

Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018

Présentation du projet

■ Modélisation et détection de délit d'initié :

Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?

■ Objectifs :

- Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
- Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.

Plan de la présentation

1 Modèle diffusif - cas particulier

- Description du modèle
- Stratégie optimale
- Résolution du problème d'optimisation
- Analyse du gain de l'initié
- Simulations

2 Modèle avec sauts

- Description du modèle
- Raisonnement
- Résolution du problème d'optimisation

3 Conclusion

4 Retour d'expérience

Modèle diffusif - cas particulier

Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- W est un mouvement brownien à 2 dimensions dont \mathcal{F} est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que b, r et σ sont constants.

Marché

Les prix peuvent donc s'expliciter :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 &= S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2} \|\sigma_2\|^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Initié

- On suppose qu'à $t = 0$, l'initié dispose d'une information sur le futur, $L := \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$, dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.
- Il dispose d'un capital X_0 à $t = 0$, consomme à une vitesse c , et il place la quantité θ^i sur l'actif i .
- $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$: la somme investie sur le i -ième l'actif, $i = \{1, 2\}$.

Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps t s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinçant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on obtient :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J: \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) := \mathbb{E} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log \left(\underbrace{X_A^{\pi, c}}_{\text{Richesse au temps } A} \right) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

Stratégie optimale

■ où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \begin{cases} \pi \text{ } \mathcal{Y} - \text{prévisible,} \\ c > 0 \text{ } \mathcal{Y} - \text{adapté,} \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \text{ et } \sigma^* \pi \in L^2[0; T] \text{ } \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi, c} \geq 0 \text{ } dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases} \right\}$$

■ $A < T$: *Temps final*.

Peut-on caractériser \mathcal{A} sous une forme exploitable ?

Raisonnement

- La filtration de W empêche le changement de probabilité pour se ramener à une mesure risque-neutre.
- On va donc :
 - construire une probabilité \mathbb{Q} pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.
 - construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ par la méthode de grossissement de filtration.
 - construire un mouvement brownien \tilde{B} sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec \mathbb{Q}_1 probabilité risque-neutre sur \mathcal{Y} .

Grossissement de filtration

- On a $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_t^2)$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + ((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(\|\sigma_1\|^2 - \|\sigma_2\|^2))T}_{=: \beta} + \underbrace{(\sigma_1 - \sigma_2, W(T))}_{=: \gamma}.$$

- La loi conditionnelle de L sachant F_t suit donc une loi gaussienne $\mathcal{N}(\beta + (\gamma, W(t)), \|\gamma\|^2(T-t))$

- Donc $p(t, x) = \frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))^2}{\|\gamma\|^2(T-t)}}}_{=: f(t, W(t))}$

Grossissement de filtration

- On a montré que $p(t, x) =$

$$p(0, x) + \int_0^t \left(\underbrace{\frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^3 \sqrt{2\pi} (T - t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) \gamma, dW(s)}_{:= \alpha(s, x)} \right)$$

Grossissement de filtration

Proposition : Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une \mathcal{F} -martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$

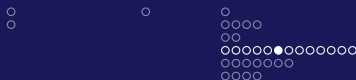


Grossissement de filtration

Proposition : Si M est une \mathcal{F} -martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d \langle M, P \rangle_t$ est égal à $d \langle \alpha, \beta \rangle_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{\langle \alpha(\cdot, x), \beta \rangle_u |_{x=L}}{p(u, L)} du$ est une \mathcal{Y} -martingale locale continue.

- En corollaire, le processus vectoriel

$\left(B_t = W_t - \int_0^t \frac{\alpha(u, L)}{p(u, L)} du, t \in [0, T[\right)$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.



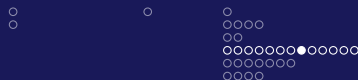
Grossissement de filtration

On a donc construit un mouvement brownien B sur l'espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, qui est l'espace de probabilité de l'initié

$$B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{(\gamma, W(T) - W(u)) \gamma}{\|\gamma\|^2 (T - u)}}_{=: l(u, L)} du.$$

Changement de probabilité

- La forme de $I_t := I(t, L)$ ne permet le changement de probabilité que sur $[0, A]$, $A < T$ en non sur $[0, T]$.
- On introduit donc $\xi_t = -I_t - \eta_t$ où $\eta_t = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$.



Changement de probabilité

- On peut vérifier que $\xi_t \in \mathbb{L}^2([0, T])$.
- Soit $Y_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi_s\|^2 ds}$, une martingale exponentielle, alors $Z_T > 0$ p.s. et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T) = Z_0 = 1$.
- On peut donc appliquer le théorème de Girsanov qui nous dit que sous $\mathbb{Q}_1 = Y \cdot \mathbb{P}$,

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ mouvement brownien.

Caractérisation de \mathcal{A}

- Pour caractériser \mathcal{A} , on introduit d'abord la *stratégie de consommation-placement* (π, c) \mathcal{Y} -admissible qui rassure que la richesse finale $X^{\pi, c}$ pour la stratégie est toujours à valeurs positives ou nulles. .
- Par propositions, on obtient

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}.$$

Résolution du problème d'optimisation

Notre problème d'optimisation est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi,c}) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0$$

Résolution du problème d'optimisation

Le problème se résout en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi,c}) | \mathcal{Y}_0 \right] \\ & + \lambda \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathcal{Y}_0 \right] - X_0 \right) \end{aligned}$$

Résolution du problème d'optimisation

La solution du problème sont de la forme

$$\begin{cases} c_t^* = I_1(\lambda^* Y_t R_t) \\ X_A^{\pi^*, c^*} = I_2(\lambda^* Y_A R_A) \end{cases}$$

où $I_i(x) = ((\log(x)))'^{-1} = \frac{1}{x}$ et λ^* est la solution de l'équation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A R_t Y_t I_1(\lambda^* R_t Y_t) dt + R_A Y_A I_2(\lambda^* R_A Y_A) | \mathcal{Y}_0 \right] = X_0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda^* = \frac{X_0}{A+1}.$$

Résolution du problème d'optimisation

On obtient donc

$$\begin{cases} R_t c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y} (t) \\ R_t X_t^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y} (t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta_s, dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}} \\ &= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s\|^2 ds} \end{aligned}$$

Forme explicite du gain

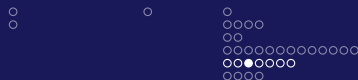
Donc

$$d \log (Z(t)) = \underbrace{(I_s, dW_s)}_{= \frac{dp(t,L)}{p(t,L)}} - \frac{1}{2} \|I_s\|^2 ds = d \log (p(t, L))$$

Donc $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant :

$$Z(t) = \frac{Z(0)}{p(0, L)} p(t, L)$$

Interprétation : pour tout t , le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant \mathcal{F}_t , prise en $x = L$.



Forme explicite du gain

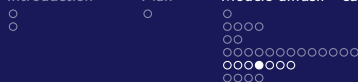
On obtient donc :

$$Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T}}$$

En remplaçant $(\gamma, W(T) - W(t))^2$ par son espérance $\|\gamma\|^2(T-t)$,

$$Z(t) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$

 raisonnement heuristique, n'est pas une estimation de $\mathbb{E}[Z(t)]$



Analyse du gain

Cela fournit un minorant (via $e^x \geq 1 + x$) :

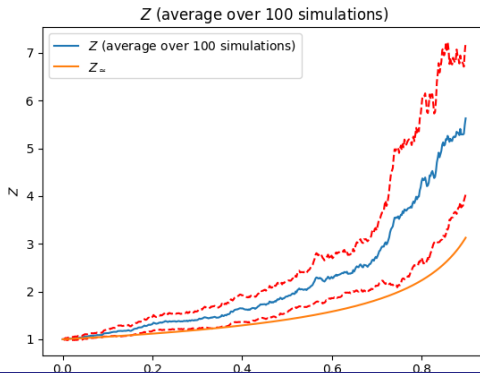
$$Z(t) \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T} \right)}_{\mathbb{E}[\cdot]=0} \right)$$

Donc

$$\mathbb{E}[Z(t)] \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \xrightarrow{t \rightarrow T} +\infty$$

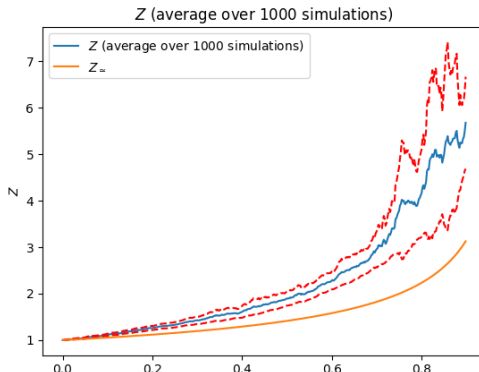
Visualisation

Moyenne de 100 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



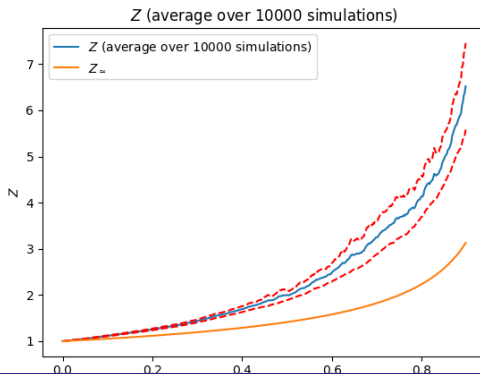
Visualisation

Moyenne de 1000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



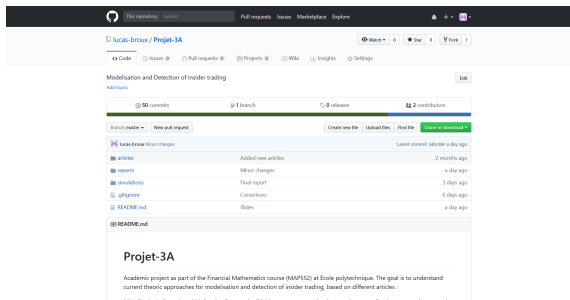
Visualisation

Moyenne de 10000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : <https://github.com/lucas-broux/Projet-3A>).

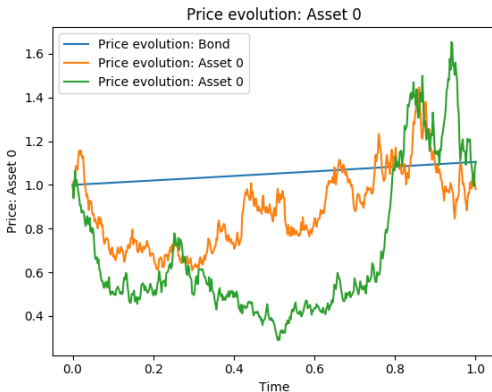


Exemple de simulation

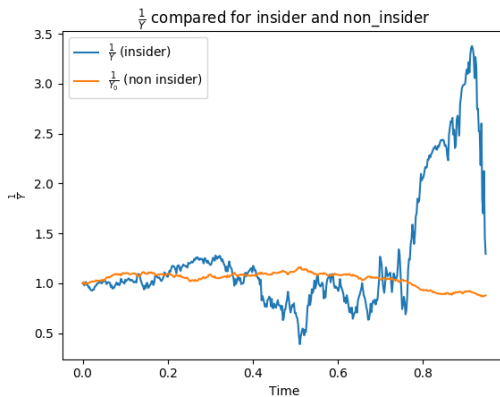
simulations_diffusive_model.py,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 1 \\ A = 0.95 \\ d = 2 \\ r = 0.1 \\ b = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Exemple de simulation



Exemple de simulation



Choix des paramètres

On a

$$\frac{1}{Y_0(t)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η grand (σ petit ou/et b éloigné de r) : le terme en $t\|\eta\|^2$ domine : explosion de la richesse.

Choix des paramètres

On a

$$\frac{1}{Y_0(t)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η grand (σ petit ou/et b éloigné de r) : le terme en $t\|\eta\|^2$ domine : explosion de la richesse.

Interprétation : faible volatilité et/ou fort drift : les agents peuvent établir de bonnes stratégies.

Choix des paramètres

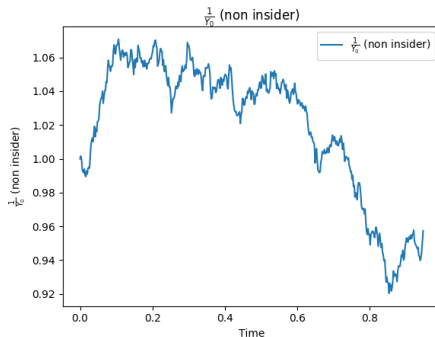
On a

$$\frac{1}{Y_0(t)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η petit (σ grand ou/et b proche de r) : le terme en (η, W_t) domine : caractère "aléatoire" de la richesse.

Simulations

$$\begin{cases} r = 0.1 \\ b = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.05 \\ -0.75 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Choix des paramètres

On a

$$\frac{1}{Y_0(t)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η petit (σ grand ou/et b proche de r) : le terme en (η, W_t) domine : caractère "aléatoire" de la richesse.

Interprétation : forte volatilité et/ou drift incertain : les agents ont du mal à établir de bonnes stratégies.

Modèle avec sauts

Marché

On considère d actions risquées sur le marché sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$. Les prix des actions, dirigés par un mouvement brownien W de dimension m et un processus de Poisson N de dimension n , qui produit des sauts, ont pour équation :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)^*_j(s) \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, d, m + n = d$$

Raisonnement

- On adapte les informations et le comportement de l'initié décrits dans le marché diffusif.
- L'initié cherche à optimiser la fonction

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi, c}) \middle| \mathcal{Y}_0 \right]$$

dans l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.

- Les méthodes dans le marché diffusif s'appliquent pour ce marché aussi pour faire grossir la filtration et se ramener à une mesure risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

Résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log(X_A^{\pi, c}) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0$$

a pour solutions :

$$\text{pour } t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ \pi_t^* &= (\sigma_t^*)^{-1} \frac{Y(t)}{Y(t-1)} \hat{X}_t / l_t \end{cases}$$

Résolution du problème d'optimisation

- avec $Y(t) = Y_0(t)/Z(t)$, la relation liant la stratégie optimale de l'initié ($Y(t)$) avec celle du non initié ($Y_0(t)$)
- Z est la densité conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t , prise en $x = L$,
- $Y_0 = \varepsilon \left(\int_0^\cdot (- (\eta_W(s), dW_s) + (-\eta_M(s) - l_n, dM_s)) \right)$, où
 - $\eta_W(t) := m$ premières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t l_d)$.
 - $\eta_M(t)$ est un processus de dimension n , dont les composants sont supposés positifs, tel que $q_t \cdot \kappa_t := n$ dernières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t l_d)$.

Conclusion

Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.



Retour d'expérience

Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
 - Identifier les passages trop techniques.
 - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.



Merci !

Questions ?

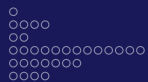
Introduction



Plan



Modèle diffusif - cas particulier



Modèle avec sauts



Conclusion



Retour d'expérience

