0.1 Description du modï¿½le, ï¿½volution des prix et de la richesse

Pour la deuxiï¿½me partie de notre projet, nous avons ï¿½tudiï¿½ un modï¿½le de marchï¿½ financier qui est diffï¿½rent du premier en raison de la prï¿½sence d'un processus ponctuel, ou un processus de Poisson qui fait de sorte que les prix comportent des sauts.

Nous considï¿½rons un marchï¿½ financier sur un espace de probabilitï¿½ filtrï¿½ $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ dont les prix des actions sont dirigï¿½s par un mouvement brownien et un processus ponctuel et ï¿½voluent selon l'ï¿½quation :

$$\begin{cases} S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s), 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \\ S_t^0 = \int_0^t S_s^0 r_s ds \end{cases} \tag{1}$$

oï¿½

- — W est un mouvement brownien de dimension m sur l'espace de probabilitï¿½ filtrï¿½ $(\Omega^W, \mathcal{F}_t^W; t \in [0,T], \mathbb{P}^W)$,
- — N est un processus de Poisson de dimension n sur l'espace de probabilitï¿½ filtrï¿½ $(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N; t \in [0,T], \mathbb{P}^N)$,
- — $d = m + n$ et X^* est le transposï¿½ de X,
- — b et ϕ sont dï¿½terministes et bornï¿½s sur $[0,T]$,
- — σ est une matrice dï¿½terministe $d \times d$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$. W et N sont indï¿½pendants.

Les procï¿½dures sont pareilles. L'initiï¿½ a des informations sur le futur, reprï¿½sentï¿½es par la variable L, qui ne sont pas accessibles aux autres investisseurs sur le marchï¿½ et nous notons $\mathcal{Y}$ sa filtration dite naturelle qui est $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$. La mï¿½thode de grossissement de filtration, le changement de probabilitï¿½ pour nous ramener ï¿½ une mesure neutre au risque, et certaines hypothï¿½ses (que nous n'expliciterons pas en dï¿½taille mais se trouvent dans l'article de *C. Hillairet, Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information, Universitï¿½ Paul Sabatier, UFR MIG, Laboratoire de Statistique et Probabilitï¿½s, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.*) nous donneront en rï¿½sultat la richesse et le portefeuille optimal de l'initiï¿½.

A l'instant $t = 0$, l'initiï¿½ dispose d'un capital X_0 et consomme toujours ï¿½ une vitesse c qui est un processus positif $\mathcal{Y}$-adaptï¿½, vï¿½rifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$. En notant toujours $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ï¿½me action pour $i = 1, ..., d$, la richesse au temps t de l'initiï¿½ est :

$$X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Comme toujours, nous supposons que la stratï¿½gie est autofinanï¿½ante, c'est-ï¿½-dire

$$dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

Avec le facteur d'actualisation $R_t = (S_t^0)^{-1}$, sa richesse actualisï¿½e vï¿½rifie l'ï¿½quation donnï¿½e par la formule d'Itï¿½ suivante :

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \Big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \Big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t)dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \\
&= (X_t r_t - c_t)dt + \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t),
\end{aligned}
$$

oï¿½ $\pi = (\pi_t^1, ..., \pi_t^d)^*$ et $I_d = (1, ..., 1)^* \in \mathbb{R}^d$.

Avec $d(R_t) = d\big((S_t^0)^{-1}\big) = -r_t R_t dt$, la formule d'Itï¿½ nous donne encore

$$
\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t \big((X_t r_t - c_t)dt + \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t) \big) \\
&= -R_t c_t dt + R_t \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + R_t \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 + \int_0^t R_s \pi^*(b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(W^*, N^*)^*(s)
$$

En notant :

- $\Theta_t :=$ les m premiï¿½res lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
- q un processus de dimension n, dont les composants sont supposï¿½s positifs, tel que $q_t.\kappa_t :=$ les n derniï¿½re lignes de $-(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$,

oï¿½ $q_t.\kappa_t$ dï¿½finit le vecteur dont les composants sont $(q_t.\kappa_t)_i = q_t^i \kappa_t^i, i = 1, ..., n$, nous dï¿½finissons :

- $\widehat{W}_t := W_t + \int_0^t \Theta_s ds$
- $\widehat{M}_t := N_t - \int_0^t q_s.\kappa_s ds$
- $\widehat{S} := (\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*$

Donc notre ï¿½quation de richesse actualisï¿½e en fonction de Θ_t et $q_t.\kappa_t$ devient :

$$\begin{aligned}
X_tR_t + \int_0^t R_s c_s ds &= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_t d(W^*, N^*)^*(s) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&- \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s\Theta_s ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_t q_s.\kappa_s ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&- \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s(\sigma_s)^{-1}\big(\Theta_s I_{1,m} - q_s.k_s I_{2,n}\big) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) - \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d\widehat{S}(s)
\end{aligned}$$

oï¿½ $I_{1,m} = (\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{0,...,0}_{n})^*, I_{2,n} = (\underbrace{0,...,0}_{m}, \underbrace{1,...,1}_{n})^*$

0.2 Raisonnement

Comme dans la premiï¿½re partie, l'initiï¿½ cherche ï¿½ optimiser sa stratï¿½gie de maniï¿½re suivante :

$$\begin{aligned}
J :&\mathcal{A} \to \mathbb{R} \\
&(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})\Big|\mathcal{Y}_0\Big]
\end{aligned}$$

oï¿½ $\mathcal{A}, (U_1, U_2)$ et A sont les mï¿½mes notations que celles dans le marchï¿½ diffusif.

Les problï¿½mes auxquels nous faisons face ici viennent toujours du fait que sur l'espace $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, les processus W^* et N^* ne sont plus des semi-martingales. Pour cela, nous allons :

- D'abord trouver une mesure de probabilitï¿½ $\mathbb{Q}$ ï¿½quivalente ï¿½ $\mathbb{P}$ sous laquelle $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indï¿½pendants $\forall t \in [0, T[$.
- Ensuite utiliser la mï¿½thode de grossissement de filtration pour construire un mouvement brownien et un processus de Poisson sur l'espace de probabilitï¿½ filtrï¿½ $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ ï¿½ l'aide de notre mesure de probabilitï¿½ $\mathbb{Q}$.
- Nous ramener finalement ï¿½ une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}_1$ par un dernier changement de probabilitï¿½.

0.2.1 Changement de probabilitï¿½

Proposition 3.1. *Il existe une mesure de probabilitï¿½ $\mathbb{Q}$ qui est ï¿½quivalente ï¿½ $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et sous cette probabilitï¿½, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indï¿½pendants $\forall t \in [0, T[$.*

0.2.2 Grossissement de filtration

Introduisons la densitï¿½ :

$$Z_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}|Y_t\Big]$$

qui satisfait l'ï¿½quation $dZ_t = Z_t\Big(\rho_1^*(t)dW_t + (\rho_2^*(t) - I_n)^* dM_t\Big)$, oï¿½ ρ_1 et ρ_2 sont des processus $\mathcal{Y}_T$-prï¿½visibles.

En corollaire, les processus

— $\widetilde{W}_t := W_t - \displaystyle\int_0^t \rho_1(s)ds$

— $\widetilde{M}_t := N_t - \displaystyle\int_0^t \kappa.\rho_2(s)ds$

sont un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensitï¿½ $(\kappa.\rho_2)$ respectivement sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

0.2.3 Probabilitï¿½ risque-neutre

Notons

$$Y_t := \varepsilon\Big(\int_0^t \big(-(\Theta + \rho_1(s))^* d\widetilde{W}_s + (\frac{q}{\rho_2(s)} - I_n)^* d\widetilde{M}_s\big)\Big),$$

oï¿½ ε est l'exponentielle de Dolï¿½ans-Dade.

Alors Y est une $(\mathcal{Y}_T, \mathbb{P})$-martingale locale positive, et $\mathbb{Q}_1 := Y\mathbb{P}$ dï¿½finit la probabilitï¿½ risque-neutre pour l'initiï¿½. Les processus $\widetilde{W}$ et $\widetilde{M}$ sont respectivement un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensitï¿½ $(q.\kappa)$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

Par calculs, nous avons $d(Y_t^{-1}) = Y_t^{-1} l_t^* d\widehat{S}_t$, avec $l_t^* := \big((\Theta + \rho_1)^*, (\frac{\rho_2}{q} - I_n)^*\big)$.

0.3 Calcul des stratï¿½gies optimales

Le problï¿½me d'optimisation $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})\Big|\mathcal{Y}_0\Big]$ sur toutes les $\mathcal{Y}$-stratï¿½gies admissibles que nous cherchons depuis le dï¿½but ont pour solutions :

$$A < T, \forall t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t \widehat{c}_t = \dfrac{X_0}{A+1} \dfrac{1}{Y}(t) \\ R_t \widehat{X}_t = \dfrac{X_0(A+1-t)}{A+1} \dfrac{1}{Y}(t) \\ \widehat{\pi}_t = (\sigma_t^*)^{-1} \dfrac{Y(t)}{Y(t^{-1})} \widehat{X}_t l_t \end{cases}$$