Modelagem de Fenômenos Físicos

Aula 8 – Introdução a Integração

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1

Conceitos Básicos

1. A Integração (cálculo integral) é uma parte fundamental do cálculo e complementa o cálculo diferencial;
2. Trata da acumulação contínua de quantidades e a do cálculo de áreas sob a curvas.
3. Uma integral é uma medida da área total sob uma função $f(x)$, em um intervalo definido por dois pontos a e b.
4. Usamos o cálculo integral para calcular, principalmente áreas, volumes e comprimentos de curva.

As Origens

1. As origens do cálculo integral remontam à Antiga Grécia, com a fórmula de quadratura do círculo de Eudoxo (408-355 AC.).
2. O cálculo integral que conhecemos hoje começou a tomar forma no Século XVII.
3. A evolução do cálculo integral está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento de áreas como a física e a engenharia.
4. Aplicações ciência da computação, estatística, economia, física e, em praticamente todos os campos de pesquisa científica.

Eudoxo de Cnido e a Quadratura do Círculo

- O termo quadratura do círculo é usado em referência a problema geométrico: seria possível construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo usando apenas régua e um compasso?
- Eudoxo não resolveu esse problema. Este problema foi provado ser impossível no Século XIX.
- O método de Eudoxo de exaustão, uma forma primitiva de integração, foi usado para encontrar áreas de figuras curvas e volumes de sólidos, incluindo a área de um círculo e o volume de uma esfera.

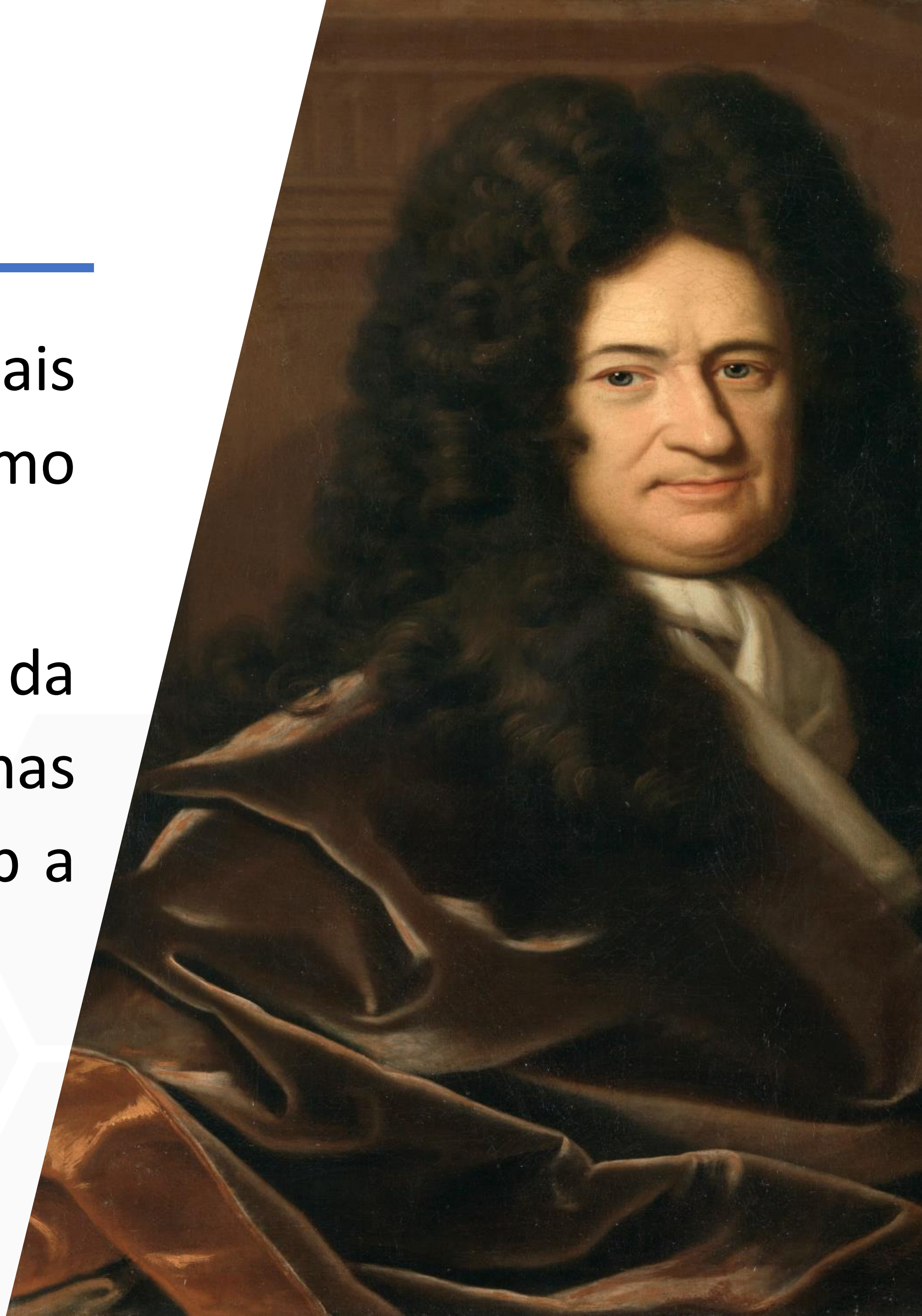
Eudoxo de Cnido, o impossível e uma Ideia Genial

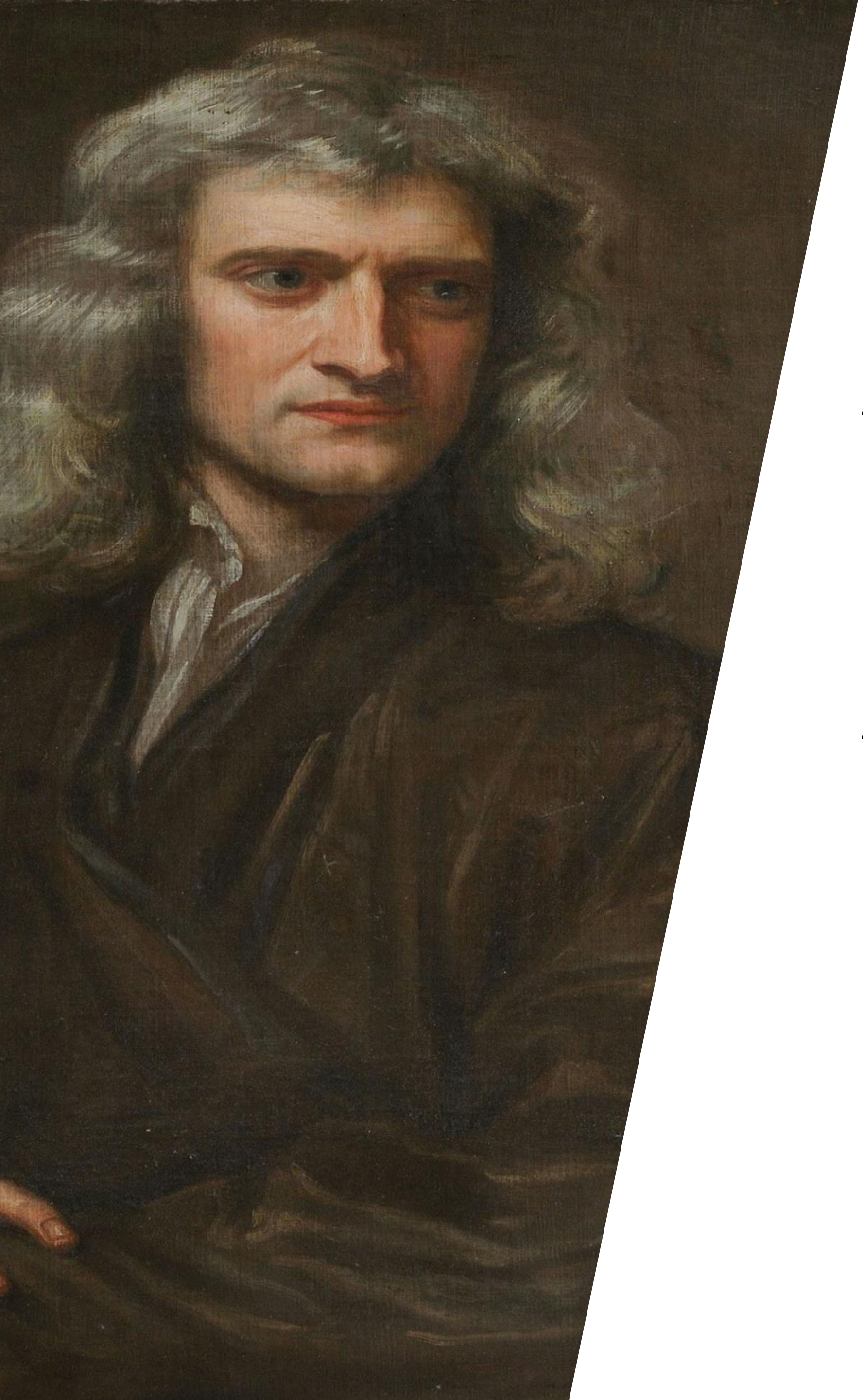
- Este método se baseia na ideia de criar polígonos regulares dentro, ou fora, de uma figura curva (como um círculo) e aumentar o número de lados desses polígonos até coincidir com a área do círculo.
- A área de um polígono regular é facilmente determinada.
- A medida que o número de lados aumenta, a área dos polígonos se aproxima da área da figura curva.
- Método de Eudoxo.

A Contribuição de Sir Isaac Newton

Desenvolveu o método dos *fluxions*, que mais tarde evoluiu para o que conhecemos como cálculo diferencial e integral.

A contribuição de Newton permitiu o cálculo da área sob as curvas e a resolução de problemas de física, como o movimento de objetos sob a ação de forças.





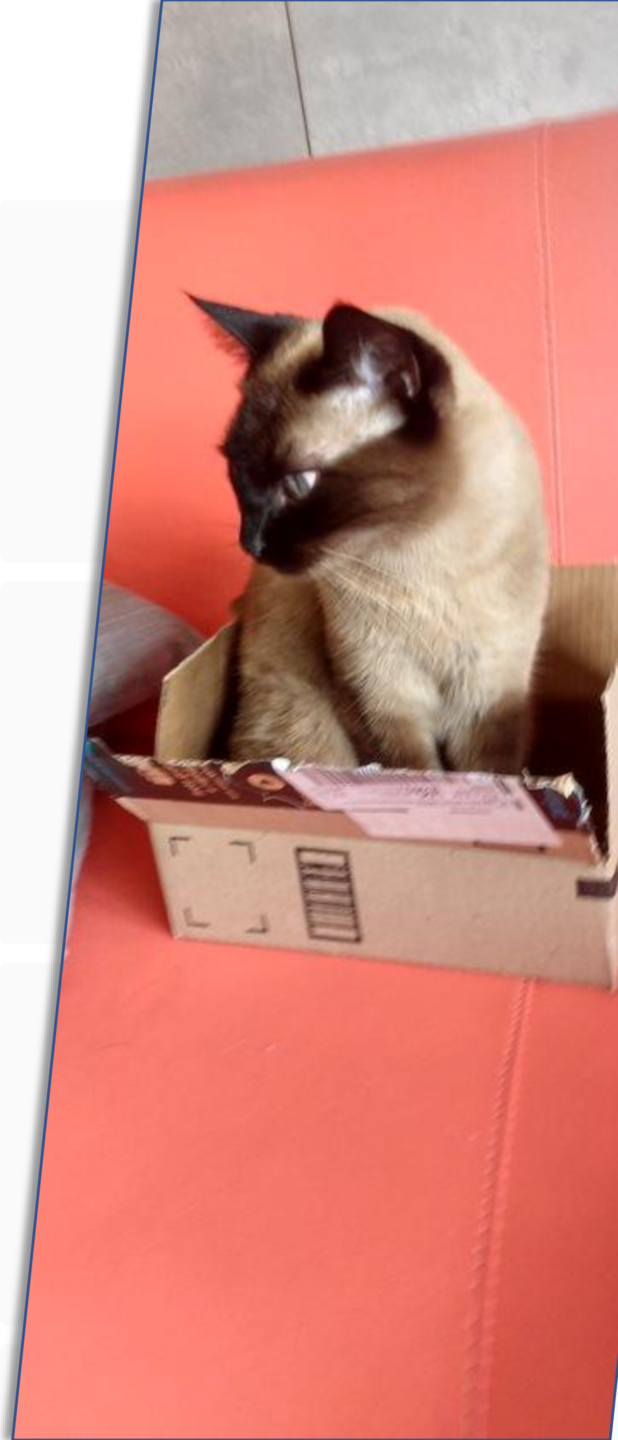
Gottfried Wilhelm Leibniz

Ao mesmo tempo que Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, também estava desenvolvendo seus próprios métodos para cálculo integral e diferencial.

A Leibniz é creditada a notação moderna do cálculo integral e o símbolo $\int$ que usamos hoje para representar uma integral.

Ele também desenvolveu algumas das regras de integração que são fundamentais para a aplicação do cálculo integral.

Aplicações da Integração



Aplicações na Ciência da Computação

- **Análise de Algoritmos**: O cálculo integral é usado para calcular a eficiência de alguns algoritmos, complementando a notação Big O, em termos de tempo e espaço. Isso é especialmente importante quando se trata de algoritmos complexos.
- **Processamento de Imagens e Gráficos**: Na computação gráfica, o cálculo integral é usado no processamento de imagens e na renderização de gráficos, como a *Renderização de Ray Tracing*.

Aplicações na Ciência da Computação – Complexidade

- **Algoritmo *heap sort***. O tempo de execução médio deste algoritmo pode ser analisado usando probabilidades e valores esperados, requerendo o uso de integração sempre que a distribuição de probabilidade for contínua.
- **Problemas de otimização**. Algoritmos de aprendizado de máquina e inteligência artificial, envolvem a otimização de uma função de custo, perda ou erro. Nesses casos, pode ser necessário calcular a derivada ou a integral de uma função para encontrar os mínimos ou máximos locais ou globais.

Aplicações na Ciência da Computação – Ray Tracing

- O *Ray Tracing* funciona enviando raios de luz virtuais de um ponto de vista (geralmente a posição da câmera) para a cena 3D.
- Cada raio é seguido através da cena, e quando ele encontra um objeto, calculamos como a luz interagiria com a superfície do objeto. Isso pode envolver o cálculo de reflexões (se a superfície é espelhada), refrações (se a superfície é transparente), e sombras (se outros objetos estão bloqueando a luz).
- Muitas direções diferentes, muitos raios, muitas intensidades.

Aplicações na Ciência da Computação – Ray Tracing

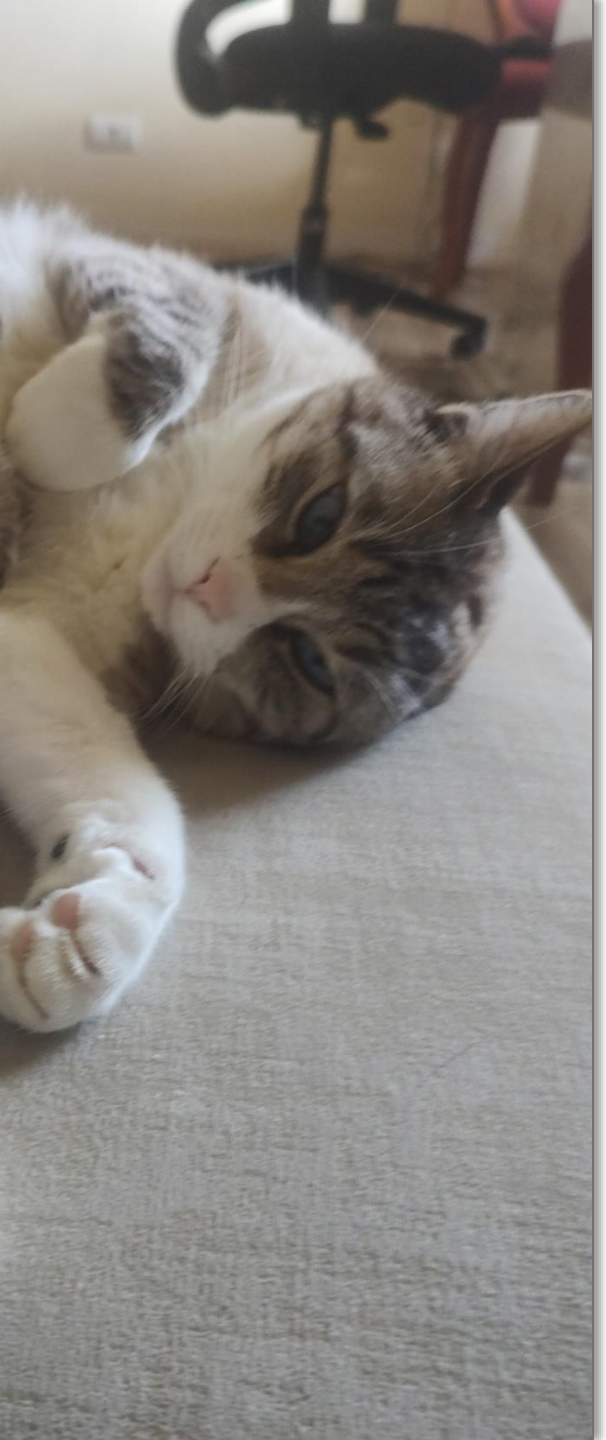
- A luz em uma cena real vem de muitas direções diferentes, e cada direção contribui para a cor final de um ponto na imagem. Para calcular isso precisamente, precisaríamos integrar sobre todas as possíveis direções de luz. Muito caro computacionalmente, então o *ray tracing* usa uma técnica chamada amostragem de importância para aproximar a integral.
- Escolhemos direções de luz de acordo com uma distribuição de probabilidade que favorece as direções que farão a maior contribuição para a cor final.

Aplicações em Economia

1. **Modelos de Crescimento Econômico**: O cálculo integral é usado para modelar o crescimento econômico e a acumulação de capital ao longo do tempo em modelos econômicos.
2. **Cálculo de Área sob a Curva de Demanda**: O cálculo integral é usado para calcular a área sob a curva de demanda, o que pode ser usado para determinar a receita total.

Aplicações em Física

1. **Mecânica Clássica**: Em física, o cálculo integral é usado para calcular a posição de um objeto a partir de sua velocidade ou a velocidade a partir da aceleração.
2. **Eletromagnetismo**: Em eletromagnetismo, o cálculo integral é usado para calcular a carga elétrica total em um campo elétrico ou a força total em um campo magnético.



Calculando Integrais na Prática

Exercício 1 – Ferramentas Computacionais

Mesmo que você ainda não entenda o que é uma integral deve ser capaz de resolver o seguinte problema:

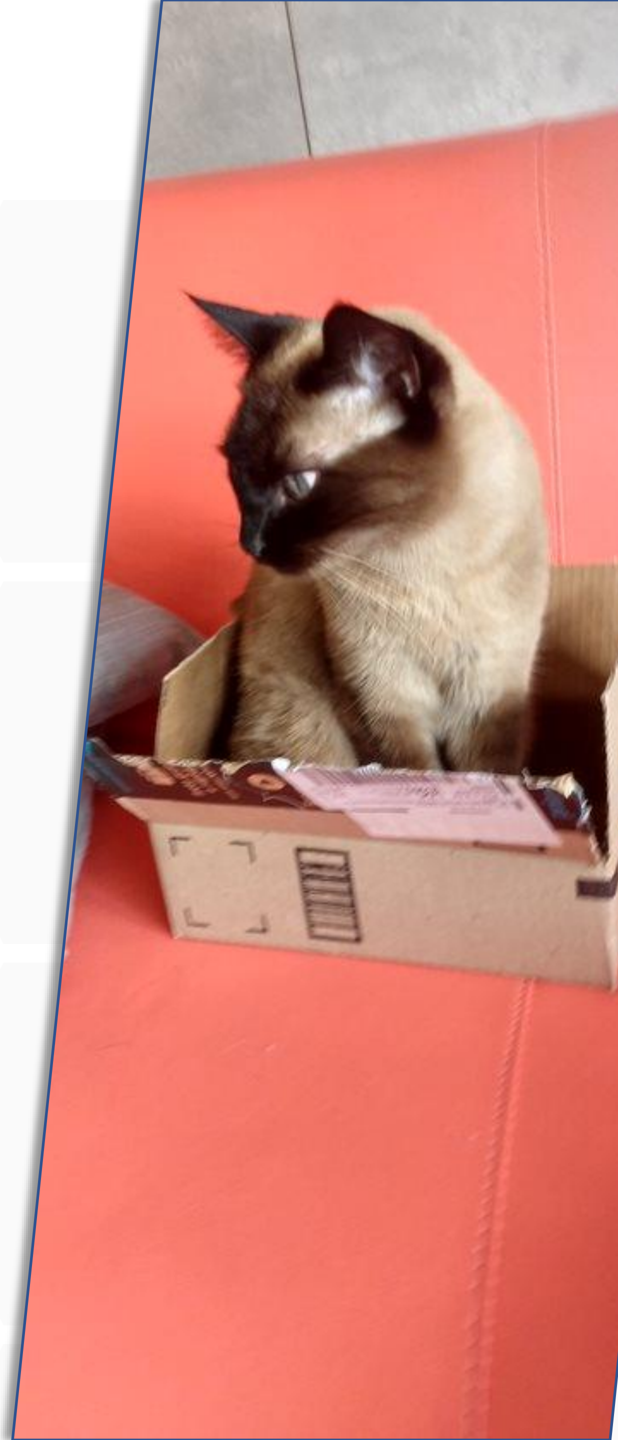
Você é um engenheiro de sistemas que trabalha na otimização de um algoritmo de processamento de sinal digital. O sinal é modelado pela função $f(t) = t^2\cos(t)$, onde t representa o tempo em segundos. Você está interessado na quantidade total de sinal processado entre os tempos $t = 1\,s$ e $t = 4\,s$, que pode ser calculada como a integral definida da função $f(t)$ entre esses limites.

Exercício 1 – Ferramentas Computacionais

Sua Tarefa, usando o numpy, sympy e matplotlib, é:

- Calcular a integral definida da função $f(t) = t^2 * \cos(t)$ entre $t = 1\ s$ e $t = 4\ s$.
- Plote a função $f(t)$ para t entre $0\ s$ e $5\ s$, usando o matplotlib, em Python.
- Marque os limites da integral definida ($t = 1$ e $t = 4$) com linhas pontilhadas verticais em azul.
- Preencha a área sob a curva entre $t = 1$ e $t = 4$, que representa a quantidade total de sinal processado durante esse período de tempo.
- Imprima na legenda a função, a integral definida, e o seu valor com latex.
- Solução.

Entendendo Integrais



Teorema Fundamental do Cálculo

O **Teorema Fundamental do Cálculo** é um dos teoremas mais importantes da análise matemática. Ele estabelece a relação intrínseca entre as duas principais operações do cálculo**: a derivação e a integração**.

O **Teorema Fundamental do Cálculo** é composto por duas partes, às vezes chamadas de **Primeira e Segunda Partes do Teorema Fundamental do Cálculo**.

Teorema Fundamental do Cálculo – Antiderivada

A **antiderivada** de uma função é, por definição, uma função cuja derivada é a função original. Em outras palavras, se $F'(x) = f(x)$, então $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$. Considere a função

$$f(x) = 3x^2$$

A **antiderivada** dessa função é a função $F(x)$ tal que a derivada de $F(x)$ é $f(x)$. Podemos encontrar a **antiderivada** usando a regra de potências para as **antiderivadas**, que nos diz que a **antiderivada** de x^n será dada por $\left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}$.

Teorema Fundamental do Cálculo – Antiderivada

Considerando que a **antiderivada** de x^n é $\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}$ e $f(x) = 3x^2$:

$$F(x) = 3\left(\frac{1}{2+1}\,x^{2+1}\right) = x^3 + C$$

Onde C é a constante de **integração**, que pode ser qualquer número real. A **família de antiderivadas** de $3x^2$ será $x^3 + C$ para todas as constantes reais C. Verificamos a antiderivada de $3x^2$ fazendo a derivada de $F(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + C) = 3x^2$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Primeira Parte

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre a operação de diferenciação e a operação de integração. A primeira parte do teorema afirma que, se f é uma função contínua no domínio dos Reais, em um intervalo fechado $[a, b]$ e F é a função **antiderivada** de f em $[a, b]$, então a integral de f entre a e b será igual a $F(b) - F(a)$. Isto é expresso matematicamente como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Segunda Parte

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece os mecanismos para encontrar a antiderivada de uma função. Esta parte do teorema afirma que se f é uma função contínua no domínio dos reais em um intervalo $[a, b]$ e F é a função antiderivada definida em $[a, b]$ por:

$$F(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

para todo $x \in [a, b]$, então F é uma função contínua em $[a, b]$ e a derivada de F é f em (a, b), ou seja, $F'(x) = f(x)$.

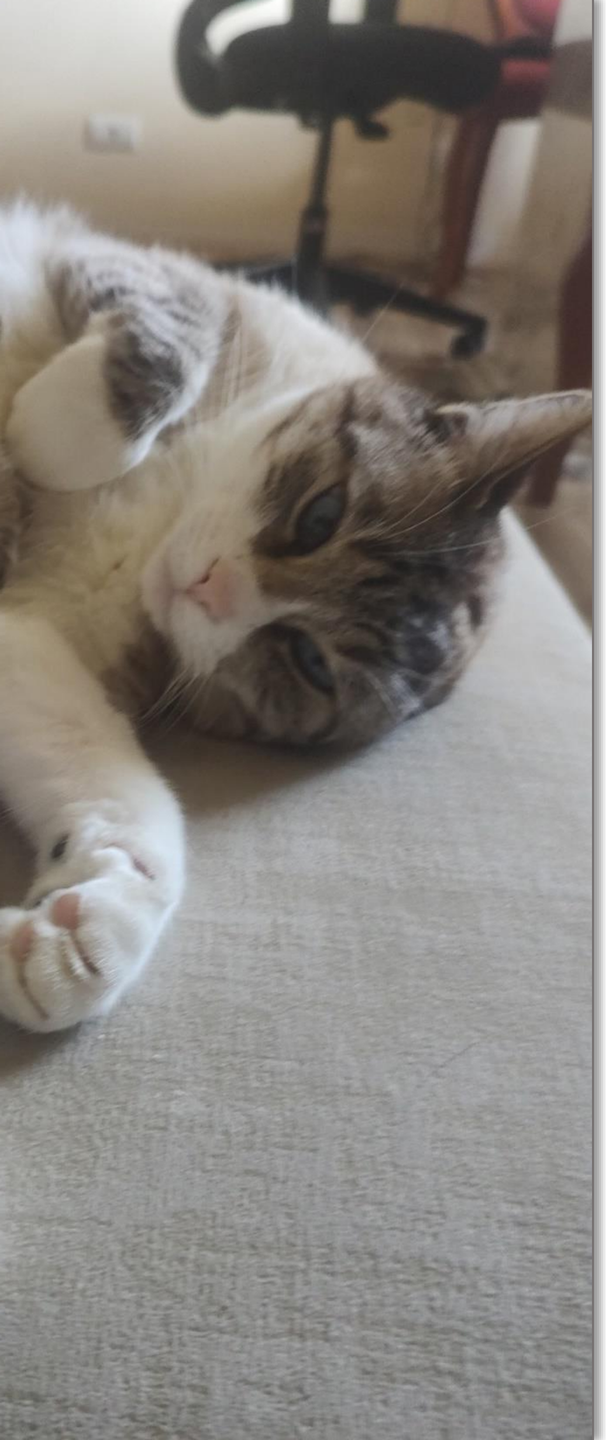
Teorema Fundamental do Cálculo – Segunda Parte

$$F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para todo $x \in [a, b]$, então F é uma função contínua em $[a, b]$ e a derivada de F é f em (a, b), ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Isso significa que a operação de integração desfaz a operação de diferenciação.

Se temos uma função $f(x)$ e queremos encontrar a função $F(x)$ cuja derivada é $f(x)$, podemos fazer isso encontrando a integral de $f(x)$.



Regras de Integração

Regra da Potência

- A Regra da Potência é usada para integrar funções do tipo $f(x) = x^n$, onde n é um número real diferente de -1:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

- Esta regra só é aplicável quando $n \neq -1$, pois no caso de $n = -1$ a função se torna $f(x) = \frac{1}{x}$, cuja integral é $\ln|x|$.

- Agora, vamos mostrar dois exemplos passo a passo:

Regra da Potência - Exemplo

- Calcule as integrais indefinidas de:

a) $f(x) = x^2$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$$

b) $f(x) = 5x^4$

$$\int 5x^4\,dx = 5\int x^4\,dx = 5\left[\frac{1}{4+1}x^{4+1}\right] + C = x^5 + C$$

A Regra da Soma

- A integral da soma (ou diferença) de duas funções é igual à soma (ou diferença) das integrais das funções. Se temos duas funções $f(x)$ e $g(x)$, a integral da soma dessas funções é dada por:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

A Regra da Soma - Exemplos

- Encontre as integrais indefinidas de:

a) $h(x) = x^2 + x^3$

$$\int h(x)\,dx = \int (x^2 + x^3)\,dx = \int x^2\,dx + \int x^3\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

b) $h(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x).$

$$\int h(x)\,dx = \int (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\,dx = \int \sin(x)\,dx - \int \cos(x)\,dx$$

$$= -\cos(x) - sen(x) + C$$

Regras das Funções Trigonométricas

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + C$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

Regra do Exponencial

A integral de e^{ax} é $\frac{1}{a}e^{ax}$, onde a é uma constante:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Regra do Exponencial - Exemplos

Encontre a integral indefinida de:

a) $f(x) = e^{2x}$:

$$\int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

b) $g(x) = 3e^{-x}$:

$$\int g(x)\,dx = \int 3e^{-x}\,dx = 3\int e^{-x}\,dx = 3\left(\frac{1}{-1}\right)e^{-x} = -3e^{-x} + C$$

Regra de e^x

- Trata-se de uma extensão da Regra do Exponencial. Ela diz que a integral de e^x é e^x, ou seja:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Regra de e^x - Exemplo

- Encontre as seguintes integrais indefinidas:

a) $f(x) = e^x$.

$$\int f(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C$$

b) $g(x) = 2e^x$.

$$\int g(x)\,dx = \int 2e^x\,dx = 2\int e^x dx = 2e^x + C$$

Regra da Integração por Partes

Um método de integração que é usado quando a integral é o produto de duas funções, e uma delas é facilmente integrável enquanto a outra é facilmente derivável formalmente expressa como:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Regra da Integração por Partes - Exemplos

Encontre a integral indefinida das seguintes funções:

a) $f(x) = x\,e^{x}$:

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{x}\,dx$$

Escolhemos $u = x$ e $dv = e^{x}dx$. Neste caso, $du = dx$ e $v = e^{x}$. Logo:

$$\int x\,e^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} + C$$

Regra da Integração por Partes - Exemplos

b) $g(x) = x\ln(x)$:

$$\int g(x)\,dx = \int x\ln(x)\,dx$$

Nesse caso, $u = \ln(x)$ e $dv = xdx$. Logo $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$. logo:

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

A integral indefinida de $\boldsymbol{ln(x)dx}$

A integral indefinida de $\ln(x)$ pode ser resolvida utilizando a técnica de integração por partes. A fórmula de integração por partes é:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Escolhemos $u = \ln(x)$ e $dv = dx$. Assim, obtemos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$.

Substituindo u, v, du e dv na fórmula de integração por partes:

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = xln(x) - \int dx$$

A integral indefinida de $\boldsymbol{ln(x)dx}$

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = xln(x) - \int dx$$

O termo $\int dx$ é a integral de $\mathrm{x}^0 = 1$ em x, cujo resultado é x.

Portanto, a integral indefinida de ln(x) será dada por:

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - x + C$$

Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia para Integrais ou técnica de substituição é uma forma de simplificar o cálculo de integrais mais complexas. Essa técnica é muito útil quando temos uma composição de funções. A fórmula para a Regra da Cadeia para Integrais é dada por:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Regra da Cadeia - Exemplo

Encontre as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

Escolhemos $u = x^2$. Então, $du = 2x\ dx$. Substituindo u e du :

$$\int \cos(u)\,du\ = sen(u) + C$$

Substituindo u de volta, temos:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2)\ +\ C$$

Regra da Cadeia - Exemplo

Encontre as seguintes integrais indefinidas:

b) $\int x\, e^{x^2} dx$.

Considerando $u = x^2$. Então, $du = 2x\, dx$. Como temos $x\, dx$ na integral, dividimos du por 2 para fazer a substituição, obtendo:

$$\frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}\, e^u + C$$

Substituindo u :

$$\int x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + C$$

Regra da Substituição

A ideia é substituir uma variável por uma função que, quando substituída, simplificará a integral. A regra de substituição é a contrapartida do Teorema Fundamental do Cálculo para a regra da cadeia na diferenciação. Considere:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Podemos fazer a substituição $u = g(x)$. Então, $du = g'(x)\,dx$. Substituindo na integral original, temos:

$$\int f(u)\,du$$

Após a integração, substituímos u em termos de x para obter a solução final.

Regra da Substituição - Exemplo

Considere a integral

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

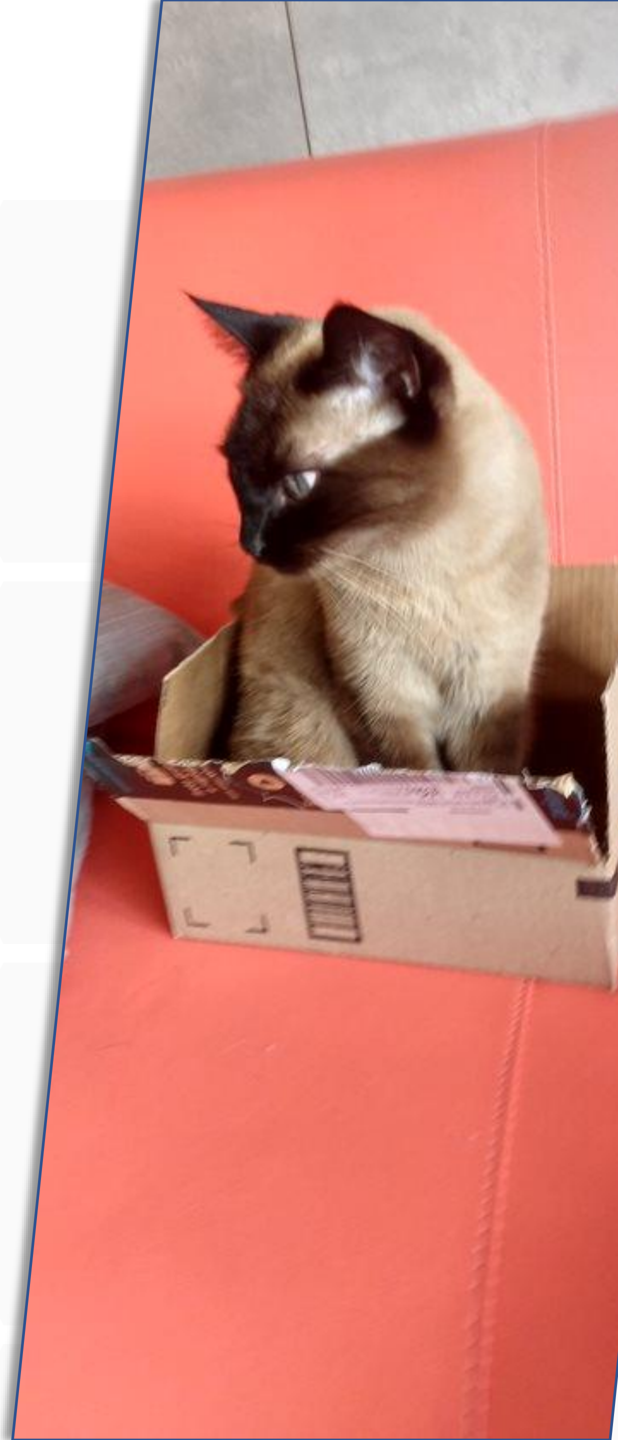
Se $u = x^2$, então $du = 2x\,dx$, e $dx = \frac{du}{2x}$. Substituímos na integral original:

$$\int xe^u \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} e^u\,du = \frac{1}{2} e^u + C$$

substituímos u por x^2 para obter a solução:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C$$

Exercícios de Integração Indefinida



Resolva as Seguintes Integrais Indefinidas

1. $\int (3x^2 - \ 2x + 1)dx$ $\quad (regra\ da\ potência\ e\ soma)$

2. $\int x\ sen(x)dx$ $\quad (integração\ por\ partes)$

3. $\int x^2 e^x\ dx$ $\quad (Integração\ por\ partes)$

4. $\int x\ (x^2 + 1)^2 dx$ $\quad (substituição\ e\ potência)$

Resolva as Seguintes Integrais Indefinidas - Solução

1. $\int (3x^2 - \ 2x + 1)dx \quad (regra\ da\ potência\ e\ soma)$

$$\int (3x^2 - \ 2x + 1)dx \ = \int (3x^2)dx - \int (2x)dx + \int (1)dx$$

$$\int (3x^2 - \ 2x + 1)dx \ = 3\int (x^2)dx - 2\int (x)dx + 1\int (x^0)dx$$

$$\int (3x^2 - \ 2x + 1)dx \ = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x}{1} = x^3 - x^2 + x$$

Resolva as Seguintes Integrais Indefinidas - Solução

2. $\int x\, sen(x) dx$ $\quad$ $(integração\ por\ partes)$ $\quad \int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$u = x\,, dv = \text{sen}(x)\, dx \;\; logo \;\; du = dx \;e\;\; v = -\cos(x)$$

$$\int x \sin(x)\, dx \;=\; x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx = -xcos(x) + \int \cos(x)\, dx$$

Agora, integramos $\cos(x)$ diretamente e termos:

$$\int x\, \text{sen}(x)\, dx = -xcos(x) + sen(x) + C$$

Resolva as Seguintes Integrais Indefinidas - Solução

3. $\int x^2 e^x \, dx$ $\quad$ *(integração por partes)* $\quad$ $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx \quad logo \quad du = 2x \, dx \quad e \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \, e^x dx$$

$$u = x, \quad dv = 2e^x dx \quad logo \quad du = dx, \quad v = 2e^x.$$

$$\int 2xe^x \, dx = 2xe^x - 2\int e^x \, dx = 2xe^x - 2e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \, e^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) + C$$

Resolva as Seguintes Integrais Indefinidas - Solução

4. $\int x\,(x^2+1)^2 dx$ $\quad\quad$ $(substituição\ e\ potência)$

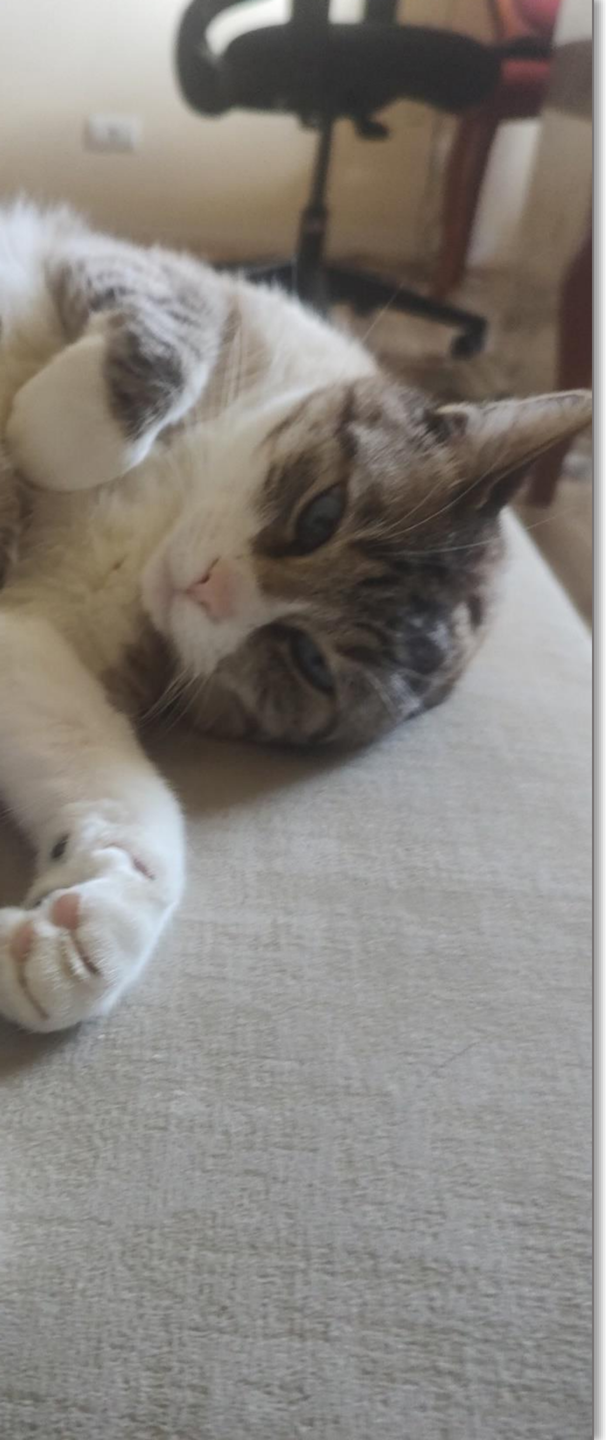
$$u = x^2 + 1\ logo\ du = 2xdx, \qquad sendo\ assim: dx = \frac{du}{2}$$

$$\int x\,(x^2+1)^2 dx = \int xu^2\,\frac{du}{2dx} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C$$

$$\int x\,(x^2+1)^2 dx = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(x^2+1)^3}{6} + C$$

Eis a Razão!

Por isso tanta gente tem medo de integração!



Integrais Definidas

Área sob a curva de $f(x)$=2x

Sem usar nenhuma derivada, ou integral, você deverá calcular a área sob a curva da função $f(x) = 2x$ no intervalo $1 \leq x \leq 2$. Pode fazer no papel, ou se quiser, pode fazer com Python, usando as bibliotecas Numpy e Matplotlib.

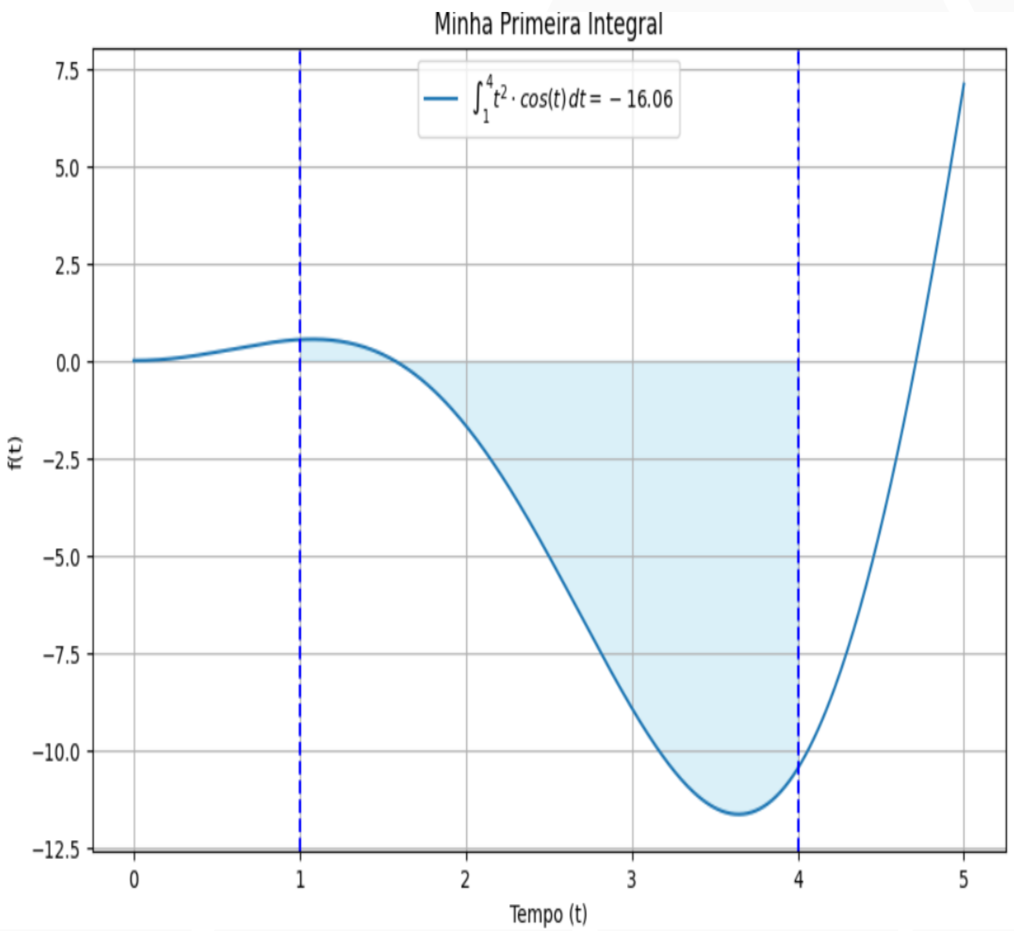
Solução A integral definida é usada para resolver estes problemas.

Integrais Definidas

A integral definida entre os pontos a e b determinam a área sob uma curva determinada.

Em uma $f(x)$ a integral definida representa a área entre a curva e o eixo x.

Uma integral definida possui um valor numérico.



Teorema Fundamental do Cálculo – Primeira Parte

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre a operação de diferenciação e a operação de integração. A primeira parte do teorema afirma que, se f é uma função contínua no domínio dos Reais, em um intervalo fechado $[a, b]$ e F é a função **antiderivada** de f em $[a, b]$, então a integral de f entre a e b será igual a $F(b) - F(a)$. Isto é expresso matematicamente como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Voltando a $f(x)$=2x

Podemos usar a integral definida para calcular a área sob a curva $f(x) = 2x$ no intervalo $1 \leq x \leq 2$. Para isso:

$$\int_{1}^{2} 2x\,dx$$

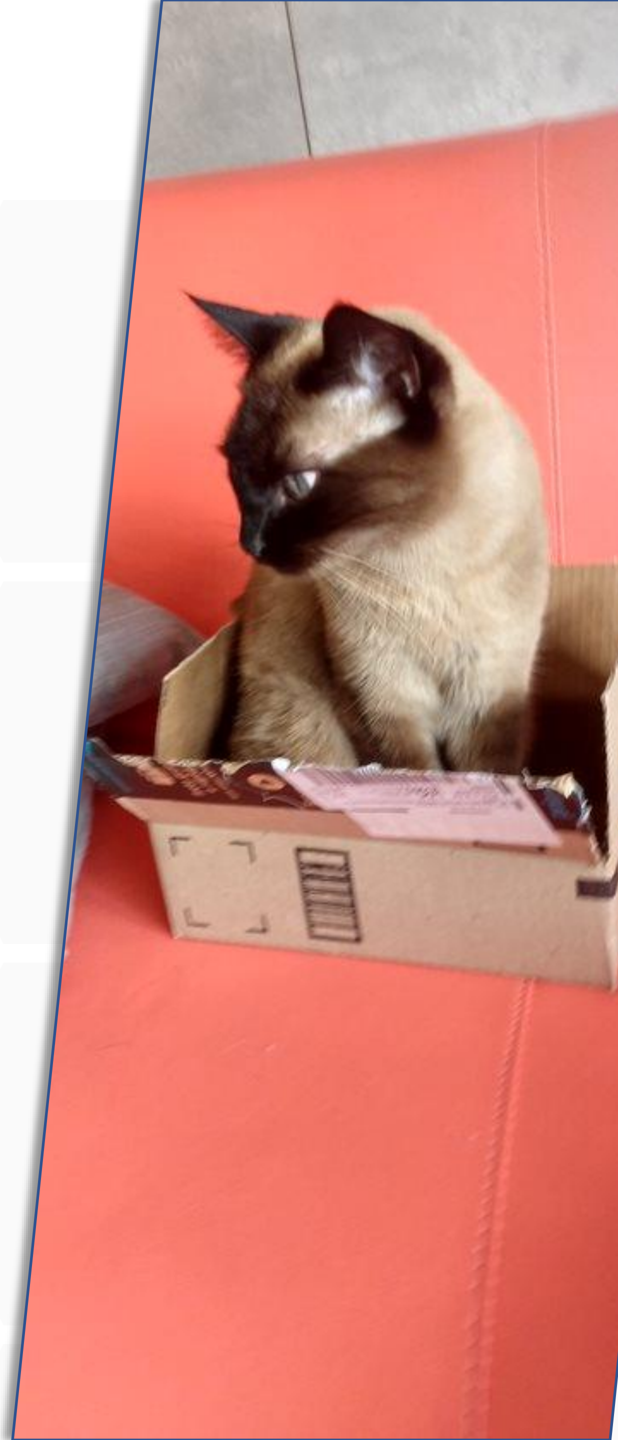
Depois resolvemos a integral como se fosse uma indefinida:

$$\int 2x\,dx = x^2 \therefore F(x) = x^2$$

Finalmente usamos o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_{1}^{2} 2x\,dx = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1) = 2^2 - 1^2 = 3$$

Exercício Integrais Definidas



Exercício Integrais Definidas

Considerando as integrais a seguir você deverá plotar o gráfico de cada uma das equações que estão sendo integradas e marcar a área entre os limites de integração. Depois, usando apenas álgebra, calcular a área sobre estas curvas e, finalmente, verificar seus cálculos calculando a área sobre estas curvas usando a Soma de Reimann. Esta Tarefa deve ser realizada no Google Colab usando o Python, limitado ao uso das bibliotecas numpy, sympy e matplotlib.

Exercício Integrais Definidas - Integrais

$a)\ \int_{2.5}^{7} 40x^3 + 12x^2 - 9x\,dx$

$b)\ \int_{7.5}^{10} 12t^7 - t^2 - t + 3\,dt$

$c)\ \int_{1}^{2} \frac{2x^5 - x + 3}{x^2}\,dx$

$d)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 7sin(x) - 2cos(x)\,dx$

$e)\ \int_{-\pi}^{\pi} 5\sin(2 * x) + \ 3^x dx$

Obrigado!

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1