

# MAP-311

## Equations dirigées par un Processus de Poisson

Laurent DENIS  
Université du Maine  
ldenis@univ-lemans.fr

Ce projet comporte des questions "théoriques" numérotées de **T.1** à **T.8** et des questions nécessitant la mise en oeuvre de simulations numériques à effectuer sous Scilab, numérotées de **S.1** à **S.4**.

### 1 Processus de Poisson et processus de Poisson composés

#### 1.1 Processus de Poisson

Un processus de Poisson modélise la survenue d'événements tels que :

1. Arrivées de *spams* dans une boîte aux lettres,
2. Krachs boursiers,
3. tremblements de terre dans une région donnée,
4. etc....

Mathématiquement, il se construit ainsi : on se donne  $\lambda > 0$  un paramètre constant fixé et  $(\tau_n)_n$  une suite i.i.d. de variables aléatoires (définies sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ), de loi commune la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On rappelle que ces variables aléatoires ont donc pour densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On pose ensuite  $T_1 = \tau_1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ .

La suite croissante  $(T_n)_n$  représente la suite des instants auxquels surviennent les événements que l'on considère.

**T.1** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  a pour densité

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On pose  $N_0 = 0$  et pour tout  $t > 0$  (considéré comme un *temps*) on définit

$$N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

avec la convention  $\sum_{n=1}^0 = 0$ .

Ainsi, pour tout  $t > 0$ ,  $N_t$  représente le nombre (aléatoire) d'événements survenus durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ .

**T.2** Soit  $t > 0$ , en remarquant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \{T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}\},$$

montrer que  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

En fait, on peut montrer que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus homogène à accroissements indépendants (on l'admettra dans la suite) :

1. Si  $0 \leq s \leq t$ , alors  $N_t - N_s$  a même loi que  $N_{t-s}$ . Ainsi  $N_t - N_s$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ .
2. Soit  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  alors les variables aléatoires  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.

On va maintenant s'intéresser à la simulation d'un processus de Poisson.

**T.3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t > 0$  et  $U_1, U_2, \dots, U_n$   $n$  v.a. indépendantes de loi commune la loi uniforme sur  $[0, t]$ . On note  $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$  les statistiques d'ordre associées à  $(U_1, \dots, U_n)$ , c'est à dire que  $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$  est le vecteur  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  ré-ordonné dans l'ordre croissant. En particulier

$$U_{(1)} = \min\{U_1, \dots, U_n\} \text{ et } U_{(n)} = \max\{U_1, \dots, U_n\}.$$

Montrer que le vecteur aléatoire  $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$  a une densité que l'on calculera.

**T.4** Montrer que la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_N)$  sachant  $N_t = n$  est la même que celle de  $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ .

**S.1** En déduire un algorithme de simulation d'un processus de Poisson sur un intervalle de temps donné. La mettre en oeuvre sous Scilab et tracer quelques trajectoires d'un processus de Poisson en prenant  $\lambda = 3$  et  $t = 3$ .

## 1.2 Introduction à l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Poisson

Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on considèrera  $(\tilde{N}_t)_t$  le processus de Poisson compensé :

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

On note  $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$  l'ensemble des fonctions boréliennes (déterministes)  $f$  définies de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\int_0^{+\infty} f^2(s) ds < +\infty$ . Enfin on note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions

élémentaires  $f$  qui s'écrivent

$$f(s) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s),$$

avec  $K \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_{K-1} \in \mathbb{R}$ .

On rappelle que  $\mathcal{H}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$  muni de la norme  $\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} f^2(s) ds \right)^{1/2}$ .

**T.5** Soit  $f = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$  un élément de  $\mathcal{H}$ . On pose :

$$I_e(f) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i (\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}).$$

Montrer que  $I_e(f)$  est une variable aléatoire centrée et que

$$E[I_e(f)^2] = \lambda \|f\|_2^2.$$

**T.6** En déduire que  $I_e$  se prolonge en une unique application linéaire de  $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$  à valeurs dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $I$ , telle que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds), \quad E[I(f)^2] = \lambda \|f\|_2^2.$$

**Notation** : on pose  $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) d\tilde{N}_s$ .

**T.7** Montrer que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds)$ ,  $I(f)$  est une variable centrée.

### 1.3 Résolution numérique d'équation différentielles stochastiques dirigées par un processus de Poisson

L'intégrale stochastique introduite ci-dessus peut s'étendre à des processus aléatoires plus généraux et dans le cas particulier du processus de Poisson l'intégrale a un sens trajectoriellement. On va donc s'intéresser à des équations du type :

$$dX_t = f(X_{t-}) d\tilde{N}_t, \quad X_0 = x$$

où l'inconnu est le processus  $X$  continu à droite,  $x \in \mathbb{R}$  donné et  $f$  une fonction Lipschitzienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont donnés.

L'interprétation de cette équation est très simple : si on note  $(T_n)_n$  les instants de sauts de  $N$  alors entre deux instants de sauts  $T_i$  et  $T_{i+1}$ , la fonction  $t \rightarrow X_t$  est continue sur  $[T_i, T_{i+1}[$  et satisfait l'EDO :

$$y'_t = -\lambda f(y_t) dt,$$

et à  $T_i$  la fonction  $t \rightarrow X_t$  à un saut d'amplitude  $\Delta X_{T_i} = X_{T_i} - X_{T_i^-} = f(X_{T_i^-})$ .

Remarques : Il faut bien voir que l'on obtient ainsi un *processus stochastique* car la suite  $(T_n)_n$  est aléatoire, autrement dit on résout cette équation *presque-sûrement*. Le fait que ce soit le coefficient  $f(X_{t-})$  (qui est continu à gauche) devant  $d\tilde{N}_t$  est important. D'un point de vue heuristique cela s'explique par le fait que dans un cadre

beaucoup plus général de processus à sauts dont la taille des sauts est également aléatoire, si  $X$  représente par exemple la valeur d'un portefeuille (en finance) ou la richesse d'un joueur,  $t \rightarrow f(X_t^-)$  représente sa *stratégie*. Si le jeu est équitable, juste avant le saut il ne peut pas anticiper la taille de celui-ci et donc sa stratégie ne peut dépendre que du passé strictement avant l'instant de saut.

### 1.3.1 L'exponentielle stochastique dite de Doléans-Dade

On se donne  $\sigma, x > 0$  et on considère l'équation suivante :

$$dX_t = \sigma X_t d\tilde{N}_t, \quad X_0 = x.$$

**T.8** Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad X_t = xe^{-\lambda \sigma t}(\sigma + 1)^{N_t},$$

et vérifier que pour tout  $t \geq 0$ ,  $E[X_t] = x$ .

**S.2** Tracer quelques trajectoires de  $X$  sur l'intervalle de temps  $[0, 4]$  en prenant  $\sigma = 1$  et  $\lambda = 2$ .

### 1.3.2 Une équation plus générale

On prend ici  $\lambda = 3$  et on considère l'équation suivante :

$$dX_t = (2 + \cos(X_{t-}))d\tilde{N}_t, \quad X_0 = 1.$$

**S.3** Résoudre cette équation à l'aide de Scilab et tracer plusieurs trajectoires sur l'intervalle de temps  $[0, 3]$ .

**S.4** En simulant un grand nombre de trajectoires vérifier que l'espérance de  $X_t$  reste constante (on pourra se placer sur  $[0, 3]$  et estimer  $E[X_t]$  pour une dizaine de valeurs de  $t$  réparties entre 0 et 3).

## Références

- [1] Foata D. et Fuchs A. *Processus Stochastiques*, Dunod, 2004.