Modélisation et détection de délit d'initié
Soutenance mi-parcours P3A

Heang Kitiyavirayuth, Lucas Broux

12 décembre 2017

1 Introduction
- Sujet choisi, problématique générale
- Objectifs du projet

2 Compréhension actuelle du problème
- Modélisation mathématique

3 Simulations
- Modèle et hypothèses
- Résultats obtenus

4 Conclusion

Introduction

Sujet choisi

- **Modélisation et détection de délit d'initié.**

Sujet choisi

- **Modélisation et détection de délit d'initié.**
- Problématique concrète mais actuellement assez mal résolue.

Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :

Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  1. A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.

Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  1. A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.
  2. H. Föllmer, P. Imkeller, Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist 29.4, 569-586, 1993.

Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  1. A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.
  2. H. Föllmer, P. Imkeller, Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist 29.4, 569-586, 1993.
- Pour la suite du projet ? A préciser...

Compréhension actuelle du problème

Modèle de marché financier

On considère un modèle de marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0, T]), \mathbb{P})$. Les prix des actions (ici d actions) évoluent selon l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s,$$
$$0 \leq t \leq T, S_0 \in \mathbb{R}^d, i = 1, ..., d$$

Modèle de marché financier

où :

- W est un mouvement brownien de d-dimension.
- Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0, T]$ et $\mathcal{F}$-adaptés.
- La matrice σ_t est inversible.
- S^0 évolue d'après l'équation $S_t^0 = 1 + \int_0^t S_s^0 r_s ds$.

H1 : La matrice σ est inversible, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -presque sûrement, $\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t\mathbf{1})$ vérifie $\exists A \in]0, T[, \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A]$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[exp(k||\eta_s||^2)] \leq C$.

Informations sur l'initié

Un des investisseurs sur le marché connait l'information $\mathcal{F}_t$ qui est l'information normalement disponible au temps t, et il connait aussi une variable aléatoire $L \in L^1(\mathcal{F}_T)$. L'information totale dont il dispose est donc $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$ (que l'on note $\mathcal{Y}_t$), qui est à priori plus grande que $\mathcal{F}_t$.

Avec cette information $\mathcal{Y}_t$, l'initié cherche à optimiser sa stratégie de consommation et de placement sur le marché.

Informations sur l'initié

- L'initié dispose d'un capital X_0 à l'instant $t = 0$.
- Il consomme à une vitesse c qui est un processus positif et $\mathcal{Y}$-adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$ p.s.
- Il place sur l'actif i la quantite θ^i et on note $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, ..., d$.
- Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds.$$

Informations sur l'initié

- Son portefeuille est considéré autofinançant, c'est-à-dire :

$$\mathbf{H2} : dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, sous la probabilité $\mathbb{P}$, la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds =$$
$$X_0 + \int_0^t \langle R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1} \rangle ds + \int_0^t \langle R_s \pi_s, \sigma_s dW_s \rangle$$

Méthode du grossissement de la filtration brownienne

HC : $L \in \mathbb{D}^{2,1}$ est tel que $\int_t^T ||D_u L||^2 du > 0, \mathbb{P} - p.s. \forall t \in [0, T[$, ou D est le gradient stochastique usuel associé à W et $\mathbb{D}^{p,q}$ est l'espace de Sobolev construit à l'aide de D.

Sous **HC**, on a :

- La loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \longmapsto p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, t, x) dW_s$, qui est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale.

Méthode du grossissement de la filtration brownienne

- Si $M = M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale continue, alors le crochet $d\langle M, P\rangle_t = \langle \alpha, \beta\rangle_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{\langle \alpha(.,x), \beta\rangle_{u|x=L}}{p(u,L)} du$ est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-martingale locale.
- En corollaire, on obtient que le processus vectoriel $(B_t = W_t - \int_0^t l_u du, t \in [0, T[)$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{Y}_t, t \in [0, T[), \mathbb{P})$, où $l_u = \frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)}$.

Changement de probabilité

On effectue un changement de probabiliteé pour se ramener à une mesure neutre au risque.

- Pour ce faire, il faut définir $\xi_t = -l_t - \eta_t$.

HN : $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[exp\frac{1}{2}\int_0^A ||\xi_s||^2 ds] < \infty$.
HP : $\exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A], \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[expk||\xi_s||^2] \leq C$.

- Posons $M_t = exp[\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||\xi_s||^2 ds], t \in [0, A]$. Alors M_t est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable.

Changement de probabilité

- Sous $\mathbb{Q} = M.\mathbb{P}$, le processus $(\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds, t \in [0, A])$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{Y}_t, t \in [0, A]), \mathbb{Q})$.
- La richesse X actualisée de l'initié vérifie alors, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 + \int_0^t \langle R_s \pi_s, \sigma_s d\tilde{B}_s \rangle$$

Stratégie de consommation-placement $\mathcal{Y}$-admissible

Une stratégie de consommation-placement (π, c) $\mathcal{Y}$-admissible est un couple de processus $\mathcal{Y}$-adaptés tels que $c \geq 0$, $\int_0^T c_s ds < \infty$ $p.s.$, $\sigma^* \pi$ appartient presque sûrement à $L^2[0, T]$, et la richesse $X^{\pi,c}$ obtenue par cette stratégie est à valeurs positives ou nulles $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement.

Proposition (Contrainte)

- Sous **HC** et **HN** ou **HP**, soit X_0 une variable $\mathcal{Y}_0$-mesurable positive. Alors pour (π, c) un couple admissible, et $X_A^{\pi,c}$ la richesse finale associée, on a :

$$\mathbb{E}_Q[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathcal{Y}_0] \leq X_0.$$

Proposition (Contrainte)

- Réciproquement, pour une richesse initiale strictement positive $X_0 \in L^1(\mathcal{Y}_0)$ donnée, une consommation c, un processus $\mathcal{Y}$-adapté positif tel que $\int_0^A c_s ds < \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s., et une variable aléatoire $Z \in L^1(\mathcal{Y}_A, \mathbb{Q})$ telle que $\mathbb{E}_Q[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathbb{Y}_0] = X_0$, alors il existe un portefeuille π $\mathcal{Y}$-prévisible tel que (π, c) est admissible et $X_A^{\pi,c} = Z$.

Cette proposition sera notre contrainte du problème d'optimisation.

Problème d'optimisation

- L'initié essaie d'optimiser sa stratégie pour maximiser sa richesse et sa consommation.
- On choisit comme critère d'optimisation de la stratégie un couple de fonctions d'utilité (U_1, U_2) croissantes, concaves et positives.
- Il s'agit donc de réaliser :

$$\max_{(\pi,c)}\{J(\pi,c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})|\mathcal{Y}_0]\}$$

$$\text{sous contrainte } \mathbb{E}_Q[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt|\mathcal{Y}_0] \leq X_0.$$

Résolution du problème d'optimisation

Sous **H1**, **H2**, **HC** et **HN** ou **HP**, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il existe une stratégie optimale $(\pi*, c*)$ telle que

$$J(\pi^*, c^*) = \max\{J(\pi, c), (\pi, c) \text{ admissibles }\}$$

de la forme :

$$\begin{aligned} c_t^* &= I_1(\lambda^* M_t R_t) \\ X_A^{\pi^*, c^*} &= I_2(\lambda^* M_A R_A) \end{aligned}$$

Résolution du problème d'optimisation

où

$I_i = (U_i')^{-1}$

$\chi(y) = \mathbb{E}_p[\int_0^A R_t M_t I_1(yR_t M_t)dt + R_A M_A I_2(yR_A M_A)|\mathcal{Y}_0]$

La valeur optimale du problème est donc :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U_2 \circ I_2(\lambda^* M_A R_A) + \int_0^A U_1 \circ I_1(\lambda^* M_t R_t)dt|\mathcal{Y}_0].$$

Test statistique

On veut proposer un test statistique dans le cas :

- $U_i(x) = log(x), i = 1, 2$, donc $I_i(x) = (U_i')^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.
- $L = \ln\left(S_1\left(T\right)\right) - \ln\left(S_2\left(T\right)\right)$

L'optimisation s'explicite :

- $\lambda^* = \frac{A+1}{X_0}$.
- $c_t^* R_t = \frac{X_0}{A+1}(M_t)^{-1}$.
- $X_A^* R_A = \frac{X_0}{A+1}(M_A)^{-1}$.

Test statistique

On oppose les deux hypothèses :

- $H_0 : L \in \mathcal{F}_0$ (L'agent n'est pas initié)
- $H_1 : L \notin \mathcal{F}_0$ (L'agent est initié)

L'idée est de comparer les consommations :

- $log(R_t c_t^*) = log(\frac{X_0}{A+1}) + \int_0^t \eta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t ||\eta_s||^2 ds$ sous H_0
- $log(R_t c_t^*) = log(\frac{X_0}{A+1}) + \int_0^t \eta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t ||\eta_s||^2 ds + \log q(t, L)$ sous H_1

Test statistique

On partitionne $[0; T]$ en $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ et on définit pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$Y_i := \log\left(R_{t_{i+1}} c_{t_{i+1}}\right) - \log\left(R_{t_i} c_{t_i}\right)$$

Sous H_0,

$$\begin{aligned} Y_i &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\eta_s||^2 ds \\ &\sim N\left(\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\eta_s||^2 ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\eta_s||^2 ds\right) \end{aligned}$$

Sous H_1, il y a un terme supplémentaire $log\dfrac{q\left(t_{i+1}, L\right)}{q\left(t_i, L\right)}$

Test statistique

On teste donc la variable Y_i par un test de région critique au niveau $\alpha = 0.05$:

$$RC_i = \left\{ \omega : \| Y_i(\omega) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\eta_s||^2 ds| > 1.96 \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_s ds} \right\}$$

Simulations

On se place dans la situation simplifiée suivante :

- Le marché consiste en un actif sans risque (r) et deux actifs risqués (b_i, σ_i, $i = 1, 2$), sous un mouvement brownien $W = (W_1, W_2)$
- La variable aléatoire connue par l'initié est $L = \ln(S_1(T)) - \ln(S_2(T))$
- La fonction d'utilité à optimiser est logarithmique : $U_i = \log$

On note :

- A : temps final considéré
- x : richesse initiale.

Les valeurs de richesse optimales en A sont :

- $X_A^* = \left(\frac{xe^{rA}}{A+1}\right) {M_A}^{-1}$ pour le non initié
- $X_A^* = \left(\frac{xe^{rA}}{A+1}\right) {\tilde{M}_A}^{-1}$ pour l'initié

où $(t \in [0; A])$:

$$\begin{cases} M_t & := e^{-\eta \cdot W_t - \frac{t\|\eta\|^2}{2}} \\ \tilde{M}_t & := e^{-\int_0^t (l_s+\eta, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|l_s+\eta\|^2 ds} \end{cases}$$

Avec

- $\eta := \sigma^{-1}(b - r\mathbb{1}) = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - r}{\sigma_1} \\ \frac{b_2 - r}{\sigma_2} \end{bmatrix}$
- $\gamma := \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{bmatrix}$
- $I_r := \left(\frac{\gamma \cdot (W_T - W_r)}{T - r} \right) \gamma$ pour $r \in [0; A]$
- $B_t := W_t - \int_0^t I_u du$ pour $t \in [0; A]$

Code : https://github.com/lucas-broux/Projet-3A

Marché

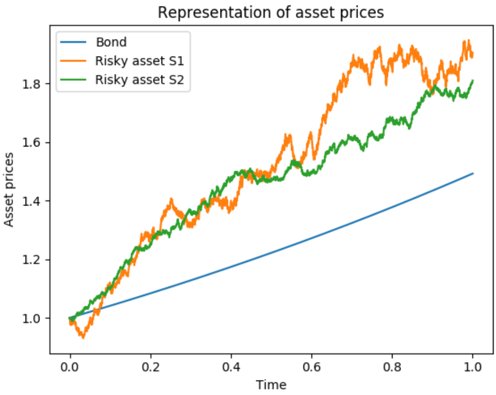

Figure – Marché simulé

Richesses

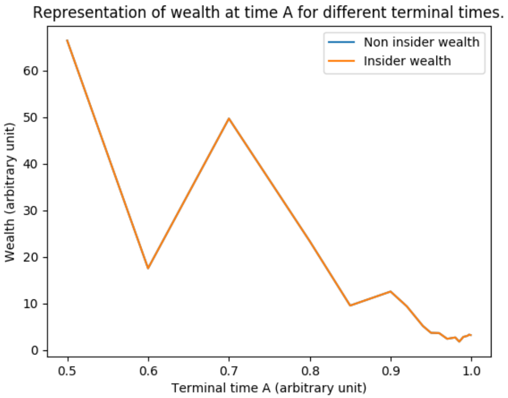

Figure – Richesse optimale des agents en A

Richesses

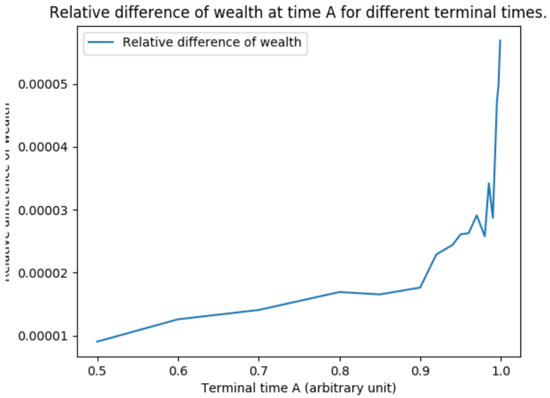

Figure – Écart relatif des richesses

Conclusion

Résumé

- Compréhension générale du raisonnement de l'article.
- Implémentation informatique des formules dans un cas particulier.

Perspectives du projet

Approfondissement théorique :

- Cas plus réaliste : "sauts" de valeur dans le marché.
- Études de cas particuliers.
- ...