

# Modélisation et détection de délit d'initié

## Soutenance mi-parcours P3A

Heang Kitiyavirayuth, Lucas Broux

14 février 2018

## 1 Introduction

- Sujet choisi, problématique générale
- Objectifs du projet

## 2 Compréhension actuelle du problème

- Modélisation mathématique

## 3 Simulations

- Modèle et hypothèses
- Résultats obtenus

## 4 Conclusion

# Introduction



oooooooooooooooooooo

ooo  
ooo

Sujet choisi, problématique générale

# Sujet choisi

- Modélisation et détection de délit d'initié.



# Sujet choisi

- **Modélisation et détection de délit d'initié.**
- Problématique concrète mais actuellement assez mal résolue.



oooooooooooooooooooo

ooo  
ooo

# Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :



oooooooooooooooooooo

ooo  
ooo

# Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  - 1 A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.



oooooooooooooooooooo

ooo

# Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  - 1 A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.
  - 2 H. Föllmer, P. Imkeller, Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist 29.4, 569-586, 1993.





oooooooooooooooooooo

ooo  
ooo

# Objectifs du projet

- Comprendre et analyser des articles sur le sujet :
  - 1 A. Grorud, M. Pontier, Insider trading in a continuous time market model, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, p. 331-347, 1998.
  - 2 H. Föllmer, P. Imkeller, Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist 29.4, 569-586, 1993.
- Pour la suite du projet ? A préciser...

## Compréhension actuelle du problème

# Modèle de marché financier

On considère un modèle de marché financier sur l'espace de probabilité  $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0, T]), \mathbb{P})$ . Les prix des actions (ici  $d$  actions) évoluent selon l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s,$$
$$0 \leq t \leq T, S_0 \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, d$$

# Modèle de marché financier

où :

- $W$  est un mouvement brownien de  $d$ -dimension.
- Les paramètres  $b, \sigma$  et  $r$  sont dans  $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}$  respectivement et sont supposés bornés sur  $[0, T]$  et  $\mathcal{F}$ -adaptés.
- La matrice  $\sigma_t$  est inversible.
- $S^0$  évolue d'après l'équation  $S_t^0 = 1 + \int_0^t S_s^0 r_s ds$ .

**H1** : La matrice  $\sigma$  est inversible,  $dt \otimes d\mathbb{P}$ -presque sûrement,  $\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t \mathbf{1})$  vérifie  $\exists A \in ]0, T[, \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A], \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(k \|\eta_s\|^2)] \leq C$ .

# Informations sur l'initié

Un des investisseurs sur le marché connaît l'information  $\mathcal{F}_t$  qui est l'information normalement disponible au temps  $t$ , et il connaît aussi une variable aléatoire  $L \in L^1(\mathcal{F}_T)$ . L'information totale dont il dispose est donc  $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$  (que l'on note  $\mathcal{Y}_t$ ), qui est à priori plus grande que  $\mathcal{F}_t$ .

Avec cette information  $\mathcal{Y}_t$ , l'initié cherche à optimiser sa stratégie de consommation et de placement sur le marché.

# Informations sur l'initié

- L'initié dispose d'un capital  $X_0$  à l'instant  $t = 0$ .
- Il consomme à une vitesse  $c$  qui est un processus positif et  $\mathcal{Y}$ -adapté, vérifiant  $\int_0^T c_s ds < \infty$  p.s.
- Il place sur l'actif  $i$  la quantité  $\theta^i$  et on note  $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$  la somme investie sur la  $i$ -ième action pour  $i = 1, \dots, d$ .
- Sa richesse au temps  $t$  s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds.$$

# Informations sur l'initié

- Son portefeuille est considéré autofinçant, c'est-à-dire :

$$\mathbf{H2} : dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

- En notant  $R_t = (S_t^0)^{-1}$  le facteur d'actualisation, sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , la richesse  $X$  actualisée vérifie l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \\ X_0 + \int_0^t \langle R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1} \rangle ds + \int_0^t \langle R_s \pi_s, \sigma_s dW_s \rangle$$

# Méthode du grossissement de la filtration brownienne

**HC** :  $L \in \mathbb{D}^{2,1}$  est tel que  $\int_t^T \|D_u L\|^2 du > 0, \mathbb{P} - p.s. \forall t \in [0, T[$ ,  
ou  $D$  est le gradient stochastique usuel associé à  $W$  et  $\mathbb{D}^{p,q}$  est  
l'espace de Sobolev construit à l'aide de  $D$ .

Sous **HC**, on a :

- La loi conditionnelle de  $L$  sachant  $\mathcal{F}_t$  est absolument continue  
et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle  
 $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, t, x) dW_s$ , qui est  
une  $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ -martingale.



# Méthode du grossissement de la filtration brownienne

- Si  $M = M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$  est une  $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ -martingale locale continue, alors le crochet  $d\langle M, P \rangle_t = \langle \alpha, \beta \rangle_t dt$  et le processus  $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{\langle \alpha(\cdot, x), \beta \rangle_{u|x=L}}{p(u, L)} du$  est une  $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$ -martingale locale.
- En corollaire, on obtient que le processus vectoriel  $(B_t = W_t - \int_0^t l_u du, t \in [0, T])$  est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, (\mathcal{Y}_t, t \in [0, T]), \mathbb{P})$ , où  $l_u = \frac{\alpha(u, L)}{p(u, L)}$ .

# Changement de probabilité

On effectue un changement de probabilité pour se ramener à une mesure neutre au risque.

- Pour ce faire, il faut définir  $\xi_t = -l_t - \eta_t$ .

$$\text{HN} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp \frac{1}{2} \int_0^A \|\xi_s\|^2 ds] < \infty.$$

$$\text{HP} : \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A], \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp k \|\xi_s\|^2] \leq C.$$

- Posons  $M_t = \exp[\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi_s\|^2 ds]$ ,  $t \in [0, A]$ . Alors  $M_t$  est une  $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$ -martingale uniformément intégrable.

# Changement de probabilité

- Sous  $\mathbb{Q} = M.\mathbb{P}$ , le processus  $(\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds, t \in [0, A])$  est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, (\mathcal{Y}_t, t \in [0, A]), \mathbb{Q})$ .
- La richesse  $X$  actualisée de l'initié vérifie alors, sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ , l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = X_0 + \int_0^t \langle R_s \pi_s, \sigma_s d\tilde{B}_s \rangle$$

# Stratégie de consommation-placement $\mathcal{Y}$ -admissible

Une stratégie de consommation-placement  $(\pi, c)$   $\mathcal{Y}$ -admissible est un couple de processus  $\mathcal{Y}$ -adaptés tels que  $c \geq 0$ ,  $\int_0^T c_s ds < \infty$  *p.s.*,  $\sigma^* \pi$  appartient presque sûrement à  $L^2[0, T]$ , et la richesse  $X^{\pi, c}$  obtenue par cette stratégie est à valeurs positives ou nulles  $dt \otimes d\mathbb{P}$ -presque sûrement.

# Proposition (Contrainte)

- Sous **HC** et **HN** ou **HP**, soit  $X_0$  une variable  $\mathcal{Y}_0$ -mesurable positive. Alors pour  $(\pi, c)$  un couple admissible, et  $X_A^{\pi, c}$  la richesse finale associée, on a :

$$\mathbb{E}_Q[X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathcal{Y}_0] \leq X_0.$$

# Proposition (Contrainte)

- Réciproquement, pour une richesse initiale strictement positive  $X_0 \in L^1(\mathcal{Y}_0)$  donnée, une consommation  $c$ , un processus  $\mathcal{Y}$ -adapté positif tel que  $\int_0^A c_s ds < \infty$   $\mathbb{Q}$ -p.s., et une variable aléatoire  $Z \in L^1(\mathcal{Y}_A, \mathbb{Q})$  telle que  $\mathbb{E}_Q[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathbb{Y}_0] = X_0$ , alors il existe un portefeuille  $\pi$   $\mathcal{Y}$ -prévisible tel que  $(\pi, c)$  est admissible et  $X_A^{\pi,c} = Z$ .

Cette proposition sera notre contrainte du problème d'optimisation.

# Problème d'optimisation

- L'initié essaie d'optimiser sa stratégie pour maximiser sa richesse et sa consommation.
- On choisit comme critère d'optimisation de la stratégie un couple de fonctions d'utilité  $(U_1, U_2)$  croissantes, concaves et positives.
- Il s'agit donc de réaliser :

$$\max_{(\pi, c)} \{J(\pi, c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^A U_1(c_t) dt + U_2(X_A^{\pi, c}) | \mathcal{Y}_0 \right] \}$$

sous contrainte  $\mathbb{E}_Q[X_A^{\pi, c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt | \mathcal{Y}_0] \leq X_0.$

# Résolution du problème d'optimisation

Sous **H1**, **H2**, **HC** et **HN** ou **HP**, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il existe une stratégie optimale  $(\pi^*, c^*)$  telle que

$$J(\pi^*, c^*) = \max\{J(\pi, c), (\pi, c) \text{ admissibles}\}$$

de la forme :

$$\begin{aligned} c_t^* &= I_1(\lambda^* M_t R_t) \\ X_A^{\pi^*, c^*} &= I_2(\lambda^* M_A R_A) \end{aligned}$$



# Résolution du problème d'optimisation

où

$$I_i = (U'_i)^{-1}$$

$$\chi(y) = \mathbb{E}_p[\int_0^A R_t M_t I_1(y R_t M_t) dt + R_A M_A I_2(y R_A M_A) | \mathcal{Y}_0]$$

La valeur optimale du problème est donc :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U_2 \circ I_2(\lambda^* M_A R_A) + \int_0^A U_1 \circ I_1(\lambda^* M_t R_t) dt | \mathcal{Y}_0].$$

# Test statistique

On veut proposer un test statistique dans le cas :

- $U_i(x) = \log(x), i = 1, 2$ , donc  $I_i(x) = (U'_i)^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ .
- $L = \ln(S_1(T)) - \ln(S_2(T))$

L'optimisation s'explique :

- $\lambda^* = \frac{A+1}{X_0}$ .
- $c_t^* R_t = \frac{X_0}{A+1} (M_t)^{-1}$ .
- $X_A^* R_A = \frac{X_0}{A+1} (M_A)^{-1}$ .

# Test statistique

On oppose les deux hypothèses :

- $H_0 : L \in \mathcal{F}_0$  (L'agent n'est pas initié)
- $H_1 : L \notin \mathcal{F}_0$  (L'agent est initié)

L'idée est de comparer les consommations :

- $\log(R_t c_t^*) = \log\left(\frac{X_0}{A+1}\right) + \int_0^t \eta_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds$  sous  $H_0$
- $\log(R_t c_t^*) = \log\left(\frac{X_0}{A+1}\right) + \int_0^t \eta_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds + \log q(t, L)$   
sous  $H_1$

# Test statistique

On partitionne  $[0; T]$  en  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  et on définit pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$Y_i := \log(R_{t_{i+1}} c_{t_{i+1}}) - \log(R_{t_i} c_{t_i})$$

Sous  $H_0$ ,

$$\begin{aligned} Y_i &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_s dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds \\ &\sim N\left(\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds\right) \end{aligned}$$

Sous  $H_1$ , il y a un terme supplémentaire  $\log \frac{q(t_{i+1}, L)}{q(t_i, L)}$

# Test statistique

On teste donc la variable  $Y_i$  par un test de région critique au niveau  $\alpha = 0.05$  :

$$RC_i = \left\{ \omega : \left\| Y_i(\omega) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds \right\| > 1.96 \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_s ds} \right\}$$

# Simulations

On se place dans la situation simplifiée suivante :

- Le marché consiste en un actif sans risque ( $r$ ) et deux actifs risqués ( $b_i, \sigma_i, i = 1, 2$ ), sous un mouvement brownien  $W = (W_1, W_2)$
- La variable aléatoire connue par l'initié est  $L = \ln(S_1(T)) - \ln(S_2(T))$
- La fonction d'utilité à optimiser est logarithmique :  $U_i = \log$

On note :

- $A$  : temps final considéré
- $x$  : richesse initiale.

Les valeurs de richesse optimales en  $A$  sont :

- $X_A^* = \left( \frac{x e^{rA}}{A+1} \right) M_A^{-1}$  pour le non initié

- $X_A^* = \left( \frac{x e^{rA}}{A+1} \right) \tilde{M}_A^{-1}$  pour l'initié

où  $(t \in [0; A])$  :

$$\begin{cases} M_t &:= e^{-\eta \cdot W_t - \frac{t \|\eta\|^2}{2}} \\ \tilde{M}_t &:= e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} \end{cases}$$



Avec

- $\eta := \sigma^{-1} (b - r\mathbb{1}) = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - r}{\sigma_1} \\ \frac{b_2 - r}{\sigma_2} \end{bmatrix}$
- $\gamma := \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{bmatrix}$
- $l_r := \left( \frac{\gamma \cdot (W_T - W_r)}{T - r} \right) \gamma \quad \text{pour } r \in [0; A]$
- $B_t := W_t - \int_0^t l_u du \quad \text{pour } t \in [0; A]$

Code : <https://github.com/lucas-broux/Projet-3A>

# Marché



Figure – Marché simulé

# Richesses

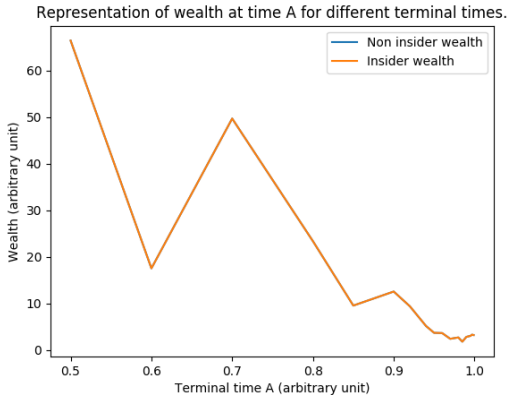


Figure – Richesse optimale des agents en A

# Richesses

Relative difference of wealth at time A for different terminal times.

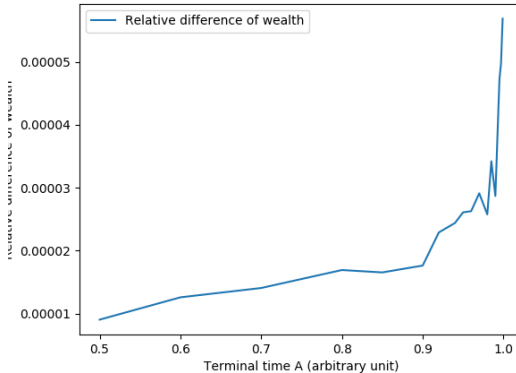


Figure – Écart relatif des richesses

# Conclusion

# Résumé

- Compréhension générale du raisonnement de l'article.
- Implémentation informatique des formules dans un cas particulier.

# Perspectives du projet

Approfondissement théorique :

- Cas plus réaliste : "sauts" de valeur dans le marché.
- Études de cas particuliers.
- ...

