Étudions l'évolution de la richesse des agents dans le cas particulier où la variable connue par l'initié est $L = \ln\left(S_T^1\right) - \ln\left(S_T^2\right)$: l'initié connait la proportion qu'auront les prix de deux actifs risqués au temps T. Il est possible de vérifier que dans ce cas, toutes les hypothèses techniques nécessaires à l'établissement de la solution du problème d'optimisation sont vérifiées.
Pour simplifier et rendre exploitable les calculs, nous nous plaçons en outre dans le cas où les paramètres b, σ, et r du modèle sont constants.

0.0.1 Calcul explicite des richesses

Dans ce cas, nous pouvons expliciter la variable L : les prix du marchés sont donnés par

$$\begin{cases} S_t^1 &= S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Donc

$$L = \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}\left(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2|^2\right)\right) T}_{=:\beta} + \left(\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{=:\gamma}, W\left(T\right)\right)$$

Ainsi, L est une variable gaussienne. La loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ s'exprime donc comme une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\beta + (\gamma, W\left(t\right)), ||\gamma||^2\left(T-t\right)\right)$ qui est bien absolument continue comme annoncé dans la proposition **??**. Reprenons cette proposition dans ce cas particulier pour expliciter l. La densité conditionnelle de la loi de L sachant $\mathcal{F}_t$ est donc celle d'une loi normale :

$$p\left(t, x\right) = \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\beta-(\gamma, W(t)))^2}{||\gamma||^2(T-t)}}}_{=:f(t, W(t))}$$

Nous allons montrer que ce processus est bien une martingale. Pour cela, nous fixons x et dérivons p : par Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} dp\left(t, x\right) &= d\left(\frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\right) f\left(t, W\left(t\right)\right) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} df\left(t, W\left(t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2||\gamma||\sqrt{2\pi}\left(T-t\right)^{\frac{3}{2}}} f\left(t, W\left(t\right)\right) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} df\left(t, W\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

La formule d'Itô nous permet aussi de dériver f :

$$\begin{aligned} df\left(t, W\left(t\right)\right) &= f_x'\left(t, W\left(t\right)\right) dW\left(t\right) + \left[f_t'\left(t, W\left(t\right)\right) + \frac{1}{2} f_{xx}''\left(t, W\left(t\right)\right)\right] dt \\ &= \left[\frac{\left(x - \beta - \left(\gamma, W\left(t\right)\right)\right)}{||\gamma||^2\left(T-t\right)}\right] f\left(t, W\left(t\right)\right)\left(\gamma, dW\left(t\right)\right) + \left[\frac{-1}{2\left(T-t\right)}\right] f\left(t, W\left(t\right)\right) dt \end{aligned}$$

Ainsi, les termes temporels se simplifient et

$$dp\left(t, x\right) = \frac{\left(x - \beta - \left(\gamma, W\left(t\right)\right)\right)}{||\gamma||^3\sqrt{2\pi}\left(T-t\right)^{\frac{3}{2}}} f\left(t, W\left(t\right)\right)\left(\gamma, dW\left(t\right)\right)$$

Ainsi, p est bien une martingale et on a, comme dans la proposition, la formule

$$p(t,x) = p(t,x) + \int_0^t (\alpha(s,x), dW(s))$$

Où

$$\alpha(t,x) = \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3 \sqrt{2\pi} (T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) \gamma$$

Ainsi, nous pouvons expliciter l :

$$\begin{aligned} l_t &= \frac{\alpha(t,L)}{p(t,L)} \\ &= \frac{\left(\frac{(L - \beta - (\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3 \sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\right) f(t, W(t)) \gamma}{\left(\frac{1}{||\gamma|| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}}\right) f(t, W(t))} \\ &= \frac{(\gamma, W(T) - W(t)) \gamma}{||\gamma||^2 (T-t)} \quad \text{car } L - \beta = (\gamma, W(T)) \end{aligned}$$

Or nous savons que le processus Y, inversement proportionnel à la richesse des agents, est, en vertu des formules présentées dans la section précédente :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (l_s + \eta, dW_s - l_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

Donc le coefficient de proportionnalité de richesse entre les deux agents est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(t)} &:= \frac{Y(t)}{Y_0(t)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t (l_s + \eta, dW_s - l_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s + \eta\|^2 ds}}{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t \left[(l_s, dW_s) + (\eta, dW_s) - \|l_s\|^2 ds - (\eta, l_s) ds\right] - \frac{1}{2} \int_0^t \left[\|l_s\|^2 + \|\eta\|^2 + 2(l_s, \eta)\right] ds}}{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}} \\ &= e^{-\int_0^t [(l_s, dW_s) ds] + \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s\|^2 ds} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d \log(Z(t)) = (l_s, dW_s) - \frac{1}{2} \|l_s\|^2 ds$$

Mais remarquons qu'aussi par définition de l,

$$dp(t,L) = p(t,L)(l_s, dW_t)$$

Donc par Itô :

$$d\log\left(p\left(t,L\right)\right)=\left(l_s,dW_s\right)-\frac{1}{2}\|l_s\|^2ds=d\log\left(Z\left(t\right)\right)$$

De là, $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant, égale à sa valeur initiale :

$$\begin{aligned}Z\left(t\right)&=\frac{Z\left(0\right)}{p\left(0,L\right)}p\left(t,L\right)\\&=\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}e^{\frac{-(\gamma,W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2(T-t)}+\frac{(\gamma,W(T))^2}{2||\gamma||^2T}}\end{aligned}$$

L'interprétation est intéressante : pour tout t, la valeur de proportionnalité entre la richesse de l'initié et celle du non-initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x=L$. Ce résultat est en réalité général, et correspond à l'approche employée dans [**?**].

0.0.2 Analyse asymptotique de Z

Analysons le comportement de ce processus Z afin d'étudier l'enrichissement de l'initié par rapport au non-initié. Remplaçons les termes browniens par leur espérance dans l'expression précédente de Z :

$$\begin{aligned}Z\left(t\right)&\simeq\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}e^{\left(\frac{-\|\gamma\|^2(T-t)}{2\|\gamma\|^2(T-t)}+\frac{\|\gamma\|^2T}{2\|\gamma\|^2T}\right)}\\&=\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}\end{aligned}$$

Nous voyons qu'au temps final considéré,

$$\begin{aligned}Z\left(A\right)&\simeq\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-A}}\\&\xrightarrow[A\to T]{}+\infty\end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi le phénomène d'explosion en temps fini mentionné précédemment : plus A se rapproche de T, plus la richesse finale de l'initié est grande par rapport à celle du non-initié.

0.0.3 Simulations numériques

Afin d'étudier numériquement les comportements des agents, nous avons implémenté ces formules en *Python*. Par souci de généralité, nous avons choisi d'écrire notre code de la manière la plus générale et modulaire possible, c'est pourquoi nous décidons de ne pas le copier en annexe. Toutefois, il est disponible sur le *repository Github* du projet (`https://github.com/lucas-broux/Projet-3A`).

Dans notre simulation (*simulations_diffusive_model.py*),

$$\begin{cases} A & = 0.95 \\ d & = 2 \\ b & = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma & = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les prix évoluent de la manière suivante :

`images/simulation_1/price_1.png`

FIGURE 1 – prix

La valeur de la variable connue par l'initié est $L = -0.12$.