Dans cette première partie, nous considérons un modèle de marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$, dont les prix des actions (un actif sans risque et d actifs risqués) sont régis selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i & = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \end{cases} \quad (1)$$

où :

— W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle qu'il engendre,

— Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0,T]$ et $\mathcal{F}$-adaptés.

— La matrice σ_t est inversible $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement. On note $\eta_t = \sigma_t^{-1} (b_t - r_t 1)$

L'information connue au temps t par les investisseurs sur le marché est $\mathcal{F}_t$. Nous supposons que l'initié dispose en outre, dès le début de son investissement à $t = 0$, d'une information supplémentaire sous la forme d'une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$. Notons alors $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié obtenue par grossissement initial de $\mathcal{F}$, lui adjoignant la variable aléatoire L : $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$.

A l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0. Il consomme à une vitesse c, un processus positif $\mathcal{Y}$-adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$, et place sur l'actif i la quantité θ^i. Notons $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, ..., d$. Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Exploitons cette première équation en introduisant l'hypothèse naturelle d'autofinancement :

$$dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$$

Notons $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt, \text{ avec } dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t \big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t + (X_t - \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

Nous avons encore par Itô

$$\begin{aligned}
d(R_t) &= -\frac{dS_t^0}{(S_t^0)^2} + \frac{1}{2(S_t^0)^3} d < S^0 >_t \\
&= -\frac{r_t}{S_t^0} dt = -r_t R_t dt
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dW_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

Ainsi, la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds + \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s) \tag{2}$$