

# Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018



oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo

o  
o  
oo

# Présentation du projet

## ■ **Modélisation et détection de délit d'initié :**

Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?

## ■ Objectifs :

- Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
- Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

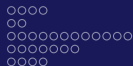


oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo

o  
o  
oo

# Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.



# Plan de la présentation

## 1 Modèle diffusif - cas particulier

- Description du modèle
- Stratégie optimale
- Résolution du problème d'optimisation
- Analyse du gain de l'initié
- Simulations

## 2 Modèle avec sauts

- Description du modèle
- Raisonnement
- Résolution du problème d'optimisation

## 3 Conclusion

## 4 Retour d'expérience



oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo



## Modèle diffusif - cas particulier

# Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$ , dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- $W$  est un mouvement brownien à 2 dimensions dont  $\mathcal{F}$  est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que  $b, r$  et  $\sigma$  sont constants.

# Marché

Les prix peuvent donc s'exprimer :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 &= S_0^1 e^{(b_1 - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|^2)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{(b_2 - \frac{1}{2} \|\sigma_2\|^2)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

# Initié

- On suppose qu'à  $t = 0$ , l'initié dispose d'une information sur le futur,  $L := \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$ , dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc  $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$ .
- Il dispose d'un capital  $X_0$  à  $t = 0$ , consomme à une vitesse  $c$ , et il place la quantité  $\theta^i$  sur l'actif  $i$ .
- $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$  : la somme investie sur le  $i$ -ième l'actif,  $i = \{1, 2\}$ .



# Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps  $t$  s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinçant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant  $R_t = (S_t^0)^{-1}$  le facteur d'actualisation, on obtient :

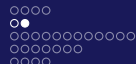
$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

# Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J: \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) := \mathbb{E} \left[ \int_0^A \log(c_t) dt + \log \left( \underbrace{X_A^{\pi, c}}_{\text{Richesse au temps } A} \right) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$



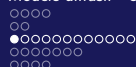
# Stratégie optimale

■ où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ } \mathcal{Y} - \text{prévisible,} \\ c > 0 \text{ } \mathcal{Y} - \text{adapté,} \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \text{ et } \sigma^* \pi \in L^2[0; T] \text{ } \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi, c} \geq 0 \text{ } dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{array} \right. \right\}$$

■  $A < T$  : *Temps final*.

Peut-on caractériser  $\mathcal{A}$  sous une forme exploitable ?



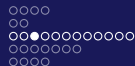
# Raisonnement

- La filtration de  $W$  empêche le changement de probabilité pour se ramener à une mesure risque-neutre.
- On va donc :
  - construire une probabilité  $\mathbb{Q}$  pour laquelle  $W$  est un  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.
  - construisons un nouveau mouvement brownien  $B$  sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$  par la méthode de grossissement de filtration.
  - construire un mouvement brownien  $\tilde{B}$  sur  $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ , avec  $\mathbb{Q}_1$  probabilité risque-neutre sur  $\mathcal{Y}$ .



# Changement de probabilités

**Proposition :** Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{Y}_A$ , telle que pour  $t \leq A$ ,  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma(L)$  sont  $\mathbb{Q}$ -indépendantes.  
En outre,  $(W_t, t \leq A)$  est un  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.



# Grossissement de filtration

**Proposition :** Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de  $L$  sachant  $\mathcal{F}_t$  est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle  $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$  qui est une  $\mathcal{F}$ -martingale et se représente par  $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$

```

○○○
○○
○○●○○○○○○○○
○○○○○○
○○○○
○○○

```

```

○
○
○
○○

```

# Grossissement de filtration

- On a  $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_t^2)$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + ((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(\|\sigma_1\|^2 - \|\sigma_2\|^2))T}_{=: \beta} + \underbrace{(\sigma_1 - \sigma_2, W(T))}_{=: \gamma}.$$

- La loi conditionnelle de  $L$  sachant  $F_t$  suit donc une loi gaussienne  $\mathcal{N}(\beta + (\gamma, W(t)), \|\gamma\|^2(T-t))$

- Donc  $p(t, x) = \frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))^2}{\|\gamma\|^2(T-t)}}}_{=: f(t, W(t))}$

# Grossissement de filtration

- On a montré que  $p(t, x) =$

$$p(0, x) + \int_0^t \left( \underbrace{\frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^3 \sqrt{2\pi} (T - t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) \gamma}_{:= \alpha(s, x)} dW(s) \right)$$





# Grossissement de filtration

**Proposition :** Si  $M$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale locale continue égale à  $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$ , alors le crochet  $d \langle M, P \rangle_t$  est égal à  $d \langle \alpha, \beta \rangle_t dt$  et le processus  $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{\langle \alpha(\cdot, x), \beta \rangle_u |_{x=L}}{p(u, L)} du$  est une  $\mathcal{Y}$ -martingale locale continue.

- En corollaire, le processus vectoriel

$\left( B_t = W_t - \int_0^t \frac{\alpha(u, L)}{p(u, L)} du, t \in [0, T[ \right)$  est un mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ .



# Grossissement de filtration

On a donc construit un mouvement brownien  $B$  sur l'espace probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ , qui est l'espace de probabilité de l'initié

$$B_t = W_t - \underbrace{\int_0^t \frac{(\gamma, W(T) - W(u)) \gamma}{\|\gamma\|^2 (T - u)} du}_{=: I(u, L)}.$$

# Changement de probabilité

- La forme de  $l_t := l(t, L)$  ne permet le changement de probabilité que sur  $[0, A]$ ,  $A < T$  en non sur  $[0, T]$ .
- On introduit donc  $\xi_t = -l_t - \eta_t$  où  $\eta_t = (\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t \mathbf{1})$ .



# Changement de probabilité

**Proposition :** Posons  $M_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi_s\|^2 ds}$  pour  $t \in [0, A]$ ,  $A < T$ . Alors  $M$  est une  $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$ -martingale uniformément intégrable et, sous  $\mathbb{Q}_1 = M.\mathbb{P}$ , le processus

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un  $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -mouvement brownien et les prix actualisés sont des  $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -martingales locales.



# Caractérisation de $\mathcal{A}$

- Pour caractériser  $\mathcal{A}$ , on introduit d'abord la *stratégie de consommation-placement*  $(\pi, c)$   $\mathcal{Y}$ -admissible qui rassure que la richesse finale  $X^{\pi, c}$  pour la stratégie est toujours à valeurs positives ou nulles. .
- Par propositions, on obtient

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[ X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}.$$



# Résolution du problème d'optimisation

Notre problème d'optimisation est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi, c}) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[ X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0$$



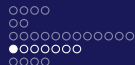
# Résolution du problème d'optimisation

Les solutions du problème sont

$$\begin{cases} R_t c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta_s, dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$



# Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}} \\ &= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s\|^2 ds} \end{aligned}$$





## Forme explicite du gain

Donc

$$d \log (Z(t)) = \underbrace{(I_s, dW_s)}_{= \frac{dp(t,L)}{p(t,L)}} - \frac{1}{2} \|I_s\|^2 ds = d \log (p(t, L))$$

Donc  $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$  est constant :

$$Z(t) = \frac{Z(0)}{p(0, L)} p(t, L)$$

Interprétation : pour tout  $t$ , le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable  $L$  sachant  $\mathcal{F}_t$ , prise en  $x = L$ .



# Forme explicite du gain

On obtient donc :

$$Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T}}$$

En remplaçant  $(\gamma, W(T) - W(t))^2$  par son espérance  $\|\gamma\|^2(T-t)$ ,

$$Z(t) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$

 raisonnement heuristique,  
n'est pas une estimation de  $\mathbb{E}[Z(t)]$



# Analyse du gain

Cela fournit un minorant (via  $e^x \geq 1 + x$ ) :

$$Z(t) \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \left( 1 + \underbrace{\left( \frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T} \right)}_{\mathbb{E}[\cdot]=0} \right)$$

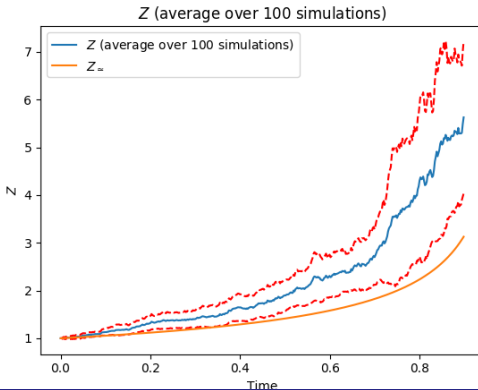
Donc

$$\mathbb{E}[Z(t)] \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \xrightarrow[t \rightarrow T]{} +\infty$$



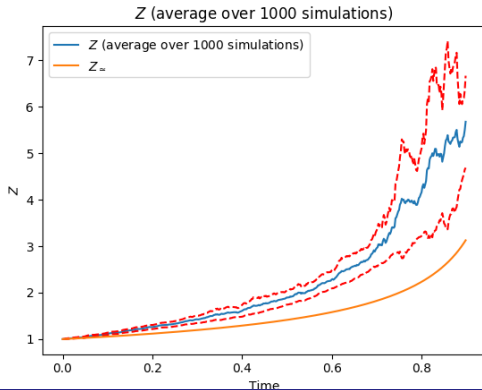
# Visualisation

Moyenne de 100 simulations de  $Z$  (*simulations\_averages.py*) :



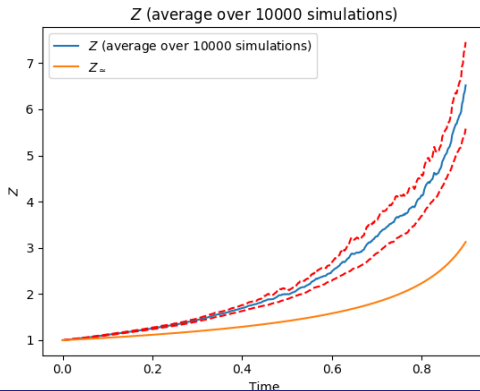
# Visualisation

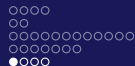
Moyenne de 1000 simulations de  $Z$  (*simulations\_averages.py*) :



# Visualisation

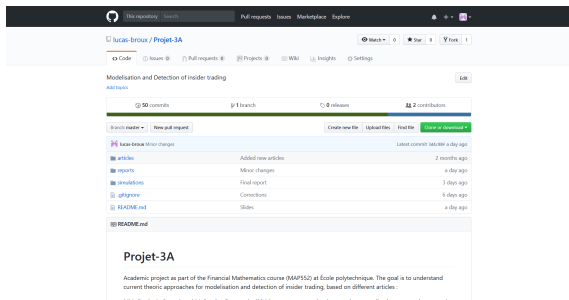
Moyenne de 10000 simulations de  $Z$  (*simulations\_averages.py*) :





# Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : <https://github.com/lucas-broux/Projet-3A>).





# Simulations





# Simulations



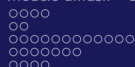
# Simulations



oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo



## Modèle avec sauts

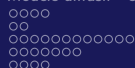


# Marché

On considère  $d$  actions risquées sur le marché sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$ . Les prix des actions, dirigés par un mouvement brownien  $W$  de dimension  $m$  et un processus de Poisson  $N$  de dimension  $n$ , qui produit des sauts, ont pour équation :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)^*_j(s) \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, d, m + n = d$$



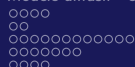
# Raisonnement

- On adapte les informations et le comportement de l'initié décrits dans le marché diffusif.
- L'initié cherche à optimiser la fonction

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi, c}) \middle| \mathcal{Y}_0 \right]$$

dans l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.

- Les méthodes dans le marché diffusif s'appliquent pour ce marché aussi pour faire grossir la filtration et se ramener à une mesure risque-neutre sur  $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ .



# Résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation

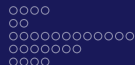
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi, c}) \middle| \mathcal{Y}_0 \right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[ X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \middle| \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0$$

a pour solutions :

$$\text{pour } t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ \pi_t^* &= (\sigma_t^*)^{-1} \frac{Y(t)}{Y(t-1)} \hat{X}_t / t \end{cases}$$



# Résolution du problème d'optimisation

- avec  $Y(t) = Y_0(t)/Z(t)$ , la relation liant la stratégie optimale de l'initié ( $Y(t)$ ) avec celle du non initié ( $Y_0(t)$ )
- $Z$  est la densité conditionnelle de  $L$  sachant  $\mathcal{F}_t$ , prise en  $x = L$ ,
- $Y_0 = \varepsilon \left( \int_0^\cdot (- (\eta_W(s), dW_s) + (-\eta_M(s) - I_n, dM_s)) \right)$ , où
  - $\eta_W(t) := m$  premières lignes de  $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$ .
  - $\eta_M(t)$  est un processus de dimension  $n$ , dont les composants sont supposés positifs, tel que  $q_t \cdot \kappa_t := n$  dernières lignes de  $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$ ,



oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo



# Conclusion



# Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.



oooo  
oo  
oooooooooooo  
oooooo  
oooo



## Retour d'expérience



# Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
  - Identifier les passages trop techniques.
  - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.



Merci !

Questions ?



oooo  
oo  
ooooooooooooo  
oooooo  
oooo

