# Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018

# Présentation du projet

- **Modélisation et détection de délit d'initié :**
  Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?
- Objectifs :
  - Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
  - Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

# Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.

# Plan de la présentation

1 Modèle diffusif - cas particulier
- Description du modèle
- Stratégie optimale
- Résolution du problème d'optimisation
- Analyse du gain de l'initié
- Simulations

2 Modèle avec sauts
- Description du modèle
- Raisonnement
- Résolution du problème d'optimisation

3 Conclusion

4 Retour d'expérience

# Modèle diffusif - cas particulier

# Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- $W$ est un mouvement brownien à 2 dimensions dont $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que $b, r$ et $\sigma$ sont constants.

# Marché

Les prix peuvent donc s'expliciter :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 & = S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 & = S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

# Initié

- On suppose qu'à $t = 0$, l'initié dispose a une information sur le futur, $L := \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$, dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.
- Il dispose d'un capital $X_0$ à $t = 0$, consomme à une vitesse $c$, et il place la quantité $\theta^i$ sur l'actif $i$.
- $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ : la somme investie sur le $i$-ième l'actif, $i = \{1, 2\}$.

# Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps $t$ s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinançant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on obtient :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

# Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J : \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \to \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \longmapsto J\left(X_0, \pi, c\right) := \mathbb{E}\left[\int_0^A \log\left(c_t\right) dt + \log\left(\underbrace{X_A^{\pi,c}}_{\text{Richesse au temps } A}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]$$

# Stratégie optimale

- où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c)\,, \begin{cases} \pi \;\; \mathcal{Y} - \text{prévisible}, \\ c > 0 \;\; \mathcal{Y} - \text{adapté}, \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \;\; \text{et} \;\; \sigma^* \pi \in L^2\,[0;T] \;\; \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi,c} \geq 0 \;\; dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases} \right\}$$

- $A < T$ : *Temps final.*

Peut-on caractériser $\mathcal{A}$ sous une forme exploitable ?

# Raisonnement

- La filtration de $W$ empèche le changement de probabilité pour se ramener à une mesure risque-neutre.
- On va donc :
  - construire une probabilité $\mathbb{Q}$ pour laquelle $W$ est un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.
  - construisons un nouveau mouvement brownien $B$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ par la méthode de grossissement de filtration.
  - construire un mouvement brownien $\tilde{B}$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec $\mathbb{Q}_1$ probabilité risque-neutre sur $\mathcal{Y}$.

# Grossissement de filtration

- On a $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_t^2)$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2|^2)\right)T}_{=:\beta} + (\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{=:\gamma}, W(T)).$$

- La loi conditionnelle de $L$ sachant $F_t$ suit donc une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\beta + (\gamma, W(t)), ||\gamma||^2 (T - t)\right)$
- Donc $p(t,x) = \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))^2}{||\gamma||^2(T-t)}}}_{=:f(t,W(t))}$

# Grossissement de filtration

- On a montré que $p(t,x) =$
$$p(0,x) + \int_0^t \left( \underbrace{\frac{(x-\beta-(\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t))\gamma}_{:=\alpha(s,x)}, dW(s) \right)$$

# Grossissement de filtration

**Propostion :** Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de $L$ sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une $\mathcal{F}$-martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$

# Grossissement de filtration

**Proposition :** Si $M$ est une $\mathcal{F}$-martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d < M, P >_t$ est égal à $d < \alpha, \beta >_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{<\alpha(.,x),\beta>_u|_{x=L}}{p(u,L)} du$ est une $\mathcal{Y}$-martingale locale continue.

- En corollaire, le processus vectoriel $\left(B_t = W_t - \displaystyle\int_0^t \frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)} du, t \in [0,T[\right)$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

# Grossissement de filtration

On a donc construit un mouvement brownien $B$ sur l'espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, qui est l'espace de probabilité de l'initié

$$B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{(\gamma, W(T) - W(u))\,\gamma}{||\gamma||^2\,(T-u)}}_{=:l(u,L)} du.$$

# Changement de probabilité

- La forme de $l_t := l(t, L)$ ne permet le changement de probabilité que sur $[0, A], A < T$ en non sur $[0, T]$.
- On introduit donc $\xi_t = -l_t - \eta_t$ où $\eta_t = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$.

# Changement de probabilité

- On peut vérifier que $\xi_t \in \mathbb{L}^2([0, T])$.
- Soit $Y_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||\xi_s||^2 d}$, une martingale exponentielle, alors $Z_T > 0$ p.s. et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T) = Z_0 = 1$.
- On peut donc appliquer le théorème de Girsanov qui nous dit que sous $\mathbb{Q}_1 = Y.\mathbb{P}$,

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ mouvement brownien.

# Caractérisation de $\mathcal{A}$

- Pour caracteriser $\mathcal{A}$, on introduit d'abord la *stratégie de consommation-placement* $(\pi, c)$ *$\mathcal{Y}$-admissible* qui rassure que la richesse finale $X^{\pi,c}$ pour la stratégie est toujours à valeurs positives ou nulles. .
- Par propositions, on obtient

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c)\,, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[ X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}.$$

# Résolution du problème d'optimisation

Notre problème d'optimisation est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log\left(c_t\right) dt + \log\left(X_A^{\pi,c}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0\right] \leq X_0$$

# Résoltuion du problème d'optimisation

Le problème se résout en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A \log(c_t)dt + \log(X_A^{\pi,c})|\mathcal{Y}_0\Big]$$

$$+ \lambda\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\Big[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt|\mathcal{Y}_0\Big] - X_0\Big)$$

# Résolution du problème d'optimisation

La solution du problème sont de la forme

$$\begin{cases} c_t^* = I_1(\lambda^* Y_t R_t) \\ X_A^{\pi^*, c*} = I_2(\lambda^* Y_A R_A) \end{cases}$$

où $I_i(x) = ((\log(x))')^{-1} = \frac{1}{x}$ et $\lambda^*$ est la solution de l'équation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[ \int_0^A R_t Y_t I_1(\lambda^* R_t Y_t) dt + R_A Y_A I_2(\lambda^* R_A Y_A) | \mathcal{Y}_0 \right] = X_0.$$

$\Leftrightarrow \lambda^* = \frac{X_0}{A+1}$.

# Résolution du problème d'optimisation

On obtient donc

$$\begin{cases} R_t c_t^* & = \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* & = \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta_s, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|I_s + \eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

# Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$Z(t) := \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}}$$
$$= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s\|^2 ds}$$

# Forme explicite du gain

Donc

$$d\log\left(Z\left(t\right)\right)=\underbrace{\left(l_s,dW_s\right)}_{=\frac{dp(t,L)}{p(t,L)}}-\frac{1}{2}\left\|l_s\right\|^2ds=d\log\left(p\left(t,L\right)\right)$$

Donc $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant :

$$Z\left(t\right)=\frac{Z\left(0\right)}{p\left(0,L\right)}p\left(t,L\right)$$

Interprétation : pour tout $t$, le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable $L$ sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x=L$.

# Forme explicite du gain

On obtient donc :

$$\boxed{Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2 (T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}}$$

En remplaçant $(\gamma, W(T) - W(t))^2$ par son espérance $||\gamma||^2 (T - t)$,

$$Z(t) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$

raisonnement heuristique,
n'est pas une estimation de $\mathbb{E}[Z(t)]$

# Analyse du gain

Cela fournit un minorant (via $e^x \geq 1 + x$) :

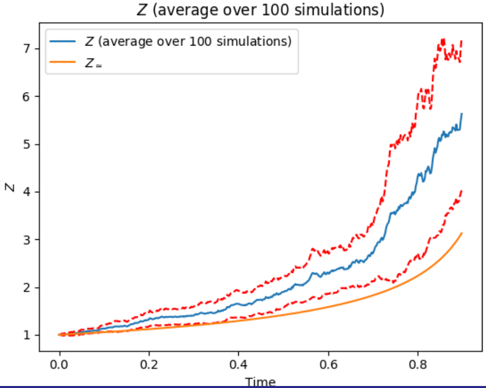
$$Z(t) \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \left( 1 + \left( \underbrace{\frac{-\left(\gamma, W(T) - W(t)\right)^2}{2||\gamma||^2 (T-t)} + \frac{\left(\gamma, W(T)\right)^2}{2||\gamma||^2 T}}_{\mathbb{E}[\cdot]=0} \right) \right)$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[Z(t)\right] \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \xrightarrow[t \to T]{} +\infty$$

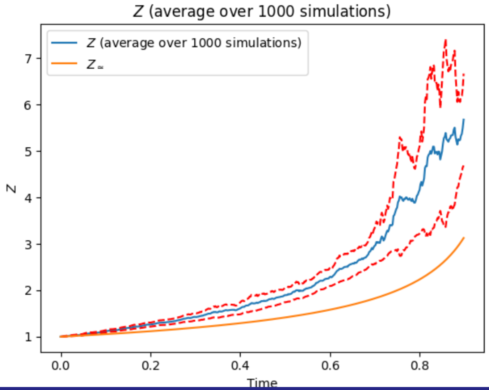
# Visualisation

Moyenne de 100 simulations de $Z$ (*simulations_averages.py*) :



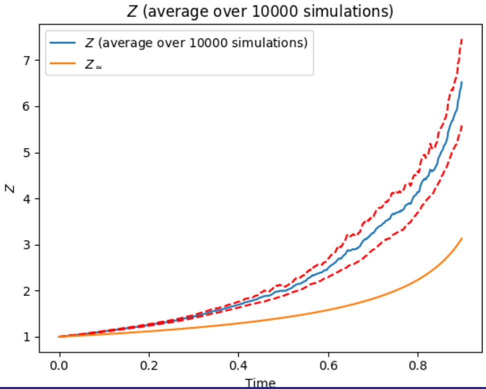
# Visualisation

Moyenne de 1000 simulations de $Z$ (*simulations_averages.py*) :



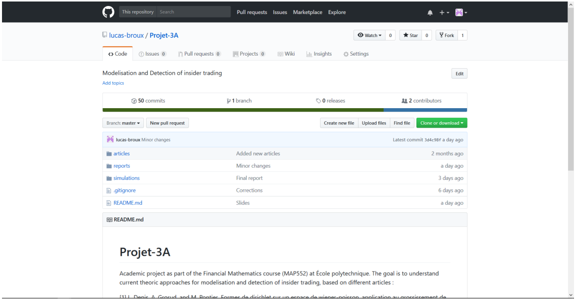
# Visualisation

Moyenne de 10000 simulations de $Z$ (*simulations_averages.py*) :



# Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : `https://github.com/lucas-broux/Projet-3A`).



# Simulations

# Simulations

# Simulations

# Modèle avec sauts

# Marché

On considère $d$ actions risquées sur le marché sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$. Les prix des actions, dirigés par un mouvement brownien $W$ de dimension $m$ et un processus de Poisson $N$ de dimension $n$, qui produit des sauts, ont pour équation :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i & = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d, m + n = d$

# Raisonnement

- On adapte les informations et le comportement de l'initié décrits dans le marché diffusif.
- L'initié cherche à optimiser la fonction

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log(c_t)dt + \log(X_A^{\pi,c})\middle|\mathcal{Y}_0\right]$$

dans l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.

- Les méthodes dans le marché diffusif s'appliquent pour ce marché aussi pour faire grossir la filtration et se ramener à une mesure risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

# Résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log(c_t)dt + \log(X_A^{\pi,c})\Big|\mathcal{Y}_0\right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\left[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0\right] \leq X_0$$

a pour solutions :

$$\text{pour } t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t c_t^* & = \frac{X_0}{A+1}\frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* & = \frac{X_0(A+1-t)}{A+1}\frac{1}{Y}(t) \\ \pi_t^* & = (\sigma_t^*)^{-1}\frac{Y(t)}{Y(t^{-1})}\widehat{X}_t I_t \end{cases}$$

# Résolution du problème d'optimisation

- avec $Y(t) = Y_0(t)/Z(t)$, la relation liant la stratégie optimale de l'initié ($Y(t)$) avec celle du non initié ($Y_0(t)$)
- $Z$ est la densité conditionnelle de $L$ sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x = L$,
- $Y_0 = \varepsilon \left( \int_0^{\cdot} \left( -\left( \eta_W \left( s \right), dW_s \right) + \left( -\eta_M \left( s \right) - I_n, dM_s \right) \right) \right)$, où
  - $\eta_W \left( t \right) :=$ $m$ premières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
  - $\eta_M \left( t \right)$ est un processus de dimension $n$, dont les composants sont supposés positifs, tel que $q_t.\kappa_t :=$ $n$ dernières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.

# Conclusion

# Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.

# Retour d'expérience

# Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
  - Identifier les passages trop techniques.
  - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.

# Merci !

# Questions ?