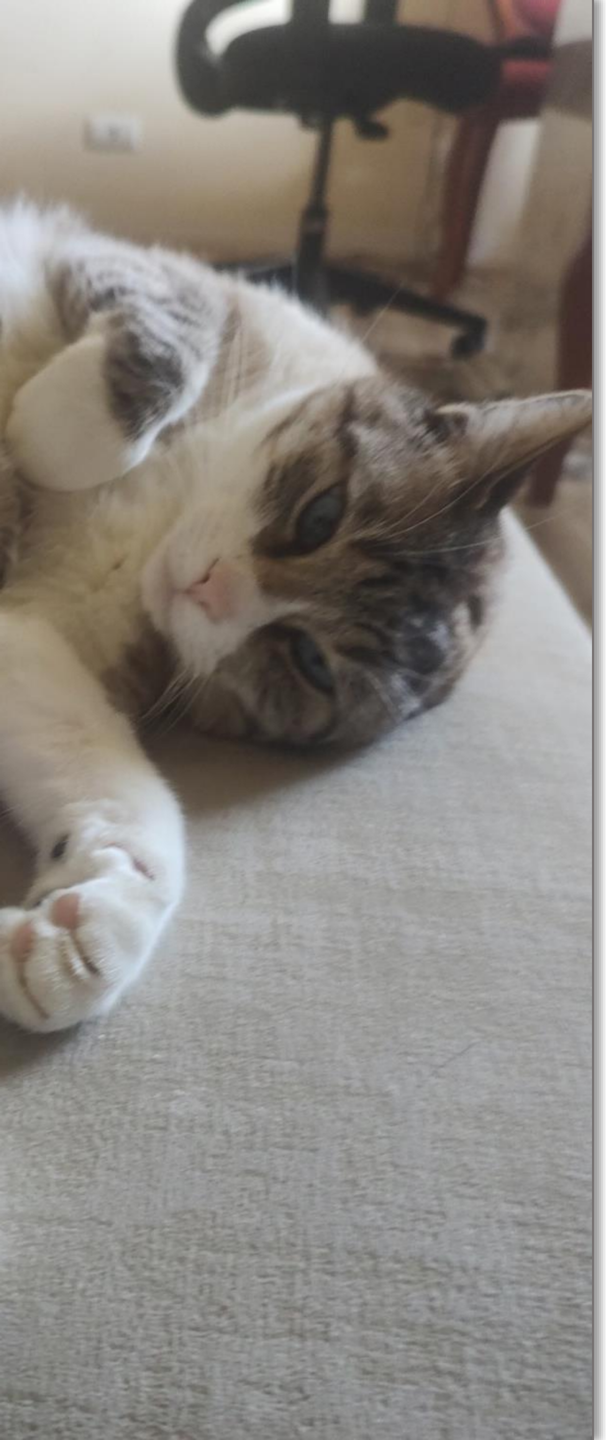
Modelagem de Fenômenos Físicos

Aula 2
O Primeiro Modelo e Limites

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1



Primeiro Modelo – Juros Compostos

Vamos ver como conseguimos chegar a equação dos Juros compostos analisando a aplicação de juros consecutivamente sobre um capital inicial.

CÓDIGO DE HAMMURABI

Existem registros datados de 3000 AC, do uso de uma forma de cobrança de valores sobre empréstimos na **Suméria**, em atividades realizadas pelo chamaríamos de bancos.

O **Código de Hammurabi** estabelecia que as taxas deveriam ser uma fração fixa do valor emprestado. Diferente para grãos, ouro e prata.

NA IDADE MÉDIA

A prática do uso de percentuais começou no final da idade média. Vamos considerar um empréstimo de **10.000** ***Fiorini d'oro*** a uma taxa de **3%** ao ano do Banco Medici, por **7 anos** com o empréstimo renovado todos os anos. Neste caso, o pobre ***debitore*** pagaria: **12,298.70** ***Fiorini d'oro.***

Queremos saber porque?

Fazendo algumas contas

$$f_0 = 10.000,00$$

$$f_1 = 10000,00 + (10000,00 * 0,03) = 10300,00$$

$$f_2 = 10300,00 + (10300,00 * 0,03) = 10609,00$$

$$f_3 = 10609,00 + (10609,00 * 0,03) = 10927,27$$

$$f_4 = 10927,27 + (10927,27 * 0,03) = 11254,68$$

$$f_5 = 11,254.68 + (11,254.68 * 0,03) = 11592,32$$

$$f_6 = 11,592.32 + (11,592.32 * 0,03) = 11940,29$$

$$f_7 = 11,940.29 + (11,940.29 * 0,03) = 12298,70$$

Em Python

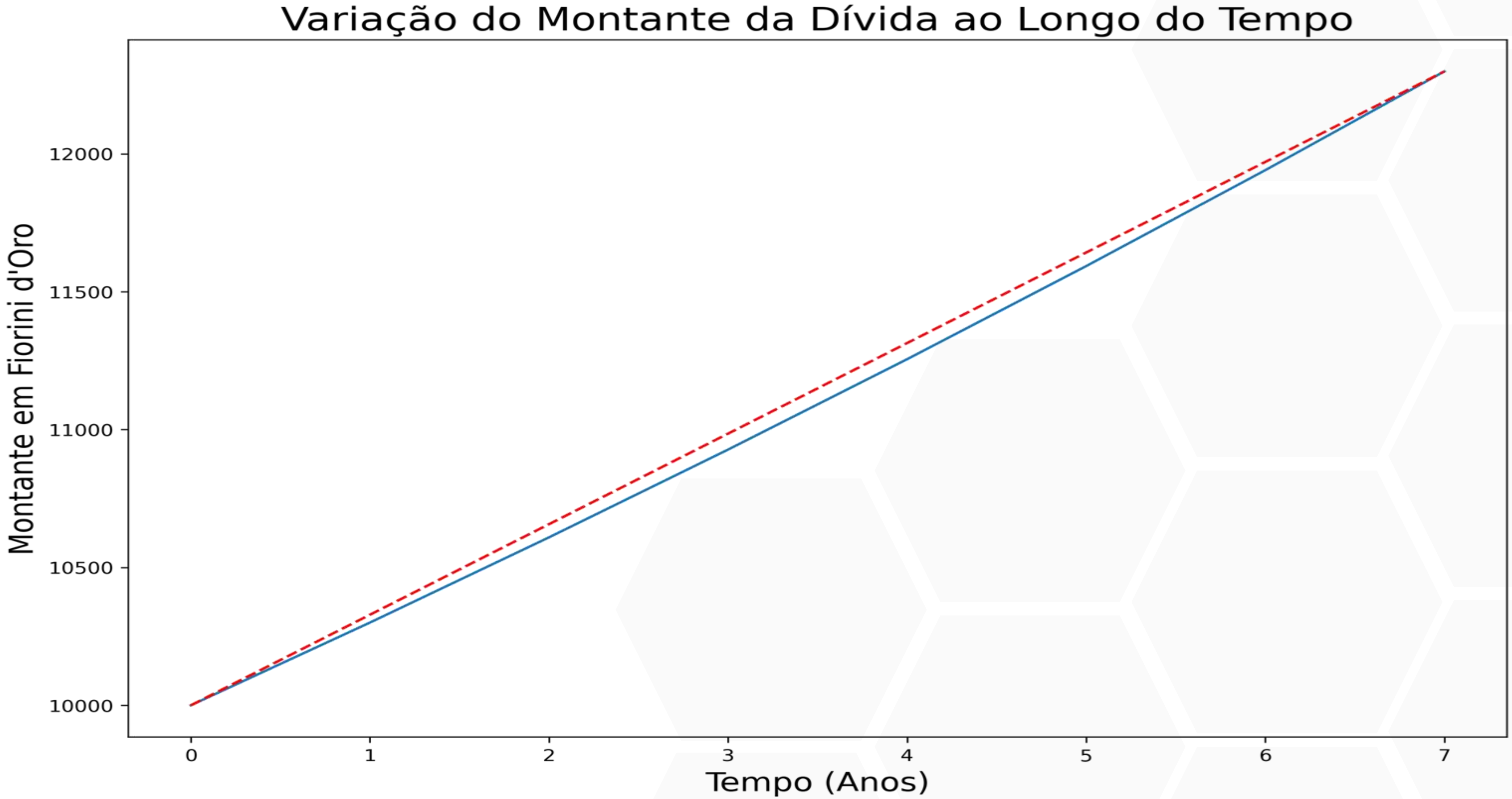
```python
# definindo os símbolos manualmente
f0, f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7 = symbols('f0 f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7')
# o empréstimo
f0 = 10000
saida = f'O valor inicial: {f0:.2f}'
display(Math(saida))
# o primeiro ano
f1 = 10000 + (10000*0.03)
saida = f'f1 = {f0:.2f} + ({f0:.2f} * 0.03) = {f1:.2f}'
display(Math(saida))
# o segundo ano
f2 = f1 + (f1*0.03)
saida = f'f2 = {f1:.2f} + ({f1:.2f} * 0.03) = {f2:.2f}'
display(Math(saida))
# o terceiro ano
f3 = f2 + (f2*0.03)
saida = f'f3 = {f2:.2f} + ({f2:.2f} * 0.03) = {f3:.2f}'
display(Math(saida))
```

O que imprimiu

$$O\ valor\ inicial : 10000.00$$
$$f1 = 10000.00 + (10000.00 * 0.03) = 10300.00$$
$$f2 = 10300.00 + (10300.00 * 0.03) = 10609.00$$
$$f3 = 10609.00 + (10609.00 * 0.03) = 10927.27$$
$$f4 = 10927.27 + (10927.27 * 0.03) = 11255.09$$
$$f5 = 11255.09 + (11255.09 * 0.03) = 11592.74$$
$$f6 = 11592.74 + (11592.74 * 0.03) = 11940.52$$
$$f7 = 11940.52 + (11940.52 * 0.03) = 12298.74$$

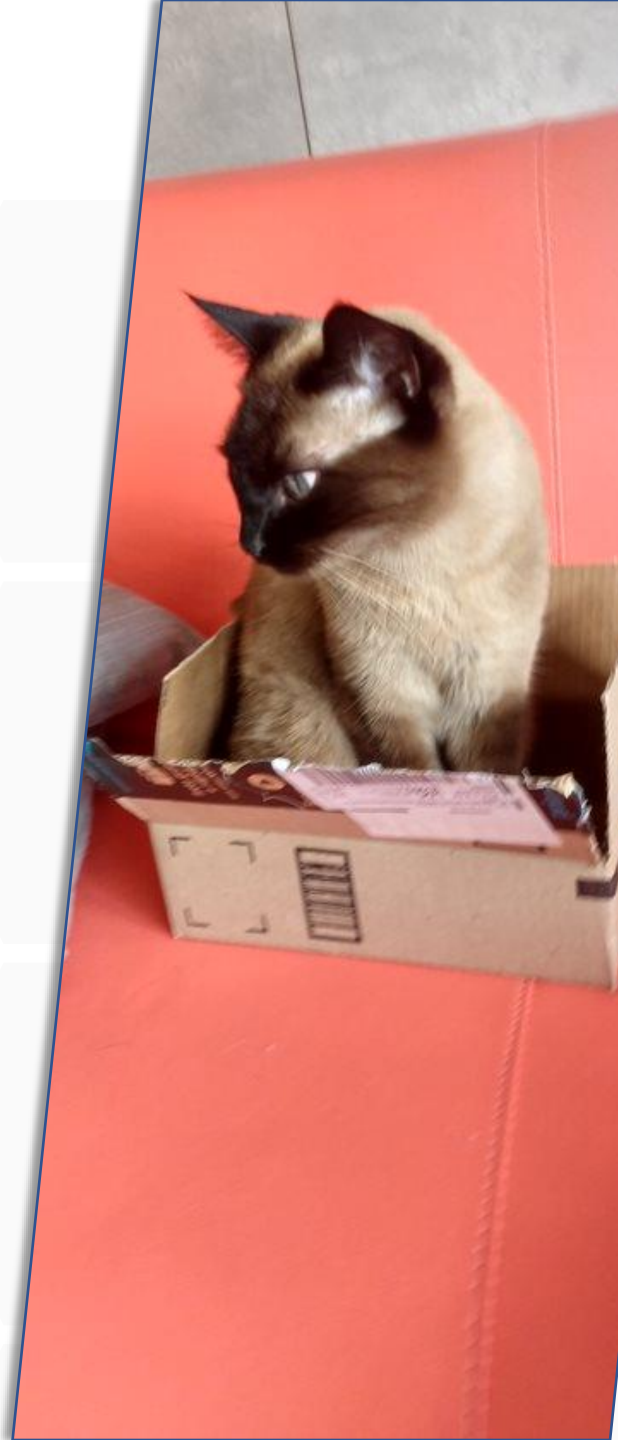
Que é uma forma estúpida de fazer código!

Senta que lá vem o gráfico



Exercícios Sugerido 1

Cálculo de Juros Compostos



Juros Anuais em Python

A prática do uso de percentuais começou no final da idade média. Vamos considerar um empréstimo de 10.000 ***Fiorini d'oro*** a uma taxa de **3%** ao ano do Banco Medici, por **7 anos** com o empréstimo renovado todos os anos. Neste caso, o pobre ***debitore*** pagaria: **12,298.70** ***Fiorini d'oro.***

Não esqueça a qualidade da impressão!

A saída do seu programa deve ser:

$$f_0 = 10.000,00$$

$$f_1 = 10000,00 + (10000,00 * 0,03) = 10300,00$$

$$f_2 = 10300,00 + (10300,00 * 0,03) = 10609,00$$

$$f_3 = 10609,00 + (10609,00 * 0,03) = 10927,27$$

$$f_4 = 10927,27 + (10927,27 * 0,03) = 11254,68$$

$$f_5 = 11,254.68 + (11,254.68 * 0,03) = 11592,32$$

$$f_6 = 11,592.32 + (11,592.32 * 0,03) = 11940,29$$

$$f_7 = 11,940.29 + (11,940.29 * 0,03) = 12298,70$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

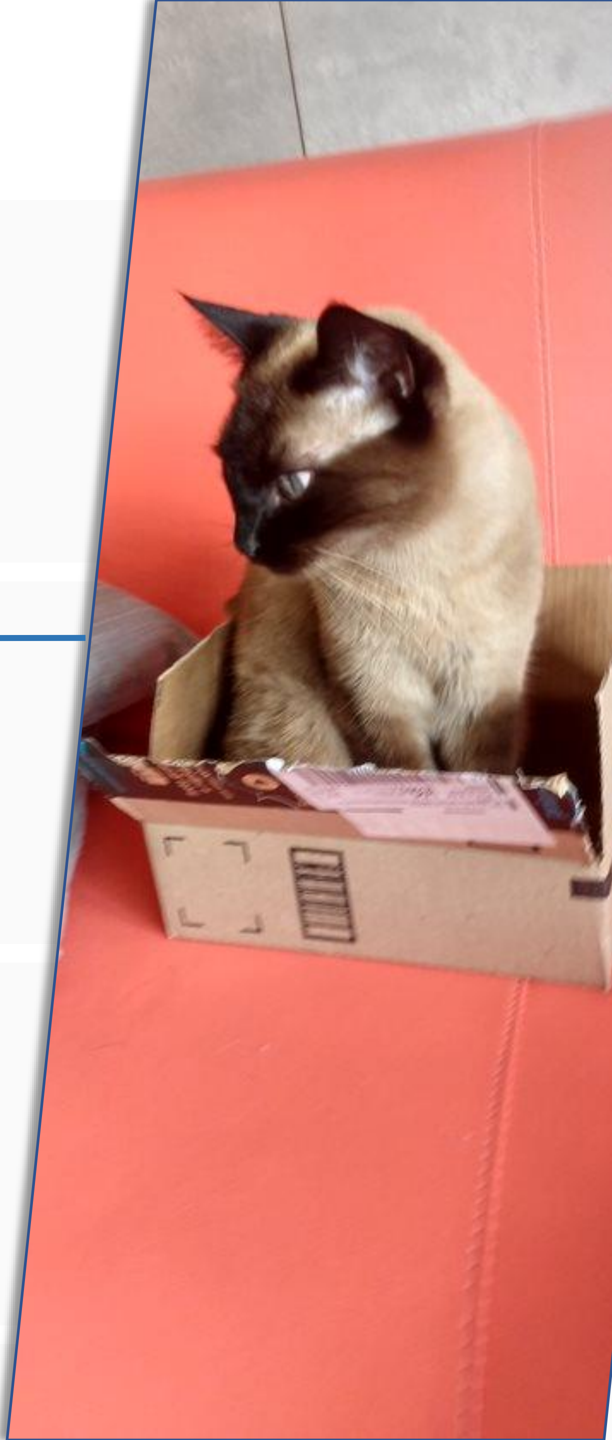
Juros Anuais em Python – Uma Solução

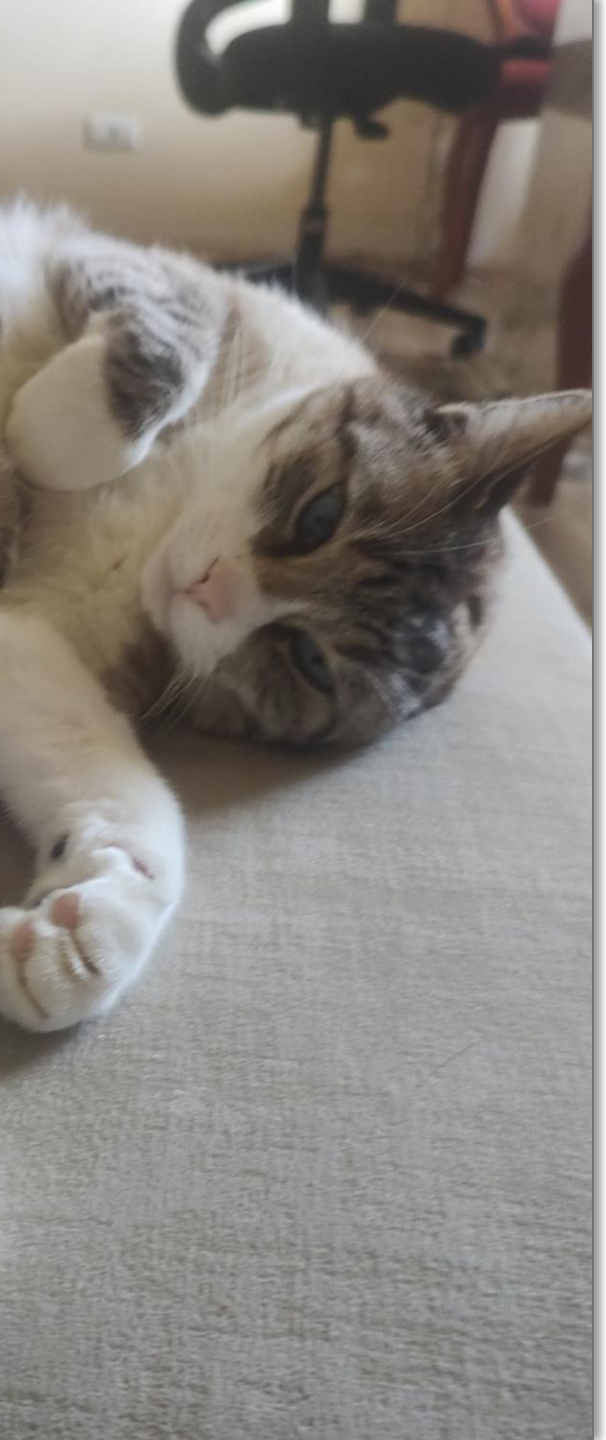
```
# usando um laço para definir as variáveis
f = {}
for i in range(8):
    f[f'f{i}'] = Symbol(f'f{i}')
# imprimir a primeira linha
f['f0'] = 10000
saida = f'O\space valor\space inicial: {f0:.2f}'
display(Math(saida))

for i in range(1, 8):
    f[f'f{i}'] = f[f'f{i-1}'] + (f[f'f{i-1}'] * 0.03)
    saida = f'f{i} = {f[f"f{i-1}"]:.2f} + ({f[f"f{i-
1}"]:.2f} * 0.03) = {f[f"f{i}"]:.2f}'
    display(Math(saida))
```

O Código está disponível em

Juros Compostos





Voltando ao Primeiro Modelo

Será que conseguimos encontrar um modelo para este fenômeno? Se sim, será que a computação será mais eficiente?

Olhe as contas com cuidado e atenção

$$f_0 = 10.000,00 \; se \;\; f_0 = P \wedge 0,03 = R \; e \; M \; o \; resultado \; por \; ano$$

$$f_1 = 10000,00 + (10000,00 * 0,03) = 10300,00$$
$$M = P + (P * R) = 10300,00$$
$$M = P(1 + R) = 10300,00$$

$$f_2 = 10300,00 + (10300,00 * 0,03) = 10609,00$$
$$M = M + (M * 0,03) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R) + (P(1 + R) * R) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R)(1 + R) = P(1 + R)^2 = 10609,00$$

Olhe as contas com cuidado e atenção

$$f_2 = 10300,00 + (10300,00 * 0,03) = 10609,00$$
$$M = M + (M * 0,03) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R) + (P(1 + R) * R) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R)(1 + R) = P(1 + R)^2 = 10609,00$$

$$f_3 = 10609,00 + (10609,00 * 0,03) = 10927,27$$
$$M = M + (M * 0,03) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R)^2 + \left(P(1 + R)^2 * R\right) = 10609,00$$
$$M = P(1 + R)^2(1 + R) = P(1 + R)^3 = 10609,00$$

Encontramos um padrão

- Considerando todas as equações chegamos a:

$$\boldsymbol{M = P(1 + R)^n}$$

- Que podemos testar para 7 anos retomando a equação $f7$:

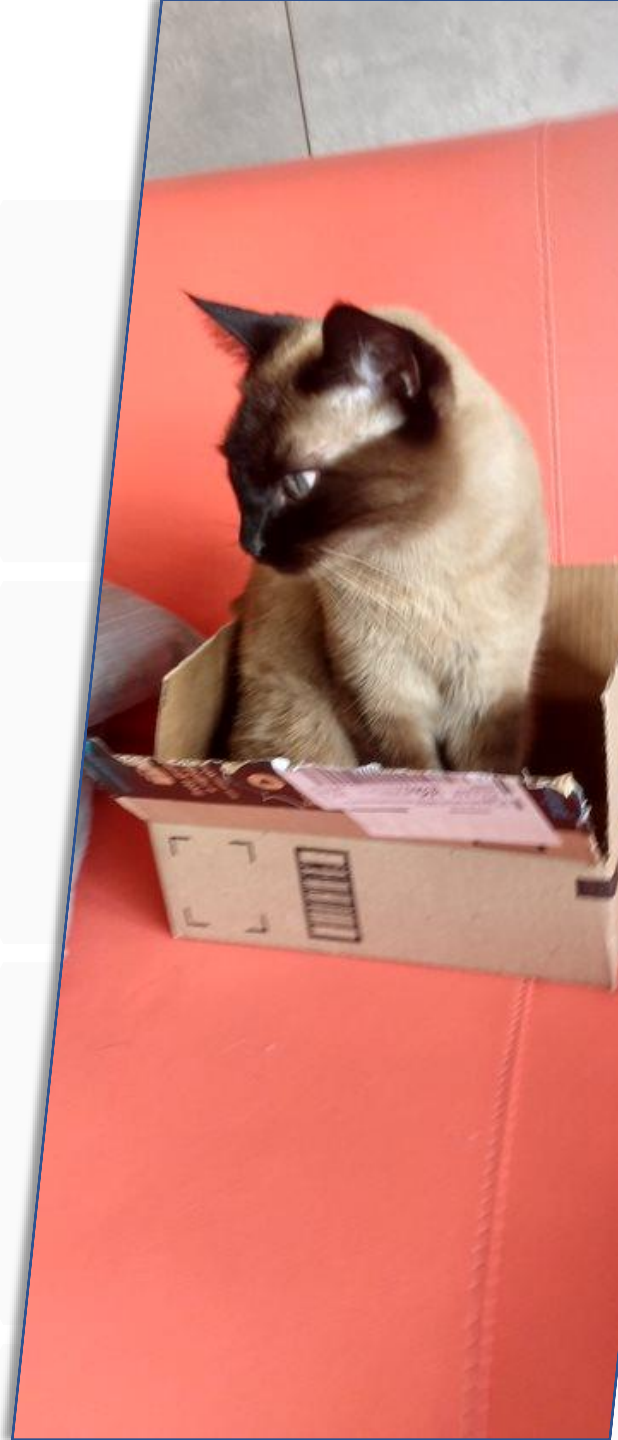
$$\boldsymbol{f_7 = 11,940.29 + (11,940.29 * 0,03) = 12,298.70}$$

$$\boldsymbol{M = 10000,00(1 + 0.03)^7 = 12,298.70}$$

Encontramos uma equação para juros compostos que calcula o montante final (M) após uma número (f) de aplicação da taxa de Juros (R) sobre o valor inicial (P) e na taxa de juros (r).

Exercícios Sugerido 2

O Tempo é o senhor da razão



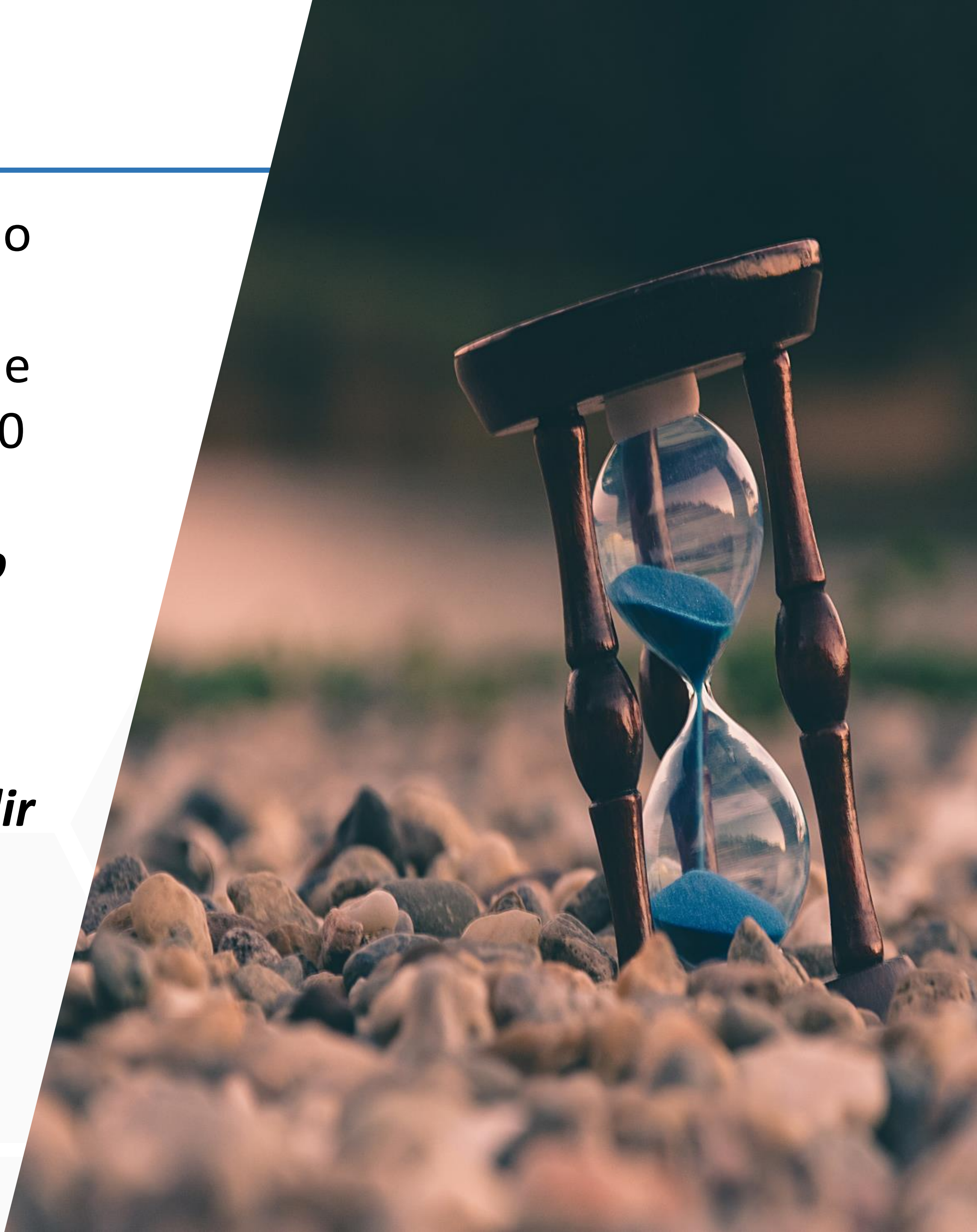
TEMPUS DOMINUS RATIONIS EST

Você já tem um código, em Python para calcular o juro até o 7 ano, usando um laço de repetição**.** Vamos mudar este código, ainda usando o laço de repetição para calcular o montante depois de 200 anos.

E medir quanto tempo o Python leva calculando isso no Google Colaboratory.

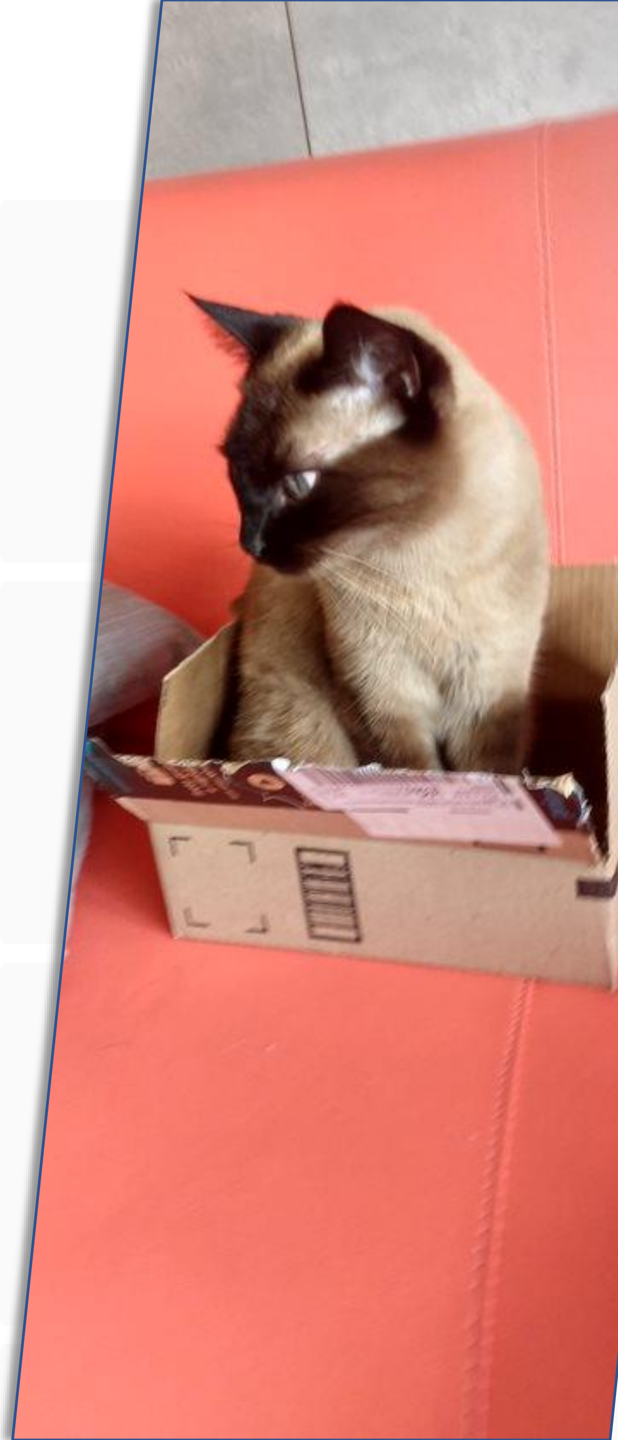
Depois vamos fazer uma função que calcule este valor usando a equação que encontramos ***e medir o tempo que o Python leva calculando esta função no Google Colaboratory.***

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Exercícios Sugerido 3

Sua Empresa Bombando!



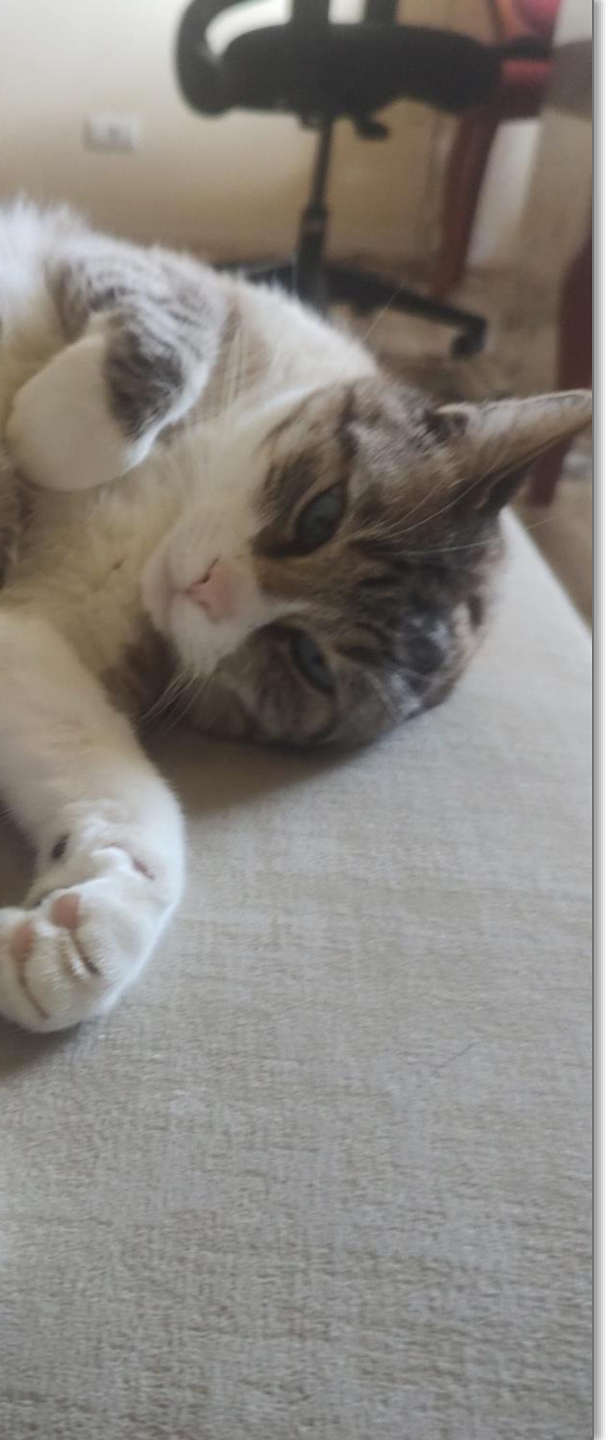
O Caso da Empresa de Cosméticos

A "BelezaJá" é uma empresa inovadora no ramo de cosméticos que recentemente lançou uma plataforma de vendas online. O número de clientes cadastrados na plataforma está crescendo graças a um grande esforço de marketing. Ao lado estão os números de clientes registrados na plataforma a cada mês, durante 10 meses. Seu objetivo é determinar quantos clientes a empresa terá em três anos de funcionamento se este movimento de crescimento continuar. (567718)

Número de Clientes por Mês

1. 1004
2. 1188
3. 1446
4. 1736
5. 2068
6. 2489
7. 3013
8. 3614
9. 4284
10. 5120

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Limites

Usamos limites para determinar se a função é contínua em um ponto, séries assintóticas e em série e infinitas como as séries de Taylor.

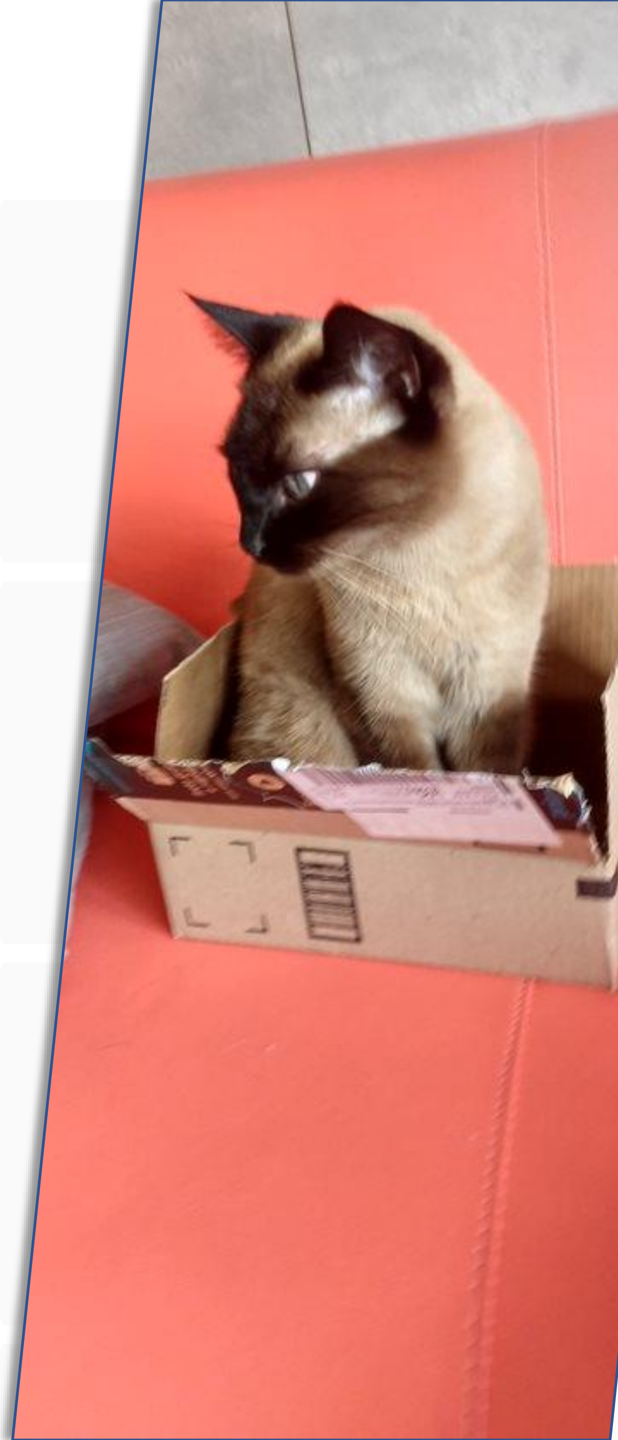
TUDO COMEÇOU COM MÁXIMOS E MÍNIMOS

Pierre de Fermat (1607-1665) tentava entender onde as funções atingiam seus valores máximos e mínimos locais, e para isso pensou em usar tangentes.

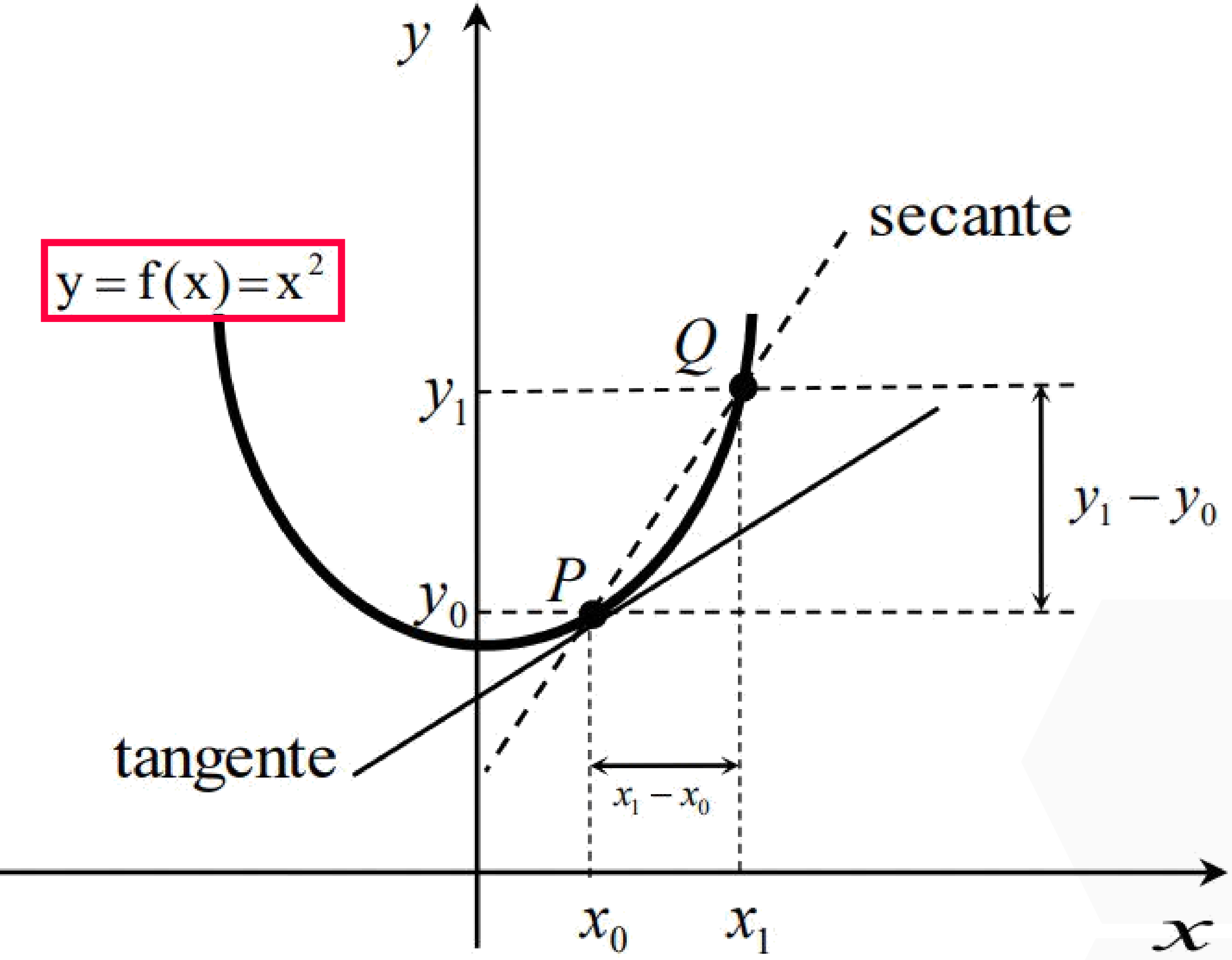
Fermat afirmava que, nos pontos, a inclinação da tangente fosse zero teríamos o ponto correspondente a um máximo ou mínimo local.

Para Entender o Trabalho de Fermat

O Trabalho de Fermat



Refazendo o Trabalho de Fermat



$$coef\ angular = m = PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$coef\ angular = \lim_{Q \to P} m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

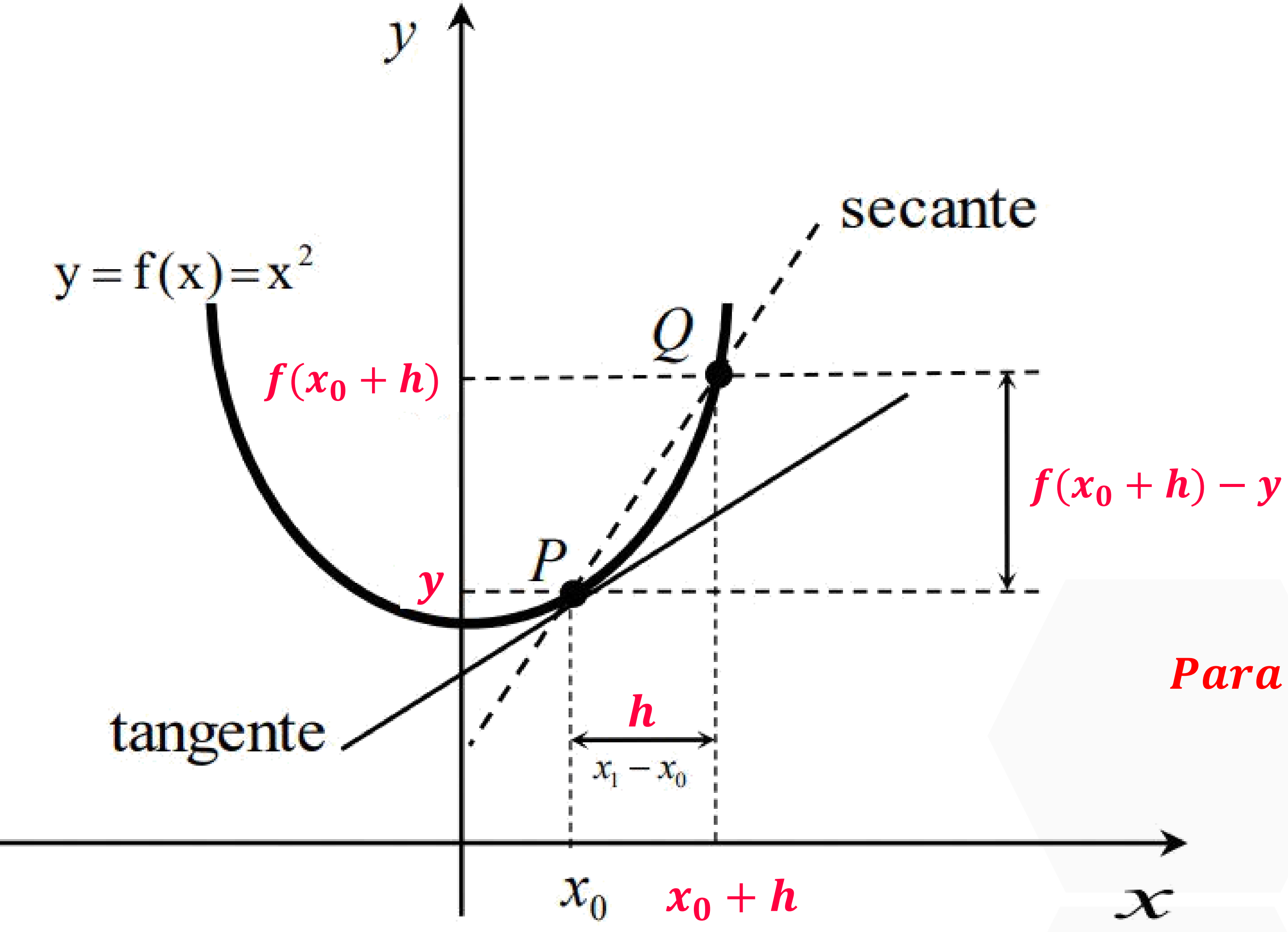
$$f(x) = x^2 \therefore y_1 = x_1^2 \wedge y_0 = x_0^2$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}$$

$$m = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{x_1 - x_0} = (x_1 + x_0)$$

$$No\ ponto\ onde\ x_1 = x_0\ teremos\ m = 2x_0$$

A Fórmula das Diferenças Finitas



$$m = \frac{f(x_0 + h) - y}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{(x_0 + h) - x_0}$$

$$m = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h}$$

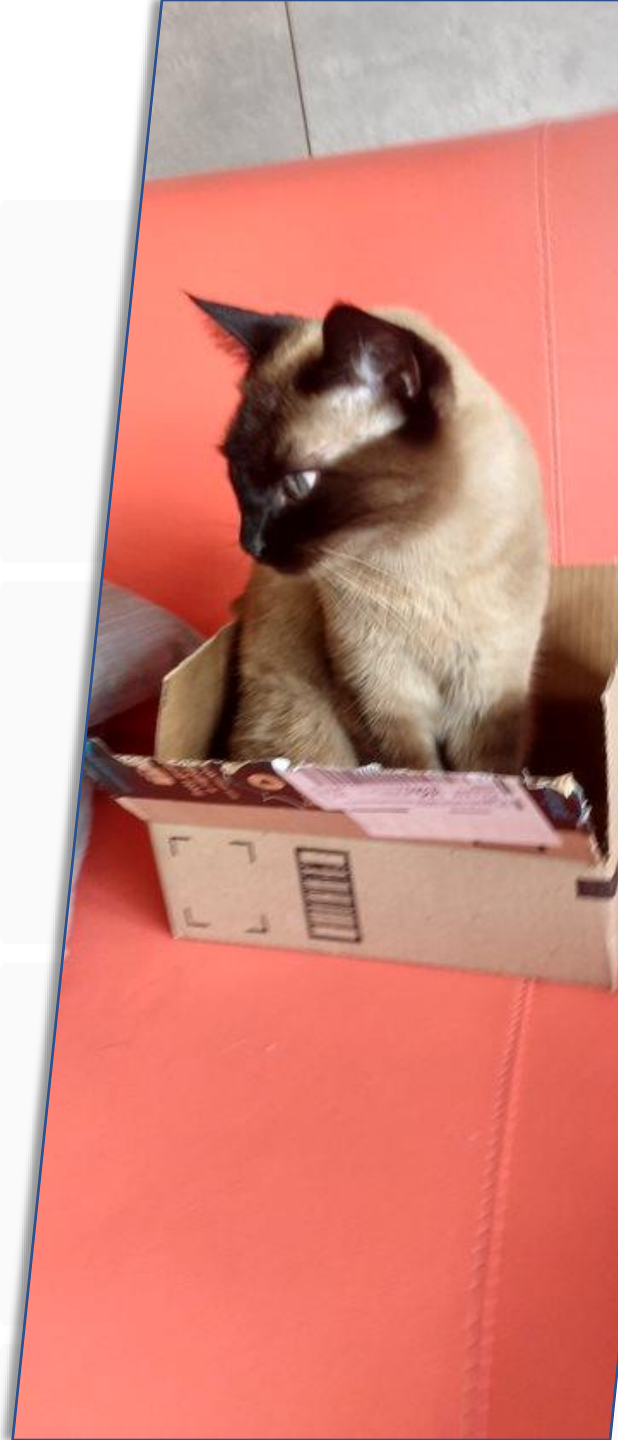
$$m = \frac{2x_0h}{h} + \frac{h^2}{h} = 2\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}$$

Para encontrar o limite fazemos h tender a 0

$$\lim_{h \to 0} f(x_0) = 2x_0$$

Exercícios Sugerido 4

Coeficiente angular



Coeficientes angulares e limites

Considerando $f(x) = x^2$, (a) calcule o coeficiente angular da tangente que passa pelo ponto $(1,1)$; (b) calcule o coeficiente angular da tangente que passa pelo ponto $(-1/2,1/4)$. Faça isso no Google Colaboratory, usando álgebra e depois plote o gráfico da função e as duas tangentes nestes pontos. Depois, usando a Biblioteca Sympy ache o limite desta função quando $x \to 1$ e quando $x \to -1/2$.

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

Entendendo Limites manualmente

- Considere a função $f(x) = 2x + 3$ o que acontece com o valor da função a medida que x se aproxima de 3? O que acontece quando $x \to 3$?

Aproximando pela esquerda $(-)$

x	2	2.6	2.9	2.99	2.999
$f(x)$					

Aproximando pela direita $(+)$

x	4	3.4	3.1	3.01	3.001
$f(x)$	11	9,8	9,2	9,02	9,002

$$\lim_{x \to 3}(2x + 3) = 9$$

Função Contínua no Ponto

O limite de $f(x)$ a medida que nos aproximamos de x pela esquerda:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

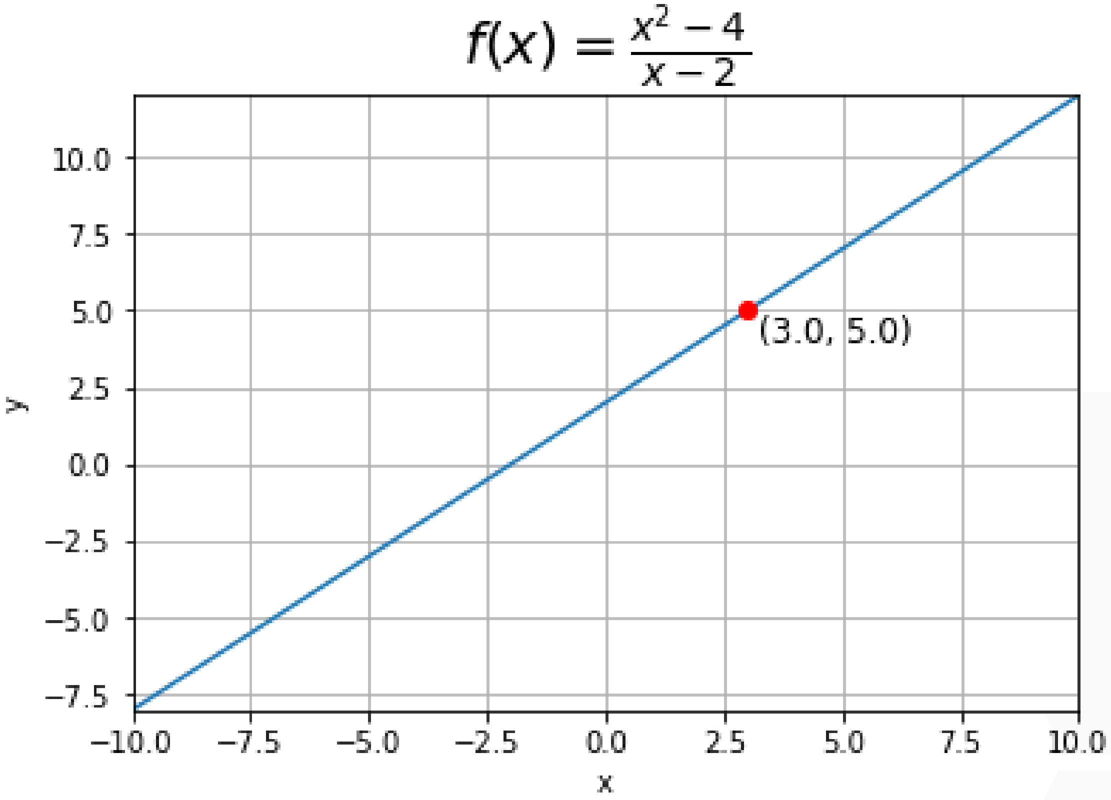
O limite de $f(x)$ a medida que nos aproximamos de x pela direita:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Para uma função continua o limite de $f(x)$ será o mesmo quer nos aproximemos pela direita ou pela esquerda.

Limites e tabelas

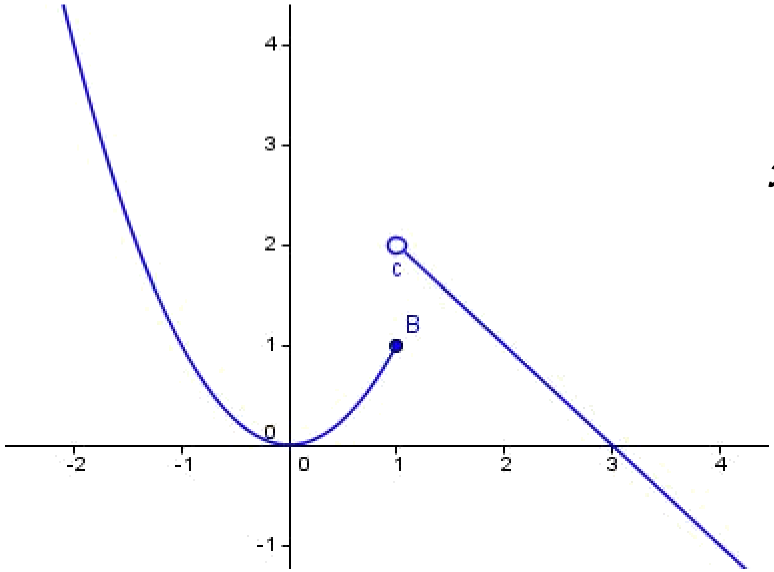
- Considerando a função a seguir, crie uma tabela que indique o valor do limite quando x tende a 3 pela esquerda e pela direita.



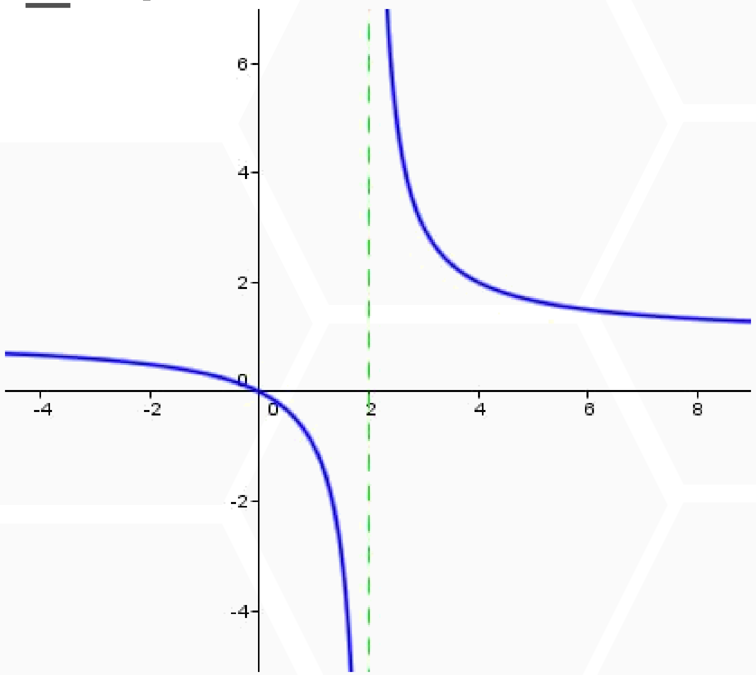
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Alguns Limites não podem ser calculados

Se o limite tem valores diferentes quando nos aproximamos pela esquerda e pela direita. Esta função é descontínua e o limite não pode ser calculado. Alguns serão representados por $\pm\infty$.



$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$



Resumindo

- O limite de $f(x)$ quando x tende a um valor a é escrito como $\lim_{x \to a} f(x)$
- Um problema de limites pode ter três respostas
  a. **Um valor de y:** se o limite tende ao mesmo valor de y a medida que nos aproximamos pela esquerda e pela direita;
  b. **Não podo ser calculado:** se o limite tende a valores diferentes quando nos aproximamos pela esquerda e pela direita;
  c. $\pm\infty$ se ao nos aproximarmos pelos dois lados o limite tender a $\pm\infty$. Limites que tendem ao infinito não podem ser calculados mas precisam ser indicados.

Calculando Limites: plano A – substituição direta

- Simplesmente substitua o valor desejado na equação para achar o limite. Tente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{2} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3 - 2x + 1\right) = 1^3 - (2\times 1) + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 11}\sqrt{x-2} = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5} = \frac{(-5)^2-25}{(-5)+5} = \frac{0}{0}$$

Calculando Limites: plano B – Simplificação Algébrica

- Se você chegar a $0/0$ tente fatorar o númerador e o denominador para ver se consegue eliminar o denominador.

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = \lim_{x \to -5} \frac{(x+5)(x-5)}{x+5} = \lim_{x \to -5} (x - 5) = -10$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right) = \quad ?$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 1} \right) = \quad ?$$

Calculando Limites: plano C – Propriedades da Radiciação

- Terminando em $0/0$ sem ter o que fatorar, tente as propriedades da radiciação e da exponenciação.

$$\lim_{x\to 13}\frac{\sqrt{x-4}-3}{x-13} = \lim_{x\to 13}\frac{(\sqrt{x-4}-3)(\sqrt{x-4}+3)}{(x-13)(\sqrt{x-4}+3)} = \frac{x-4+3\left(\sqrt{x-4}\right)-3\left(\sqrt{x-4}\right)-9}{(x-13)(\sqrt{x-4}+3)}$$

$$\frac{x-13}{(x-13)(\sqrt{x-4}+3)} \therefore \lim_{x\to 13}\frac{(1}{(\sqrt{x-4}+3)} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} = \ ?$$

Calculando Limites: plano D – Funções por partes

- Quando precisamos achar o limite de funções definidas por partes, podemos começar usando a substituição direta em todas as partes até encontrar os pontos onde a função comuta.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x + 2, x \leq 6 \\ x^2 - 1, x > 6 \end{cases}}$$

$$\lim_{x \to 6^-} f\,(x) =$$

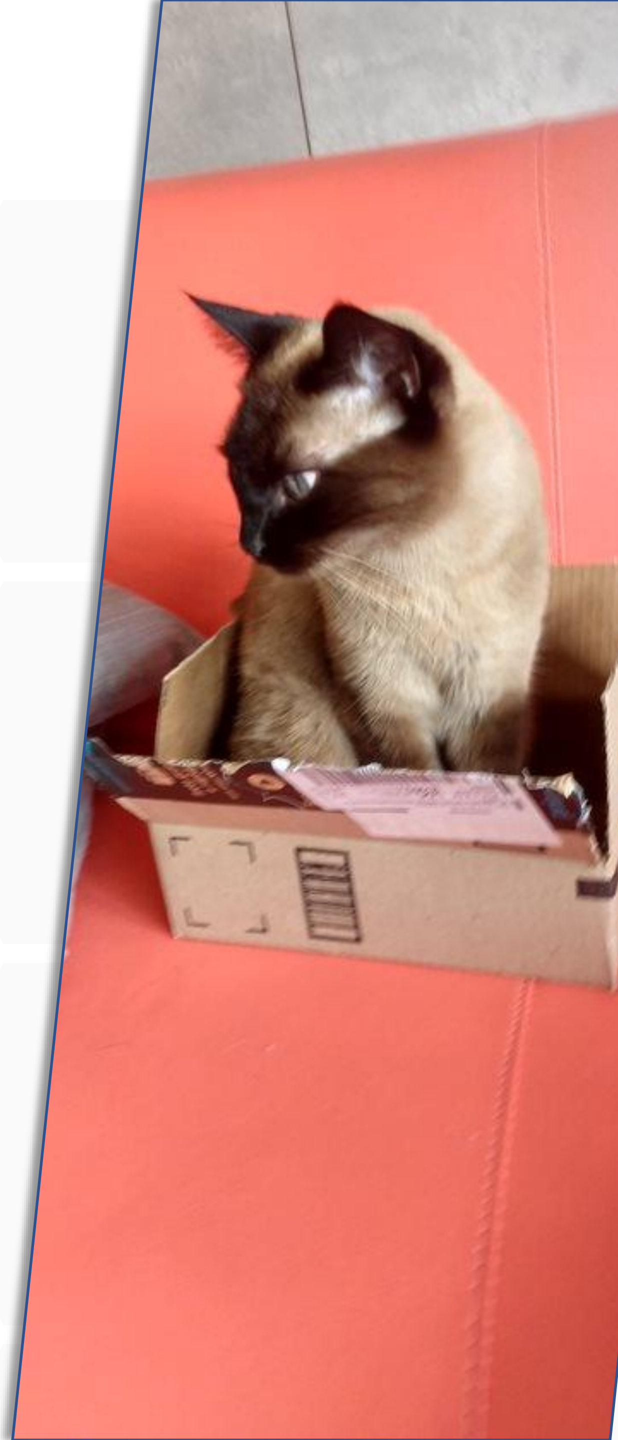
$$\lim_{x \to 8} f\,(x) =$$

$$\lim_{x \to 6+} f\,(x) =$$

$$\lim_{x \to 6} f\,(x) =$$

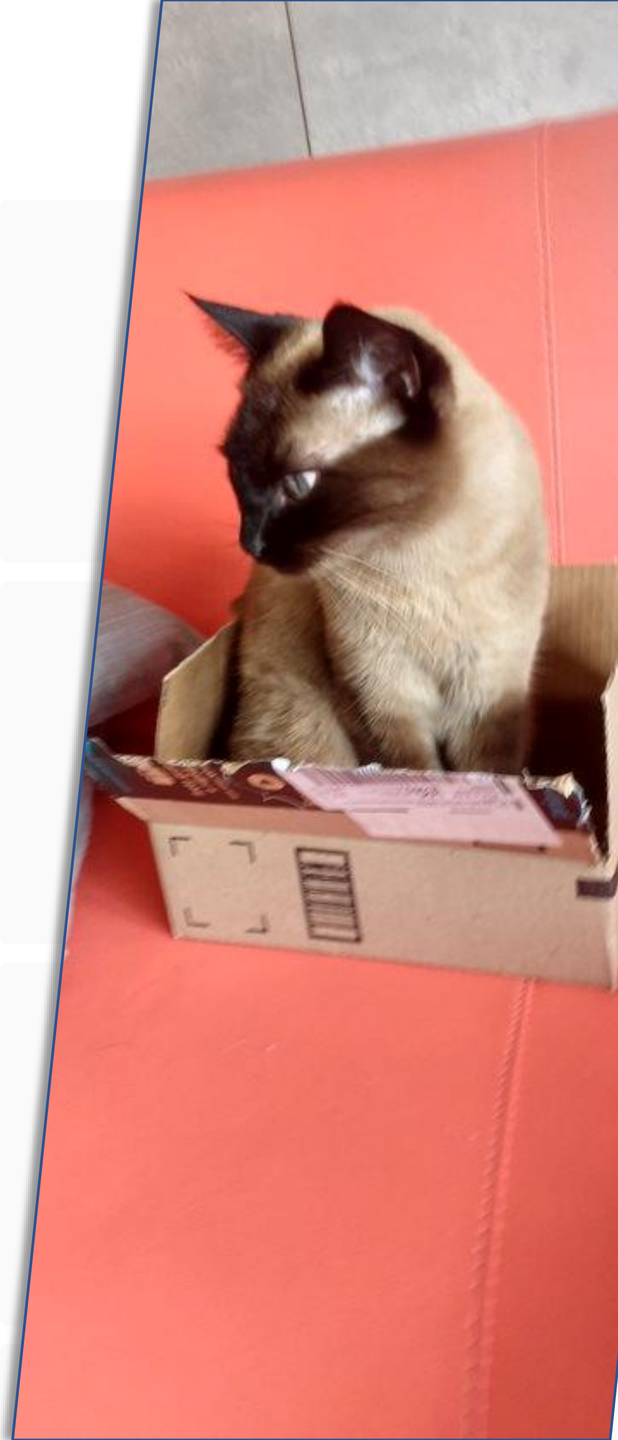
Exercícios Sugerido 4

Calculando Limites



Exemplos de Cálculos de Limites

Volte ao O Trabalho de Fermat neste mesmo caderno temos a definição formal de limites e vários exemplos de cálculos usando o Sympy



Praticando planos de ataque

- Considerando as funções a seguir, calcule os limites algebricamente, escrevendo o passo a passo, trace seus gráficos e verifique seus resultados usando o Sympy e qualquer outra calculadora de limites disponível na internet (Wolfram Alpha).

$$\lim_{x\to 9} \sqrt{x-8}+3=$$

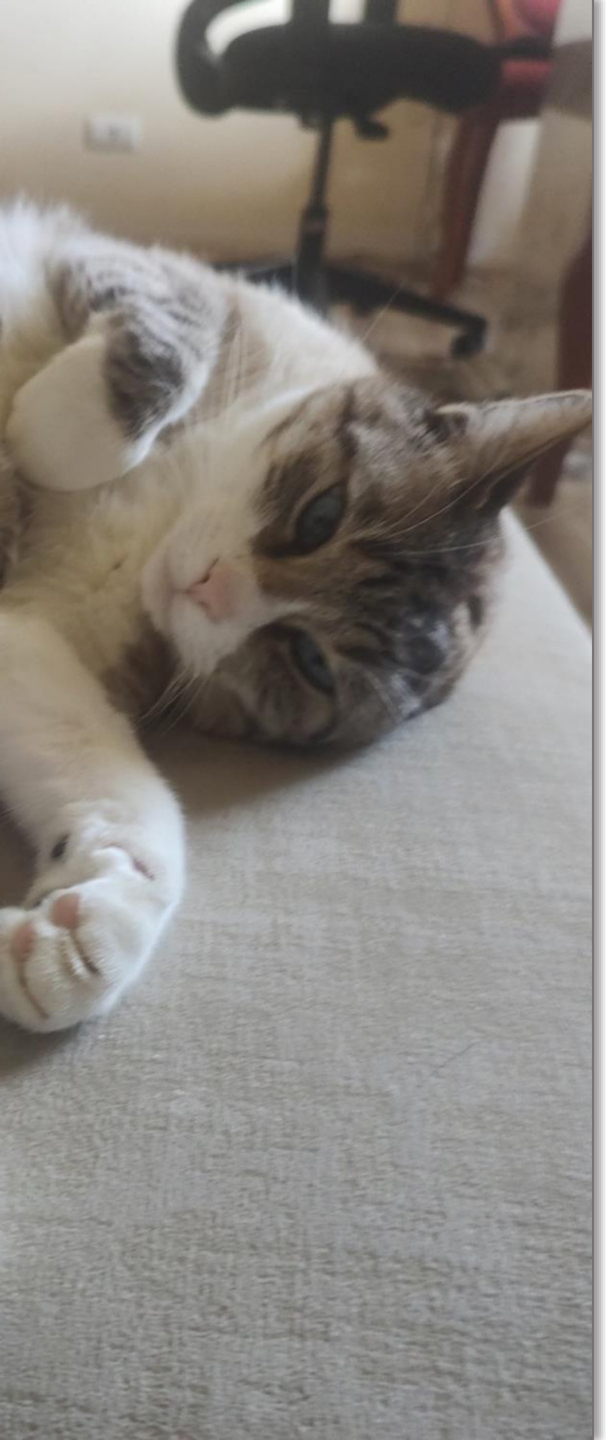
$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2+3\,, & x\geq -3 \\ -2x+6\,, & x<-3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{2x^2-5x+3}{2x^2-3x}=$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Propriedades dos Limites

Propriedades dos Limites

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = M$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \times g(x)] = L \times M$$

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$$

$$\lim_{x \to a}[k \times f(x)] = k \times L$$

Limites de Funções Trigonométricas

Dois limites são muito importantes para facilitar o cálculo de limites com funções trigonométricas.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Tente calcular este:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x}{x} = 0$$

Limites no Infinito

$$\lim_{x\to\infty} k = k$$

O limite de qualquer função constante é a constante

$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

O limite de uma função linear tende ao infinito

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$

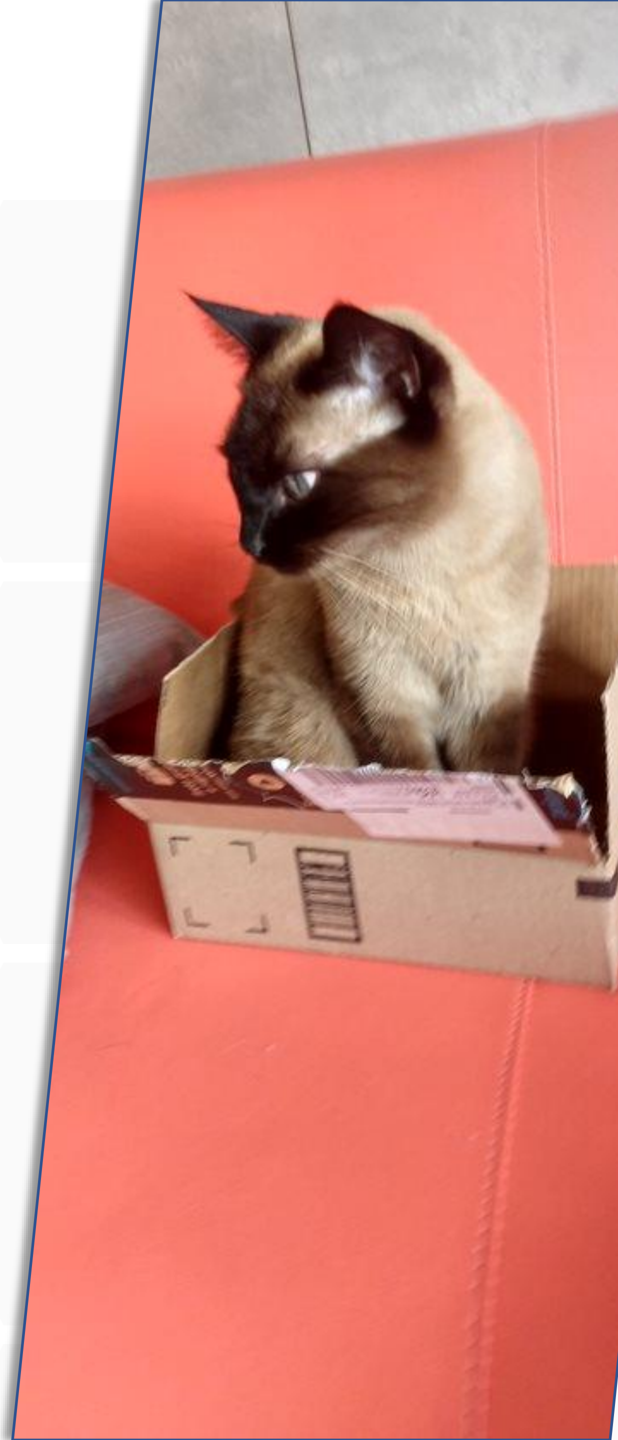
O limite de uma função polinomial depende do termo de grau mais alto.

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \pm\infty$$

O limite de uma função polinomial depende do termo de grau mais alto se for par tende ∞ se for impar tende $-\infty$

Exercícios Sugerido 4

Tendendo ao Infinito



Trabalhando com infinitos

Resolva os seguintes limites algebricamente, depois verifique com o Sympy e trace seus gráficos:

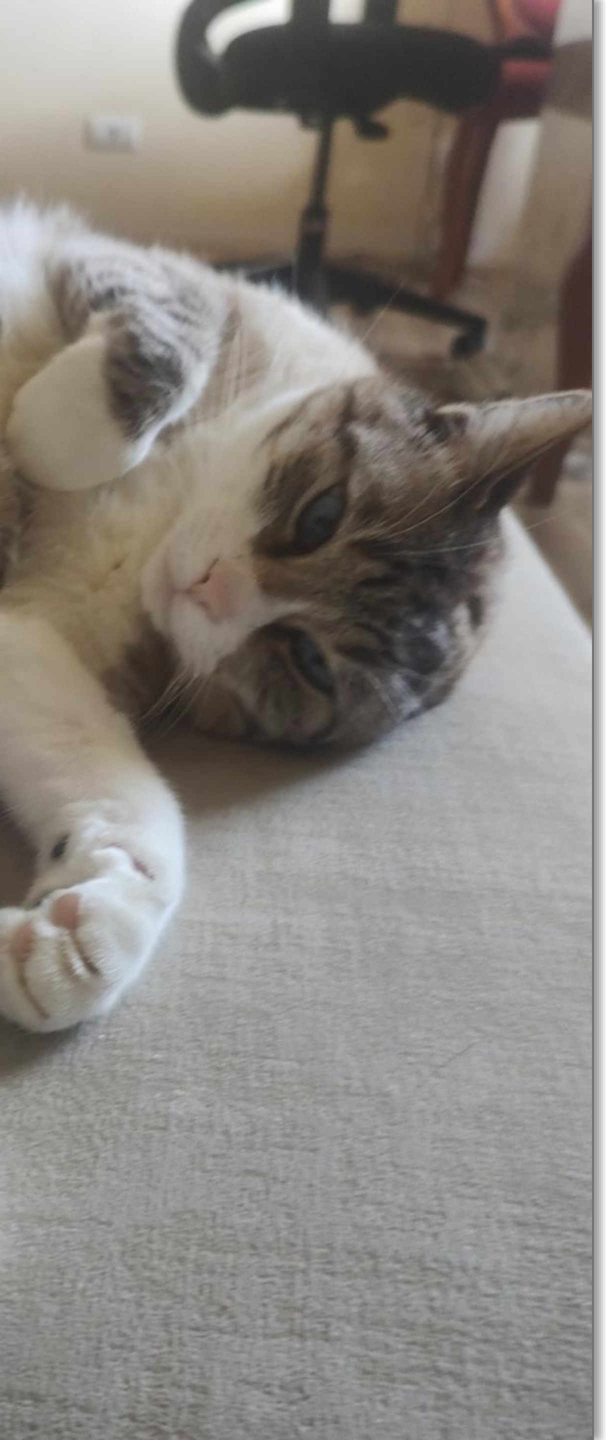
$$f(x) = \frac{x-3}{7-x}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x-6}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5x}$$

$$f(x) = \frac{3+x}{x^2-2}$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Obrigado!

Frank Coelho de Alcantara