COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

Lucas Azevedo Dias

Exercício 1

a) Segue a resolução:

$$T(n) = c_1 n + c_2 \cdot (n-1) + c_4 \cdot (n-1) + c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8 \cdot (n-1)$$

$$T(n) = 1 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + 1 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + 1 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + 1 \cdot (n-1)$$

$$T(n) = n + 3 \cdot (n-1) + \sum_{j=2}^{n} t_j + \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$T(n) = n + 3n - 3 + \sum_{j=2}^{n} t_j + \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$T(n) = n + 3n - 3 + \sum_{j=2}^{n} t_j + 2 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$T(n) = n + 3n - 3 + \frac{(2+n) \cdot (n-1)}{2} + 2 \cdot \frac{(1 + (n-1)) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = n + 3n - 3 + \frac{(2+n) \cdot (n-1)}{2} + (1 + (n-1)) \cdot (n-1)$$

$$T(n) = 2 \cdot \frac{n + 3n - 3 + \frac{(2+n) \cdot (n-1)}{2} + (1 + (n-1)) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + 2 \cdot \frac{(2+n) \cdot (n-1)}{2} + 2 \cdot (1 + (n-1)) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + (2+n) \cdot (n-1) + 2 \cdot (1 + (n-1)) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + (2+n) \cdot (n-1) + (2 + (2n-2)) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + ((2+n) + (2 + (2n-2))) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + (2 + n + 2n) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + 6n - 6 + (3n + 2) \cdot (n-1)}{2}$$

$$T(n) = \frac{(3n+2) \cdot (n-1) + 8n - 6}{2}$$

$$T(n) = \frac{(3n^2 - 3n + 2n - 2) + 8n - 6}{2}$$

$$T(n) = \frac{(3n^2 - n - 2) + 8n - 6}{2}$$

$$T(n) = \frac{3n^2 + 7n - 8}{2}$$
$$T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

b) Seria o caso em que as linhas 5, 6 e 7 não são executadas. Dessa forma, segue a resolução:

$$T(n) = c_1 n + c_2 \cdot (n-1) + c_4 \cdot (n-1) + c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8 \cdot (n-1)$$
$$T(n) = 1 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-1) + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + 1 \cdot (n-1)$$
$$T(n) = n + 3 \cdot (n-1) + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + 0 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$
$$T(n) = n + 3 \cdot (n-1) + 0 + 0 + 0$$
$$T(n) = n + 3 \cdot (n-1)$$
$$T(n) = n + 3n - 3$$
$$T(n) = 4n - 3$$

c) Seria o caso calculado no item “a”.

d) Segue a resolução para $O(n^2)$:

$$T(n) = O(n^2)$$
$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4 \leq c_1 \cdot n^2$$
$$\frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4}{n^2} \leq c_1$$
$$c_1 \geq \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4}{n^2}$$
$$c_1 \geq \frac{3}{2}n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{7}{2}n \cdot \frac{1}{n^2} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$
$$c_1 \geq \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$
$$c_1 \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Considerando que $n \to \infty$, então temos que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(c_1 \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$
$$\therefore c_1 \geq \frac{3}{2}$$

Assim, é verdadeiro a expressão $T(n) = O(n^2)$, pois c_1 pode ser uma constante.

Segue a resolução para $\Omega(n^2)$:

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4 \geq c_2 \cdot n^2$$

$$\frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4}{n^2} \geq c_2$$

$$c_2 \leq \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4}{n^2}$$

$$c_2 \leq \frac{3}{2}n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{7}{2}n \cdot \frac{1}{n^2} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$c_2 \leq \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$c_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Considerando que $n \to \infty$, então temos que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(c_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\therefore c_2 \leq \frac{3}{2}$$

Assim, é verdadeiro a expressão $T(n) = \Omega(n^2)$, pois c_2 pode ser uma constante.

Exercício 2

a) Segue a tabela com os resultados:

ETAPA	LINHA	CUSTO	Nº DE EXECUÇÕES	OBSERVAÇÃO
Função "troca"	l_1	$c_1 = 0$	$e_1 = 1$	Cabeçalho de função
	l_2	c_2	$e_2 = 1$	Execução única
	l_3	c_3	$e_3 = 1$	Execução única
	l_4	c_4	$e_4 = 1$	Execução única
Função "bolha"	l_5	$c_5 = 0$	$e_5 = 1$	Cabeçalho de função
	l_6	c_6	$e_6 = (n-1)+1$	Deve incluir a execução final em que há falha
	l_7	c_7	$e_7 = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)$	Deve incluir a execução final em que há falha
	l_8	c_8	$e_8 = \sum_{i=0}^{n-1} i$	Executa em cada execução do *loop*
	l_9	$c_9 = \sum_{i=1}^{4} c_i$	Melhor: $e_9 = 0$ Pior: $e_9 = \sum_{i=1}^{n} n-i$	Execução vai depender para cada *input*, havendo casos melhores e outros piores
"main"	l_{10}	$c_{10} = 0$	$e_{10} = 1$	Não faz parte do algoritmo em si
	l_{11}	$c_{11} = 0$	$e_{11} = 1$	Não faz parte do algoritmo em si

b) Segue a resolução:

Sendo $T(n)$ a soma das instruções do algoritmo de "bolha", temos que:

$$T(n) = \sum_{i=5}^{9} l_i$$

$$T(n) = l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9$$

$$T(n) = (c_5 \cdot e_5) + (c_6 \cdot e_6) + (c_7 \cdot e_7) + (c_8 \cdot e_8) + (c_9 \cdot e_9)$$

$$T(n) = (0 \cdot 1) + (c_6 \cdot ((n-1)+1)) + \left(c_7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\right) + \left(c_8 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i\right) + (c_9 \cdot e_9)$$

Considerando que e_9 representa o pior caso possível*, temos que:

$$T(n) = \left(c_6 \cdot ((n-1)+1)\right) + \left(c_7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\right) + \left(c_8 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i\right) + \left(c_9 \cdot \sum_{i=1}^{n} n-i\right)$$

$$T(n) = c_6 n + \left(c_7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\right) + \left(c_8 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i\right) + \left(c_9 \cdot \sum_{i=1}^{n} n-i\right)$$

*como passado pelo exemplo de execução no código "main".

c) Segue a resolução:

$$T(n) = c_6 n + \left(c_7 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\right) + \left(c_8 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i\right) + \left(c_9 \cdot \sum_{i=1}^{n} n - i\right)$$

$$T(n) = c_6 n + c_7 \cdot \frac{(1+n)\cdot n}{2} + c_8 \cdot \frac{\big(0 + (n-1)\big)\cdot n}{2} + c_9 \cdot \frac{\big((n-1)+0\big)\cdot n}{2}$$

$$T(n) = c_6 n + c_7 \cdot \frac{n^2+n}{2} + c_8 \cdot \frac{n^2-n}{2} + c_9 \cdot \frac{n^2-n}{2}$$

$$T(n) = \frac{2c_6 n + c_7 \cdot (n^2+n) + c_8 \cdot (n^2-n) + c_9 \cdot (n^2-n)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2c_6 n + c_7 \cdot (n^2+n) + (c_8 + c_9) \cdot (n^2-n)}{2}$$

Considerando que $c_6 = 1$, $c_7 = 1$, $c_8 = 1$ e $c_9 = 1$ como sendo verdadeiro, temos:

$$T(n) = \frac{2 \cdot 1 \cdot n + 1 \cdot (n^2+n) + (1+1)\cdot(n^2-n)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + (n^2+n) + 2\cdot(n^2-n)}{2}$$

$$T(n) = \frac{2n + n^2 + n + 2n^2 - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{3n^2+n}{2}$$

$$T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

d) Segue a resolução para $O(n^2)$:

$$T(n) = O(n^2)$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \le c_1 \cdot n^2$$

$$\frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} \le c_1$$

$$c_1 \ge \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2}$$

$$c_1 \ge \frac{3}{2}n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$c_1 \ge \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$c_1 \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

Considerando que $n \to \infty$, então temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_1 \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore c_1 \ge \frac{3}{2}$$

Assim, é verdadeiro a expressão $T(n) = O(n^2)$, pois c_1 pode ser uma constante.

Segue a resolução para $\Omega(n^2)$:

$$T(n) = \Omega(n^2)$$
$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \geq c_2 \cdot n^2$$
$$\frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} \geq c_2$$
$$c_2 \leq \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2}$$
$$c_2 \leq \frac{3}{2}n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{n^2}$$
$$c_2 \leq \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$
$$c_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

Considerando que $n \to \infty$, então temos que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(c_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right)$$
$$\therefore c_2 \leq \frac{3}{2}$$

Assim, é verdadeiro a expressão $T(n) = \Omega(n^2)$, pois c_2 pode ser uma constante.