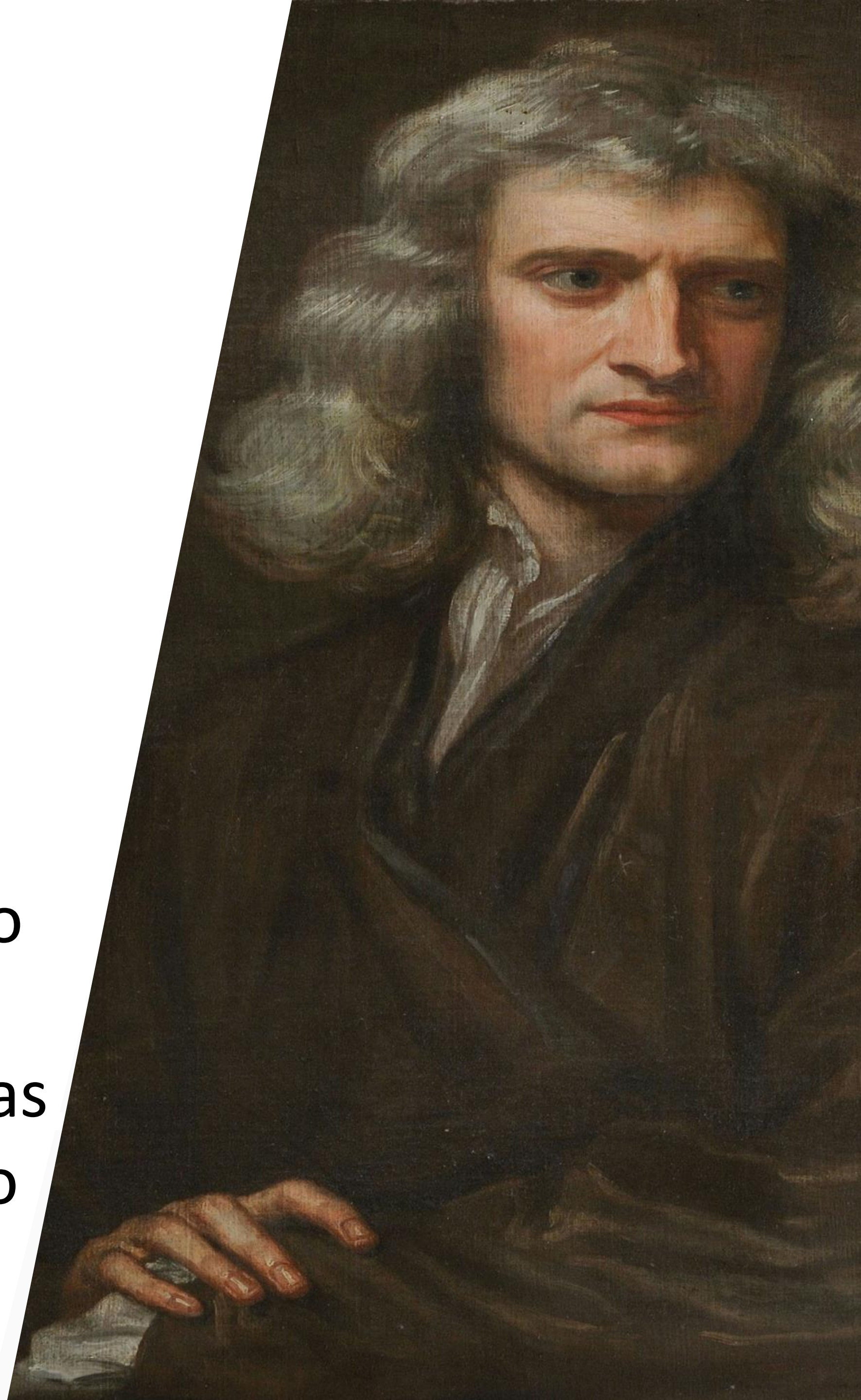
Modelagem de Sistemas Físicos

Aula 5 – Derivadas Numéricas

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1

O CÁLCULO INFINITESIMAL

O Cálculo Infinitesimal desempenha um papel fundamental no mundo moderno. **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) são creditados como os fundadores do Cálculo. Desenvolveram suas teorias de forma independente no final do Século XVII.

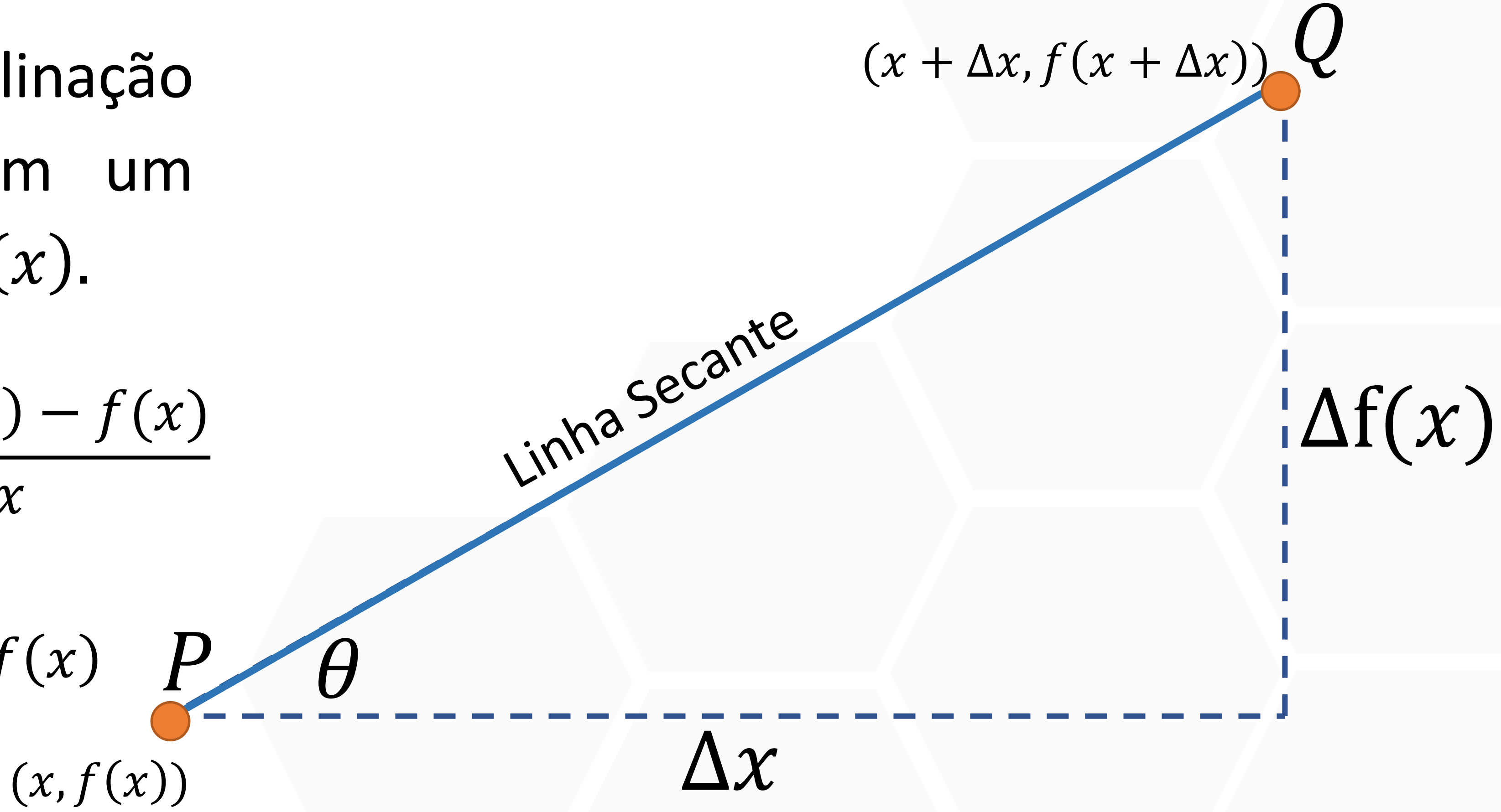


Partindo da Geometria

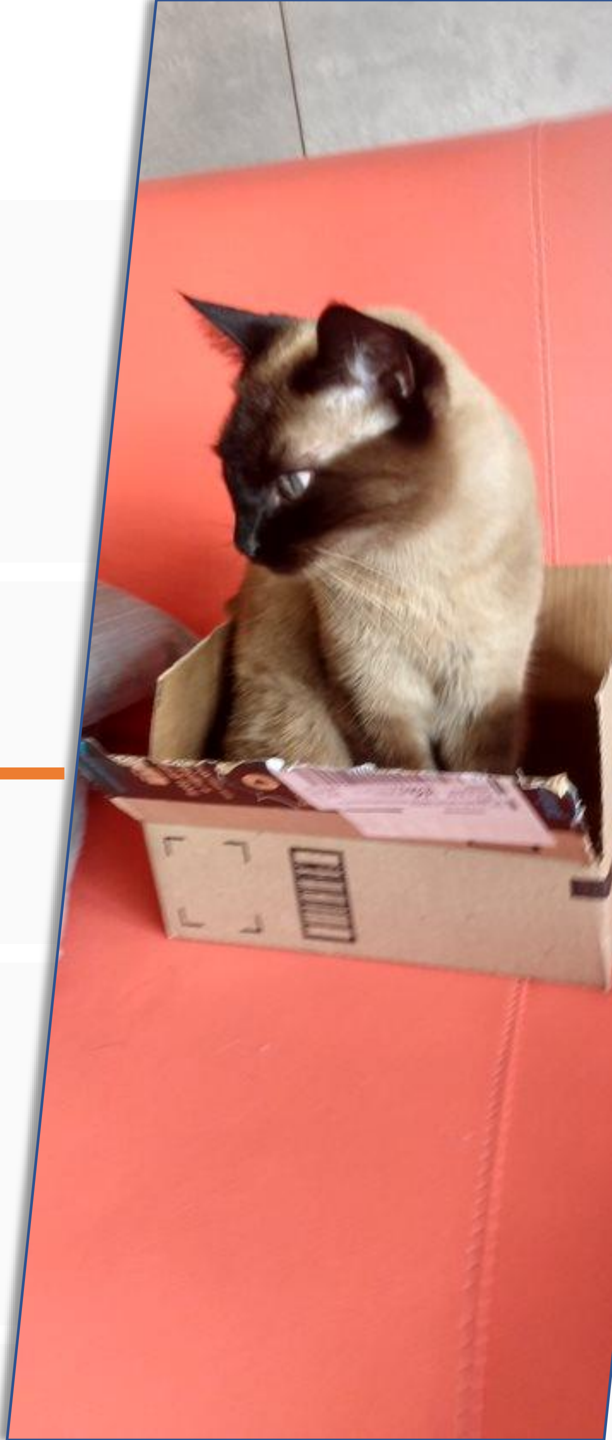
A derivada será a inclinação da reta tangente em um ponto do gráfico de $f(x)$.

$$\arctan\theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$



O que fazer se não temos a álgebra?



Fórmula das Diferenças Finitas

Partimos da Fórmula das Diferenças Finitas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como não temos o simbolismo da álgebra, não podemos ter $\Delta x \to 0$. Usamos uma aproximação numérica:

$$\Delta x = 1 \times 10^{-5}$$

Você escolhe a precisão.

Fórmula das Diferenças Finitas – Exemplos $f(x) = x^2$

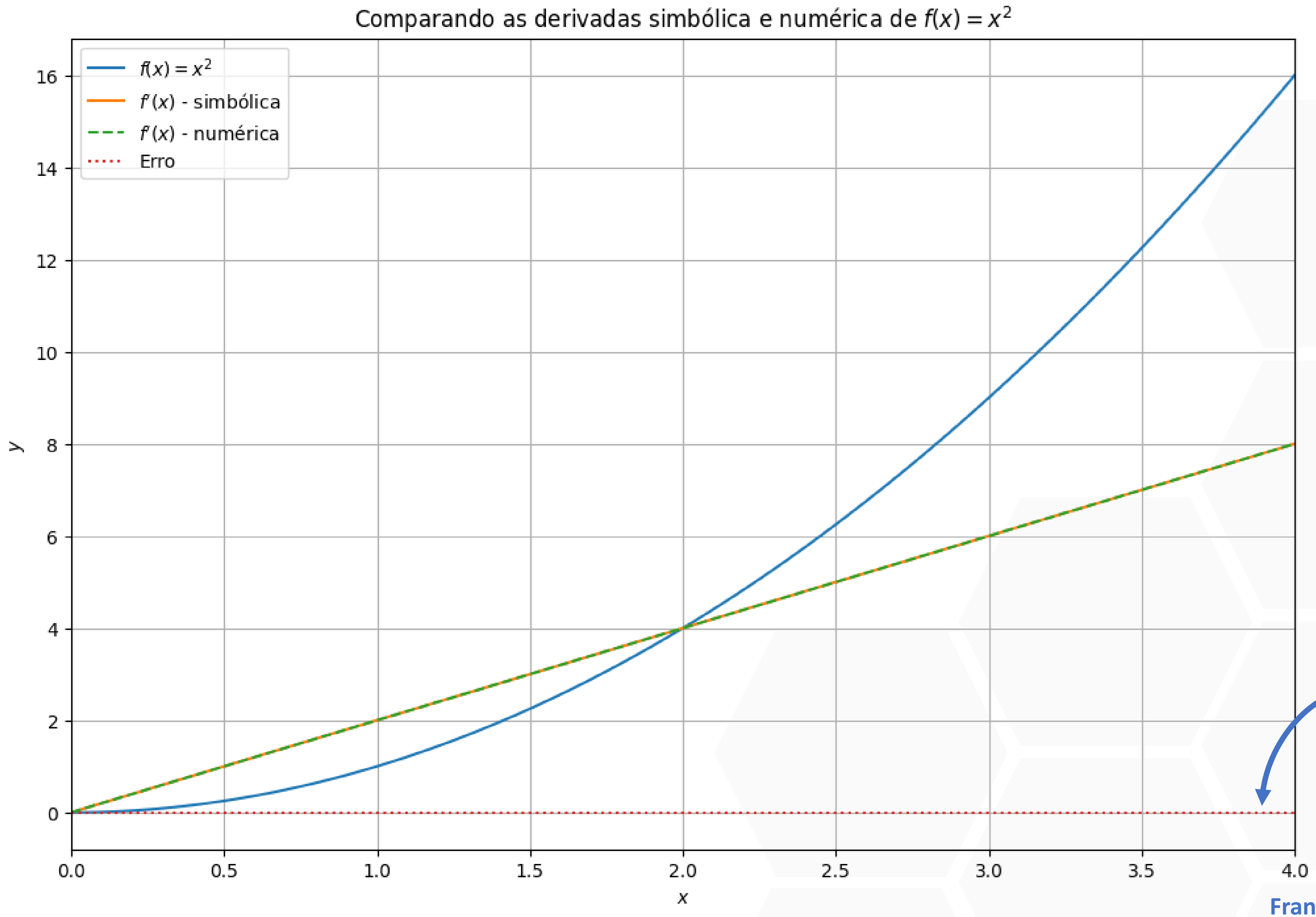
Defina a função: $f(x) = x^2$

Escolha um valor pequeno para Δx: $\Delta x = 1 \times 10^{-5}$

Calcule a Fórmula das Diferenças Finitas no ponto, vamos escolher $x = 2$:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2 + 1 \times 10^{-5}) - f(2)}{1 \times 10^{-5}} = \frac{(2 + 1 \times 10^{-5})^2 - (2)^2}{1 \times 10^{-5}}$$

$$\frac{d}{dx}f(2) = \frac{(2 + 1 \times 10^{-5})^2 - (2)^2}{1 \times 10^{-5}} = \frac{4.0000400001 - 4}{1 \times 10^{-5}} = 4{,}0001$$



Sempre teremos um erro!

Frank Coelho de Alcantara – 2023-1

Regra do Ponto Médio

Partimos da Fórmula das Diferenças Finitas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Novamente, usamos a precisão que desejarmos

$$\Delta x = 1 \times 10^{-5}$$

Regra do Ponto Médio – Exemplos $f(x) = x^2$

Defina a função: $f(x) = x^2$

Escolha um valor pequeno para Δx: $\Delta x = 1 \times 10^{-5}$

Calcule a Fórmula das Diferenças Finitas no ponto, vamos escolher $x = 2$:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\left(2 + \frac{1 \times 10^{-5}}{2}\right)^2 - \left(2 - \frac{1 \times 10^{-5}}{2}\right)^2}{1 \times 10^{-5}}$$

$$\frac{d}{dx}f(2) = 4{,}0001$$

Vamos Forçar a Precisão $f(x) = sen(x)$ para $x = 1$

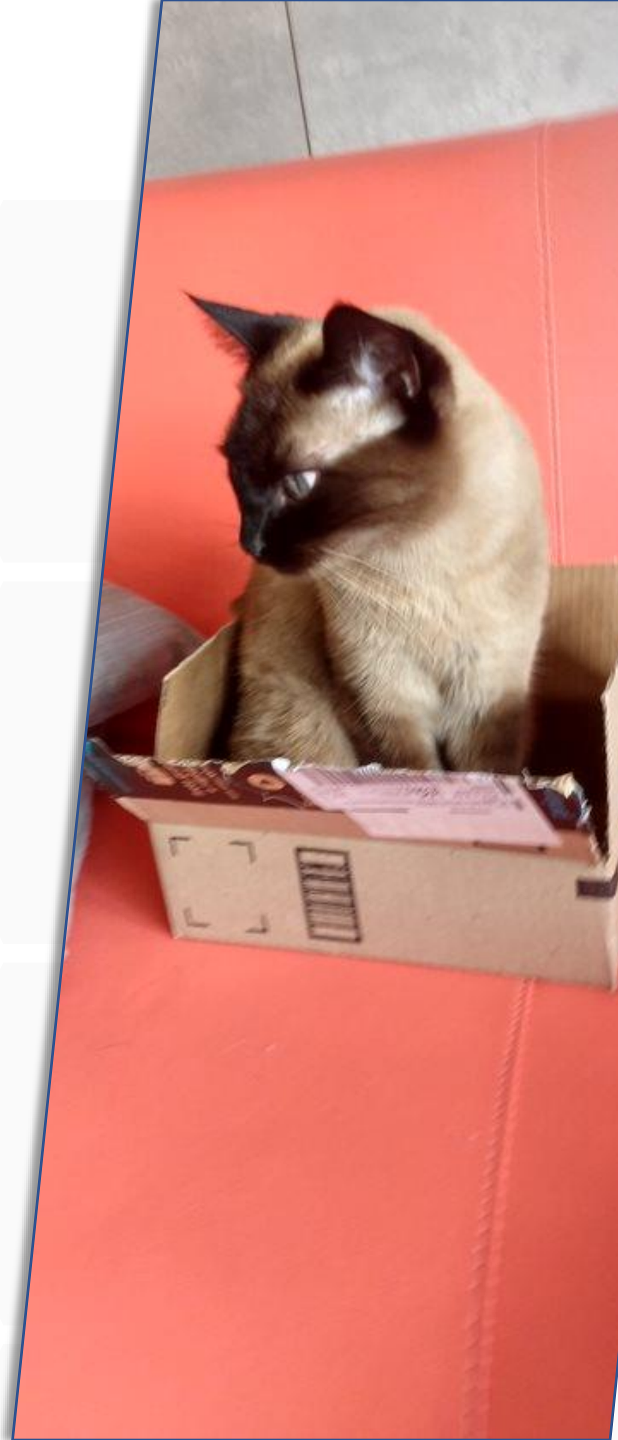
- $\frac{d}{dx} sen(1) = \cos(1) = 0.5403023058681398$
- Para $\Delta x = 0{,}1$
  - Fórmula das Diferenças Finitas:0,497
  - Fórmula do Ponto Médio: 0,491
- Para $\Delta x = 0{,}0001$
  - Diferenças Finitas: 0.5403067846300245 erro:4.478×10^{-6}
  - Ponto Médio: 0.540302305928253б erro: 6.011×10^{-8}

Vamos Forçar a Precisão $f(x) = sen(x)$ para $x = 1$

- $\frac{d}{dx} sen(1) = \cos(1) = 0.5403023058681398$
- Para $\Delta x = 0{,}00001$
  - Diferenças Finitas: 0.5403023058681398 erro: 0
  - Ponto Médio: 0.5403023058638718 erro4.268×10^{-12}
- Talvez porque:

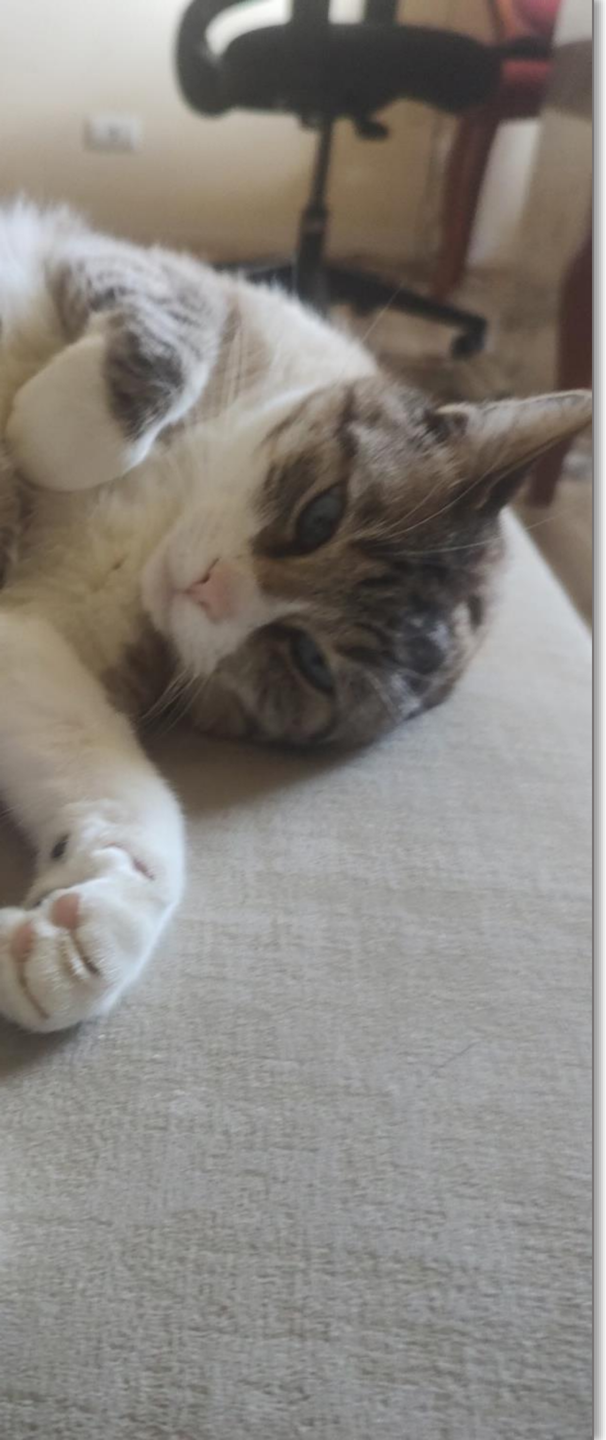
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Atividade Prática 1 – RA2



Atividade Prática 1 – RA2

Esta é a primeira atividade em grupo da RA2. Usando a Fórmula das Diferenças Finitas e a Fórmula do Ponto médio. Faça um código em python, para ser executado no Google Colab que produza o gráfico da derivada de $f(x) = 2x + sen(3x)$ para uma precisão maior que 10×10^{-6}. Neste gráfico, você deve escolher um ponto onde a derivada seja descendente e calcular o erro absoluto entre a derivada simbólica e as duas derivadas numéricas com, pelo menos 20 casas decimais de precisão. Calcule também o erro absoluto entre as três derivadas possíveis, escolhendo um ponto onde a tangente neste ponto seja zero. Dica, a biblioteca *mpmath,* permite o cálculo numérico com precisões além das precisões permitidas pela norma IEEE754.



Modelagem de Fenômenos físicos - Derivadas

Obrigado!

Frank Coelho de Alcantara – 2023-1