Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018

Présentation du projet

- **Modélisation et détection de délit d'initié :**
  Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?
- Objectifs :
  - Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
  - Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.

Plan de la présentation

Modèle diffusif - cas particulier

Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- W est un mouvement brownien à 2 dimensions dont $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que b, r et σ sont constants.

Marché

Les prix peuvent donc s'expliciter :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 & = S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 & = S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Initié

- On suppose qu'à $t = 0$, l'initié dispose a une information sur le futur, $L := \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$, dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.
- Il dispose d'un capital X_0 à $t = 0$, consomme à une vitesse c, et il place la quantité θ^i sur l'actif i.
- $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$: la somme investie sur le i-ième l'actif, $i = \{1, 2\}$.

Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps t s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinançant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on obtient :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J : \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \to \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \longmapsto J(X_0, \pi, c) := \mathbb{E}\left[\int_0^A \log(c_t)\,dt + \log\left(\underbrace{X_A^{\pi,c}}_{\text{Richesse au temps } A}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]$$

Stratégie optimale

- où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \begin{cases} \pi \ \ \mathcal{Y} - \text{prévisible}, \\ c > 0 \ \ \mathcal{Y} - \text{adapté}, \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \ \text{ et } \ \sigma^* \pi \in L^2 [0; T] \ \ \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi,c} \geq 0 \ \ dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases} \right\}$$

- $A < T$: *Temps final.*

Peut-on caractériser $\mathcal{A}$ sous une forme exploitable ?

Raisonnement

Changement de probabilités

Grossissement de filtration

Changement de probabilité

Caractérisation de $\mathcal{A}$

Résolution du problème d'optimisation

Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2}\int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$Z(t) := \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2}\int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}}$$
$$= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2}\int_0^t \|I_s\|^2 ds}$$

Forme explicite du gain

Donc

$$d \log \left(Z \left(t \right) \right) = \underbrace{\left(l_s, dW_s \right)}_{= \frac{dp(t,L)}{p(t,L)}} - \frac{1}{2} \| l_s \|^2 ds = d \log \left(p \left(t, L \right) \right)$$

Donc $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant :

$$Z \left(t \right) = \frac{Z \left(0 \right)}{p \left(0, L \right)} p \left(t, L \right)$$

Interprétation : pour tout t, le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x = L$.

Forme explicite du gain

On obtient donc :

$$\boxed{Z\left(t\right) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}}$$

En remplaçant $(\gamma, W\left(T\right) - W\left(t\right))^2$ par son espérance $||\gamma||^2\left(T-t\right)$,

$$Z\left(t\right) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$

raisonnement heuristique,
n'est pas une estimation de $\mathbb{E}[Z(t)]$

Analyse du gain

Cela fournit un minorant (via $e^x \geq 1 + x$) :

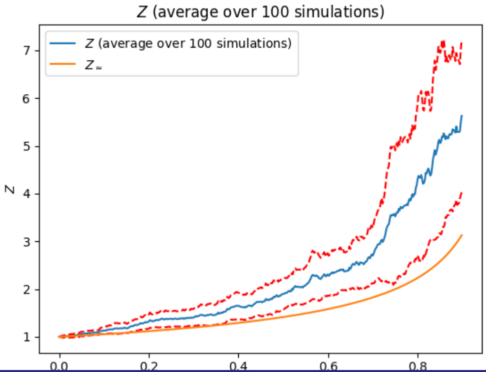
$$Z(t) \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \left(1 + \left(\underbrace{\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2||\gamma||^2 (T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}_{\mathbb{E}[\cdot]=0} \right) \right)$$

Donc

$$\mathbb{E}[Z(t)] \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \xrightarrow[t \to T]{} +\infty$$

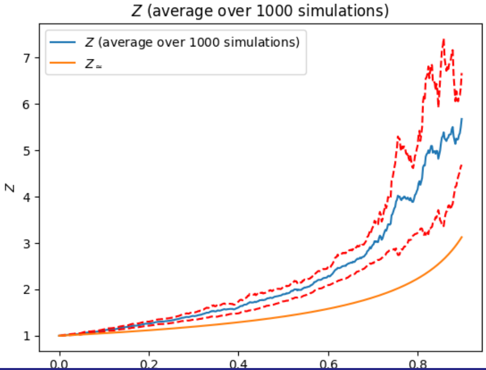
Visualisation

Moyenne de 100 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



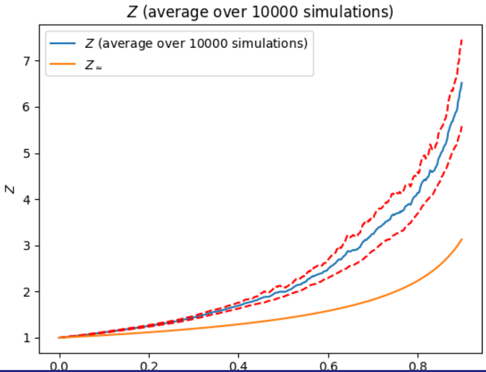
Visualisation

Moyenne de 1000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



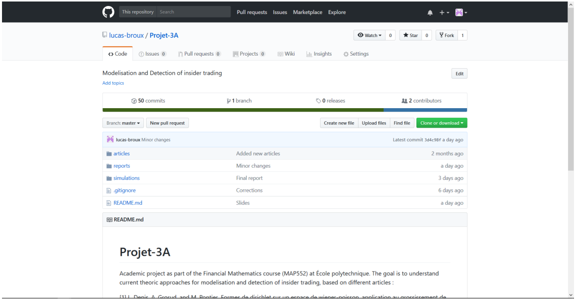
Visualisation

Moyenne de 10000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : `https://github.com/lucas-broux/Projet-3A`).



Simulations

Simulations

Simulations

Conclusion

Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.

Retour d'expérience

Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
  - Identifier les passages trop techniques.
  - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.

Merci !

Questions ?