

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PROJET 3A

Délit d'initié : modélisation et détection

Élèves

HEANG Kitiyavirayuth
BROUX Lucas

Tuteur

Laurent DENIS

15 mars 2018

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modèle diffusif	3
2.1	Description du modèle, évolution des prix et de la richesse	3
2.2	Raisonnement	4
2.2.1	Étape 1 : Changement de probabilité	5
2.2.2	Étape 2 : Grossissement de filtration	5
2.2.3	Étape 3 : Changement de probabilité	7
2.3	Calcul des stratégies optimales	7
2.4	Cas particulier : $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$	7
2.4.1	Calcul explicite des richesses	8
2.4.2	Analyse asymptotique de Z	10
2.4.3	Simulations numériques	10
3	Modèle avec sauts	14
3.1	Raisonnement	14
3.2	Description du modèle, évolution des prix et de la richesse	14
3.3	Raisonnement	16
3.3.1	Changement de probabilité	16
3.3.2	Grossissement de filtration	17
3.3.3	Probabilité risque-neutre	17
3.4	Calcul des stratégies optimales	17
3.5	Cas particulier	18

1 Introduction

L'un des enjeux majeurs des mathématiques financières est de concevoir des modèles d'évolution de marchés suffisamment complexes pour proposer une description relativement fidèle de la réalité, mais suffisamment simples pour que les résultats obtenus soit exploitables.

En particulier, la majorité de ces modèles formulent l'hypothèse simplificatrice suivante : les acteurs qui évoluent sur le marché disposent tous au temps t des mêmes informations, à savoir les prix des actions jusqu'au temps t . Or, celle-ci est contestable puisqu'en réalité certains acteurs, de par leurs affinités, peuvent connaître des informations sensibles et confidentielles - par exemple l'évolution future d'une action - grâce auxquelles ils vont pouvoir établir une stratégie d'investissement plus performante que les autres acteurs du marché : ce sont les *initiés*.

En pratique, si certains scandales de délit d'initié ont été très médiatisés pour les quantités d'argent impressionnantes en jeu (donnons l'exemple de Steve Cohen qui, à la tête du *hedge fund* SAC Capital, a empoché en 2008 plus de 276 millions de dollars grâce à l'obtention d'informations non publiques sur un médicament), et si les autorités de surveillance ont réussi à faire des progrès dans la détection du délit d'initié grâce à des algorithmes de recherche d'anomalies dans les données du marché, la modélisation théorique du phénomène n'en permet actuellement qu'une analyse limitée.

Le but de ce projet est de présenter les résultats actuels de cette modélisation dans deux modèles de marché. Dans une première partie, nous étudierons un modèle brownien diffusif, tandis qu'en deuxième temps, nous ajouterons des "sauts" sous la forme de processus de Poisson, afin de modéliser des périodes de "catastrophes" (krachs, ...). Pour chaque modèle de marché, nous considérerons un agent non-initié et un agent initié qui connaîtra, en plus des informations publiques, une variable aléatoire L correspondant à un renseignement supplémentaire. Nous étudierons alors :

- Les problèmes d'arbitrage et de réplication d'actifs risqués.
- Le gain de l'initié (par rapport à un non-initié).
- Les simulations de l'évolution de la richesse de l'initié et du non-initié ; et dans certains cas la mise en oeuvre d'un test de détection.

Nous verrons que, dans les modélisations étudiées, nous pourrions déterminer les stratégies optimales pour l'initié et pour le non initié, que nous expliciterons dans des cas particuliers. Dans certaines situations, nous pourrions même exhiber un test statistique pour la détection du délit d'initié, mais celui-ci sera conditionné par la variable aléatoire L connue par ce dernier.

2 Modèle diffusif

2.1 Description du modèle, évolution des prix et de la richesse

Dans cette première partie, nous considérons un modèle de marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix des actions (un actif sans risque et d actifs risqués) sont régis selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, 0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, d \end{cases} \quad (1)$$

où :

- W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$ et \mathcal{F} est la filtration naturelle qu'il engendre,
- Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0, T]$ et \mathcal{F} -adaptés.
- La matrice σ_t est inversible $dt \otimes d\mathbb{P}$ -presque sûrement. On note $\eta_t = \sigma_t^{-1} (b_t - r_t \mathbf{1})$

L'information connue au temps t par les investisseurs sur le marché est \mathcal{F}_t . Nous supposons que l'initié dispose en outre, dès le début de son investissement à $t = 0$, d'une information supplémentaire sous la forme d'une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$. Notons alors \mathcal{Y} la filtration "naturelle" de l'initié obtenue par grossissement initial de \mathcal{F} , lui adjoignant la variable aléatoire $L : \mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0, T]$.

A l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0 . Il consomme à une vitesse c , un processus positif \mathcal{Y} -adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$, et place sur l'actif i la quantité θ^i . Notons $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i -ième action pour $i = 1, \dots, d$. Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Exploitions cette première équation en introduisant l'hypothèse naturelle d'autofinancement :

$$dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$$

Notons $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^d \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt, \text{ avec } dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \\
&= \sum_{i=1}^d \theta_t^i (S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t + (X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

Nous avons encore par Itô

$$\begin{aligned}
d(R_t) &= -\frac{dS_t^0}{(S_t^0)^2} + \frac{1}{2(S_t^0)^3} d\langle S^0 \rangle_t \\
&= -\frac{r_t}{S_t^0} dt = -r_t R_t dt
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d\langle X, R \rangle_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dW_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}$$

Ainsi, la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds + \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s) \quad (2)$$

2.2 Raisonnement

Étudions désormais la stratégie de l'initié. Nous supposons que celui-ci optimise sa stratégie au sens suivant : il optimise la fonction de perte :

$$J: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E} \left[\int_0^A U_1(c_t) dt + U_2(X_A^{\pi, c}) \mid \mathcal{Y}_0 \right]$$

où :

- \mathcal{A} est l'ensemble des stratégies *admissibles* i.e. des stratégies (π, c) telles que π est \mathcal{Y} -prévisible, c est \mathcal{Y} -adapté, $c > 0$, $\int_0^T c_s ds < +\infty$ et $\sigma^* \pi \in L^2[0; T]$ \mathbb{P} -p.s., et telle que la richesse engendrée par cette stratégie satisfasse $X^{\pi, c} \geq 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ -p.s.
- U_1 et U_2 sont des *fonctions d'utilité* i.e. positives, croissantes, concaves, \mathcal{C}^1 avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_i'(x) = 0$. Par la suite, nous supposons $U_1 = U_2 = \log$.
- A est un temps strictement inférieur à T , qui correspondra au *temps final* de notre analyse. En effet, des phénomènes d'explosion en temps fini lorsque $A \rightarrow 1$, décrits avec précision dans [2], nous empêchent d'étudier l'évolution de l'initié sur $[0; T]$ tout entier. D'un point de vue économique, ces phénomènes traduisent le fait que plus le temps t se rapproche de T , moins l'information obtenue par l'initié est pertinente.

L'interprétation est la suivante : l'initié choisit, parmi toutes les stratégies admissibles, celle qui optimise en moyenne son utilité (fonction de sa consommation et de sa richesse finale) sachant les informations connues sur le marché en $t = 0$ ainsi que l'information supplémentaire L .

La difficulté ici est de caractériser \mathcal{A} . En effet, W est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mais pas sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, ce qui nous empêche de faire un simple changement de probabilité comme dans les cas usuels pour nous ramener à la probabilité risque-neutre. Le raisonnement est adapté suivant les étapes suivantes :

1. *Changement de probabilité* : nous construisons une probabilité \mathbb{Q} pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.
2. *Grossissement de filtration* : nous construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.
3. *Changement de probabilité* : nous construisons un mouvement brownien \tilde{B} sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec \mathbb{Q}_1 probabilité risque-neutre sur \mathcal{Y} .

Dans les trois sous-sections suivantes, nous présentons les résultats correspondant à ces étapes, mais nous en omettons volontairement les hypothèses et les preuves, très techniques, disponibles dans [4]

2.2.1 Étape 1 : Changement de probabilité

Proposition 2.1 (T.Jeulin). *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), il existe une mesure de probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} sur \mathcal{Y}_A , telle que pour $t \leq A$, \mathcal{T}_t et $\sigma(L)$ sont \mathbb{Q} -indépendantes.*

En outre, $(W_t, t \leq A)$ est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.

2.2.2 Étape 2 : Grossissement de filtration

Proposition 2.2. *Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t est absolument continue et :*

- *il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une \mathcal{F} -martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$*
- *si M est une \mathcal{F} -martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d < M, P >_t$ est égal à $d < \alpha, \beta >_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{\leq \alpha(., x), \beta >_u |_{x=L}}{p(u, L)} du$ est une \mathcal{Y} -martingale locale continue.*

En corollaire, le processus vectoriel $\left(B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{\alpha(u, L)}{p(u, L)}}_{=: l_u} du, t \in [0, T[\right)$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, qui est l'espace de probabilité de l'initié.

Reformulons l'équation d'évolution de la richesse de l'initié sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$: en remplaçant dW_t par $dB_t + l_t dt$, l'équation (1) des prix des actions sur le marché financier devient

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i (b_s^i + l_s^i) ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dB_s, 0 \leq t < T, i = 1, \dots, d. \quad (3)$$

Avec cette nouvelle équation,

$$\begin{aligned} dX_t &= \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \theta_t^i (S_t^i b_t^i dt + S_t^i l_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dB_t) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i + l_t^i) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \sigma_t^i dB_t + (X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i + l_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \sigma_t^i dB_t \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dB_t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d \langle X, R \rangle_t \\ &= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dB_t) \\ &= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t + l_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dB_t) \end{aligned}$$

Ainsi, sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, la richesse X actualisée de l'initié vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 \int_0^t (R_s \pi_s, b_s + l_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dB_s) \quad (4)$$

Nous pouvons voir ici que le processus l_s représente les informations dont dispose l'initié. Si $l_s = 0, 0 \leq s \leq t \leq T$, nous retrouvons l'équation (2) de richesse du non initié.

2.2.3 Étape 3 : Changement de probabilité

L'idée est désormais de se ramener à une probabilité neutre au risque sur \mathcal{Y} . Pour cela, nous réalisons une transformation de type Girsanov. Notons que la forme du processus l ne nous permet de faire le changement de probabilité que sur l'intervalle $[0, A]$ et non sur $[0, T]$. Il n'y a aucune raison que la martingale locale de changement de probabilité soit une vraie martingale jusqu'en T d'où une "explosion" des processus évoqués ci-dessus.

Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nouveau processus $\xi_t = -l_t - \eta_t$ (qui existe sous hypothèses).

Proposition 2.3. *Posons $M_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi_s\|^2 ds}$ pour $t \in [0, A]$, $A < T$. Alors M est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$ -martingale uniformément intégrable et, sous $\mathbb{Q}_1 = M.\mathbb{P}$, le processus*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -mouvement brownien et les prix actualisés sont des $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$ -martingales locales.

2.3 Calcul des stratégies optimales

Revenons au problème d'optimisation, notre objectif étant de caractériser l'ensemble des stratégies admissibles.

Nous pouvons montrer que

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}$$

Cette contrainte traduit le fait que l'initié n'investit et ne dépense que l'argent qu'il n'a déjà : à chaque instant, il ne peut pas avoir mis en jeu depuis le début plus d'argent qu'il n'en avait à l'instant $t = 0$.

Le problème d'optimisation se résout dans le cas général. Ici, nous avons supposé $U_1 = U_2 = \log$, et alors la stratégie optimale pour les agents est :

$$\begin{cases} R_A c_t^* &= \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_A X_A^* &= \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (l_s + \eta_s, dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s + \eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

2.4 Cas particulier : $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$

Étudions l'évolution de la richesse des agents dans le cas particulier où la variable connue par l'initié est $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_T^2)$: l'initié connaît la proportion qu'auront les prix de deux actifs risqués au temps T . Il est possible de vérifier que dans ce cas, toutes les hypothèses techniques nécessaires à l'établissement de la solution du problème d'optimisation sont vérifiées.

Pour simplifier et rendre exploitable les calculs, nous nous plaçons en outre dans le cas où les paramètres b, σ , et r du modèle sont constants.

2.4.1 Calcul explicite des richesses

Dans ce cas, nous pouvons expliciter la variable L : les prix du marchés sont donnés par

$$\begin{cases} S_t^1 &= S_0^1 e^{(b_1 - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|^2)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{(b_2 - \frac{1}{2} \|\sigma_2\|^2)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Donc

$$L = \underbrace{\ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) + \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2} (\|\sigma_1\|^2 - \|\sigma_2\|^2) \right)}_{=: \beta} T + \underbrace{\left(\sigma_1 - \sigma_2, W(T) \right)}_{=: \gamma}$$

Ainsi, L est une variable gaussienne. La loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t s'exprime donc comme une loi gaussienne $\mathcal{N}(\beta + (\gamma, W(t)), \|\gamma\|^2 (T-t))$ qui est bien absolument continue comme annoncé dans la proposition 2.3. Reprenons cette proposition dans ce cas particulier pour expliciter l . La densité conditionnelle de la loi de L sachant \mathcal{F}_t est donc celle d'une loi normale :

$$p(t, x) = \frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} e^{\underbrace{-\frac{1}{2} \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))^2}{\|\gamma\|^2 (T-t)}}_{=: f(t, W(t))}}$$

Nous allons montrer que ce processus est bien une martingale. Pour cela, nous fixons x et dérivons p : par Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} dp(t, x) &= d \left(\frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} \right) f(t, W(t)) + \frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} df(t, W(t)) \\ &= \frac{1}{2\|\gamma\| \sqrt{2\pi} (T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) + \frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} df(t, W(t)) \end{aligned}$$

La formule d'Itô nous permet aussi de dériver f :

$$\begin{aligned} df(t, W(t)) &= f'_x(t, W(t)) dW(t) + \left[f'_t(t, W(t)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, W(t)) \right] dt \\ &= \left[\frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^2 (T-t)} \right] f(t, W(t)) (\gamma, dW(t)) + \left[\frac{-1}{2(T-t)} \right] f(t, W(t)) dt \end{aligned}$$

Ainsi, les termes temporels se simplifient et

$$dp(t, x) = \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^3 \sqrt{2\pi} (T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) (\gamma, dW(t))$$

Ainsi, p est bien une martingale et on a, comme dans la proposition, la formule

$$p(t, x) = p(0, x) + \int_0^t (\alpha(s, x), dW(s))$$

Où

$$\alpha(t, x) = \frac{(x - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^3 \sqrt{2\pi} (T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t)) \gamma$$

Ainsi, nous pouvons expliciter l :

$$\begin{aligned} l_t &= \frac{\alpha(t, L)}{p(t, L)} \\ &= \frac{\left(\frac{(L - \beta - (\gamma, W(t)))}{\|\gamma\|^3 \sqrt{2\pi} (T-t)^{\frac{3}{2}}} \right) f(t, W(t)) \gamma}{\left(\frac{1}{\|\gamma\| \sqrt{2\pi} \sqrt{T-t}} \right) f(t, W(t))} \\ &= \frac{(\gamma, W(T) - W(t)) \gamma}{\|\gamma\|^2 (T-t)} \quad \text{car } L - \beta = (\gamma, W(T)) \end{aligned}$$

Or nous savons que le processus Y , inversement proportionnel à la richesse des agents, est, en vertu des formules présentées dans la section précédente :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (l_s + \eta, dW_s - l_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

Donc le coefficient de proportionnalité de richesse entre les deux agents est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(t)} &:= \frac{Y(t)}{Y_0(t)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t (l_s + \eta, dW_s - l_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s + \eta\|^2 ds}}{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2}} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t [(l_s, dW_s) + (\eta, dW_s) - \|l_s\|^2 ds - (\eta, l_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t [\|l_s\|^2 + \|\eta\|^2 + 2(l_s, \eta)] ds}}{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2}} \\ &= e^{-\int_0^t (l_s, dW_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|l_s\|^2 ds} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d \log(Z(t)) = (l_s, dW_s) - \frac{1}{2} \|l_s\|^2 ds$$

Mais remarquons qu'aussi par définition de l ,

$$dp(t, L) = p(t, L) (l_s, dW_t)$$

Donc par Itô :

$$d \log(p(t, L)) = (l_s, dW_s) - \frac{1}{2} \|l_s\|^2 ds = d \log(Z(t))$$

De là, $\frac{Z(t)}{p(t, L)}$ est constant, égale à sa valeur initiale :

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \frac{Z(0)}{p(0, L)} p(t, L) \\
&= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T}}
\end{aligned}$$

L'interprétation est intéressante : pour tout t , la valeur de proportionnalité entre la richesse de l'initié et celle du non-initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant \mathcal{F}_t , prise en $x = L$. Ce résultat est en réalité général, et correspond à l'approche employée dans [5].

2.4.2 Analyse asymptotique de Z

Analysons le comportement de ce processus Z afin d'étudier l'enrichissement de l'initié par rapport au non-initié. Remplaçons les termes browniens par leur espérance dans l'expression précédente de Z :

$$\begin{aligned}
Z(t) &\simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\left(\frac{-\|\gamma\|^2(T-t)}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{\|\gamma\|^2 T}{2\|\gamma\|^2 T} \right)} \\
&= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

Nous voyons qu'au temps final considéré,

$$\begin{aligned}
Z(A) &\simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-A}} \\
&\xrightarrow{A \rightarrow T} +\infty
\end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi le phénomène d'explosion en temps fini mentionné précédemment : plus A se rapproche de T , plus la richesse finale de l'initié est grande par rapport à celle du non-initié.

2.4.3 Simulations numériques

Afin d'étudier numériquement les comportements des agents, nous avons implémenté ces formules en *Python*. Par souci de généralité, nous avons choisi d'écrire notre code de la manière la plus générale et modulaire possible, c'est pourquoi nous décidons de ne pas le copier en annexe. Toutefois, il est disponible sur le *repository Github* du projet (<https://github.com/lucas-broux/Projet-3A>).

Notre approche est la suivante :

1. Calcul des prix (la formule est explicite).
2. Calcul de la richesse du non initié (ou plutôt du processus $\frac{1}{Y_0}$) : selon la formule $Y_0(t) := e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2}t\|\eta\|^2}$.

3. Calcul du processus Z via la formule précédente $Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T) - W(t))^2}{2\|\gamma\|^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2\|\gamma\|^2 T}}$

4. Calcul de la richesse de l'initié (ou plutôt du processus $\frac{1}{Y}$) par la formule $\frac{1}{Y} = \frac{Z}{Y_0}$

Dans notre simulation (*simulations_diffusive_model.py*),

$$\begin{cases} T &= 1 \\ A &= 0.95 \\ d &= 2 \\ b &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les prix évoluent de la manière suivante :

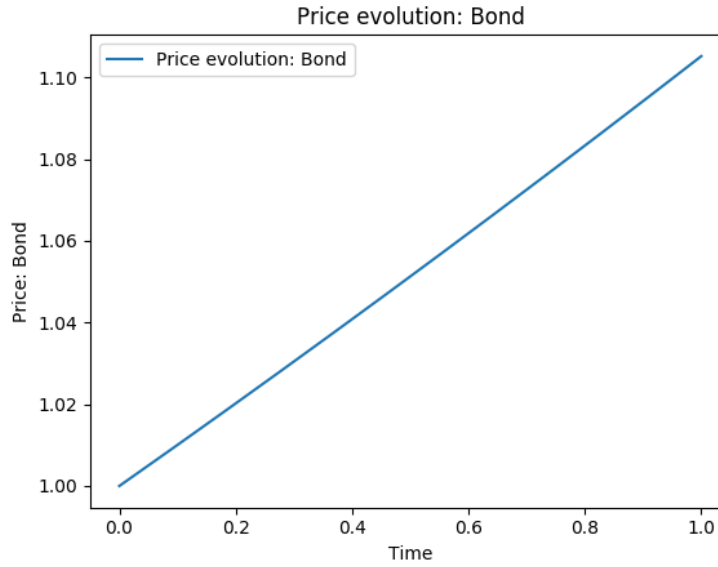


FIGURE 1 – prix de l'actif sans risque

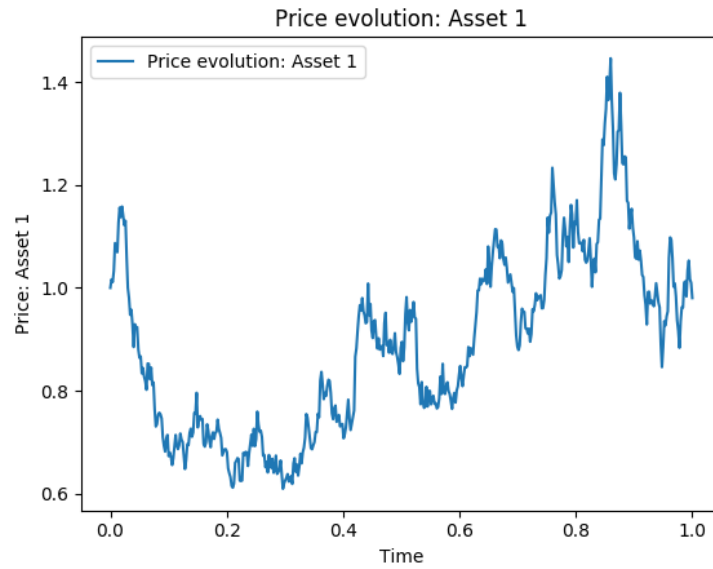


FIGURE 2 – prix de l'actif risqué 1

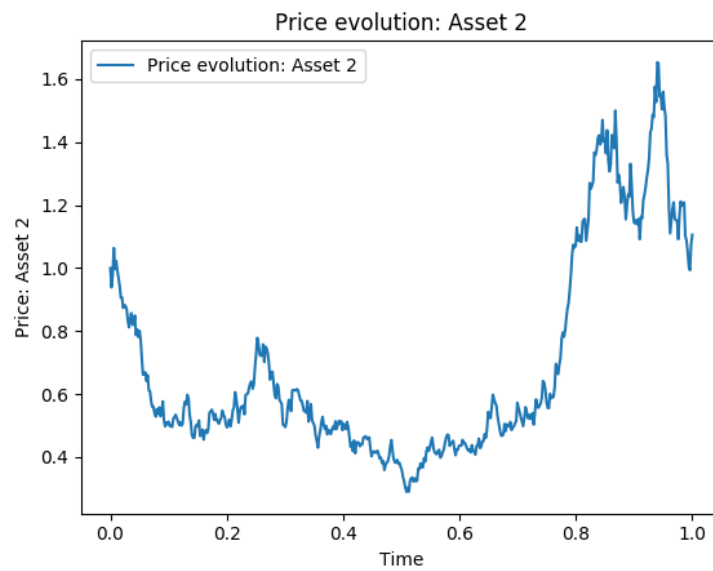


FIGURE 3 – prix de l'actif risqué 2

La valeur de la variable connue par l'initié est $L = -0.12$. Le processus Z est ensuite calculé et comparé avec l'estimation produite dans la sous-partie précédente :

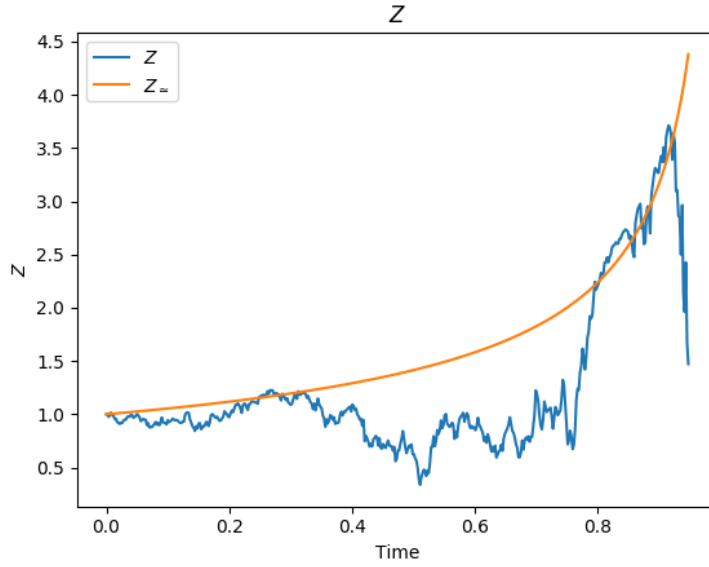


FIGURE 4 – Z sur $[0; A]$

Nous constatons que, comme estimé, le processus Z tend bien à diverger lorsque t se rapproche de T . Nous pouvons enfin représenter l'évolution comparé de la richesse des deux agents :

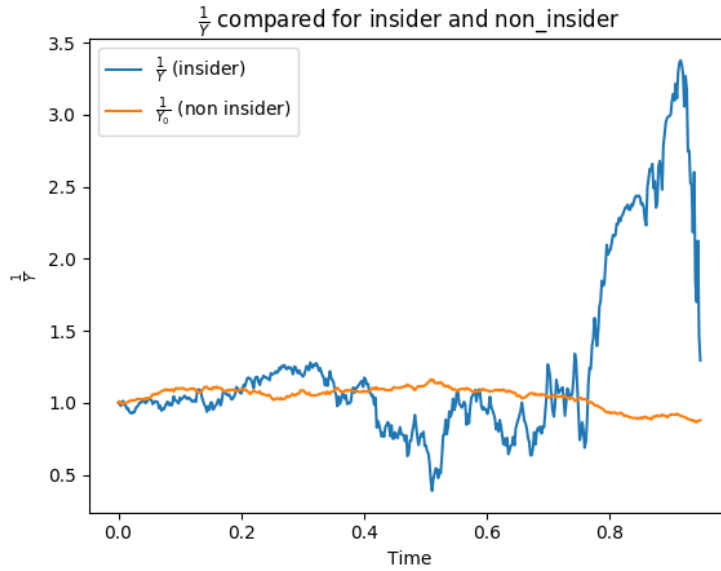


FIGURE 5 – $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y}$ sur $[0; A]$

Ainsi, l'initié tend à s'enrichir lorsque t tend vers A pour A proche de T : la connaissance de l'information L permet à l'initié d'établir une meilleure stratégie que le non-initié.

3 Modèle avec sauts

3.1 Raisonnement

3.2 Description du modèle, évolution des prix et de la richesse

Pour la deuxième partie de notre projet, nous avons étudié un modèle de marché financier qui est différent du premier en raison de la présence d'un processus ponctuel, ou un processus de Poisson qui fait de sorte que les prix comportent des sauts.

Nous considérons un marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$ dont les prix des actions sont dirigés par un mouvement brownien et un processus ponctuel et évoluent selon l'équation :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s), 0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, d \quad (5)$$

où

- W est un mouvement brownien de dimension m sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^W, \mathcal{F}_t^W; t \in [0, T], \mathbb{P}^W)$,
- N est un processus de Poisson de dimension n sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N; t \in [0, T], \mathbb{P}^N)$,
- $d = m + n$ et X^* est le transposé de X ,
- b et ϕ sont déterministes et bornés sur $[0, T]$,
- σ est une matrice déterministe $d \times d$,
- S_0 évolue selon l'équation $dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$. W et N sont indépendants.

Les procédures sont pareilles. L'initié a des informations sur le futur, représentées par la variable L , qui ne sont pas accessibles aux autres investisseurs sur le marché et nous notons \mathcal{Y} sa filtration dite naturelle qui est $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0, T]$. La méthode de grossissement de filtration, le changement de probabilité pour nous ramener à une mesure neutre au risque, et certaines hypothèses (que nous n'explicitons pas en détaille mais se trouvent dans l'article de *C. Hillairet, Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information*) nous donneront en résultat la richesse et le portefeuille optimal de l'initié.

A l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0 et consomme toujours à une vitesse c qui est un processus positif \mathcal{Y} -adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$. En notant toujours $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i -ème action pour $i = 1, \dots, d$, la richesse au temps t de l'initié est :

$$X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Comme toujours, nous supposons que la stratégie est autofinancante, c'est-à-dire

$$dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

Avec le facteur d'actualisation $R_t = (S_t^0)^{-1}$, sa richesse actualisée vérifie l'équation donnée par la formule d'Itô suivante :

$$\begin{aligned} dX_t &= \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt \\ &= \sum_{i=1}^d \theta_t^i \left(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \right) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} d(W^*, N^*)_j^*(t) \\ &= (X_t r_t - c_t) dt + \pi^*(b_t - r_t I_d) dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t), \end{aligned}$$

avec $\pi = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)^*$ et $I_d = (1, \dots, 1)^* \in \mathbb{R}^d$.

Avec $d(R_t) = d((S_t^0)^{-1}) = -r_t R_t dt$, la formule d'Itô nous donne encore

$$\begin{aligned} d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d\langle X, R \rangle_t \\ &= -X_t r_t R_t dt + R_t ((X_t r_t - c_t) dt + \pi^*(b_t - r_t I_d) dt + \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t)) \\ &= -R_t c_t dt + R_t \pi^*(b_t - r_t I_d) dt + R_t \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(t) \\ \Rightarrow X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds &= X_0 + \int_0^t R_s \pi^*(b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(W^*, N^*)^*(s) \end{aligned}$$

En notant :

- $\Theta_t :=$ les m premières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
- q un processus de dimension n , dont les composants sont supposés positifs, tel que $q_t \cdot \kappa_t :=$ les n dernière lignes de $-(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$,

avec $q_t \cdot \kappa_t$ définit le vecteur dont les composants sont $(q_t \cdot \kappa_t)_i = q_t^i \kappa_t^i, i = 1, \dots, n$, nous définissons :

- $\widehat{W}_t := W_t + \int_0^t \Theta_s ds$
- $\widehat{M}_t := N_t - \int_0^t q_s \cdot \kappa_s ds$
- $\widehat{S} := (\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*$

Donc notre équation de richesse actualisée en fonction de Θ_t et $q_t \cdot \kappa_t$ devient :

$$\begin{aligned}
X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds &= X_0 + \int_0^t R_s \pi^* (b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_t d(W^*, N^*)^*(s) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s \pi^* (b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&\quad - \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s \Theta_s ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_t q_s \cdot \kappa_s ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s \pi^* (b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) \\
&\quad - \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s (\sigma_s)^{-1} (\Theta_s I_{1,m} - q_s \cdot \kappa_s I_{2,n}) \\
&= X_0 + \int_0^t R_s \pi^* (b_s - r_s I_d) ds + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s) - \int_0^t R_s \pi^* (b_s - r_s I_d) ds \\
&= X_0 + \int_0^t R_s \pi^* \sigma_s d(\widehat{W}^*, \widehat{N}^*)^*(s)
\end{aligned}$$

$$\text{ou } I_{1,m} = (\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)^*, I_{2,n} = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_n)^*$$

3.3 Raisonnement

Comme dans la première partie, l'initié cherche à optimiser sa stratégie de manière suivante :

$$J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \mapsto J(X_0, \pi, c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A U_1(c_t) dt + U_2(X_A^{\pi, c}) \middle| \mathcal{Y}_0 \right]$$

ou \mathcal{A} , (U_1, U_2) et A sont les mêmes notations que celles dans le marché diffusif.

Les problèmes auxquels nous faisons face ici viennent toujours du fait que sur l'espace $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, les processus W^* et N^* ne sont plus des semi-martingales. Pour cela, nous allons :

- D'abord trouver une mesure de probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} sous laquelle \mathcal{F}_t et $\sigma(L)$ sont indépendants $\forall t \in [0, T[$.
- Ensuite utiliser la méthode de grossissement de filtration pour construire un mouvement brownien et un processus de Poisson sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ à l'aide de notre mesure de probabilité \mathbb{Q} .
- Nous ramener finalement à une mesure risque-neutre \mathbb{Q}_1 par un dernier changement de probabilité.

3.3.1 Changement de probabilité

Proposition 3.1. *Il existe une mesure de probabilité \mathbb{Q} qui est équivalente à \mathbb{P} sur \mathcal{F}_T et sous cette probabilité, \mathcal{F}_t et $\sigma(L)$ sont indépendants $\forall t \in [0, T[$.*

3.3.2 Grossissement de filtration

Introduisons la densité :

$$Z_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} | Y_t \right]$$

qui satisfait l'équation $dZ_t = Z_t \left(\rho_1^*(t) dW_t + (\rho_2^*(t) - I_n)^* dM_t \right)$, ou ρ_1 et ρ_2 sont des processus \mathcal{Y}_T -prévisibles.

En corollaire, les processus

$$\begin{aligned} - \widetilde{W}_t &:= W_t - \int_0^t \rho_1(s) ds \\ - \widetilde{M}_t &:= N_t - \int_0^t \kappa \cdot \rho_2(s) ds \end{aligned}$$

sont un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensité $(\kappa \cdot \rho_2)$ respectivement sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

3.3.3 Probabilité risque-neutre

Notons

$$Y_t := \varepsilon \left(\int_0^t \left(-(\Theta + \rho_1(s))^* d\widetilde{W}_s + \left(\frac{q}{\rho_2(s)} - I_n \right)^* d\widetilde{M}_s \right) \right),$$

ou ε est l'exponentielle de Doléans-Dade.

Alors Y est une $(\mathcal{Y}_T, \mathbb{P})$ -martingale locale positive, et $\mathbb{Q}_1 := Y\mathbb{P}$ définit la probabilité risque-neutre pour l'initié. Les processus \widetilde{W} et \widetilde{M} sont respectivement un mouvement brownien et un processus de Poisson de l'intensité $(q \cdot \kappa)$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

Par calculs, nous avons $d(Y_t^{-1}) = Y_t^{-1} l_t^* d\widehat{S}_t$, avec $l_t^* := ((\Theta + \rho_1)^*, (\frac{\rho_2}{q} - I_n)^*)$.

3.4 Calcul des stratégies optimales

Le problème d'optimisation $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^A U_1(c_t) dt + U_2(X_A^{\pi, c}) \middle| \mathcal{Y}_0 \right]$ sur toutes les \mathcal{Y} -stratégies admissibles que nous cherchons depuis le début ont pour solutions :

$$A < T, \forall t \in [0, A], \quad \begin{cases} R_t \widehat{c}_t = \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t \widehat{X}_t = \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ \widehat{\pi}_t = (\sigma_t^*)^{-1} \frac{Y(t)}{Y(t-1)} \widehat{X}_t l_t \end{cases}$$

3.5 Cas particulier

Références

- [1] L. Denis, A. Grorud, and M. Pontier. Formes de dirichlet sur un espace de wiener-poisson. application au grossissement de filtration. In *Séminaire de Probabilités XXXIV*, pages 198–217. Springer, 2000.
- [2] H. Föllmer and P. Imkeller. Anticipation cancelled by b girsanov transformation : a paradox on wiener space. *Ann. Inst. H. Poincaré Probabilités et Statististiques*, 1993.
- [3] A. Grorud and M. Pontier. Comment détecter le délit d’initié? *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1997.
- [4] A. Grorud and M. Pontier. Insider trading in a continuous time market model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1998.
- [5] C. Hillairet. Comparison of insiders’ optimal strategies depending on the type of side-information. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(10) :1603 – 1627, 2005.