristiche di questa risposta, si noti che:

$$\bar{y} = \mu$$

$$y_{max} = \bar{y}$$

Quindi la sovraelongazione del sistema è nulla. Nel caso in cui una costante di tempo risulti molto più lenta dell'altra (ovvero se $T_1 \gg T_2$, ad esempio) si avrebbe:

$$y(t) \approx \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \forall t \geq 0$$

Ossia, dopo circa 4 o 5 costanti di tempo, la prima domina la seconda e la dinamica assomiglia a quella di un sistema del primo ordine.

- **Pol reali coincidenti**

L'espressione analitica per questo tipo di sistemi è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

Per cui:

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right), \forall t \geq 0$$

Ma l'andamento non si discosta molto dal caso precedente (supponendo le costanti di tempo abbastanza vicine tra loro), essendo $T_2 = T_1 = T$; in maniera del tutto analoga, infatti:

$$\bar{y} = \mu$$

$$y_{max} = \bar{y}$$

Quindi la sovraelongazione del sistema è nulla. Per quanto riguarda i parametri caratteristici, invece:

$$T_s \approx 3.36T$$

$$T_r \approx 1.68T$$

$$T_{a5} \approx 4.74T$$

$$T_{a1} \approx 6.64T$$

- **Poli reali con uno zero**

L'espressione analitica per questo tipo di sistemi è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \cdot \frac{1}{s} : T_1 \neq \tau \neq T_2$$

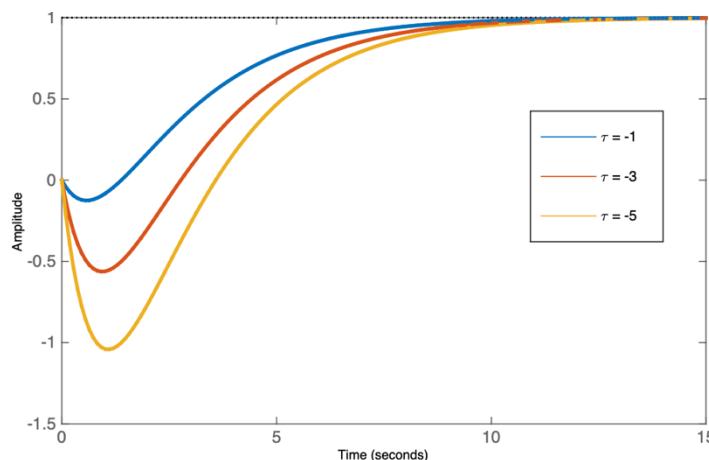
Per cui:

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \forall t \geq 0$$

I parametri caratteristici, per sistemi asintoticamente stabili di questo tipo, **non risultano di facile derivazione**, sebbene possano essere distinti gli effetti qualitativi della presenza dello zero in base alla posizione reciproca rispetto ai poli:

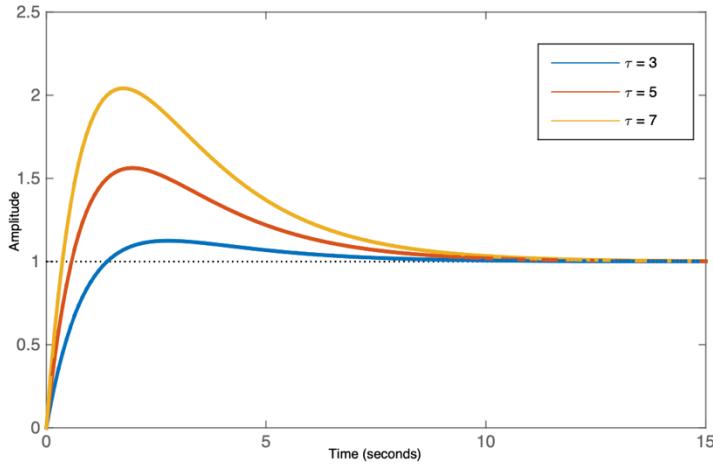
- **Zero reale positivo ($\tau < 0$)**

In questo caso si parla di risposta inversa, perché l'andamento qualitativo della risposta presenta una sottoelongazione (tanto più pronunciata quanto più piccolo è lo zero in modulo, ossia quanto più si avvicina all'asse immaginario del piano complesso):



- **Zero reale negativo prossimo all'asse immaginario ($\tau > T_1 > T_2 > 0$)**

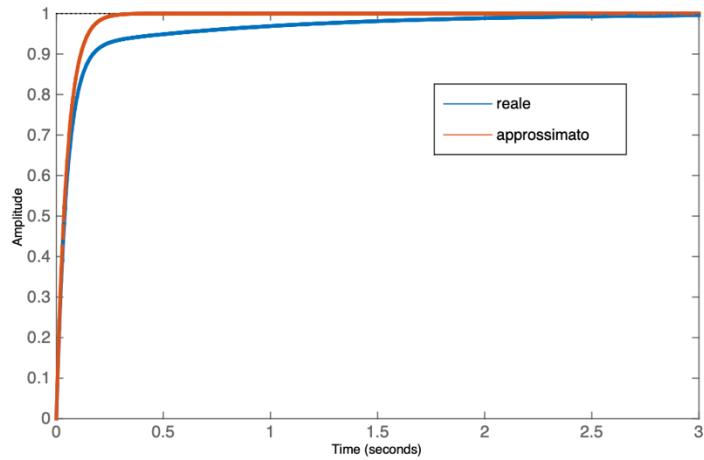
La risposta presenta una sovraelongazione tanto più marcata quanto più lo zero negativo è prossimo all'asse immaginario del piano complesso rispetto alla posizione dei poli:



Si faccia attenzione a non confondere un andamento sovraelongato/sottoelongato con uno oscillante.

- **Zero reale negativo (tale che $\tau \approx T_1 \gg T_2 > 0$)**

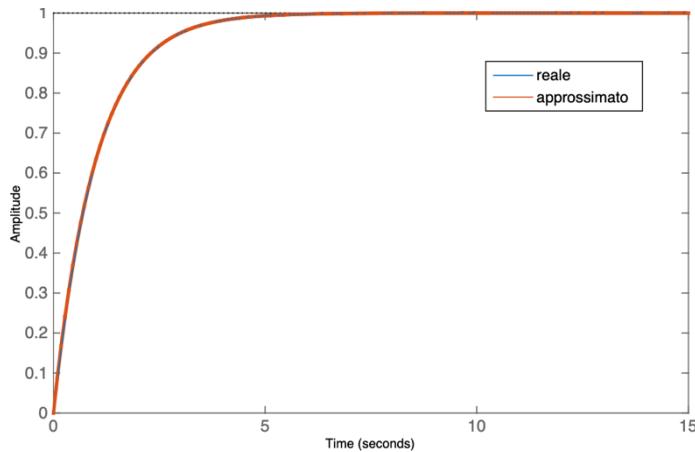
Si può assimilare il sistema ad uno del primo ordine, considerando però un andamento qualitativo diverso perché l'effetto di cancellazione della costante di tempo più lenta non è poi così trascurabile come ci si potrebbe aspettare; il fenomeno presenta una lenta deriva a causa del fatto che il transitorio più lento non è perfettamente compensato:



Infatti, l'andamento reale ha un tempo di assestamento maggiore del corrispondente modello ideale.

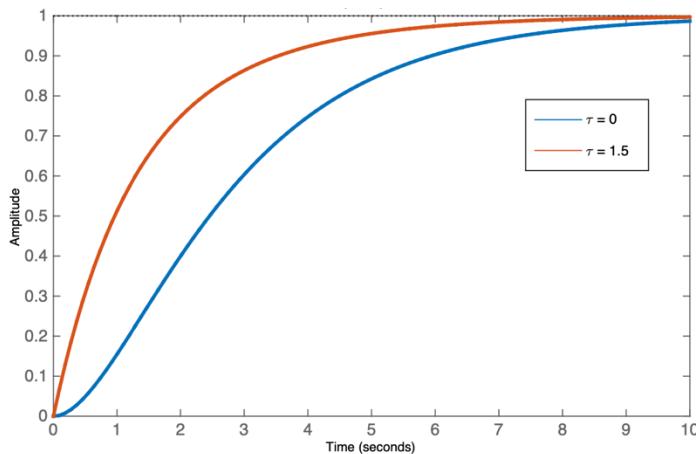
- **Zero reale negativo (tale che $T_1 \gg \tau \approx T_2 > 0$)**

Si può nuovamente assimilare questo sistema ad uno del primo ordine, con una differenza rispetto al caso precedente: l'effetto di lenta deriva non si innesca perché il transitorio trascurato è quello relativo alla costante di tempo più veloce, che fa dissipare prima i suoi effetti; di conseguenza:



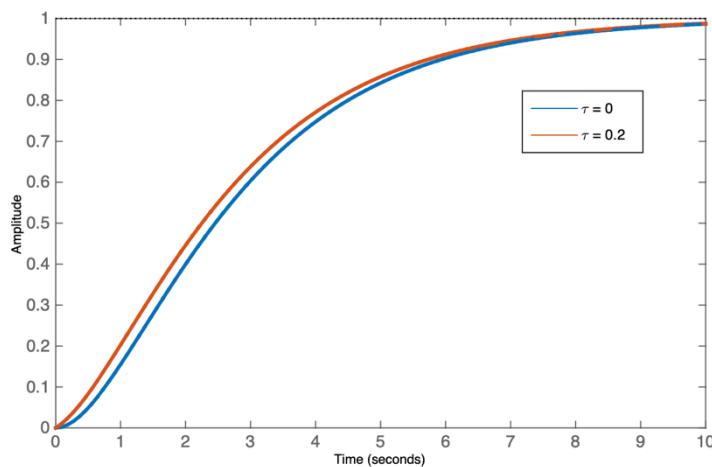
- **Zero reale negativo frapposto tra i poli ($T_1 > \tau > T_2 > 0$)**

Questo tipo di sistema presenta una dinamica simile a quella di un sistema del secondo ordine senza zeri, con la sola differenza che la presenza di uno zero tende a velocizzare la risposta:



- **Zero reale negativo lontano dall'asse immaginario ($T_1 > T_2 > \tau > 0$)**

In questo caso, il sistema tende a comportarsi come se lo zero non ci fosse, ossia seguendo un andamento qualitativo simile a quello di un sistema avente solo una coppia di poli reali negativi e distinti:



- **Poli complessi coniugati**

L'espressione analitica per questo tipo di sistema è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} : \omega_n > 0 \wedge |\xi| < 1$$

Per cui:

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arccos \xi) \right), \forall t \geq 0$$

Si noti che, sebbene si possa ragionevolmente pensare il contrario, il guadagno statico del sistema è sempre μ ; infatti:

$$s = 0 \Rightarrow G(s) = \mu \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \mu$$

Sulla base del valore di ξ può essere discriminata la proprietà di stabilità del sistema:

- $\xi > 0$, il sistema è asintoticamente stabile e $\bar{y} = \mu$;
- $\xi < 0$, il sistema è instabile;
- $\xi = 0$, il sistema è stabile e $y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t))$, $\forall t \geq 0$

In caso di sistemi asintoticamente stabili, derivando rispetto al tempo l'espressione analitica dell'uscita e cercando gli zeri della funzione, si ottengono i punti stazionari della risposta periodica:

$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$y(\bar{t}_k) = \mu \left(1 - (-1)^k e^{-\frac{\xi k \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right)$$

Per k pari si parla di istanti di minimo, mentre per k dispari di istanti di massimo.

I parametri caratteristici di questo tipo di sistema sono:

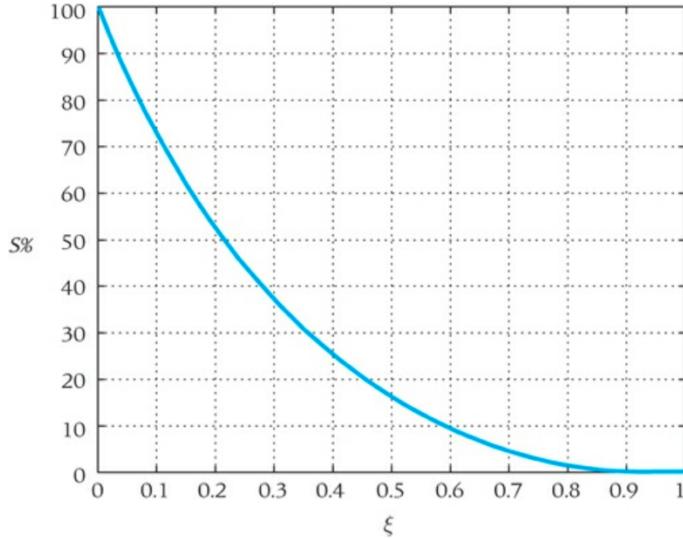
$$y_{max} = \mu \left(1 + e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right)$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$s\% = 100 e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

La sovraelongazione dipende unicamente dallo smorzamento; il suo andamento è, infatti:

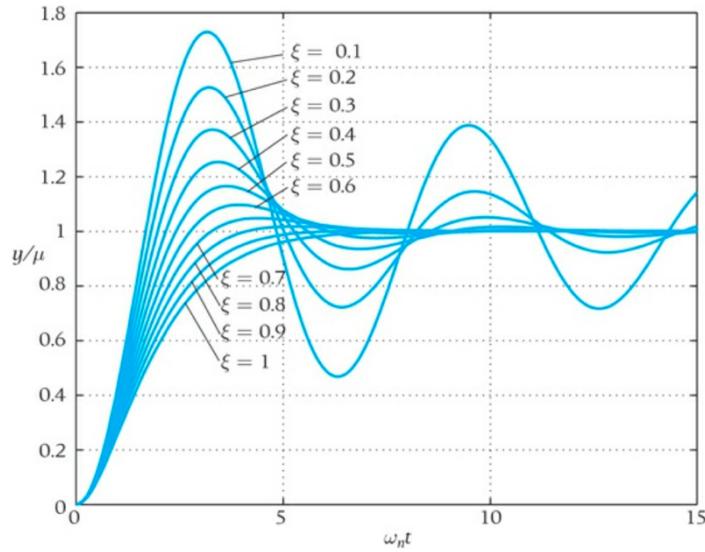


Si noti che i massimi ed i minimi giacciono sulle funzioni (inviluppi):

$$y_M(t) = 1 + e^{-\xi \omega_n t}$$

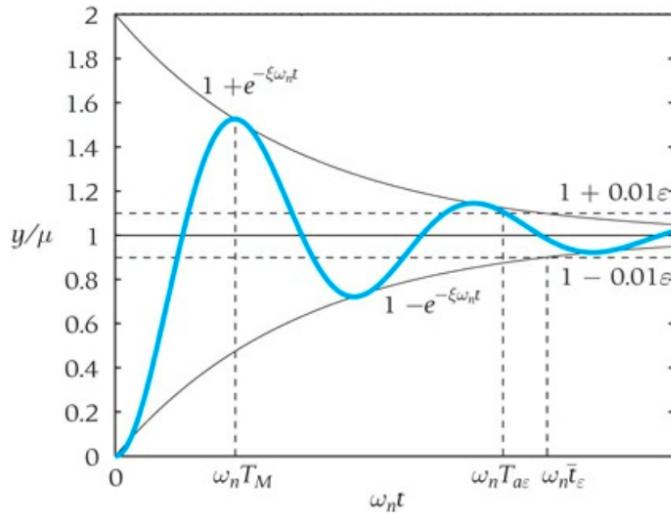
$$y_m(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t}$$

In definitiva, questo sistema presenta un andamento cissoidale:



Al diminuire dello smorzamento aumenta l'ampiezza di oscillazione ma si riduce la fase. Per stimare il tempo di assestamento, si valuta l'istante in cui gli inviluppi dei massimi e dei minimi entrano nella fascia di assestamento desiderata:

$$e^{-\xi \omega_n \bar{t}_\varepsilon} = 0.01 \varepsilon \Rightarrow T_{a\varepsilon} \approx \bar{t}_\varepsilon = -\frac{1}{\xi \omega_n} \ln(0.01 \varepsilon)$$



Si noti come la stima dipende solo dalla parte reale dei poli.

Quanto detto finora non prende in considerazione l'eventualità di un ritardo di tempo nell'ingresso, quantificabile con la fdt:

$$G(s) = e^{-\tau s} G'(s)$$

Indicando con $G'(s)$ la fdt senza il ritardo e τ il valore del ritardo stesso. La risposta allo scalino di questo nuovo sistema è nulla per $t < \tau$; con il teorema del valore iniziale, poi, si è in grado di determinare le condizioni della fdt senza ritardo di tempo, per poi trasstrarle del ritardo previsto. Anche i parametri caratteristici sono gli stessi descritti in precedenza, solo che una volta determinati vanno anch'essi traslati del ritardo opportuno.

Con sistemi di ordine superiore al secondo si raggiunge un livello di complessità e articolazione tale da rendere impossibile anche una semplice analisi qualitativa; per poter deliberare almeno sulle caratteristiche del sistema, è necessario effettuare qualche approssimazione, riconducendo il sistema ad uno del secondo ordine (del quale è possibile studiare la risposta qualitativa).

Ciò è svolto trascurando i poli e gli zeri (a parte reale negativa) lontani dall'asse immaginario; infatti, le relative costanti di tempo sono molto piccole ed i relativi modi naturali tendono ad estinguersi più velocemente degli altri presenti nel sistema. Bisogna, quindi, individuare i poli dominanti del sistema, vicini all'asse immaginario del piano complesso e associati alle costanti di tempo più grandi. Il guadagno, invece, è sempre quello del sistema di partenza.

LA RISPOSTA A REGIME PER LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Sapendo che:

$$u(t) = \bar{u} \delta_{-1}(t) \rightarrow y_R(t) = \mu \bar{u}$$

Ci si chiede quale sia la risposta a regime per segnali di ingresso più complessi, seppur sempre del tipo:

$$u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t) \delta_{-1}(t)$$

$$u(t) = \bar{u} e^{\lambda_0 t} \delta_{-1}(t)$$

...

Considerato un **sistema LTI a tempo continuo** (supponendolo asintoticamente stabile), tale che:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} : x(0) = x_0$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

Si parla di **risposta armonica** quando si studia la **risposta a regime del sistema quando in ingresso vi è posto un segnale del tipo**:

$$u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t) \delta_{-1}(t), \forall \omega_0 \in \mathbb{R}^+$$

Si sa che la **risposta a regime coincide con la risposta forzata dopo un periodo di tempo sufficiente a far esaurire il transitorio**; quindi, per ricercare $y_R(t)$ si parte da:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)](t)$$

Ma:

$$U(s) = \mathcal{L}[\bar{u} \sin(\omega_0 t) \delta_{-1}(t)](s) = \bar{u} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Senza perdita di generalità, **si supponga che tutti gli autovalori del sistema siano reali e distinti**; allora, grazie allo sviluppo di Heaviside:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} : p_i > 0$$

Quindi:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} \cdot \frac{\bar{u} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{A}_i}{s + p_i} + \frac{Q}{s - i\omega_0} + \frac{\bar{Q}}{s + i\omega_0} \right] (t)$$

Con $Q, \bar{Q} \in \mathbb{C}$ residui complessi coniugati. **L'argomento all'antitrasformata è lo sviluppo di Heaviside di $G(s)U(s)$** , il cui primo addendo contiene il residuo relativo ai poli di $G(s)$. Questa operazione può essere linearizzata e semplificata in due addendi principali:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{A}_i}{s + p_i} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{Q}{s - i\omega_0} + \frac{\bar{Q}}{s + i\omega_0} \right] (t) = y_{F1}(t) + y_{F2}(t)$$

Separando le due antitrasformate:

$$y_{F1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{A}_i}{s + p_i} \right] (t) = \sum_{i=1}^n \hat{A}_i e^{-p_i t}$$

Si può ben intuire che **questo primo contributo corrisponde alla risposta in transitorio**, visto che **contiene tutti i modi naturali che andranno man mano ad esaurirsi**. Per quanto riguarda il secondo contributo, essendo relativo a due poli complessi coniugati:

$$y_{F2}(t) = 2|Q|e^{0 \cdot t} \cos(\omega_0 t + \arg Q)$$

Soffermandosi sul residuo, unica incognita rimanente per ottenere la risposta a regime:

$$Q = [(s - i\omega_0)Y_F(s)]|_{s=i\omega_0} = \left[G(s) \cdot \frac{\bar{u}\omega_0}{s + i\omega_0} \right] \Big|_{s=i\omega_0} = G(i\omega_0) \cdot \frac{\bar{u}}{2i}$$

Calcolando modulo e fase:

$$|Q| = |G(i\omega_0)| \cdot \left| \frac{\bar{u}}{2i} \right| = |G(i\omega_0)| \cdot \frac{\bar{u}}{2}$$

$$\arg Q = \arg \left(G(i\omega_0) \cdot \frac{\bar{u}}{2i} \right) = \arg G(i\omega_0) + \arg \frac{\bar{u}}{2i} = \arg G(i\omega_0) - \frac{\pi}{2}$$

Si ha:

$$y_{F2}(t) = \bar{u}|G(i\omega_0)| \cos \left(\omega_0 t + \arg G(i\omega_0) - \frac{\pi}{2} \right) = \bar{u}|G(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg G(i\omega_0))$$

Pertanto:

$$y_F(t) = \sum_{i=1}^n \hat{A}_i e^{-p_i t} + \bar{u}|G(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg G(i\omega_0))$$

Ma **isolando solo la risposta a regime** (visto che il transitorio, primo addendo del risultato, si esaurisce):

$$y_R(t) = \bar{u}|G(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg G(i\omega_0))$$

Si può notare che **se la sinusoide in ingresso è dotata di una certa pulsazione, la risposta a regime conserverà quella stessa pulsazione**. Nella forma più generale possibile, si enuncia il teorema della risposta armonica:

ENUNCIATO TEOREMA DELLA RISPOSTA ARMONICA

Ipotesi:

∀ sistema LTI a tempo continuo, asintoticamente stabile : $G(s)$ è la relativa funzione di trasferimento

∀ segnale di ingresso sinusoidale a pulsazione $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = U \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \delta_{-1}(t)$

Tesi:

La risposta a regime è una sinusoide di pulsazione ω_0 , $y_R(t) = U|G(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi + \arg G(i\omega_0))$

Per la risposta a regime nello stato è possibile dire altrettanto, utilizzando al posto della fdt la funzione di risposta impulsiva $H(s)$:

$$x_R(t) = U|H(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi + \arg H(i\omega_0))$$

Discorrendo unicamente su $y_R(t)$ per semplicità, si vogliono trovare le condizioni per cui:

$$y_R(t) = 0, \forall t$$

Ovvero quando:

$$|G(i\omega_0)| = 0$$

Ma ciò accade solo se **$G(s)$ ha una coppia di zeri immaginari in ω_0** ; questa appena enunciata è un'altra proprietà bloccante degli zeri, detta **risonanza**. Per risonanza si intende la proprietà che occorre quando una coppia di zeri immaginari della funzione di trasferimento corrisponde alla pulsazione del segnale di ingresso al sistema, facendo sì che la risposta a regime nell'uscita non sia definita.

È possibile anche studiare il termine $G(i\omega)$ in funzione della pulsazione del segnale di ingresso ω ; la funzione così delimitata prende il nome di **funzione di risposta armonica**:

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow G(i\omega) \in \mathbb{C}$$

E la si può vedere anche come **la restrizione all'asse immaginario della funzione di trasferimento $G(s)$** , che a sua volta è sempre la trasformata della risposta impulsiva nell'uscita. Lo studio della funzione di risposta armonica non è immediato, essendo una funzione a valori complessi; tuttavia, ogni numero complesso può essere visto come una coppia di numeri reali perché l'intero campo complesso \mathbb{C} è costruito sul piano reale \mathbb{R}^2 . In particolare, le scomposizioni che rendono più agevole lo studio della funzione di risposta armonica sono:

- **Scomposizione in forma algebrica**

Si parte dal presupposto per cui:

$$G(i\omega) = Re(G(i\omega)) + iIm(G(i\omega))$$

Pertanto, le due funzioni reali di cui ci si occupa separatamente sono:

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow Re(G(i\omega)) \in \mathbb{R}$$

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow Im(G(i\omega)) \in \mathbb{R}$$

I cui grafici danno origine ai diagrammi polari.

- **Scomposizione in forma fasoriale**

Si parte dal presupposto per cui:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\arg G(i\omega)}$$

Pertanto, le due funzioni reali di cui ci si occupa separatamente sono:

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow |G(i\omega)| \in \mathbb{R}$$

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \arg G(i\omega) \in \mathbb{R}$$

I cui grafici danno origine ai **diagrammi di Bode**.

Prima di approfondire quest'ultimo tipo di rappresentazione, **si analizzi la risposta a regime per determinate classi notevoli di segnali di ingresso**; in particolare:

- **Segnali dotati di serie o di trasformata di Fourier**

Si consideri un segnale periodico:

$$u(t) = u(t + T_0) : \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Sviluppando il segnale in serie di Fourier:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{in\omega_0 t} : U_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} u(t) e^{-in\omega_0 t} dt \in \mathbb{C}$$

Indicando come spettro di ampiezza e spettro di fase le seguenti successioni numeriche:

$$\{|U_n|\} \wedge \{\arg(U_n)\}$$

Grazie alla sovrapposizione degli effetti, **la risposta a regime più essere vista come la somma delle risposte a regime ad ogni campione n** ; pertanto, per il teorema della risposta armonica (essendo il fasore complesso una coppia di sinusoidi reali):

$$y_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(i\omega_0) U_n e^{in\omega_0 t}$$

Se, invece, il segnale fosse dotato di trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}[u(t)](\omega) = U(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt : u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Con spettri di ampiezza e di fase della trasformata:

$$|U(i\omega)| \wedge \arg U(i\omega)$$

Allora:

$$y_R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(i\omega) U(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- **Segnali esponenziali**

Si consideri il segnale:

$$u(t) = U e^{\lambda_0 t} \delta_{-1}(t)$$

In modo tale che $\lambda_0 \in \mathbb{R}^-$ non coincida con nessun autovalore del sistema e che il suo andamento sia tendenzialmente più lento di quello dei modi naturali del sistema. La risposta a regime è:

$$y_R(t) = UG(\lambda_0)e^{\lambda_0 t}$$

Se λ_0 è uno zero della funzione di trasferimento $G(s)$, allora la risposta a regime non è definita ($y_R(t) = 0$) per la proprietà bloccante degli zeri precedentemente enunciata. Per lo stesso motivo, λ_0 non deve neanche essere un polo di $G(s)$ o un autovalore del sistema.

I DIAGRAMMI DI BODE

Si vuole studiare graficamente la funzione di risposta in frequenza seguente:

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow G(i\omega) \in \mathbb{C}$$

Attraverso le due funzioni reali:

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow |G(i\omega)| \in \mathbb{R}$$

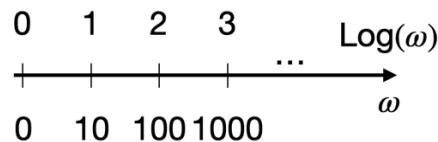
$$\omega \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \arg(G(i\omega)) \in \mathbb{R}$$

Dette, rispettivamente, **diagramma di Bode del modulo** e **diagramma di Bode della fase**. La scala con cui questi grafici sono costruiti è **semi – logaritmica**, cioè è **lineare per le ordinate** (modulo/fase) e **logaritmica per le ascisse** (pulsazioni/frequenze); i motivi di questa scelta sono molteplici:

1. Per $\omega > 1$ si riescono ad osservare grandezze di ordini differenti;
2. Per $\omega \in (0,1]$ si hanno ascisse $\log \omega \in (-\infty, 0]$, con un'espansione delle pulsazioni più piccole dell'unità (di contro, per $\omega \in [1,1000]$ le relative ascisse sono $\log \omega \in [0,3]$, con una contrazione delle pulsazioni più grandi dell'unità);
3. Considerate due pulsazioni ω_1 e ω_2 , usando una scala logaritmica in base 10, la distanza tra le relative ascisse è proporzionale al logaritmo del loro rapporto piuttosto che alla loro differenza.

Scala Lineare	Scala Logaritmica
$\omega_2 - \omega_1$	$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$

Una **scala logaritmica** assume questa forma:



Si definisce **decade** lo spazio che intercorre tra un'unità ed un'altra in **scala logaritmica** e si può ben intuire come in **scala lineare** non corrisponda ad una lunghezza fissa: la decade tra 0 e 1 in

scala logaritmica corrisponde alle pulsazioni da 0 a 10, mentre quella da 2 a 3 corrisponde alle pulsazioni da 100 a 1000. Volendo mappare le pulsazioni corrispondenti alla prima decade:

ω	$\log \omega$	Decade
1	0	0
2	0.3	1/3
3	0.48	1/2
4	0.6	
5	0.7	2/3
6	0.78	
7	0.85	
8	0.9	
9	0.96	
10	1	1

Per ottenere i diagrammi di Bode si parte dalla forma ingegneristica della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)} \cdot \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i s}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

$$G(i\omega) = \frac{\mu}{(i\omega)^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + i\omega\tau_i)}{\prod_i (1 + i\omega T_i)} \cdot \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Si considerino due numeri complessi:

$$c_1, c_2 \in \mathbb{C} : c_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \wedge c_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2} \wedge c_1 c_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

Utilizzando come unità di misura il decibel:

$$|c|_{dB} = 20 \log |c| \Rightarrow |c_1 c_2|_{dB} = 20 \log |\rho_1 \rho_2| = 20 \log |\rho_1| + 20 \log |\rho_2| = |c_1|_{dB} + |c_2|_{dB}$$

Con queste premesse si può studiare $G(i\omega)$ disponendo della proprietà di additività non solo per le fasi ma anche per i moduli. Ciò permette alla funzione di risposta armonica di poter essere interpretata sia dal punto di vista dei moduli che delle fasi come una somma:

$$|G(i\omega)| = |\mu|_{dB} + \sum_i |1 + i\omega\tau_i|_{dB} + \sum_i \left| 1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2} \right|_{dB} - |(i\omega)^g|_{dB} - \sum_i |1 + i\omega T_i|_{dB}$$

$$- \sum_i \left| 1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} \right|_{dB}$$

$$\arg(G(i\omega)) = \arg \mu + \sum_i \arg(1 + i\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2} \right) - \arg((i\omega)^g)$$

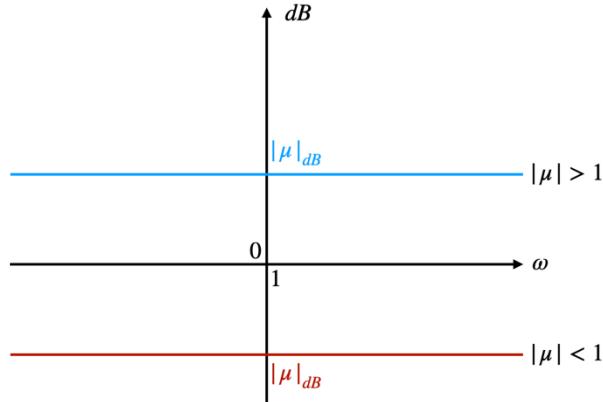
$$- \sum_i \arg(1 + i\omega T_i) - \sum_i \arg \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} \right)$$

Si individuano quattro contributi:

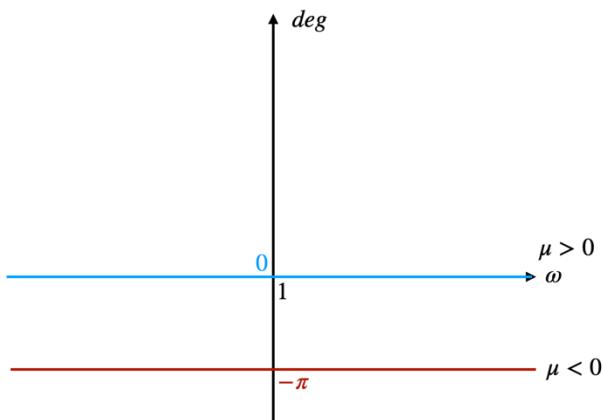
- **Fattore costante**

$$\mu$$

Per quanto riguarda il **diagramma del modulo**, si discrimina il comportamento sulla base dell'unità, sebbene in entrambi i casi si parli di una retta parallela all'asse delle pulsazioni (visto che non c'è alcuna dipendenza da ω):



Per quanto riguarda il **diagramma della fase**, nel caso in cui μ sia un numero reale positivo la sua fase sarà sempre 0, mentre sarà di $-\pi$ se nel caso fosse un numero reale negativo:



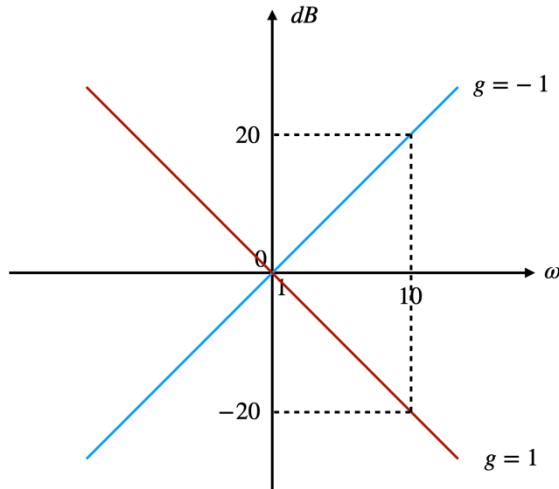
- **Fattore monomio**

$$-(i\omega)^g$$

Per quanto riguarda il **diagramma del modulo**:

$$|-(i\omega)^g| = -20 \log |(i\omega)^g| = -20g \log|i\omega| = -20g \log \omega$$

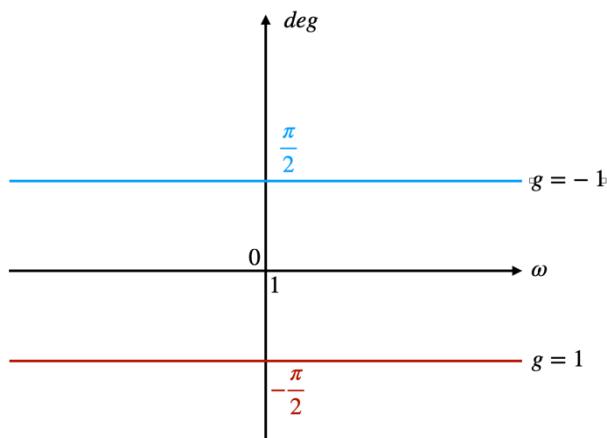
Poiché in scala logaritmica le ascisse si misurano sulla base di $\log \omega$, questo modulo viene rappresentato come se fosse una retta ($-20gx$ con $x = \log \omega$) che passa per $(1, 0_{dB})$ e sale/scende di $20g dB/\text{decade}$:



Per quanto riguarda il **diagramma della fase**:

$$\arg(-(i\omega)^g) = -g \arg i\omega = -g \frac{\pi}{2}$$

E sarà, quindi, una retta parallela all'asse delle pulsazioni:



Si noti che ogni polo in zero fa ritardare di $\pi/2$ e che ogni zero in zero fa anticipare di $\pi/2$.

- **Fattore binomio** (λ molteplicità algebrica)

$$-(1 + i\omega T)^\lambda$$

Per quanto riguarda il **diagramma del modulo**:

$$-\left| (1 + i\omega T)^\lambda \right|_{dB} = -20 \log |(1 + i\omega T)^\lambda| = -20\lambda \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

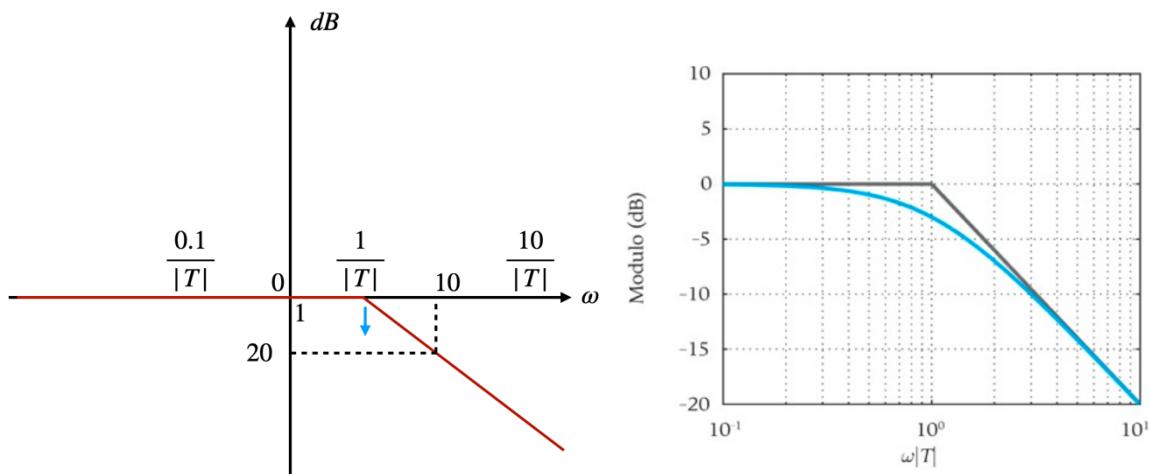
Si ricerca l'approssimazione:

$$-\left| (1 + i\omega T)^\lambda \right|_{dB} = -20\lambda \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow |\omega T| \ll 1 \\ -20\lambda \log \omega T & \Leftrightarrow |\omega T| \gg 1 \end{cases}$$

Per $|\omega T| \gg 1$ si individua una retta con pendenza $-20\lambda dB$ che passa per $(1/|T|, 0dB)$. Queste condizioni sono rispettate nel momento in cui la pulsazione supera o meno la pulsazione di taglio:

$$\frac{1}{|T|}$$

L'approssimazione, in relazione al diagramma reale, assume la seguente forma:

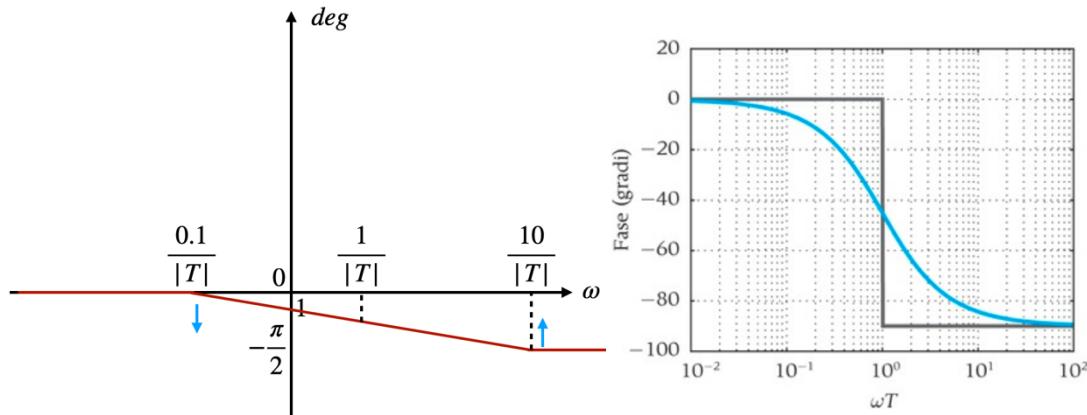


L'errore che si commette in $1/|T|$ è di $-3\lambda dB$. Finora la trattazione si è concentrata sui poli (infatti davanti il termine c'è il segno $-$), nel caso in cui si parlasse di zeri andrebbe solo invertito il segno.

Per quanto riguarda il **diagramma della fase**:

$$-\arg((1 + i\omega T)^\lambda) = -\lambda \arg(1 + i\omega T) = -\lambda \arctan \omega T \approx \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ \begin{cases} -\lambda \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow T > 0 \\ \lambda \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow T < 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{cases}$$

Analogamente al diagramma del modulo, uno zero per $T > 0$ si comporta come un polo a $T < 0$ e viceversa. In generale, per un polo con $T > 0$, il diagramma della fase assume la seguente forma:



L'approssimazione così fatta è leggermente più complicata di quella analiticamente teorizzata, basti pensare che questa è lineare a tratti mentre quella ricavata è costante con un salto di $\pi/2$; tuttavia entrambi i modelli sono validi e, per usare quello lineare a tratti, si consideri un tratto rettilineo tra $0.1/|T|$ e $10/|T|$.

- **Fattore trinomio** (λ molteplicità algebrica)

$$-\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\lambda$$

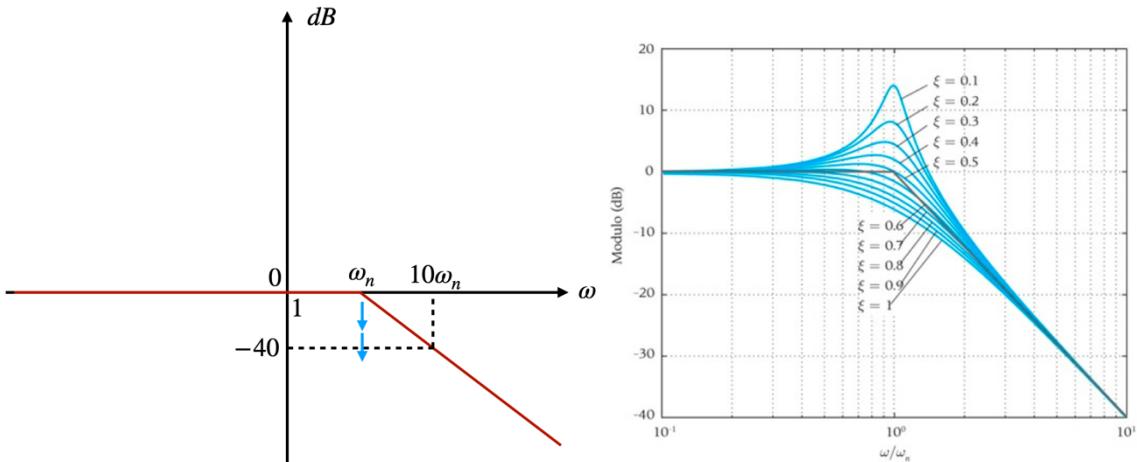
Per quanto riguarda il **diagramma del modulo**:

$$-\left|\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\lambda\right|_{dB} = -20\lambda \log \sqrt{4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}$$

Si ricerca l'approssimazione:

$$-\left|\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\lambda\right|_{dB} \approx \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \omega \ll \omega_n \\ -40\lambda \log \frac{\omega}{\omega_n} \Leftrightarrow \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Ed è una retta che passa in $(\omega_n, 0dB)$ con pendenza di $-40\lambda dB/\text{decade}$, mentre la pulsazione ω_n è detta pulsazione di taglio. Il grafico di questo diagramma è il seguente:



Si noti che se lo smorzamento $\xi \in (0, \sqrt{2}/2]$ il grafico ha un massimo, detto picco di risonanza, che occorre alla pulsazione di risonanza ω_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Il valore di questo picco (da convertire in decibel) è:

$$p_r = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}}$$

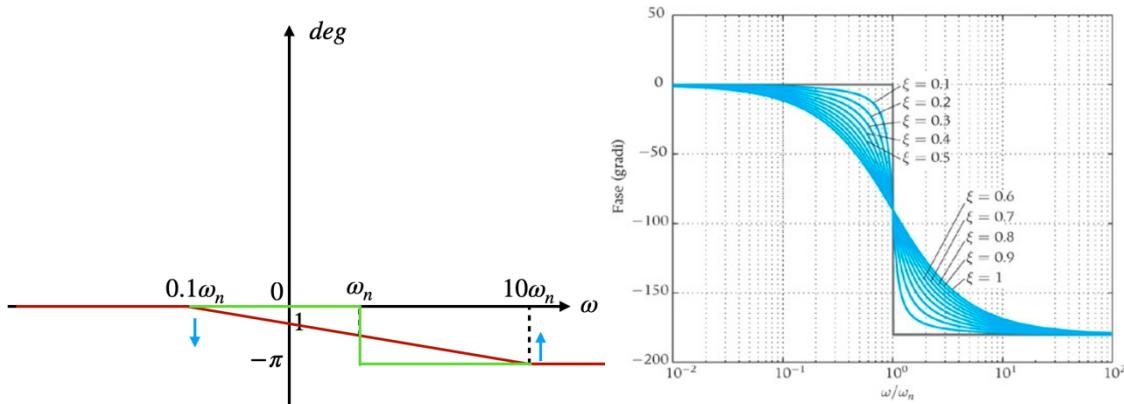
Si noti che per $\xi = 0$, il picco di risonanza non esiste e il grafico tende a $+\infty$.

Se per un polo, una volta calcolato il valore di picco e convertito in decibel, bisogna sommare al grafico il valore corrente in ω_n , considerare un asintoto a $+\infty$ se $\xi = 0$ e una pendenza di $-40\lambda dB/\text{decade}$ successiva, per uno zero al valore corrente va sottratto il picco in decibel, vanno considerati un asintoto a $-\infty$ per $\xi = 0$ e una pendenza di $40\lambda dB/\text{decade}$ successiva.

Per quanto riguarda il **diagramma della fase**:

$$-\arg \left(\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^\lambda \right) = -\lambda \arctan \left(\frac{2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \approx \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \omega \ll \omega_n \\ -\lambda\pi & \Leftrightarrow \xi > 0 \\ \lambda\pi & \Leftrightarrow \xi < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \gg \omega_n$$

Anche in questo caso, uno zero per $\xi > 0$ si comporta come un polo a $\xi < 0$ e viceversa.
Graficamente:



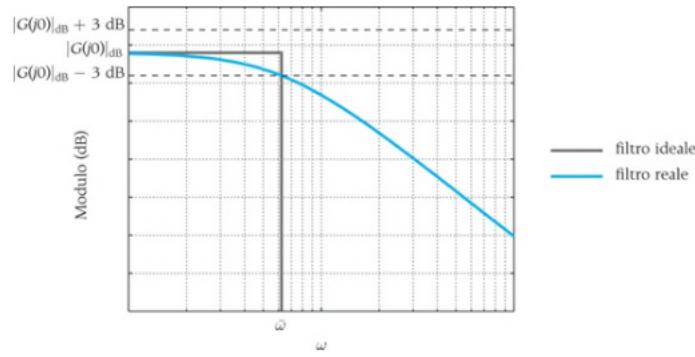
In generale, sono valide le seguenti affermazioni per ottenere i diagrammi di Bode di un sistema:

- Si porti la funzione di trasferimento in forma di Bode e si identifichino:
 - Guadagno in decibel, μ_{dB} ;
 - Il tipo del sistema, g ;
 - Le costanti di tempo di zeri e poli (si ricordi il segno per il diagramma di fase), τ_i e T_i , le rispettive pulsazioni, $1/|\tau_i|$ e $1/|T_i|$, e molteplicità, λ ;
 - Le pulsazioni naturali, ω_{ni} e α_{ni} , e i coefficienti di smorzamento di coppie di poli e zeri complessi coniugati (si ricordi il segno per il diagramma di fase), ξ_i e ζ_i , e le relative molteplicità, λ .
- Diagramma del modulo

- Il tratto iniziale ha pendenza $-g$ e in $\omega = 1$ esso, o il suo prolungamento, assume il valore μ_{dB} ;
- In corrispondenza dei valori di ω uguali a $1/|\tau_i|$ e $1/|T_i|$ la pendenza aumenta o diminuisce di un numero di unità pari alla molteplicità λ dello zero o del polo corrispondente;
- In corrispondenza dei valori di ω uguali a ω_{ni} e α_{ni} la pendenza aumenta o diminuisce di un numero di unità pari al doppio della molteplicità λ delle coppie di zeri o di poli complessi coniugati corrispondenti;
- Ottenuto il diagramma asintotico, si effettuino le correzioni di $\pm\lambda 3dB$ nei punti di rottura relativi agli zero (+) o ai poli (-) reali;
- Per poli (+) o zeri (-) complessi coniugati, se $\xi \in (0, \sqrt{2}/2]$, si sommi $\pm 1/(2|\xi|\sqrt{1-\xi^2})$ (da convertire in dB) in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_r ;
 - Se $\xi = 0$ si ha un asintoto in ω_r , a $+\infty$ per poli e a $-\infty$ per zeri;
 - Le correzioni in questione sono valide se i poli e gli zeri sono ad almeno una decade di distanza, altrimenti c'è una mutua influenza e l'approssimazione delle correzioni peggiora;
- La pendenza finale deve essere $-20(n-m)dB/\text{decade}$ (con $n-m$ grado relativo del sistema), o di $n-m$ unità.
- Diagramma della fase
 - Il tratto iniziale ha ordinata $\arg \mu - g \cdot \pi/2$;
 - (Zeri reali) per ω pari a $0.1/|\tau_i|$ la pendenza aumenta di $\lambda \cdot \pi/4$ e per ω pari a $10/|\tau_i|$ diminuisce di $\lambda \cdot \pi/4$, con $\tau_i > 0$ (viceversa per $\tau_i < 0$);
 - (Poli reali) per ω pari a $0.1/|T_i|$ la pendenza diminuisce di $\lambda \cdot \pi/4$ e per ω pari a $10/|T_i|$ aumenta di $\lambda \cdot \pi/4$, con $T_i > 0$ (viceversa per $T_i < 0$);
 - (Zeri complessi coniugati) per ω pari a $0.1\alpha_{ni}$ la pendenza aumenta di $\lambda \cdot \pi/2$ e per ω pari a $10\alpha_{ni}$ diminuisce di $\lambda \cdot \pi/2$, con $\zeta_i \geq 0$ (viceversa per $\zeta_i < 0$);
 - (Poli complessi coniugati) per ω pari a $0.1\omega_{ni}$ la pendenza diminuisce di $\lambda \cdot \pi/2$ e per ω pari a $10\omega_{ni}$ aumenta di $\lambda \cdot \pi/2$, con $\xi_i \geq 0$ (viceversa per $\xi_i < 0$);
 - Ottenuto il diagramma asintotico, si effettuino le correzioni di $\pm\lambda 6^\circ$ in corrispondenza delle pulsazioni di zeri (+) o di poli (-) reali, con $\tau_i, T_i > 0$ (viceversa con $\tau_i, T_i < 0$);
 - Per poli (-) o zeri (+) complessi coniugati, se $\zeta_i, \xi_i = 0$, il salto di $\pm\lambda\pi$ si effettua tutto in corrispondenza della pulsazione naturale (ignorando il diagramma asintotico), mentre per valori di ζ_i, ξ_i crescenti il salto diviene più smooth, avvicinandosi sempre di più al diagramma asintotico, fino a ritornare al caso di poli o zeri reali per $\zeta_i, \xi_i = 1$, il tutto con $\zeta_i, \xi_i \geq 0$ (viceversa se $\zeta_i, \xi_i < 0$);
 - L'ordinata finale del diagramma deve essere $\arg \mu - (\bar{n} - \bar{m})\pi/2$ (con $\bar{n} - \bar{m}$ grado relativo del sistema modificato):
 - Il grado relativo è modificato tenendo conto che poli con $T < 0$ o $\xi < 0$ sono zeri e che zeri con $\tau < 0$ o $\zeta < 0$ sono poli.

AZIONI FILTRANTI PER SISTEMI LTI

Un **filtro passa – basso** è un filtro che lascia inalterate (o al più amplificate/attenuate della stessa quantità) tutte le pulsazioni inferiori ad una certa pulsazione di taglio $\bar{\omega}$, detta **banda del filtro**, mentre le pulsazioni ad essa superiori sono eliminate. Il diagramma del modulo di Bode di un filtro passa – basso ideale si configura come segue:



Come si può notare, la realtà è leggermente diversa, in primis perché **le pulsazioni non eliminate non vengono amplificate/attenuate tutte della stessa quantità e poi perché quelle eliminate sono gradualmente, e non istantaneamente, annullate**. Pertanto, formalmente, un filtro passa – basso è definito dalle seguenti relazioni:

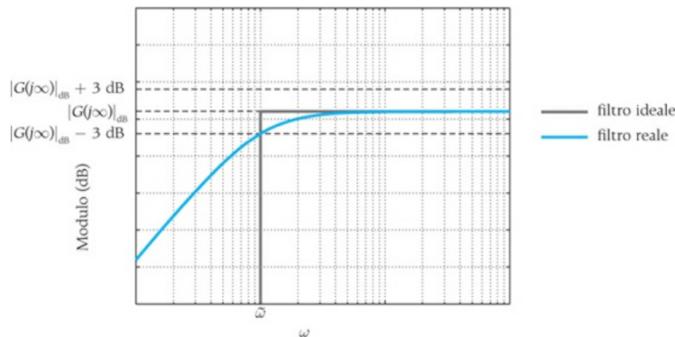
$$\begin{cases} \mu_{dB} - 3_{dB} \leq |G(i\omega)|_{dB} \leq \mu_{dB} + 3_{dB} \Leftrightarrow \omega \leq \bar{\omega} \\ |G(i\omega)|_{dB} < \mu_{dB} - 3_{dB} \Leftrightarrow \omega \geq \bar{\omega} \end{cases}$$

Una **condizione necessaria ma non sufficiente** affinché un sistema sia classificabile come filtro passa – basso richiede che μ_{dB} esista e sia finito e che $\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

La **banda passante di un filtro passa – basso** è:

$$(-\infty, \bar{\omega}]$$

In maniera del tutto analoga, un **filtro passa – alto** è un filtro che lascia inalterate (o al più amplificate/attenuate della stessa quantità) tutte le pulsazioni superiori ad una certa pulsazione di taglio $\bar{\omega}$, detta **banda del filtro**, mentre le pulsazioni ad essa inferiori sono eliminate. Il diagramma del modulo di Bode di un filtro passa – alto ideale si configura come segue:



Anche per questo filtro la realtà è ben diversa e, formalmente, può essere definito con più precisione dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} |G(i\infty)|_{dB} - 3_{dB} \leq |G(i\omega)|_{dB} \leq |G(i\infty)|_{dB} + 3_{dB} \Leftrightarrow \omega \geq \bar{\omega} \\ |G(i\omega)|_{dB} < |G(i\infty)|_{dB} - 3_{dB} \Leftrightarrow \omega \leq \bar{\omega} \end{cases}$$

Ricordando che:

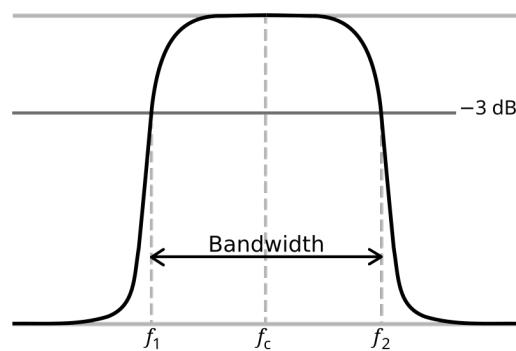
$$|G(i\infty)|_{dB} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(i\omega)|_{dB}$$

Una **condizione necessaria ma non sufficiente** affinché un sistema sia classificabile come filtro passa – alto richiede che il sistema stesso sia proprio.

La **banda passante di un filtro passa – alto** è:

$$[\bar{\omega}, +\infty)$$

Nonostante i modelli di filtri presentati si avvicinino alla realtà, neanch'essi sono realizzabili perché un andamento di quel tipo non sarà mai realistico; l'**andamento più probabile di un filtro** (passa – basso o passa – alto) sarà del tipo:



Con una larghezza di banda sufficiente a poter approssimare il comportamento ad uno dei due elencati. In realtà, i filtri che hanno questo diagramma di Bode sono detti filtri passa – banda e, come è possibile intuire, sono composti da un comportamento dapprima passa – alto con pulsazione di taglio $\bar{\omega}_1$ (fino a ω_c) e poi da un comportamento passa – basso con pulsazione di taglio $\bar{\omega}_2$; quindi, si può dedurre che i due filtri precedentemente enunciati sono una particolare configurazione di filtro passa – banda, in cui la distanza tra le due pulsazioni di taglio è così elevata da poter essere considerata infinita (poi, sulla base delle frequenze che andranno usate nel proprio dominio applicativo, il filtro assume un comportamento passa – basso o passa – alto).

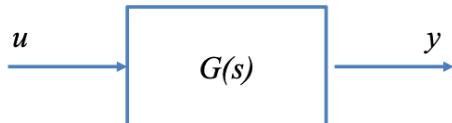
Si noti che le pulsazioni che non sono eliminate sono quelle all'interno dell'intervallo $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$, ovvero quelle per cui sia il comportamento passa – alto che quello passa – basso prevede l'amplificazione/attenuazione.

ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

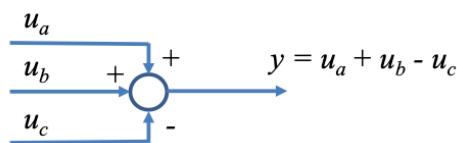
Per studiare le interconnessioni tra i sistemi è conveniente ricorrere ad una **rappresentazione grafica** basata sui cosiddetti **schemi a blocchi**, con la quale è agevolato il calcolo della funzione di trasferimento tra una data variabile di ingresso e una data variabile di uscita del sistema **complessivo**. Il tutto sarà studiato e approfondito in relazione a sistemi a tempo continuo sapendo che, con le opportune modifiche inerenti alle proprietà di stabilità, i concetti presentati saranno facilmente estendibili ai sistemi a tempo discreto.

Prima di affrontare il nocciolo della questione degli schemi a blocchi, si chiarisca la nomenclatura e la relativa simbologia utilizzate. Una **variabile sarà indicata in forma scalare tramite un'etichetta** (che ne rappresenta il nome) e **una freccia** (che andrà ad indicare anche il tipo di variabile; ad esempio, se variabile di ingresso, la freccia entrerà nel sistema); si affronteranno prevalentemente **sistemi SISO**, con la consapevolezza dell'esistenza del principio di sovrapposizione degli effetti nel caso in cui ci si trovi davanti ad altri tipi di sistemi, e **si indicheranno con un blocco rettangolare**

ed un'etichetta (la quale andrà a specificare, più che il sistema, la sua funzione di trasferimento), mentre le **relative variabili, di ingresso e di uscita, tramite etichette e frecce**, rispettivamente, **entrante ed uscente**. Lo schema a blocchi si configurerà come segue:



In aggiunta, uno schema a blocchi può presentare due tipologie di nodo: un **nodo sommatore** ed uno **diramatore**. Per **nodo sommatore** si intende quel **nodo al quale ingresso sono legate le variabili addendi che comporranno la variabile di uscita** (intesa come somma algebrica) e viene rappresentata tramite un **cerchio contornato dai diversi segni con cui prendere l'ingresso associato**:

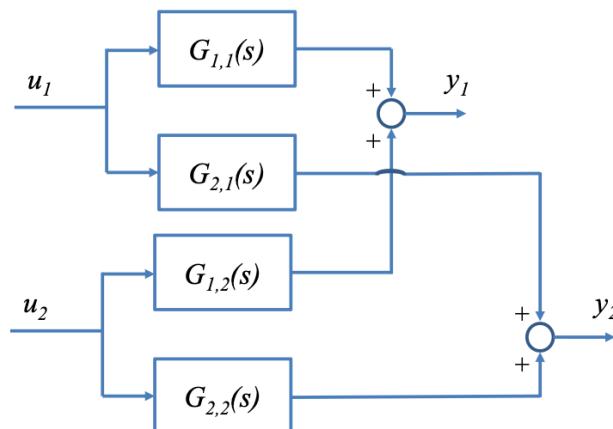


Mentre per **nodo diramatore** (o meglio, **punto di diramazione**) si intende il **nodo in cui una stessa variabile viene direzionata in più variabili**, ognuna delle quali è una **perfetta copia dell'ingresso**:

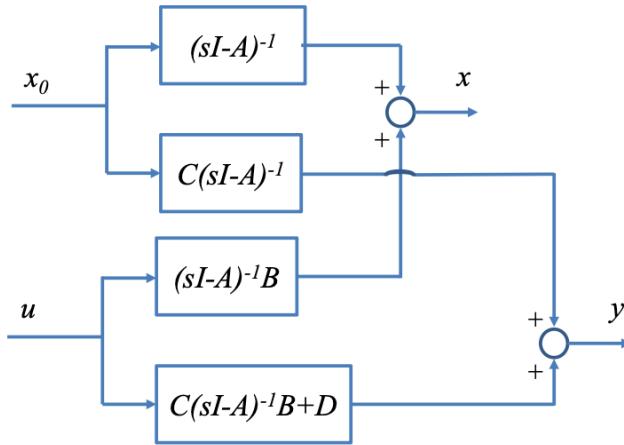


Per riassumere quanto detto e concretizzarlo (soprattutto per mostrare come si rappresentino sistemi non SISO) di seguito è proposta la **corrispondenza tra rappresentazione analitica e in schema a blocchi di un sistema MIMO**:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{bmatrix}$$



Per un sistema rappresentabile in forma $i - s - u$:



Tra due o più sistemi sono individuabili tre tipologie di collegamento:

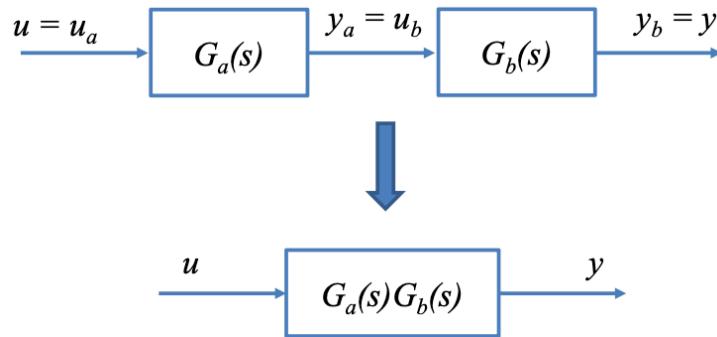
- Sistemi collegati in serie

Sono caratterizzati dal fatto che l'uscita di un sistema è ingresso di un altro; quindi:

$$\begin{cases} Y_a(s) = G_a(s)U_a(s) \\ Y_b(s) = G_b(s)U_b(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = Y_b(s) = G_b(s)U_b(s) = G_b(s)Y_a(s) = G_b(s)G_a(s)U_a(s) = G(s)U(s)$$

Per cui:

$$G(s) = G_a(s)G_b(s)$$



Per quanto riguarda la stabilità, si considerino le forme fratte delle due funzioni di trasferimento:

$$G_a(s) = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} \wedge G_b(s) = \frac{N_b(s)}{D_b(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{N_a(s)N_b(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

Se non vi sono cancellazioni tra il numeratore di un sistema e il denominatore dell'altro, il denominatore della funzione di trasferimento generale contiene sia i poli di $G_a(s)$ che di $G_b(s)$; pertanto, la connessione in serie è asintoticamente stabile se e solo se sono asintoticamente stabili i singoli sottosistemi. Se, invece, **vi sono cancellazioni**, il sistema ha un **numero complessivo di poli minore della somma del numero dei poli dei singoli sottosistemi e, se la cancellazione riguarda poli a parte reale positiva (o nulla), il sistema complessivo non è asintoticamente stabile**, seppure ciò non viene messo in evidenza dall'analisi dei poli di $G(s)$.

Approfondendo la descrizione dei due sottosistemi:

$$G_a(s) = C_a(sI - A_a)^{-1}B_a + D_a = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} \wedge G_b(s) = C_b(sI - A_b)^{-1}B_b + D_b = \frac{N_b(s)}{D_b(s)}$$

$$H_a(s) = (sI - A_a)^{-1}B_a = \frac{P_a(s)}{D_a(s)} \wedge H_b(s) = (sI - A_b)^{-1}B_b = \frac{P_b(s)}{D_b(s)}$$

$$\Psi_a(s) = C_a(sI - A_a)^{-1} = \frac{K_a(s)}{D_a(s)} \wedge \Psi_b(s) = C_b(sI - A_b)^{-1} = \frac{K_b(s)}{D_b(s)}$$

L'evoluzione libera nell'uscita del sistema in serie è:

$$Y_{bL}(s) = \Psi_b(s)x_{0b} + G_b(s)Y_1(s) = \Psi_b(s)x_{0b} + G_b(s)\Psi_a(s)x_{0a} = \frac{K_b(s)}{D_b(s)}x_{0b} + \frac{N_b(s)K_a(s)}{D_b(s)D_a(s)}x_{0a}$$

Mentre l'evoluzione forzata dello stato:

$$X_F(s) = \begin{bmatrix} X_{aF}(s) \\ X_{bF}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_a(s) \\ H_b(s)G_a(s) \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_a(s)}{D_a(s)} \\ \frac{N_a(s)P_b(s)}{D_a(s)D_b(s)} \end{bmatrix} U(s)$$

Se uno zero di $G_a(s)$ cancella un polo di $G_b(s)$ (ovvero $N_a(s)$ e $D_b(s)$ condividono una radice), **allora si genera una parte del sistema complessivo non raggiungibile ma osservabile**. Sulla base di quanto è stato precedentemente detto, **l'evoluzione libera dell'uscita non soffre di tale cancellazione e per le parti osservabili non sussiste alcun problema**; invece, è altrettanto chiaro come **l'evoluzione forzata dello stato soffra della cancellazione**, per la quale viene meno una parte raggiungibile del sistema.

Invece, **se uno zero di $G_b(s)$ cancella un polo di $G_a(s)$** (ovvero $N_b(s)$ e $D_a(s)$ condividono una radice), **allora si genera una parte del sistema complessivo raggiungibile ma non osservabile**. Sulla base di quanto è stato precedentemente detto, **l'evoluzione libera dell'uscita soffre di tale cancellazione**, per la quale viene meno una parte osservabile del sistema; invece, è altrettanto chiaro come **l'evoluzione forzata dello stato non soffra della cancellazione** e per le parti raggiungibili non sussiste alcun problema.

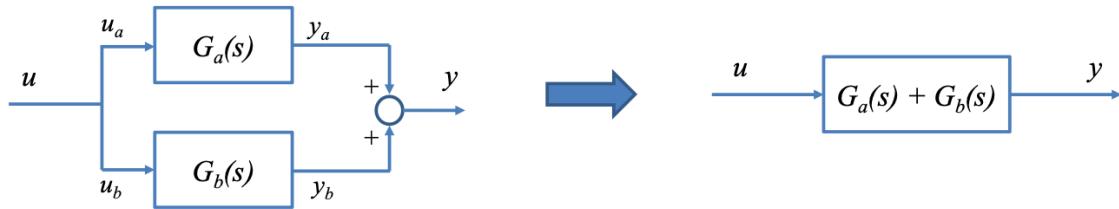
- **Sistemi collegati in parallelo**

Sono caratterizzati dal fatto che, **ponendo lo stesso ingresso a due o più sistemi, l'uscita complessiva è data dalla somma di ogni uscita singola**:

$$\begin{cases} Y_a(s) = G_a(s)U_a(s) \\ Y_b(s) = G_b(s)U_b(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s) = G_a(s)U_a(s) + G_b(s)U_b(s) \\ = (G_a(s) + G_b(s))U(s) = G(s)U(s)$$

Per cui:

$$G(s) = G_a(s) + G_b(s)$$



Per quanto riguarda la stabilità:

$$G(s) = G_a(s) + G_b(s) = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} + \frac{N_b(s)}{D_b(s)} = \frac{N_a(s)D_b(s) + N_b(s)D_a(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

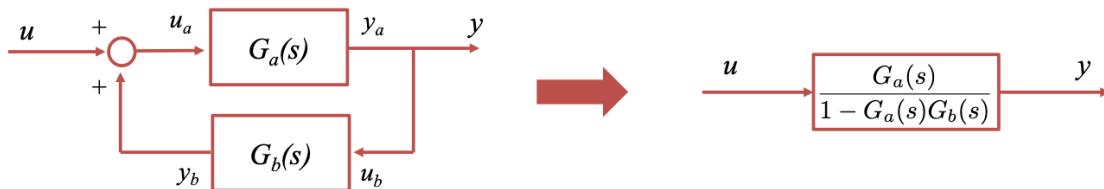
Se non vi sono cancellazioni, il numeratore della funzione di trasferimento complessiva contiene i poli delle funzioni di trasferimento di ogni singolo sistema; di conseguenza, **la connessione in parallelo è asintoticamente stabile se e solo se sono asintoticamente stabili i singoli sottosistemi.** Se vi fossero cancellazioni, il sistema avrebbe un **numero di poli complessivo minore della somma del numero di poli di ogni singolo sottosistema** e, se la cancellazione riguarda poli a parte reale positiva (o nulla), **il sistema complessivo non è asintoticamente stabile**, seppure ciò non viene messo in evidenza dall'analisi dei soli poli di $G(s)$.

Omettendo per semplicità la dimostrazione, si può osservare che quando $G_a(s)$ e $G_b(s)$ hanno in comune dei poli, allora si genera una parte contemporaneamente non raggiungibile e non osservabile.

- **Sistemi collegati in retroazione**

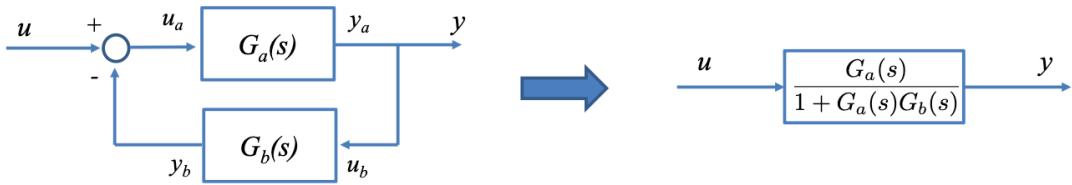
Sono caratterizzati dal fatto che **l'ingresso al primo sistema è dato dalla somma algebrica fra l'ingresso del sistema complessivo e l'uscita del secondo sottosistema, il cui ingresso è l'uscita del primo sottosistema, la quale è uscita del sistema complessivo.** Si parla di **retroazione positiva** quando la somma algebrica è positiva per entrambi gli addendi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_a(s)(U(s) + Y_b(s)) = G_a(s)(U(s) + G_b(s)Y(s)) = G_a(s)U(s) + G_a(s)G_b(s)Y(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{G_a(s)}{1 - G_a(s)G_b(s)} \end{aligned}$$



Mentre di **retroazione negativa** quando la somma algebrica è una differenza degli addendi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_a(s)(U(s) - Y_b(s)) = G_a(s)(U(s) - G_b(s)Y(s)) = G_a(s)U(s) - G_a(s)G_b(s)Y(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)} \end{aligned}$$



Prendendo per esempio la retroazione negativa, per quanto riguarda la stabilità:

$$G(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)} = \frac{N_a(s)D_b(s)}{D_a(s)D_b(s) + N_a(s)N_b(s)}$$

Si osservi che **i poli del sistema retroazionato non sono quelli dei singoli sottosistemi**, bensì le soluzioni dell'equazione:

$$1 + G_a(s)G_b(s) = 1 + L(s) = 0 \Leftrightarrow D_L(s) + N_L(s) = 0$$

Detta **equazione caratteristica del sistema retroazionato**, dove:

$$L(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{N_a(s)N_b(s)}{D_a(s)D_b(s)} = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

È detta **funzione di trasferimento d'anello**. Se **non vi sono cancellazioni** nel calcolo della funzione di trasferimento d'anello, il **sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se le radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato hanno tutte parte reale negativa**. La condizione appena enunciata **non ha alcun legame con la stabilità asintotica dei sottosistemi in retroazione**; infatti, partendo da due sistemi asintoticamente stabili, può accadere che il sistema da essi retroazionato non sia asintoticamente stabile (e viceversa). Se vi fossero **cancellazioni** nel calcolo della funzione di trasferimento d'anello, e queste **riguardassero poli con parte reale positiva (o nulla)**, il **sistema complessivo non sarebbe asintoticamente stabile**, seppure ciò non viene messo in evidenza dall'analisi delle sole radici dell'equazione caratteristica del sistema reazionato.

Tutto può essere esteso anche al caso di retroazione positiva, considerando un'opportuna modifica all'equazione caratteristica di anello:

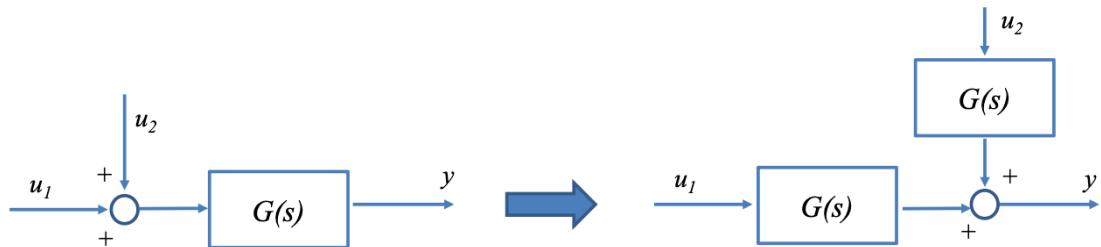
$$1 - L(s) = 0$$

Omettendo per semplicità la dimostrazione, **si può osservare anche che, quando uno zero di $G_a(s)$ coincide con un polo di $G_b(s)$, si genera una parte contemporaneamente non raggiungibile e non osservabile**, mentre **quando uno zero di $G_b(s)$ coincide con un polo di $G_a(s)$, il sistema rimane completamente raggiungibile e osservabile ma il corrispondente polo/zero non viene spostato dalla retroazione**.

I tre schemi presentati sono quelli più ricorrenti e che coinvolgono attivamente gli schemi a blocchi; tuttavia, esistono altre schematizzazioni equivalenti che possono essere utili quando si manipolano nodi sommatori:

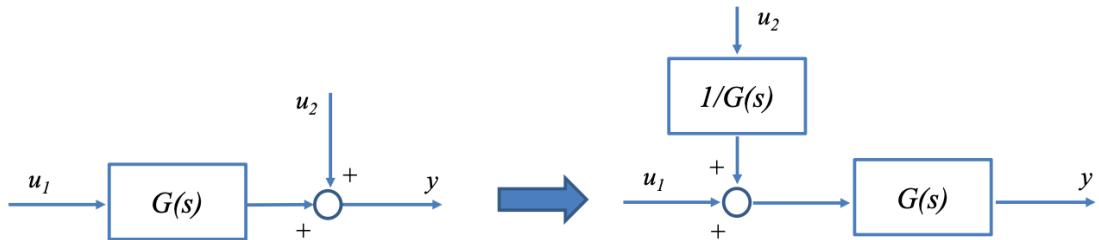
- **Nodo sommatore da monte a valle di un blocco**

$$Y(s) = G(s)(U_1(s) + U_2(s)) = G(s)U_1(s) + G(s)U_2(s)$$



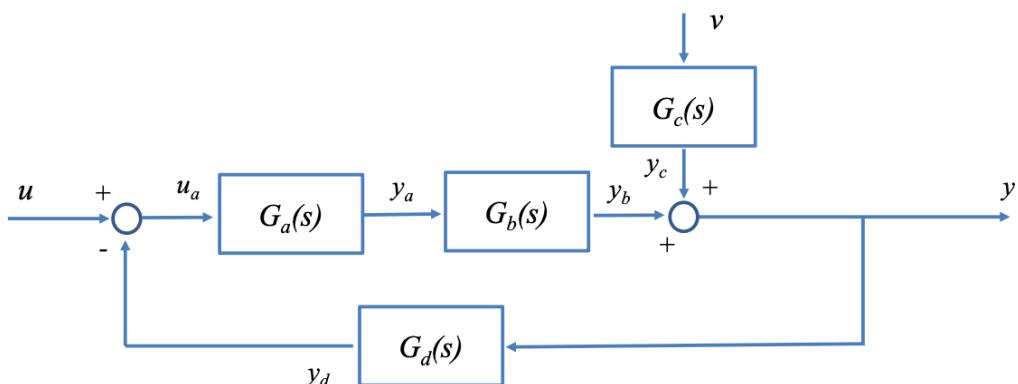
- **Nodo sommatore da valle a monte di un blocco**

$$Y(s) = G(s)U_1(s) + U_2(s) = G(s) \left(U_1(s) + \frac{1}{G(s)} U_2(s) \right)$$

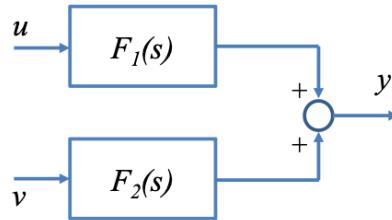


Tuttavia, si noti come **queste regole di trasformazione possano aumentare fintiziamente i poli del sistema complessivo**. Inoltre, se $G(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema strettamente proprio, la funzione di trasferimento $1/G(s)$ avrà più zeri che poli e sarà la descrizione di un sistema improprio (può essere comunque usata una tale regola per semplificare lo schema laddove occorresse).

Per confermare quanto detto riguardo a sistemi MISO, SIMO o MIMO, si faccia l'esempio con il seguente sistema MISO:



Il quale, grazie al **principio di sovrapposizione degli effetti**, può essere ridotto al seguente:

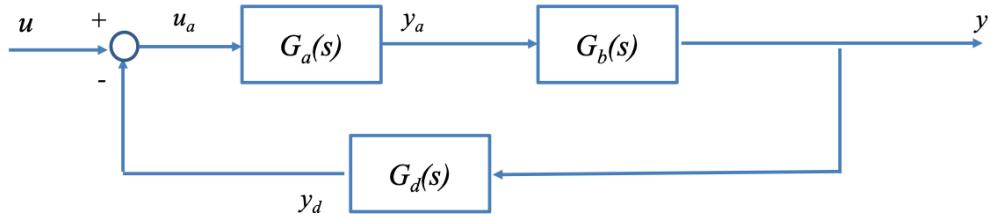


Dove $F_1(s)$ lega l'ingresso u con l'uscita quando $v = 0$, ossia $Y(s) = F_1(s)U(s)$, mentre $F_2(s)$ lega l'ingresso v con l'uscita quando $u = 0$, ossia $Y(s) = F_2(s)V(s)$. Con un piccolo abuso di notazione, i due contributi si vanno a sommare e l'uscita potrà essere descritta dalla seguente equazione:

$$Y(s) = F_1(s)U(s) + F_2(s)V(s)$$

Approfondendo il calcolo delle due funzioni di trasferimento, per $F_1(s)$ si può dire che:

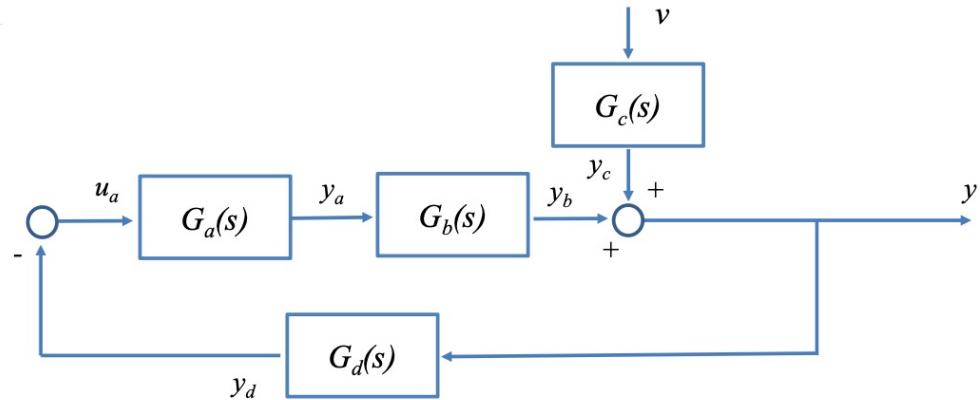
$$F_1(s) = \frac{G_a(s)G_b(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)G_d(s)}$$



Mentre per $F_2(s)$:

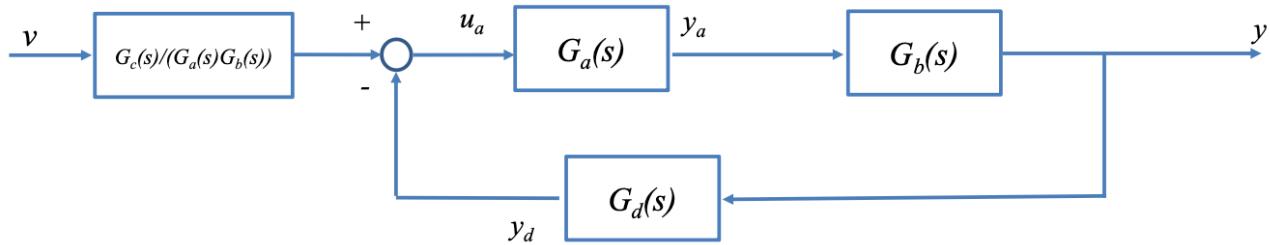
$$\begin{cases} Y(s) = G_c(s)V(s) + G_b(s)G_a(s)U_a(s) \\ U_a(s) = -G_d(s)Y(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_c(s)V(s) - G_b(s)G_a(s)G_d(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow F_2(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)G_d(s)}$$



Oppure:

$$F_2(s) = \frac{G_c(s)}{G_a(s)G_b(s)} \cdot \frac{G_a(s)G_b(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)G_d(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)G_d(s)}$$



Quindi, nel caso in cui uscite e ingressi fossero multipli, non si avrebbe più una funzione di trasferimento, bensì una matrice di trasferimento composta da un numero di righe pari al numero di uscite e da un numero di colonne pari al numero di ingressi del sistema. L'elemento i – esimo e j – esimo di questa matrice sarà la funzione di trasferimento relativa al sistema in cui sono stati spenti tutti gli ingressi e tutte le uscite ad eccezione dell'uscita i – esima e dell'ingresso j – esimo, grazie al principio di sovrapposizione degli effetti.

Sono comuni schemi a blocchi in cui diverse parti di un sistema composto sono collegate tramite **degli interruttori**, i quali creano un **sistema discontinuo** (continuo a tratti) per istanti precedenti e successivi a quello di **commutazione**; per questi particolari sistemi, la **topologia di connessione dello schema può cambiare una volta commutato l'interruttore**, mentre i singoli blocchi hanno un'evoluzione continua (la discontinuità è presente solo nel legame i – u fra uno o più blocchi).

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO

INTRODUZIONE AI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Fino a questo momento sono sempre stati trattati implicitamente sistemi dinamici a tempo continuo, quindi con la variabile temporale $t \in \mathbb{R}$; ovviamente, questi non sono gli unici sistemi possibili, **esistono anche sistemi dinamici la cui variabile temporale è intera** e sono detti **sistemi dinamici a tempo discreto**. Non ci sono molte differenze tra le due tipologie di sistema, ad eccezione di alcune definizioni che, pur mantenendo lo stesso enunciato, si presentano sotto forme diverse.

Nella sua forma più generale, **un sistema dinamico a tempo discreto è descritto dalle seguenti equazioni:**

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

Con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $k \in \mathbb{Z}$. Si nota già quuna prima differenza: l'**equazione di stato non è descritta da un'equazione differenziale ma da un'equazione alle differenze**; il motivo risiede nel fatto che **a tempo discreto non esistono derivate**, le funzioni non sono continue e l'**unico modo per descrivere l'andamento di una grandezza è descriverne il comportamento all'istante successivo in funzione di quello attuale**.

La trasformazione di uscita non subisce variazioni rispetto all'omonima a tempo continuo, se non per il cambio di variabile temporale. Neanche le **nomenclature si discostano tanto da quanto già detto**: $y(k)$ è detto movimento dell'uscita e $x(k)$ movimento dello stato a partire dall'istante k .

Anche per sistemi a tempo discreto è possibile fare una **distinzione dei sistemi in multivariabili e monovariabili**:

- **Sistemi SISO** (Single Input Single Output), con $m = 1$ e $p = 1$;
- **Sistemi MIMO** (Multiple Input Multiple Output), con $m > 1$ e $p > 1$;
- **Sistemi SIMO** (Single Input Multiple Output), con $m = 1$ e $p > 1$;
- **Sistemi MISO** (Multiple Input Single Output), con $m > 1$ e $p = 1$;

Inoltre, si distinguono:

- **Sistemi propri**, descritti finora

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

- **Sistemi strettamente propri** (o **dinamici**) e descritti da un funzionale di uscita indipendente dal segnale posto in ingresso al sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), k) \end{cases}$$

- **Sistemi statici** (o non dinamici), descritti da funzionali non dipendenti dal movimento dello stato

$$\begin{cases} x(k+1) = f(u(k), k) \\ y(k) = g(u(k), k) \end{cases}$$

E anche:

- **Sistemi tempo – varianti;**
- **Sistemi tempo – invarianti** (o stazionari), il movimento dello stato e dell'uscita ad una sollecitazione non dipendono dall'istante di applicazione della sollecitazione stessa.

Si parla di **sistema lineare** quando la trasformazione di uscita e l'equazione di stato sono esprimibili in forma di combinazioni lineari:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

La nomenclatura delle varie matrici segue la definizione delle omonime a tempo continuo. Un **sistema** è detto **LTI** (Lineare e Tempo Invariante) se le **matrici in questione non dipendono dal tempo**, risultando in **combinazioni lineare pure**:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Si noti che **a tempo discreto**, come non accade a tempo continuo, **un sistema LTI è un sistema puramente algebrico**, scompare il contributo differenziale.

Per quanto riguarda la modellistica di questo tipo di sistemi, non esiste una vera e propria teoria per la quale al presentarsi di determinate ipotesi seguono determinate conclusioni; per sistemi a tempo discreto **si segue molto la narrativa del problema**, che quindi funge da guida nel processo di modellazione del sistema.

Una volta introdotti i sistemi dinamici a tempo discreto, è importante **adattare tutte le definizioni date per i sistemi a tempo continuo a questo nuovo tipo di sistemi**. Si vuole partire con la definizione di stati di equilibrio, il cui enunciato non differisce dall'omonimo a tempo continuo; infatti, **per stato di equilibrio si intende quello stato che, in corrispondenza di un ingresso \bar{u} costante nel tempo, rimane anch'esso costante nel tempo al valore \bar{x}** .

Si può formalizzare questa definizione dicendo che **l'andamento nel tempo del movimento dello stato è costante**, ovvero che:

$$x(k+1) = x(k)$$

Ma poiché si sta ricercando quello stato che permane costante ad ingresso costante, $x(k) = \bar{x}$ e $x(k+1) = f(\bar{u}, \bar{x})$ e quindi:

$$\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{x})$$

Per trovare le uscite di equilibrio corrispondenti:

$$\bar{y} = g(\bar{u}, \bar{x})$$

A questo punto **si può già notare una grande differenza con il caso a tempo continuo**; in quest'ultimo gli stati di equilibrio erano quelli tali da annullare l'equazione di stato:

$$0 = f(\bar{u}, \bar{x}) \text{ [T. C.]}$$

Mentre a **tempo discreto** sono quelli che compaiono sia in ingresso che in uscita all'equazione di stato:

$$\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{x}) \text{ [T. D.]}$$

In continuità con i sistemi dinamici a tempo continuo, si definisce la condizione di stabilità quella per la quale partendo da uno stato prossimo a quello di equilibrio in corrispondenza di un ingresso costante, il movimento dello stato permane in un intorno dello stato d'equilibrio:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0, \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \wedge \|x(k) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \forall k \geq k_0$$

Mentre l'**asintotica stabilità** è quella condizione di stabilità per cui il movimento dello stato, partito nelle vicinanze di uno stato d'equilibrio in corrispondenza di un ingresso costante, tende asintoticamente allo stato d'equilibrio stesso:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$$

Come si può osservare, anche per la stabilità le definizioni non cambiano in relazione al tempo continuo, cambia solo il modo in cui esse sono formalmente espresse (in questo caso cambia solo la variabile temporale).

In tempo discreto è utile estendere la formula di Lagrange enunciata in precedenza per sistemi **LTI a tempo discreto**. L'assenza di derivate costituisce un problema, dal momento in cui non permette una soluzione rapidamente raggiungibile mediante integrazione; tuttavia, si può notare un **pattern di ricorrenza**, considerando $x(k_0) = x_{k_0}$ istante iniziale:

$$x(k_0 + 1) = Ax_{k_0} + Bu(k_0)$$

$$\begin{aligned} x(k_0 + 2) &= Ax(k_0 + 1) + Bu(k_0 + 1) = A(Ax_{k_0} + Bu(k_0)) + Bu(k_0 + 1) \\ &= A^2x_{k_0} + ABu(k_0) + Bu(k_0 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k_0 + 3) &= Ax(k_0 + 2) + Bu(k_0 + 2) = \dots \\ &= A^3x_{k_0} + A^2Bu(k_0) + ABu(k_0 + 1) + Bu(k_0 + 2) \end{aligned}$$

Procedendo per induzione, anche per la trasformazione di uscita, si può dedurre che:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = A^{k-k_0}x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) \\ y(k) = CA^{k-k_0}x_{k_0} + C \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k) \end{array} \right.$$

Anche per questo tipo di sistemi, la forma appena enunciata divide il sistema in quattro evoluzioni:

- **Evoluzione libera dello stato**

$$x_L(k) = A^{k-k_0}x_{k_0}$$

- **Evoluzione forzata dello stato**

$$x_F(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

- **Evoluzione libera dell'uscita**

$$y_L(k) = CA^{k-k_0}x_{k_0}$$

- **Evoluzione forzata dell'uscita**

$$y_F(k) = C \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)$$

Ed è qui che si consuma un'altra **differenza con i sistemi a tempo continuo**, ovvero la **mancanza degli integrali e dell'esponenziale della matrice**. Volendo mettere in confronto le due formule:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} x(k) = A^{k-k_0}x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) \\ y(k) = CA^{k-k_0}x_{k_0} + C \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k) \end{cases}$$

Si nota che:

$$e^{A(t-t_0)} \rightarrow A^{k-k_0}$$

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \rightarrow \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)$$

Che risulta comunque intuitivo se si pensa almeno che **l'integrale è una somma continua e la sommatoria una somma discreta**. Ciò che veramente cambia è la **trasformazione dell'esponenziale di una matrice in una potenza di matrice**, che cambierà (come sarà più evidente a breve) anche il modo in cui vengono percepiti i modi naturali del sistema.

Sulla base della distinzione tra movimento libero e forzato, **si può tranquillamente affermare la valenza anche per sistemi a tempo discreto del principio di sovrapposizione degli effetti**; quindi, se in ingresso ad un sistema LTI è posto un segnale composto, la risposta a tale segnale sarà la somma delle risposte alle singole parti dell'ingresso in questione.

Ovviamente, una rappresentazione $i - s - u$ non è univoca anche a tempo discreto; pertanto, è possibile effettuare un **cambio di rappresentazione** mediante una matrice **T non singolare** tale che:

$$\hat{x}(k) = Tx(k)$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

Dove:

$$\hat{A} = TAT^{-1}$$

$$\hat{B} = TB$$

$$\hat{C} = CT^{-1}$$

Come precedentemente introdotto, **i modi naturali di un sistema LTI a tempo discreto appaiono in una forma diversa rispetto a quelli osservati in tempo continuo**. Supponendo la matrice A diagonalizzabile, **si consideri il movimento libero dello stato ed una trasformazione di stato mediante la matrice degli autovettori inversa T_D** :

$$x_L(k) = A^k x_{k0} \wedge \hat{x}(k) = T_D x(k) : x(k) = T_D^{-1} \hat{x}(k)$$

Si ha:

$$\hat{x}(k+1) = T_D x(k+1) = T_D A x(k) = T_D A T_D^{-1} \hat{x}(k) = A_D \hat{x}(k)$$

Con A_D matrice diagonale degli autovalori del sistema. Allora:

$$x_L(k) = A^k x_{k0} = T_D^{-1} A_D^k T_D x_{k0} = T_D^{-1} \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\} T_D x_{k0}$$

Pertanto, in un sistema LTI a tempo discreto i modi naturali sono individuati dalle quantità:

$$\lambda_i^k \quad \forall i = 1 \dots n$$

Nel caso in cui gli autovalori λ fossero complessi coniugati:

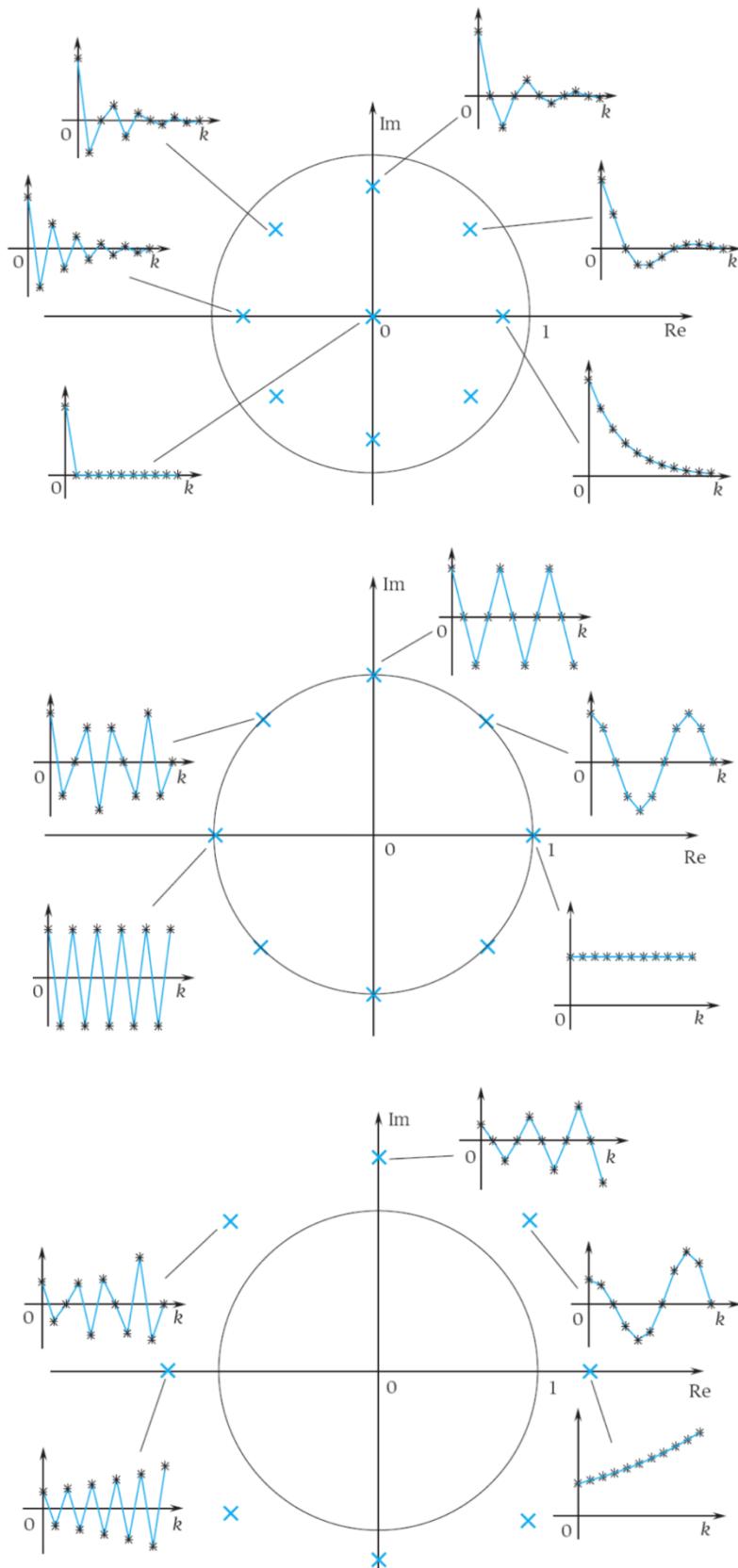
$$\rho_i^k \sin(\vartheta_i k + \varphi_i)$$

Dove:

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i = \rho_i e^{i\vartheta_i} : \rho_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \wedge \vartheta_i = \arg(\lambda_i)$$

A differenza del caso a tempo continuo, **per i modi naturali complessi coniugati di un sistema LTI compaiono modulo e fase e non parti reale e immaginaria**.

I modi naturali del sistema (quindi gli autovalori) **a tempo discreto discriminano la stabilità del sistema proprio come gli omonimi a tempo continuo**; in particolare, **il ruolo di regione margine svolto dall'asse delle ordinate per i sistemi a tempo continuo è svolto dalla circonferenza di raggio unitario** per sistemi a tempo discreto. Infatti, per autovalori distinti:



Quindi:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \text{ [T.C.]} \rightarrow \rho_i < 1 \text{ [T.D.]}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \text{ [T.C.]} \rightarrow \rho_i = 1 \text{ [T.D.]}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \text{ [T.C.]} \rightarrow \rho_i > 1 \text{ [T.D.]}$$

Osservando, però, il modo in cui si comportano gli autovalori a tempo continuo, si nota che **l'andamento altalenante che caratterizza alcuni autovalori a tempo discreto è caratteristico di questo tipo di sistemi.**

Se la matrice A è solo Jordanizzabile, la trasformazione dello stato da prendere in considerazione è:

$$\hat{x}(k) = T_J x(k) : x(k) = T_J^{-1} \hat{x}(k)$$

Ottenendo:

$$x_L(k) = T_J^{-1} \operatorname{diag}\{J_1^k, \dots, J_h^k\} T_J x_{k0}$$

Con i blocchi di Jordan della dimensione corretta. I modi naturali sono, per autovalori reali:

$$k^{\eta-1} \lambda_i^{k-\eta+1}$$

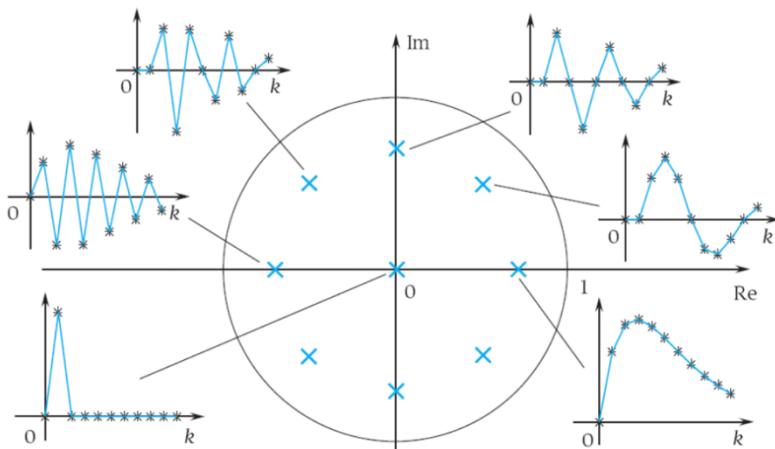
E per autovalori complessi coniugati:

$$k^{\eta-1} \rho_i^{k-\eta+1} \sin(\vartheta_i(k - \eta + 1) + \varphi_i)$$

Dove:

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i = \rho_i e^{i\vartheta_i} : \rho_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \wedge \vartheta_i = \arg(\lambda_i)$$

Per autovalori multipli a modulo minore di 1 a tempo discreto l'andamento è il seguente:



Sapendo che per autovalori nulli l'andamento è nullo per $k = \eta$ in poi.

A tempo discreto è possibile individuare i segnali analoghi ai segnali canonici studiati a tempo continuo; in particolare:

- **Scalino**

$$\delta_{-1}(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ 1 & \Leftrightarrow k \geq 0 \end{cases}$$

- **Rampa**

$$\delta_{-2}(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ k & \Leftrightarrow k \geq 0 \end{cases}$$

- **Parabola**

$$\delta_{-3}(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k < 0 \\ \frac{k}{2}(k-1) & \Leftrightarrow k \geq 0 \end{cases}$$

- **Delta di Kronecker** (analogo dell'impulso a TC)

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k \neq 0 \\ 1 & \Leftrightarrow k = 0 \end{cases}$$

Sapendo che:

$$\delta_{-1}(k) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) \wedge \delta_{-2}(k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}(i) \wedge \delta_{-3}(k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-2}(i)$$

Come si è potuto osservare, **la distinzione tra evoluzione libera e forzata permane quando si studiano i sistemi a tempo discreto**. Per un sistema a tempo discreto SISO, con un impulso in ingresso, la risposta forzata nello stato e nell'uscita è pari a:

$$x_F(k)|_{u(k)=\delta(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B \delta(i) = g_x(k) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow k = 0 \\ A^{k-1} B & \Leftrightarrow k > 0 \end{cases}$$

$$y_F(k)|_{u(k)=\delta(k)} = C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B \delta(i) + D \delta(k) = g_y(k) = \begin{cases} D & \Leftrightarrow k = 0 \\ CA^{k-1} B & \Leftrightarrow k > 0 \end{cases}$$

Si noti come per $k > 0$ i movimenti forzati coincidano con quelli liberi a partire dallo stato iniziale $x(0) = B$, ritardati di un passo. Inoltre, le risposte all'impulso per autovalori nell'origine si annullano in un tempo finito di passi (pari alla massima tra le dimensioni dei miniblocchi di Jordan e non maggiore dell'ordine del sistema, essendo $g_y(k) = 0 \forall k \geq n$); questo tipo di sistemi sono detti **FIR**, Finite Impulse Response.

Così come per i sistemi LTI a tempo continuo, a tempo discreto la risposta forzata nello stato e nell'uscita può essere determinata come prodotto di convoluzione discreta fra la rispettiva risposta impulsiva e il segnale di ingresso:

$$x_F(k) = (g_x * u)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g_x(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^k g_x(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

$$y_F(k) = (g_y * u)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g_y(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^k g_y(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k)$$

Per lo scalino unitario a tempo discreto:

$$h_y(k) = (g_y * \delta_{-1})(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}B + D = \sum_{i=0}^k g_y(k-i) = \sum_{i=0}^k g_y(i)$$

Si noti il legame che sussiste tra la risposta forzata allo scalino e quella impulsiva (legame che esisterà anche tra risposta alla rampa e quella allo scalino e così via). Viceversa:

$$g_y(k) = h_y(k) - h_y(k-1), \forall k \geq 0 : h_y(-1) = 0$$

EQUILIBRIO E STABILITÀ DI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

Un **sistema LTI a tempo discreto** è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Applicando in ingresso un segnale costante \bar{u} , ci si chiede se esistano stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ per cui:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

Ovvero:

$$\bar{x} - A\bar{x} = B\bar{u}$$

$$(I_n - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

Supponendo $\det(I_n - A) \neq 0$:

$$\bar{x} = (I_n - A)^{-1}B\bar{u}$$

A tempo continuo si era giunti ad una soluzione simile, solo che l'assenza della derivata ha introdotto una leggera discrepanza tra le formalizzazioni delle due definizioni (come è stato già mostrato):

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Il determinante della matrice che moltiplica lo stato di equilibrio, $(I_n - A)$, può essere visto come una produttoria di autovalori:

$$\det(I_n - A) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i)$$

È sufficiente che un solo autovalore della matrice A sia unitario affinché la produttoria (e quindi il determinante) si annulli. Di conseguenza, si può dire che l'autovalore λ_i è un **autovalore/punto critico per i sistemi LTI a tempo discreto** (ruolo che a tempo continuo era svolto dall'autovalore nullo). In caso accada che $\lambda_i = 1$, la matrice $(I_n - A)$ non è invertibile e gli stati di equilibrio sono gli infiniti valori che soddisfano l'equazione:

$$(I_n - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

Infatti, si andrebbe a creare un sistema in cui ci sarebbero più incognite che equazioni e le soluzioni sarebbero infinite.

Si nota una **nuova similitudine con i sistemi LTI a tempo continuo**: il **punto critico** e la frontiera che discrimina la stabilità del sistema a partire dagli autovalori della matrice A coincidono e sono pari a **0 per sistemi LTI a tempo continuo** e ad **1 per sistemi LTI a tempo discreto** (nonostante la frontiera qui non sia una retta ma una circonferenza).

Escludendo una situazione di questo tipo per semplicità, quindi **supponendo che $(I_n - A)$ sia invertibile, le uscite di equilibrio sarebbero**:

$$\bar{y} = [C(I_n - A)^{-1}B + D]\bar{u}$$

Definendo **guadagno statico a tempo discreto la quantità $C(I_n - A)^{-1}B + D$** .

Sia dato un **ingresso costante \bar{u}** , a cui è **associato lo stato di equilibrio \bar{x}** , si consideri una **condizione iniziale x_0** che si discosti da tale stato d'equilibrio per uno scostamento abbastanza **piccolo δx_0** :

$$x_0 = \bar{x} + \delta x_0$$

Applicando un ingresso $u(t) = \bar{u}$, si ottiene un **movimento $x(k)$ diverso da \bar{x}** per definizione di stato di equilibrio; tuttavia, **lo scostamento di questo movimento di stato da quello d'equilibrio può essere quantificato mediante la funzione**:

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x}$$

Tale che:

$$\tilde{x}(0) = x_0 - \bar{x} = \delta x_0$$

Si vuole capire **come varia nel tempo la dinamica di questo scostamento**, in modo da **determinare l'eventuale stabilità del sistema**. Si sviluppi l'equazione alle differenze che descrive l'andamento nel tempo dello scostamento:

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \bar{x} = Ax(k) + B\bar{u} - \bar{x} = Ax(k) - A\bar{x} = A(x(k) - \bar{x}) = A\tilde{x}(k)$$

Quindi, **la dinamica dello scostamento non dipende né dall'ingresso \bar{u} né dallo stato di equilibrio \bar{x}** , bensì solo dalla matrice A ; pertanto:

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) \Rightarrow \tilde{x}(k) = A^k \delta x_0$$

Da queste condizioni si può ricavare la stessa proprietà di globalità che era stata individuata a tempo continuo, per la quale **la stabilità di un sistema LTI non dipende dal singolo stato di equilibrio né dal singolo ingresso costante** e per cui se uno stato è stabile lo sono anche tutti gli altri.

Ricordando la definizione di stabilità:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta, \|x(k) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$$

Sapendo che $x(k) - \bar{x} = \tilde{x}(k)$, bisogna verificare che:

$$\|A^k \delta x_0\| \leq \varepsilon$$

Cambiando rappresentazione:

$$\|T_D^{-1} A_D^k T_D \delta x_0\| \leq \varepsilon$$

Ma questa non è nient'altro che una **combinazione lineare dei modi naturali del sistema**, per cui è possibile enunciare i seguenti teoremi.

Anche in questo caso è possibile osservare l'analogia di e^{At} [T.C.] e di A^k [T.D.]: entrambi, nel relativo dominio, sono rappresentabili come **combinazione lineare dei modi naturali dei rispettivi sistemi**.

ENUNCIATO TEOREMA DI STABILITÀ SUI MODI NATURALI PER SISTEMI LTI A TD

Ipotesi:

\forall sistema LTI a tempo discreto

Tesi:

Il sistema è stabile $\Leftrightarrow \forall \lambda_i^k$ del sistema, $\exists M > 0 : |\lambda_i^k| < M$

Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \forall \lambda_i^k$ del sistema, $\exists M > 0 : |\lambda_i^k| < M \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = 0$

Il sistema è instabile $\Leftrightarrow \exists \lambda_i^k$ del sistema per cui $\nexists M > 0 : |\lambda_i^k| < M$

ENUNCIATO TEOREMA DI STABILITÀ SUGLI AUTOVALORI PER SISTEMI LTI A TD

Ipotesi:

\forall sistema LTI a tempo discreto

Tesi:

Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \forall \lambda_i : |\lambda_i| < 1 \ \forall i = 1 \dots n$

Il sistema è instabile $\Leftrightarrow \exists \lambda_i : (|\lambda_i| > 1) \vee (|\lambda_i| = 1 \wedge \mu_i \neq \nu_i) \ \forall i = 1 \dots n$

Il sistema è stabile \Leftrightarrow Detto $I = \{1, \dots, n\}$, si ha $I^* = \{i \in I : |\lambda_i| = 1 \wedge \mu_i = \nu_i\} \neq \emptyset \wedge \forall j \in I \setminus I^*, |\lambda_j| < 1$

Come fatto per i sistemi LTI a tempo continuo, **si vogliono individuare dei criteri con i quali discriminare la stabilità in funzione dei coefficienti del polinomio caratteristico**. Detti $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gli autovalori della matrice A , ovvero quei numeri tali che:

$$\varphi(z) = \det(zI_n - A) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n = 0$$

ENUNCIATO CONDIZIONI NECESSARIE ALLA STABILITÀ DI SISTEMI LTI A TD

Ipotesi:

\forall sistema LTI a tempo discreto asintoticamente stabile

Tesi:

$$\begin{cases} \left| \frac{\varphi_n}{\varphi_0} \right| < 1 \\ \left| \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right| < n \end{cases}$$

$$(-1)^n \varphi_0 \varphi(-1) > 0$$

Essendo condizioni necessarie, **è solo possibile dire che in mancanza della tesi il sistema non è asintoticamente stabile**, se la condizione è verificata non si può essere certi che il sistema sia o meno asintoticamente stabile.

ENUNCIATO CONDIZIONI SUFFICIENTI ALLA STABILITÀ DI SISTEMI LTI A TD

Ipotesi:

$$\varphi_0 > \varphi_1 > \cdots > \varphi_{n-1} > \varphi_n$$

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i| < |\varphi_0|$$

Tesi:

\forall sistema LTI a tempo discreto asintoticamente stabile

Quelle finora individuate sono solo condizioni necessarie o condizioni sufficienti, utili come prove circostanziali alla ricerca della stabilità. Per avere un criterio necessario e sufficiente **per discriminare la stabilità di un sistema LTI a tempo discreto si può fare riferimento un analogo del criterio di Routh, detto criterio di Jury**.

Il criterio di Jury parte dal polinomio caratteristico e ne costruisce su una tabella, detta tabella di Jury, composta da $n + 1$ righe tali che ognuna perde una colonna rispetto alla precedente. L'elemento della i – esima riga e della j – esima colonna è così definito:

$$l_i = \frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j-i+1} \\ h_j & h_i \end{bmatrix} = h_i - \frac{h_j}{h_1} h_{j-i+1}$$

Sapendo che se un elemento della prima colonna è nullo, tutta l'iterazione è bloccata e la tabella viene detta non ben definita.

Considerato il seguente polinomio (che può essere considerato un polinomio caratteristico):

$$\varphi(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

La sua tabella di Jury sarà composta come segue:

$n + 1$	φ_0	φ_1	φ_{n-1}	φ_n
...
j	h_1	h_2	...	h_{j-1}	h_j	
$j - 1$	l_1	l_2	...	l_{j-1}		
...			
...				
1	k_1					

Come per la tabella di Routh, c'è la possibilità di moltiplicare un'intera riga per un numero positivo, così da poter eliminare eventuali frazioni scomode. A questo punto, è possibile enunciare il teorema che costituisce la vera e propria condizione necessaria e sufficiente in questione.

ENUNCIATO TEOREMA DI JURY

Ipotesi:

\forall sistema LTI : $\varphi(z)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica A

Tesi:

Il sistema è asintoticamente stabile \Leftrightarrow La tabella di Jury costruita a partire da $\varphi(z)$ è ben definita e tutti i coefficienti della colonna all'estrema sinistra hanno lo stesso segno

Elencati i modi con cui è possibile dire se un **sistema LTI a tempo discreto** è asintoticamente stabile o meno, si elenchino le **proprietà di questo tipo di sistemi**:

1. **I movimenti liberi dello stato e dell'uscita tendono asintoticamente ad annullarsi** per $k \rightarrow +\infty$, indipendentemente dallo stato iniziale (essendo combinazione lineare di modi naturali asintoticamente tendenti a zero);
2. **Il movimento forzato dello stato e dell'uscita**, sotto taluni ingressi, **tende alla propria parte a regime**, mentre **il transitorio** (essendo combinazione lineare di modi naturali, osservabili e raggiungibili, asintoticamente tendenti a zero) **si esaurisce**;
3. **La risposta all'impulso dello stato e dell'uscita tendono ad annullarsi** per $k \rightarrow +\infty$ (essendo combinazione lineare di modi naturali asintoticamente tendenti a zero);

4. **La risposta ad un qualunque ingresso di durata limitata** (ossia che è nullo da un certo istante di tempo in poi) **tende a zero in maniera asintotica**, dal momento in cui vi sarà solo parte libera dopo un certo periodo di tempo;
5. **Non vi potrà essere alcun autovalore unitario**, dal momento in cui $\det(I_n - A) \neq 0$;
 - a. Ciò implica un solo stato di equilibrio \bar{x} dipendente da \bar{u} a cui tenderà il movimento dello stato per $k \rightarrow +\infty$ quando il sistema è sollecitato da \bar{u} stesso (analogamente per l'uscita di equilibrio \bar{y});
 - b. Ogni autovalore sarà $|\lambda_i| < 1$.

ENUNCIATO TEOREMA DI ASINTOTICA E BIBO STABILITÀ

Ipotesi:

\forall sistema LTI a tempo discreto

Tesi:

Valgono le seguenti implicazioni:

1. Il sistema è asintoticamente stabile \Rightarrow Il sistema è BIBO stabile
2. Il sistema è asintoticamente stabile e in forma minima \Leftrightarrow Il sistema è BIBO stabile

Anche a tempo discreto è possibile **linearizzare un sistema non LTI con un certo grado di errore** per poterne studiare più facilmente le proprietà strutturali. Si consideri un **generico sistema dinamico stazionario**:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} : x(0) = x_0$$

Supponendo \bar{x} stato d'equilibrio per l'ingresso \bar{u} :

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$$

E che:

1. I funzionali **f** e **g** siano sufficientemente continui da poter essere espansi con lo sviluppo in serie di Taylor;
2. **Gli infinitesimi di ordine superiore** associati a tale sviluppo siano trascurabili.

Si introducano delle piccole perturbazioni:

$$u(k) = \bar{u} + \delta u(k)$$

$$x(k) = \bar{x} + \delta x(k)$$

$$y(k) = \bar{y} + \delta y(k)$$

$$x_0 = \bar{x} + \delta x_0$$

E le si sostituisca nel sistema:

$$\begin{cases} \bar{x} + \delta x(k+1) = f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k)) \\ \bar{y} + \delta y(k) = g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k)) \end{cases}$$

Espandendo in serie di Taylor entrambe le equazioni:

$$\begin{aligned} \bar{x} + \delta x(k+1) &= f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(k) \\ &\quad + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(k) + o(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k)) \\ \bar{y} + \delta y(k) &= g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(k) \\ &\quad + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(k) + o(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k)) \end{aligned}$$

Quindi, con le dovute semplificazioni:

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(k) + \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(k) \\ \delta y(k) = \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(k) + \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(k) \end{cases}$$

Al quale è possibile associare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = \hat{A} \delta x(k) + \hat{B} \delta u(k) \\ \delta y(k) = \hat{C} \delta x(k) + \hat{D} \delta u(k) \end{cases}$$

Dove:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \hat{B} &= \frac{\partial f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \hat{C} &= \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \hat{D} &= \frac{\partial g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{aligned}$$

Questo sistema, **linearizzazione del sistema originario, approssima le dinamiche nell'intorno dello stato di equilibrio \bar{x} .**

ENUNCIATO TEOREMA DI ASINTOTICA STABILITÀ DELLA LINEARIZZAZIONE

Ipotesi:

\forall sistema LTI linearizzazione di un sistema dinamico stazionario : è asintoticamente stabile/instabile

Tesi:

Il sistema dinamico stazionario originario è asintoticamente stabile/instabile

E risulta essere una condizione sufficiente per la proprietà di stabilità di un sistema non LTI. Proprio come per il caso a tempo continuo, non è possibile dire nulla sulla stabilità semplice a causa della seconda ipotesi.

LE ALTRE PROPRIETÀ STRUTTURALI A TEMPO DISCRETO

Le due proprietà di stabilità mancanti alla trattazione sono **la raggiungibilità e l'osservabilità**.

RAGGIUNGIBILITÀ

Uno stato \tilde{x} è detto raggiungibile se esiste un istante di tempo finito $\tilde{k} > 0$ ed un ingresso \tilde{u} definito in $[0, \tilde{k}]$ tale che, detto $x_F(k)$ il movimento forzato dallo stato generato da tale ingresso, sia:

$$x_F(\tilde{k}) = \tilde{x}$$

Se tutti gli stati del sistema godono di questa proprietà, il sistema è detto **completamente raggiungibile**. Riprendendo la definizione di movimento forzato:

$$x_F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Si cerchi di capire quali sono gli stati raggiungibili ad un certo istante di tempo k :

- $k = 0$

$$x_F(0) = x_0$$

- $k = 1$

$$x_F(1) = B u(0)$$

- $k = 2$

$$x_F(2) = ABu(0) + Bu(1)$$

- $k = 3$

$$x_F(3) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

- ...

Si può desumere che, all'istante k , gli stati raggiungibili sono determinati dalla combinazione lineare delle colonne di:

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B]$$

Per il teorema di Caley – Hamilton, è inutile andare oltre l'iterazione $n - 1$ – esima, e cioè $k = n$; di conseguenza, uno stato se è raggiungibile potrà essere trovato in al più n iterazioni.

Si costruisca, con quanto detto finora, la **matrice di raggiungibilità**:

$$M_R = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$

E si individui un **criterio per la raggiungibilità** basato su tale costruzione.

ENUNCIATO CRITERIO NECESSARIO E SUFFICIENTE DI RAGGIUNGIBILITÀ

Ipotesi:

∀ sistema LTI a tempo discreto

Tesi:

Il sistema è completamente raggiungibile $\Leftrightarrow \rho(M_R) = n \Leftrightarrow \det(M_R) \neq 0 \Leftrightarrow m = 1$

Nel caso in cui $\rho(M_R) = n_R < n$, è possibile mettere in evidenza la parte raggiungibile con un cambio di rappresentazione di stato già mostrato nella trattazione dei sistemi a tempo continuo.

OSSERVABILITÀ

Uno stato $\tilde{x} \neq 0$ è detto non osservabile se $\forall \tilde{k} > 0$ istante di tempo finito, detta $y_L(k)$ l'uscita libera del sistema generata da \tilde{x} , risulta:

$$y_L(k) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq \tilde{k}$$

Un sistema privo di stati non osservabili (detti anche stati osservabili) è detto completamente osservabile. Si costruisca la **matrice di osservabilità**:

$$M_O = [C^T \quad A^T C^T \quad A^{T^2} C^T \quad \dots \quad A^{T^{n-1}} C^T] \in \mathbb{R}^{n \times pn}$$

E si individui un **criterio per l'osservabilità** basato su tale costruzione.

ENUNCIATO CRITERIO NECESSARIO E SUFFICIENTE DI OSSERVABILITÀ

Ipotesi:

∀ sistema LTI a tempo discreto

Tesi:

Il sistema è completamente osservabile $\Leftrightarrow \rho(M_O) = n \Leftrightarrow \det(M_O) \neq 0 \Leftrightarrow p = 1$

Nel caso in cui $\rho(M_O) = n_O < n$, è possibile mettere in evidenza la parte non osservabile con un cambio di rappresentazione di stato già mostrato nella trattazione dei sistemi a tempo continuo.

La scomposizione canonica isola le quattro parti possibilmente presenti in un sistema (raggiungibile e non osservabile, raggiungibile e osservabile, non raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile e osservabile) **e la sua costruzione segue dagli stessi procedimenti elencati per i sistemi a tempo continuo.** In maniera del tutto analoga, è possibile dire che anche a tempo discreto **la risposta impulsiva dipende solo dalla parte osservabile e raggiungibile del sistema.**

LA FDT E LA RISPOSTA ALLO SCALINO A TEMPO DISCRETO

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} : x(0) = x_{k0}$$

Considerando:

$$X(z) = Z[x(k)](z) \wedge Y(z) = Z[y(k)](z) \wedge U(z) = Z[u(k)](z)$$

Si applichi la trasformata zeta al sistema:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} zX(k) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (zI_n - A)X(z) = zx_{k0} + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X(z) = z(zI_n - A)^{-1}x_{k0} + (zI_n - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = zC(zI_n - A)^{-1}x_{k0} + [C(zI_n - A)^{-1}B + D]U(z) \end{array} \right. \end{aligned}$$

In entrambe le equazioni, **il primo addendo specifica la risposta libera e il secondo la risposta forzata.** Confrontando quanto appena rilevato con le rispettive quantità nel dominio del tempo:

$$\begin{cases} x(k) = A^k x_{k0} + (g_x * u)(k) \\ y(k) = CA^k x_{k0} + (g_y * u)(k) \end{cases}$$

Si può concludere che:

$$A^k = Z^{-1}[z(zI_n - A)^{-1}](k)$$

Definendo la funzione di trasferimento come:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D = \mathcal{Z}[g_y(k)](z)$$

Infatti:

$$Y_F(z) = G(z)U(z) \Leftrightarrow y_F(k) = (g_y * u)(k)$$

Come per sistemi a tempo continuo, **la funzione di trasferimento sarà una trasformata fratta di grado al più n se il sistema è proprio, in forma minima.** Per sistemi **non in forma minima** si avranno **delle cancellazioni e i poli corrisponderanno agli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema** (quando il sistema è proprio sono tutti gli autovalori del sistema).

Oltre alla funzione di trasferimento, **l'analogia con i sistemi a tempo continuo si estende alla matrice delle risposte impulsive nello stato:**

$$H(z) = (zI_n - A)^{-1}B = \mathcal{Z}[g_x(k)](z)$$

Infatti:

$$X_F(z) = H(z)U(z) \Leftrightarrow x_F(k) = (g_x * u)(k)$$

Infine, è possibile anche per sistemi a tempo discreto passare rapidamente dalla rappresentazione $i - u$ del sistema ad una rappresentazione in funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} y(k) + \alpha_{l-1}y(k-1) + \cdots + \alpha_1y(k+1-l) + \alpha_0y(k-l) \\ = \beta_lu(k) + \beta_{l-1}u(k-1) + \cdots + \beta_1u(k+1-l) + \beta_0u(k-l) \end{aligned}$$

Applicando la trasformata zeta:

$$\begin{aligned} Y(z) + \alpha_{l-1}Y(z)z^{-1} + \cdots + \alpha_1Y(z)z^{1-l} + \alpha_0Y(z)z^{-l} \\ = \beta_lU(z) + \beta_{l-1}U(z)z^{-1} + \cdots + \beta_1U(z)z^{1-l} + \beta_0U(z)z^{-l} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_l + \beta_{l-1}z^{-1} + \cdots + \beta_1z^{1-l} + \beta_0z^{-l}}{1 + \alpha_{l-1}z^{-1} + \cdots + \alpha_1z^{1-l} + \alpha_0z^{-l}}$$

Nel caso di sistemi ad ingressi ritardati:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k-h) \end{cases}$$

La funzione di trasferimento “ritardata” è:

$$G^*(z) = G(z) \cdot \frac{1}{z^h}$$

Si vuole adesso mostrare la procedura con la quale **un sistema in rappresentazione ingresso – uscita viene trasformato, dapprima in rappresentazione f.d.t. in forma polinomiale, e poi in forma di poli e zeri.** Il sistema in questione è:

$$\begin{aligned} \alpha_ny(k+n) + \alpha_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + \alpha_1y(k+1) + \alpha_0y(k) \\ = \beta_mu(k+m) + \beta_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + \beta_1u(k+1) + \beta_0u(k) \end{aligned}$$

Con le condizioni iniziali:

$$y(0) = y(1) = \dots = y(n-1) = y(n) = 0$$

Applicando la trasformata Zeta:

$$\begin{aligned} \alpha_n z^n Y(z) + \alpha_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + \alpha_1 z Y(k) + \alpha_0 Y(k) \\ = \beta_m z^m U(z) + \beta_{m-1} z^{m-1} U(z) + \dots + \beta_1 z U(z) + \beta_0 U(z) \end{aligned}$$

La **rappresentazione polinomiale** della funzione di trasferimento per questo sistema è:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

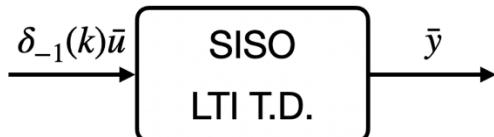
Mentre la sua **rappresentazione in forma di poli e zeri**:

$$G(z) = \gamma \cdot \frac{\prod_i (z - z_i) \prod_i (z^2 - 2\varphi_i \cos(\zeta_i) z + \varphi_i^2)}{(z - 1)^g \prod_i (z - p_i) \prod_i (z^2 - 2\rho_i \cos(\vartheta_i) z + \rho_i^2)}$$

Con:

- $z_i \neq 1$ e $p_i \neq 1$ zeri e poli non unitari del sistema;
- $\varphi_i > 0$ e $\rho_i > 0$ i moduli delle coppie di zeri e poli complessi coniugati;
- ζ_i e ϑ_i i rispettivi argomenti;
- g , intero non nullo, tipo del sistema;
- γ costante di trasferimento (diversa dall'omonimo μ dei sistemi a tempo continuo);

Per lo **studio del guadagno** si supponga di avere un **sistema SISO**, con $g \geq 0$, $|p_i| < 1$, $\rho_i < 1$ e $x_{k_0} = 0$. Il guadagno viene **determinato a partire dall'inserimento in questo sistema di un segnale costante $\delta_{-1}(k)\bar{u}$ e alla valutazione dell'uscita in relazione proprio a tale ingresso**:



Si considerino i seguenti casi:

- $g = 0$

Il segnale di ingresso viene zeta – trasformato:

$$u(k) = \delta_{-1}(k)\bar{u} \xrightarrow{ZT} U(z) = \bar{u} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Con:

$$\bar{y} = \lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \bar{u} \cdot z [C(zI_n - A)^{-1}B + D]$$

Pertanto:

$$\bar{y} = \bar{u}[C(zI_n - A)^{-1}B + D] \Rightarrow \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = [C(zI_n - A)^{-1}B + D] = G(1) = \mu$$

- $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$

In maniera quanto più generalizzata:

$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^g G(z)$$

- $\mathbf{g} < \mathbf{0}$

Allora ci sono zeri nell'unità; un esempio per questo tipo di sistemi è il **derivatore ideale a tempo discreto**:

$$G(z) = \frac{z - 1}{z}$$

Che in forma $i - u$ è:

$$y(k) = u(k) - u(k - 1)$$

La derivazione è singola se $g = -1$ e multipla per $g < -1$.

- $\mathbf{g} > \mathbf{0}$

Allora ci sono poli nell'unità; un esempio per questo tipo di sistemi è l'**integratore ideale a tempo discreto**:

$$G(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Che in forma $i - u$ è:

$$y(k) - y(k - 1) = u(k) \Rightarrow y(k) = y(k - 1) + u(k)$$

L'integrazione è singola se $g = 1$ e multipla per $g > 1$.

Per quanto riguarda lo **studio della costante di trasferimento γ** , si tenga in considerazione che **il suo valore deve essere tale portare**:

$$\mu = G(1)$$

Quindi:

$$\gamma = \mu \cdot \frac{\prod_i (1 - p_i) \prod_i (1 - 2\rho_i \cos(\vartheta_i) + \rho_i^2)}{\prod_i (1 - z_i) \prod_i (1 - 2\varphi_i \cos(\zeta_i) + \varphi_i^2)}$$

Generalmente non si definiscono le costanti di tempo come il reciproco di poli e zeri, mentre per poli/zeri complessi coniugati si lascia l'espressione in termini di modulo e fase esplicativi.

Si analizzi ora l'andamento della risposta ad un ingresso a scalino, di ampiezza unitaria e con trasformata $U(z) = z/(z - 1)$, di un sistema SISO asintoticamente stabile con funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} : m \leq n \wedge \alpha_n \neq 0 \wedge \beta_m \neq 0 \wedge x_{k_0} = 0$$

Si è già potuto osservare come il valore di regime, $y(\infty) = \bar{y}$, sia nullo in presenza di eventuali azioni derivative ($g < 0$) e pari al guadagno $\mu = G(1)$ altrimenti. Per quanto riguarda il valore iniziale $y(0)$, si può sfruttare il teorema del valore iniziale e determinare:

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) \cdot \frac{z}{z - 1} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow m < n \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} \Leftrightarrow m = n \end{cases}$$

Per gli istanti successivi, ricordando che:

$$\mathcal{Z}[y(k+l)](z) = z^l \left(Y(z) - \sum_{h=0}^{l-1} y(h)z^{-h} \right)$$

Si ha:

$$y(1) = \lim_{z \rightarrow +\infty} zY(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) \cdot \frac{z^2}{z - 1} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow m < n - 1 \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} \Leftrightarrow m = n - 1 \end{cases}$$

Generalizzando:

$$y(l) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow m < n - l \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} \Leftrightarrow m = n - l \end{cases}$$

Ad esempio:

$$\#1, \begin{cases} m = 3 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow y(0) \neq 0$$

$$\#2, \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow y(0) = 0 \wedge y(1) \neq 0$$

$$\#3, \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow y(0) = 0 \wedge y(1) = 0 \wedge y(2) \neq 0$$

Appare, così, chiaro che il primo “passo” a non essere nullo sia quello $n - m$; se $m < n$, pertanto, i passi fino al $n - m - 1$ (incluso) sono nulli. Si parla, quindi, di tempo di latenza, facendo riferimento ai primi $n - m$ passi nulli della risposta allo scalino e coincide con il grado relativo del sistema.

Si consideri, adesso, un sistema del primo ordine con funzione di trasferimento:

$$G(z) = \mu(1 - p) \cdot \frac{1}{z - p} : p \neq 0$$

In corrispondenza di un **ingresso impulsivo**:

$$u(k) = \delta_{-1}(k) \xrightarrow{zT} U(z) = \frac{z}{z-1}$$

L'uscita diventa:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \frac{\mu(1-p)}{z-p} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Sviluppando secondo Heaviside:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p} + \frac{A_2}{z-1} = -\frac{\mu}{z-p} + \frac{\mu}{z-1}$$

Infatti:

$$A_1 = \left. \frac{Y(z)}{z} (z-p) \right|_{z=p} = -\mu \wedge A_2 = \left. \frac{Y(z)}{z} (z-1) \right|_{z=1} = \mu$$

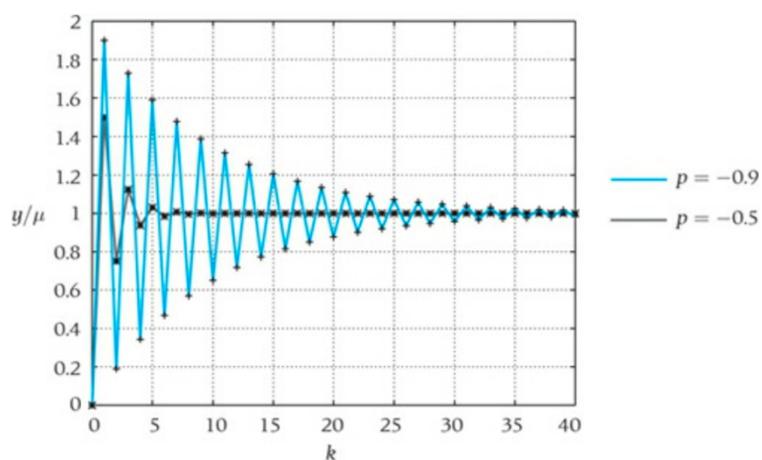
Quindi:

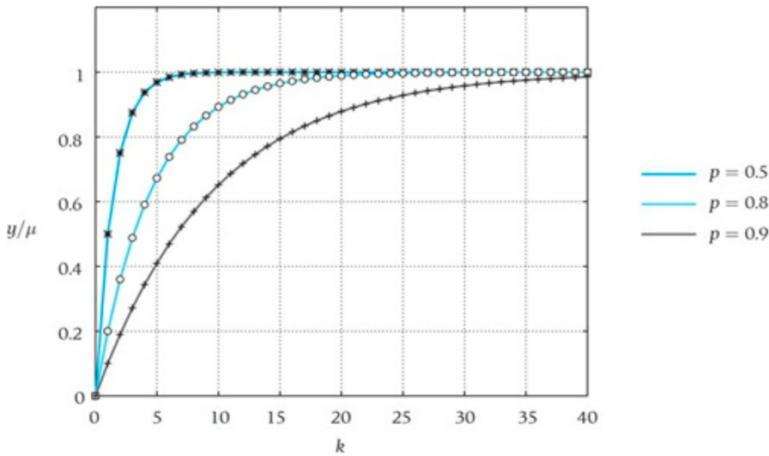
$$Y(z) = \frac{zY(z)}{z} = -\mu \frac{z}{z-p} + \mu \frac{z}{z-1} \xleftarrow{zT} y(k) = -\mu p^k \delta_{-1}(k) + \mu \delta_{-1}(k) = \mu(1-p^k) \delta_{-1}(k)$$

Dal risultato appena dimostrato e dal momento in cui il sistema è asintoticamente stabile, si può facilmente evincere che:

$$y(0) = 0 \wedge \bar{y} = G(1) = \mu$$

Inoltre, se $p > 0$, la risposta è monotona, altrimenti, per $p < 0$, oscillante; in ogni caso, l'uscita raggiunge il valore di regime tanto più velocemente quanto più è piccolo il valore di $|p|$.





Per quanto riguarda il tempo di assestamento, ci si deve sempre chiedere quand'è che l'uscita entra nell'intervallo $[\mu(1 - 0,01\epsilon), \mu(1 + 0,01\epsilon)]$; quindi:

$$\mu(1 - 0,01\epsilon) = \mu(1 - p^k)$$

$$0,01\epsilon = p^k$$

$$k = \log_p 0,01\epsilon = \frac{\log 0,01\epsilon}{\log|p|} \in \mathbb{Z}$$

Quindi, il tempo di assestamento al $(100 - \epsilon)\%$ è valutato come:

$$k_{a\epsilon} = \min \left\{ k \in \mathbb{Z} : k \geq \frac{\log 0,01\epsilon}{\log|p|} \right\}$$

Si consideri, adesso, un **sistema del secondo ordine con poli reali e con funzione di trasferimento**:

$$G(z) = \mu \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

In corrispondenza di un **ingresso impulsivo**:

$$u(k) = \delta_{-1}(k) \xrightarrow{ZT} U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

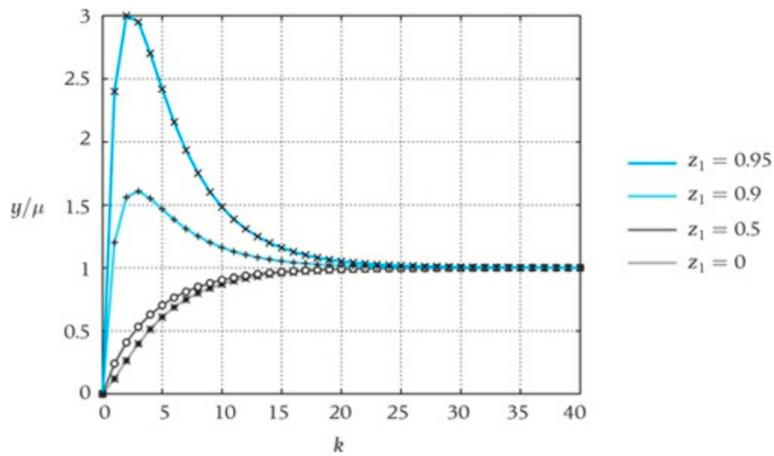
L'uscita diventa:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \xleftrightarrow{ZT} y(k) = (\mu + A_1 p_1^k + A_2 p_2^k) \delta_{-1}(k)$$

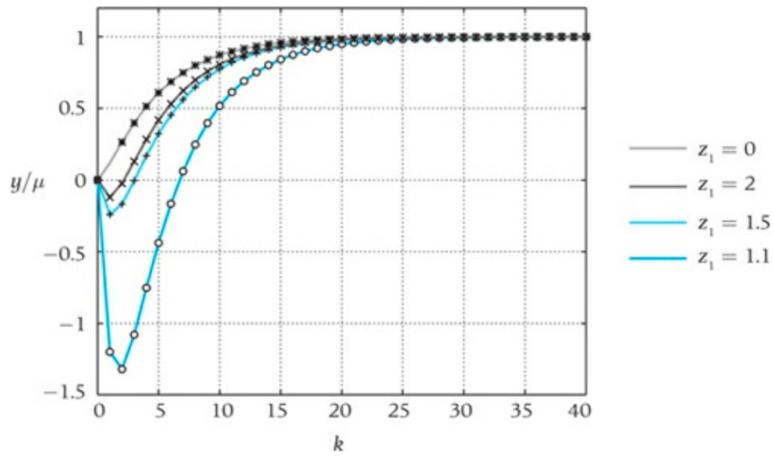
Ed è possibile dimostrarlo con un procedimento del tutto analogo a quello sviluppato per sistemi del primo ordine.

Si individuano due casi (entrambi sviluppati per sistemi dotati di poli $p_1 = 0.4$ e $p_2 = 0.8$):

- **0 < z₁ < 1**



- $z_1 > 1$



Si noti che:

- Se $p_2 > p_1$ e $z_1 < p_2$, allora la risposta è tanto più veloce quanto più aumenta z_1 ;
- Se $z_1 > p_2$, allora si manifesta una sovraelongazione tanto più pronunciata quanto più z_1 è prossimo al valore 1;
 - Quando $z_1 > 1$, si manifesta una sottoelongazione tanto più marcata quanto più z_1 è prossimo al valore 1.

Infine, si può affermare che **la presenza di uno zero $z_1 < 0$ non altera significativamente la risposta del sistema rispetto al caso in cui $z_1 = 0$** , che esso appartenga o meno alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine.

Si consideri, adesso, un **sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati e con funzione di trasferimento**:

$$G(z) = \mu \frac{(1 - 2\rho \cos(\vartheta) + \rho^2)z}{z^2 - 2\rho \cos(\vartheta)z + \rho^2}$$

In corrispondenza di un **ingresso impulsivo**:

$$u(k) = \delta_{-1}(k) \xrightarrow{ZT} U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

L'uscita diventa:

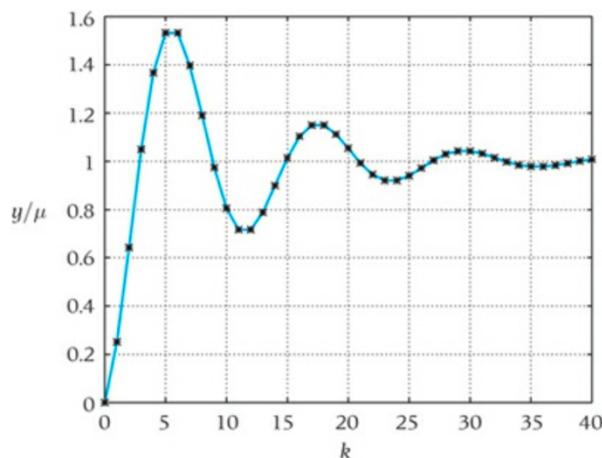
$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \xrightarrow{ZT} y(k) = (\mu + 2|A|\rho^k \cos(k\vartheta + \arg(A)))\delta_{-1}(k)$$

Ed è possibile dimostrarlo con un procedimento del tutto analogo a quello sviluppato per sistemi del primo ordine.

Si noti che **l'andamento dell'uscita è oscillante e che il numero N di campioni per periodo di oscillazione dipende dall'angolo ϑ** ; infatti, considerando valori di ϑ che siano sottomultipli di 2π e imponendo $\cos(k\vartheta) = \cos((k+N)\vartheta)$, risulta:

$$N = \frac{2\pi}{\vartheta}$$

Ad esempio, con $\rho = 0.9$ e $\vartheta = \pi/6$, si hanno 12 campioni per periodo di oscillazione e l'andamento dell'uscita si grafica come segue:



Inoltre, si noti che l'oscillazione dell'uscita è smorzata ($\rho < 1$) e modulata dal termine decrescente ρ^k ; pertanto, il tempo di assestamento della risposta è tanto maggiore quanto più il modulo dei poli è prossimo a 1. Infine, nel caso in cui il sistema non fosse asintoticamente stabile, si avrebbe un termine esponenziale ρ^k non più decrescente e tale da aumentare progressivamente l'ampiezza dell'oscillazione.

Supponendo l'asintotica stabilità, è possibile analizzare la risposta allo scalino per sistemi di ordini superiori assimilandola a uno dei casi finora approfonditi; in particolare, questa approssimazione (che inevitabilmente introduce errore ma che sarà sufficiente ad una valutazione qualitativa) sarà possibile nel momento in cui:

- Si cancellano i poli e gli zeri sufficientemente vicini;
- Si considerano poli dominanti (più lenti e più vicini alla circonferenza goniometrica);
- Si considera lo stesso guadagno;
- Si aggiungono poli/zeri nell'origine per preservare il grado relativo (stesso tempo di latenza).

SISTEMI FIR

I **sistemi FIR** sono già stati accennati, almeno da un punto di vista introduttivo, e possono essere individuati anche a partire dalla loro funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n} = \sum_{i=0}^m \beta_i z^{i-n}$$

Con $m \leq n$. Si può dedurre che l'uscita di questo tipo di sistemi sia:

$$y(k) = \beta_m u(k+m-n) + \cdots + \beta_0 u(k-n)$$

E che i poli si trovano solo nell'origine. Dalla forma della funzione di trasferimento si può facilmente intuire che i valori $g_y(k)$, con $k = 0, 1, \dots, m$ della risposta all'impulso del sistema sono:

$$g_y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)](k) = \sum_{i=0}^m \beta_i \delta(k+i-n) = \beta_{n-k} : \beta_i = 0 \quad \forall i < 0 \wedge i > m$$

Con $k = n - m$ il primo passo non nullo ed effettivo tempo di latenza della risposta impulsiva; infatti, $g_y(k)$ si annulla per $k = n + 1$ e denota la proprietà per cui la risposta all'impulso è finita (Finite Impulsive Response, FIR).

La risposta allo scalino, invece, si configura come segue:

$$h_y(k) = (g_y * \delta_{-1})(k) = \sum_{i=0}^k g_y(k-i) = \sum_{i=0}^k \beta_{n-i} : \beta_i = 0 \quad \forall i < 0 \wedge i > m$$

Quindi, così come la risposta all'impulso, anche la risposta allo scalino si esaurisce dopo un certo periodo di tempo e presenta un tempo di latenza pari a $n - m$. Per quanto riguarda il valore di regime:

$$\mu = G(1) = \sum_{i=0}^m \beta_i = \beta_0 + \cdots + \beta_m = \sum_{i=0}^n \beta_{n-i} = h_y(n)$$

Ovvero, la risposta allo scalino raggiunge il valore di regime μ dopo un numero di passi pari all'ordine del sistema n .

Disponendo di un sistema non FIR, ma conoscendone la risposta impulsiva $g_y(k)$, è possibile costruire un sistema approssimato FIR. In primis, è necessario scegliere il grado relativo del sistema M tale che:

$$g_y(M+i) \approx 0 \quad \forall i > 0$$

Si parte da un sistema proprio di ordine M del tipo:

$$G(z) = \frac{\beta_M z^M + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^M} = \frac{g_y(0)z^M + \cdots + g_y(M-1)z + g_y(M)}{z^M}$$

Ricordando che $g_y(k) = \beta_{n-k}$. Infine, si impone il valore di regime **G(1)** in modo che risulti essere il **guadagno del sistema** (ovvero la risposta allo scalino), moltiplicando per l'opportuna costante.

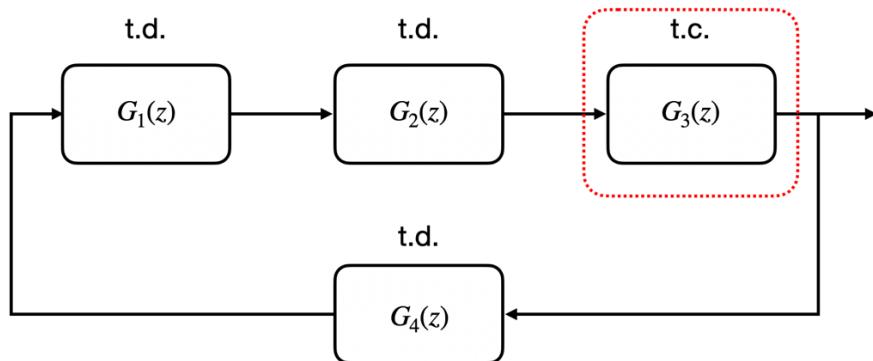
Nel caso in cui non si disponga della risposta impulsiva $g_y(k)$ ma di quella allo scalino $h_y(k)$, si può sfruttare la proprietà per cui:

$$g_y(k) = h_y(k) - h_y(k-1)$$

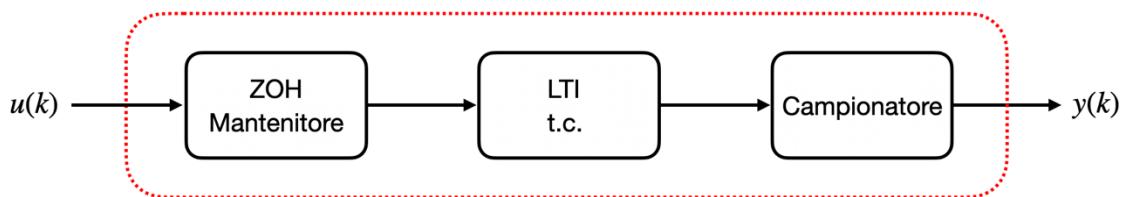
Si noti, infine, che l'ordine **M** del modello approssimante può essere piuttosto elevato, certamente superiore a quello del sistema di partenza; pertanto, l'interesse della procedura appena descritta non può essere rivolto alla riduzione dell'ordine di un sistema.

SISTEMI A DATI CAMPIONATI

Si consideri un sistema il cui schema a blocchi è così realizzato:



Si vuole sostituire la componente del sistema a tempo continuo con una a tempo discreto, la cui funzione di trasferimento $G_3^*(z)$ approssima $G_3(k)$. Il sistema in questione è così composto:



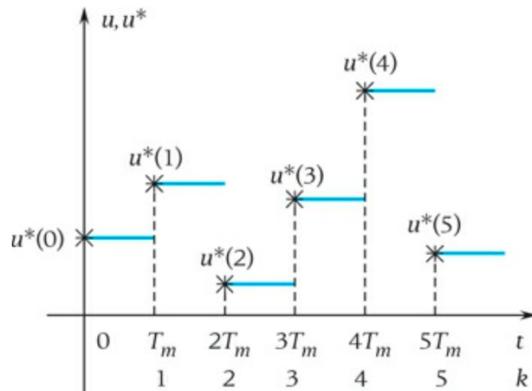
Con il sistema LTI a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Una volta ottenuta una rappresentazione equivalente della serie tra questi tre sistemi si otterrà un **sistema a dati campionati**.

Il primo dei tre blocchi che verranno analizzati è il mantenitore; si tratta di un convertitore D/A che, quindi, prende ingressi a tempo discreto per produrre un'uscita a tempo continuo. Quello utilizzato in questa sede è un ZOH (Zero Order Hold), il cui funzionamento fa affidamento ad un polinomio interpolatore di ordine zero che, per ogni valore dell'ingresso discreto, mantiene

quello stesso valore per ogni istante di tempo continuo finché non ne incontra un altro, in modo tale da produrre un'uscita continua composta da diverse rette costanti:



La funzione che descrive questo comportamento è la seguente:

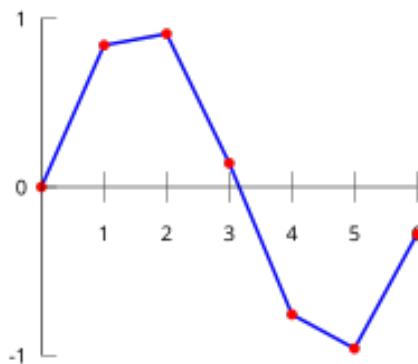
$$y(t) = u(k) \quad \forall t : kT_m + \tau_m < t < (k+1)T_m + \tau_m$$

Dove T_m è detto **periodo** (o passo) di mantenimento e $\tau_m \in [0, T_m)$ il **relativo ritardo**; segue che, frequenza e pulsazione di mantenimento sono:

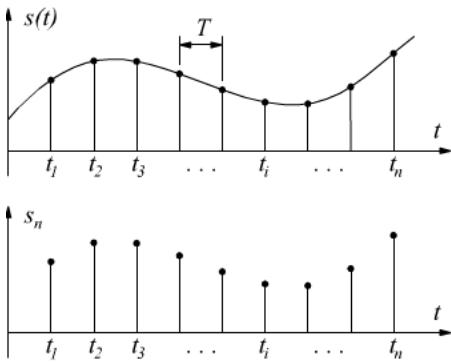
$$f_m = \frac{1}{T_m} \wedge \omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$$

Si noti che **all'ingresso è moltiplicata la costante unitaria** (non è esclusa, sebbene poco utile praticamente, la moltiplicazione per una costante non unitaria), **che può essere vista come un polinomio di ordine zero**, che da nome al mantenitore.

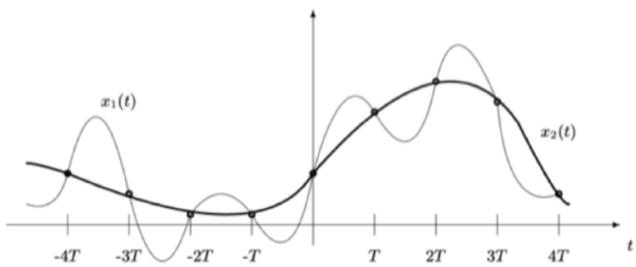
In realtà, **quello che fa uso di un polinomio di ordine zero non è l'unico mantenitore utilizzabile**: quelli comunemente più conosciuti fanno utilizzo di **polinomi di primo ordine** e vengono detti **mantenitori ad interpolazione lineare** (lerp); tuttavia, sebbene siano molto più accurati e precisi, **l'impiego di questi sistemi introduce un ritardo** e, per quella che è l'applicazione considerata in questa sede, non è produttivo introdurre altri ritardi (si aumenterebbe solo l'ordine del sistema).



La parte terminale di questo sistema è composto da un campionatore, un convertitore A/D che, quindi, prende ingressi a tempo continuo per produrre un'uscita a tempo discreto. Il campionamento (processo eseguito dal campionatore) prevede la costruzione del segnale a tempo discreto prelevando periodicamente, con una frequenza (o un periodo) di campionamento fissata, i valori dal segnale a tempo continuo:



La scelta del periodo di campionamento è fondamentale per un campionatore, dal momento in cui essa **definisce la bontà dell'operazione**; infatti, **un periodo di campionamento troppo basso o troppo elevato può portare il campionatore** (soprattutto in seguito ad un'eventuale quantizzazione) **a perdere delle cifre significative**, e quindi a far apparire un segnale costante quando il segnale è variabile, o a far perdere informazioni circa la variazione del segnale, come mostrato di seguito:



L'equazione che descrive il funzionamento di un campionatore è la seguente:

$$y(k) = u(kT_s + \tau_s)$$

Con T_s periodo (o passo) di campionamento e $\tau_s \in [0, T_s]$ il relativo ritardo; segue che, frequenza e pulsazione di campionamento sono:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \wedge \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

La scelta del periodo di campionamento può essere fatta sulla base di diversi criteri:

- **Criterio del tempo di assestamento**

È un criterio eristico per il quale si prende da α a 10α campioni nell'intervallo di tempo di assestamento $T_{a\varepsilon}$ (generalmente $T_{a1\%}$ perché conosciuto per sistemi del primo e del secondo ordine e per quei sistemi approssimabili ad uno dei due precedenti) con $\alpha \in [5, 10]$ tale che:

$$\frac{T_{a\varepsilon}}{10\alpha} \leq T_s \leq \frac{T_{a\varepsilon}}{\alpha}$$

- **Criterio della banda a 3dB ($g = 0$)**

Si consideri la pulsazione ω_c , definita come la massima pulsazione oltre la quale il diagramma di Bode del modulo non supera $\mu_{dB} - 3dB$, e si sceglie la pulsazione di campionamento tale che:

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c$$

Con $\alpha \in [5,10]$.

Una volta approfonditi i due componenti principali del sistema serie ZOH – t.c. – campionatore, **si vuole effettivamente andare a cercare il suo sistema equivalente**. Supponendo $T_m = T_s = T$, si sa che:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Studiando il sistema in un periodo di campionamento ($t_0 = kT \wedge t = kT + T$):

$$u(t) = u(kT) \quad \forall t \in [kT, kT + T]$$

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= e^{A(kT+T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}x(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}d\tau \right) Bu(kT) \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile:

$$\varphi = kT + T - \tau : d\varphi = -d\tau$$

Gli estremi di integrazione diventano:

$$\tau = kT \Rightarrow \varphi = kT + T - kT = T$$

$$\tau = kT + T \Rightarrow \varphi = kT + T - kT - T = 0$$

Pertanto:

$$x(kT + T) = e^{AT}x(kT) - \left(\int_T^0 e^{A\varphi} d\varphi \right) Bu(kT) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A\varphi} d\varphi \right) Bu(kT)$$

Ponendo:

$$\begin{cases} x^*(k) = x(kT) \\ u^*(k) = u(kT) \\ y^*(k) = y(kT) \end{cases}$$

Si ha:

$$x^*(k+1) = e^{AT}x^*(k) + \left(\int_0^T e^{A\varphi} d\varphi \cdot B \right) u^*(k) = A^*x^*(k) + B^*u^*(k)$$

Il sistema equivalente diventa:

$$\begin{cases} x^*(k+1) = A^*x^*(k) + B^*u^*(k) \\ y^*(k) = Cx^*(k) + Du^*(k) \end{cases}$$

Con **C** e **D** le stesse matrici del sistema di partenza. Quella ottenuta è la **rappresentazione i-s-u** del sistema a dati campionati menzionato all'inizio della trattazione.

Se la matrice A è invertibile, il calcolo di B^* è semplificato:

$$B^* = \int_0^T e^{A\varphi} d\varphi \cdot B = A^{-1} \int_0^T A e^{A\varphi} d\varphi \cdot B = A^{-1} [e^{A\varphi}]_0^T B = A^{-1} (e^{AT} - I_n) B$$

E la funzione di trasferimento $G_3^*(z)$ si ottiene come segue:

$$G_3^*(z) = C(zI_n - A^*)^{-1} B^* + D$$

L'approssimazione appena effettuata è esatta negli istanti di campionamento. Resta solo da determinare il modo in cui mappare gli autovalori, da quelli del sistema a tempo continuo (s_1, \dots, s_n) a quelli del sistema a tempo discreto (z_1, \dots, z_n); per sistemi di primo ordine:

$$A^* = e^{AT} \Rightarrow z = e^{sT}$$

Questa affermazione può essere generalizzata per sistemi di ordine n in modo da poter dire che:

$$z_i = e^{s_i T} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

L'operazione in questione prende il nome di **mapping degli autovalori**, ci si chiede se essa sia una **relazione biunivoca** (ovvero se il mapping esiste ed è unico); si considerino due autovalori a tempo continuo diversi tali che:

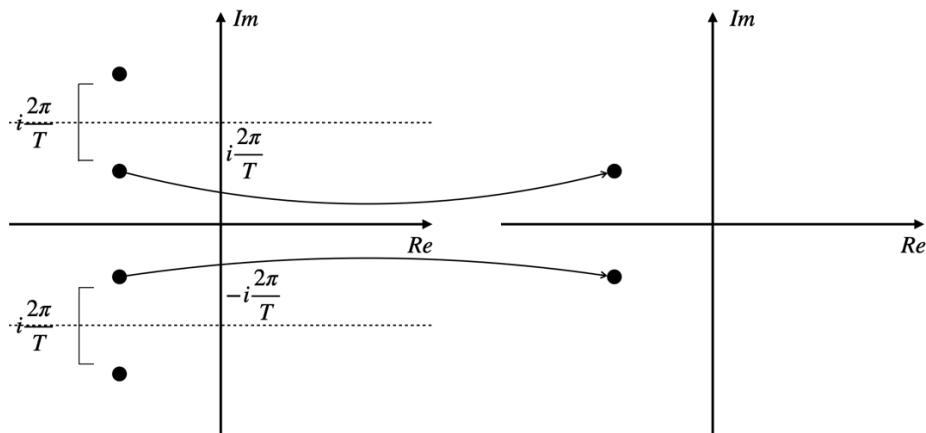
$$\forall s_p, s_q : s_p \neq s_q \wedge s_q = s_p + i \frac{2\pi}{T} h \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

Ovvero, sono autovalori la cui parte immaginaria si scosta di un multiplo intero della pulsazione di campionamento $\omega = 2\pi/T$. Fatta questa premessa, ci si chiede se tali autovalori distinti possano essere mappati su due autovalori a tempo discreto diversi:

$$z_p = e^{s_p T}$$

$$z_q = e^{s_q T} = e^{(s_p + i \frac{2\pi}{T} h)T} = e^{s_p T} e^{i \frac{2\pi}{T} h T} = z_p e^{i 2\pi h} = z_p$$

Quindi, **due autovalori a tempo continuo diversi sono mappati sullo stesso autovalore a tempo continuo se la loro parte immaginaria è un multiplo intero della pulsazione di campionamento**. Quella appena descritta è un'altra manifestazione del fenomeno dell'aliasing:



Gli autovalori che differiscono di ωh sono ad una frequenza più elevata dei corrispettivi a $h = 0$, trovandosi anche più lontani dall'asse reale. Tipicamente, a tempo continuo si trascuravano questi autovalori perché non dominanti ma nell'approssimazione a tempo discreto non è più possibile dire altrettanto.

Questa declinazione dell'aliasing può essere mitigata prendendo campioni sempre più vicini tra loro, quindi con $T \rightarrow 0$; tuttavia, questa pratica non sempre porta a risvolti positivi, basti pensare che campioni più frequenti possono compromettere eventuali operazioni di quantizzazione o che il mapping degli autovalori faccia tendere quelli a tempo discreto al valore critico 1, visto che $e^{s_i T} \rightarrow 1$ per $T \rightarrow 0$. Pertanto, più i campioni sono frequenti e più sussistono problemi di instabilità, nonostante si attenui l'aliasing; il periodo di campionamento, quindi, va scelto abbastanza elevato da non tagliare la pulsazione del sistema ma abbastanza basso da non amplificare l'aliasing.

ENUNCIATO TEOREMA DI FORMA MINIMA DI SISTEMI A DATI CAMPIONATI

Ipotesi:

∀ sistema a dati campionati

Tesi:

Il sistema è in forma minima \Leftrightarrow Il sistema di partenza è in forma minima $\wedge \nexists s_p, s_q$ autovalori di A : $s_q = s_p + i \frac{2\pi}{T} h \forall h \in \mathbb{Z}$

Per quanto riguarda il guadagno dei due sistemi, è possibile affermare che:

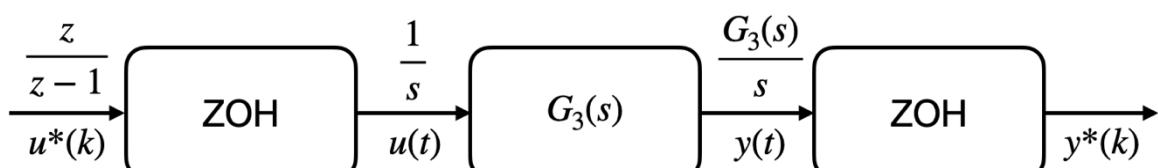
$$G_3(0) = G_3^*(1)$$

Infine, sia lo ZOH che il campionatore introducono un ritardo di $T/2$.

Si vuole concludere menzionando una proprietà dello ZOH con la quale ricavare $G_3^*(z)$ senza passare per la forma i – s – u del sistema a dati campionati. La proprietà in questione è l'invarianza del mantenitore rispetto allo scalino:



Il sistema complessivo, invece, assume la seguente forma:



Con:

$$u^*(k) = \delta_{-1}(k) \wedge y^*(k) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_3(s)}{s} \right] (t) \Big|_{t=kT}$$

Z – trasformando $y^*(k)$:

$$Y(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_3(s)}{s} \right] (t) \Big|_{t=kT} \right] (k)$$

La funzione di trasferimento diventa, così:

$$G_3^*(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} Y(z)$$

Essa è perfettamente funzionante, in quanto **applicazione della propria definizione**, ma può essere usata per dedurre le proprietà di stabilità e l'ordine del sistema solo se $G_3(s)$ è in forma minima.

