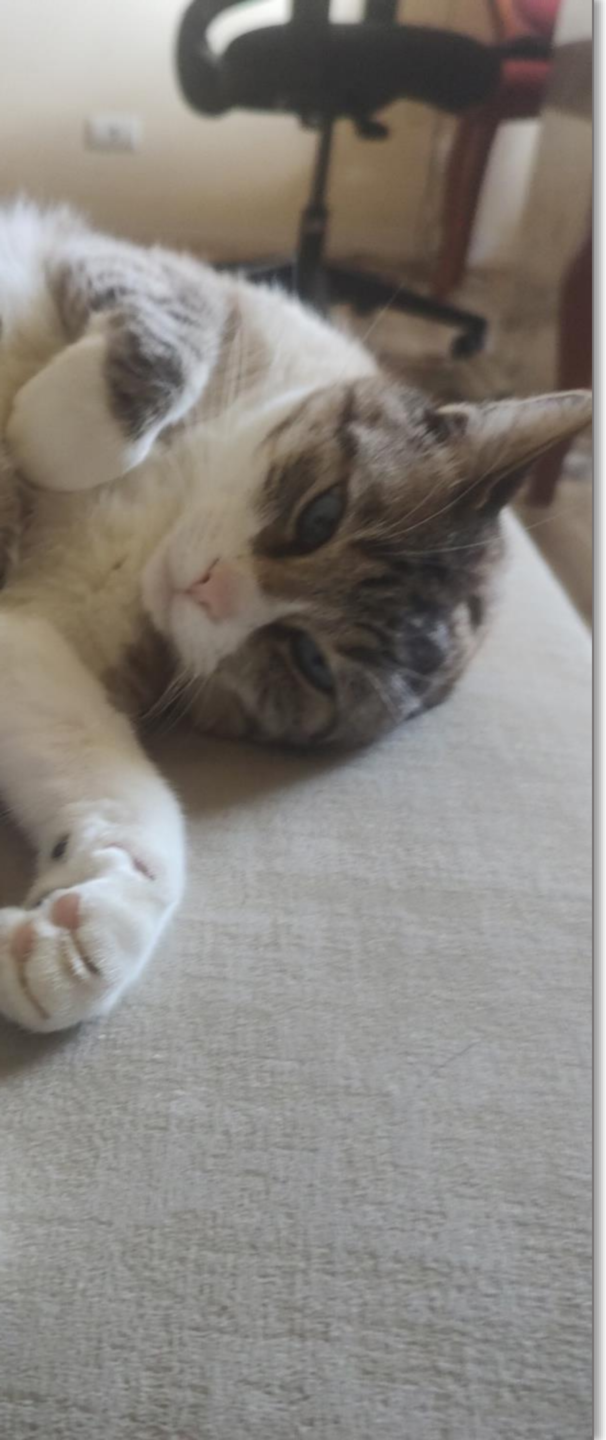
Modelagem de Fenômenos Físicos

Aula 2
Fenômenos e Funções

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1



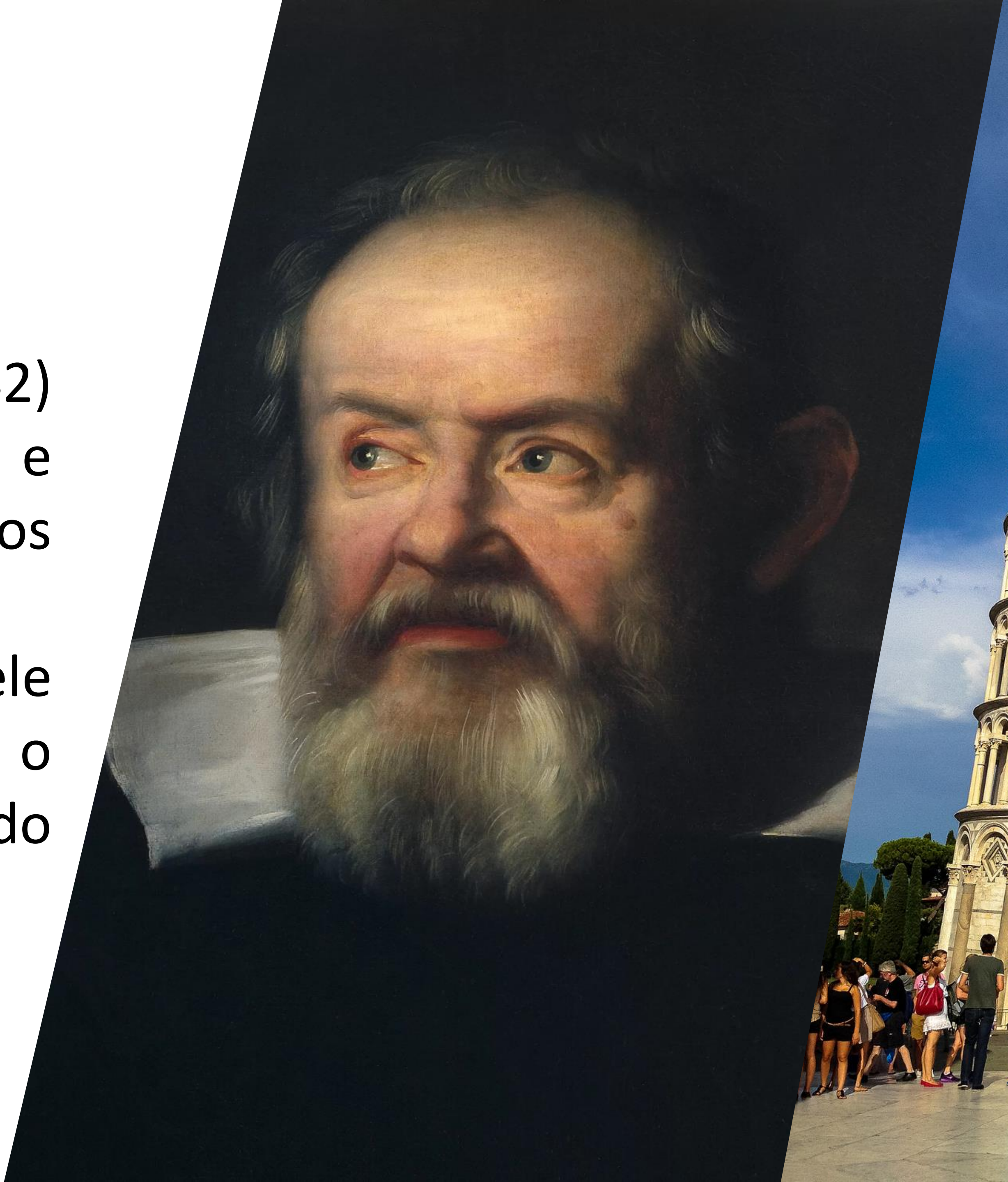
Corpos em Queda Livre

Com a tecnologia que temos disponível hoje.

HISTÓRICO

Galileu Galilei (1564 – 1642) foi o primeiro a estudar e registrar o fenômeno dos corpos em queda livre.

A história registra que ele fez anotações sobre o lançamento de corpos do alto da Torre de Pisa.

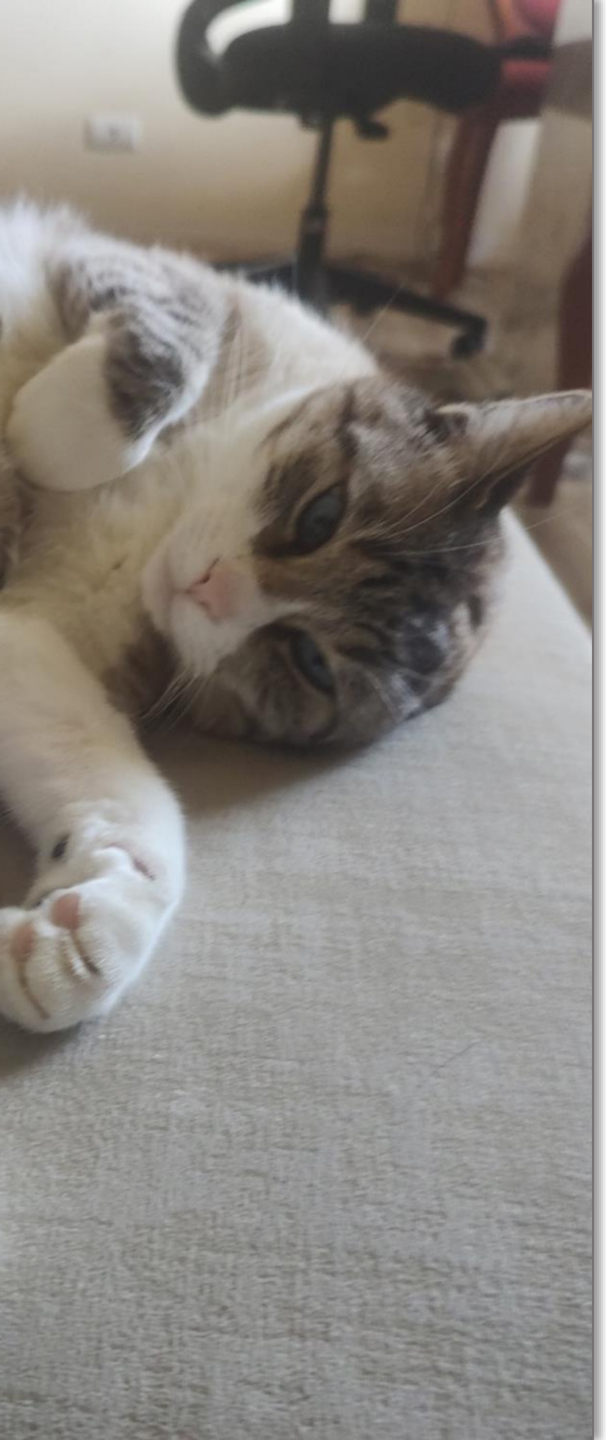


NOSSA EXPERIÊNCIA

Vamos usar como sensor um computador Raspberry Pi com um sensor de altura, temperatura e pressão (MPL3115A2) programado para registrar a altitude em intervalos de tempo previamente determinados lançado do ponto mais alto do Burj Khalifa que está a 828m do nível do mar.

Ao final de cada intervalo de tempo, a altura será registrada na Memória Flash do Raspberry Pi transmitida por Wi-Fi para uma planilha do Google SpreadSheet.

Vamos lançar este sensor to topo do Burj Khalifa a 828 m do nível do mar.



Primeira Experiência: 5 segundos

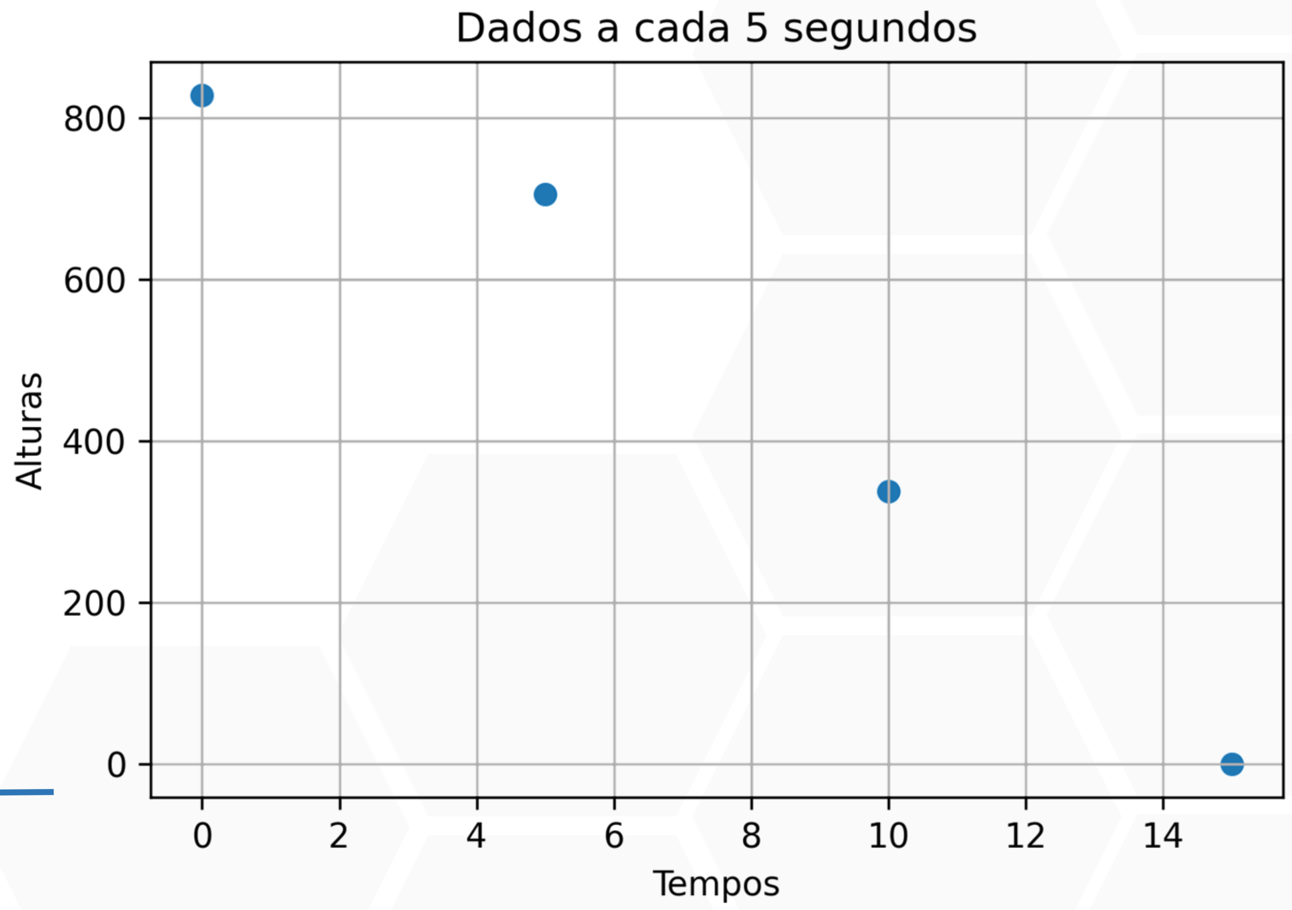
Anotando a altura do sensor a cada 5 segundos de queda livre.

UMA AMOSTRA A CADA 5 SEGUNDOS

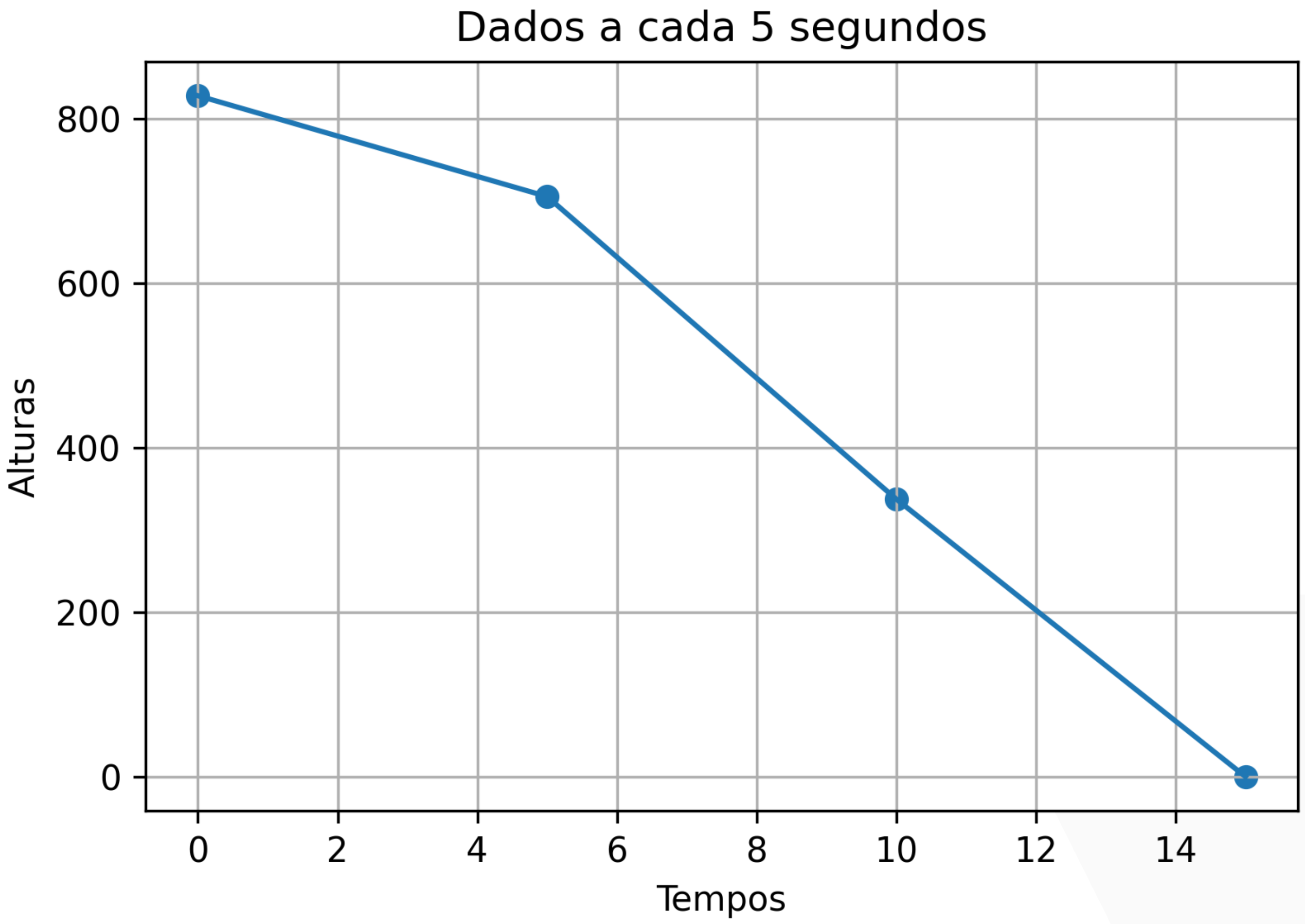
Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
5,000	705,375
10,000	337,500
15,000	0,000

Análise dos Valores Encontrados

```
# criando os arrays
X = np.array(tempos)
Y =  [828-
y for y in np.array(alturas)]
plt.grid()
#plt.gca().invert_yaxis()
plt.title("A cada 5 segundos")
plt.xlabel("Tempos")
plt.ylabel("Alturas")
# plotando apenas os pontos
plt.scatter(X,Y)
plt.show()
```



Análise dos Valores Encontrados




```
# plotando em forma de curva
plt.grid()
plt.title("Dados a cada 5 segun
dos")
plt.xlabel("Tempos")
plt.ylabel("Alturas")
plt.plot(X, Y)
# plotando apenas os pontos
plt.scatter(X,Y)
plt.savefig('acada5segundoslinh
a.png', dpi=300)
plt.show()
```

Equação da Reta

- A Equação da reta tem a forma:

$$y = ax + b$$

- Onde a representa o coeficiente angular da reta calculado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- E b é o ponto onde a reta corta o eixo dos y dado por:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

- Onde x_1 e y_1 são as coordenadas de um dos pontos da reta.

Usando os Nossos Dados

UMA AMOSTRA A CADA 5 SEGUNDOS

Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
5,000	705,375
10,000	337,500
15,000	0,000

Se pegarmos: (10,337,5) e (15,0) teremos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 337,5}{15 - 10} = -67.5$$

Para o ponto (10, 337,5) teremos:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - 337,5 = -67,5(x - 10)$$

$$y = -67{,}5x + 1012{,}5$$

Validando

UMA AMOSTRA A CADA 5 SEGUNDOS

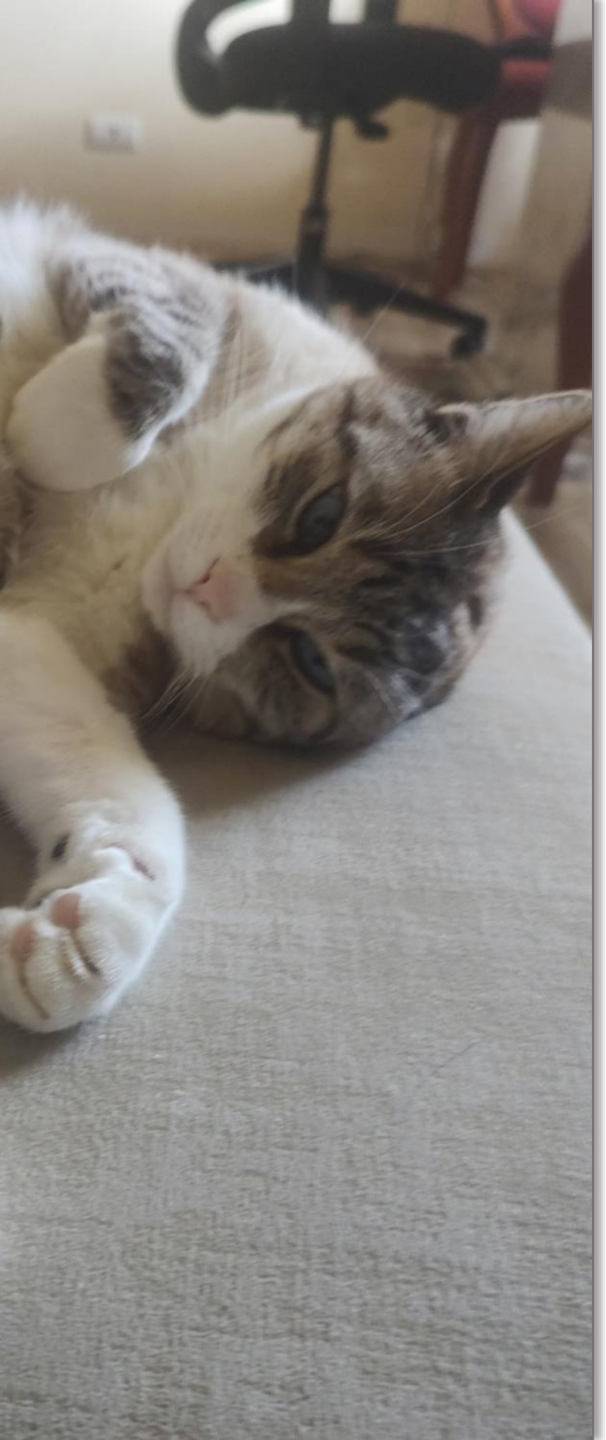
Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
5,000	705,375
10,000	337,500
15,000	0,000

$$\mathbf{y} = -67{,}5x + 1012{,}5$$

$$x = 5 \; e \; y = 705{,}375$$

$$\mathbf{y} = -67{,}5(5) + 1012{,}5 = 675{,}000$$

$$\mathbf{diff = 705.375 - 675,00 = 30{,}37}$$



Segunda Experiência: 1 segundo

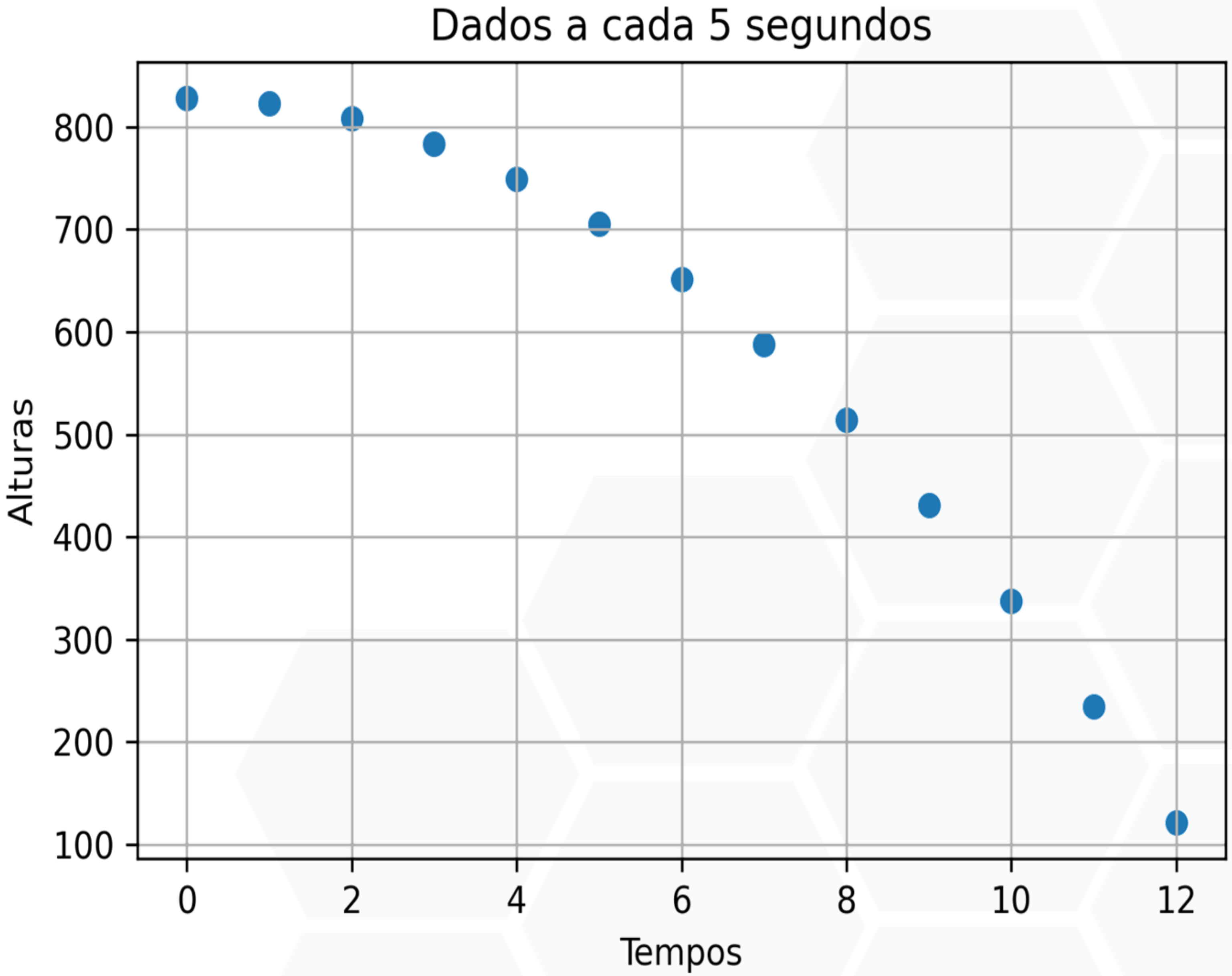
Anotando a altura do sensor a cada 1 segundo de queda livre.

UMA AMOSTRA A CADA SEGUNDO

Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
1,000	823,095
2,000	808,380
3,000	783,855
4,000	749,520
5,000	705,375
6,000	651,420
7,000	587,655
8,000	514,080
9,000	430,695
10,000	337,500
11,000	234,495
12,000	121,680
13,000	0,0000

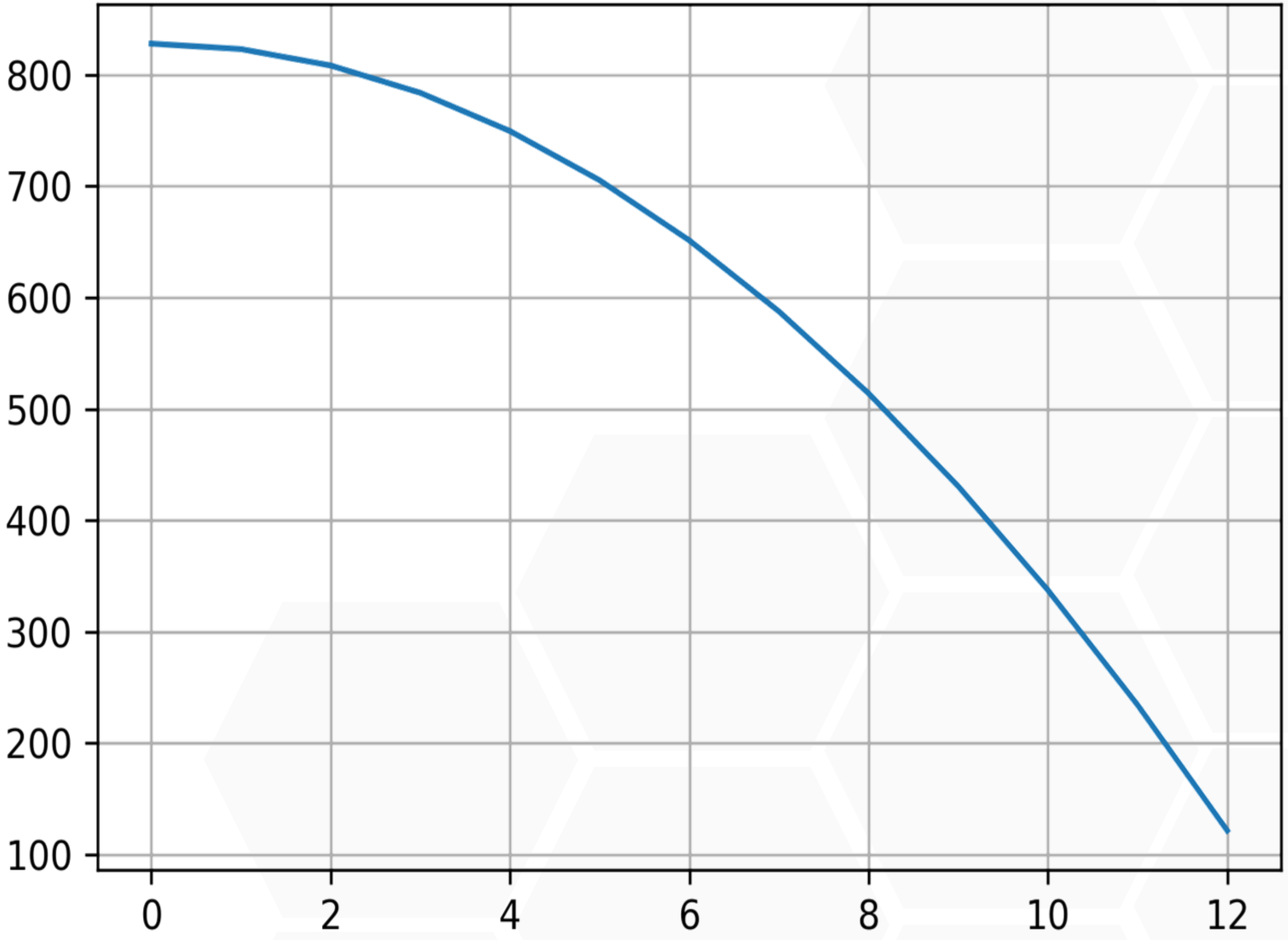
UMA AMOSTRA A CADA SEGUNDO

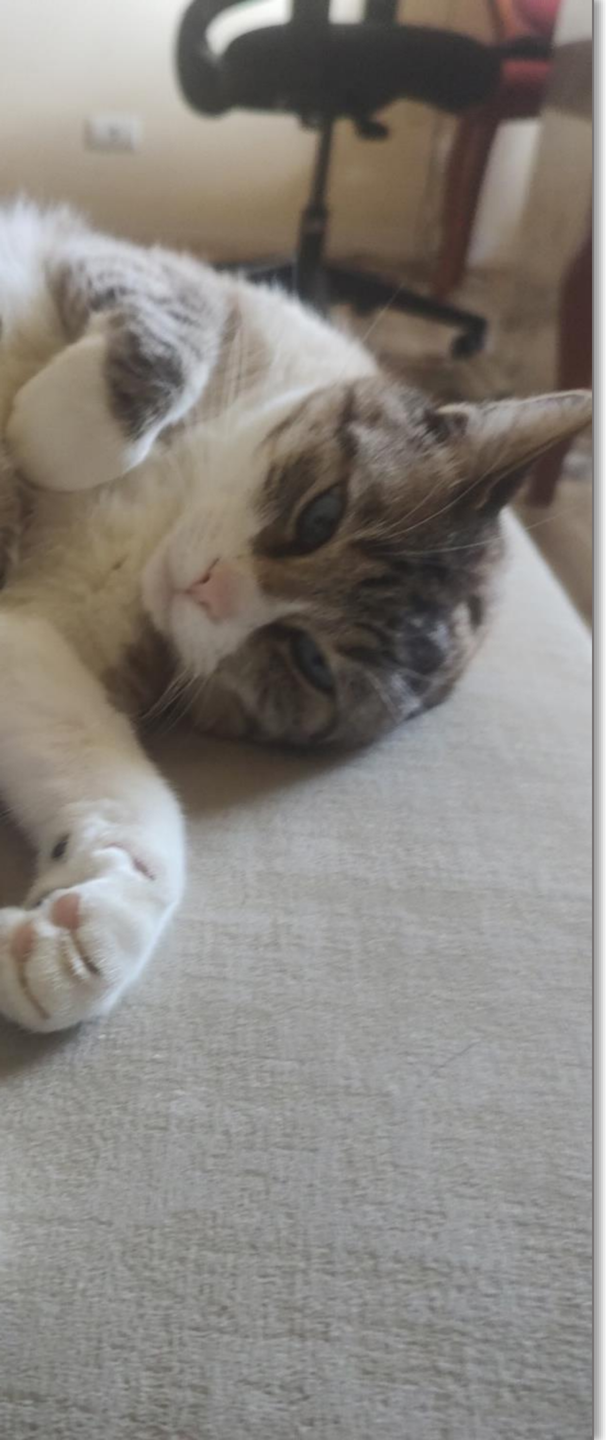
Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
1,000	823,095
2,000	808,380
3,000	783,855
4,000	749,520
5,000	705,375
6,000	651,420
7,000	587,655
8,000	514,080
9,000	430,695
10,000	337,500
11,000	234,495
12,000	121,680
13,000	0,0000



UMA AMOSTRA A CADA SEGUNDO

Tempo (s)	Altura (m)
0,000	828,000
1,000	823,095
2,000	808,380
3,000	783,855
4,000	749,520
5,000	705,375
6,000	651,420
7,000	587,655
8,000	514,080
9,000	430,695
10,000	337,500
11,000	234,495
12,000	121,680
13,000	0,0000



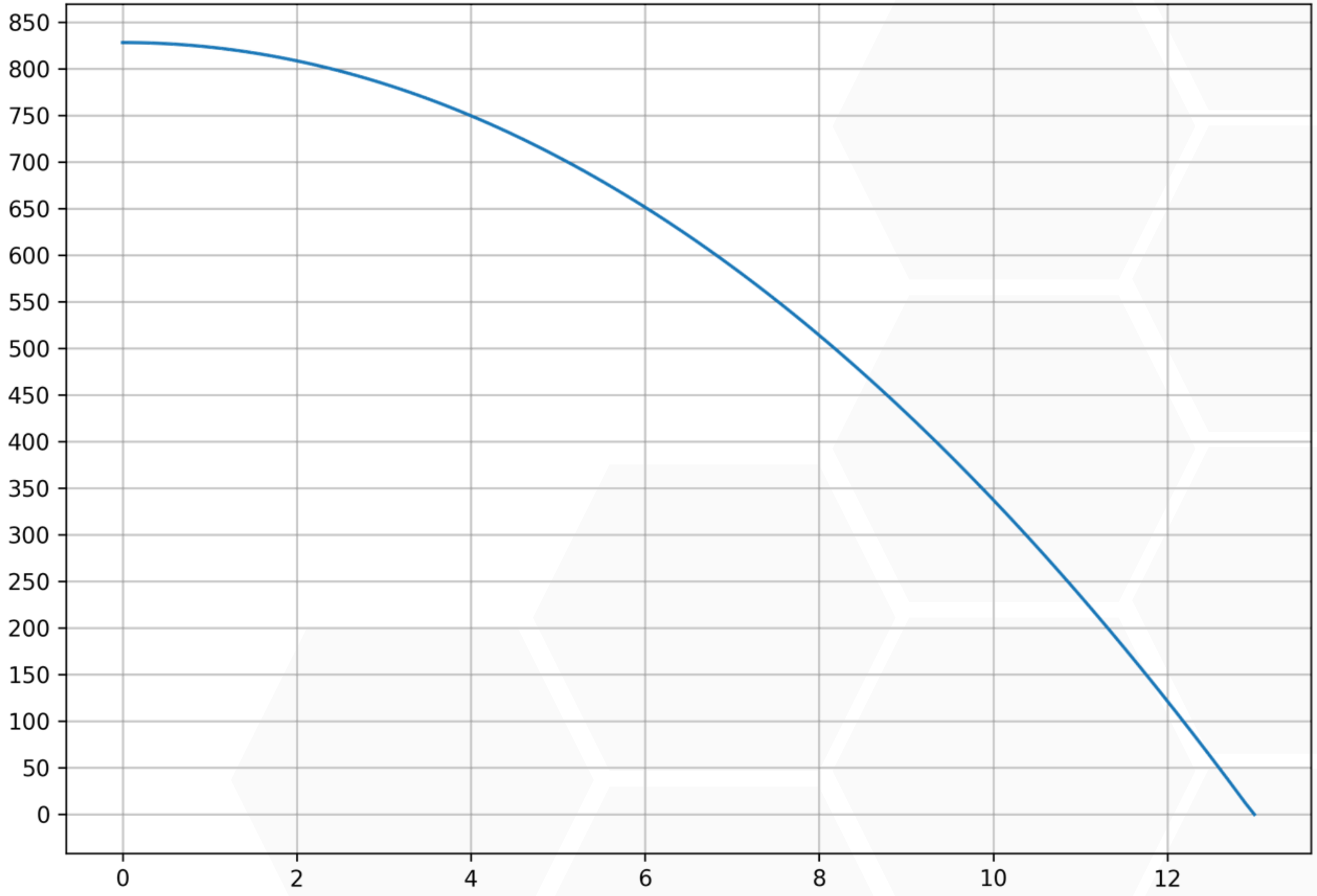


Interpolação de Lagrange

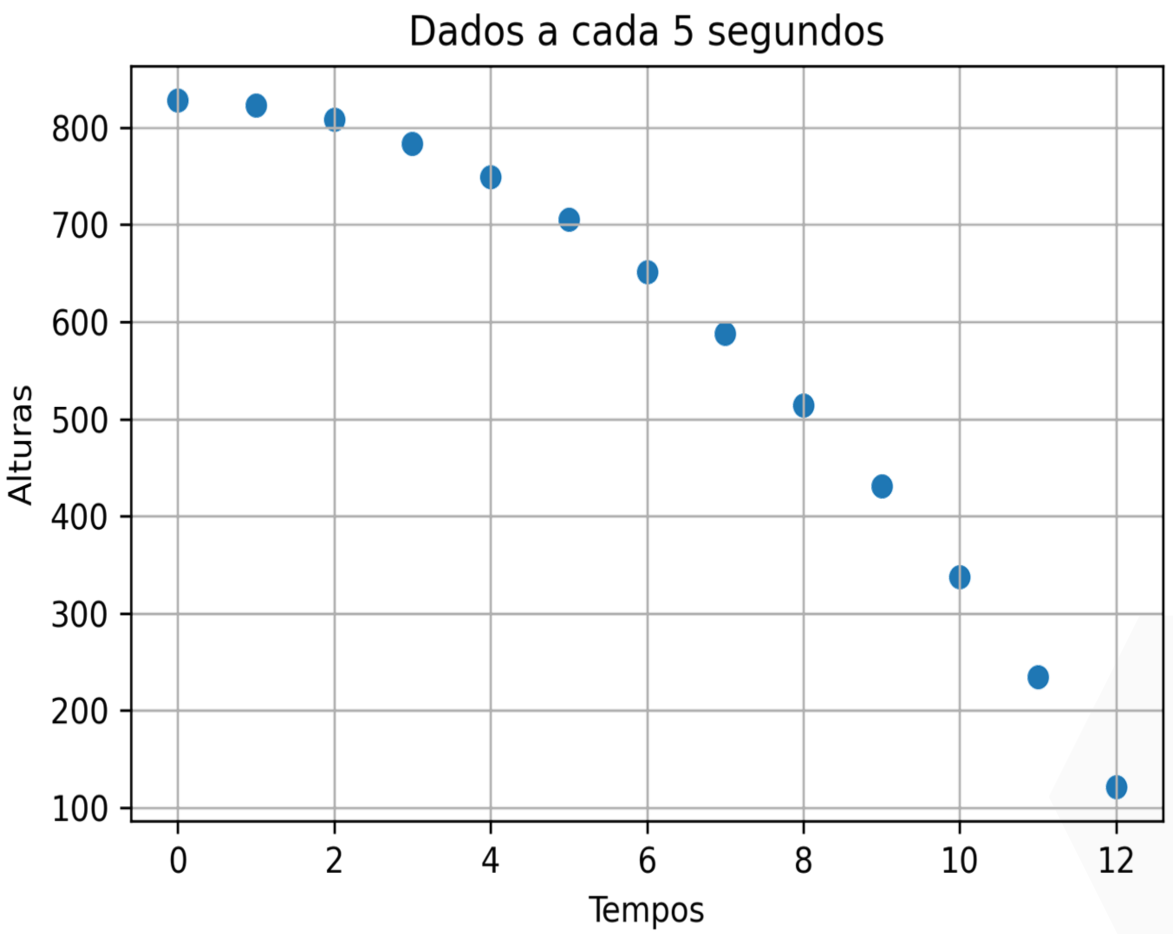
Encontrar um polinômio que passe por um conjunto de pontos.

A Cada Décimo de Segundo

Podemos continuar diminuindo o espaço de tempo entre as amostragens. Porém, parece que temos uma curva bem definida.
Precisamos agora encontrar a equação que passe por todos estes pontos.



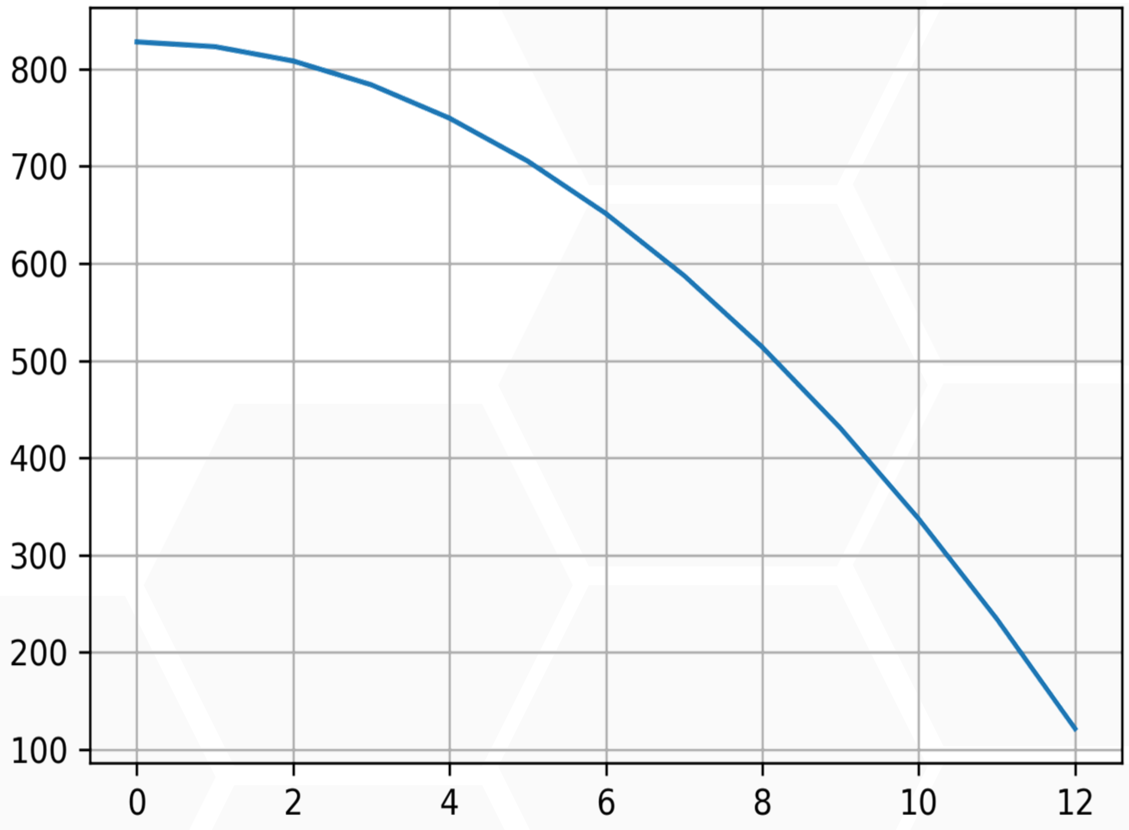
Ainda Temos um Problema



Encontrar uma função que passe por todos estes pontos.

Ainda Temos um Problema

Que permita traçar gráficos como este.



Interpolação da Lagrange

- A Interpolação é o processo de encontrar o valor de uma função para qualquer valor de uma variável independente dentro de um intervalo onde um conjunto de pontos é conhecido.
- A interpolação de Lagrange consiste em um método de criar um polinômio, $L(x)$, de grau n de tal forma que $L(x_i) = y_i$ este polinômio pode ser calculado pela fórmula:

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(x - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

Exemplo 1: polinômio de Lagrange $L(x)$

- Considere o conjunto de pontos $A = \{(-1,-1), (0,-2), (2,2)\}$ resultante de uma experiência qualquer e encontre uma equação do segundo grau que passe por todos estes pontos.

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\prod_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)}$$

- Do enunciado tiramos:

$$n = 2 \; \therefore k \in \{0, 1, 2\} \; \therefore \; y_k \in \{-1, -2, 2\}$$

$$x_0 = -1; x_1 = 0; x_2 = 2$$

Exemplo 1: polinômio de Lagrange $L(x)$ - Solução

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\prod_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)}$$

$$n = 2 \;\therefore\; k \in \{0, 1, 2\} \;\therefore\; y_k \in \{-1, -2, 2\}$$
$$x_0 = -1; x_1 = 0; x_2 = 2$$

$$L(x) = -1\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} - 2\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 2\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$L(x) = -1\left(\frac{x^2 \;\; - 2x}{3}\right) - 2\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + 2\left(\frac{(x^2 + x)}{6}\right)$$

$$L(x) = -\frac{x(x-2)}{3} + (x+1)(x-2) + \frac{(x+1)x}{3}$$

Exemplo 1: polinômio de Lagrange $L(x)$ - Solução

$$L(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 2x) + (x^2 - x - 2) + \frac{1}{3}(x^2 + x)$$

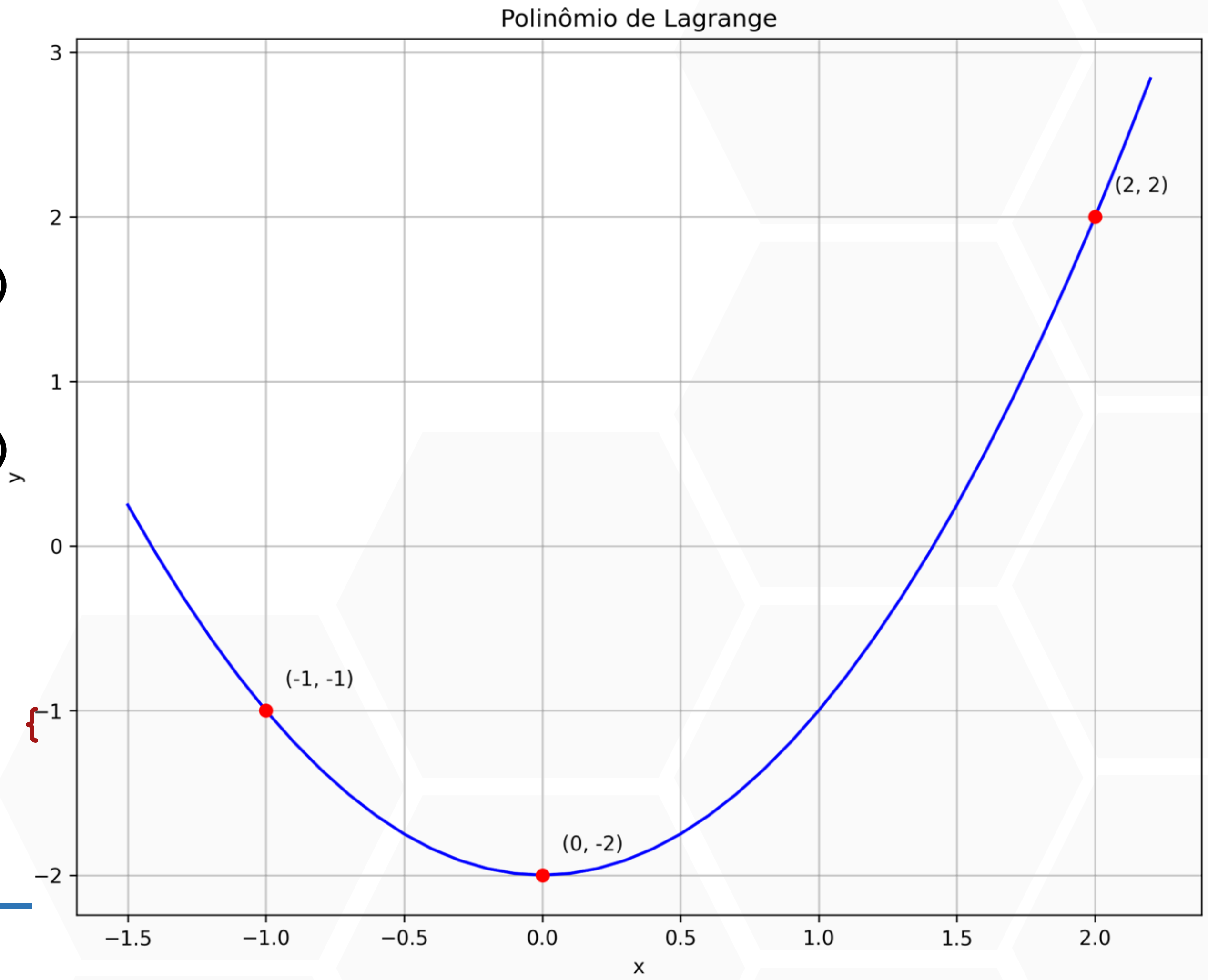
$$L(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + x^2 - x - 2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + x^2 - x - 2 + \frac{x}{3}$$

$$L(x) = \frac{3x}{3} + x^2 - x - 2 = x + x^2 - x - 2 = x^2 - 2$$

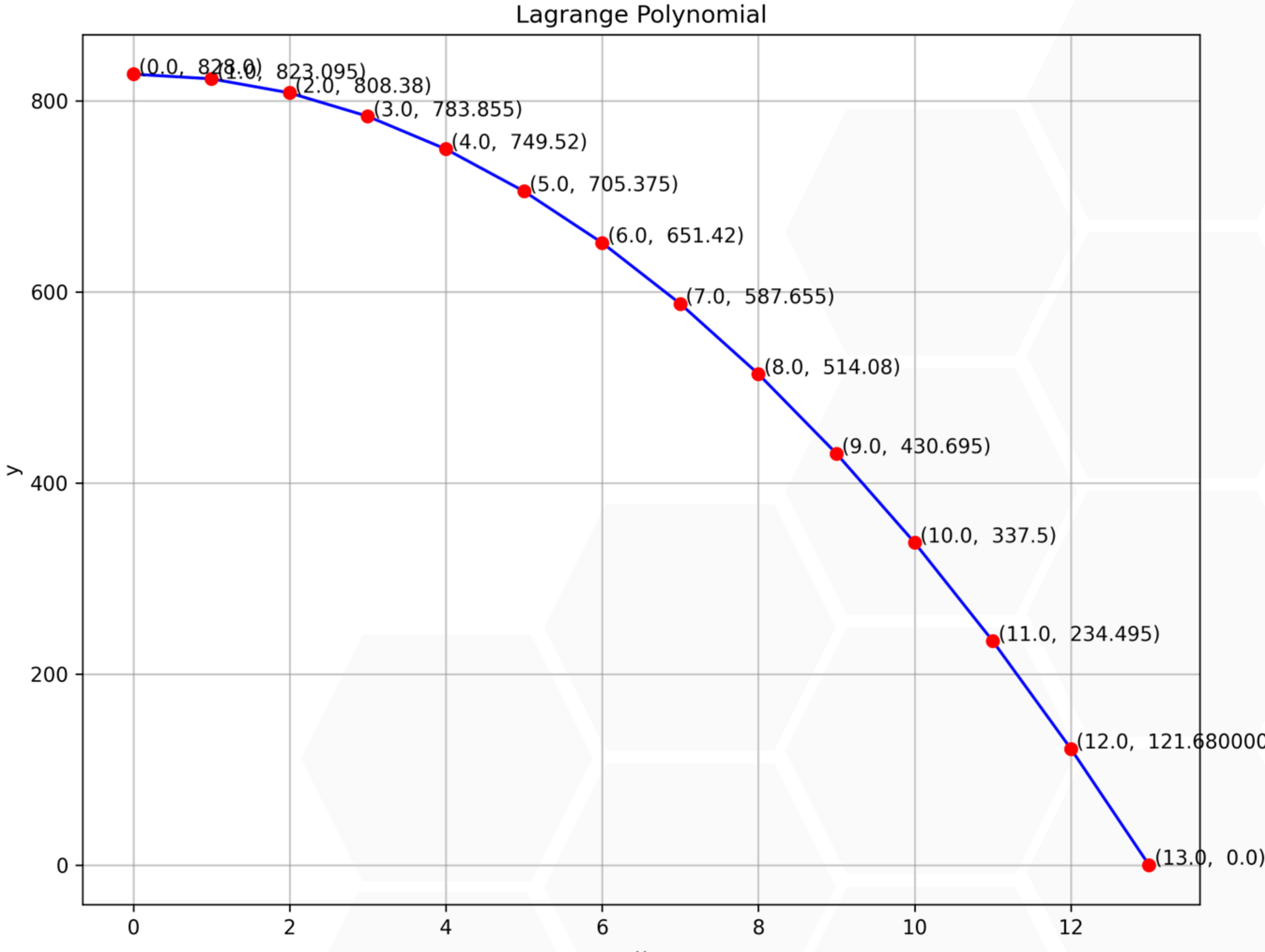
$$\underline{L(x) = x^2 - 2}$$

Exemplo 1: polinômio de Lagrange $L(x)$ - Solução

```
x=[-1,0,2]
y=[-1,-2,2]
X = np.arange(-1.5, 2.3, 0.1)
fig = plt.figure(figsize = (10,8))
plt.plot(X, X**2 -
2, 'b', x, y, 'ro')
plt.title('Polinômio de Lagrange')
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
for i, j in zip(x, y):
   plt.text(i+0.07, j+0.15, '({}, {
})'.format(i, j))
plt.show()
```

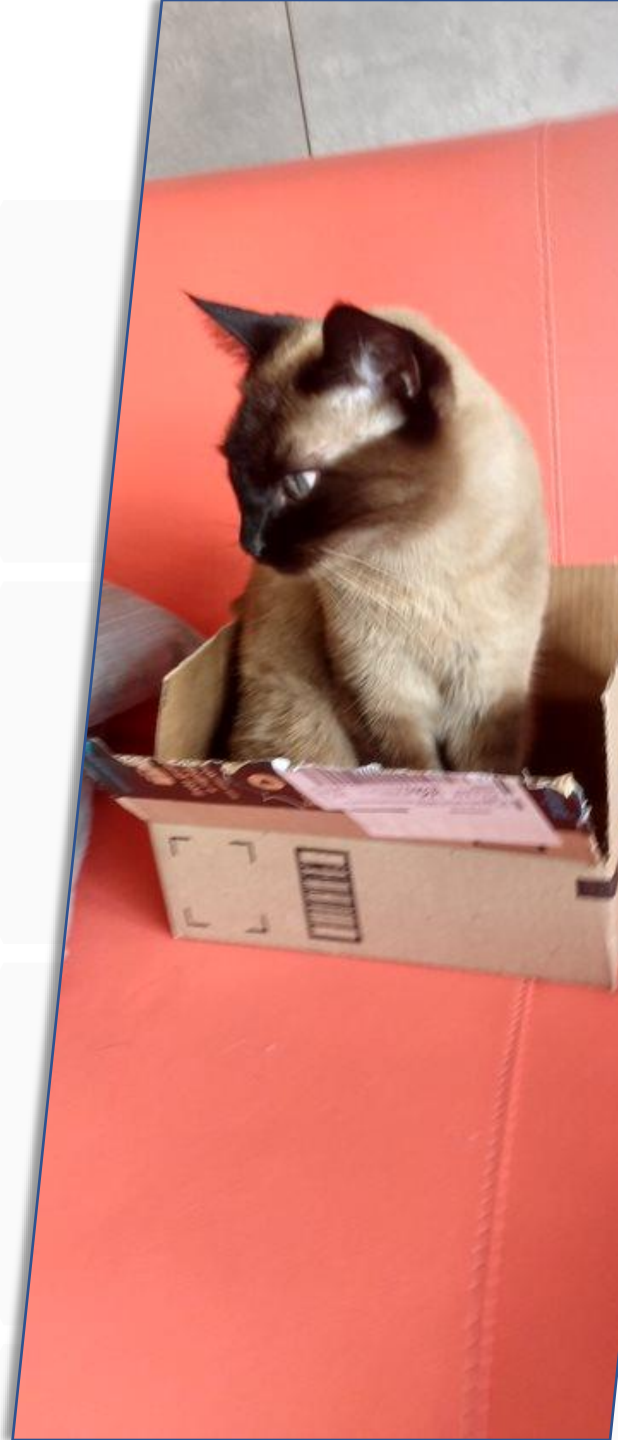


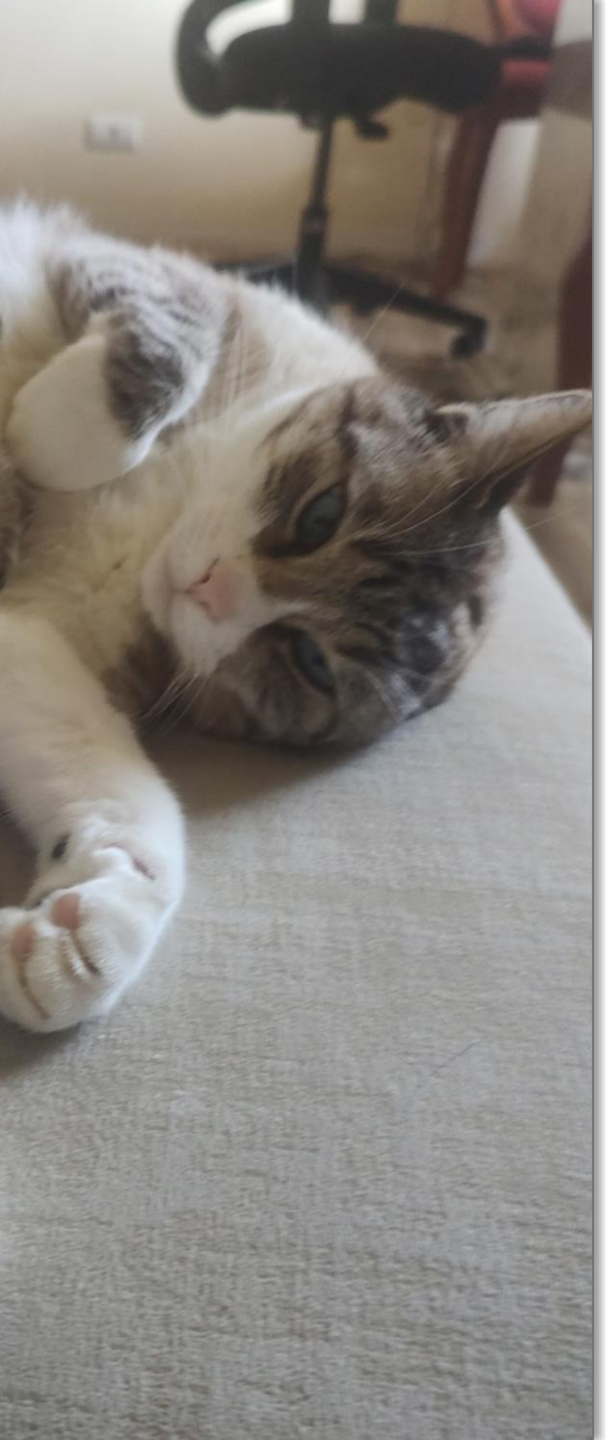
Considerando os Dados Obtidos a Cada Segundo



O Código está Disponível no AVA

E neste link: *Fenômenos e Funções*





Exercícios Sugeridos

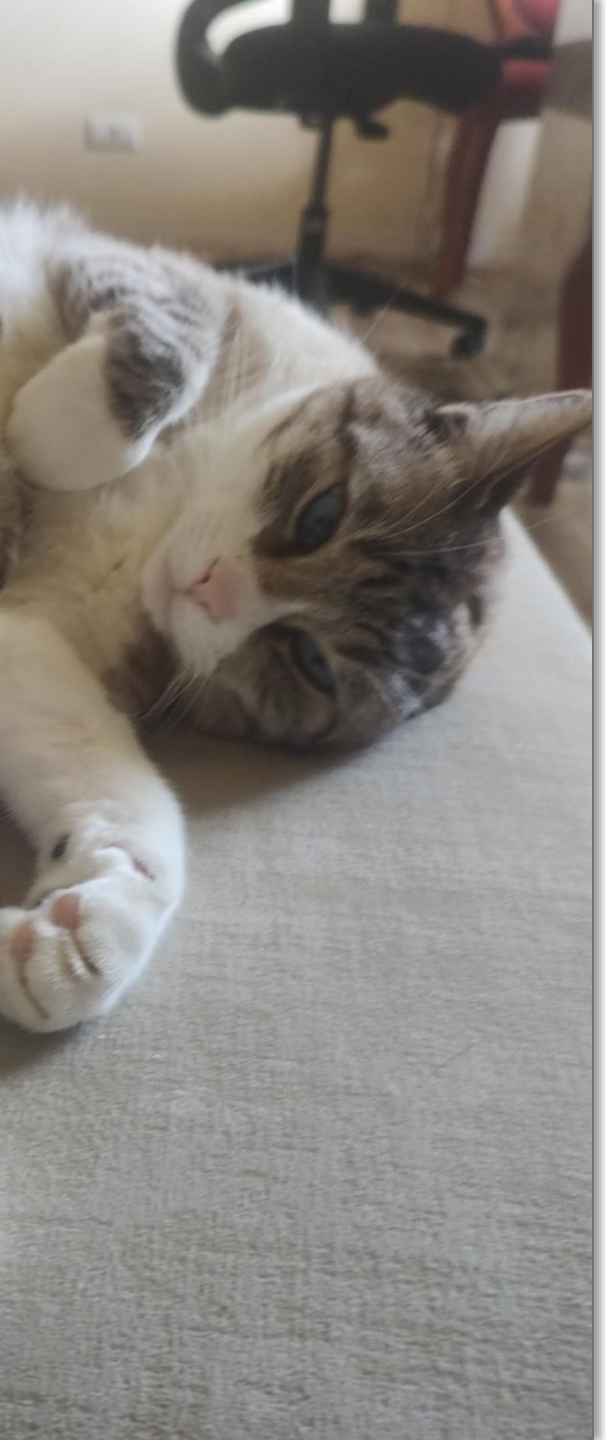
“A Natureza está escrita na linguagem da Matemática.”
Galileo Galilei

Funções

Faça um algoritmo em Python para plotar as funções listadas a seguir com título, eixos, com *ticks* destacados, e coordenadas plotadas próximo as curvas. Lembre-se não plotar todos os pontos das funções escolha apenas alguns pontos para manter os gráficos legíveis.

- (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$ (b) $x^2 + \left(\dfrac{5y}{4} - \sqrt{|x|}\right)^2 = 1$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Funções Exponenciais

"A Matemática não conhece raça ou fronteiras geográficas; para matemática o mundo cultural é um país."

David Hilbert

Funções: conceitos

- Função é a relação entre dois ou mais conjuntos expressa na forma de uma lei de formação. Uma lei de formação é uma regra que define como o elemento de um dos conjuntos se relaciona com o elemento do outro conjunto.
- Funções podem ser expressas por tabelas, equações algébricas, conjuntos de pares ordenados e até sentenças.

Funções: conceitos

- Em duas dimensões podemos dizer que uma função é a relação entre dois conjuntos. O primeiro será chamado de domínio, D, ou variável independente. O segundo de imagem, I, ou variável dependente.
- A cada elemento do domínio corresponde um, e somente um, elemento da imagem.

$$f = D \rightarrow I$$

Funções Exponenciais

- Para todo e qualquer número inteiro e positivo, $a > 0$ existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ chamada de **função exponencial.** Definida como $f(x) = a^x$.
- Observe a diferença entre a função exponencial e a função polinomial. A função $g(x) = 3x$ é polinomial enquanto $f(x) = 3^x$ é exponencial.
- Em funções exponenciais chamamos a de base da função exponencial. Tal que $a > 0 \wedge a \neq 1$

Funções Exponenciais: regras e identidades

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

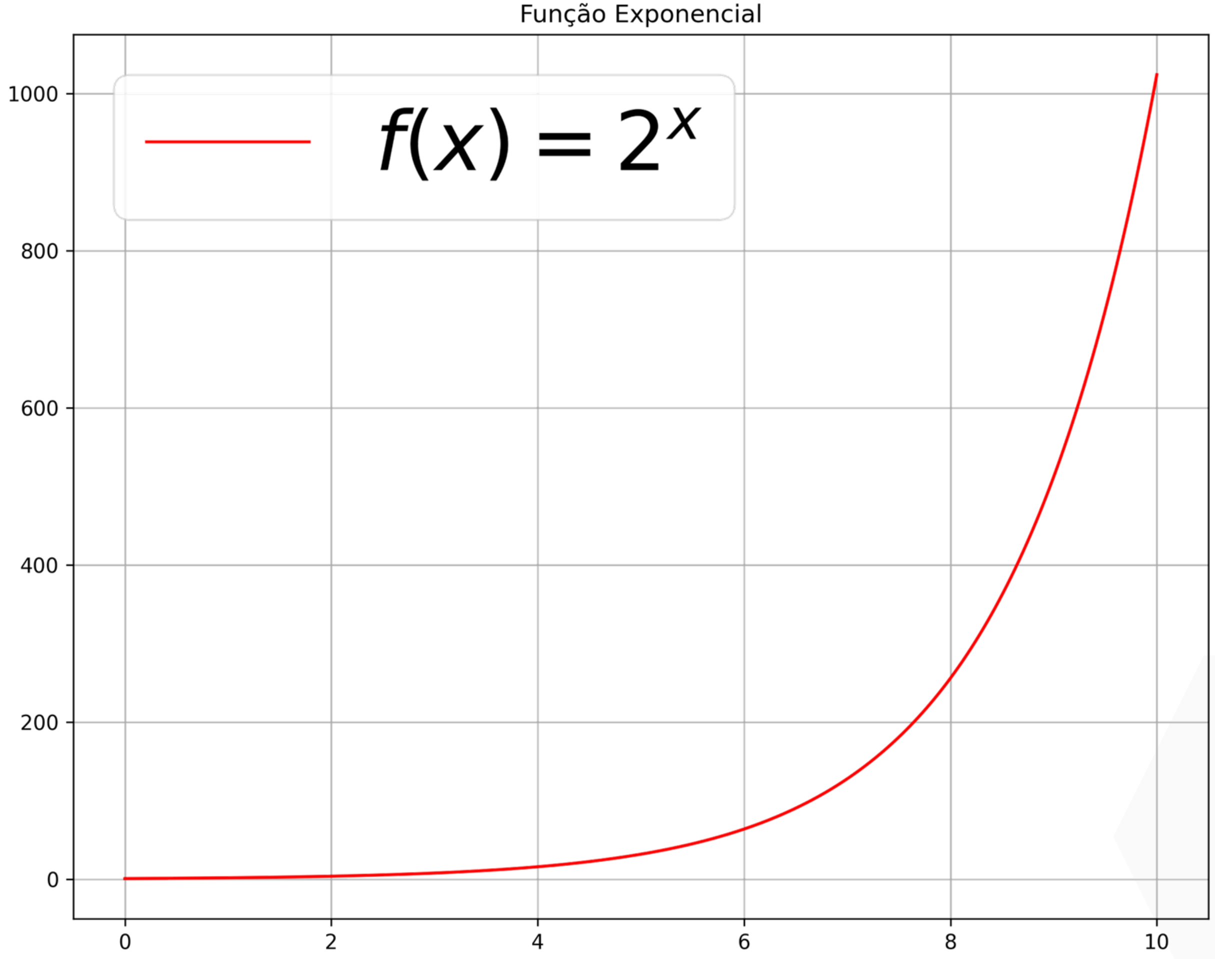
$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

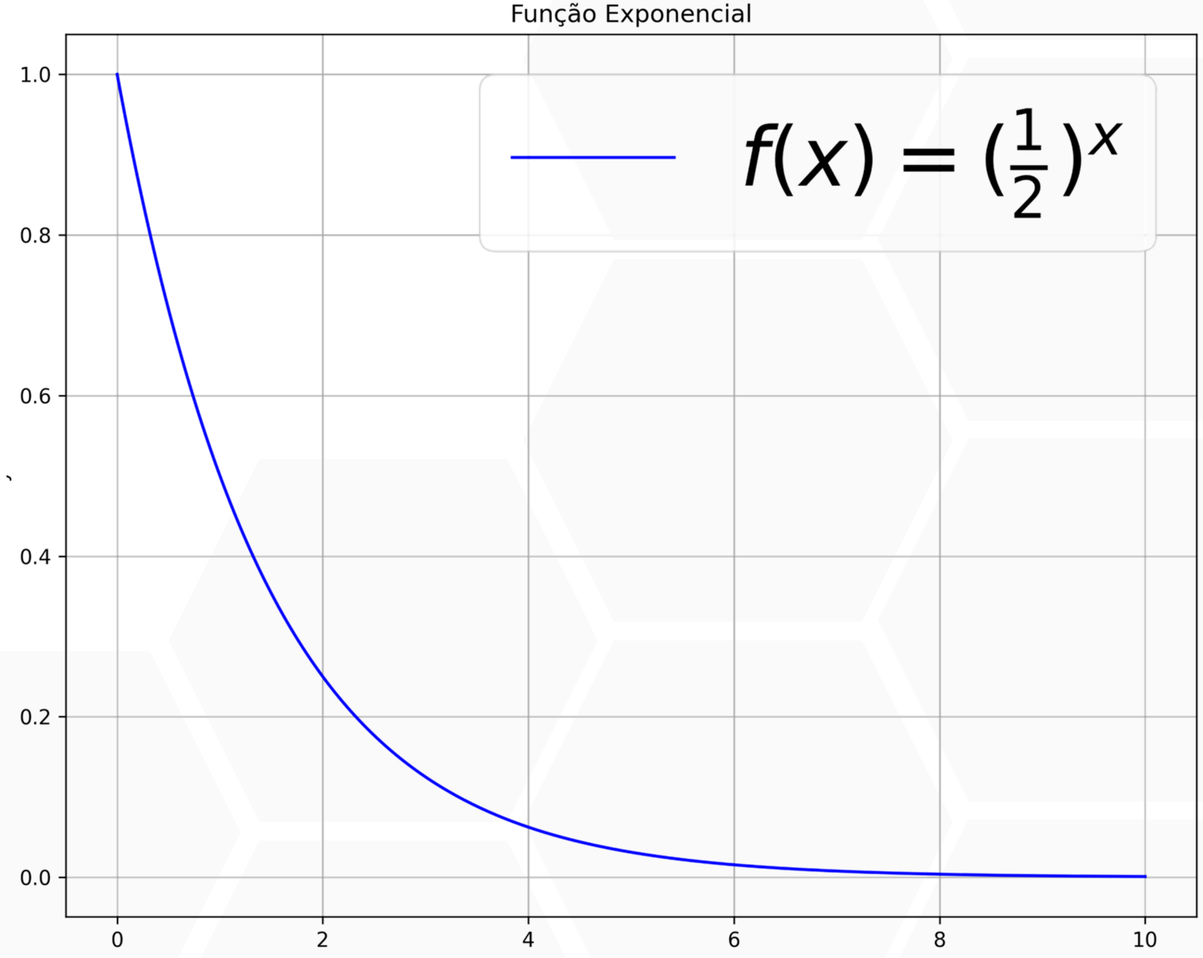
$$a^{xy} = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Funções Exponenciais: base





Crescente $0 < a$

Decrescente $0 < a < 1$

Funções Exponenciais: número de Euler

- O número de Euler, uma das mais importantes constantes matemáticas aparece com frequência na análise de fenômenos que incluem crescimento ou decaimento sempre que a taxa de crescimento é proporcional ao conjunto de elementos estudado.
- Este número foi descoberto por Jacob Bernoulli em 1683 enquanto estudava o crescimento da riqueza devido as taxas de juros. Recebe o nome de Leonhard Euler graças ao estudo *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748).

NÚMERO DE EULER

Euler provou que o número que hoje leva seu nome é irracional e que pode ser representado por:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$$

$$e = 2.718281828459045235 \ldots$$

Número de Euler: taxas de juros

- Bernoulli notou que aplicando a fórmula de juros compostos repetidamente com prazos sempre inferiores, encontramos uma constante:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- Onde P é a quantidade inicial, r é a taxa de juros em decimais, n é a quantidade de vezes que aplicamos o juros em um ano e A é o valor resultante depois de t.

Número de Euler: taxas de juros

Começando com 100% (1) de juros por aplicado 1 vez por ano teremos:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1(1)} = 2{,}00000$$

A cada seis meses teremos:

$$1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2(1)} = 2{,}25000$$

A cada três meses teremos:

$$1\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{3(1)} = 2.44140625$$

Número de Euler: taxas de juros

A cada mês:

$$1\left(1+\frac{1}{2}\right)^{12(1)} = 2.61303529$$

Diariamente:

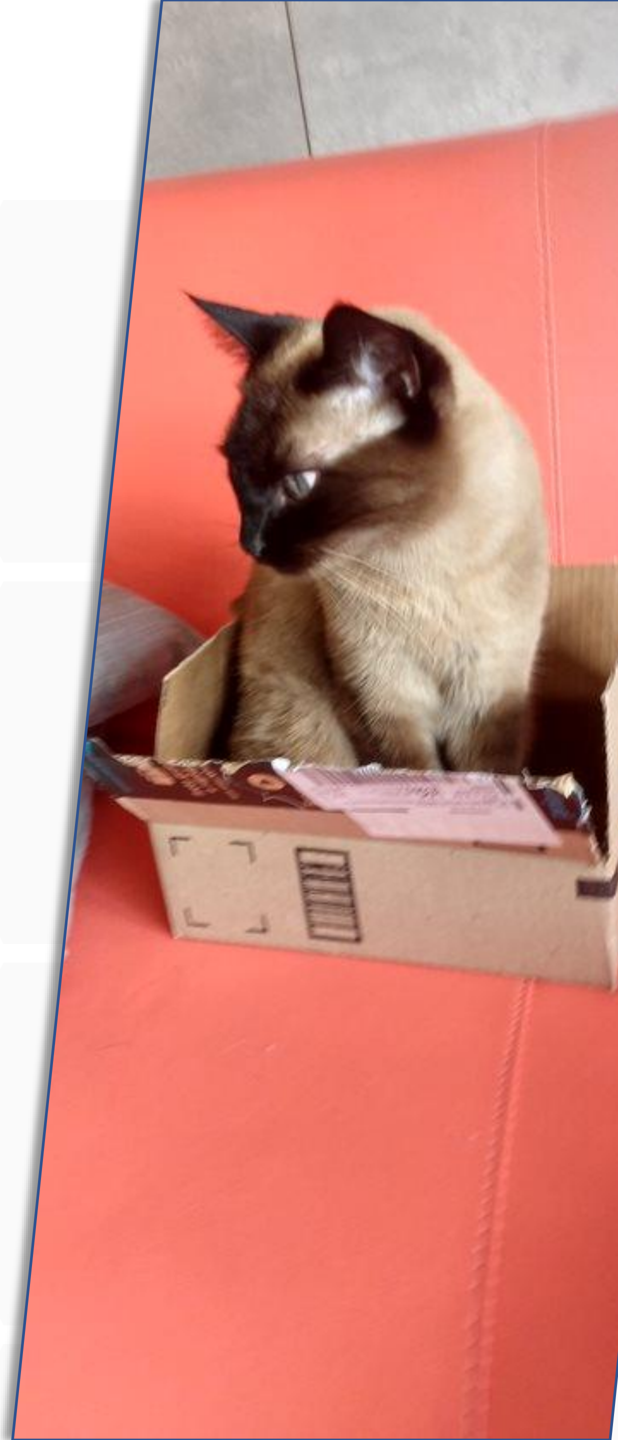
$$1\left(1+\frac{1}{2}\right)^{365(1)} = 2.714567482$$

Semanalmente:

$$1\left(1+\frac{1}{2}\right)^{52(1)} = 2.692596954$$

$$e = 2.718281828459045235\ldots$$

Exercícios Sugeridos:
funções exponenciais



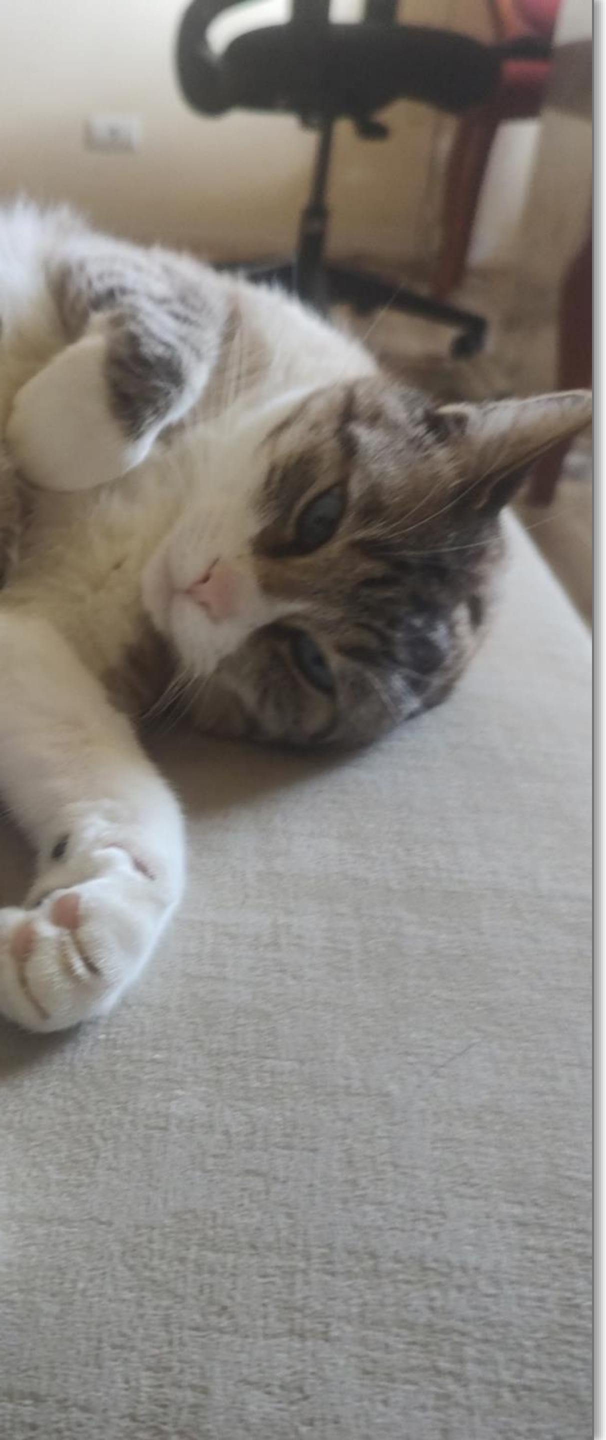
Funções Exponenciais

Em baobá de diâmetro do tronco, D, em metros depende da idade da árvore segundo o seguinte modelo:

$$D = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.001t}}$$

Encontre o diâmetro de uma árvore com 2000 anos com seis casas decimais. E plote um gráfico mostrando o diâmetro do tronco anualmente.

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Funções Logarítmicas

“SpaceX is only 12 years old now. Between now and 2040, the company's lifespan will have tripled. If we have linear improvement in technology, as opposed to logarithmic, then we should have a significant base on Mars, perhaps with thousands or tens of thousands of people.”

Elon Musk

Funções Logarítmicas

Definimos uma função logarítmica apenas quando existe:

$$y = \log_b x \;\; se\ e\ somente\ se\ x = b^y$$

Onde $x > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Neste caso, uma função logarítmica de base b será escrita como:

$$f(x) = \log_b x \quad \equiv \quad x = b^y$$

Funções Logarítmicas: regras e identidades

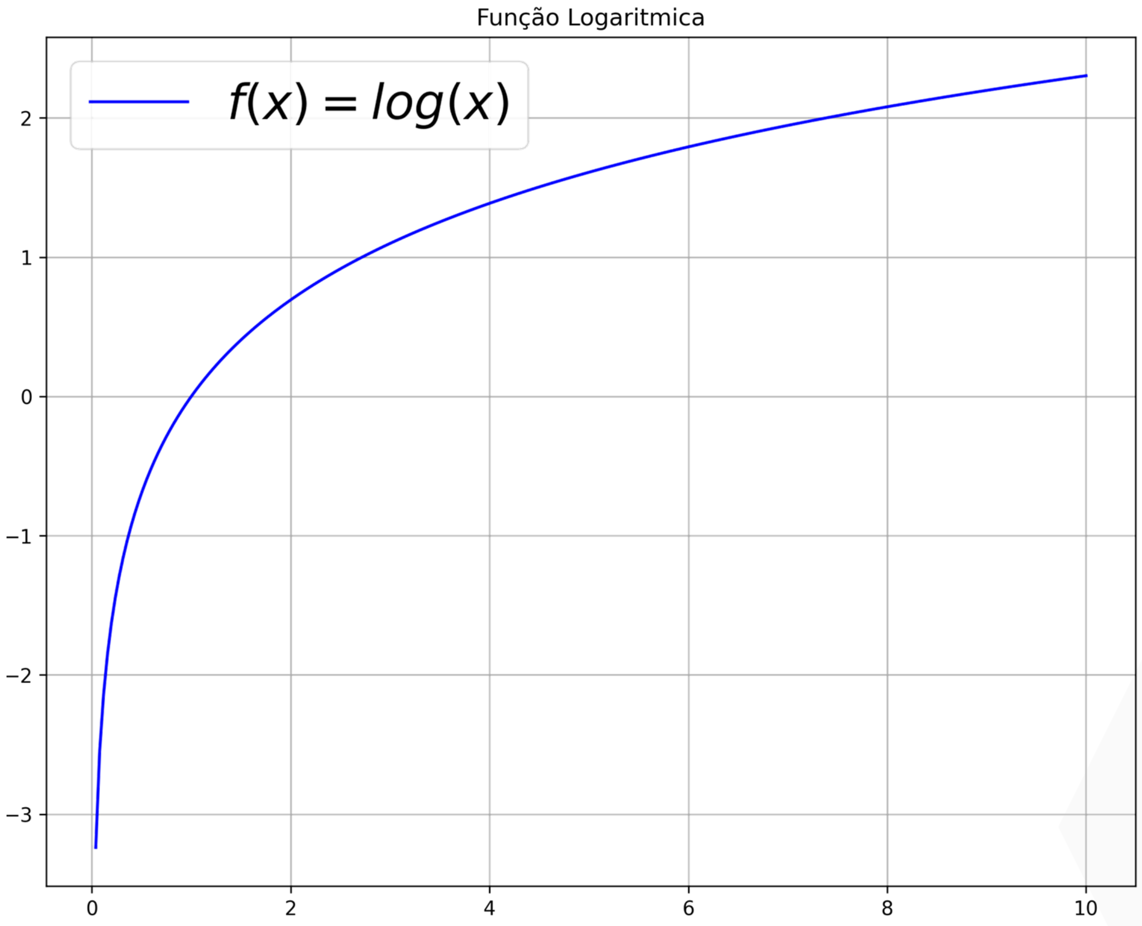
$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1$$

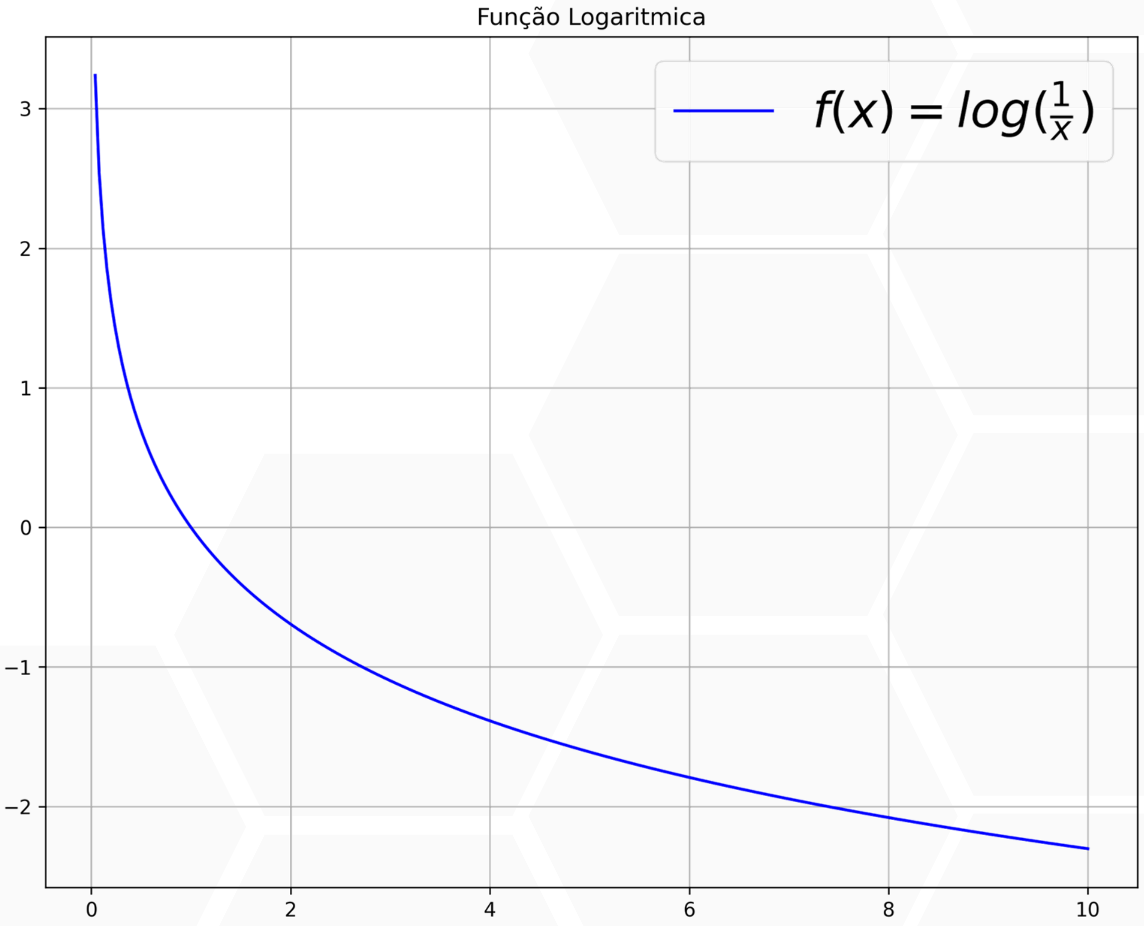
$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n \qquad \log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

$$\log_b m^n = n \log_b m$$

$$e^{\ln x} = x \quad | \, x > 0 \qquad \ln e = e^x \quad | \; x \in \mathbb{R}$$

Funções Exponenciais: base

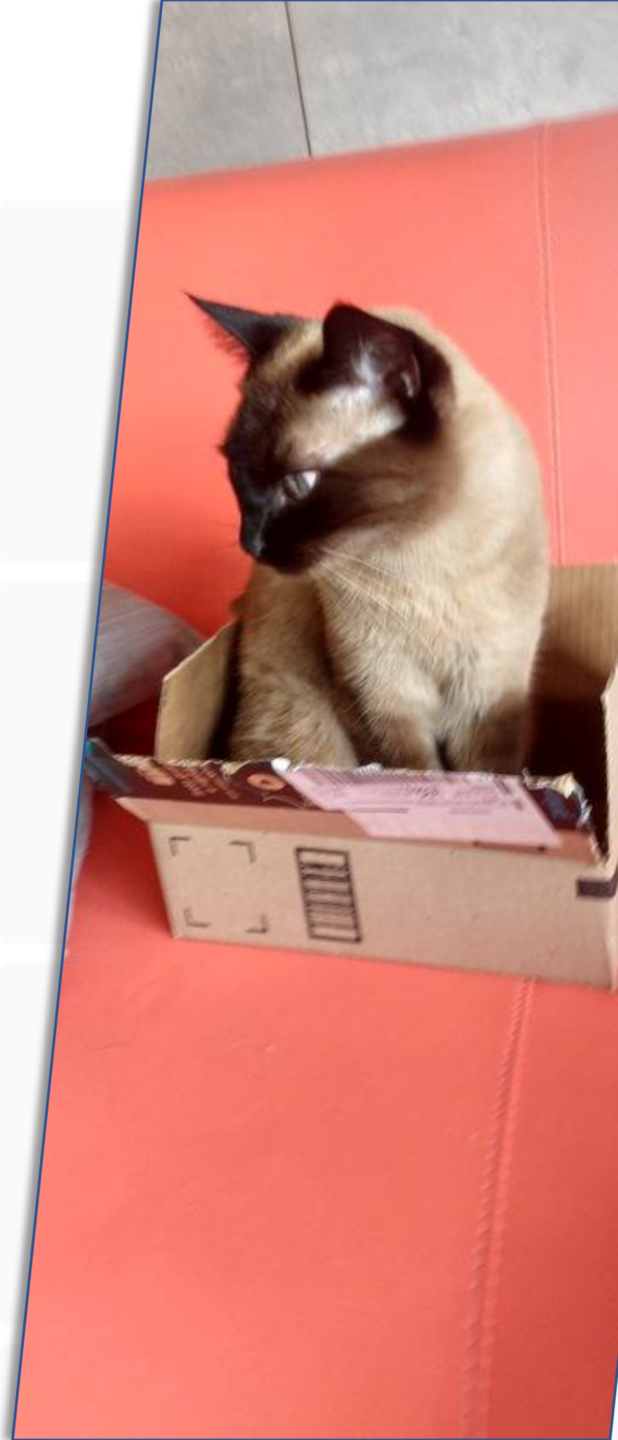




Crescente $a > 1$

Decrescente $0 < a < 1$

Exercícios Sugeridos:
funções logarítmicas



Funções Exponenciais 1

A Escala de Richter a magnitude de um terremoto, R, é dada por:

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

Onde I representa a intensidade do terremoto que está sendo medido e I_0 é a intensidade padrão de referência. Determine a intensidade do terremoto do terremoto de 7,8 que abalou a Turquia em 06 de fevereiro de 2023 em relação a intensidade padrão de referência. Trace um gráfico mostrando a intensidade deste terremoto em comparação com o terremoto mais intenso de 2004 (Indonésia) e com o terremoto do Chile de 1960.

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

Funções Exponenciais 2

Os legistas determinam a hora da morte, devido a um assassinato ou acidente, usando a seguinte fórmula:

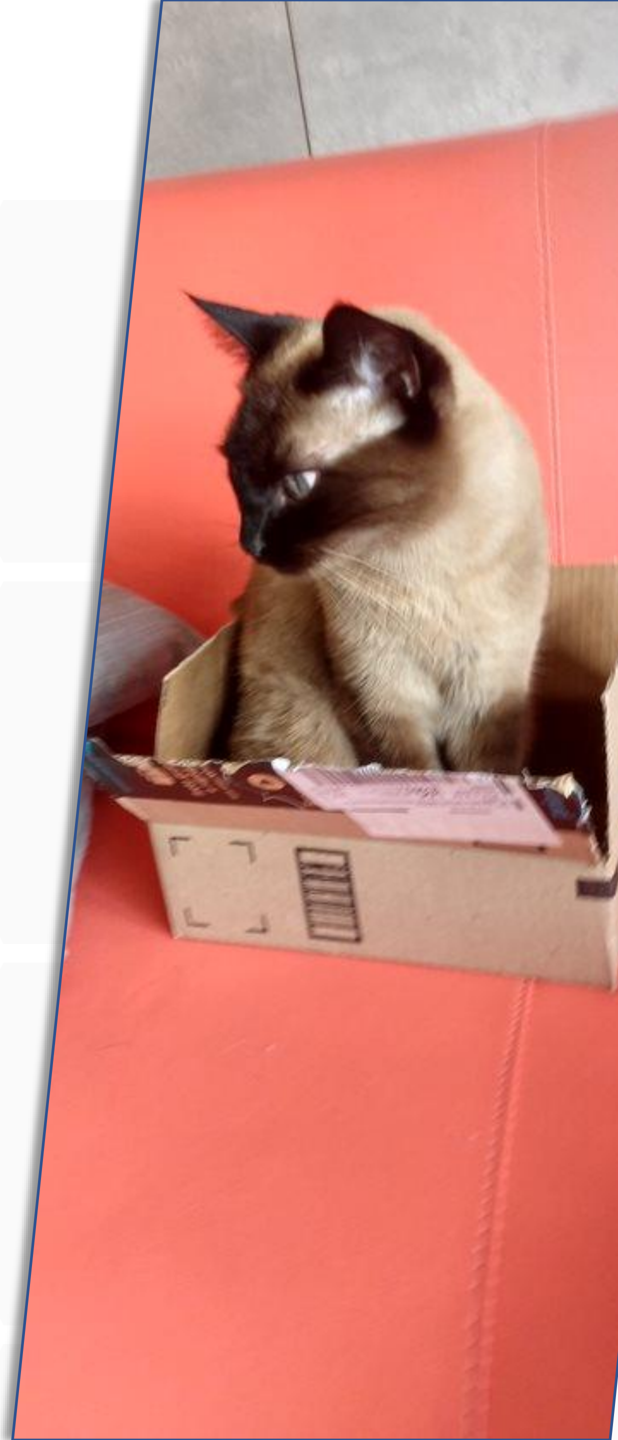
$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(0{,}97)^t$$

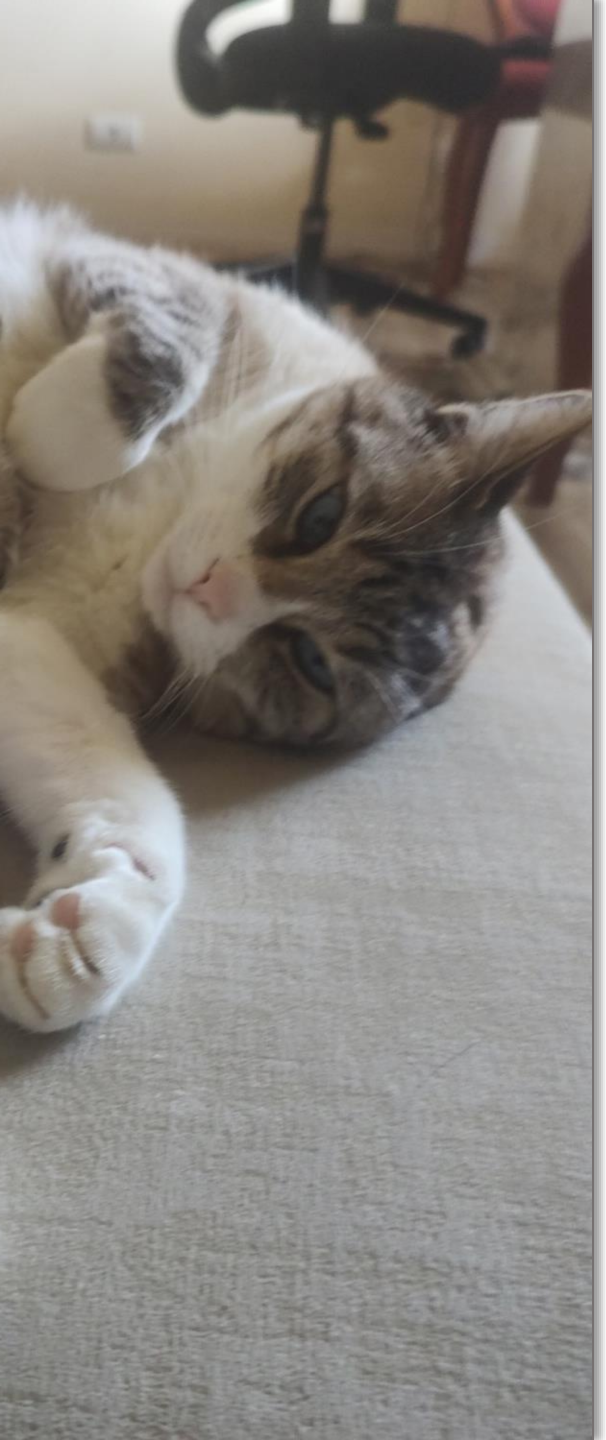
Onde T_0 é a temperatura ambiente, T_1 é a temperatura do corpo na hora da morte. Um homem morreu a meia-noite, na varanda da sua própria casa, sem qualquer sinal de violência. Considere que a temperatura ambiente permaneceu constante em $21ºC$ e que a temperatura do corpo na hora da morte era normal e estava em $36.5ºC$. Qual será a temperatura do corpo às $8:00\,h$ quando for encontrado pelo carteiro.

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação. Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

O Código está Disponível no AVA

E neste link: *Funções Exponenciais e Logarítmicas*





Obrigada!

Frank de Alcantara
frank.alcantara@pucpr.br