Département de Mathématiques Appliquées

Projet 3A MAP511

Rapport final

Modélisation et détection de délit d'initié

Tuteur : DENIS Laurent

BROUX Lucas
HEANG Kitiyavirayuth

Table des matières

1 Introduction

L'un des enjeux majeurs des mathématiques financières est de concevoir des modèles d'évolution de marchés suffisamment complexes pour proposer une description relativement fidèle de la réalité, mais suffisamment simples pour que les résultats obtenus soit exploitables.

En particulier, la majorité de ces modèles formulent l'hypothèse simplificatrice suivante : les acteurs qui évoluent sur le marché disposent tous au temps t des mêmes informations, à savoir les prix des actions jusqu'au temps t. Or, celle-ci est contestable puisqu'en réalité certains acteurs, de par leurs affinités, peuvent connaître des informations sensibles et confidentielles - par exemple l'évolution future d'une action - grâce auxquelles ils vont pouvoir établir une stratégie d'investissement plus performante que les autres acteurs du marché : ce sont les *initiés*.

En pratique, si certains scandales de délit d'initié ont été très médiatisés pour les quantités d'argent impressionnantes en jeu (donnons l'exemple de Steve Cohen qui, à la tête du *hedge fund* SAC Capital, a empoché en 2008 plus de 276 millions de dollars grâce à l'obtention d'informations non publiques sur un médicament), et si les autorités de surveillance ont réussi à faire des progrès dans la détection du délit d'initié grâce à des algorithmes de recherche d'anomalies dans les données du marché, la modélisation théorique du phénomène n'en permet actuellement qu'une analyse limitée.

Le but de ce projet est de présenter les résultats actuels de cette modélisation dans deux modèles de marché. Le premier correspond au modèle brownien usuel, tandis que dans le deuxième, nous ajouterons des "sauts" sous la forme de processus de Poisson, afin de modéliser des périodes de "catastrophes" (krachs, ...). Pour chaque modèle de marché, nous considérerons un agent non-initié et un agent initié qui connaitra, en plus des informations publiques, une variable aléatoire L correspondant à un renseignement supplémentaire. Nous étudierons alors :

— Les problèmes d'arbitrage et de réplication d'actifs risqués.
— Le gain de l'initié (par rapport à un non-initié).
— Les simulations de l'évolution de la richesse de l'initié et du non-initié ; et dans certains cas la mise en oeuvre d'un test de détection.

Nous verrons que, dans les modélisations étudiées, nous pourrons déterminer les stratégies optimales pour l'initié et pour le non initié, que nous expliciterons dans des cas particuliers. Dans certaines situations, nous pourrons même exhiber un test statistique pour la détection du délit d'initié, mais celui-ci sera conditionné par la variable aléatoire L connue par ce dernier.

2 Modèles de marché

Pour notre projet, nous avons étudié deux types de modèles de marché différents. Le premier est le marché financier dont les prix sont dirigés par un mouvement brownien et le deuxième est celui dont les prix sont dirigés par un mouvement brownien et un processus ponctuel ou le processus de Poisson (les prix avec sauts).

2.1 Les prix sans sauts

Nous considérons un modèle de marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$, dont les prix des actions (ici d actions) évoluent selon l'équation différentielle stochastique :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \tag{1}$$

où :

- W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle qu'il engendre,
- Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0,T]$ et $\mathcal{F}$-adaptés.
- La matrice σ_t est inversible,
- S^0 évolue selon l'équation $dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$.

L'information $\mathcal{F}_t$ est celle au temps t que connaissent tous les investisseurs sur le marché. Pour l'initié, nous supposons qu'il a, dès le début de son investissement à $t = 0$, des informations sur le futur (dont les autres ne disposent pas), une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$. Dans le cas que nous avons étudié, $L = lnS_T^1 - lnS_T^2$, le rapport au temps T des deux actifs de prix S^1 et S^2. Notons alors $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié obtenue par grossissement initial de $\mathcal{F}$, lui adjoignant la variable aléatoire $L : \mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$.

Pour ce modèle de marché, nous commencerons par la méthode de grossissement de filtration pour construire un nouveau mouvement brownien (que l'on appellera B) sur le nouvel espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$. Ensuite avec le nouveau mouvement brownien, nous effectuons un changement de probabilité pour nous ramener à une mesure neutre au risque (que l'on appellera Q). Sur ce nouvel espace de probabilité neutre au risque, nous combinons ensemble l'hypothèse d'autofinancement, la stratégie de consommation-placement $\mathcal{Y}$-admissible et une proposition qui nous donne une contrainte qui est une fonction de la richesse d'investisseur, nous pourrons comprendre et résoudre le problème d'optimisation de l'initié (car avec l'information $\mathcal{Y}_t$ l'initié cherche à optimiser sa stratégie de consommation et de placement sur le marché financier) et finalement mettre en place un test statistique à partir des solutions optimales du problème d'optimisation pour voir si un investisseur est un initié ou un non-initié.

À l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0. Il consomme à une vitesse c, un processus positif $\mathcal{Y}$-adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$, et place sur l'actif i la quantité θ^i. Notons $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$

la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, ..., d$. Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Nous introduisons nos deux premières hypothèses. La première donne l'existence à la variable $\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t \mathbf{1})$:

H1 : La matrice σ est inversible, $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement,
η_t vérifie $\exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A], A < T, \mathbb{E}[\exp k ||\eta_s||^2] \leq C$.

et la deuxième est l'hypothèse d'autofinancement :

$$\mathbf{H2} : dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$$

D'après **H2**, Avec ces deux hypothèses, en notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, en utilisation la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt, \text{ avec } dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t\big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t + (X_t - \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, et en appliquant la forume d'Itô,

$$\begin{aligned}
d(R_t) &= -\frac{dS_t^0}{(S_t^0)^2} + \frac{1}{2(S_t^0)^3} d < S^0 >_t \\
&= -\frac{r_t}{S_t^0} dt = -r_t R_t dt
\end{aligned}$$

La formule d'Itô nous donne pour la fonction $f(x, r) = xr$ nous donne :

$$\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dW_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

Donc la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds + \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s) \tag{2}$$

2.2 Les prix avec sauts

Pour la deuxième partie de notre projet, nous avons étudié un modèle de marché financier qui est différent du premier en raison de la présence d'un processus ponctuel, ou un processus de Poisson qui fait de sorte que les prix comportent des sauts.

Nous considérons un marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ dont les prix des actions sont dirigés par un mouvement brownien et un processus ponctuel et évoluent selon l'équation :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s), 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \tag{3}$$

où

- W est un mouvement brownien de dimension m sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^W, \mathcal{F}_t^W; t \in [0,T], \mathbb{P}^W)$,
- N est un processus de Poisson de dimension n sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N; t \in [0,T], \mathbb{P}^N)$,
- $d = m + n$ et X^* est le transposé de X,
- b et ϕ sont déterministes et bornés sur $[0,T]$,
- σ est une matrice déterministe $d \times d$,
- S_0 évolue selon l'équation $dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$. W et N sont indépendants.

Les procédures sont pareilles. L'initié a des informations sur le futur, représentées par la variable L, qui ne sont pas accessibles aux autres investisseurs sur le marché et nous notons $\mathcal{Y}$ sa filtration dite naturelle qui est $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$. La méthode de grossissement de filtration, le changement de probabilité pour nous ramener à une mesure neutre au risque, et certaines hypothèses (que nous n'expliciterons pas en détaille mais se trouvent dans l'article de *C. Hillairet, Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information, Université Paul Sabatier, UFR MIG, Laboratoire de Statistique et Probabilités, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.) nous donneront en résultat la richesse et le portefeuille optimal de l'initié.*