



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

CONTROLLO ROBUSTO DI UN HARD DISK

---

## INDICE

1. DESCRIZIONE DEL SISTEMA
2. FORMALIZZAZIONE DEL SISTEMA
3. DESCRIZIONE DELLE INCERTEZZE
4. REQUISITI CLOSED LOOP DEL SISTEMA
5. INTRCONNESSIONI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO
6. DEFINIZIONE DELLE MATRICI DI PESO
7. ANALISI  $M$
8. CONTROLLORE  $H_\infty$
9. CONTROLLORE  $\mu$
10. CONTROLLORE LOOP SHAPING
11. CONTROLLORE LQG/LTR
12. CONFRONTO TRA I CONTROLLORI
13. BIBLIOGRAFIA

## DESCRIZIONE DEL SISTEMA

L'hard drive disk consiste alcuni dischi piatti ricoperti su entrambe le faccie da un sottile layer di materiale ferromagnetico. Questo viene utilizzato per memorizzare i dati sottoforma di pattern magnetici.

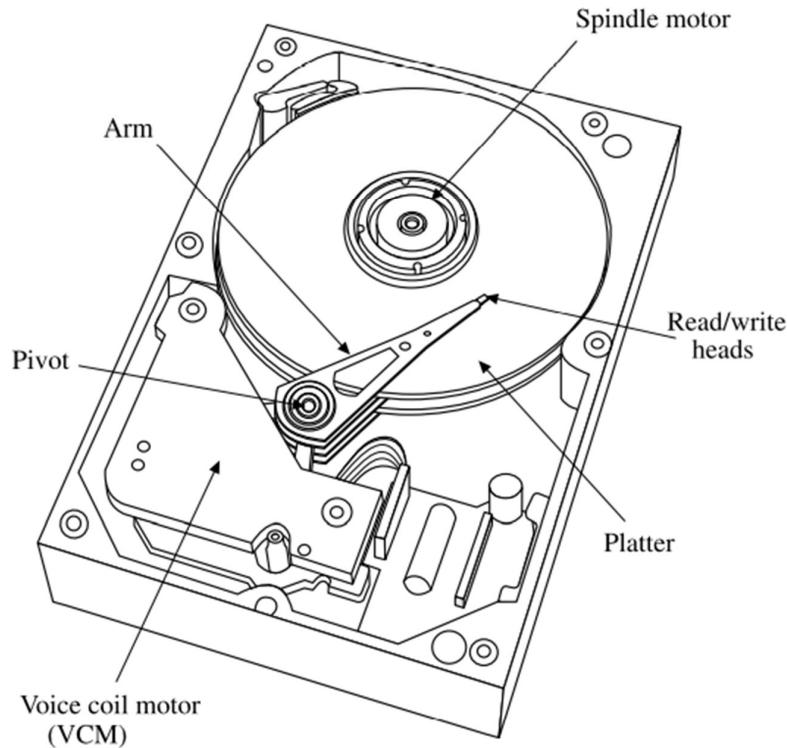
I platters vengono posti in rotazione ad alta velocità da un motore spindle fino a 15000 rpm e i dati vengono letti o scritti sul layer ferromagnetico dei platter da una testina mobile posizionata sopra i dischi rotanti sfruttando il principio di induzione magnetica. La testina viene movimentata da un VCM (voice coil motor).

Controllando la corrente circolante all'interno del VCM mediante un Power Amplifier(PA) è possibile muovere il braccio meccanico che tiene la testina di lettura/scrittura sospesa sopra il disco.

I dati nei dischi sono ordinati lungo circonferenze concentriche sul disco. La densità di tracce per millimetro è decisamente molto elevata e di conseguenza la distanza tra 2 tracce successive è molto piccola.

Per organizzare i dati, ogni traccia viene divisa in settori contenenti 512 bytes di informazioni.

### 14 Robust Control of a Hard Disk Drive



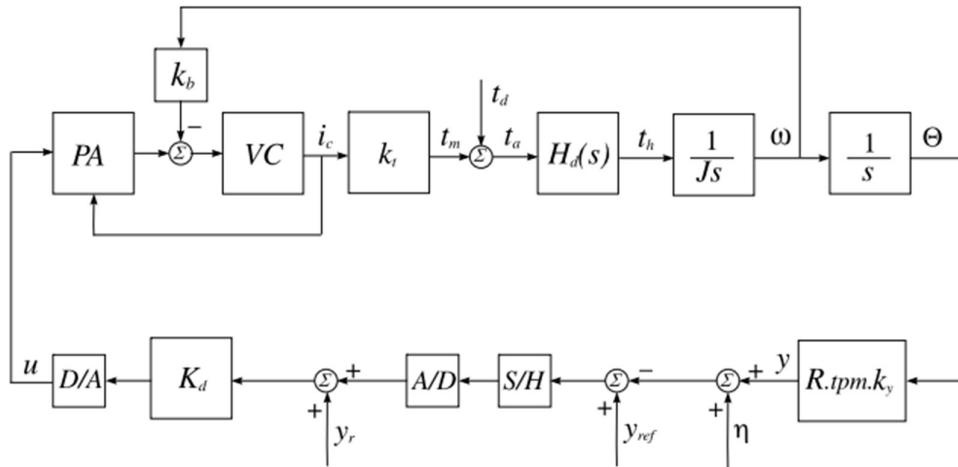
Gli obiettivi fondamentali del sistema di controllo dell'hard disk sono :

- track following
- seeking

Durante la fase di track following si vuole fare in modo di mantenere un preciso posizionamento della testina sulla traccia, mentre nella fase di seeking vogliamo che la testina si sposti tra le varie tracce.

## FORMALIZZAZIONE DEL SISTEMA

Volendo effettuare il controllo del posizionamento della testina di lettura scrittura, si fa riferimento al seguente schema:

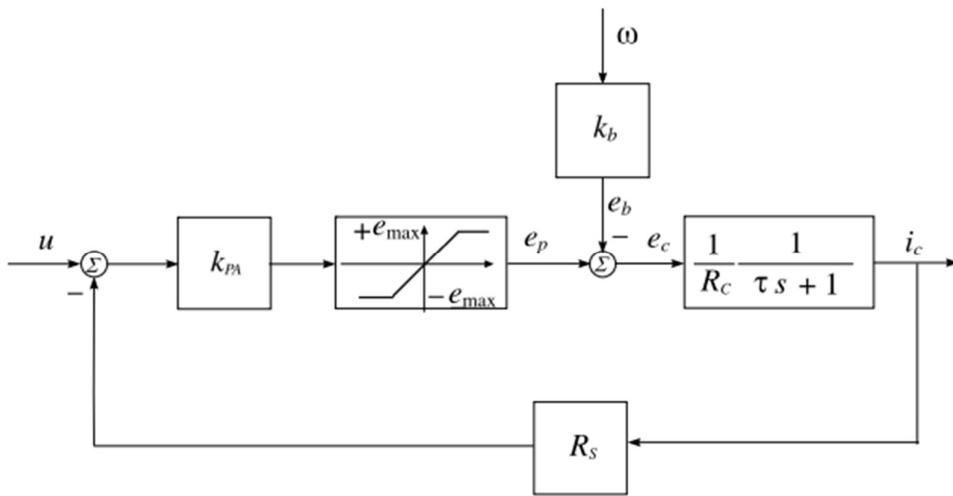


La testina viene mossa dal VCM pilotato in corrente attraverso un amplificatore di potenza. Il segnale di errore viene generato confrontando il riferimento  $y_{ref}$  con il segnale  $y$  (corrispondente in tensione della posizione effettiva  $\Theta$ ). Un ulteriore riferimento (segnale  $y_r$ ) indica qual è la traccia desiderata nella fase di ricerca.

L'errore di posizione viene campionato mediante un convertitore analogico/digitale e fornito a  $K_d$ , successivamente si effettua una fase di conversone digitale/analogico. Il segnale risultante viene mandato all'amplificatore che andrà a controllare il VCM. La coppia  $t_m$  erogata dal motore è funzione della corrente  $i_c$ .

All'interno del diagramma a blocchi sono presenti inoltre degli errori dovuti a disturbi, in particolare è presente un disturbo in coppia  $t_d$  dovuto a vibrazioni esterne e un segnale  $\eta$  che rappresenta l'errore di quantizzazione durante la conversione A/D e D/A.

La dinamica che riguarda la parte elettrica del controllo del VCM fa riferimento al seguente schema:



All'uscita dal blocco di amplificazione  $k_{PA}$  si ha la modellazione di una saturazione ( li segnale viene limitato tra  $+e_{max}$  al fine di non eccedere i limiti di tensione dell'attuatore imposti a 1,2V ). Successivamente si ha una dinamica elettrica che consiste in una attenuazione data da  $R_c$  e un polo in  $\tau$ . Il tutto viene chiuso in feedback.

La coppia del VCM è data da :

$$t_m = K_r * i_c$$

dove  $K_t$  è una costante relativa al motore e  $i_c$  + la corrente di controllo del VCM. La bobina è caratterizzata da  $R_{coil}$  e  $L_{coil}$  il cui rapporto va a definire la costante  $\tau$ . Una resistenza di sensing  $R_s$  viene inserita per implementare un feedback sull'amplificatore di potenza.

Il sottosistema viene quindi descritto mediante :

$$G_{vca}(s) = \frac{i_c(s)}{e_c(s)} = \frac{1}{R_c} \cdot \frac{1}{\tau * s + 1}$$

Dove :

- $e_c$  : tensione di input alla bobina
- $\tau$  : costante elettrica  $L_{coil}/R_{coil}$
- $R_{coil} = R_{coil} + R_s$

La dinamica meccanica del motore è invece descritta da :

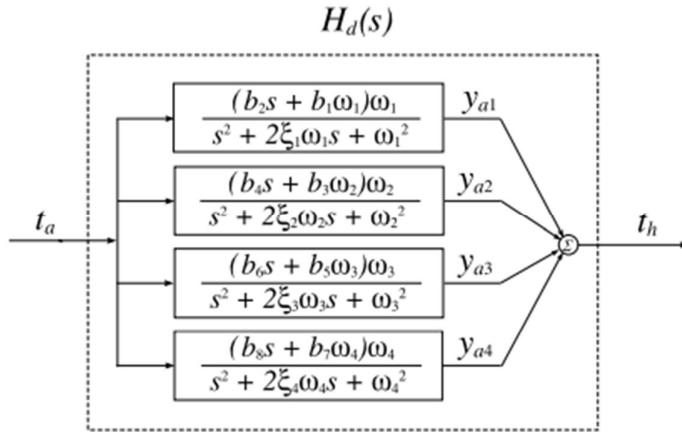
$$J\ddot{\vartheta} = (t_m + t_d) \cdot H_d(s)$$

Il segnale di uscita invece è :

$$y = r \cdot \vartheta \cdot k_y \cdot tpm$$

La dinamica della testina di lettura/scrittura è descritta, oltre dall'equazione della dinamica, anche da una serie di modi risonanti ad alta frequenza. Questi modi risonanti influenzano la dinamica dell'attuatore ed è quindi necessario considerarli in fase di progetto, infatti, essi limitano il possibile

design dei controllori che andremo ad implementare. Nel progetto del sistema di controllo ci occuperemo della fase di track following ignorando la fase di ricerca, ciò significa che  $y_{ref}$  sarà

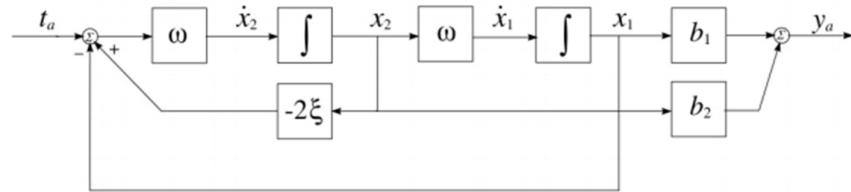


idealmente zero e il segnale  $y$  rappresenterà l'errore.

I modi risonanti da tenere in considerazione sono principalmente 4, essi sono caratterizzato dal parametro di smorzamento  $\xi_j$ , dalla frequenza di risonanza  $\omega_j$  e dai coefficienti di accoppiamento  $b_j$ :

$$H_d(s) = \sum_{j=1}^4 \frac{b_{2j} * \omega_j s + b_{2j-1} \omega_j^2}{(s^2 + 2\xi_j \omega_j s + \omega_j^2)}$$

Ciascun modo può essere rappresentato come segue :



I parametri  $\omega_j$  sono incerti e vengono raccolti nel vettore  $\omega = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4]$ .

$$\dot{x}_1 = \omega \cdot (-x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \omega \cdot (-x_1 - 2\xi \cdot x_2 + t_a)$$

$$y_a = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

E' da tenere in considerazione che non tutti i parametri sono perfettamente conosciuti e di conseguenza alcune condizioni di lavoro possono variare. Il sistema closed loop risulta essere quindi molto sensibile, specialmente al segnale di disturbo in coppia  $t_d$  e dal rumore di misura  $\eta$ .

Dobbiamo quindi in queste condizione garantire la stabilità e le performance del sistema closed loop.

In forma di stato il sistema assume la seguente forma:

```
>> G.Nom

ans =

A =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8      x9      x10     x11
x1  -1.02e+04      0      0      0      0      0      0      0      0  1.123e+05      0
x2      0      0  314.2      0      0      0      0      0      0      0      0
x3  -11.75  -314.2  -188.5      0      0      0      0      0      0      0      0
x4      0      0      0      0  1.382e+04      0      0      0      0      0      0
x5  -11.75      0      0 -1.382e+04  -663.5      0      0      0      0      0      0
x6      0      0      0      0      0  4.021e+04      0      0      0      0      0
x7  -11.75      0      0      0      0 -4.021e+04 -1.037e+04      0      0      0      0
x8      0      0      0      0      0      0      0      0  5.529e+04      0      0
x9  -11.75      0      0      0      0      0      0      0 -5.529e+04 -1.913e+04      0      0
x10     0  1.885      0  179.7  -24.88  2.907e+04  -60.32  1.299e+04  -1454      0      0
x11     0      0      0      0      0      0      0      0      0      0  1.566e+05      0

B =
      u1      u2
x1      0  -78.13
x2      0      0
x3      1      0
x4      0      0
x5      1      0
x6      0      0
x7      1      0
x8      0      0
x9      1      0
x10     0      0
x11     0      0

C =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8      x9      x10     x11
y1      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0  6.096e+04

D =
      u1  u2
y1      0      0

Continuous-time state-space model.
```

## DESCRIZIONE DELLE INCERTEZZE

I parametri incerti del sistema sono ottenibili mediante la seguente tabella:

Parameter	Description	Value	Units	Tolerance
$J$	arm moment of inertia	$6.3857 \times 10^{-6}$	$\text{kg m}^2$	$\pm 10.0 \%$
$R$	arm length	$5.08 \times 10^{-2}$	m	$\pm 0.1 \%$
$k_{PA}$	amplifier gain	10.0	V/V	$\pm 0.0 \%$
$k_t$	VCM torque constant	$9.183 \times 10^{-2}$	N m/A	$\pm 10.0 \%$
$k_b$	back e.m.f. constant	$9.183 \times 10^{-2}$	N m/A	$\pm 10.0 \%$
$tpm$	tracks per meter	$10^6$	tracks	—
$k_y$	position measurement gain	1.2	V/track	$\pm 5.0 \%$
$R_{coil}$	coil resistance	8.00	$\Omega$	$\pm 20.0 \%$
$R_s$	sense resistance in the power amplifier feedback	0.2	$\Omega$	$\pm 1.0 \%$
$L_{coil}$	coil inductance	0.001	H	+0, -15 %
$e_{\max}$	saturated power amplifier voltage	12.0	V	-0, +5 %
<b>RPM</b>	disk rotation rate	7200	rev/min	$\pm 1.0 \%$
$t_w$	track width	1	$\mu\text{m}$	$\pm 1.0 \%$

Sono presenti anche incertezze sui modi di risonanza, riportati nella seguente tabella:

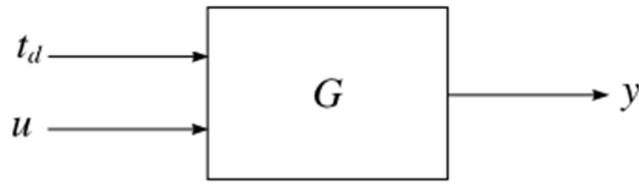
Parameter	Description	Value	Units	Tolerance
$\omega_1$	pivot bearing resonance	$2\pi 50$	rad/s	$\pm 5.0 \%$
$\omega_2$	first torsional resonance	$2\pi 2200$	rad/s	$\pm 12.0 \%$
$\omega_3$	second torsional resonance	$2\pi 6400$	rad/s	$\pm 8.0 \%$
$\omega_4$	first sway resonance	$2\pi 8800$	rad/s	$\pm 15.0 \%$
$b_1$	first resonance coupling	0.006	—	$\pm 7.0 \%$
$b_2$	first resonance coupling	0	1/s	$\pm 7.0 \%$
$b_3$	second resonance coupling	0.013	—	$\pm 10.0 \%$
$b_4$	second resonance coupling	-0.0018	1/s	$\pm 7.0 \%$
$b_5$	third resonance coupling	0.723	—	$\pm 5.0 \%$
$b_6$	third resonance coupling	-0.0015	1/s	$\pm 10.0 \%$
$b_7$	fourth resonance coupling	0.235	—	$\pm 5.0 \%$
$b_8$	fourth resonance coupling	-0.0263	1/s	$\pm 10.0 \%$
$\xi_1$	first resonance damping	0.05	—	$\pm 5.0 \%$
$\xi_2$	second resonance damping	0.024	—	$\pm 8.0 \%$
$\xi_3$	third resonance damping	0.129	—	$\pm 10.0 \%$
$\xi_4$	fourth resonance damping	0.173	—	$\pm 10.0 \%$

Conoscendo le relazioni fisiche relative al sistema è quindi possibile definire completamente il modello incerto del sistema.

All'interno del file `define_system_HDD` vengono definiti tutti i parametri relativi all'HDD e il modello incerto del sistema considerando i valori e le tolleranze sopra riportate. L'incertezza dei parametri viene data definendo parametri incerti mediante la funzione `ureal`; essa crea un parametro reale incerto caratterizzato da un valore nominale e una incertezza, analogamente è stato utilizzato `icsignal` per generare segnali incerti.

Durante la costruzione del sistema incerto è stato necessario costruire anche i modi risonanti, caratterizzati anch'essi dalla loro incertezza.

Il sistema da controllare ha quindi la seguente forma :



Abbiamo quindi 2 ingressi :

- $u$
- $t_d$

Il primo è l'ingresso di controllo del sistema, il secondo agisce come disturbo in coppia.

La scrittura delle equazioni del sistema è quindi esprimibile mediante matrici di trasferimento in questi termini:

$$G = [G_d \quad G_u]$$

Possiamo quindi definire una relazione ingressi-uscita di questo tipo :

$$y = G_d \cdot t_d + G_u \cdot u$$

$G_d$  e  $G_u$  rappresentano le funzioni di trasferimento scalari che mettono in relazione rispettivamente l'ingresso di disturbo in coppia con l'uscita e l'ingresso di controllo  $u$  con l'uscita.

Consideriamo nella trattazione le incertezze presenti nei modi risonanti e quelle presenti su  $J$ ,  $K_t$ ,  $K_y$ :

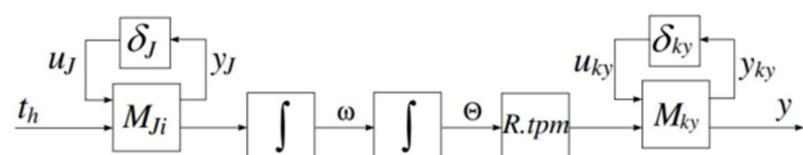
$$k_y = \bar{k}_y (1 + p_{k_y} \delta_{k_y}) \quad k_y = F_U(M_{k_y}, \delta_{k_y}) \quad -1 \leq \delta_{k_y} \leq 1$$

$$k_t = \bar{k}_t (1 + p_{k_t} \delta_{k_t}) \quad k_t = F_U(M_{k_t}, \delta_{k_t}) \quad -1 \leq \delta_{k_t} \leq 1$$

$$J = \bar{J} (1 + p_J \delta_J) \quad J = F_U(M_J, \delta_J) \quad -1 \leq \delta_J \leq 1$$

con:

$$M_{k_y} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_y \\ p_{k_y} & \bar{k}_y \end{bmatrix} \quad M_{k_t} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_t \\ p_{k_t} & \bar{k}_t \end{bmatrix} \quad M_{J_i} = \begin{bmatrix} -p_j & \frac{1}{j} \\ -p_j & \frac{1}{j} \end{bmatrix}$$

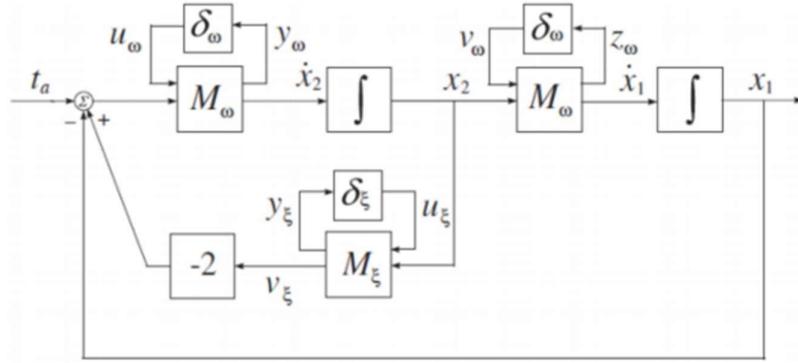


$$\xi = \bar{\xi} (1 + p_\xi \delta_\xi) \quad \xi = F_U(M_\xi, \delta_\xi) \quad -1 \leq \delta_\xi \leq 1$$

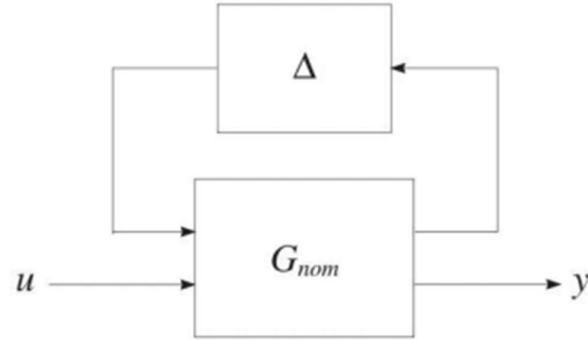
$$\omega = \bar{\omega} (1 + p_\omega \delta_\omega) \quad \omega = F_U(M_\omega, \delta_\omega) \quad -1 \leq \delta_\omega \leq 1$$

con:

$$M_\xi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\xi} \\ p_\xi & \bar{\xi} \end{bmatrix} \quad M_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ p_\omega & \bar{\omega} \end{bmatrix}$$



Mediante la trasformazione lineare fratta superiore (ULFT) possiamo porre il sistema incerto nella seguente forma:



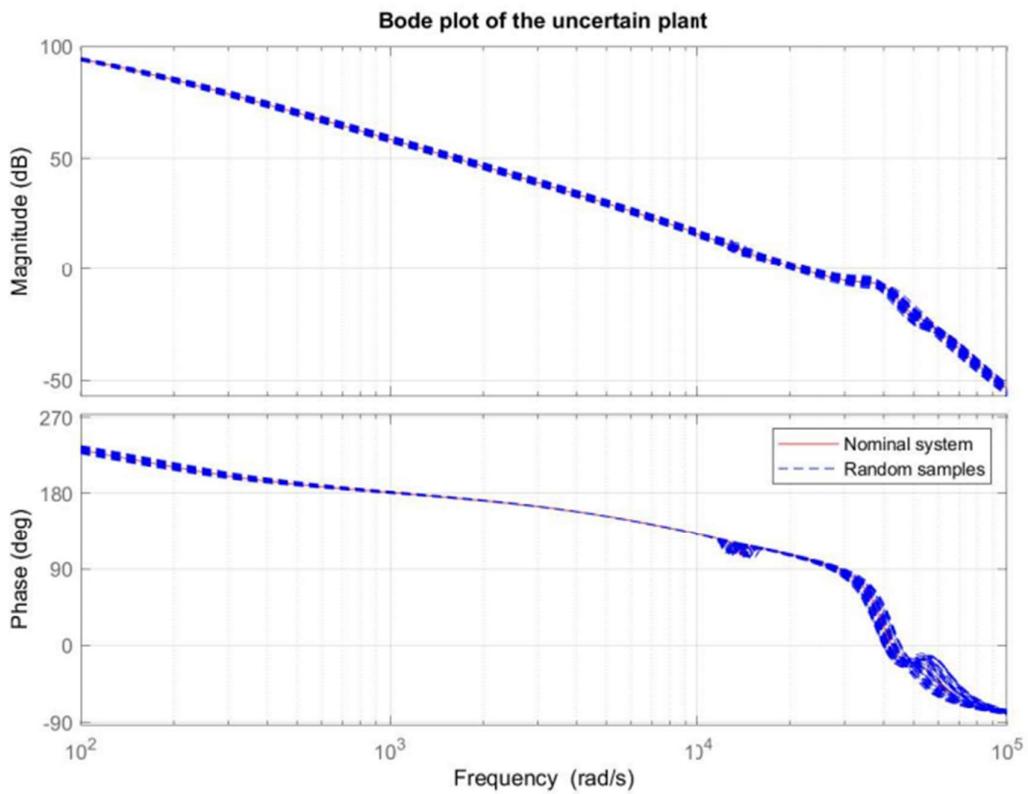
Raccogliendo le incertezze nel blocco delta , esso assume la seguente forma:

$$\Delta = diag(\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}, \delta_{\omega_3}, \delta_{\omega_4}, \delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}, \delta_{\omega_3}, \delta_{\omega_4}, \delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_3}, \delta_{\xi_4}, \delta_J, \delta_{K_t}, \delta_{K_y}); \|\Delta\|_\infty < 1$$

In questo modo è possibile, almeno per quanto riguarda la stabilità e le prestazioni nominali, studiare il sistema nominale. Successivamente si studierà il sistema completo introducendo le incertezze per garantire la robustezza.

Il modello complessivo che viene considerato nella trattazione è di 11esimo ordine e comprende solo 11 parametri incerti indipendenti , 15 se si considera il fatto che le  $\omega$  compaiono 2 volte come incertezze (quelli inseriti in  $\Delta$ ).

E' possibile vedere il comportamento del sistema nominale ad anello aperto e delle incertezze che lo caratterizzano sul seguente diagramma di bode



## REQUISITI CLOSED LOOP DEL SISTEMA

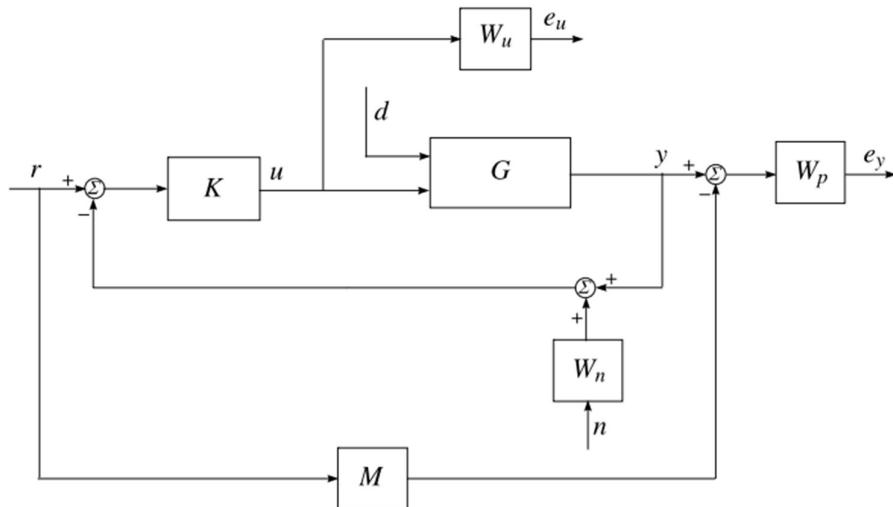
Per effettuare il design di un controllore per il servo dell'HDD consideriamo il problema di tipo tempo continuo per semplificare la trattazione.

Le specifiche di prestazioni da rispettare sono le seguenti:

Peak closed-loop gain	<4 dB
Open-loop gain	>20 dB at 100 Hz
Steady-state error	<0.1 $\mu\text{m}$
Settling time	<1.5 ms
Closed-loop bandwidth	>1000 Hz
Gain margin	>5 dB
Phase margin	>40 deg

Dobbiamo trovare delle funzioni di peso adeguate al rispetto delle specifiche date.

Lo schema a blocchi del sistema a circuito chiuso, che include la struttura di feedback e il controller, nonché gli elementi che rappresentano l'incertezza del modello e gli obiettivi di performance è mostrato nella seguente figura:



Questo sistema possiede 3 ingressi:

- $r \rightarrow$  riferimento
- $d \rightarrow$  disturbo
- $n \rightarrow$  rumore

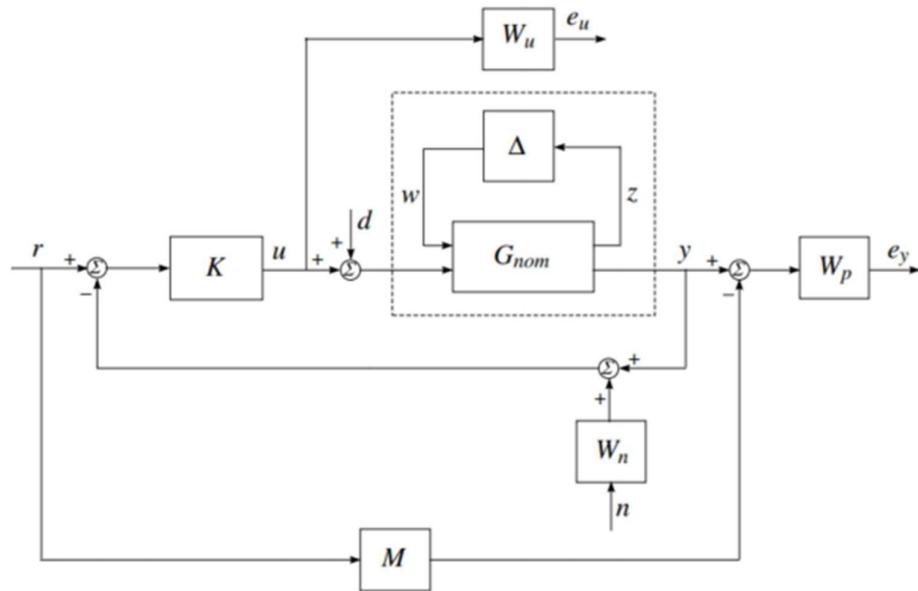
e 2 uscite di costo:

- $e_y$
- $e_u$

Il sistema M rappresenta un sistema ideale al quale il sistema reale cerca di tendere, mentre G rappresenta la matrice di trasferimento dell'impianto incerto. Il rispetto dei requisiti di performance

nominali si richiede che la matrice di trasferimento che lega i segnali  $r, y, d, e_y, e_u$  sia piccola in senso di norma infinito e, nel caso di performance robuste, deve valere per ogni incertezza presente all'interno del sistema.

E' possibile raccogliere le incertezze nel blocco  $\Delta$ , in questo modo è possibile effettuare lo studio sul sistema nominale e su quello incerto in maniera separata. Ci si riconduce quindi a un sistema a ciclo chiuso :



Definiamo quindi :

- $S_i = (I + K \cdot G)^{-1} \rightarrow$  sensibilità di ingresso
- $S_o = (I + G \cdot K)^{-1} \rightarrow$  sensibilità di uscita

Possiamo quindi scrivere la relazione ingresso uscita in termini di matrici di trasferimento come

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(S_o G_u K - M) & -W_p S_o G_d \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

segue :

Il problema di sintesi del controller dell'Hard Disk Drive Servo System è quello di trovare un controllore di retroazione di uscita lineare  $K(s)$  che deve garantire le seguenti proprietà del sistema a circuito chiuso:

- Stabilità nominale
- Performance nominali
- Stabilità robusta
- Performance robuste
- Ordine del controllore

#### STABILITÀ NOMINALE

Si richiede la stabilità nominale del sistema  $G_{nom}$ .

#### STABILITÀ ROBUSTA

Si richiede la stabilità del sistema per ogni  $G = F_u(G_{nom}, \Delta)$

#### PERFORMANCE NOMINALI

Per garantire le performance nominali è necessario che il sistema raggiunga i requisiti di prestazione nominale descritti precedentemente. Ciò viene garantito dal rispetto della seguente disegualanza:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S_o G_{u nom} K - M) & W_p S_o G_{d nom} & -W_p S_o G_{u nom} K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_{d nom} & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

#### PERFORMANCE ROBUSTE

Analogamente al caso di performance nominali, nel caso di robusta stabilità vogliamo garantire le performance nel caso in cui siano presenti le incertezze ossia per ogni  $G = F_u(G_{nom}, \Delta)$ . Dobbiamo quindi rispettare :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S_o G_u K - M) & W_p S_o G_d & -W_p S_o G_u K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_d & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

per ogni incertezza introdotta nel sistema.

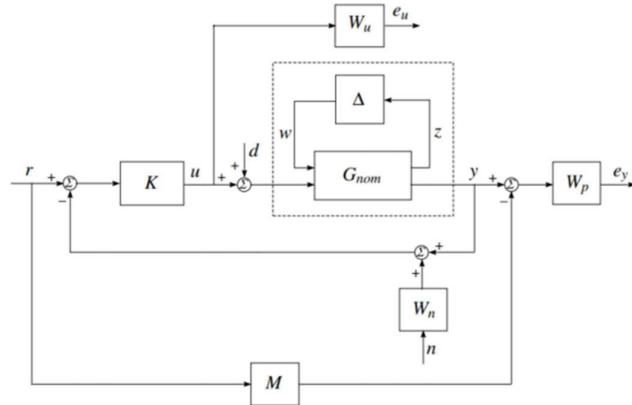
Ciò significa che il valore singolare strutturato massimo corrispondente alla matrice della funzione di trasferimento deve essere limitato da 1.

#### ORDINE DEL CONTROLLORE

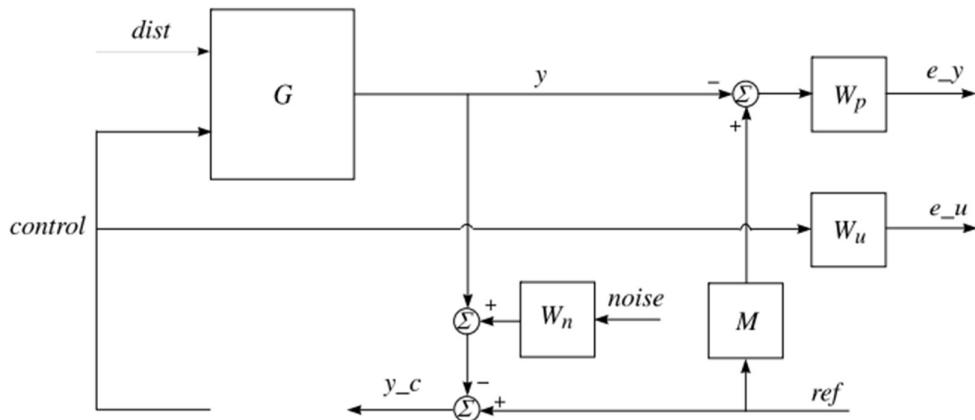
E' desiderabile che il controller progettato abbia una complessità accettabile, sia quindi di ordine ragionevolmente basso.

## INTERCONNESSIONI E SISTEMA A CICLO CHIUSO

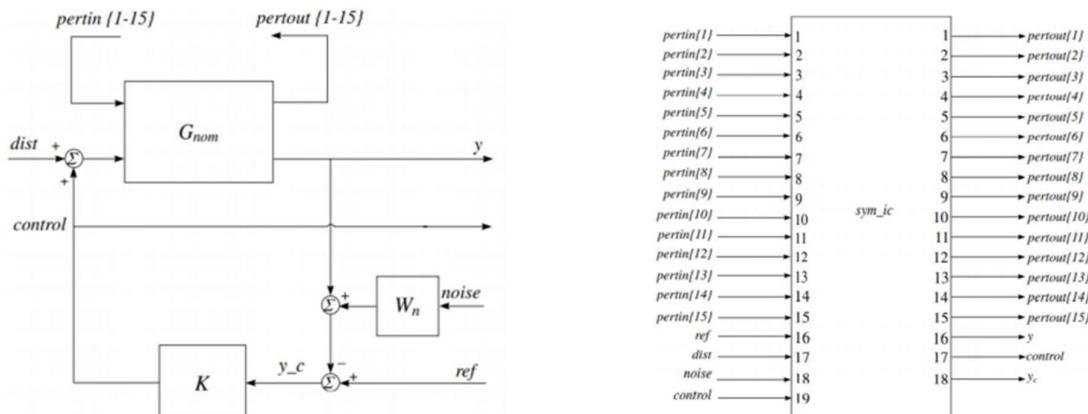
Dividendo le incertezze dal processo nominale nel blocco  $\Delta$ , ci siamo portati nella seguente forma :



Scollegando incertezze e controllore, si otterrà un sistema noinale a ciclo aperto descritto da diagramma a blocchi seguente:



Per quanto riguarda le interconnessioni usate nella realizzazione del sistema a ciclo chiuso, si riportano gli accoppiamenti scelti basati sullo schema:



## DEFINIZIONE DELLE MATRICI DI PESO

Per quanto riguarda le matrici di peso, è inizialmente stata scelta la matrice  $M$ , ossia la matrice di goal per quanto riguarda le prestazioni del sistema.

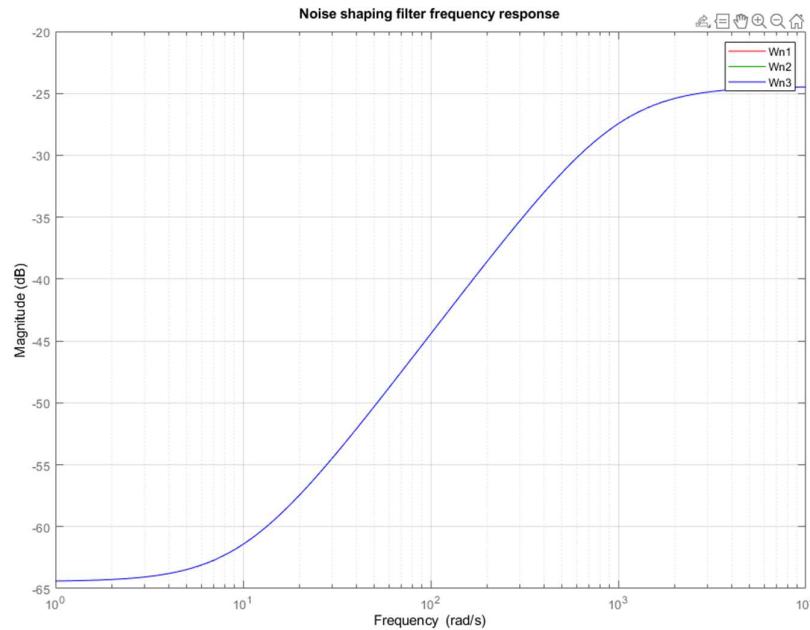
$M$  è infatti una fdt obiettivo che rispetta le specifiche di setting time inferiore a 1.5ms e senza overshoot.

$$M(s) = \frac{1}{3.75 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 1.2 \cdot 10^{-4} + 1}$$

Per quanto riguarda le matrici di peso  $W_u, W_p, W_n$ , esse sono state scelte per effettuare lo shaping dei segnali.

In particolare si ha una scelta della funzione di shaping del segnale di rumore basata sulla densità spettrale del rumore di posizione. Viene quindi scelto un filtro passa-alto:

$$W_n = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 0.1 \cdot s + 1}{0.001 \cdot s + 1}$$



la cui uscita ha un contenuto spettrale significativo superiore a 500 Hz.

Le matrici  $W_p$  e  $W_u$  sono state scelte per assicurare un buon trade-off tra le prestazioni e la robustezza del sistema closed loop.

In particolare sono state scelte 3 funzioni di peso per  $W_p$  e  $W_u$  ripetutivamente, così da poter effettuare un confronto sui risultati.

Le specifiche delle prestazioni del sistema a circuito chiuso si riflettono nella funzione di peso delle prestazioni  $W_p(s)$ . Nella progettazione sono considerate tre funzioni di peso delle prestazioni.

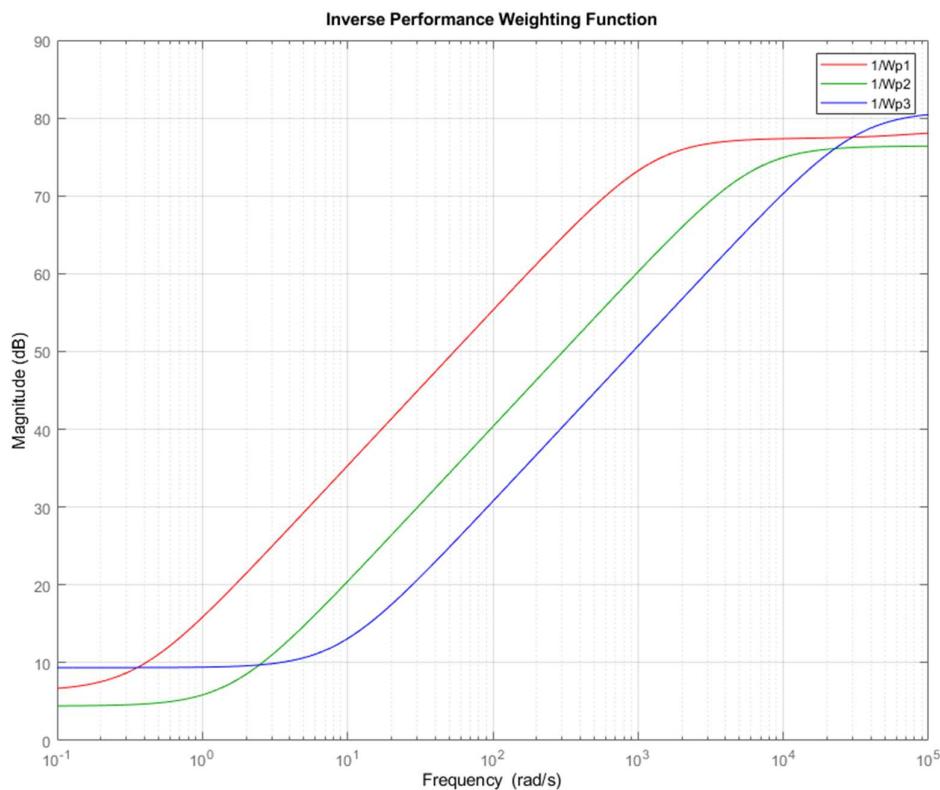
Le funzioni di peso delle prestazioni agiscono di fatto come filtri passabasso.

Lo scopo è di ottenere una piccola differenza tra le uscite del sistema e del modello e un piccolo effetto del disturbo sulle uscite del sistema.

$$W_{p1}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 8 \times 10^4 s + 10^8}{s^2 + 7 \times 10^4 s + 2.5 \times 10^4}$$

$$W_{p2}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 4 \times 10^5 s + 2.5 \times 10^9}{s^2 + 3.9 \times 10^5 s + 6.25 \times 10^5}$$

$$W_{p3}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 1.15 \times 10^6 s + 3.6 \times 10^{10}}{s^2 + 1.05 \times 10^6 s + 9 \times 10^6}$$

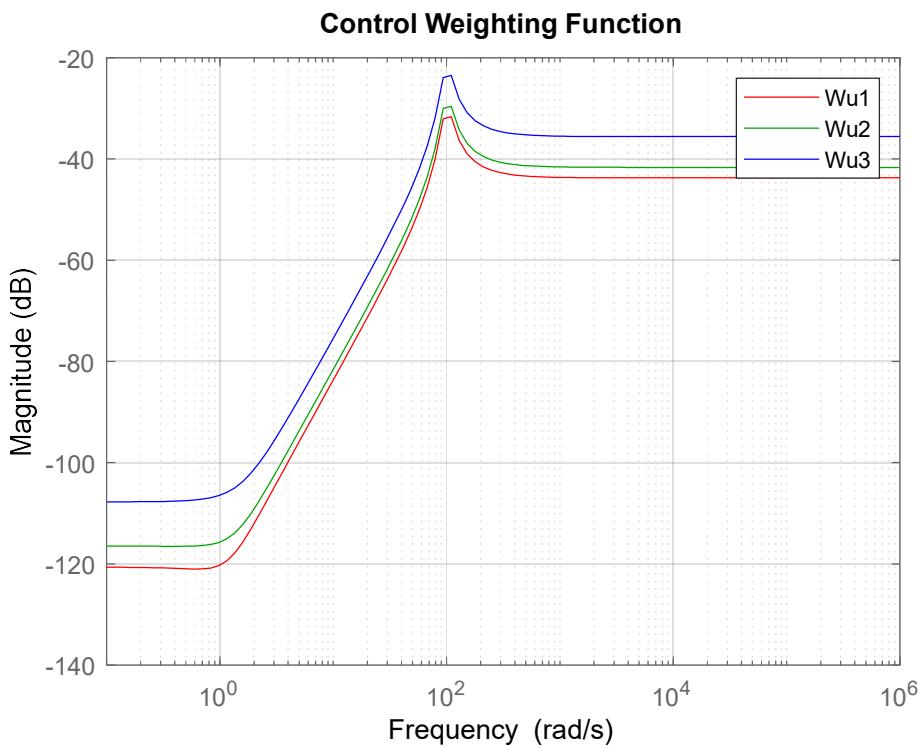


La funzione di peso del controllo viene solitamente scelta come filtro passa-alto per assicurarsi che l'azione di controllo non superi 1,2 V. Ancora una volta, tre di tali pesi, le funzioni considerate nella progettazione sono elencate di seguito:

$$W_{u1}(s) = 10^{-6} \frac{0.385s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1}$$

$$W_{u2}(s) = 10^{-6} \frac{0.55s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2.1 \times 10^{-3}s + 1}$$

$$W_{u3}(s) = 3 \times 10^{-6} \frac{4.05s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1}$$



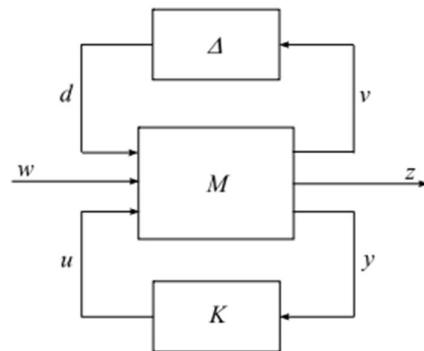
## ANALISI $\mu$

Per studiare il comportamento dei sistemi controllati incerti facciamo riferimento alla analisi mu.

L'analisi  $\mu$  sfrutta una analisi sul valore singolare strutturato della matrice di trasferimento closed loop con incertezze; rientra quindi nel calcolo la matrice di incertezze  $\Delta$ .

Per il raggiungimento della stabilità nominale è necessario che il valore singolare strutturato sia minore di 1 su tutto il range di frequenze operative.

Nella progettazione dei sistemi di controllo, oltre alla stabilità si deve tenere conto delle prestazioni del sistema. Il sistema progettato dovrebbe funzionare bene contro i disturbi esogeni. Il controller di feedback è solitamente progettato basato su un modello di impianto nominale. In caso di esistenza di perturbazioni sull'impianto, il sistema a circuito chiuso potrebbe funzionare male, addirittura degradarsi a un livello insoddisfacente. Le prestazioni robuste richiedono che un sistema di controllo progettato mantenga un livello prestazionale soddisfacente anche in presenza di dinamiche di impianto incerte.



Considerando la matrice M partizionata come :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Allora :

$$z = M_{22} + M_{21} \cdot \Delta \cdot (I - M_{11} \cdot \Delta)^{-1} \cdot M_{12} \cdot \omega = F_u(M, \Delta) \cdot \omega$$

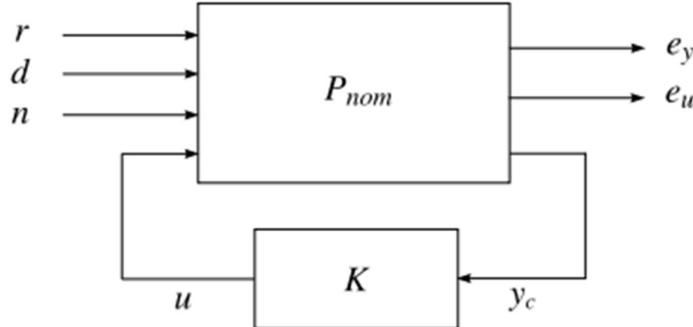
La condizione  $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty \cdot \omega < 1$  garantisce il rispetto della stabilità nominale al variare di  $\omega$ .

Per le prestazioni robuste si deve invece avere che  $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty \cdot \omega < 1$  deve essere valida per tutte le incertezze  $\tilde{\Delta}$ , ossia che incertezze che appartengono al set di incertezze tali che  $\|\Delta_p\|_\infty < 1$  dove  $\Delta_p$  è il blocco di incertezze non strutturate fittizio che ci permette di considerare il problema della robusta prestazione come un problema di robusta stabilità.

Questa analisi, al variare di  $\omega$  viene effettuata dalla funzione *robust\_analysys* ed effettua una analisi sui valori singolari massimi/minimi e una analisi sul valore singolare strutturato

## CONTROLLORE $H_\infty$

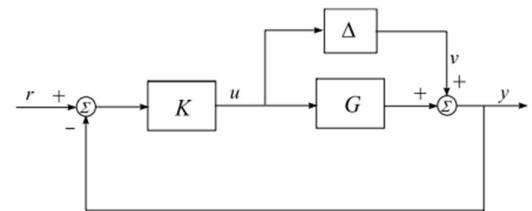
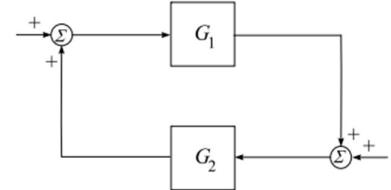
Facendo riferimento al diagramma in forma a 2 blocchi :



**Theorem 3.1** [28] If  $G_1(s)$  and  $G_2(s)$  are stable, i.e.  $G_1 \in \mathcal{H}_\infty$ ,  $G_2 \in \mathcal{H}_\infty$ , then the closed-loop system is internally stable if and only if

$$\|G_1 G_2\|_\infty < 1 \quad \text{and} \quad \|G_2 G_1\|_\infty < 1$$

La stabilità interna è garantita dal teorema del piccolo Guadagno. La condizione deve valere su tutte le frequenze. La norma infinito coincide inoltre con il valore singolare massimo della fdt.



$$F(M, K) = M_{11} + M_{12} K (I - M_{22} K)^{-1} M_{12}$$

$$F(M, \Delta) = M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{21}$$

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max}(F_l(P, K))(\jmath\omega) < \gamma$$

La sintesi del controllore  $H_\infty$  prevede di trovare il controllore K (sub-ottimo) nel caso di sistema nominale tale che venga minimizzata la norma infinito della matrice di trasferimento:

$$\begin{bmatrix} W_p * (S * G_u * K - M) & W_p * S * G_d & -W_p * S * G_u * K * W_n \\ W_u * K * S & -W_u * K * S * G_d & -W_u * K * S * W_n \end{bmatrix}$$

Effettuando la realizzazione in forma di stato della matrice di trasferimento è possibile trovare le matrici A,B,C,D.

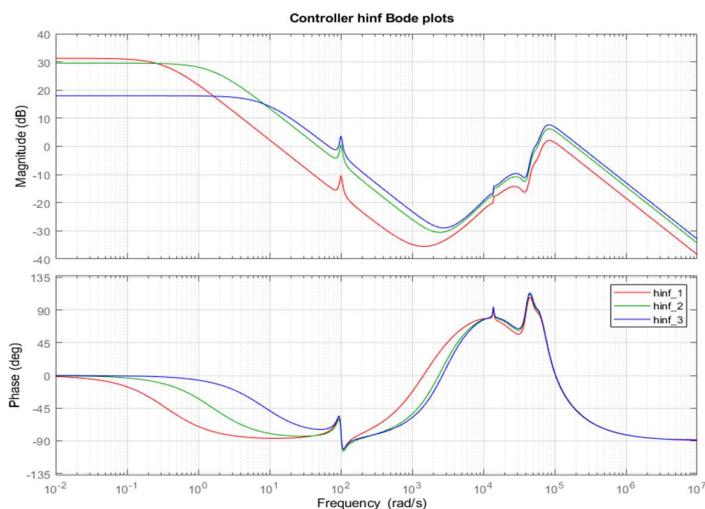
L'algoritmo di generazione del controllore prevede di trovare , mediante la  $\gamma$  iterazione , il più piccolo  $\gamma$  tale che valga :

$$\gamma_{min} > \left\| \begin{bmatrix} A + BR^{-1}DC & BR^{-1}B \\ -C(I + DR^{-1}D) & -(A + BR^{-1}DC) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

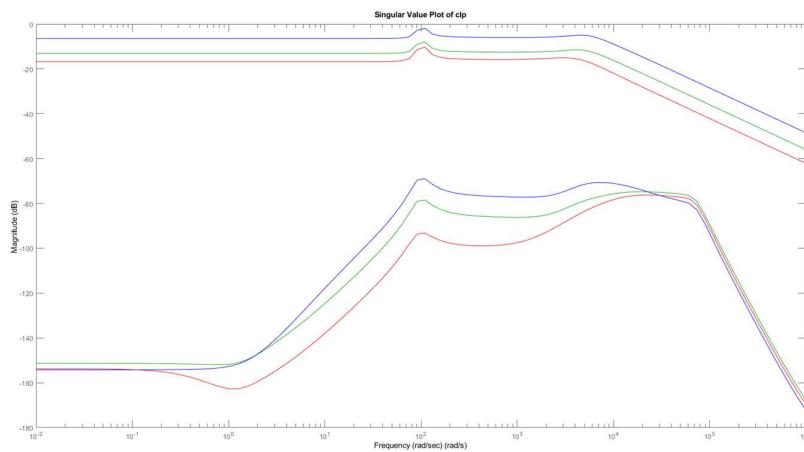
La funzione è implementata come Hinfsyn su MATLAB e viene restituito un valore di  $\gamma$  rispettivamente di :

- $\gamma_1 = 0.3687$
- $\gamma_2 = 0.4709$
- $\gamma_3 = 0.9502$

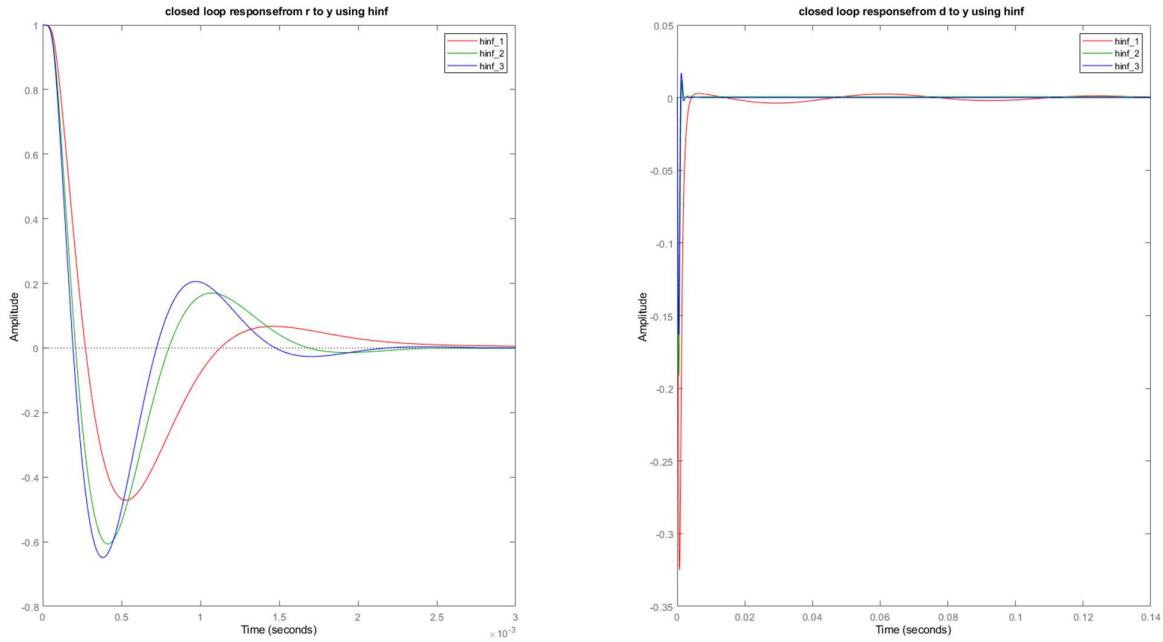
Utilizzando i 3 set di fuznioni di peso osserviamo un andamento del controllore ottimizzato di questo tipo:



I diagrammi di bode dei valori singolari massimi e minimi del sistema a ciclo chiuso del sistema usando i 3 set di funzioni di peso è il seguente :

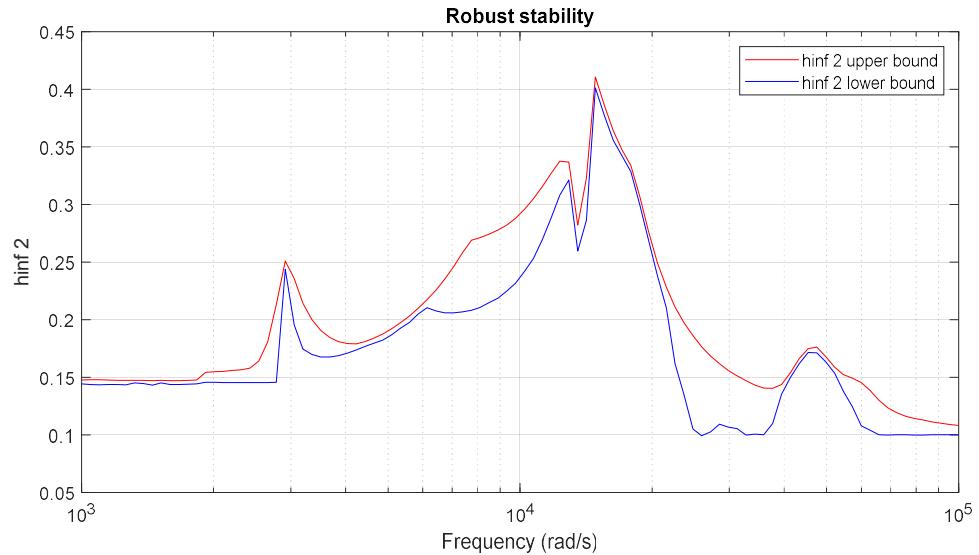


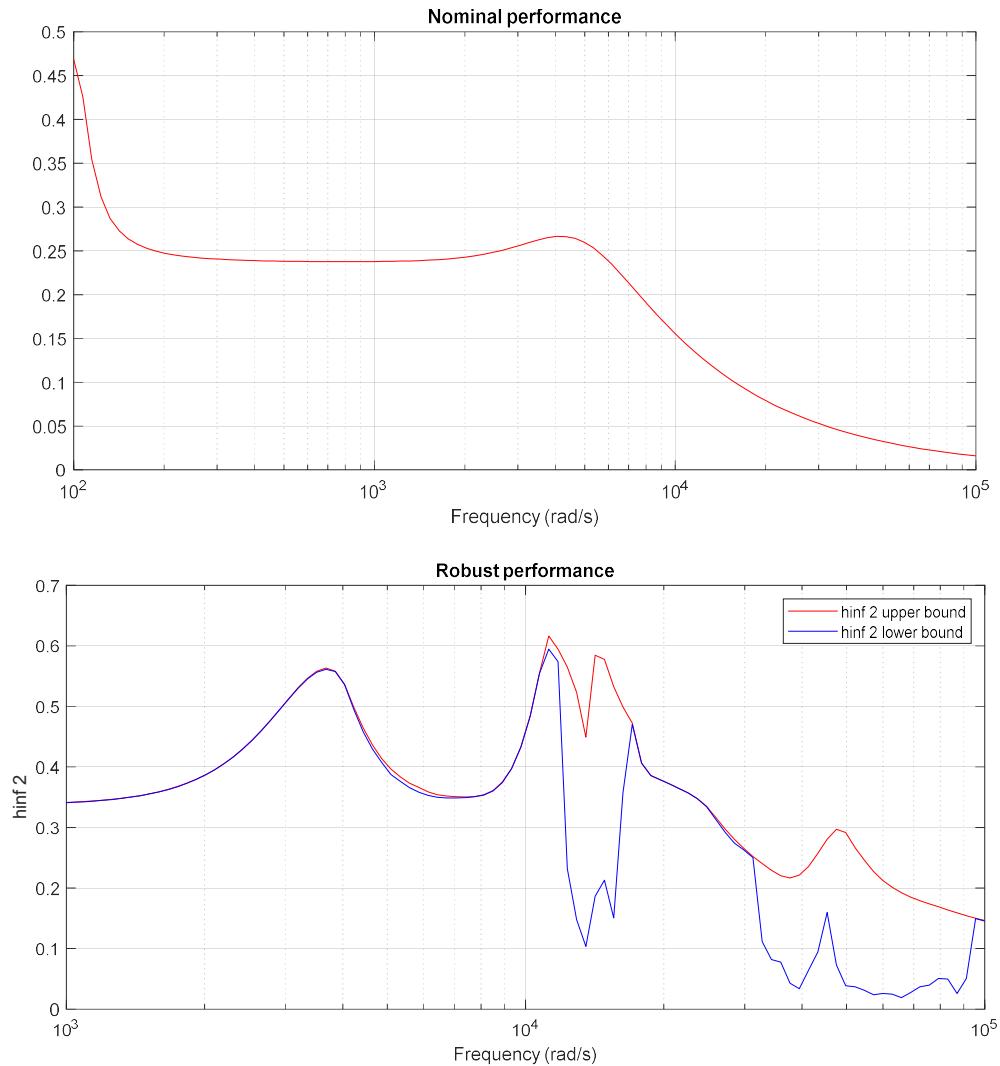
La risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso è invece :



E' possibile vedere che le 3 matrici di peso danno origine a risposte che hanno pregi e difetti: Usando il primo se di funzioni di peso si ottiene una risposta con overshoot minore ma tempo di assestamento maggiore, mentre il secondo e terzo set hanno tempi di risposta minori. Un buon trade-off tra overshoot e tempo di assestamento è dato dalle funzioni di peso del secondo set.

Osserviamo inoltre, dalla analisi dei valori singolari nel caso 2 casi dei grafici di questo tipo per gli upper-bound e lower-bound :





```
'Assuming nominal UFRD system is stable...+Uncertain system is robustly stable to modeled uncertainty.'
' -- It can tolerate up to 221% of the modeled uncertainty.
' -- There is a destabilizing perturbation amounting to 227% of the modeled uncertainty.
' -- This perturbation causes an instability at the frequency 1.48e+04 rad/seconds.
' -- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
   39% for J. Increasing J by 25% decreases the margin by 9.75%.
   23% for Kt. Increasing Kt by 25% decreases the margin by 5.75%.
   13% for Ky. Increasing Ky by 25% decreases the margin by 3.25%.
   0% for w1. Increasing w1 by 25% decreases the margin by 0%.
   1% for w2. Increasing w2 by 25% decreases the margin by 0.25%.
   8% for w3. Increasing w3 by 25% decreases the margin by 2%.
   7% for w4. Increasing w4 by 25% decreases the margin by 1.75%.
   0% for z1. Increasing z1 by 25% decreases the margin by 0%.
   10% for z2. Increasing z2 by 25% decreases the margin by 2.5%.
   3% for z3. Increasing z3 by 25% decreases the margin by 0.75%.
   1% for z4. Increasing z4 by 25% decreases the margin by 0.25%.
```

## *CONTROLLORE $\mu$*

Definiamo il valore singolare strutturato  $\mu$ :

$$\mu = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{\sup_{r \in \Delta} (r : \det[I - M \cdot \Delta] ! = 0 ; \forall \Delta \in r \cdot \Delta)}$$

L'obiettivo della sintesi con questo tipo di controllore è quello di trovare il controllore  $K$  tale che venga minimizzato il valore singolare strutturato  $\mu$ .

Questo procedimento segue una soluzione di tipo iterativo (iterazione  $DK$ ) e per evitare errori di convergenza viene eseguita considerando solo alcuni dei parametri, in particolare

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  non sono stati considerati durante l'analisi ma vengono considerati soltanto i parametri incerti del corpo rigido.

I parametri incerti considerati durante questo tipo di analisi sono quindi:

- $J$
- $K_t$
- $K_y$

Dalla sintesi nei 3 casi otteniamo un log dei risultati dell'iterazione:

- primo set

**DG-K ITERATION SUMMARY:**

Iter	K Step	Robust performance		Fit order	
		Peak MU	DG Fit	D	G
1	66.05	60.6	61.17	14	12
2	1.042	0.8221	0.8299	20	22
3	0.5367	0.4913	0.556	22	28
4	0.4647	0.463	0.4722	22	30
5	0.4723	0.4631	0.469	22	30
6	0.4692	0.4634	0.4687	24	28

- secondo set

Iter	K Step	Robust performance		Fit order	
		Peak MU	DG Fit	D	G
1	67.7	63.89	64.55	16	12
2	1.043	0.8021	0.8096	26	28
3	0.5744	0.5751	0.5811	28	28
4	0.5632	0.5606	0.5654	22	28
5	0.5646	0.56	0.5645	24	30
6	0.5645	0.56	0.5645	22	30

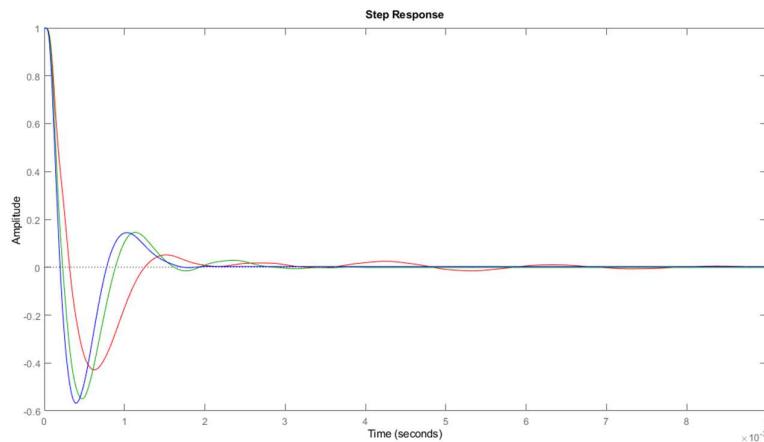
- terzo set

**DG-K ITERATION SUMMARY:**

Iter	Robust performance			Fit order	
	K Step	Peak MU	DG Fit	D	G
1	73.71	63	63.61	10	12
2	1.316	1.027	1.038	24	24
3	1.037	1.024	1.037	24	26
4	1.037	1.025	1.037	30	26

In tutti e 3 i casi l'ordine del controllore risulta superiore a 20, risulta quindi essere in ogni caso un controllore decisamente molto complesso e difficile da implementare. Si dovrà ricorrere a un metodo di riduzione dell'ordine del controllore per limitare la complessità.

La risposta al gradino del controllore sintetizzato mediante analisi mu usando i 3 set di funzioni di peso è il seguente:



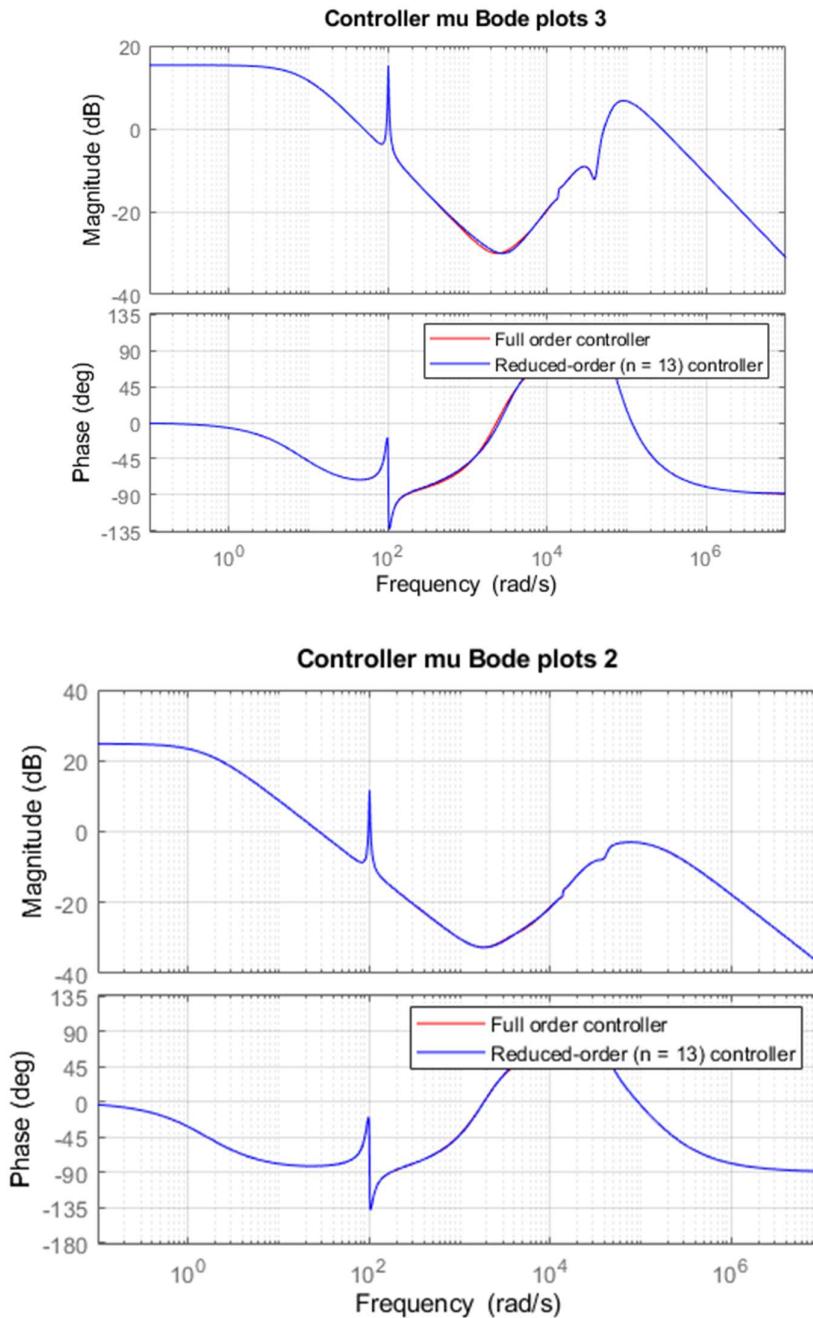
Osserviamo che usando il primo set di funzioni di peso la risposta tende a essere poco smorzata. Il caso del secondo set risulta nuovamente essere un buon compromesso tra prestazioni e limitazione dell'undershot.

**RIDUZIONE DELL'ORDINE DEL CONTROLLORE**

Dal momento che i controllori restituiti dalla sintesi \mu sono controllori di ordine elevato, è necessario effettuare una riduzione dell'ordine dei controllori per ridurre la complessità.

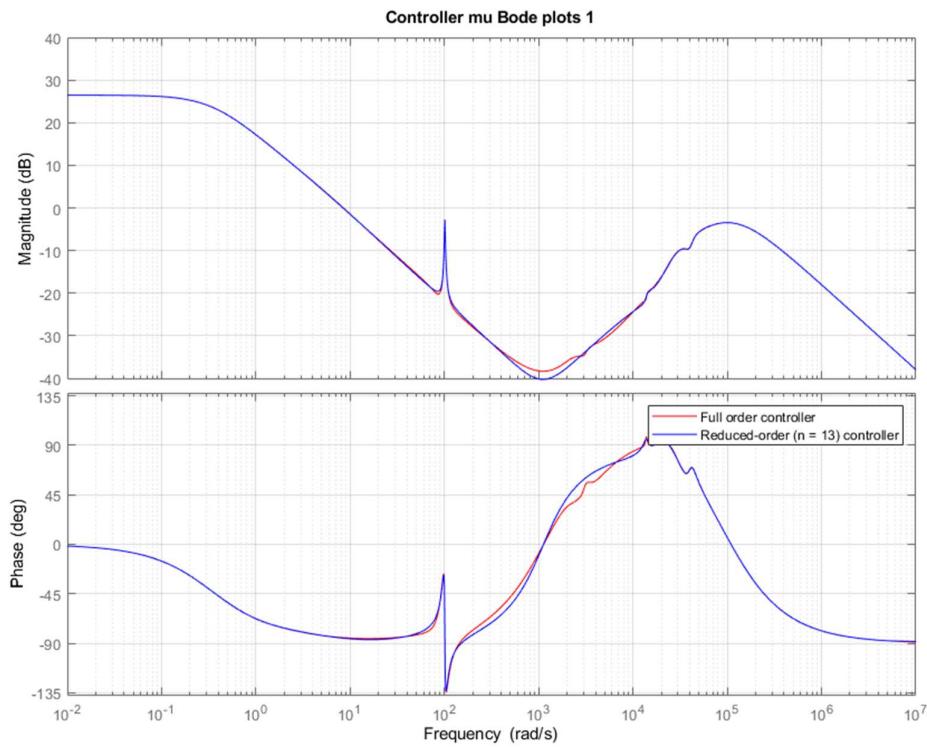
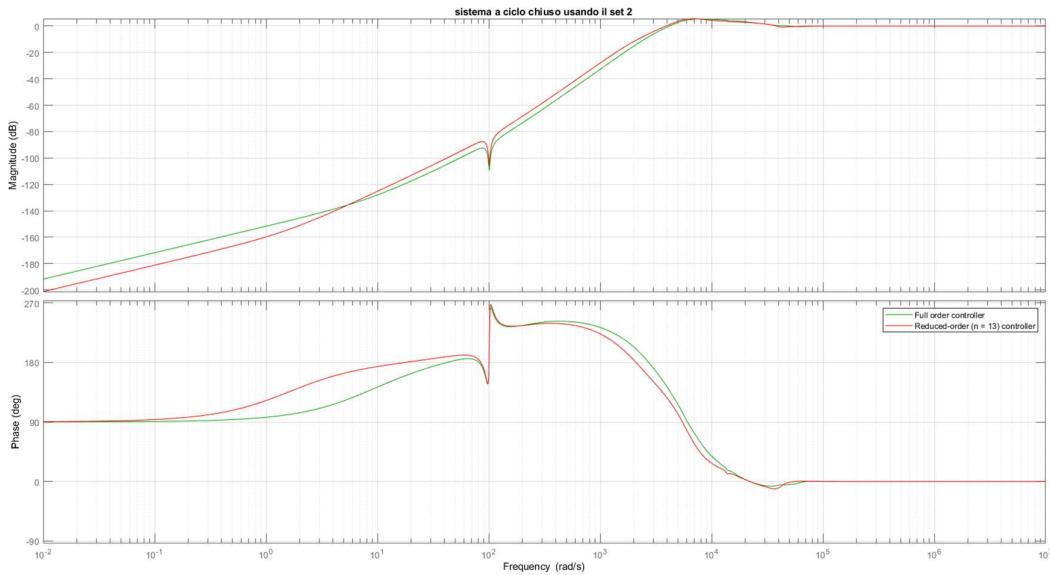
Mediante la funzione `reduce(K,order)` possiamo andare ridurre l'ordine portandolo a un valore accettabile.

E' stato scelto un ordine di riduzione di 13.



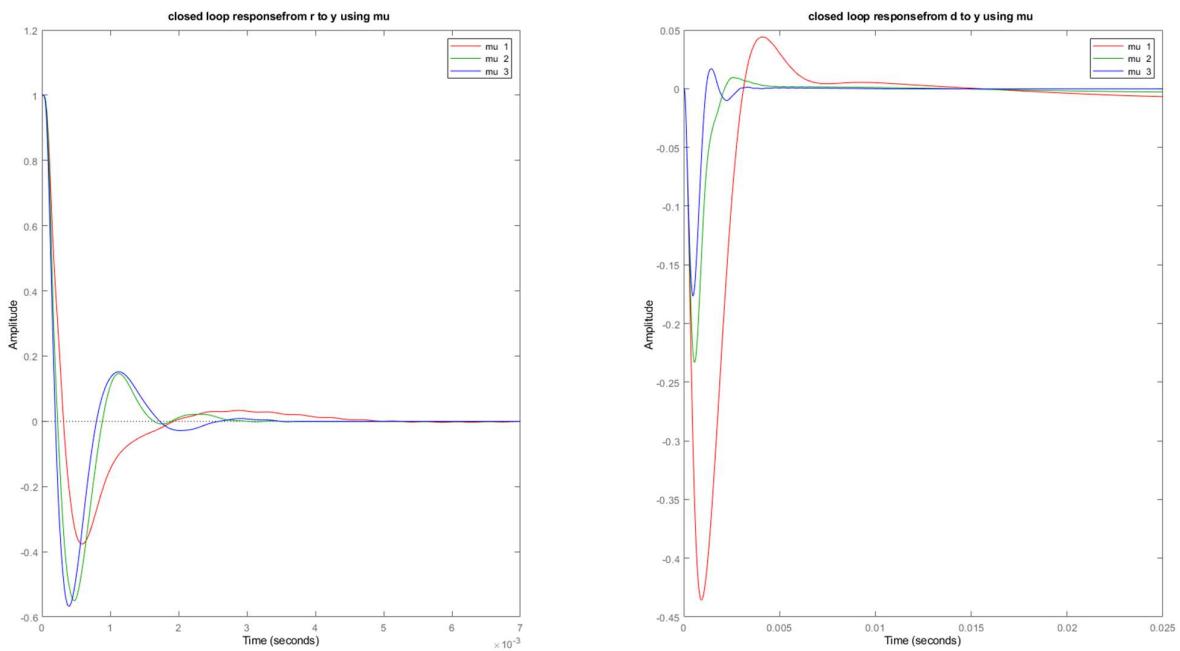
Confrontando il controllore ridotto e il controllore completo, notiamo variazioni minime nei diagrammi di bode e di conseguenza possiamo vedere che il controllore ridotto ha un comportamento analogo a quello completo ma con complessità decisamente inferiore.

Confrontando il diagramma di bode del sistema ad anello chiuso usando il controllore completo e quello ridotto osserviamo che le differenze sono più marcate ma comunque molto limitate.

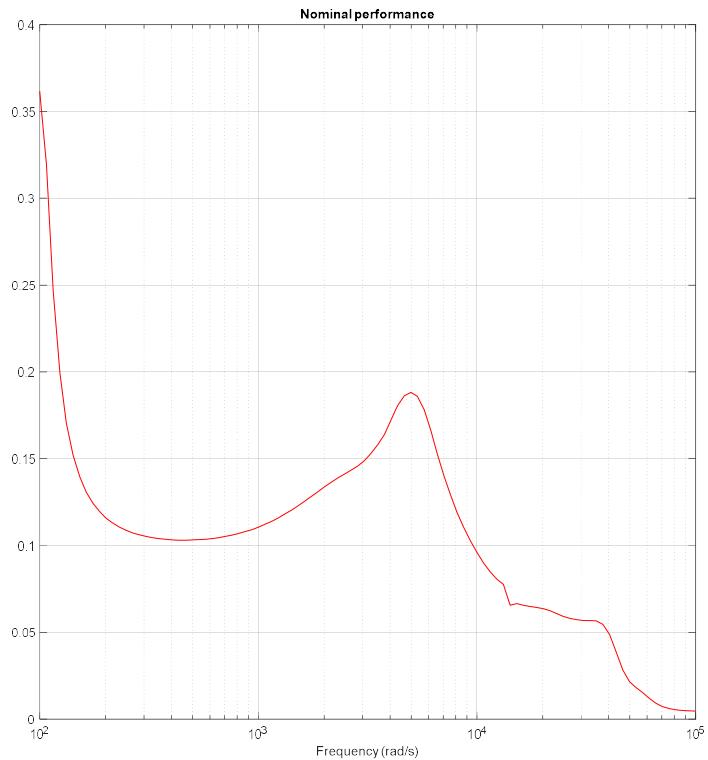


La risposta al gradino del sistema con controllore ridotto non si discosta eccessivamente da quella del sistema completo, con al limite prestazioni leggermente inferiori.

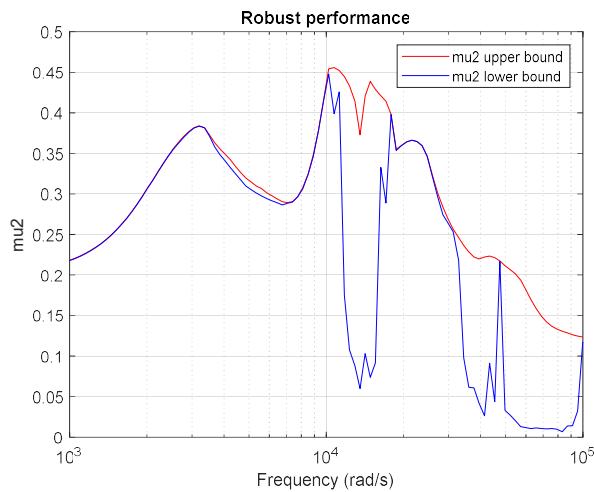
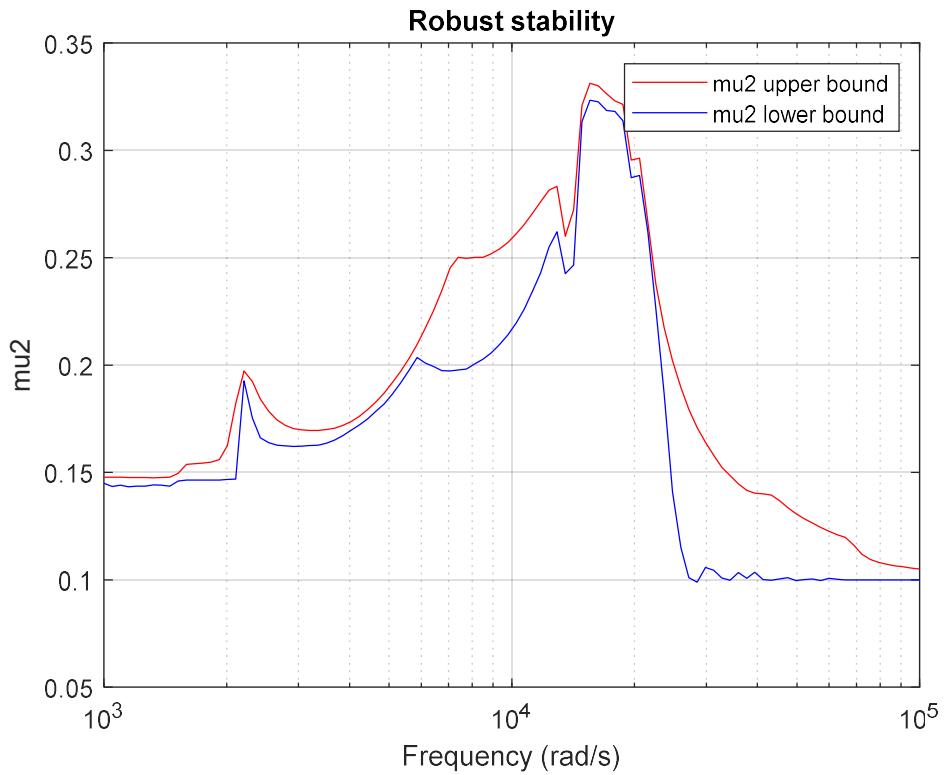
La risposta dei 3 controllori al gradino per quanto riguarda l'ingresso di controllo e il rumore è la seguente:



Dalla analisi di robustezza emergono :



```
'Assuming nominal UFRD system is stable...+Uncertain system achieves performance robustness to modeled uncertainty.'
'-- The tradeoff of model uncertainty and system gain is balanced at a level of 219% of the modeled uncertainty.
'-- A model uncertainty of 223% can lead to input/output gain of 0.448 at 1.02e+04 rad/seconds.
'-- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
'  31% for J. Increasing J by 25% decreases the margin by 7.75%.
'  15% for Kt. Increasing Kt by 25% decreases the margin by 3.75%.
'  10% for Ky. Increasing Ky by 25% decreases the margin by 2.5%.
'  0% for wl. Increasing wl by 25% decreases the margin by 0%.
'  18% for w2. Increasing w2 by 25% decreases the margin by 4.5%.
'  6% for w3. Increasing w3 by 25% decreases the margin by 1.5%.
'  6% for w4. Increasing w4 by 25% decreases the margin by 1.5%.
'  0% for zl. Increasing zl by 25% decreases the margin by 0%.
'  13% for z2. Increasing z2 by 25% decreases the margin by 3.25%.
'  3% for z3. Increasing z3 by 25% decreases the margin by 0.75%.
'  1% for z4. Increasing z4 by 25% decreases the margin by 0.25%.
```



## LOOP SHAPING

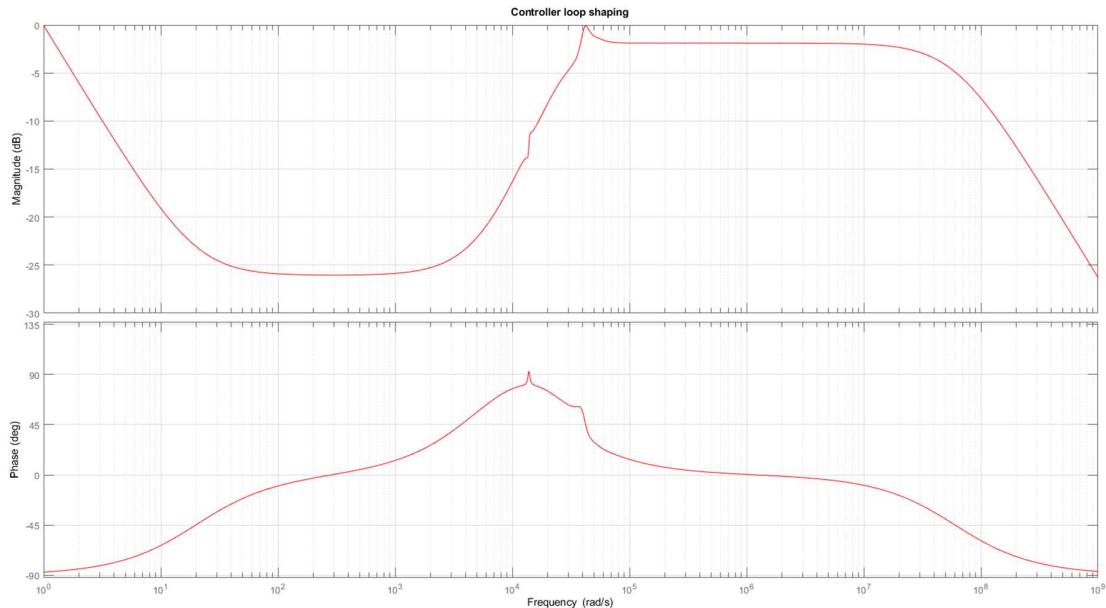
In questo tipo di sintesi non utilizziamo le funzioni di peso precedentemente definite e implementate nella sintesi  $\mu$  e in quella  $H_{inf}$ , viene utilizzata invece una funzione  $W_1$  che agisce come prefiltro e  $W_2$  che agisce come postfiltro

Per la sintesi loop shaping sono state scelte :

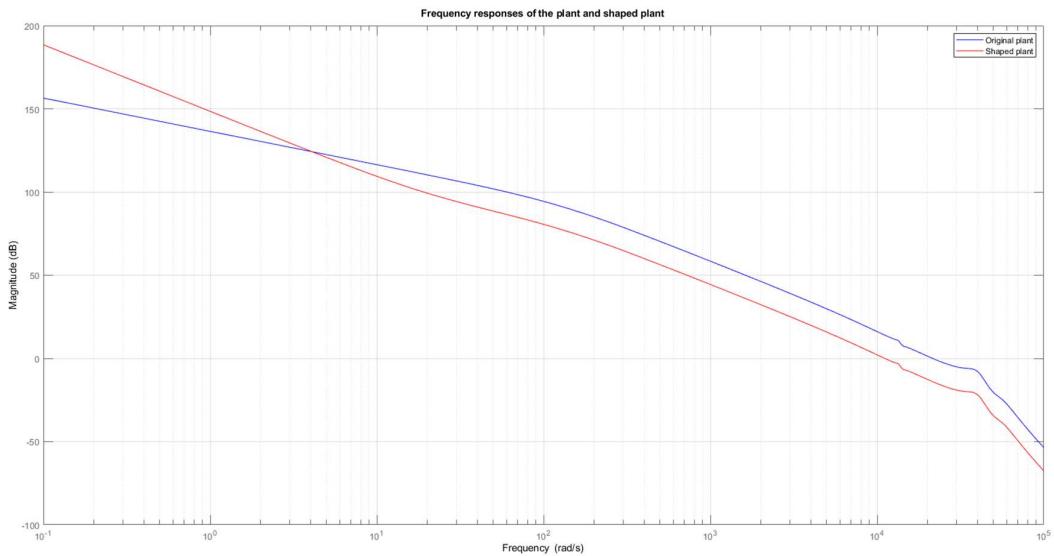
$$W_1 = 4 \cdot \frac{0.05 \cdot s + 1}{s}$$

$$W_2 = 1$$

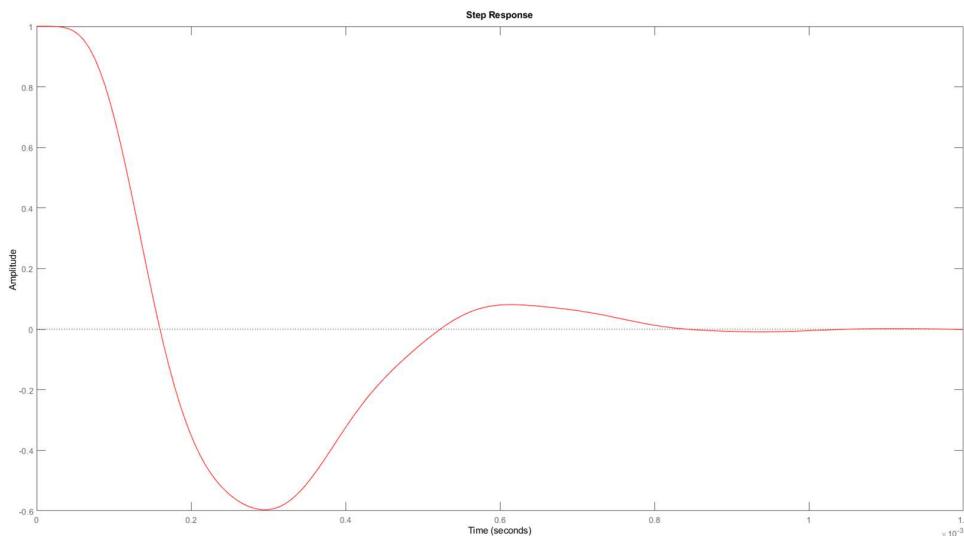
Effettuando la sintesi di loop shaping come descritto precedentemente , viene restituito un controllore con le seguenti caratteristiche:



Confrontando il sistema dopo aver effettuato il loop shaping si osserva il seguente grafico:

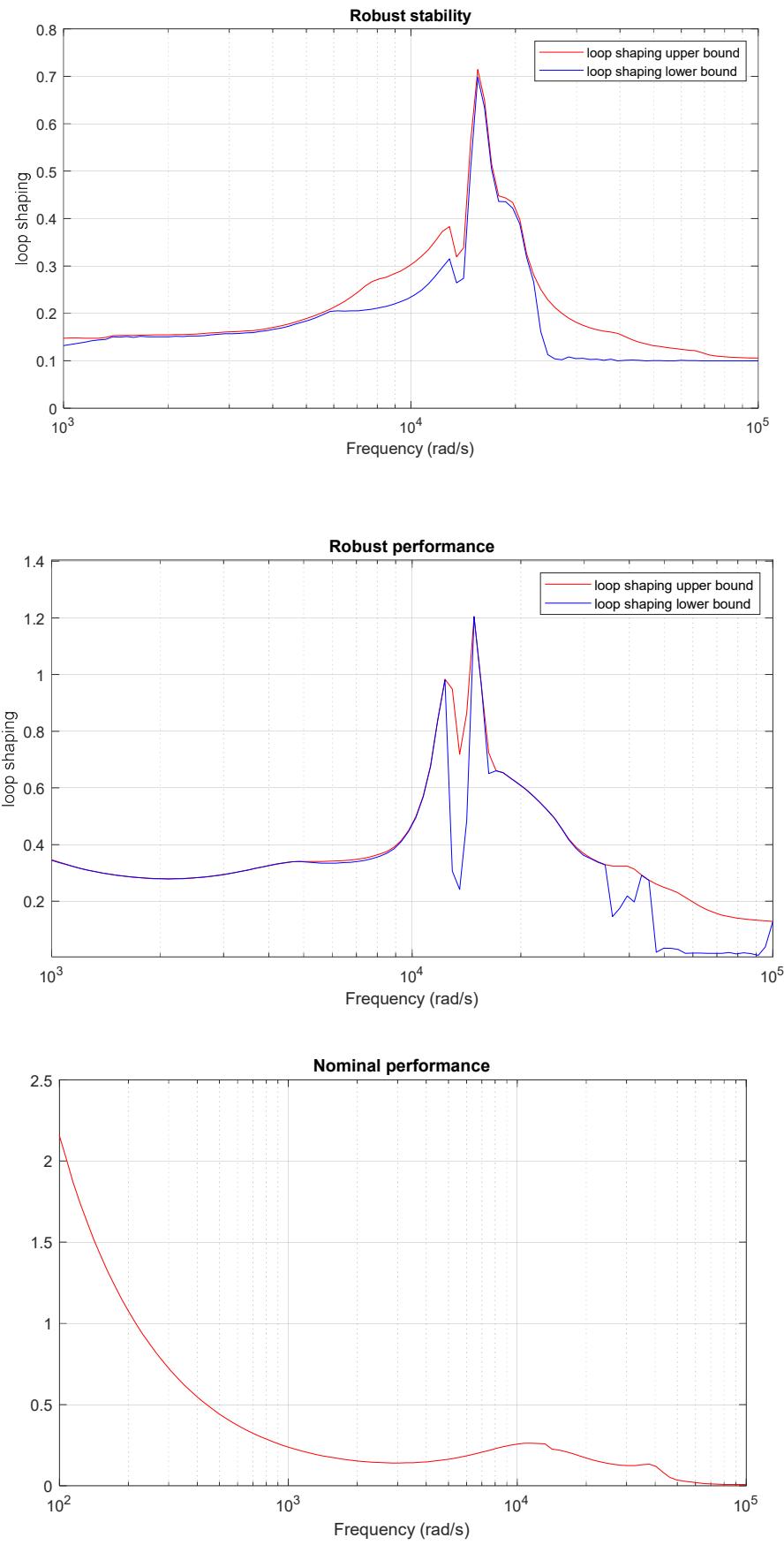


La risposta del sistema dopo aver inserito il loop shaping risulta essere:



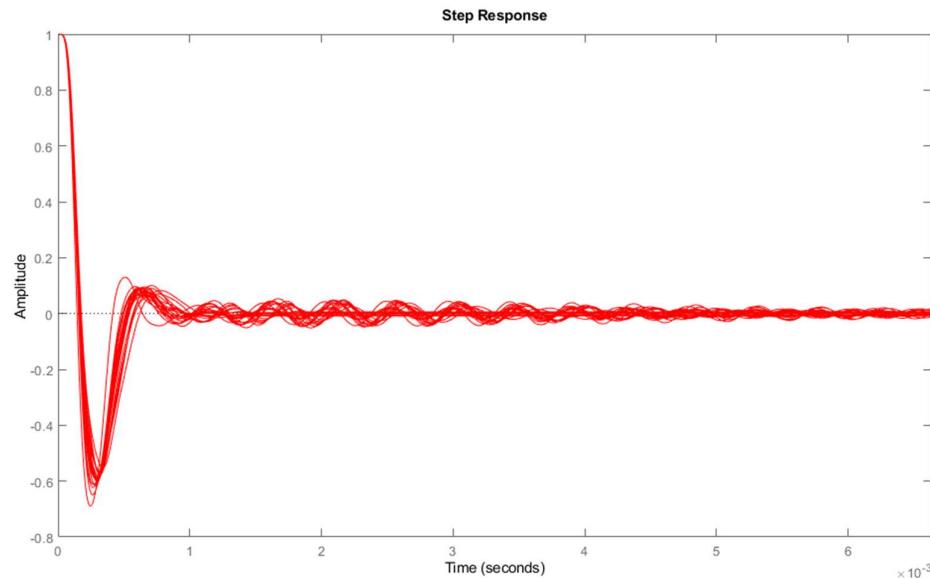
Dalla analisi di robustezza emerge il seguente log :

```
'Uncertain system does not achieve performance robustness to modeled uncertainty.
'-- The tradeoff of model uncertainty and system gain is balanced at a level of 83% of the modeled uncertainty.
'-- A model uncertainty of 83.1% can lead to input/output gain of 1.2 at 1.48e+04 rad/seconds.
'-- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
'  21% for J. Increasing J by 25% decreases the margin by 5.25%.
'  15% for Kt. Increasing Kt by 25% decreases the margin by 3.75%.
'  9% for Ky. Increasing Ky by 25% decreases the margin by 2.25%.
'  1% for w1. Increasing w1 by 25% decreases the margin by 0.25%.
'  3% for w2. Increasing w2 by 25% decreases the margin by 0.75%.
'  4% for w3. Increasing w3 by 25% decreases the margin by 1%.
'  2% for w4. Increasing w4 by 25% decreases the margin by 0.5%.
'  1% for z1. Increasing z1 by 25% decreases the margin by 0.25%.
'  9% for z2. Increasing z2 by 25% decreases the margin by 2.25%.
'  3% for z3. Increasing z3 by 25% decreases the margin by 0.75%.
'  1% for z4. Increasing z4 by 25% decreases the margin by 0.25%.'
```



Osserviamo che dalla sintesi viene restituito un controllore che rispetta le specifiche date ma che non è robusto all set di incertezze che abbiamo definito.

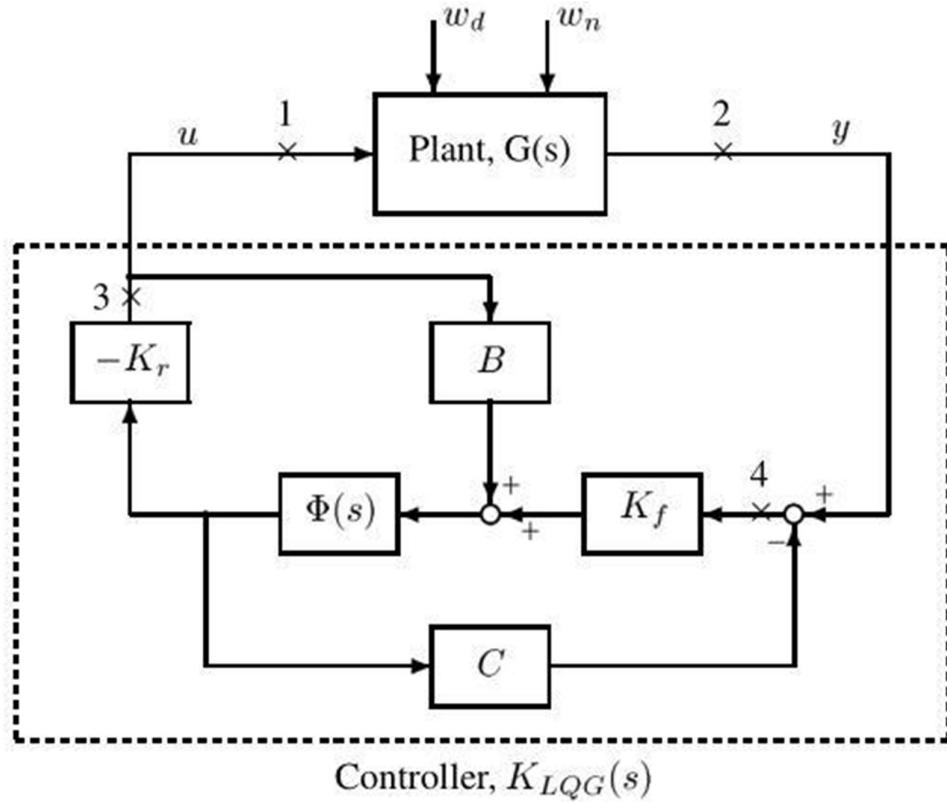
La risposta del sistema considerando le incertezze di discosta molto dalla risposta nominale e le specifiche non vengono rispettate, infatti:



## CONTROLLORE LQG/LTR

Questo tipo di controllore prevede la costruzione di un controllore LQG con un recupero di fase in grado di recuperare le caratteristiche di magini di fase e guadagno persi durante la sintesi LQG.

Un controllore LQR ha buoni margini di stabilità agli ingressi del sistema, mentre un filtro di Kalman ha buoni margini di stabilità alle uscite del sistema. Il controllore LQG complessivo però perde tali caratteristiche e risulta di fatto molto poco robusto, ciò è visibile dalla rappresentazione del controllore LQG seguente:



La funzione di trasferimento nominale del sistema presenta uno zero a fase non minima. È noto che per sintetizzare un controllore LQG con la tecnica LTR è necessario che non ci siano zeri a fase non minima nel sistema. Tuttavia in questo progetto si è cercato di sintetizzare ugualmente il controllore LQG/LTR tentando di rispettare comunque le specifiche. Si è ipotizzata una rottura dell'anello in ingresso al sistema, sintetizzando un controllore LQR con proprietà di robustezza, recuperando parte dell'ottimalità tramite la definizione delle matrici  $W$  e  $V$  del filtro di Kalman.

La procedura generale è quella di trovare le condizioni sul controllore che fanno in modo che l'ugualanza di kalman venga rispettata.

Definendo infatti :

$$Q = H^T H \quad R = \rho I \quad \Phi = (sI - A)^{-1}$$

Si vuole rispettare l'egualianza di kalman :

$$\sigma_i(I + K_c \Phi B) = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} + \sigma_i(H \Phi B)^{-1}}$$

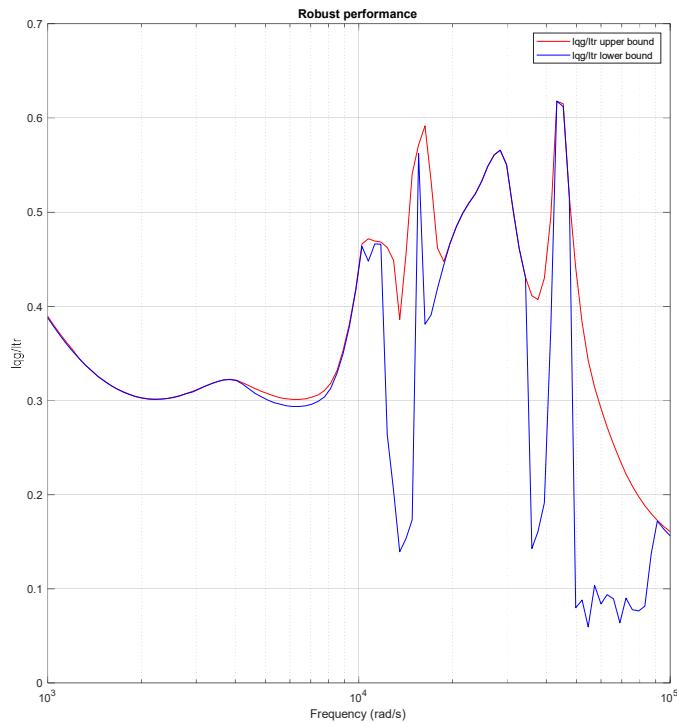
Date inoltre  $p(\omega)$  e  $l_m(\omega)$  funzioni di progetto si vogliono inoltre rispettare le seguenti :

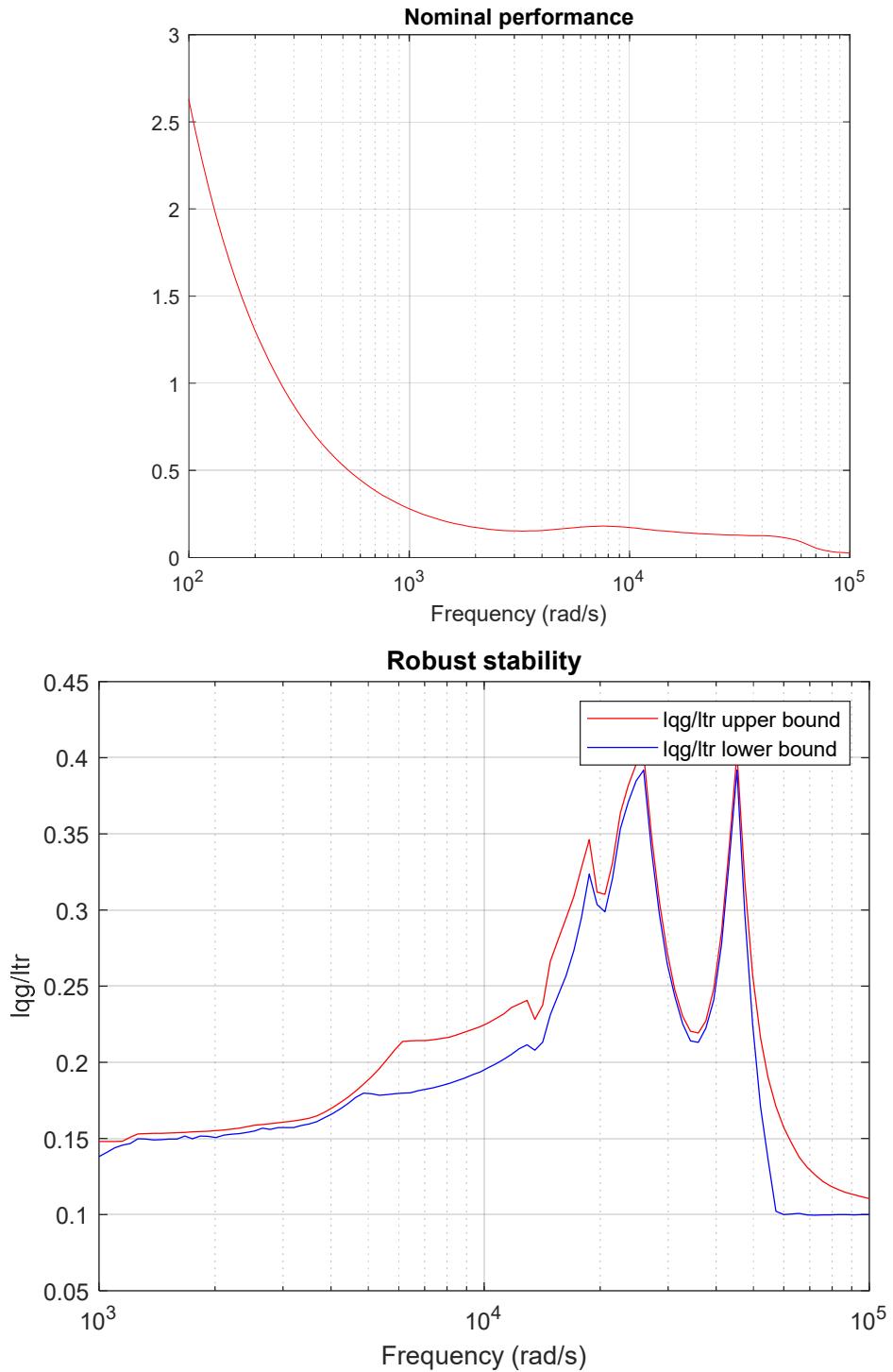
- *Performance a bassa frequenza*  $\rightarrow \frac{1}{\rho} + \sigma_{min}(H \Phi B)^{-1} > \frac{p(\omega)}{1 - l_m(\omega)}$
- *Robusta stabilità*  $\rightarrow |l_m(\omega)| < \frac{1}{2}$
- *Performance in alta frequenza*  $\rightarrow \sigma_{max}\left(\frac{HB}{\sqrt{\rho}}\right) < \omega_c$

La funzione effettuata per l'applicazione della sintesi è *ltrsyn* che effettua , a partire dalla matrice LQ di full state feedback , dal sistema, e dai parametri rho ,XI ,theta, i calcoli necessari per effettuare il recupero.

dove :

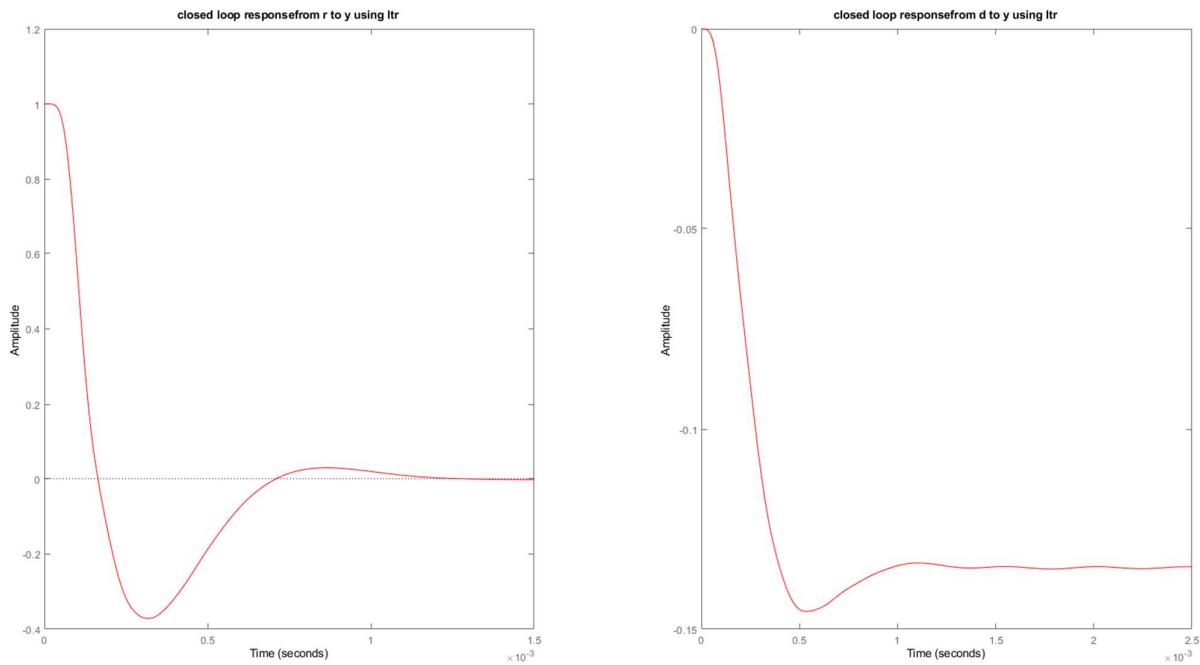
- XI==Q → peso della dinamica sull'impianto
- Rho==R → peso della azione di controllo
- Theta → peso dell'intensità del rumore sui sensori



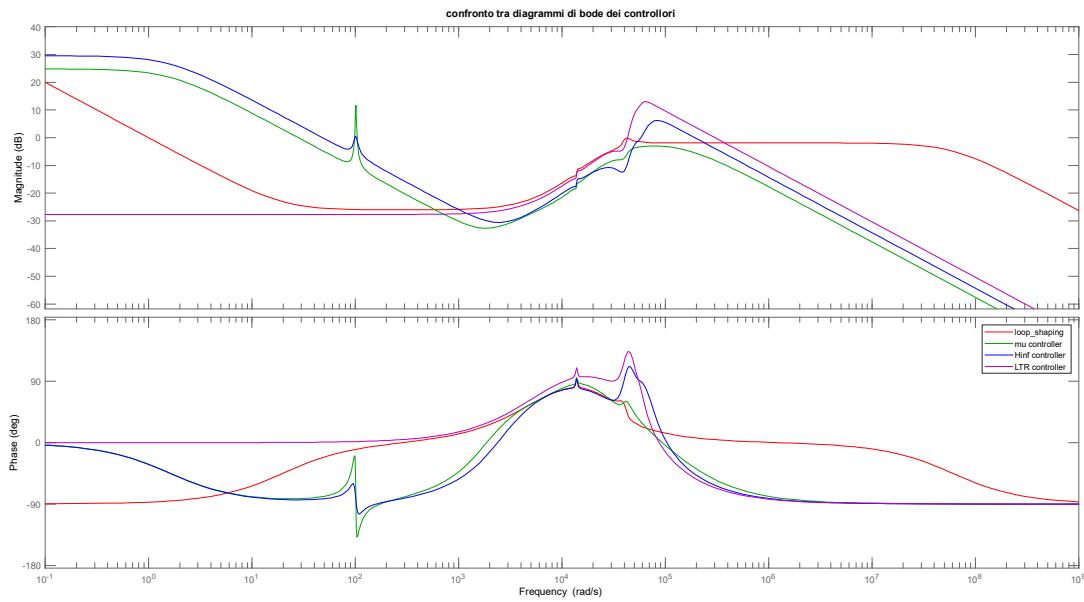


```
'Assuming nominal UFRD system is stable...+Uncertain system is robustly stable to modeled uncertainty.'
' -- It can tolerate up to 248% of the modeled uncertainty.
' -- There is a destabilizing perturbation amounting to 255% of the modeled uncertainty.
' -- This perturbation causes an instability at the frequency 4.53e+04 rad/seconds.
' -- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
'   38% for J. Increasing J by 25% decreases the margin by 9.5%.
'   21% for Kt. Increasing Kt by 25% decreases the margin by 5.25%.
'   12% for Ky. Increasing Ky by 25% decreases the margin by 3%.
'   0% for w1. Increasing w1 by 25% decreases the margin by 0%.
'   12% for w2. Increasing w2 by 25% decreases the margin by 3%.
'   25% for w3. Increasing w3 by 25% decreases the margin by 6.25%.
'   19% for w4. Increasing w4 by 25% decreases the margin by 4.75%.
'   0% for z1. Increasing z1 by 25% decreases the margin by 0%.
'   3% for z2. Increasing z2 by 25% decreases the margin by 0.75%.
'   28% for z3. Increasing z3 by 25% decreases the margin by 7%.
'   7% for z4. Increasing z4 by 25% decreases the margin by 1.75%.
```

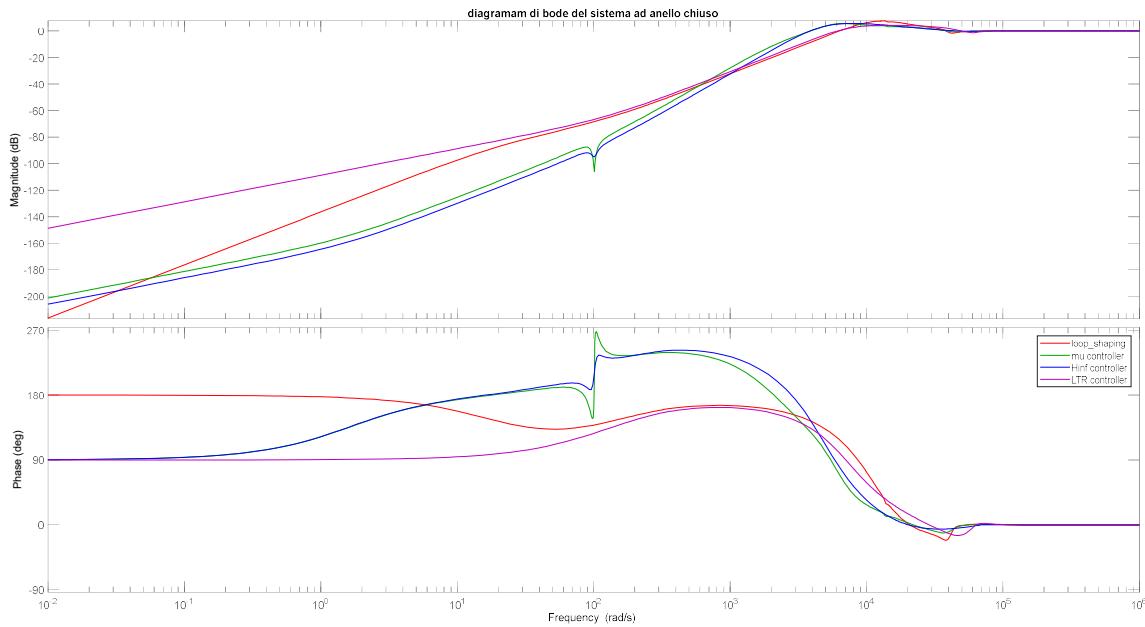
La risposta complessiva del sistema utilizzando il controllore LQG con recupero risulta essere :

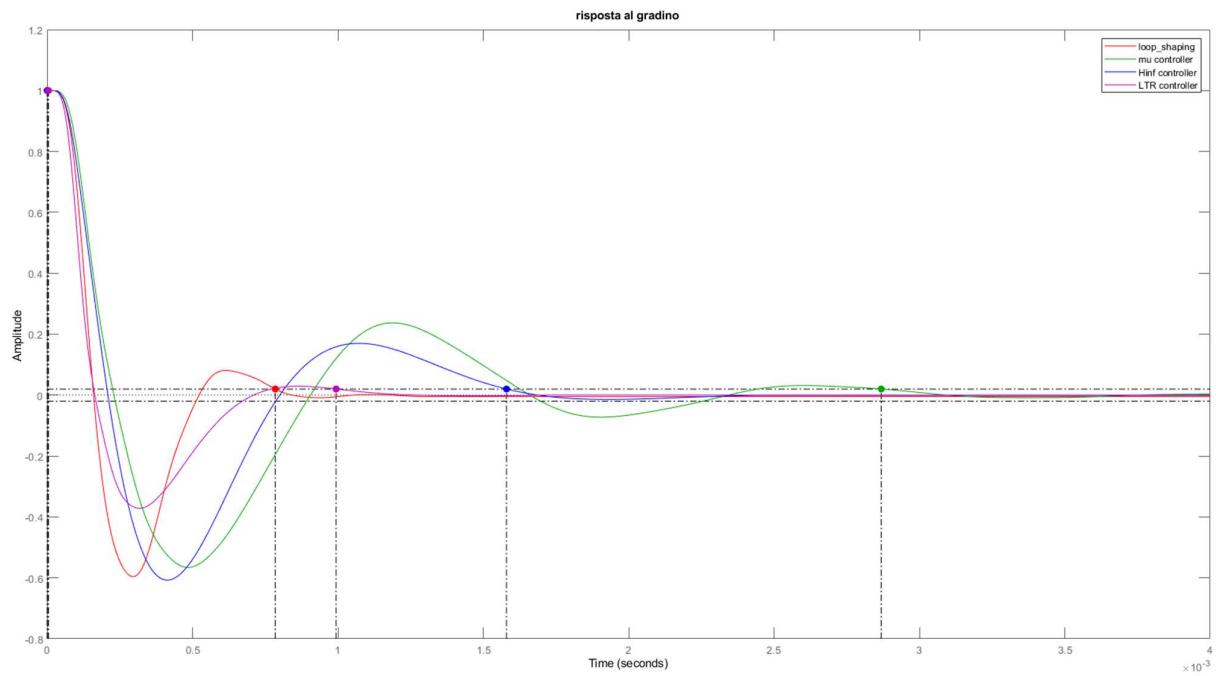
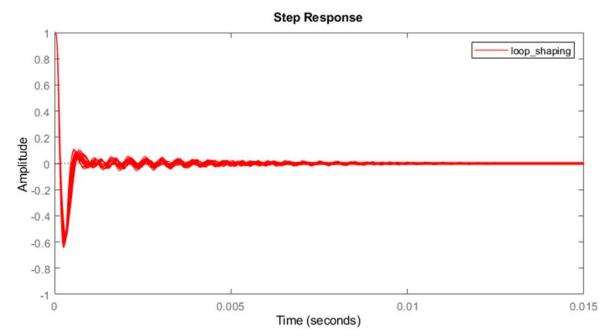
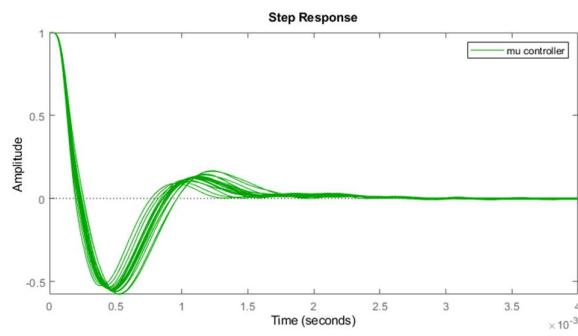
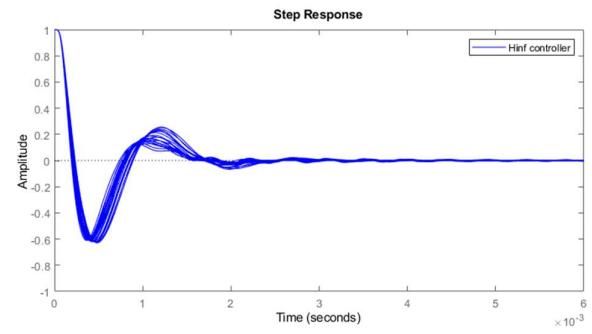
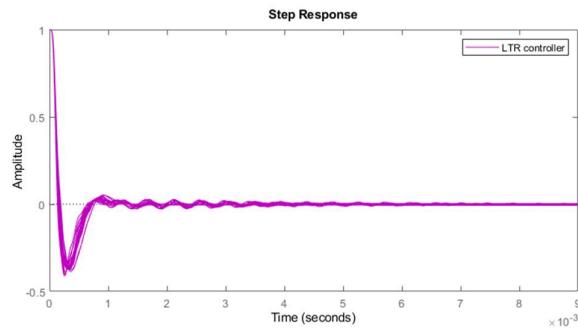


## CONFRONTO TRA I CONTROLLORI



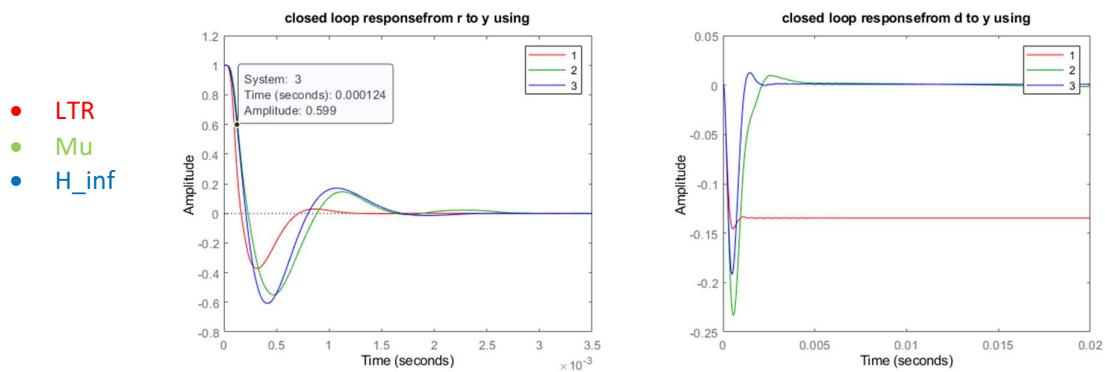
I controllori che sono stati ottenuti sono i seguenti :





A livello di reiezione del disturbo possiamo vedere che il controllore  $\mu$  e  $H_\infty$  effettuano una buona reiezione del segnale di disturbo mentre il controllore loop shaping presenta un errore a regime a fronte di un disturbo non nullo.

Le risposte al gradino e al rumore sono le seguenti :



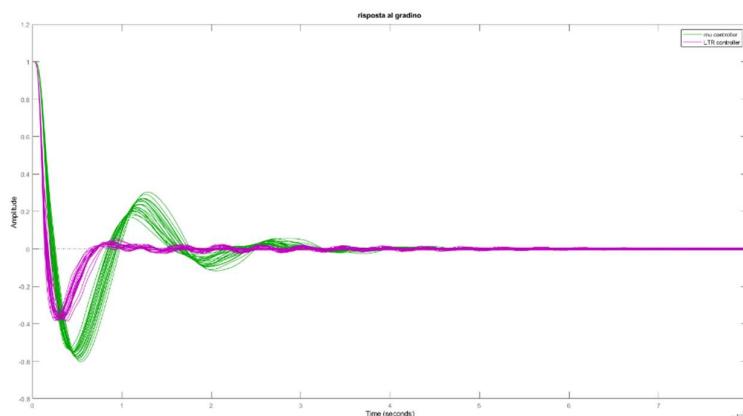
Osserviamo che l'errore a fronte di un disturbo nel cao LQG/LTR è non nullo, invece negli altri 2 casi l'errore al disturbo va a 0.

E' possibile vedere le risposte al gradino del sistema utilizzando i vari controllori. Vediamo che in tutti i casi l'undershoot è di circa 0.6 e non si eccede il valore 1.2 (valore di saturazione del controllo).

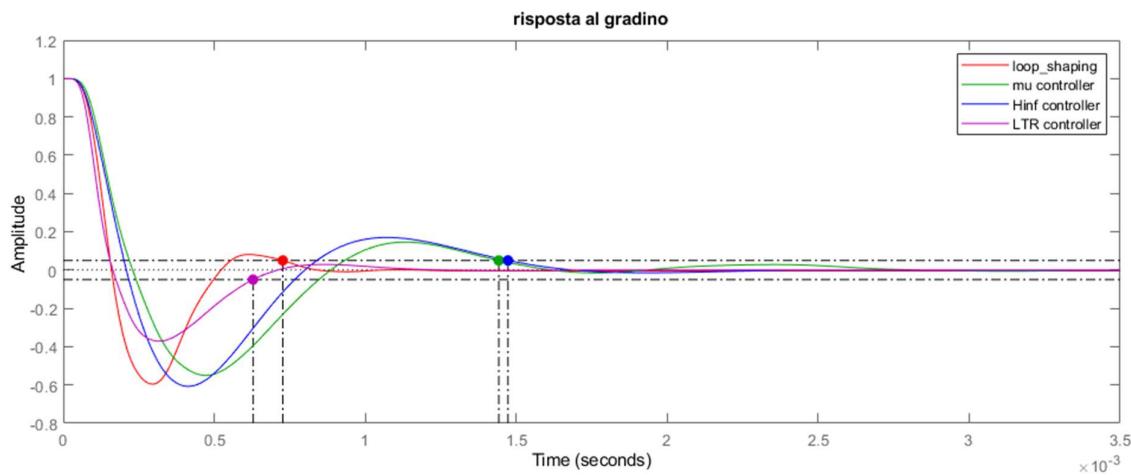
Il valore di undershoot più elevato è quello relativo al controllore Hinif e quello inferiore relativo al controllore LQG/LTR.

Il setting time più elevato tra i vari controllori è quello del conrtollore mu che raggiunge i 2.8 ms, seguito dal controllore Hinif che non rispetta le specifiche di circa 2 ms ,mentre valori accettabili di setting time sono quelli del conrtollore LQG/LTR e del controllore loop shaping che però non garantisce la robustezza.

Siccome da specifiche il limite di tempo di assestamento è 1.5ms , il controllore che sembra essere migliore è proprio il controllore LQG/LTR.



Effettuando una riduzione dell'ordine del controllore mu a 16 si ottiene un controllore mu che rispetta le specifiche di setting time e che inoltre è di ordine accettabile al fine di un utilizzo pratico, si ottiene infatti in questo caso , con un tempo di assestamento al 5% :



Il controllore mu in questo caso risulta essere un buon compromesso tra prestazioni e complessità del controllore, se invece volessimo un controllore più performante sarebbe il caso di adottare un controllore LQG/LTR che garantisce prestazioni migliori, anche se una reiezione del disturbo .

Le funzioni di trasferimento dei vari controllori sono reperibili nel file ws.mat all'interno della cartella del progetto e sono salvati come :

- K\_mu\_1, K\_mu\_2, K\_mu\_3 → controllori mu standard con i 3 set di pesi
- K\_hinf\_1, K\_hinf\_2, K\_hinf\_3 → controllori h infinito con i 3 set di pesi
- K\_ls → controllore LS
- K\_lqg → controllore lqg
- K\_ltr → LQG/LTR

## BIBLIOGRAFIA

- [1] – Gu D.-W., Petkov P. Hr., Kostantinov M. M. - Robust Control Design with MATLAB, Springer, 2005.
- [2] – Innocenti M. – Dispense di Controllo dei sistemi incerti, Università di Pisa, 2019.
- [3] – Skogestad S., Postlethwaite I. – Multivariable Feedback Control: Analysis and design, Wiley, 2001.