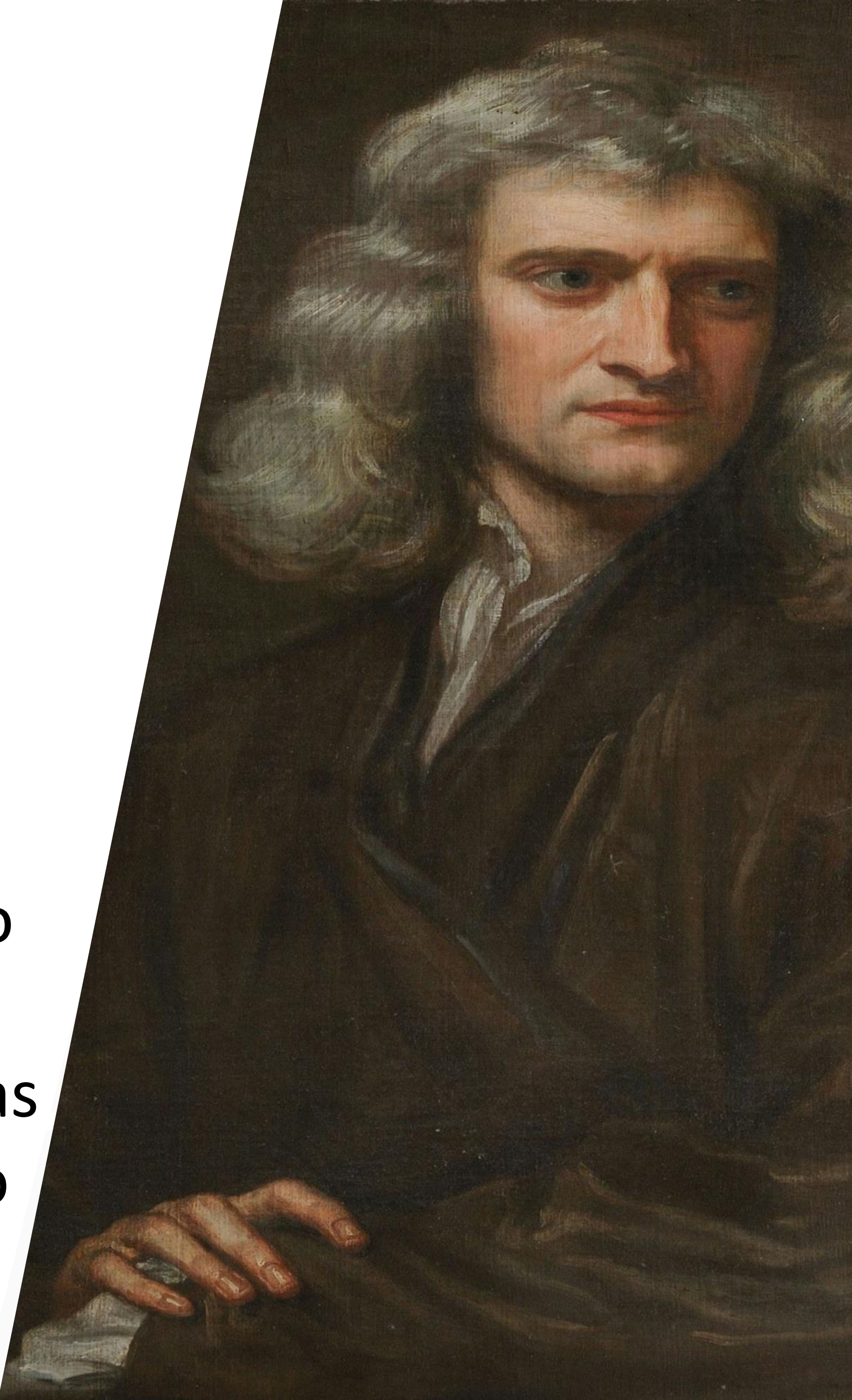
Performance em Sistemas Ciberfísicos

Aula 4 – Derivadas

Frank Coelho de Alcantara – 2023 -1

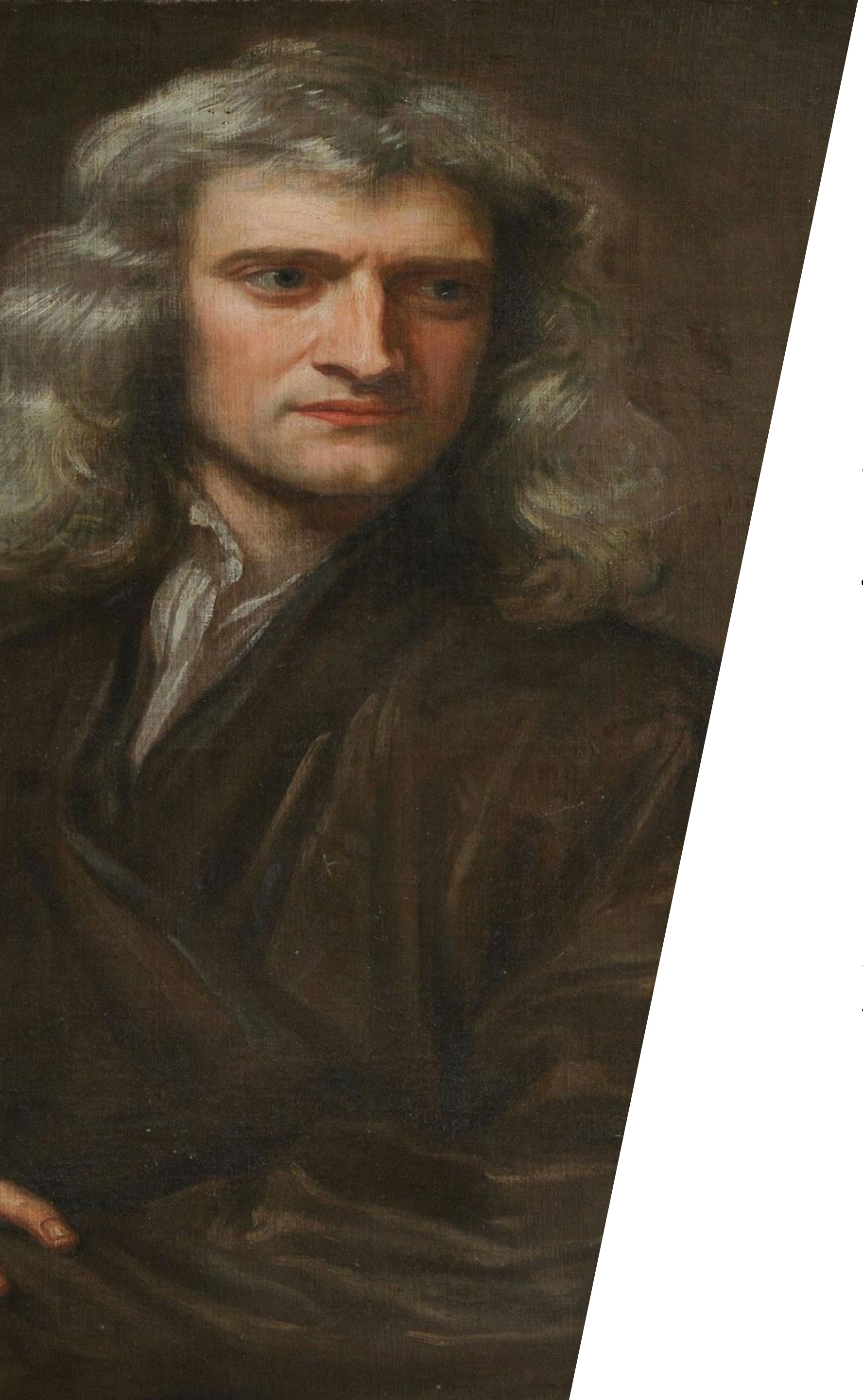
O CÁLCULO INFINITESIMAL

O Cálculo Infinitesimal desempenha um papel fundamental no mundo moderno. **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) são creditados como os fundadores do Cálculo. Desenvolveram suas teorias de forma independente no final do Século XVII.



Sir Isaac Newton

Isaac Newton (1643-1727) criou o termo “*fluxion*”, referindo-se à taxa de variação instantânea de uma quantidade em relação a outra. Essas taxas de variação eram representadas por pontos colocados sobre a letra correspondente à variável. Newton também desenvolveu notações e técnicas para trabalhar com “*fluxions*” e “*anti-fluxions*” (ou "*fluents*"). “*Fluents*” são os conceitos que definem as integrais de funções.



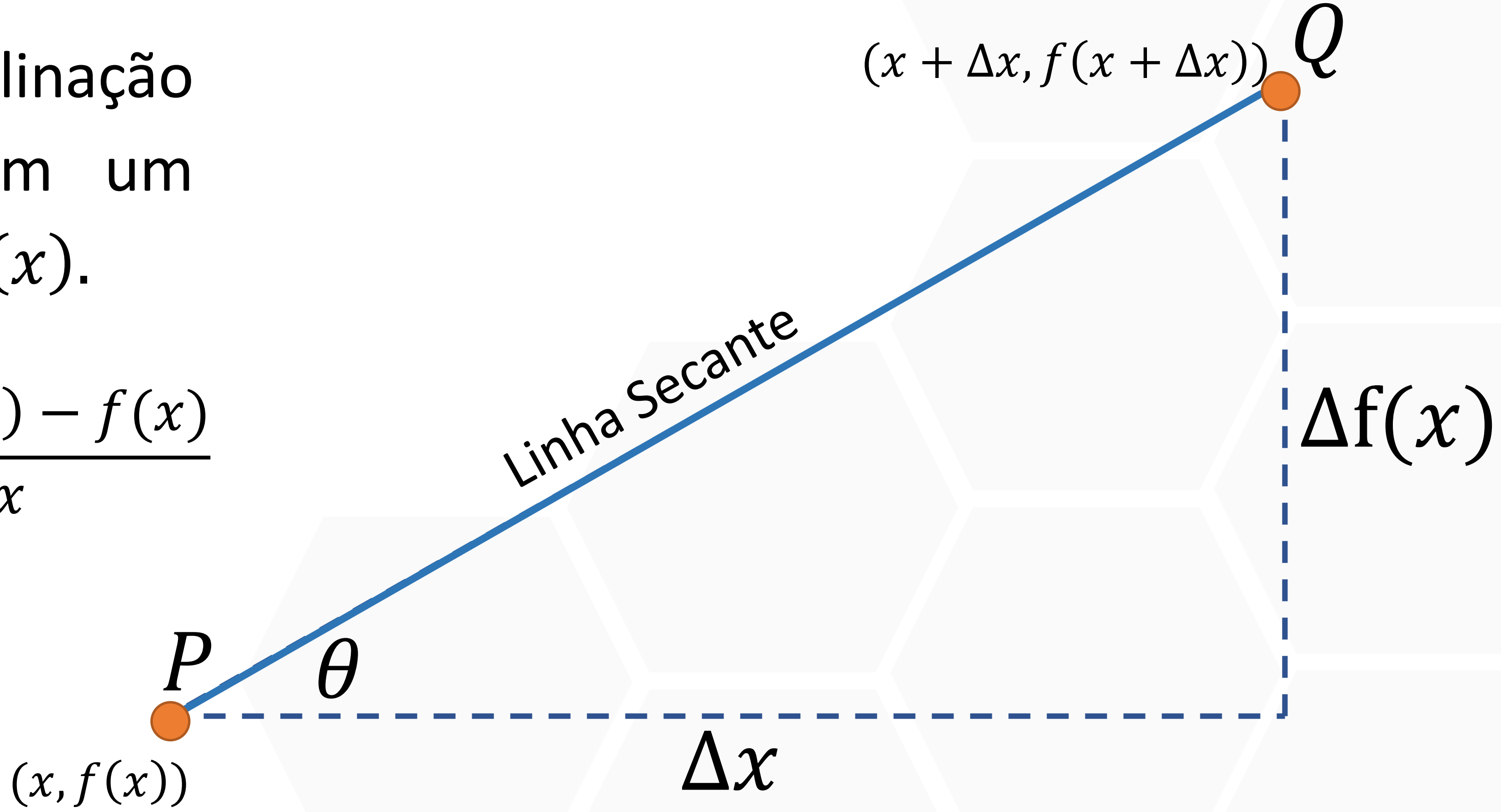
Gottfried Wilhelm Leibniz

O termo "derivada" foi introduzido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), um matemático e filósofo alemão que é creditado como um dos descobridores do cálculo integral e diferencial. Leibniz desenvolveu o cálculo de forma independente durante a segunda metade do século XVII. Introduzindo tanto a notação "dy/dx" para representar a derivada quanto o símbolo de integração.

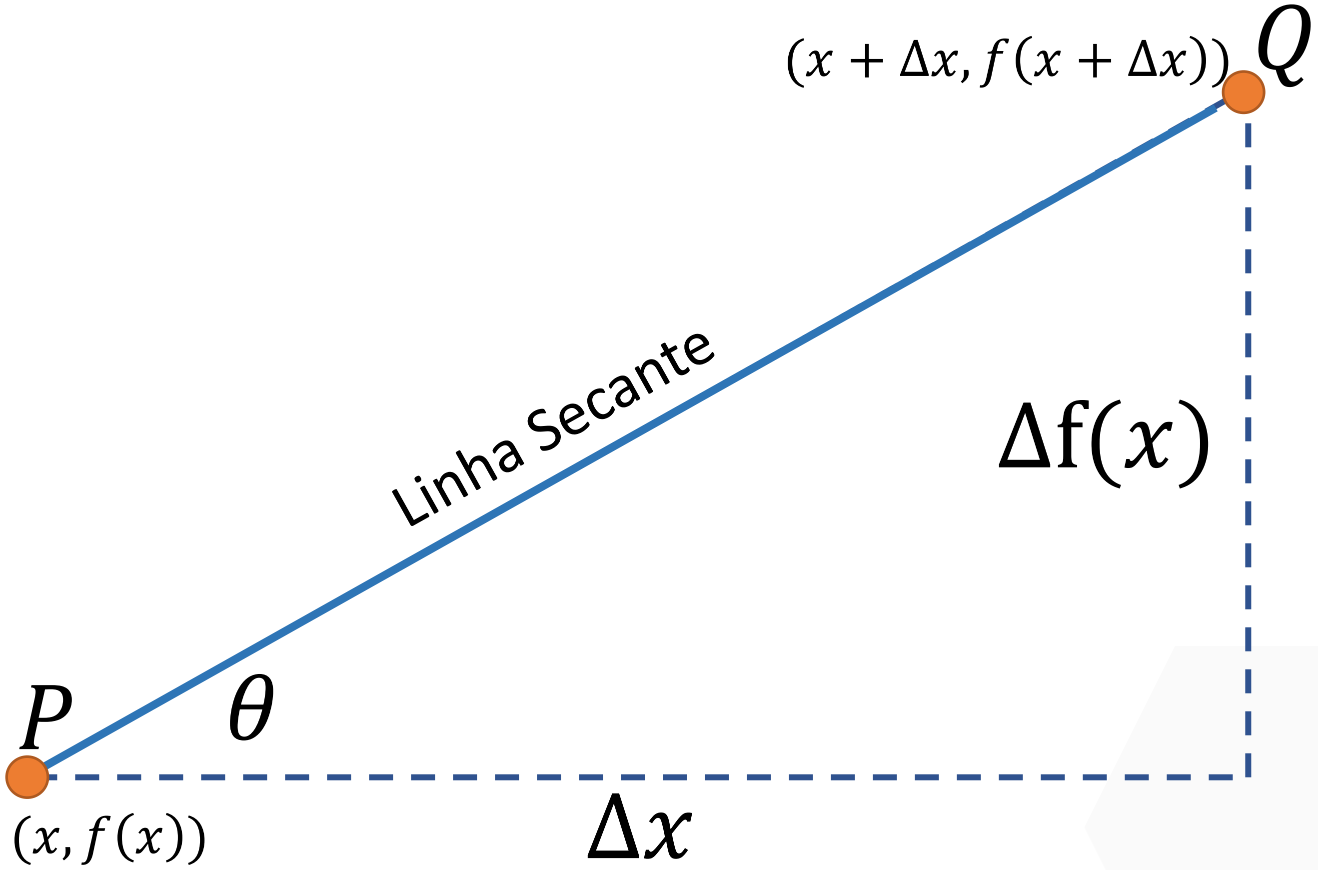
Partindo da Geometria

A derivada será a inclinação da reta tangente em um ponto do gráfico de $f(x)$.

$$\arctan\theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Partindo da Geometria



$$\arctan\theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

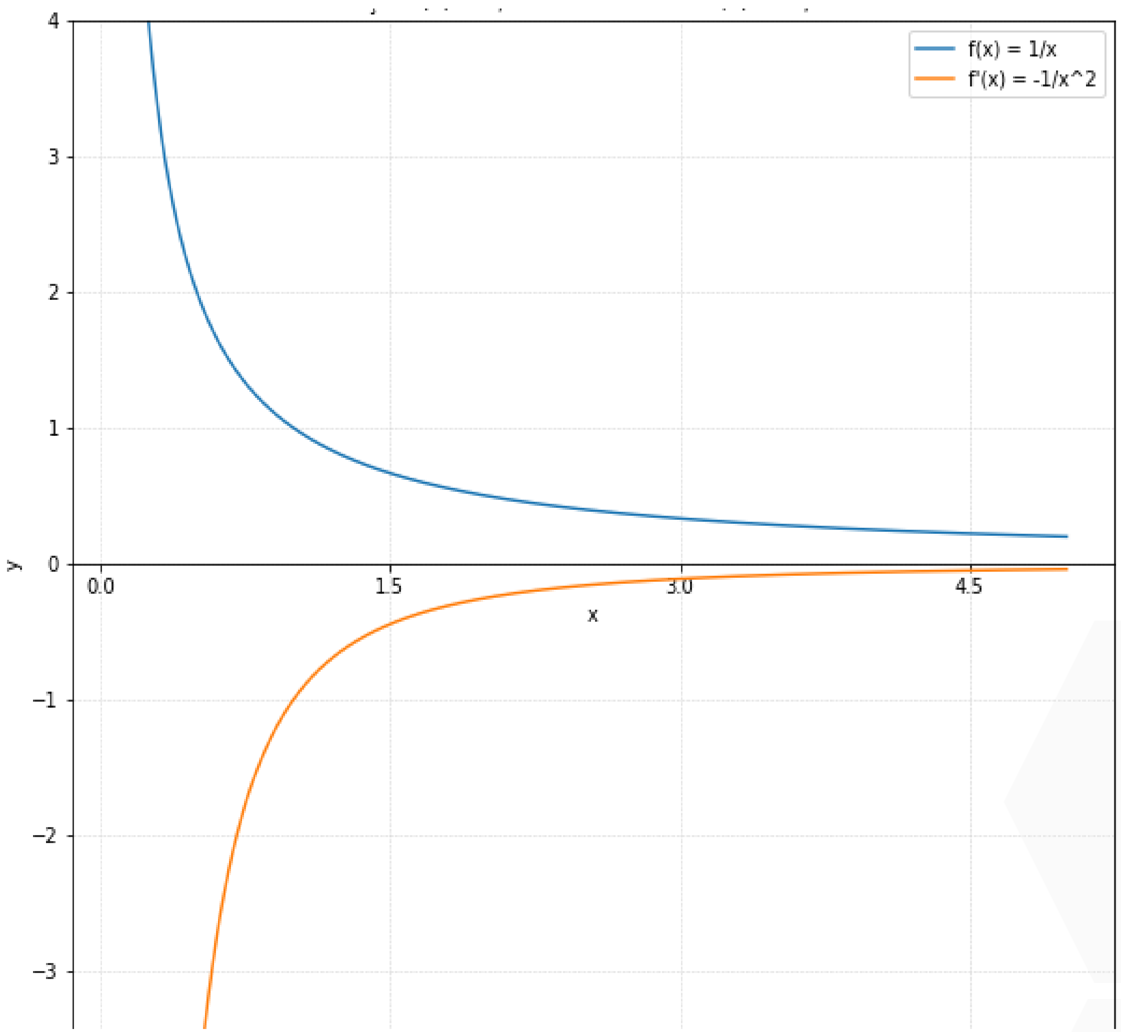
Exemplo 1 – Derivada de $f(x) = 1/x$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

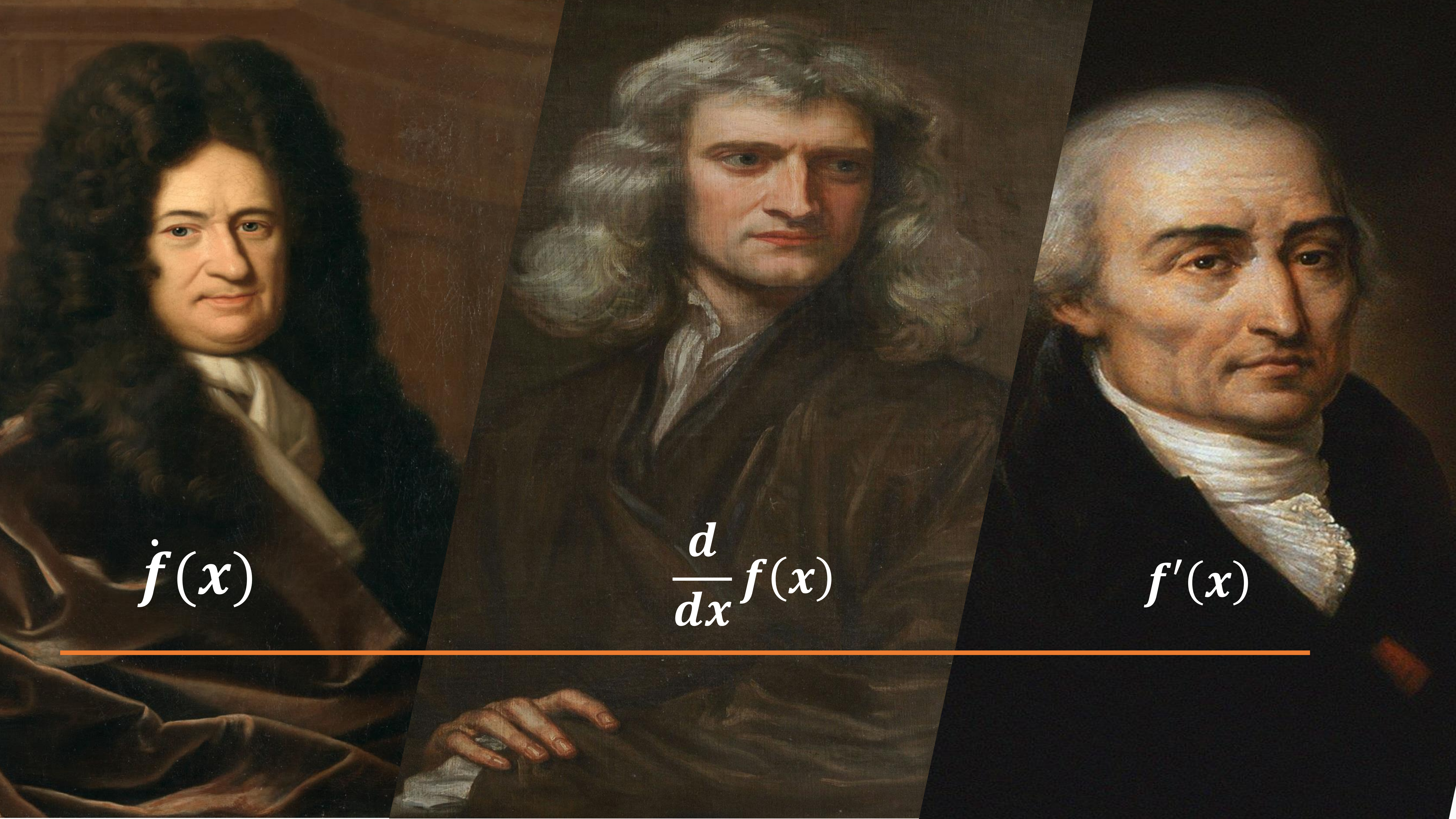
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{x - (x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}\right] = \frac{-1}{(x+\Delta x)x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}$$

Exemplo 1 – Derivada de $f(x) = 1/x$



- A derivada, ainda que tenha relação direta com a tangente, não é apenas uma linha que toca o gráfico em um ponto.
- É o limite da inclinação da linha secante entre dois pontos quando a distância entre estes dois pontos tende a zero.

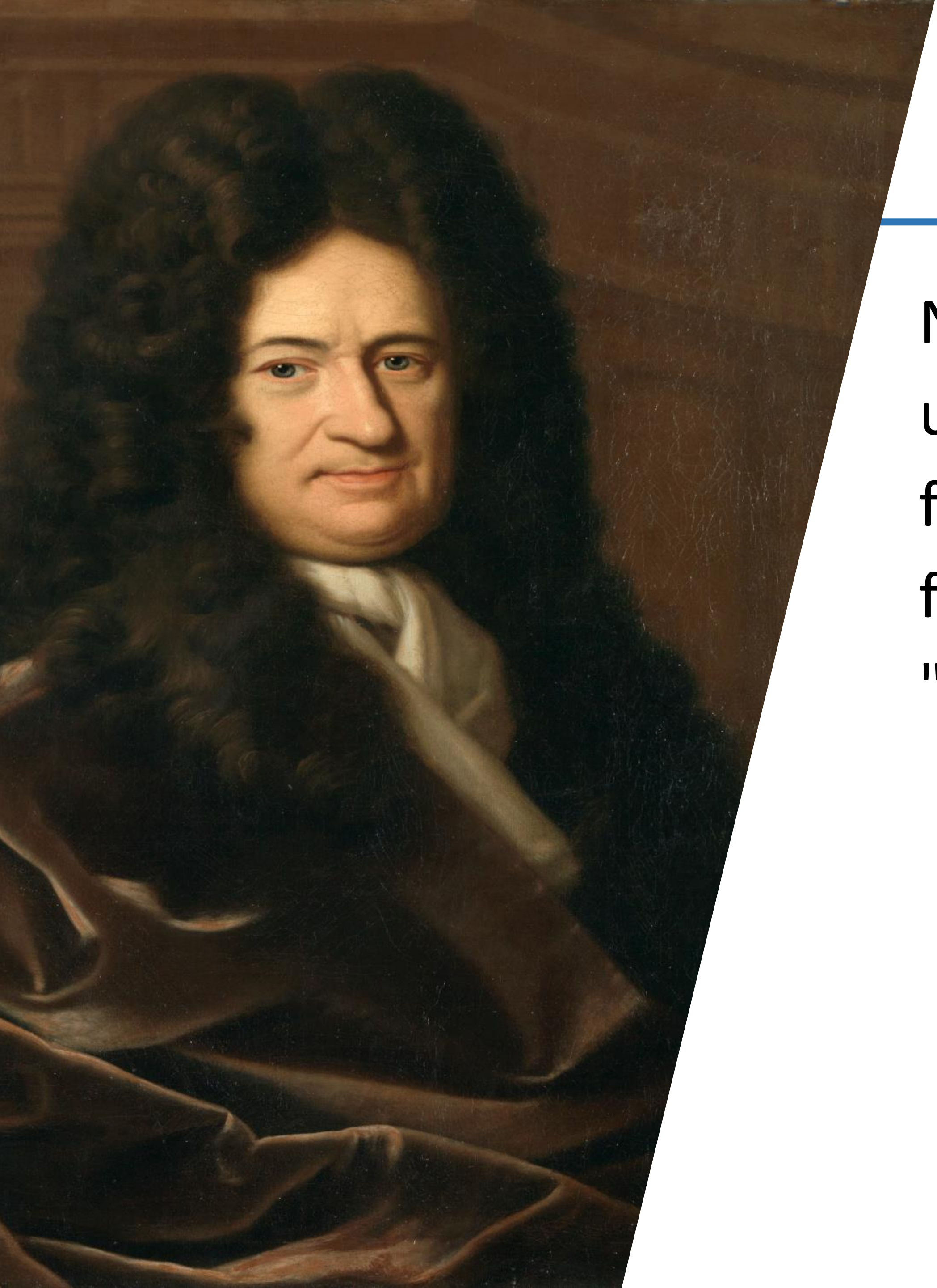

$\dot{f}(x)$
$\frac{d}{dx}f(x)$
$f'(x)$

Exemplo 2 – Derivada de $f(x) = x^n$ onde $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\frac{d}{dx}x^n = ?$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left((x + \Delta x)(x + \Delta x)(x + \Delta x) \dots\right) - x^n\right]$$



Pausa para o Binômio de Newton

Newton discutiu o binômio de Newton em uma carta a Edmond Halley em 1676. A formulação geral do binômio de Newton foi publicada em 1704 no livro "*Arithmetica Universalis*"

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{\{n-k\}}\, b^k$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Vamos ter que aplicar o Binômio de Newton

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left((x + \Delta x)(x + \Delta x)(x + \Delta x) \ldots\right) - x^n\right]$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}(\Delta x)^k$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Aplicando o Binômio de Newton

$$(x + \Delta x)^n = (x + \Delta x)(x + \Delta x)(x + \Delta x) \ldots \qquad (x \ + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^{\{n-k\}} (\Delta x)^k \qquad C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$k = 0 \therefore C(n,0)x^{n-0}(\Delta x)^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} x^n (\Delta x)^0 = x^n$$

$$k = 1 \therefore C(n,1)x^{n-1}(\Delta x)^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} x^{n-1} (\Delta x)^1 = n x^{n-1} (\Delta x)^1$$

$$k = 2 \therefore C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} x^{n-2} (\Delta x)^2$$

$$k = n \therefore C(n,n)x^{n-n}(\Delta x)^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} x^0 (\Delta x)^n = (\Delta x)^n$$

$$\boldsymbol{(x \ + \Delta x)^n = x^n + C(n,1)x^{n-1}(\Delta x) + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \ C(n,n)(\Delta x)^n}$$

Voltando ao Exemplo 2 – $\frac{d}{dx} f(x) = x^n$ onde $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left((x+\Delta x)(x+\Delta x)(x+\Delta x)\ldots\right) - x^n\right]$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}[(x^n + C(n,1)x^{n-1}(\Delta x) + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C(n,n)(\Delta x)^n) - x^n]$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}[C(n,1)x^{n-1}(\Delta x) + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C(n,n)(\Delta x)^n]$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \left[\frac{C(n,1)x^{n-1}(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2}{\Delta x} + \cdots + \frac{C(n,n)(\Delta x)^n}{\Delta x}\right]$$

Voltando ao Exemplo 2 – $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} f(x) = x^n$ onde $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \left[\frac{C(n,1)x^{n-1}(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2}{\Delta x} + \cdots + \frac{C(n,n)(\Delta x)^n}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = [C(n,1)x^{n-1} + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + C(n,n)(\Delta x)^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = [C(n,1)x^{n-1} + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + C(n,n)(\Delta x)^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = C(n,1)x^{n-1}$$

Voltando a Newton

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = C(n,1)x^{n-1}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$1! = 1$$

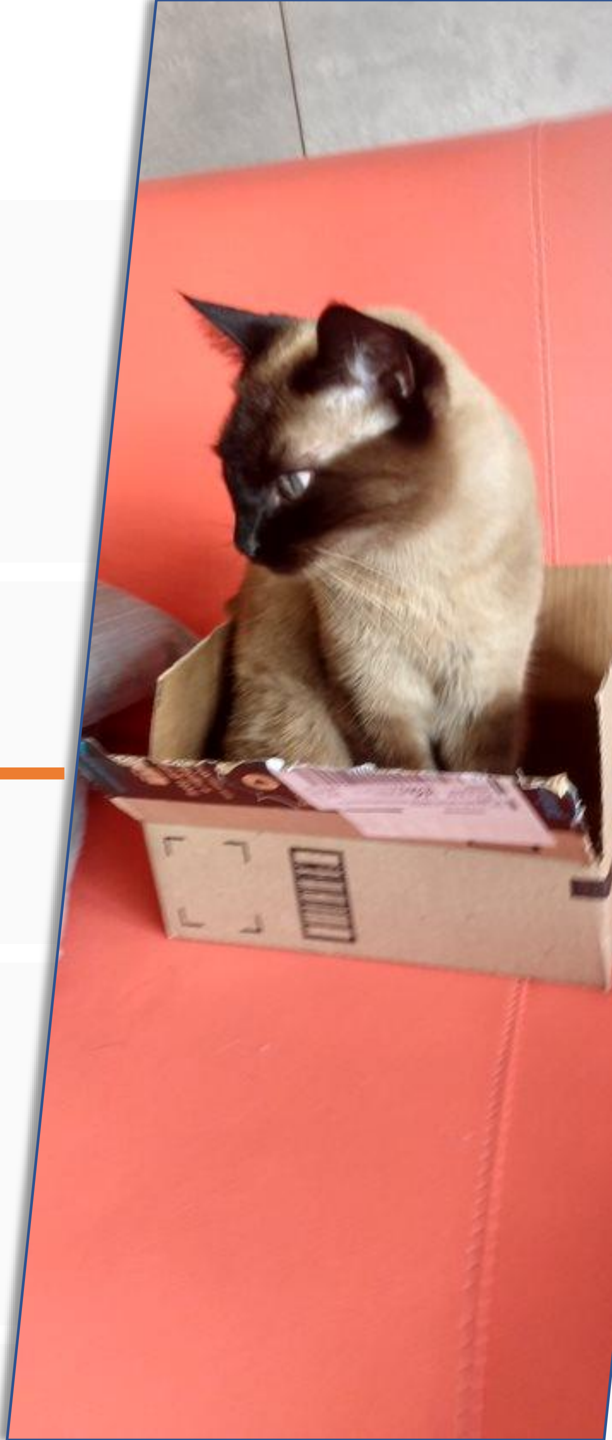
$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$$

$$C(n,1) = \frac{n!}{1!\,(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)}$$

$$C(n,1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)}{(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)} = n$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = nx^{n-1} \therefore \boldsymbol{\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}}$$

Regras de Derivação



Regra da Constante

- Se $f(x) = k \mid k \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

- Em bom português:

A derivada da constante é zero!

$$f(x) = \pi \therefore \frac{d}{dx} f(x) = 0$$

Regra da Potência

- Se $f(x) = x^n |\, n \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\text{Se } y = \sqrt{z}\ \left(\text{pode ser } y = z^{\frac{1}{2}}\right), \text{logo } \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Constante que Multiplica a Função

- Se $k \in \mathbb{R}$ se existir a derivada de $f(x)$ para todo k teremos:

$$\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

- Em bom português:

A derivada do produto da função e um escalar é o produto da derivada da função e o escalar.

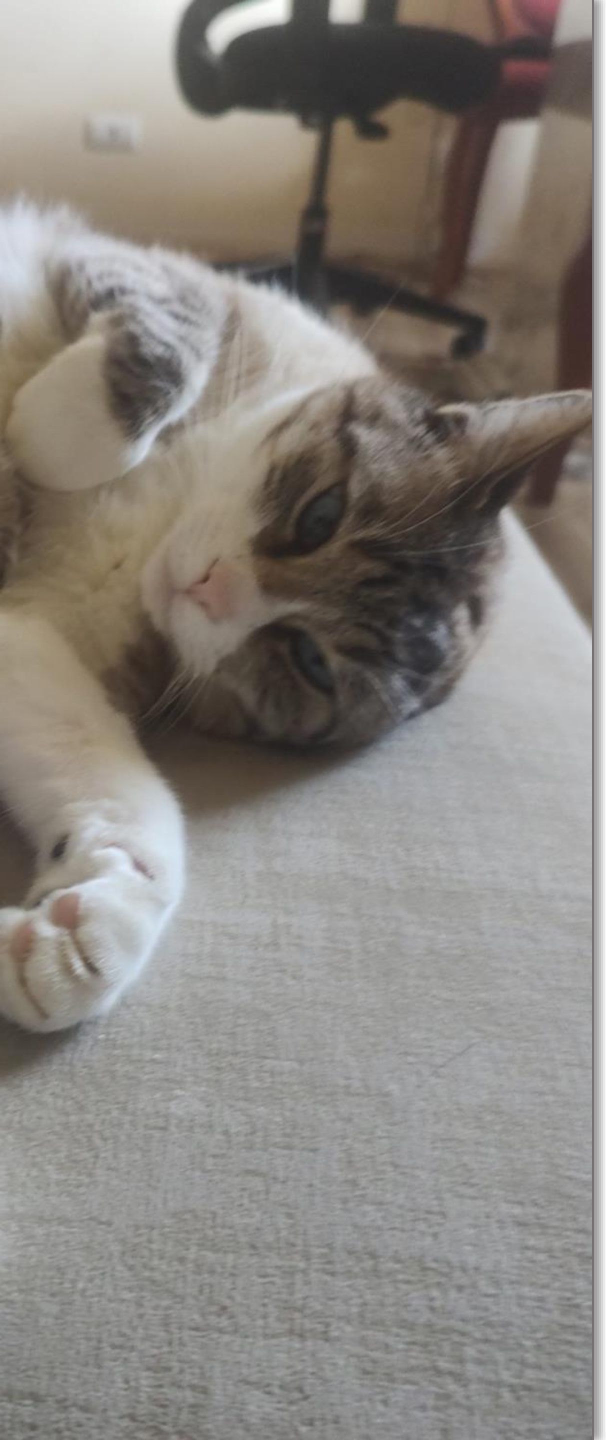
$$\text{Se } y = 10x^{\frac{3}{2}}, \text{então } \frac{d}{dx}y = 10\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = 10\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = 15x^{\frac{1}{2}}$$

Função Dividida por Constante

- Se $k \in \ \mathbb{R}$ se existir a derivada de $f(x)$ para todo k teremos:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{k} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{k}$$

$$\text{Se } y = \frac{x^2}{100}, \text{ então } \frac{d}{dx}\frac{x_2}{100} = \frac{\frac{d}{dx}x^2}{100} = \frac{2x}{100}$$



Exercício 1 – Técnicas de Derivação

Exercício 1 – Técnicas de Derivação

Usando o Google Colab, Latex, e a biblioteca Sympy encontre a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = 2^3$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = 10x^{\frac{3}{2}}$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

Regra da Soma ou Diferença

- Se $f(x) = u(x) + v(x)$ e existirem $\frac{d}{dx}u(x)$ e $\frac{d}{dx}v(x)$ então:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x) + v(x)\right) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x)$$

- Em bom português:

A derivada da soma é a soma das derivadas!

$$f(x) = (4x^2 - 3x)^2$$

$$f(x) = 16x^4 - 24x^3 + 9x^2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(16x^4 - 24x^3 + 9x^2) = 64x^3 - 72x^2 + 18x$$

Regra dos Produtos

- Se $f(x) = u(x) \times v(x)$ e existirem $\frac{d}{dx}u(x)$ e $\frac{d}{dx}v(x)$ então:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\big(u(x) \times v(x)\big) = u(x) \times \frac{d}{dx}v(x) + v(x) \times \frac{d}{dx}u(x)$$

- Em bom português:

A derivada do produto entre u e v é udv mais vdu.

Regra dos Produtos - Exemplo

Para $f(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ Se considerarmos $u(x) = (x^2 + 3x)$ e $v(x) = (4x + 5)$, teremos:

$$f(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5) = u(x)v(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = (x^2 + 3x)\frac{d}{dx}(4x + 5) + (4x + 5)\frac{d}{dx}(x^2 + 3x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = (x^2 + 3x)(4) + (4x + 5)(2x + 3)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 4x^2 + 12x\ + 8x^2 + 12x + 10x + 15$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 12x^2 + 34x + 15$$

Regra dos Quocientes

- Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ e existirem $\frac{d}{dx}u(x)$ e $\frac{d}{dx}v(x)$ então:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x)/v(x)\right) = \frac{v(x) \times \frac{d}{dx}u(x) - u(x) \times \frac{d}{dx}v(x)}{(v(x)^2)}$$

- Em bom português:

A derivada da divisão de u por v é a divisão de vdu-udv por v ao quadrado.

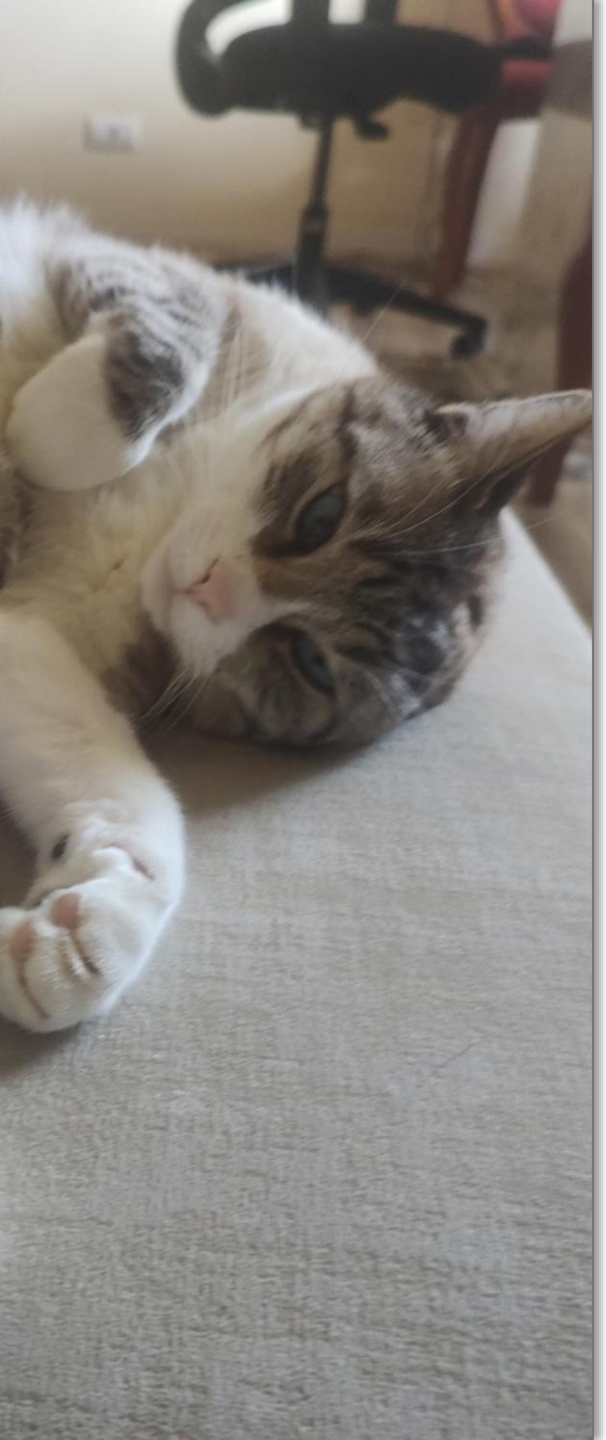
Regra dos Quocientes - Exemplo

Encontre a derivada de $f(x)$ se $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x^2-1)\,\frac{d}{dx}\,(x^2+1) - (x^2+1)\,\frac{d}{dx}\,(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(2x) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$



Exercício 2 – Técnicas de Derivação

Exercício 2 – Técnicas de Derivação

Usando o Google Colab, Latex, e a biblioteca Sympy encontre a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = 2x^5 + 6x^3$$

$$f(x) = (x^3 + 2x)(x - 5)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

Pausa para Lembrar de Funções Compostas

- Se $f(x) = -6x + 9$ e $g(x) = \frac{x}{5} + 7$ então $f\left(g(x)\right)$ será dado por:

$$f\left(g(x)\right) = -6\left(\frac{x}{5} + 7\right) + 9 = -\frac{6x}{5} - 42 + 9 = -\frac{6x}{5} - 33$$

$$f\left(g(x)\right) = -\frac{6x}{5} - 33$$

- Por outro lado, $g\left(f(x)\right)$ será dado por:

$$g\left(f(x)\right) = \frac{-6x + 9}{5} + 7 = -\frac{6x}{5} + \frac{9}{5} + 7 = 44 - \frac{6x}{5}$$

Regra da Cadeia

- Se $f(x)$, y, é uma função de $g(x)$, u, podemos ter a função $h(x) = f\big(g(x)\big)$. Neste caso, $\frac{d}{dx}h(x)$ será dado por:

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{du}f(x) \times \frac{d}{dx}f(gx)$$

Regra da Cadeia - Exemplo

- Encontre a derivada de $h(x) = \sqrt[4]{(3x-2)^3}$.
- Neste caso, é melhor tentar colocar esta função em forma composta:

$$h(x) = \sqrt[4]{(3x-2)^3} = (3x-2)^{\frac{3}{4}}$$

Se $f(x) = u^{\frac{3}{4}}$ então $g(x) = u = (3x-2)$ logo $h(x) = f\big(g(x)\big)$. Ou seja:

$$f(x) = u^{\frac{3}{4}} \therefore \frac{d}{du} f(u) = \frac{3}{4} u^{-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(3x-2) = 3$$

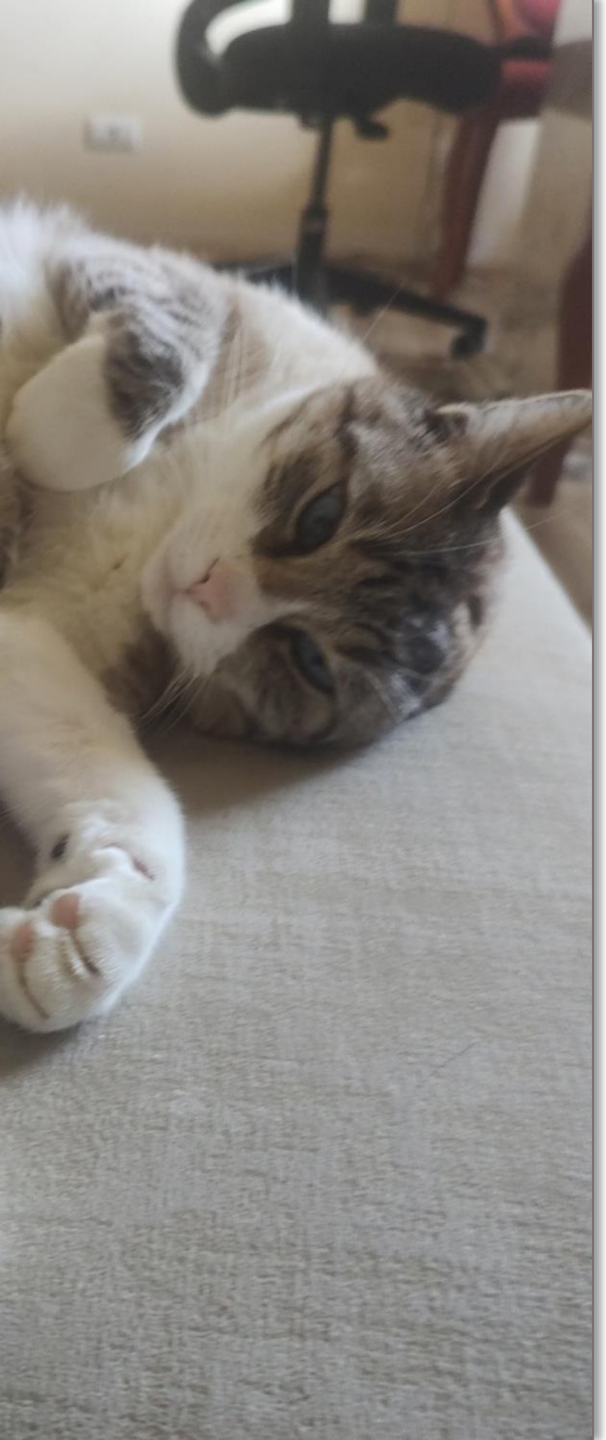
Regra da Cadeia - Exemplo

$$f(x) = u^{\frac{3}{4}} \therefore \frac{d}{du} f(u) = \frac{3}{4} u^{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(3x - 2) = 3$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{du} f(x) \times \frac{d}{dx} f(gx)$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{4}{3} u^{-\frac{1}{4}} \times 3 = 4u^{-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = 4u^{-\frac{1}{4}} = 4(3x - 2)^{-\frac{1}{4}}$$



Exercício 3 – Técnicas de Derivação

Exercício 3 – Técnicas de Derivação

Usando o Google Colab, Latex, e a biblioteca Sympy encontre a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$f(z) = \sqrt{5z + 8}$$

$$f(t) = (4t^2 - 3t + 2)^{-2}$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

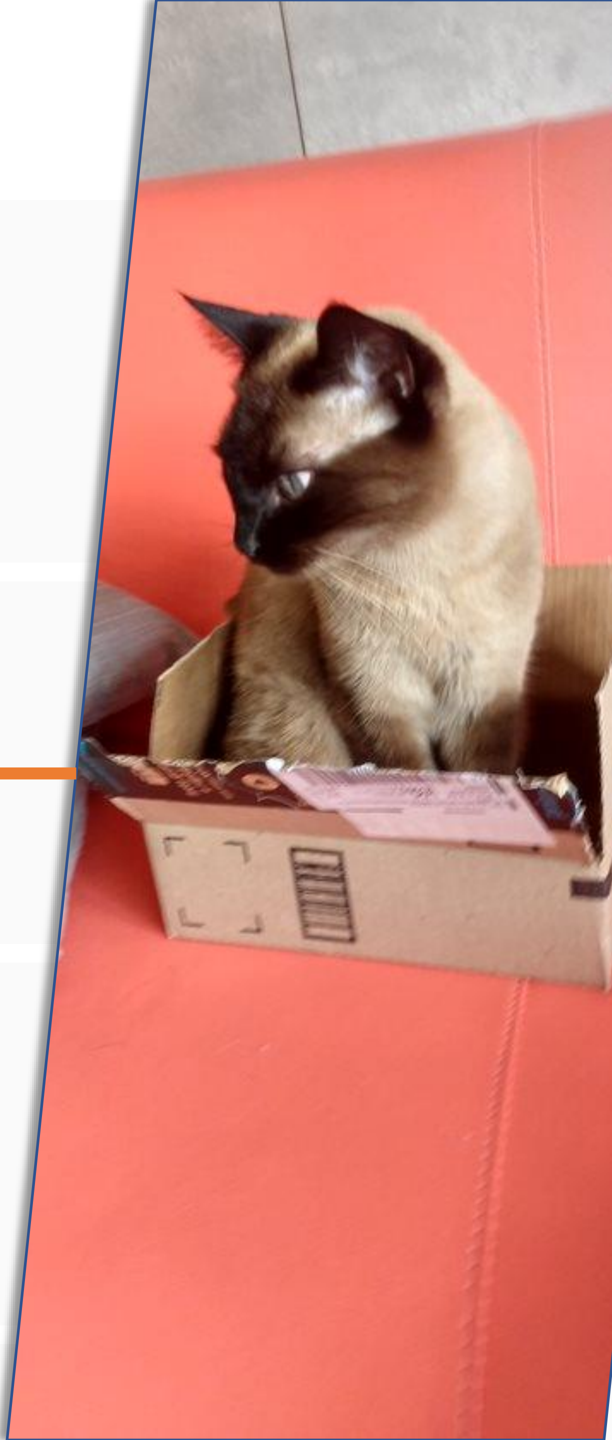
Função	Derivada
$f(x) = e^x$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$f(x) = a^x$	$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$
$f(x) = a^{g(x)}$	$\frac{d}{dx}a^{g(x)} = (\ln a)a^{g(x)} \times \frac{d}{dx}g(x)$
$f(x) = e^{g(x)}$	$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)} \times \frac{d}{dx}g(x)$
$f(x) = \ln x$	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
$f(x) = \ln g(x)$	$\frac{d}{dx}\ln g(x) = \frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)}$

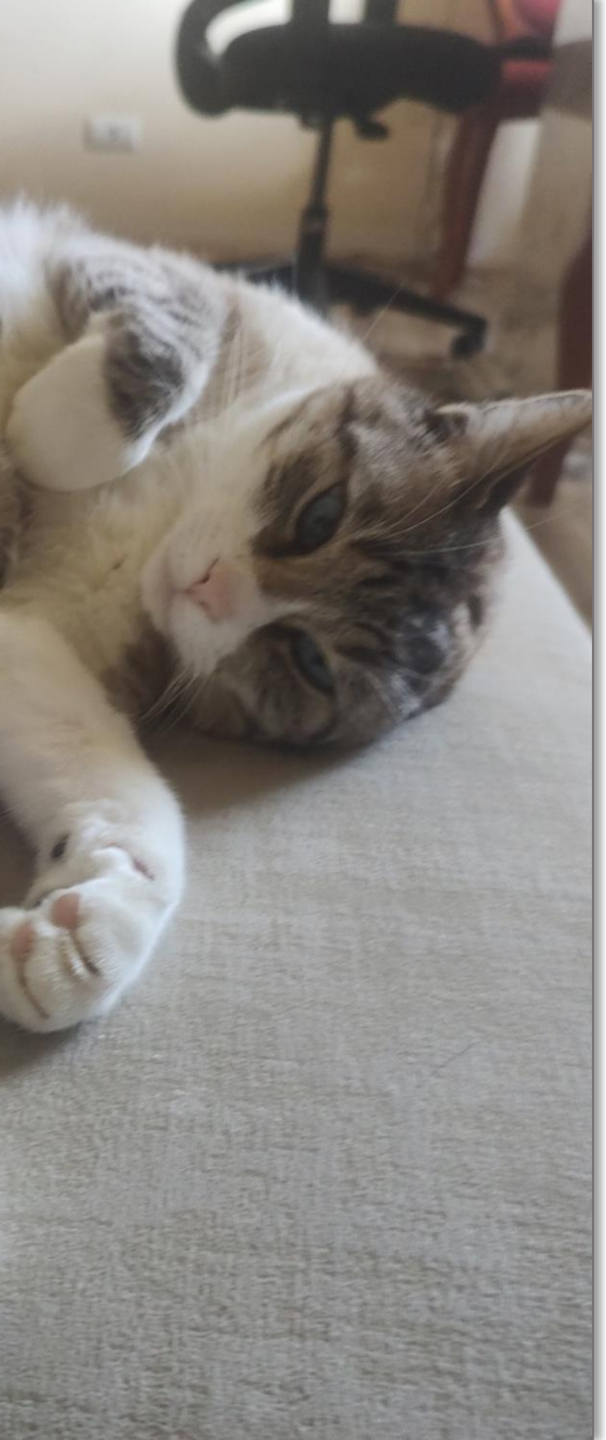
Funções Trigonométricas

Função	Derivada
$f(x) = sen(x)$	$\frac{d}{dx} sen(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx} \cos(x) = -sen(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
$f(x) = cotan(x)$	$\frac{d}{dx} cotan(x) = -cosec^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = cosec(x)$	$\frac{d}{dx} cosec(x) = -cosec(x)cotan(x)$

Exemplos de Derivação

Regra da Cadeia
Funções Exponenciais e Logarítmicas
Funções Trigonométricas





Análise Marginal

Análise de suporte a tomada de decisão em função de variações nos custos de produção, demanda, propensão a demanda e receita.

Análise Marginal – Receita Marginal

1. Receita Marginal (*Marginal Revenue*, em inglês): mudança na receita total quando a empresa vende uma unidade adicional do produto. Em outras palavras, é a receita adicional gerada pela venda de uma unidade adicional de um bem ou serviço.

Análise Marginal – Custo Marginal

2. Custo Marginal (*Marginal Cost*): o custo adicional incorrido quando se produz uma unidade adicional de um bem ou serviço. É uma medida do custo adicional de produção para uma empresa, que ajuda a determinar o nível ótimo de produção.

Análise Marginal – Produto Marginal

3. Produto Marginal (*Marginal Product*): mudança na produção total resultante de uma mudança em uma unidade de um fator de produção (como trabalho ou capital). É a quantidade adicional de produto que pode ser obtida com a adição de uma unidade adicional de um fator de produção, mantendo todos os outros fatores constantes.

Análise Marginal – Propensão Marginal ao Consumo

4. Propensão Marginal a Consumir (*Marginal Propensity to Consume*): proporção da mudança no consumo em relação à mudança na renda disponível. Essa medida indica como as mudanças na renda afetam os hábitos de consumo dos indivíduos e, por extensão, a demanda agregada na economia.

Análise Marginal - Exemplo

Temos uma empresa que fabrica e vende dispositivos eletrônicos. A função de custo total (C) dessa empresa é dada pela seguinte equação:

$$C(q) = 1000 + 20q + 0.5q^2$$

onde, q representa a quantidade de dispositivos eletrônicos produzidos, 1000 é o custo fixo de produção, $20q$ representa um componente do custo variável, e $0.5q^2$é o componente do custo variável que aumenta muito com a quantidade produzida. Encontre o custo marginal desta empresa.

Análise Marginal - Exemplo

O Custo Marginal é, na verdade, a taxa de variação do custo total de um produto, a medida que a produção aumenta. No exemplo, a equação:

$$C(q) = 1000 + 20q + 0.5q^2$$

Mostra que existem dois tipos diferentes de variação de custo. Para encontrar o Custo Marginal teremos que achar a derivada da função de custo.

Análise Marginal - Exemplo

$$C(q) = 1000 + 20q + 0.5q^2$$

$$\frac{d}{dq}C(q) = \frac{d}{dq}(1000 + 20q + 0.5q^2)$$

$$\frac{d}{dq}C(q) = \frac{d}{dq}1000 + \frac{d}{dq}20q + \frac{d}{dq}0.5q^2$$

$$\frac{d}{dq}C(q) = 0 + 20 + 1q = q + 20$$

Análise Marginal - Exemplo

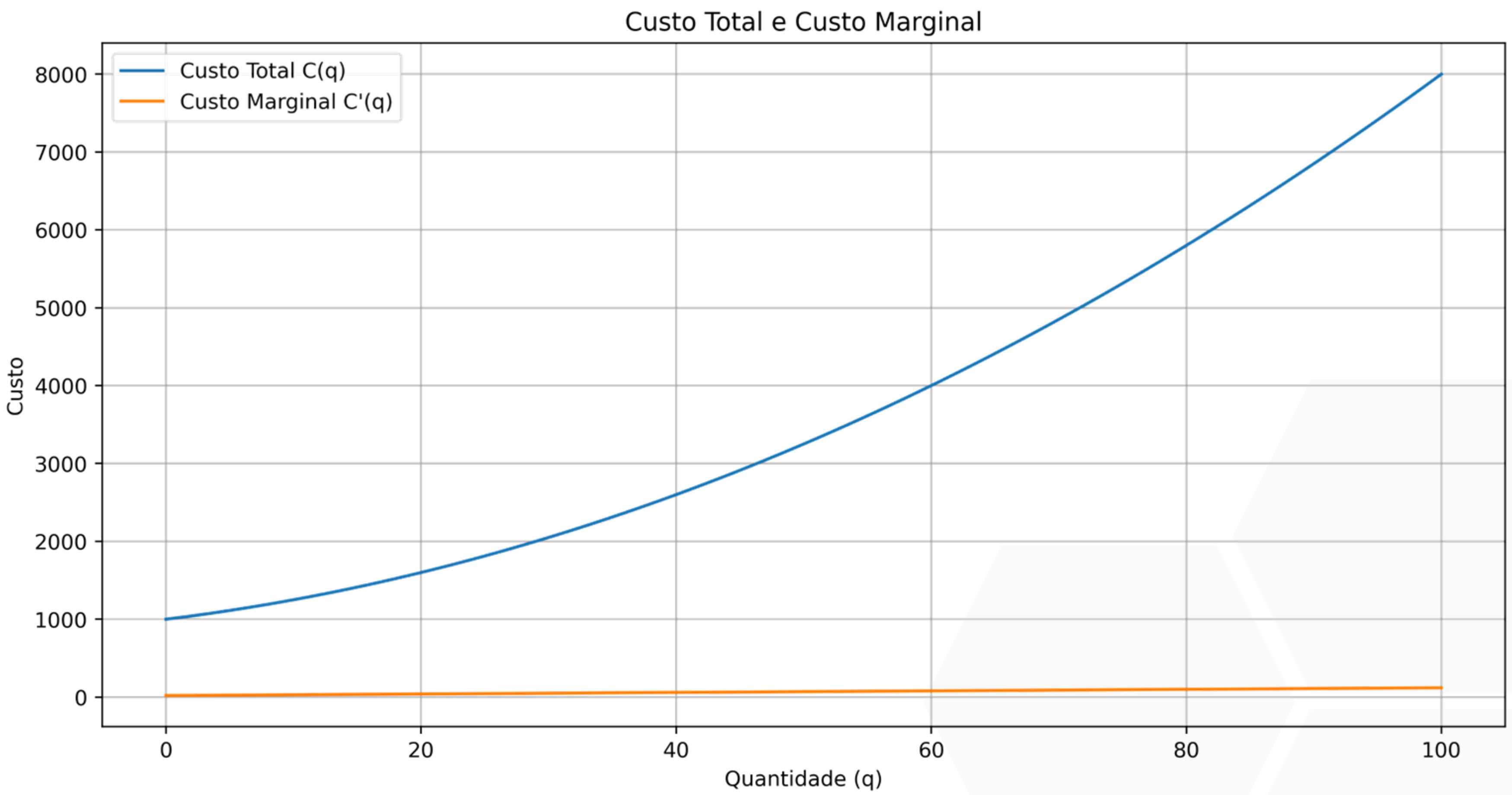
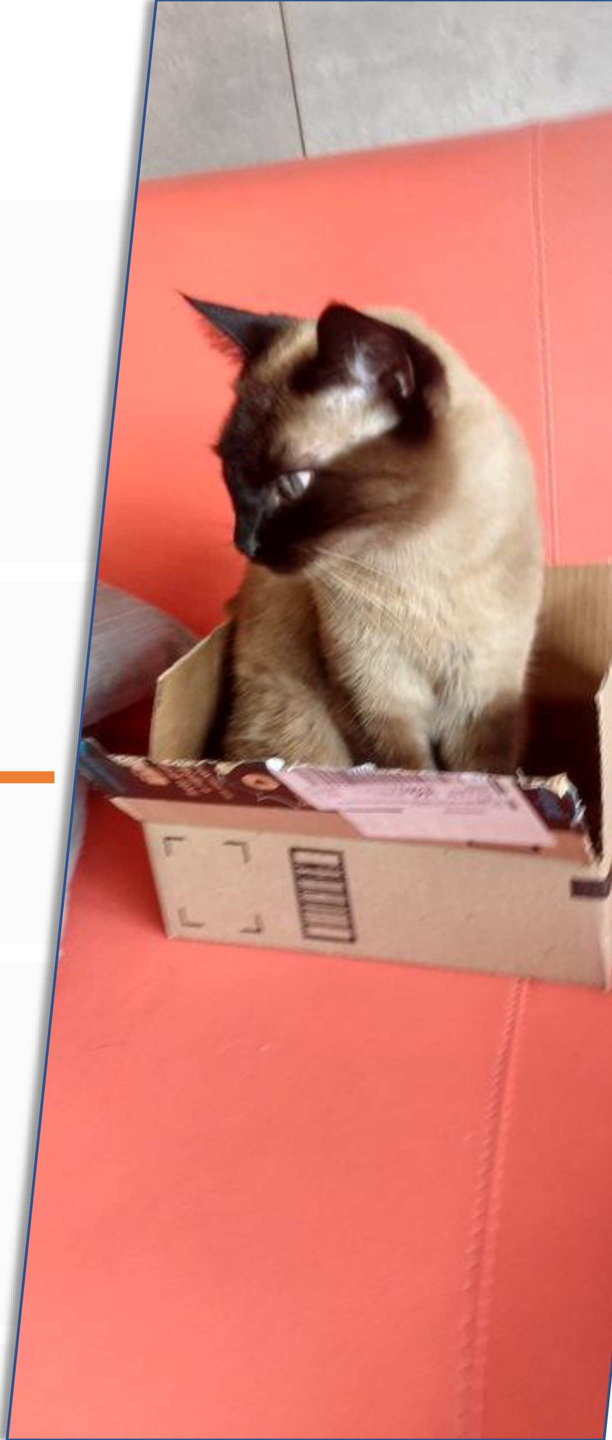


Gráfico disponível Aqui!

Exercício – Aplicações de Derivadas 1

Aplicação ao Custo marginal

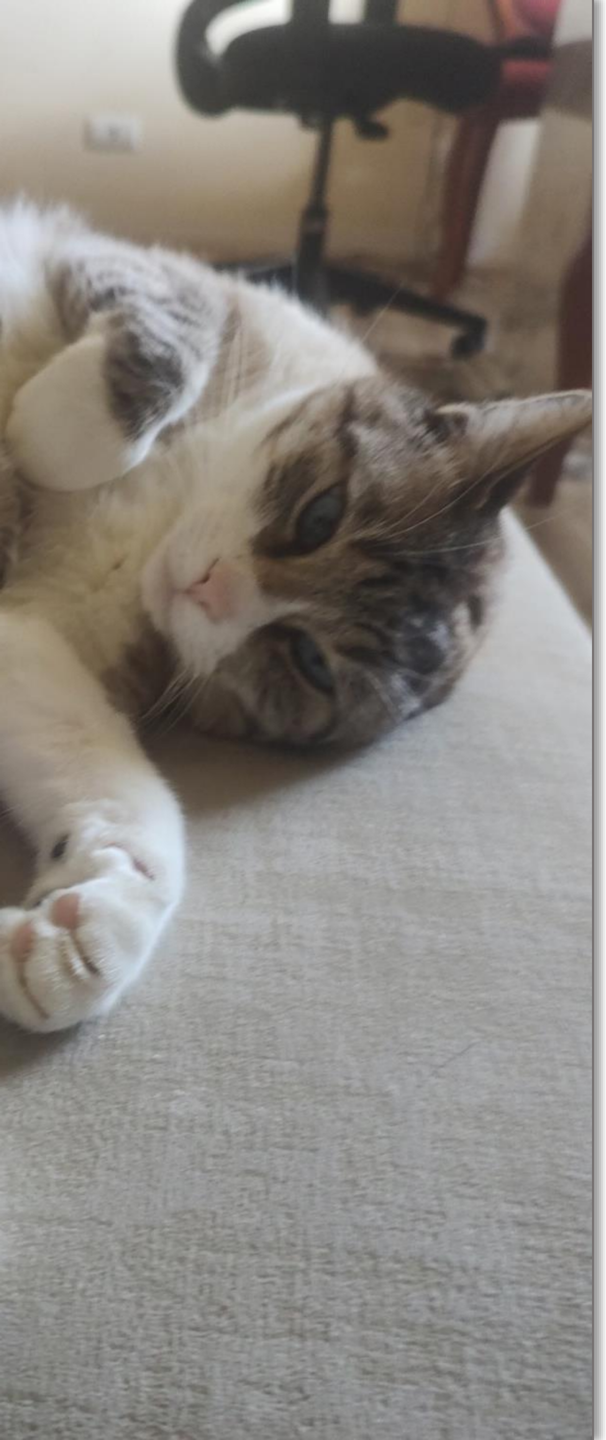


Exercício – Cálculo do Custo Marginal

- Se o custo médio de um fabricante qualquer pode ser determinado segundo a equação a seguir, determine a equação do Custo Marginal, calcule o Custo Marginal para $q = 50$ e trace o gráfico da função de custo médio e da função de Custo Marginal.

$$AC = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

Estes exercícios não têm peso na média da disciplina, contudo são indispensáveis para aprovação.
Este conhecimento será útil nas atividade avaliativas.



Modelagem de Fenômenos físicos - Derivadas

Obrigado!

Frank Coelho de Alcantara – 2023-1