Étudions l'évolution de la richesse des agents dans le cas particulier où la variable connue par l'initié est $L = \ln\left(S_T^1\right) - \ln\left(S_T^2\right)$: l'initié connait la proportion qu'auront les prix de deux actifs risqués au temps T. Il est possible de vérifier que dans ce cas, toutes les hypothèses techniques nécessaires à l'établissement de la solution du problème d'optimisation sont vérifiées.
Pour simplifier et rendre exploitable les calculs, nous nous plaçons en outre dans le cas où les paramètres b, σ, et r du modèle sont constants.
Dans ce cas, nous pouvons expliciter la variable L : les prix du marchés sont donnés par

$$\begin{cases} S_t^1 &= S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Donc

$$L = \underbrace{\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}\left(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2|^2\right)\right)T}_{=:\beta} + \left(\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{=:\gamma}, W(T)\right)$$

Ainsi, L est une variable gaussienne. La loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ s'exprime donc comme une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\beta + (\gamma, W(t)), ||\gamma||^2 (T-t)\right)$ qui est bien absolument continue comme annoncé dans la proposition **??**. Reprenons cette proposition dans ce cas particulier pour expliciter l. La densité conditionnelle de la loi de L sachant $\mathcal{F}_t$ est donc celle d'une loi normale :

$$p(t,x) = \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))^2}{||\gamma||^2(T-t)}}}_{=:f(t,W(t))}$$

Nous allons montrer que ce processus est bien une martingale. Pour cela, nous fixons x et dérivons p : par Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} dp(t,x) &= d\left(\frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\right) f(t,W(t)) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} df(t,W(t)) \\ &= \frac{1}{2||\gamma||\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t,W(t)) + \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} df(t,W(t)) \end{aligned}$$

La formule d'Itô nous permet aussi de dériver f :

$$\begin{aligned} df(t,W(t)) &= f_x^{'}(t,W(t))\, dW(t) + \left[f_t^{'}(t,W(t)) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,W(t))\right] dt \\ &= \left[\frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))}{||\gamma||^2(T-t)}\right] f(t,W(t))(\gamma, dW(t)) + \left[\frac{-1}{2(T-t)}\right] f(t,W(t))\, dt \end{aligned}$$

Ainsi, les termes temporels se simplifient et

$$dp(t,x) = \frac{(x-\beta-(\gamma,W(t)))}{||\gamma||^3\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t,W(t))(\gamma, dW(t))$$

Ainsi, p est bien une martingale et on a, comme dans la proposition, la formule

$$p(t,x) = p(t,x) + \int_0^t (\alpha(s,x), dW(s))$$

Où

$$\alpha(t,x) = \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3 \sqrt{2\pi}\,(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t))\,\gamma$$

Ainsi, nous pouvons expliciter l :

$$\begin{aligned}
l_t &= \frac{\alpha(t,L)}{p(t,L)} \\
&= \frac{\dfrac{(L - \beta - (\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3 \sqrt{2\pi}\,(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t))\,\gamma}{\dfrac{1}{||\gamma|| \sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} f(t, W(t))} \\
&= \frac{(\gamma, W(T) - W(t))\,\gamma}{||\gamma||^2 (T-t)} \quad \text{car } L - \beta = (\gamma, W(T))
\end{aligned}$$