

Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018

Présentation du projet

■ **Modélisation et détection de délit d'initié :**

Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?

■ Objectifs :

- Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
- Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.

Plan de la présentation

- 1 Modèle diffusif - cas particulier
 - Description du modèle
 - Stratégie optimale
 - Résolution du problème d'optimisation
 - Analyse du gain de l'initié
 - Simulations
- 2 Conclusion
- 3 Retour d'expérience

Modèle diffusif - cas particulier

Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- W est un mouvement brownien à 2 dimensions dont \mathcal{F} est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que b, r et σ sont constants.

Marché

Les prix peuvent donc s'exprimer :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 &= S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2} \|\sigma_2\|^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Initié

- On suppose qu'à $t = 0$, l'initié dispose d'une information sur le futur, $L := \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$, dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.
- Il dispose d'un capital X_0 à $t = 0$, consomme à une vitesse c , et il place la quantité θ^i sur l'actif i .
- $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$: la somme investie sur le i -ième l'actif, $i = \{1, 2\}$.

Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps t s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinçant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on obtient :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J: \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) := \mathbb{E} \left[\int_0^A \log(c_t) dt + \log \left(\underbrace{X_A^{\pi, c}}_{\text{Richesse au temps } A} \right) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

Stratégie optimale

■ où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ } \mathcal{Y} - \text{prévisible,} \\ c > 0 \text{ } \mathcal{Y} - \text{adapté,} \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \text{ et } \sigma^* \pi \in L^2[0; T] \text{ } \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi, c} \geq 0 \text{ } dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{array} \right. \right\}$$

■ $A < T$: *Temps final*.

Peut-on caractériser \mathcal{A} sous une forme exploitable ?

Raisonnement

Changement de probabilités

Grossissement de filtration

Changement de probabilité

Caractérisation de \mathcal{A}

Résolution du problème d'optimisation

Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}} \\ &= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s\|^2 ds} \end{aligned}$$

Forme explicite du gain

Donc

$$d \log (Z(t)) = \underbrace{(I_s, dW_s)}_{= \frac{dp(t,L)}{p(t,L)}} - \frac{1}{2} \|I_s\|^2 ds = dp(t, L)$$

Donc $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant :

$$Z(t) = \frac{Z(0)}{p(0, L)} p(t, L)$$

Interprétation : pour tout t , le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant \mathcal{F}_t , prise en $x = L$.

Forme explicite du gain

On obtient donc :

$$Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T}}$$

Analyse du gain

En remplaçant $(\gamma, W(T) - W(t))^2$ par son espérance $\|\gamma\|^2 (T - t)$,

$$Z(t) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$



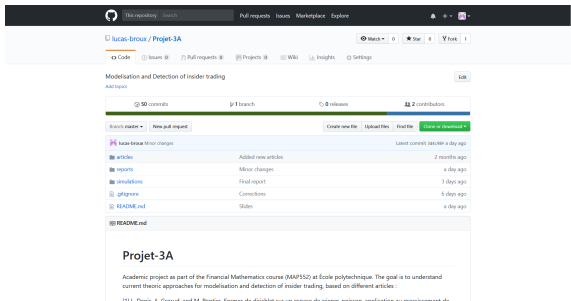
Ce raisonnement est heuristique. Pour calculer $\mathbb{E}[Z(t)]$, il faudrait utiliser le théorème de transfert.

Visualisation

Moyenne de 10000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :

Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : <https://github.com/lucas-broux/Projet-3A>).



Conclusion

Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.

Retour d'expérience

Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
 - Identifier les passages trop techniques.
 - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.

Merci !

Questions ?

