École polytechnique

Département de Mathématiques Appliquées

Projet 3A

Délit d'initié : modélisation et détection

Élèves
HEANG Kitiyavirayuth
BROUX Lucas

Tuteur
Laurent Denis

15 mars 2018

Table des matières

1 Introduction

L'un des enjeux majeurs des mathématiques financières est de concevoir des modèles d'évolution de marchés suffisamment complexes pour proposer une description relativement fidèle de la réalité, mais suffisamment simples pour que les résultats obtenus soit exploitables.

En particulier, la majorité de ces modèles formulent l'hypothèse simplificatrice suivante : les acteurs qui évoluent sur le marché disposent tous au temps t des mêmes informations, à savoir les prix des actions jusqu'au temps t. Or, celle-ci est contestable puisqu'en réalité certains acteurs, de par leurs affinités, peuvent connaître des informations sensibles et confidentielles - par exemple l'évolution future d'une action - grâce auxquelles ils vont pouvoir établir une stratégie d'investissement plus performante que les autres acteurs du marché : ce sont les *initiés*.

En pratique, si certains scandales de délit d'initié ont été très médiatisés pour les quantités d'argent impressionnantes en jeu (donnons l'exemple de Steve Cohen qui, à la tête du *hedge fund* SAC Capital, a empoché en 2008 plus de 276 millions de dollars grâce à l'obtention d'informations non publiques sur un médicament), et si les autorités de surveillance ont réussi à faire des progrès dans la détection du délit d'initié grâce à des algorithmes de recherche d'anomalies dans les données du marché, la modélisation théorique du phénomène n'en permet actuellement qu'une analyse limitée.

Le but de ce projet est de présenter les résultats actuels de cette modélisation dans deux modèles de marché. Dans une première partie, nous étudierons un modèle brownien diffusif, tandis qu'en deuxième temps, nous ajouterons des "sauts" sous la forme de processus de Poisson, afin de modéliser des périodes de "catastrophes" (krachs, ...). Pour chaque modèle de marché, nous considérerons un agent non-initié et un agent initié qui connaitra, en plus des informations publiques, une variable aléatoire L correspondant à un renseignement supplémentaire. Nous étudierons alors :

- Les problèmes d'arbitrage et de réplication d'actifs risqués.
- Le gain de l'initié (par rapport à un non-initié).
- Les simulations de l'évolution de la richesse de l'initié et du non-initié ; et dans certains cas la mise en oeuvre d'un test de détection.

Nous verrons que, dans les modélisations étudiées, nous pourrons déterminer les stratégies optimales pour l'initié et pour le non initié, que nous expliciterons dans des cas particuliers. Dans certaines situations, nous pourrons même exhiber un test statistique pour la détection du délit d'initié, mais celui-ci sera conditionné par la variable aléatoire L connue par ce dernier.

2 Modèle diffusif

2.1 Description du modèle, évolution des prix et de la richesse

Dans cette première partie, nous considérons un modèle de marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$, dont les prix des actions (un actif sans risque et d actifs risqués) sont régis selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \end{cases} \tag{1}$$

où :
- W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle qu'il engendre,
- Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0,T]$ et $\mathcal{F}$-adaptés.
- La matrice σ_t est inversible $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement. On note $\eta_t = \sigma_t^{-1} (b_t - r_t \mathbb{1})$

L'information connue au temps t par les investisseurs sur le marché est $\mathcal{F}_t$. Nous supposons que l'initié dispose en outre, dès le début de son investissement à $t = 0$, d'une information supplémentaire sous la forme d'une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$. Notons alors $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié obtenue par grossissement initial de $\mathcal{F}$, lui adjoignant la variable aléatoire L : $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$.

A l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0. Il consomme à une vitesse c, un processus positif $\mathcal{Y}$-adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$, et place sur l'actif i la quantité θ^i. Notons $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, ..., d$. Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Exploitons cette première équation en introduisant l'hypothèse naturelle d'autofinancement :

$$dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$$

Notons $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, alors la formule d'Itô donne

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt, \text{ avec } dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t\big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t + (X_t - \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}
$$

Nous avons encore par Itô

$$
\begin{aligned}
d(R_t) &= -\frac{dS_t^0}{(S_t^0)^2} + \frac{1}{2(S_t^0)^3} d < S^0 >_t \\
&= -\frac{r_t}{S_t^0} dt = -r_t R_t dt
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dW_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}
$$

Ainsi, la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$
X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds + \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s) \tag{2}
$$

2.2 Raisonnement

Étudions désormais la stratégie de l'initié. Nous supposons que celui-ci optimise sa stratégie au sens suivant : il optimise la fonction de perte :

$$
\begin{aligned}
J \colon \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\
(\pi, c) &\mapsto J\left(X_0, \pi, c\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^A U_1\left(c_t\right) dt + U_2\left(X_A^{\pi, c}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]
\end{aligned}
$$

où :

— $\mathcal{A}$ est l'ensemble des stratégies *admissibles* i.e. des stratégies (π, c) telles que π est $\mathcal{Y}$-prévisible, c est $\mathcal{Y}$-adapté, $c > 0, \int_0^T c_s ds < +\infty$ et $\sigma^* \pi \in L^2 [0; T]$ $\mathbb{P}$-p.s., et telle que la richesse engendrée par cette stratégie satisfasse $X^{\pi,c} \geq 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$-p.s.

— U_1 et U_2 sont des *fonctions d'utilité* i.e. positives, croissantes, concaves, $\mathcal{C}^1$ avec $\lim_{x \to +\infty} U_i' (x) = 0$. Par la suite, nous supposerons $U_1 = U_2 = \log$.

— A est un temps strictement inférieur à T, qui correspondra au *temps final* de notre analyse. En effet, des phénomènes d'explosion en temps fini lorsque $A \to 1$, décrits avec précision dans [2], nous empêchent d'étudier l'évolution de l'initié sur $[0; T]$ tout entier. D'un point de vue économique, ces phénomènes traduisent le fait que plus le temps t se rapproche de T, moins l'information obtenue par l'initié est pertinente.

L'interprétation est la suivante : l'initié choisit, parmi toutes les stratégies admissibles, celle qui optimise en moyenne son utilité (fonction de sa consommation et de sa richesse finale) sachant les informations connues sur le marché en $t = 0$ ainsi que l'information supplémentaire L.

La difficulté ici est de caractériser $\mathcal{A}$. En effet, W est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mais pas sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, ce qui nous empêche de faire un simple changement de probabilité comme dans les cas usuels pour nous ramener à la probabilité risque-neutre. Le raisonnement est adapté suivant les étapes suivantes :

1. *Changement de probabilité* : nous construisons une probabilité $\mathbb{Q}$ pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.
2. *Grossissement de filtration* : nous construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.
3. *Changement de probabilité* : nous construisons un mouvement brownien $\tilde{B}$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec $\mathbb{Q}_1$ probabilité risque-neutre sur $\mathcal{Y}$.

Dans les trois sous-sections suivantes, nous présentons les résultats correspondant à ces étapes, mais nous en omettons volontairement les hypothèses et les preuves, très techniques, disponibles dans [4]

2.2.1 Étape 1 : Changement de probabilité

Proposition 2.1 (T.Jeulin). *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{Y}_A$, telle que pour $t \leq A$, $\mathcal{T}_t$ et $\sigma(L)$ sont $\mathbb{Q}$-indépendantes.*
En outre, $(W_t, t \leq A)$ est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

2.2.2 Étape 2 : Grossissement de filtration

Proposition 2.2. *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue et :*

— *il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une $\mathcal{F}$-martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$*

— *si M est une $\mathcal{F}$-martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d < M, P >_t$ est égal à $d < \alpha, \beta >_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{<\alpha(.,x),\beta>_u|_{x=L}}{p(u,L)} du$ est une $\mathcal{Y}$-martingale locale continue.*

En corollaire, le processus vectoriel $\left(B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)}}_{=:l_u} du, t \in [0,T[\right)$ *est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$*, qui est l'espace de probabilité de l'initié.*

Reformulons l'équation d'évolution de la richesse de l'initié sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$: en remplaçant dW_t par $dB_t + l_t dt$, l'équation (1) des prix des actions sur le marché financier devient

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i (b_s^i + \sigma_s^i l_s^i) ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dB_s, 0 \leq t < T, i = 1, ..., d. \tag{3}$$

Avec cette nouvelle équation,

$$\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i l_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dB_t \big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i + \sigma_t^i l_t^i) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i \sigma_t^i dB_t + (X_t - \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i + \sigma_t^i l_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i \sigma_t^i dB_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t + \sigma_t l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dB_t)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t + \sigma_t l_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dB_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t + \sigma_t l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dB_t)
\end{aligned}$$

Ainsi, sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, la richesse X actualisée de l'initié vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 \int_0^t (R_s \pi_s, b_s + \sigma_s l_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dB_s) \tag{4}$$

Nous pouvons voir ici que le processus l_s représente les informations dont dispose l'initié. Si $l_s = 0, 0 \leq s \leq t \leq T$, nous retrouvons l'équation (2) de richesse du non initié.

2.2.3 Étape 3 : Changement de probabilité

L'idée est désormais de se ramener à une probabilité neutre au risque sur $\mathcal{Y}$. Pour cela, nous réalisons une transformation de type Girsanov. Notons que la forme du processus l ne nous permet de faire le changement de probabilité que sur l'intervalle $[0, A]$ et non sur $[0, T]$. Il n'y a aucune raison que la martingale locale de changement de probabilité soit une vraie martingale jusqu'en T d'où une "explosion" des processus évoqués ci-dessus.

Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nouveau processus $\xi_t = -l_t - \eta_t$ (qui existe sous hypothèses).

Proposition 2.3. *Posons $M_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||\xi_s||^2 d}$ pour $t \in [0, A], A < T$. Alors M est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable et, sous $\mathbb{Q}_1 = M.\mathbb{P}$, le processus*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$-mouvement brownien et les prix actualisés sont des $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$-martingales locales.

2.3 Calcul des stratégies optimales

Revenons au problème d'optimisation, notre objectif étant de caractériser l'ensemble des stratégies admissibles.
Nous pouvons montrer que

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}$$

Cette contrainte traduit le fait que l'initié n'investit et ne dépense que l'argent qu'il n'a déjà : à chaque instant, il ne peut pas avoir mis en jeu depuis le début plus d'argent qu'il n'en avait à l'instant $t = 0$.

Le problème d'optimisation se résout dans le cas général. Ici, nous avons supposé $U_1 = U_2 = \log$, et alors la stratégie optimale pour les agents est :

$$\begin{cases} R_t c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (l_s + \eta_s, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|l_s + \eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

2.4 Cas particulier : $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$

Étudions l'évolution de la richesse des agents dans le cas particulier où la variable connue par l'initié est $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$: l'initié connait la proportion qu'auront les prix de deux actifs risqués au temps T. Il est possible de vérifier que dans ce cas, toutes les hypothèses techniques nécessaires à l'établissement de la solution du problème d'optimisation sont vérifiées.
Pour simplifier et rendre exploitable les calculs, nous nous plaçons en outre dans le cas où les paramètres b, σ, et r du modèle sont constants.

2.4.1 Calcul explicite des richesses

Dans ce cas, nous pouvons expliciter la variable L : les prix du marchés sont donnés par

$$\begin{cases} S_t^1 & = S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 & = S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Donc

$$L = \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}\left(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2|^2\right)\right)T}_{=:\beta} + \left(\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{=:\gamma}, W(T)\right)$$

Ainsi, L est une variable gaussienne. La loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ s'exprime donc comme une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\beta + (\gamma, W(t)), ||\gamma||^2(T-t)\right)$ qui est bien absolument continue comme annoncé dans la proposition 2.3. Reprenons cette proposition dans ce cas particulier pour expliciter l. La densité conditionnelle de la loi de L sachant $\mathcal{F}_t$ est donc celle d'une loi normale :

$$p(t,x) = \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))^2}{||\gamma||^2(T-t)}}}_{=:f(t,W(t))}$$

Nous allons montrer que ce processus est bien une martingale. Pour cela, nous fixons x et dérivons p : par Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} dp(t,x) &= d\left(\frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\right)f(t,W(t)) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}df(t,W(t)) \\ &= \frac{1}{2||\gamma||\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}f(t,W(t)) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}df(t,W(t)) \end{aligned}$$

La formule d'Itô nous permet aussi de dériver f :

$$\begin{aligned} df(t,W(t)) &= f_x^{'}(t,W(t))\,dW(t) + \left[f_t^{'}(t,W(t)) + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t,W(t))\right]dt \\ &= \left[\frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))}{||\gamma||^2(T-t)}\right]f(t,W(t))(\gamma,dW(t)) + \left[\frac{-1}{2(T-t)}\right]f(t,W(t))\,dt \end{aligned}$$

Ainsi, les termes temporels se simplifient et

$$dp(t,x) = \frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))}{||\gamma||^3\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}f(t,W(t))(\gamma,dW(t))$$

Ainsi, p est bien une martingale et on a, comme dans la proposition, la formule

$$p(t,x) = p(t,x) + \int_0^t (\alpha(s,x), dW(s))$$

Où

$$\alpha\left(t,x\right)=\frac{\left(x-\beta-\left(\gamma,W\left(t\right)\right)\right)}{||\gamma||^{3}\sqrt{2\pi}\left(T-t\right)^{\frac{3}{2}}}f\left(t,W\left(t\right)\right)\gamma$$

Ainsi, nous pouvons expliciter l :

$$\begin{aligned}l_t&=\frac{\alpha\left(t,L\right)}{p\left(t,L\right)}\\&=\frac{\left(\frac{\left(L-\beta-\left(\gamma,W\left(t\right)\right)\right)}{||\gamma||^{3}\sqrt{2\pi}\left(T-t\right)^{\frac{3}{2}}}\right)f\left(t,W\left(t\right)\right)\gamma}{\left(\frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\right)f\left(t,W\left(t\right)\right)}\\&=\frac{\left(\gamma,W\left(T\right)-W\left(t\right)\right)\gamma}{||\gamma||^{2}\left(T-t\right)}\quad\text{car }L-\beta=\left(\gamma,W\left(T\right)\right)\end{aligned}$$

Or nous savons que le processus Y, inversement proportionnel à la richesse des agents, est, en vertu des formules présentées dans la section précédente :

$$Y\left(t\right)=\begin{cases}e^{-(\eta,W_t)-\frac{1}{2}t\|\eta\|^2}=:Y_0\left(t\right)&\text{pour le non initié}\\e^{-\int_0^t(l_s+\eta,dW_s-l_sds)-\frac{1}{2}\int_0^t\|l_s+\eta\|^2ds}&\text{pour l'initié}\end{cases}$$

Donc le coefficient de proportionnalité de richesse entre les deux agents est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z\left(t\right)}&:=\frac{Y\left(t\right)}{Y_0\left(t\right)}\\&=\frac{e^{-\int_0^t(l_s+\eta,dW_s-l_sds)-\frac{1}{2}\int_0^t\|l_s+\eta\|^2ds}}{e^{-(\eta,W_t)-\frac{1}{2}t\|\eta\|^2}}\\&=\frac{e^{-\int_0^t\left[(l_s,dW_s)+(\eta,dW_s)-\|l_s\|^2ds-(\eta,l_s)ds\right]-\frac{1}{2}\int_0^t\left[\|l_s\|^2+\|\eta\|^2+2(l_s,\eta)\right]ds}}{e^{-(\eta,W_t)-\frac{1}{2}t\|\eta\|^2}}\\&=e^{-\int_0^t[(l_s,dW_s)ds]+\frac{1}{2}\int_0^t\|l_s\|^2ds}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d\log\left(Z\left(t\right)\right)=\left(l_s,dW_s\right)-\frac{1}{2}\|l_s\|^2ds$$

Mais remarquons qu'aussi par définition de l,

$$dp\left(t,L\right)=p\left(t,L\right)\left(l_s,dW_t\right)$$

Donc par Itô :

$$d\log\left(p\left(t,L\right)\right)=\left(l_s,dW_s\right)-\frac{1}{2}\|l_s\|^2ds=d\log\left(Z\left(t\right)\right)$$

De là, $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant, égale à sa valeur initiale :

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= \frac{Z(0)}{p(0,L)} p(t,L) \\
&= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2 (T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}
\end{aligned}
$$

L'interprétation est intéressante : pour tout t, la valeur de proportionnalité entre la richesse de l'initié et celle du non-initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x = L$. Ce résultat est en réalité général, et correspond à l'approche employée dans [5].

2.4.2 Analyse asymptotique de Z

Analysons le comportement de ce processus Z afin d'étudier l'enrichissement de l'initié par rapport au non-initié. Remplaçons les termes browniens par leur espérance dans l'expression précédente de Z :

$$
\begin{aligned}
Z(t) &\simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\left(\frac{-\|\gamma\|^2 (T-t)}{2\|\gamma\|^2 (T-t)} + \frac{\|\gamma\|^2 T}{2\|\gamma\|^2 T} \right)} \\
&= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

Nous voyons qu'au temps final considéré,

$$
\begin{aligned}
Z(A) &\simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-A}} \\
&\xrightarrow[A \to T]{} +\infty
\end{aligned}
$$

Nous retrouvons ainsi le phénomène d'explosion en temps fini mentionné précédemment : plus A se rapproche de T, plus la richesse finale de l'initié est grande par rapport à celle du non-initié.

2.4.3 Simulations numériques

Afin d'étudier numériquement les comportements des agents, nous avons implémenté ces formules en *Python*. Par souci de généralité, nous avons choisi d'écrire notre code de la manière la plus générale et modulaire possible, c'est pourquoi nous décidons de ne pas le copier en annexe. Toutefois, il est disponible sur le *repository Github* du projet (`https://github.com/lucas-broux/Projet-3A`).
Notre approche est la suivante :

1. Calcul des prix (la formule est explicite).
2. Calcul de la richesse du non initié (ou plutôt du processus $\frac{1}{Y_0}$) : selon la formule $Y_0(t) := e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}$.

3. Calcul du processus Z via la formule précédente $Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}$

4. Calcul de la richesse de l'initié (ou plutôt du processus $\frac{1}{Y}$) par la formule $\frac{1}{Y} = \frac{Z}{Y_0}$

Dans notre simulation (*simulations_diffusive_model.py*),

$$\begin{cases} T & = 1 \\ A & = 0.95 \\ d & = 2 \\ b & = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma & = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les prix évoluent de la manière suivante :

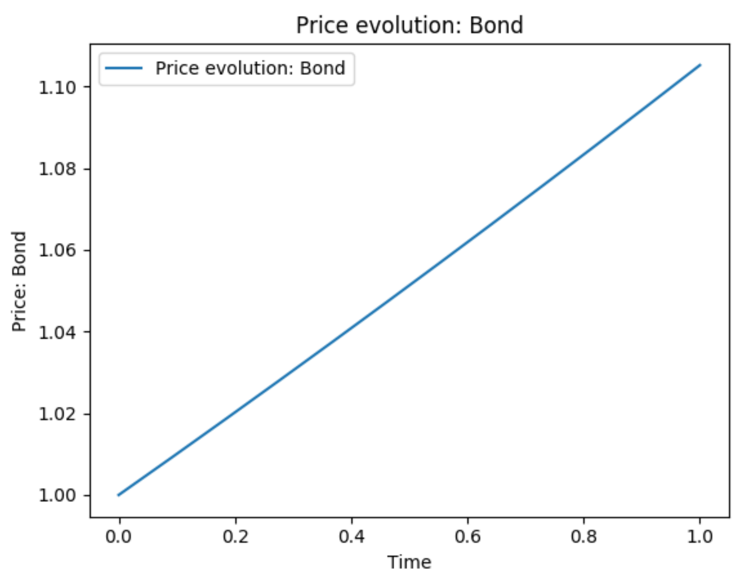

Figure 1 – prix de l'actif sans risque

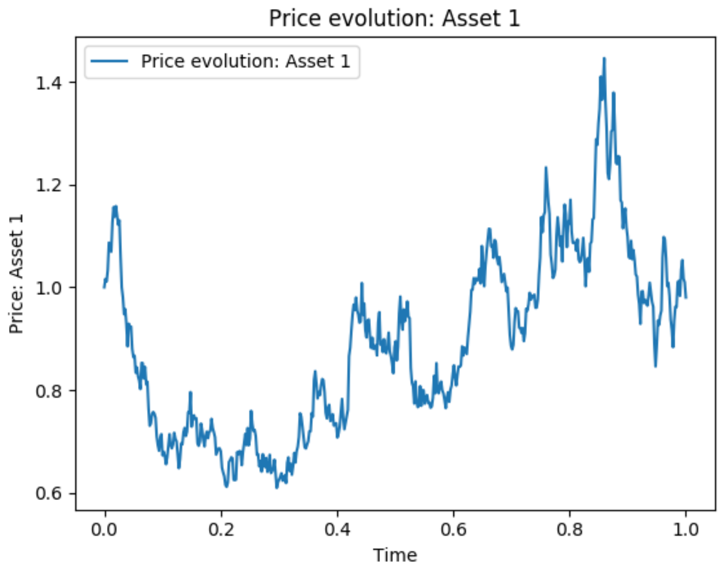

FIGURE 2 – prix de l'actif risqué 1

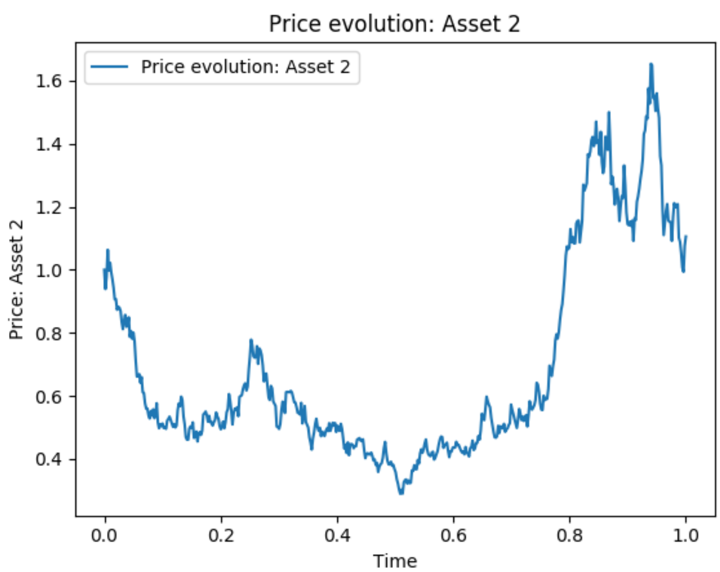

FIGURE 3 – prix de l'actif risqué 2

La valeur de la variable connue par l'initié est $L = -0.12$. Le processus Z est ensuite calculé et comparé avec l'estimation produite dans la sous-partie précédente :

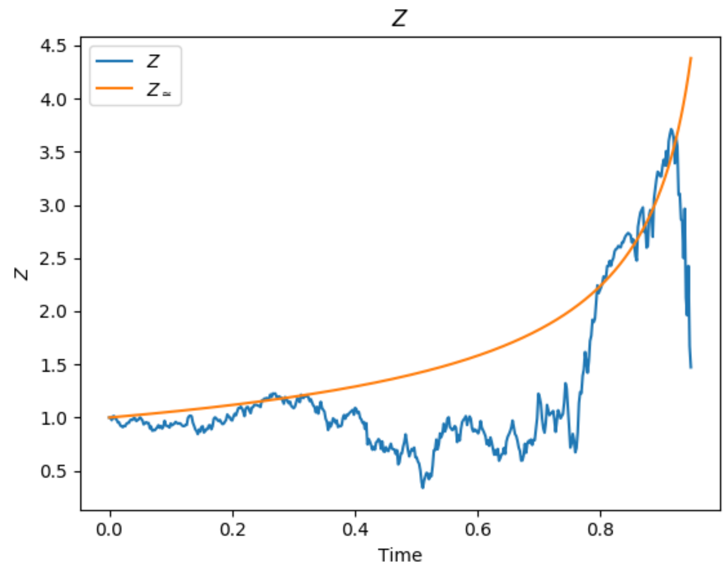

FIGURE 4 – Z sur $[0; A]$

Nous constatons que, comme estimé, le processus Z tend bien à diverger lorsque t se rapproche de T. Nous pouvons enfin représenter l'évolution comparé de la richesse des deux agents :

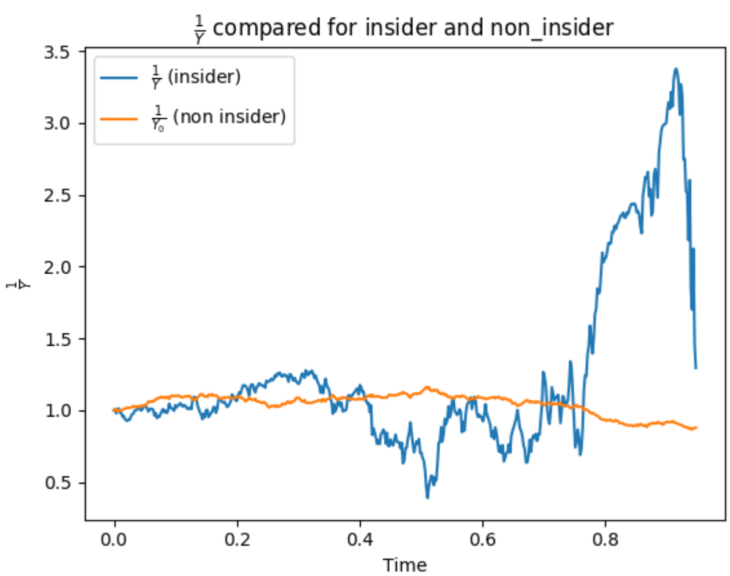

FIGURE 5 – $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y}$ sur $[0; A]$

Ainsi, l'initié tend à s'enrichir lorsque t tend vers A pour A proche de T : la connaissance de l'information L permet à l'initié d'établir une meilleure stratégie que le non-initié.

3 Modèle avec sauts

3.1 Description du modèle, évolution des prix et de la richesse

Nous avons ainsi vu dans la partie précédente que le modèle diffusif permet d'étudier la stratégie de l'initié par grossissement de filtration. Nous souhaitons désormais complexifier ce modèle en lui adjoignant un processus ponctuel de type Poisson, afin de faire apparaître des "sauts" dans l'évolution des prix du marché, modélisant ainsi des situations de "catastrophes" boursières.
Pour cela, nous considérons un marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ dont les prix des actions sont dirigés par un mouvement brownien et un processus ponctuel, évoluant donc selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^{d} d(W^*, N^*)_j^*(s), 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \end{cases} \tag{5}$$

où W est un mouvement brownien de dimension m sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^W, \mathcal{F}_t^W; t \in [0,T], \mathbb{P}^W)$, N est un processus de Poisson de dimension n et d'intensité κ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N; t \in [0,T], \mathbb{P}^N)$, avec $n + m = d$. Nous supposons ces deux processus indépendants et nous notons $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$ l'espace de probabilité filtré produit. Par la suite, nous considérerons aussi le processus de Poisson compensé $M(t) := M(t) - \int_0^t \kappa(s)\, ds$

Nous conservons les notations et hypothèses du modèle précédent, de sorte que l'initié dispose d'un capital initial X_0, consomme toujours à une vitesse c, et sa stratégie est autofinançante, ce qui nous permet d'adapter le calcul de la partie précédente et d'exprimer la richesse actualisée de l'initié sous la forme de l'équation

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 + \int_0^t R_s \pi^*(b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(W^*, N^*)^*(s)$$

3.2 Raisonnement

Nous cherchons à étudier, comme dans la partie précédente, la stratégie optimale de l'initié, qui s'exprime toujours comme le problème d'optimisation de la fonction d'utilité suivante :

$$\begin{aligned} J :&\mathcal{A} \to \mathbb{R} \\ &(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi,c}) \Big| \mathcal{Y}_0\Big] \end{aligned}$$

Et, comme dans cette première partie, on peut montrer - sous hypothèses techniques - avec les mêmes idées de changement de probabilité et de grossissement de filtration, que ce problème d'optimisation se résout et sa solution s'exprime de la manière suivante (les détails techniques et les preuves sont à trouver dans [1] et [5]) :

$$\text{pour } t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t c_t^* & = \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* & = \frac{X_0 (A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ \pi_t^* & = (\sigma_t^*)^{-1} \frac{Y(t)}{Y(t^{-1})} \widehat{X}_t l_t \end{cases}$$

Avec la relation suivante liant les processus Y pour l'initié et le non initié :

$$Y(t) = \frac{Y_0(t)}{Z(t)}$$

où Z est (normalisée à une constante près de sorte que $Z(0) = 0$) la densité conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x = L$. Ce résultat fait ainsi écho au résultat trouvé dans le cas particulier étudié dans la section précédente.
On peut en outre expliciter la valeur de Y_0 pour le non-initié :

$$Y_0 = \varepsilon \left(\int_0^{\cdot} \left(- \left(\eta_W(s), dW_s \right) + \left(-\eta_M(s) - I_n, dM_s \right) \right) \right),$$

où ε est l'exponentielle de Doléans-Dade, et

- $\eta_W(t) :=$ m premières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
- $\eta_M(t)$ est un processus de dimension n, dont les composants sont supposés positifs, tel que $q_t.\kappa_t := n$ dernières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$,

En réalité, cette exponentielle de Doléans s'explicite sous la forme (voir [6, p. 491]) :

$$Y_0(t) = e^{\int_0^t -(\eta_W(s), dW(s)) + \int_0^t \left[(\eta_M(s), \kappa(s)) - \frac{1}{2} \|\eta_W(s)\|^2 \right] ds} \sum_{0 < s \leq t} \left(1 - \left(\eta_M(s), \Delta N(s) \right) \right) \tag{6}$$

Et nous voyons que la formule coïncide bien avec celle obtenue dans le cas diffusif.

3.3 Cas particulier : $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$

3.3.1 Formule explicite, faisabilité numérique

Comme en section 2.4, plaçons-nous dans le cas particulier où la variable connue par l'initié est $L = \ln\left(S_T^1\right) - \ln\left(S_T^2\right)$ (toutes les hypothèses techniques nécessaires à l'établissement de la solution du problème d'optimisation sont alors vérifiées), et où les paramètres b, σ, et r du modèle sont constants.
Alors ([5]),

$$Z(t) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa_j (T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \int_{\left(F_{t,T,k_j}\right)^n} e^{\left(\frac{-\left(L - m_t - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l_j=1}^{k_j} \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1,j}}{1+\sigma_{i_2,j}} \right) \left(t_{j,l_j} \right) \right)^2}{2\Sigma_t} \right)} \prod dt_{j,l_j}}{\prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa_j T}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}} \int_{\left(F_{0,T,k_j}\right)^n} e^{\left(\frac{-\left(L - m_0 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l_j=1}^{k_j} \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1,j}}{1+\sigma_{i_2,j}} \right) \left(t_{j,l_j} \right) \right)^2}{2\Sigma_t} \right)} \prod dt_{j,l_j}}$$

où

$$\begin{cases} L - m_t & = \displaystyle\int_{s=t}^{T} \left(\underbrace{\sigma_{1,W}}_{\substack{\text{partie "brownienne"} \\ \text{(m premières composantes)} \\ \text{de } \sigma_1}} - \sigma_{2,W} \right) dW(s) + \int_{s=t}^{T} \ln\left(\frac{1+\sigma_{1,N}}{1+\sigma_{2,N}}\right) dN(s) \\ \left(F_{t,T,k_j}\right)^n & = \left\{ \left(t_{j,l_j}\right)_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le l_j\le k_j}} \in \mathbb{R}^{k_1+\ldots+k_n}, t \le t_{j,l_1} \le \ldots \le t_{j,l_{k_j}} \le T \text{ pour } 1 \le j \le n \right\} \end{cases}$$

Ainsi, nous avons une expression "close" pour exprimer la richesse de l'initié et du non-initié : nous pouvons calculer Y_0 en explicitant la solution de l'exponentielle de Doléans-Dade selon la formule (6), puis Y via la formule $Y = \frac{Y_0}{Z}$ avec Z exprimé ci-dessus. Cependant, la complexité de l'expression de Z le rend difficile à exploiter. En particulier,

4 Conclusion

Références

[1] L. Denis, A. Grorud, and M. Pontier. Formes de dirichlet sur un espace de wiener-poisson. application au grossissement de filtration. In *Séminaire de Probabilités XXXIV*, pages 198–217. Springer, 2000.

[2] H. Föllmer and P. Imkeller. Anticipation cancelled by b girsanov transformation : a paradox on wiener space. *Ann. Inst. H. Poincaré Probabilités et Statististiques*, 1993.

[3] A. Grorud and M. Pontier. Comment détecter le délit d'initié ? *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1997.

[4] A. Grorud and M. Pontier. Insider trading in a continuous time market model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1998.

[5] C. Hillairet. Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(10) :1603 – 1627, 2005.

[6] S. E. Shreve. *Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2004.