0.1 Description du modÃ¨le, Ã©volution des prix et de la richesse

Pour la deuxiÃ¨me partie de notre projet, nous avons Ã©tudiÃ© un modÃ¨le de marchÃ© financier qui est diffÃ©rent du premier en raison de la prÃ©sence d'un processus ponctuel, ou un processus de Poisson qui fait de sorte que les prix comportent des sauts.

Nous considÃ©rons un marchÃ© financier sur un espace de probabilitÃ© filtrÃ© $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ dont les prix des actions sont dirigÃ©s par un mouvement brownien et un processus ponctuel et Ã©voluent selon l'Ã©quation :

$$\begin{cases} S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s), 0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d \\ S_t^0 = \int_0^t S_s^0 r_s ds \end{cases} \tag{1}$$

oÃ¹

- W est un mouvement brownien de dimension m sur l'espace de probabilitÃ© filtrÃ© $(\Omega^W, \mathcal{F}_t^W; t \in [0,T], \mathbb{P}^W)$,
- N est un processus de Poisson de dimension n sur l'espace de probabilitÃ© filtrÃ© $(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N; t \in [0,T], \mathbb{P}^N)$,
- $d = m + n$ et X^* est le transposÃ© de X,
- b et ϕ sont dÃ©terministes et bornÃ©s sur $[0,T]$,
- σ est une matrice dÃ©terministe $d \times d$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$. W et N sont indÃ©pendants.

Les procÃ©dures sont pareilles. L'initiÃ© a des informations sur le futur, reprÃ©sentÃ©es par la variable L, qui ne sont pas accessibles aux autres investisseurs sur le marchÃ© et nous notons $\mathcal{Y}$ sa filtration dite naturelle qui est $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$. La mÃ©thode de grossissement de filtration, le changement de probabilitÃ© pour nous ramener Ã une mesure neutre au risque, et certaines hypothÃ¨ses (que nous n'expliciterons pas en dÃ©taille mais se trouvent dans l'article de *C. Hillairet, Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information, UniversitÃ© Paul Sabatier, UFR MIG, Laboratoire de Statistique et ProbabilitÃ©s, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.*) nous donneront en rÃ©sultat la richesse et le portefeuille optimal de l'initiÃ©.

A l'instant $t = 0$, l'initiÃ© dispose d'un capital X_0 et consomme toujours Ã une vitesse c qui est un processus positif $\mathcal{Y}$-adaptÃ©, vÃ©rifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$. En notant toujours $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-Ã¨me action pour $i = 1, ..., d$, la richesse au temps t de l'initiÃ© est :

$$X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Comme toujours, nous supposons que la stratÃ©gie est autofinanÃ§ante, c'est-Ã -dire

$$dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

Avec le facteur d'actualisation $R_t = (S_t^0)^{-1}$, sa richesse actualisÃ©e vÃ©rifie l'Ã©quation donnÃ©e par la formule d'ItÃ´ suivante :

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \Big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \Big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t)dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t)dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \\
&= (X_t r_t - c_t)dt + \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t),
\end{aligned}
$$

oÃ¹ $\pi = (\pi_t^1, ..., \pi_t^d)^*$ et $I_d = (1, ..., 1)^* \in \mathbb{R}^d$.

Avec $d(R_t) = d\big((S_t^0)^{-1}\big) = -r_t R_t dt$, la formule d'ItÃ´ nous donne encore

$$
\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t \big((X_t r_t - c_t)dt + \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t) \big) \\
&= -R_t c_t dt + R_t \pi^*(b_t - r_t I_d)dt + R_t \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 + \int_0^t R_s \pi^*(b_s - r_s I_d)ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(W^*, N^*)^*(s)
$$

En notant :

- $\Theta_t :=$ les m premiÃ¨res lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
- q un processus de dimension n, dont les composants sont supposÃ©s positifs, tel que $q_t.\kappa_t :=$ les n derniÃ¨re lignes de $-(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$,

oÃ¹ $q_t.\kappa_t$ dÃ©finit le vecteur dont les composants sont $(q_t.\kappa_t)_i = q_t^i \kappa_t^i, i = 1, ..., n$, nous dÃ©finissons :

- $\widehat{W}_t := W_t + \int_0^t \Theta_s ds$
- $\widehat{M}_t := N_t - \int_0^t q_s.\kappa_s ds$
- $\widehat{S} := (\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*$

Donc notre Ã©quation de richesse actualisÃ©e en fonction de Θ_t et $q_t.\kappa_t$ devient :

$$
\begin{aligned}
X_tR_t + \int_0^t R_sc_sds &= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_t d(W^*, N^*)^*(s) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&- \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s\Theta_s ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_t q_s.\kappa_s ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&- \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s(\sigma_s)^{-1}\big(\Theta_sI_{1,m} - q_s.k_sI_{2,n}\big) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) - \int_0^t R_s\pi^*(b_s - r_sI_d)ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s\pi^*\sigma_s d\widehat{S}(s)
\end{aligned}
$$

oÃ¹I$_{1,m} = (\underbrace{1, ..., 1}_{m}, \underbrace{0, ..., 0}_{n})^*$, $I_{2,n} = (\underbrace{0, ..., 0}_{m}, \underbrace{1, ..., 1}_{n})^*$

0.2 Raisonnement

Comme dans la premiÃ¨re partie, l'initiÃ© cherche Ã optimiser sa stratÃ©gie de maniÃ¨re suivante :

$$
\begin{aligned}
&J : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\
&\quad (\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})\Big|\mathcal{Y}_0\Big]
\end{aligned}
$$

oÃ¹A, (U$_1, U_2$) et A sont les mÃªmes notations que celles dans le marchÃ© diffusif.

Les problÃ¨mes auxquels nous faisons face ici viennent toujours du fait que sur l'espace $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, les processus W^* et N^* ne sont plus des semi-martingales. Pour cela, nous allons :

- D'abord trouver une mesure de probabilitÃ© $\mathbb{Q}$ Ã©quivalente Ã $\mathbb{P}$ sous laquelle $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indÃ©pendants $\forall t \in [0, T[$.
- Ensuite utiliser la mÃ©thode de grossissement de filtration pour construire un mouvement brownien et un processus de Poisson sur l'espace de probabilitÃ© filtrÃ© $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ Ã l'aide de notre mesure de probabilitÃ© $\mathbb{Q}$.
- Nous ramener finalement Ã une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}_1$ par un dernier changement de probabilitÃ©.

0.2.1 Changement de probabilitÃ©

Proposition 3.1. *Il existe une mesure de probabilitï¿½ $\mathbb{Q}$ qui est ï¿½quivalente ï¿½ $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et sous cette probabilitï¿½, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indï¿½pendants $\forall t \in [0, T[$.*

0.2.2 Grossissement de filtration

Introduisons la densitÃ© :

$$Z_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}|Y_t\Big]$$

qui satisfait l'Ã©quation $dZ_t = Z_t\Big(\rho_1^*(t)dW_t + (\rho_2^*(t) - I_n)^* dM_t\Big)$, oÃ¹ ρ_1 et ρ_2 sont des processus $\mathcal{Y}_T$-prÃ©visibles.

En corollaire, les processus

— $\widetilde{W}_t := W_t - \displaystyle\int_0^t \rho_1(s)ds$
— $\widetilde{M}_t := N_t - \displaystyle\int_0^t \kappa.\rho_2(s)ds$

sont un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensitÃ© $(\kappa.\rho_2)$ respectivement sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

0.2.3 ProbabilitÃ© risque-neutre

Notons

$$Y_t := \varepsilon\Big(\int_0^t \big(-(\Theta + \rho_1(s))^* d\widetilde{W}_s + (\frac{q}{\rho_2(s)} - I_n)^* d\widetilde{M}_s\big)\Big),$$

oÃ¹ ε est l'exponentielle de DolÃ©ans-Dade.

Alors Y est une $(\mathcal{Y}_T, \mathbb{P})$-martingale locale positive, et $\mathbb{Q}_1 := Y\mathbb{P}$ dÃ©finit la probabilitÃ© risque-neutre pour l'initiÃ©. Les processus $\widetilde{W}$ et $\widetilde{M}$ sont respectivement un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensitÃ© $(q.\kappa)$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

Par calculs, nous avons $d(Y_t^{-1}) = Y_t^{-1} l_t^* d\widehat{S}_t$, avec $l_t^* := \big((\Theta + \rho_1)^*, (\frac{\rho_2}{q} - I_n)^*\big)$.

0.3 Calcul des stratÃ©gies optimales

Le problÃ¨me d'optimisation $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})\Big|\mathcal{Y}_0\Big]$ sur toutes les $\mathcal{Y}$-stratÃ©gies admissibles que nous cherchons depuis le dÃ©but ont pour solutions :

$$A < T, \forall t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t \widehat{c}_t = \dfrac{X_0}{A+1} \dfrac{1}{Y}(t) \\ R_t \widehat{X}_t = \dfrac{X_0(A+1-t)}{A+1} \dfrac{1}{Y}(t) \\ \widehat{\pi}_t = (\sigma_t^*)^{-1} \dfrac{Y(t)}{Y(t^{-1})} \widehat{X}_t l_t \end{cases}$$