Avaliação – Relação e função

Lucas Azevedo Dias

Exercícios 5.1

2. Para cada uma das relações binárias ρ a seguir, definidas em N, decida quais dos pares ordenados dados pertencem a ρ.

b) R.: $\{(5,8),(9,16),(8,21)\}$

c) R.: $\{(28,14),(7,7)\}$

d) R.: $\{(1,0),(-3,4)\}$

e) R.: $\emptyset$

8. Diga se cada uma das relações em S a seguir é um para um, um para muitos, muitos para um ou muitos para muitos.

a) R.: Um para um

b) R.: Muitos para um

c) R.: Muitos para muitos

d) R.: Um para muitos

12. Seja $S = \{0,1,2,4,6\}$. Verifique se as relações binárias em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas.

a) R.: Reflexiva e transitiva.

b) R.: Simétrica.

c) R.: Reflexiva, simétrica e transitiva.

d) R.: Reflexiva, simétrica e transitiva.

e) R.: Nenhum.

16. Quais das relações binárias no Exercício 14 são relações de equivalência? Para cada relação de equivalência, descreva as classes de equivalência.

a) R.: É relação de equivalência. Classe será todas as cadeias com o mesmo número de caracteres. Ex.: $[abccd] = [cdeef]$

b) R.: Não é relação de equivalência.

c) R.: É relação de equivalência. Classe será todos os subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ que possuam a mesma quantidade de elementos.

d) R.: É relação de equivalência. Classe será todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que possuam a mesma quantidade de elementos.

e) R.: Não é relação de equivalência.

18. Verifique se as relações binárias nos conjuntos S dados a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas.

a) R.: Reflexiva e transitiva.

b) R.: Reflexiva, simétrica e transitiva.

c) R.: Simétrica.

d) R.: Simétrica.

26. Duas propriedades adicionais de uma relação binária ρ são definidas da seguinte maneira:

a) R.: $x\rho y \leftrightarrow x = 1 + y$

b) R.: $x\rho y \leftrightarrow x = 2 + y$

c) R.: Se $x = y$, então, para ser assimétrico, $(x, x) \notin \rho$, fazendo com que seja irreflexiva

d) R.:

Pois em transitiva, para haver qualquer possibilidade de simetria, deve haver os pares (x, x); então, não havendo essa possibilidade, será necessariamente assimétrica.

e) R.: Pois para ser uma relação transitiva ser simétrica;

ela necessariamente precisa que ela seja reflexiva, já que:

$$\text{tendo } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S) \text{ então para ser simétrico:}$$

$$((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \to (x, z) \in \rho) \wedge ((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \to (z, x) \in \rho)$$

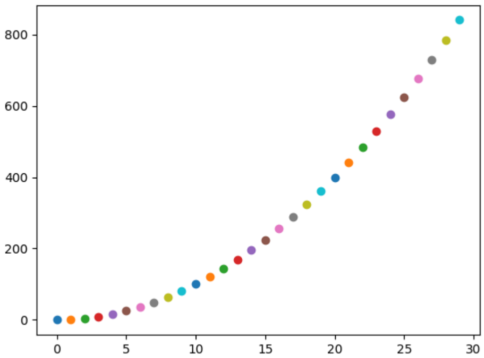
$$\text{mas se for assim, então:}$$

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \to (y, y) \in \rho \text{ necessariamente (a não ser que seja vazia)}$$

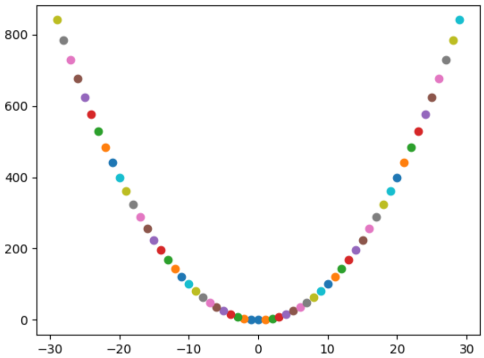
$\therefore$ *se* ρ for transitiva e simétrica, então necessariamente será reflexiva desde que não seja vazia

Exercícios 5.4

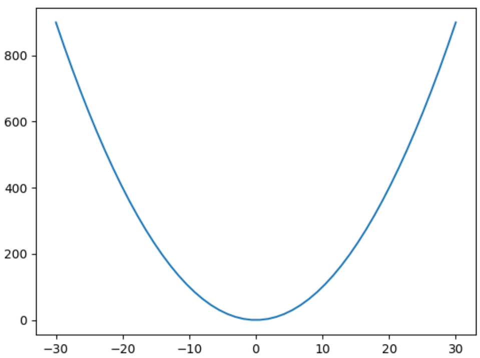
6. Se $f: R \to R$ for definida por $f(x) = x^2$, descreva



a) R.:



b) R.:



c) R.:

14. Sejam $S =$ conjunto de pessoas em uma reunião, $T =$ conjunto de todos os sapatos na sala de reunião. Seja $f(x) =$ sapato no pé esquerdo de x.

a) R.: Define, pois relaciona um elemento do conjunto S com outro único do conjunto T (sem haver dois elementos de T para o mesmo de S).

b) R.: Sim, pois não há dois elementos de S para o mesmo de T.

c) R.: Não, pois a imagem não é igual ao contradomínio (há os sapatos dos pés direitos que são deixados de lado).

16. Quais das definições a seguir são de funções do domínio no contradomínio indicados? Quais são funções injetoras? Quais são funções sobrejetoras? Descreva a função inversa das funções bijetoras.

a) R.: Função não sobrejetora e não injetora.

b) R.: Função sobrejetora apenas.

c) R.: Função injetora apenas.

d) R.: Função bijetora. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ x + 1 \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$

e) R.: Função sobrejetora apenas.

f) R.: Função injetora apenas.

20. Sejam $A = \{x, y\}$ e A^* o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com símbolos pertencentes a A. Defina uma função $f: A^* \to \mathbb{Z}$ da seguinte maneira: para s em A^*, $f(s) =$ número de caracteres iguais a x em s menos o número de caracteres iguais a y em s. f é injetora? Prove que sim ou que não. f é sobrejetora? Prove que sim ou que não.

R.: Não é injetora, pois pode haver diferentes cadeias com a mesma diferença de quantidade de letras x e de letras y, assim resultando no mesmo valor.

É sobrejetora, pois facilmente se pode chegar a qualquer resultado do contradomínio, sendo que um exemplo seria usar cadeias apenas com x para chegar a todos os inteiros positivos e usar cadeias apenas com y para chegar a todos os inteiros negativos.

22. Sejam $A = \{x, y\}$ e A^* o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com símbolos pertencentes a A. Defina uma função $f: A^* \to A^*$ da seguinte maneira: para s em A^*, $f(s) = xs$ (a cadeia com um único caractere x seguida de s). f é injetora? Prove que sim ou que não. f é sobrejetora? Prove que sim ou que não.

R.: É injetora, pois, para um resultado, poderá se chegar a partir de um único s.

Não é sobrejetora, pois a imagem conterá apenas cadeias que comecem com x, abandonando as demais (ou seja $Im \neq CD$).

28. Calcule os valores a seguir.

a) R.: $\lceil -5 - 1{,}2 \rceil = -6$

b) R.: $\lceil -5 - \lceil 1{,}2 \rceil \rceil = -7$

c) R.: $\lfloor 2 * 3{,}7 \rfloor = 7$

d) R.: $\left\lceil 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right\rceil = 3$