

Étudions désormais la stratégie de l'initié. Nous supposons que celui-ci optimise sa stratégie au sens suivant : il optimise la fonction de perte :

$$J: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E} \left[\int_0^A U_1(c_t) dt + U_2(X_A^{\pi, c}) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

où :

- \mathcal{A} est l'ensemble des stratégies *admissibles* i.e. des stratégies (π, c) telles que π est \mathcal{Y} -prévisible, c est \mathcal{Y} -adapté, $c > 0$, $\int_0^T c_s ds < +\infty$ et $\sigma^* \pi \in L^2[0; T]$ \mathbb{P} -p.s., et telle que la richesse engendrée par cette stratégie satisfasse $X^{\pi, c} \geq 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ -p.s.
- U_1 et U_2 sont des *fonctions d'utilité* i.e. positives, croissantes, concaves, \mathcal{C}^1 avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} U'_i(x) = 0$. Par la suite, nous supposons $U_1 = U_2 = \log$.
- A est un temps strictement inférieur à T , qui correspondra au *temps final* de notre analyse. En effet, des phénomènes d'explosion en temps fini lorsque $A \rightarrow 1$, décrits avec précision dans [?], nous empêchent d'étudier l'évolution de l'initié sur $[0; T]$ tout entier. D'un point de vue économique, ces phénomènes traduisent le fait que plus le temps t se rapproche de T , moins l'information obtenue par l'initié est pertinente.

L'interprétation est la suivante : l'initié choisit, parmi toutes les stratégies admissibles, celle qui optimise en moyenne son utilité (fonction de sa consommation et de sa richesse finale) sachant les informations connues sur le marché en $t = 0$ ainsi que l'information supplémentaire L .

La difficulté ici est de caractériser \mathcal{A} . En effet, W est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mais pas sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, ce qui nous empêche de faire un simple changement de probabilité comme dans les cas usuels pour nous ramener à la probabilité risque-neutre. Le raisonnement est adapté suivant les étapes suivantes :

1. *Changement de probabilité* : nous construisons une probabilité \mathbb{Q} pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.
2. *Grossissement de filtration* : nous construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.
3. *Changement de probabilité* : nous construisons un mouvement brownien \tilde{B} sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec \mathbb{Q}_1 probabilité risque-neutre sur \mathcal{Y} .

Dans les trois sous-sections suivantes, nous présentons les résultats correspondant à ces étapes, mais nous en omettons volontairement les hypothèses et les preuves, très techniques, disponibles dans [?]

0.0.1 Étape 1 : Changement de probabilité

Proposition 0.1 (T.Jeulin). *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), il existe une mesure de probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} sur \mathcal{Y}_A , telle que pour $t \leq A$, \mathcal{T}_t et $\sigma(L)$ sont \mathbb{Q} -indépendantes.*

En outre, $(W_t, t \leq A)$ est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.

0.0.2 Étape 2 : Grossissement de filtration

Proposition 0.2. *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t est absolument continue et :*

- *il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une \mathcal{F} -martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$*
- *si M est une \mathcal{F} -martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d \langle M, P \rangle_t$ est égal à $d \langle \alpha, \beta \rangle_t$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{\langle \alpha(\cdot, x), \beta \rangle_u |_{x=L}}{p(u, L)} du$ est une \mathcal{Y} -martingale locale continue.*

En corollaire, le processus vectoriel $\left(B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{\alpha(u, L)}{p(u, L)}}_{=: l_u} du, t \in [0, T[\right)$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, qui est l'espace de probabilité de l'initié.

Reformulons l'équation d'évolution de la richesse de l'initié sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$: en remplaçant dW_t par $dB_t + l_t dt$, l'équation (1) des prix des actions sur le marché financier devient

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i (b_s^i + l_s^i) ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dB_s, 0 \leq t < T, i = 1, \dots, d. \quad (1)$$

Avec cette nouvelle équation,

$$\begin{aligned} dX_t &= \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \theta_t^i (S_t^i b_t^i dt + S_t^i l_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dB_t) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i + l_t^i) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \sigma_t^i dB_t + (X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i + l_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \sigma_t^i dB_t \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dB_t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d \langle X, R \rangle_t \\ &= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dB_t) \\ &= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dB_t) \end{aligned}$$

Ainsi, sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, la richesse X actualisée de l'initié vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 \int_0^t (R_s \pi_s, b_s + l_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dB_s) \quad (2)$$

Nous pouvons voir ici que le processus l_s représente les informations dont dispose l'initié. Si $l_s = 0, 0 \leq s \leq t \leq T$, nous retrouvons l'équation (2) de richesse du non initié.

0.0.3 Étape 3 : Changement de probabilité

L'idée est désormais de se ramener à une probabilité neutre au risque sur \mathcal{Y} . Pour cela, nous réalisons une transformation de type Girsanov. Notons que la forme du processus l ne nous permet de faire le changement de probabilité que sur l'intervalle $[0, A]$ et non sur $[0, T]$. Il n'y a aucune raison que la martingale locale de changement de probabilité soit une vraie martingale jusqu'en T d'où une "explosion" des processus évoqués ci-dessus.

Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nouveau processus $\xi_t = -l_t - \eta_t$ (qui existe sous hypothèses).

Proposition 0.3. *Posons $M_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi_s\|^2 ds}$ pour $t \in [0, A], A < T$. Alors M est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$ -martingale uniformément intégrable et, sous $\mathbb{Q}_1 = M.\mathbb{P}$, le processus*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -mouvement brownien et les prix actualisés sont des $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -martingales locales.