Modelagem de Fenômenos Físicos

Aula 6 – Derivadas Parciais

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1

Funções – Voltando ao Básico

Uma função é a explicitação de uma relação. Quando aplicamos uma função a um dos elementos do conjunto domínio de uma relação encontramos o elemento correspondente no conjunto imagem da função.

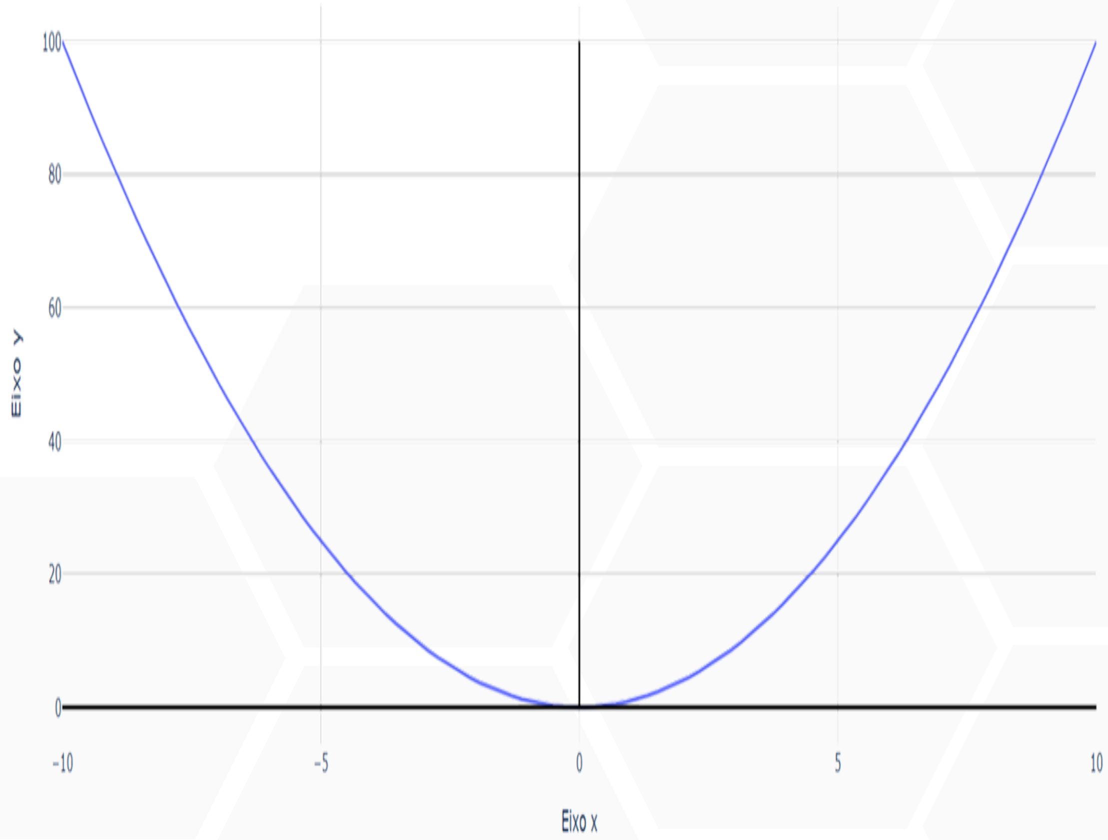
$$f(x) = x^2$$

Temos dois conjuntos: domínio, X e imagem, Y. No caso do exemplo, $f(x) = x^2$ indica que para encontrarmos o elemento do conjunto Y equivalente a um elemento do conjunto X temos que elevar este x ao quadrado.

Funções – Voltando ao Básico

Temos duas variáveis x e y. Ou seja: uma **variável independente** x e uma **variável dependente** y. Representamos os conjuntos domínio/imagem por duas dimensões. Os valores da dimensão imagem, y, só podem ser encontrados pela aplicação da função sobre os valores da dimensão domínio, x.

$$f(x) = x^2$$

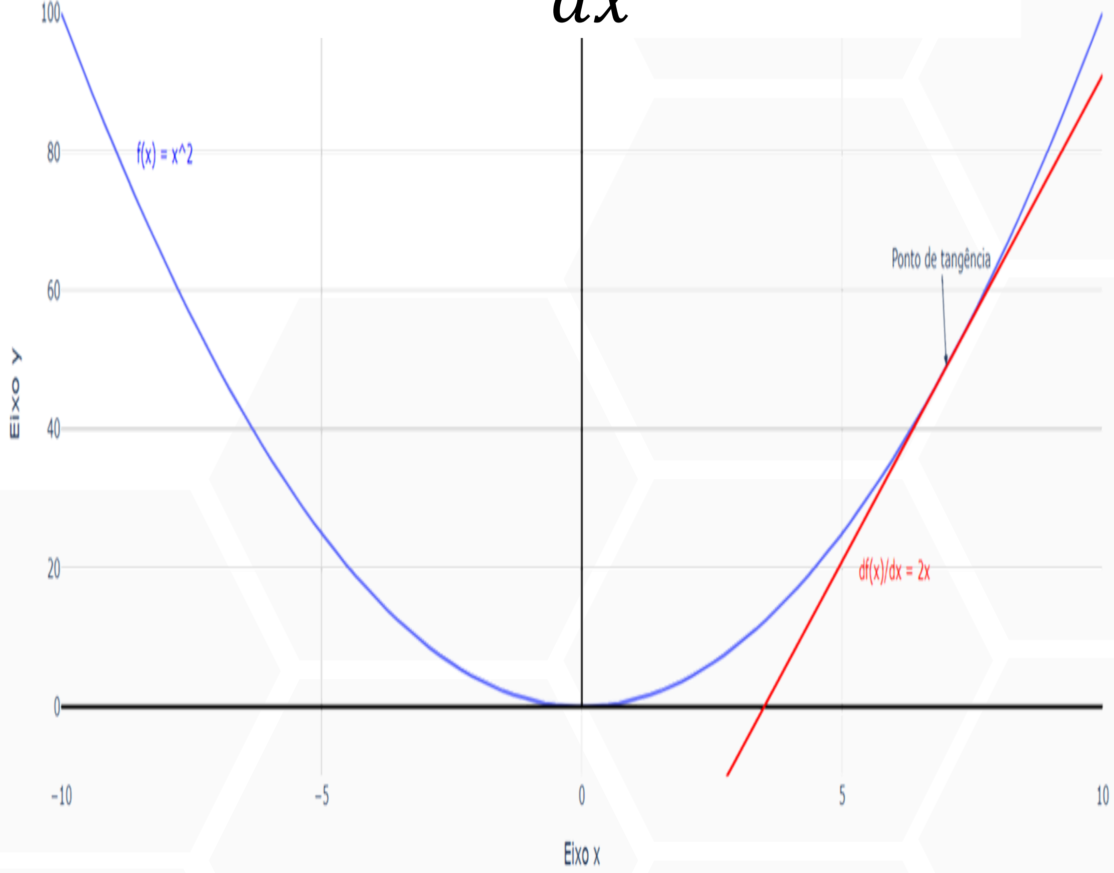


Derivadas

A derivação de uma função cria uma nova função. Esta nova função permite entender a taxa de variação da função original.

Em um ponto da função original, a derivada resulta no coeficiente angular da reta tangente a função original que toca neste ponto.

$$f(x) = x^2 \therefore \frac{d}{dx}f(x) = 2x$$



Aplicação às Equações do Movimento

O cálculo diferencial, com ênfase nas derivadas, é uma ferramenta essencial na Física. Ele permite descrever e analisar as mudanças nas grandezas físicas, como o deslocamento (s), a velocidade (v) e a aceleração (a) de um objeto em movimento.

As derivadas de primeira ordem nos ajudam a entender as relações entre essas grandezas. Entendendo como estas grandezas variam em relação ao tempo.

Derivadas: deslocamento e velocidade

A derivada da equação do deslocamento em relação ao tempo (t) fornece a velocidade do objeto. A equação para essa relação é:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Onde "$ds(t)$" representa a variação no deslocamento e "dt" a variação no tempo.

A função $v(t)$ nos permite analisar a *taxa de variação* do deslocamento ao longo do tempo.

Derivadas: velocidade e aceleração

A aceleração é obtida ao calcular a derivada da velocidade em relação ao tempo. A equação que representa essa relação é:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Onde "$dv(t)$" representa a variação na velocidade e "dt" a variação no tempo. A função $a(t)$ permite analisar a taxa de variação da velocidade ao longo do tempo.

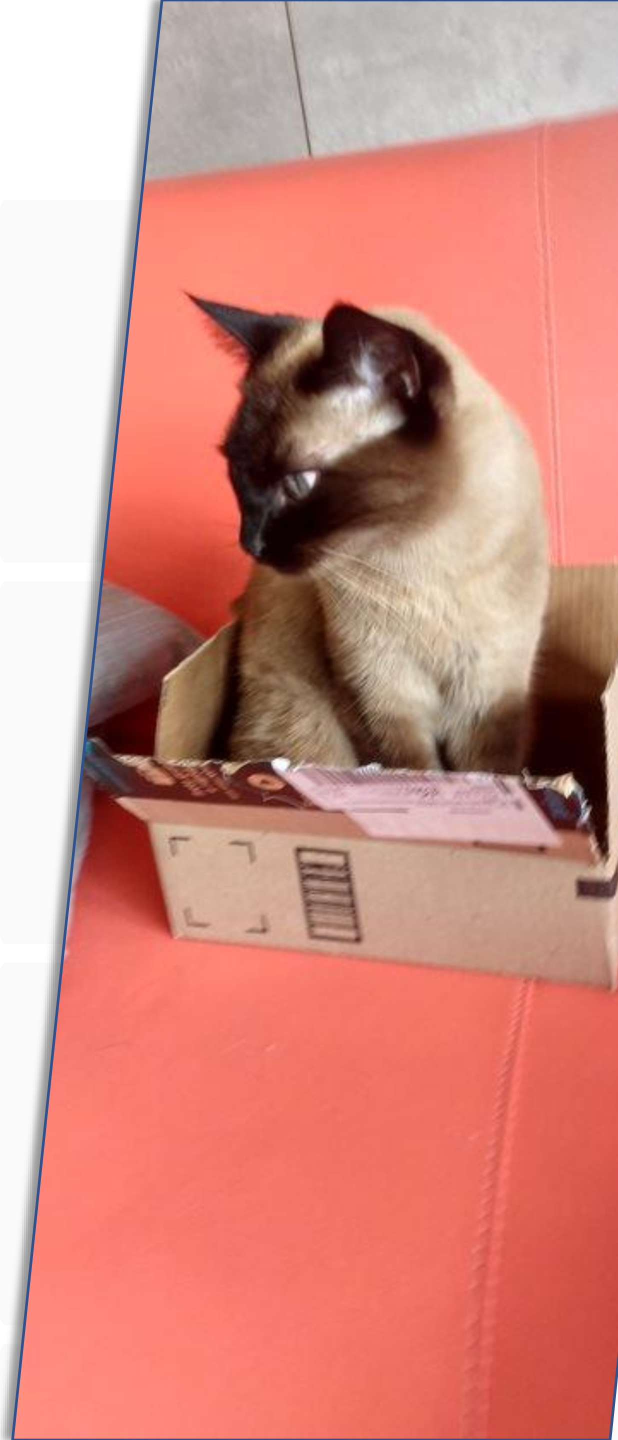
Derivadas de Ordens Superiores

Podemos aplicar as técnicas de derivação as equações resultantes de uma derivação. A essa aplicação consecutiva de derivação cria o que chamamos de derivadas de ordem superior.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

As equações formadas por derivadas de derivadas, ou entre derivadas de ordens superiores, fazem parte do estudo das Equações Diferenciais.

Exemplo 1: equações do movimento

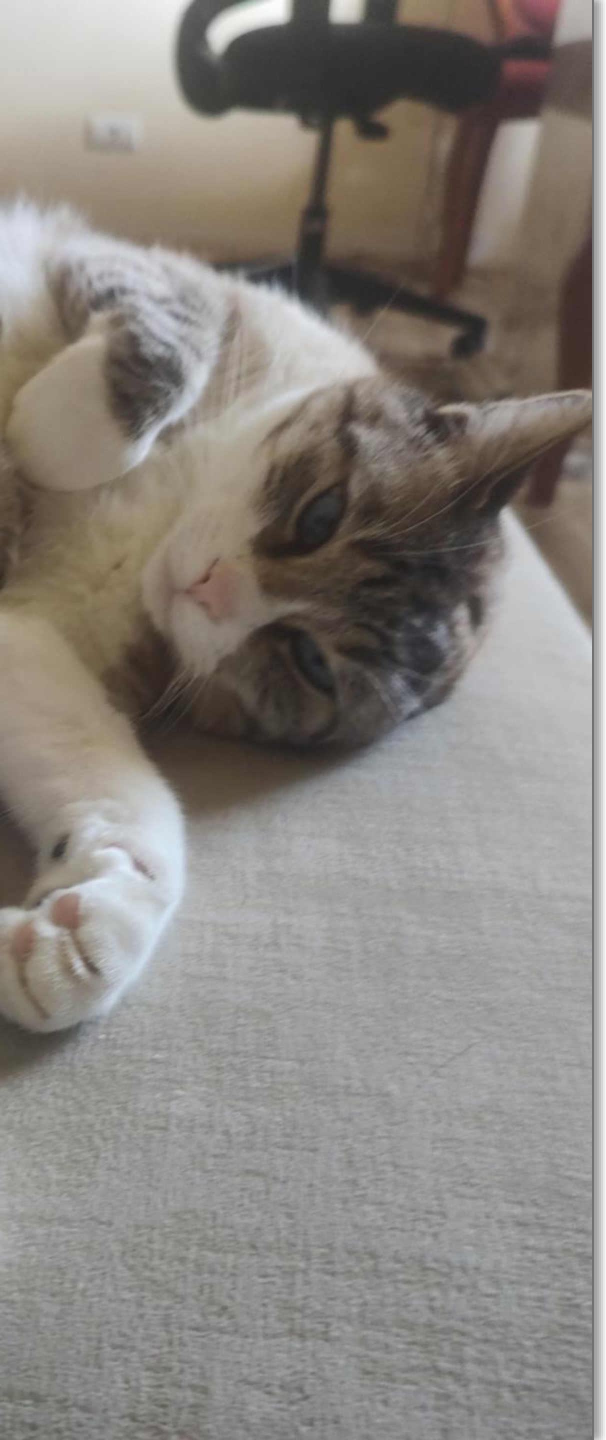


Exemplo 1: equações do movimento

Um objeto se move ao longo de uma linha reta. O deslocamento do objeto em alguns instantes é dado pelos seguintes pontos:

1. $t \ = \ 0\,s, s = 0\,m$
2. $t \ = \ 1\,s, s = 2\,m$
3. $t \ = \ 2\,s, s = 6\,m$
4. $t \ = \ 3\,s, s = 10\,m$

Determine a equação do deslocamento do objeto, depois calcule a velocidade e a aceleração em função do tempo. (Google Colab)



Derivadas Parciais

Funções de Múltiplas Variáveis

Na física, estudamos o comportamento e a interação de objetos e partículas no espaço e no tempo. Muitas vezes, esses objetos e partículas interagem de maneiras complexas, envolvendo várias propriedades e variáveis, como massa, carga, posição e velocidade. Para compreender e prever essas interações, precisamos de equações que relacionem todas essas variáveis.

- Eletromagnetismo
- Mecânica dos Fluidos
- Propagação de Ondas

Funções de Múltiplas Variáveis - Eletromagnetismo

O eletromagnetismo descreve as interações entre partículas carregadas e campos elétricos e magnéticos. As Equações de Maxwell, um conjunto de quatro equações de múltiplas variáveis, são fundamentais para entender essas interações. Por exemplo, uma das Equações de Maxwell, a lei de Gauss para o campo elétrico, relaciona o campo elétrico (E) à distribuição de carga (ρ) em uma região:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Funções de Múltiplas Variáveis - Eletromagnetismo

As equações de Maxwell envolvem campos elétricos (E) e magnéticos (H), bem como correntes elétricas (I) e densidades de carga (ρ). Estas são funções vetoriais e escalares que dependem do espaço (x, y, z) e do tempo (t). Então, temos 4 dimensões envolvidas (3 no espaço e 1 no tempo). A representação gráfica do campo elétrico ou magnético é desafiadora, pois é um campo vetorial em três dimensões. Geralmente, simplificamos a representação usando linhas de campo ou plotagens bidimensionais de componentes específicos dos campos.

Funções de Múltiplas Variáveis – Mecânica dos Fluidos

A mecânica dos fluidos é o estudo do comportamento dos líquidos e gases em movimento. As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de fluidos considerando variáveis como velocidade, densidade e pressão. Uma das equações de Navier-Stokes é:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 v + F$$

Funções de Múltiplas Variáveis – Mecânica dos Fluidos

As equações de Navier-Stokes lidam com variáveis como a velocidade do fluido (v), pressão (P) e densidade (ρ). A velocidade do fluido é uma função vetorial das coordenadas espaciais (x, y, z) e do tempo (t), enquanto a pressão e a densidade são funções escalares dessas variáveis. Aqui também, temos 4 dimensões envolvidas. A representação gráfica do escoamento de fluidos pode ser complicada, especialmente em três dimensões. Geralmente, usamos técnicas como linhas de corrente, superfícies de corrente ou plotagens bidimensionais de componentes de velocidade para simplificar a visualização.

Funções de Múltiplas Variáveis – Ondas e Propagação

O estudo de ondas e propagação envolve a análise do movimento de ondas, como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e ondas mecânicas. A equação de onda é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que relaciona a posição de uma onda (ψ) ao longo do tempo (t) e espaço (x, y, z):

$$\nabla^2\psi - \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Aqui, c é a velocidade da onda no meio em que se propaga.

Funções de Múltiplas Variáveis – Ondas e Propagação

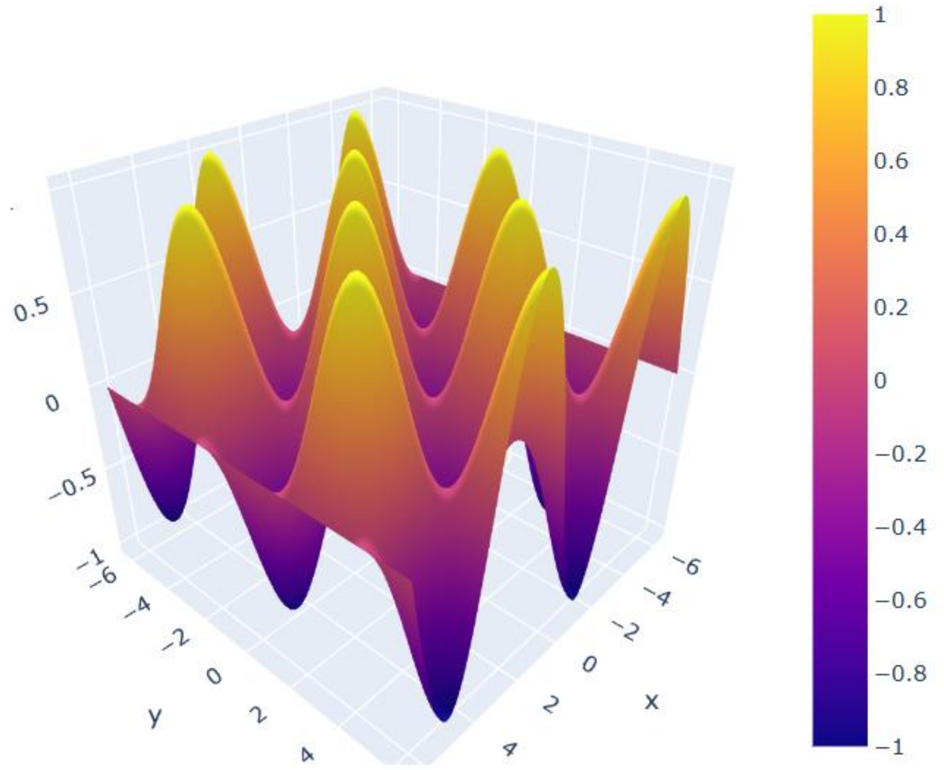
Na equação de onda, a função ψ representa a posição ou o deslocamento da onda e depende das coordenadas espaciais (x, y, z) e do tempo (t). Novamente, temos 4 dimensões envolvidas. Representar graficamente a propagação de ondas em três dimensões pode ser desafiador, principalmente quando se trata de ondas eletromagnéticas. Frequentemente, simplificamos a representação usando animações bidimensionais ou gráficos de intensidade ao longo de uma única direção espacial.

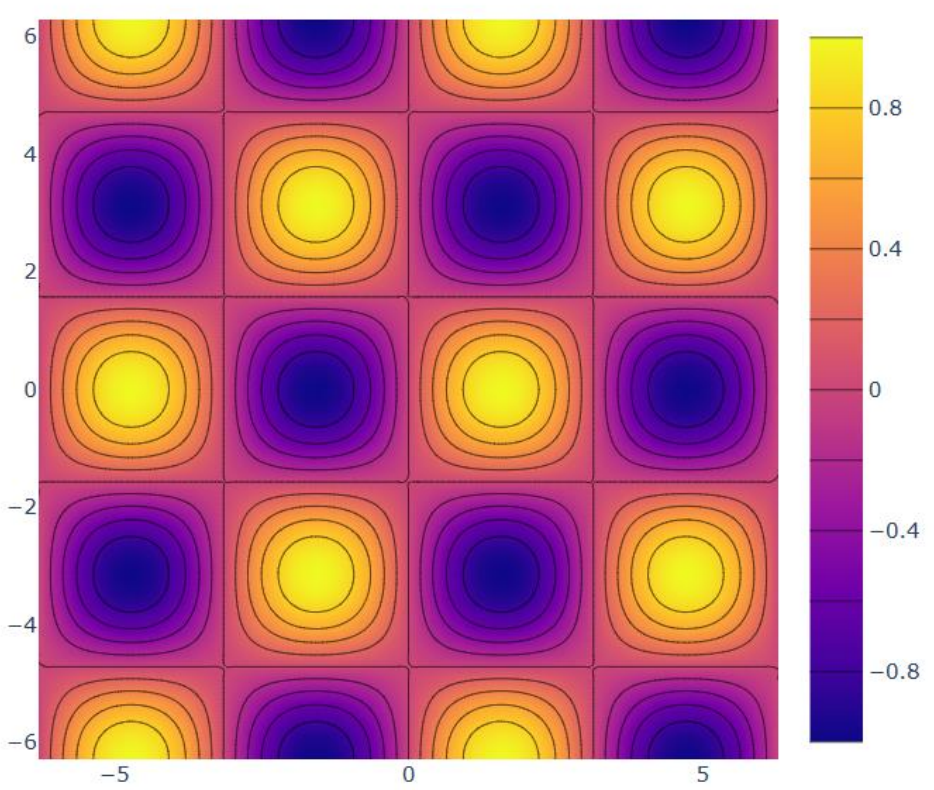
Funções de Múltiplas Variáveis

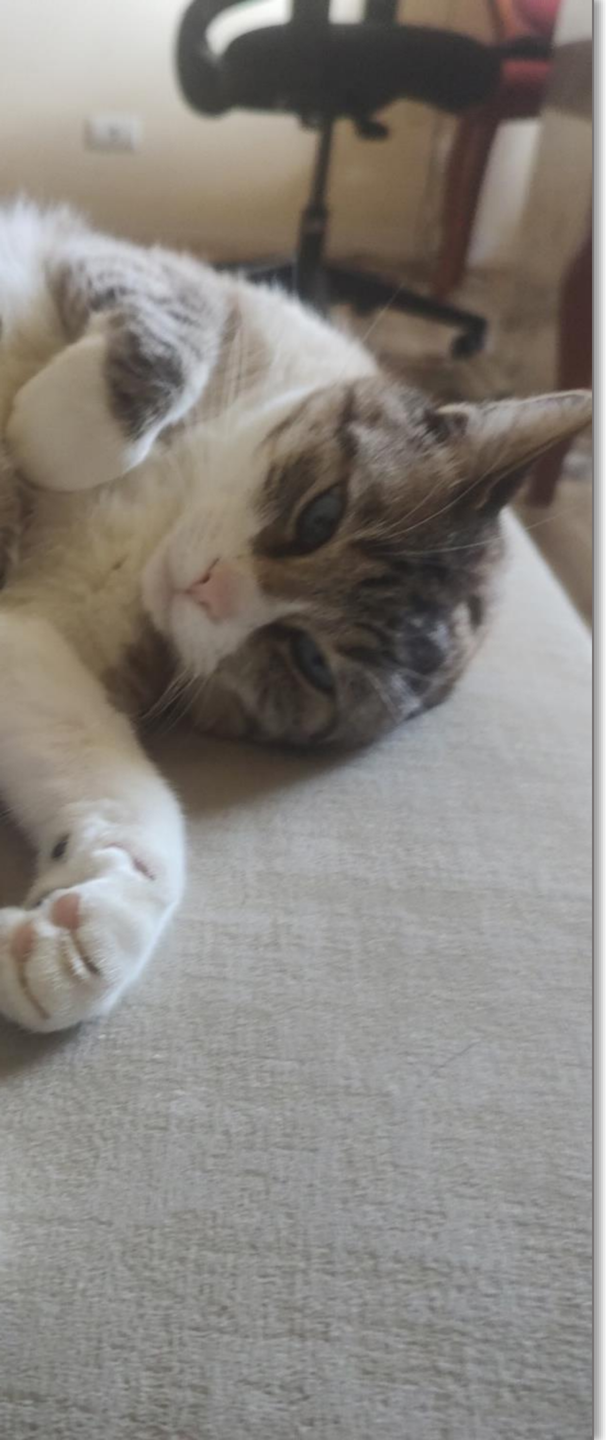
- Uma função de várias variáveis é uma função que tem mais de uma variável independente. Geralmente, denotamos uma função de duas variáveis como $f(x,y)$ e uma função de três variáveis como $g(x,y,z)$ e assim por diante.
- Essas funções são usadas para modelar fenômenos em que várias variáveis independentes influenciam um resultado.
- Observe que sempre que pensarmos em plotar uma destas funções teremos um problema complicado. No mínimo, precisaremos de uma variável a mais. Como fizemos com funções de uma variável.

Funções de Múltiplas Variáveis

$f(x, y) = sin(x) * cos(y)$



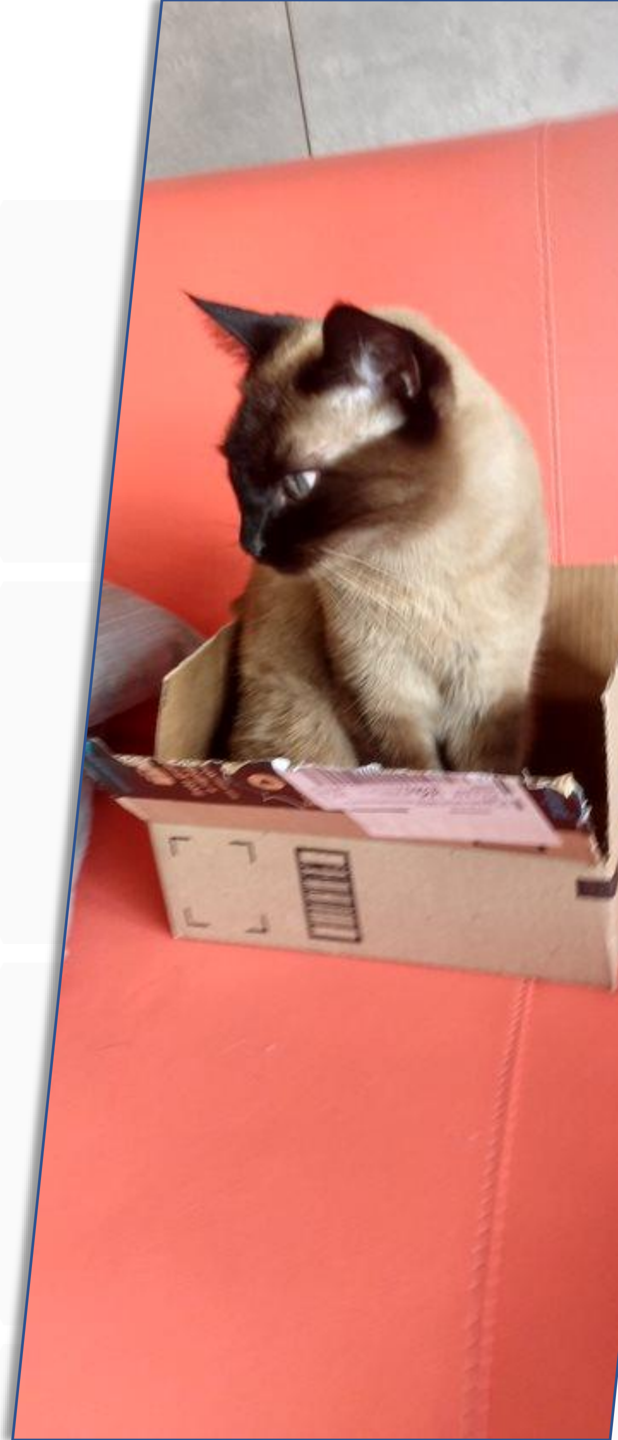




Aprendendo a Plotar em 3D

Vamos usar a biblioteca plotly. Conjunto de exemplos aqui.

Derivadas Parciais



Derivadas Parciais - Conceito

- Derivadas parciais são uma ferramenta fundamental em cálculo multivariável. Quando temos uma função que depende de várias variáveis, podemos calcular a taxa de variação da função em relação a cada uma das variáveis. ***Essas taxas de variação são chamadas de derivadas parciais.*** A derivada parcial em relação a uma variável é calculada tratando as outras variáveis como constantes. Por exemplo, se temos uma função $f(x, y)$, a derivada parcial em relação a x é representada por $\partial f(x)/\partial x$ ou $f'x$, e será calculada derivando a função em relação a x enquanto tratamos y como constante.

Derivadas Parciais - Formalismo

A definição matemática formal de derivadas parciais é baseada no conceito de limite. Dada uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis, a derivada parcial de f em relação à variável x_i (onde i é um índice entre 1 e n) é definida como:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\left(f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \right)}{h} \right]$$

Só, e somente só, esse limite existir. Neste caso, h é uma pequena quantidade pela qual x_i varia, enquanto todas as outras variáveis x_j $(j \neq i)$ são mantidas constantes.

Derivadas Parciais - Formalismo

Considerando $z = f(x, y)$ teremos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Para encontrar a derivada de z em relação a x, consideramos y constante. Da mesma forma, para encontrar a derivada em relação a y consideramos o x constante.

Derivadas Parciais – Exemplo: $Z = 3x^2y^3$

$$Z = 3x^2y^3$$

Começamos considerando y constante. Teremos:

$$Z = (3y^3)x^2$$

Derivando em relação a x teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3y^3)\frac{dx^2}{dx} = (3y^3)2x = 6xy^3$$

Agora, consideramos y constante:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2\frac{dy^3}{dy} = (3x^2)3y^2 = 9x^2y^2$$

No Google Colab.

Derivadas Parciais – Exercício

Calcule as derivadas parciais de $Z = 5x^3 - 3x^2y^2 + 7y^5$.

1.Derivada parcial em relação $a\ x\ (\partial Z/\partial x)$: Mantendo y constante, derivamos Z em relação a x:

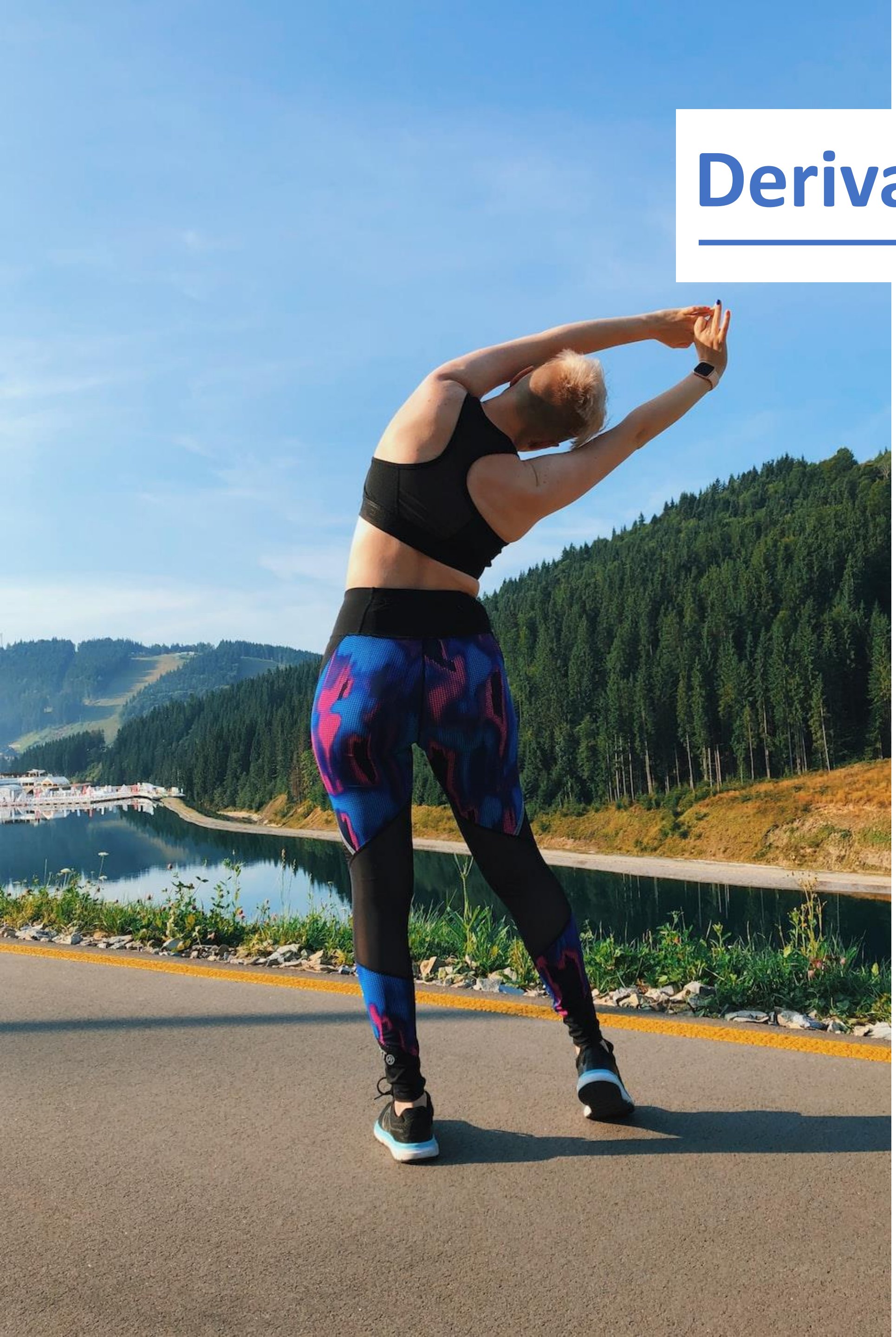
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{d(5x^3 - 3x^2y^2 + 7y^5)}{dx} \therefore \frac{\partial Z}{\partial x} = 15x^2 - 6xy^2$$

2.Derivada parcial em relação a $y\ (\partial Z/\partial y)$: Mantendo x constante, derivamos Z em relação a y

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{d(5x^3 - 3x^2y^2 + 7y^5)}{dy} \therefore \frac{\partial Z}{\partial y} = -6x^2y + 35y^4$$

Assim, as derivadas parciais de Z são:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 15x^2 - 6xy^2 \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = -6x^2y + 35y^4$$



Derivadas Parciais – Exercícios

Calcule as derivadas parciais de:

$Z = (6x + 7y)(5x + 3y)$ dica: regra da cadeia.

$Z = (x^3 + 7y^2)^4$ dica: regra da potência.

$W = \text{sen}(x) * e^y + \cos(z) * x^2$

$W = e^{-x} * \tan(y) - y * \ln(z)$

Modelagem de Fenômenos Físicos

Obrigado!

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1