Dans cette première partie, nous considérons un modèle de marché financier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$, dont les prix des actions (un actif sans risque et d actifs risqués) sont régis selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i & = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, 0 \le t \le T, i = 1, ..., d \end{cases} \tag{1}$$

où :

— W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle qu'il engendre,

— Les paramètres b, σ et r sont dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}$ respectivement et sont supposés bornés sur $[0,T]$ et $\mathcal{F}$-adaptés.

— La matrice σ_t est inversible $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement.

L'information connue au temps t par les investisseurs sur le marché est $\mathcal{F}_t$. Nous supposons que l'initié dispose en outre, dès le début de son investissement à $t = 0$, d'une information supplémentaire sous la forme d'une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0,T], \mathbb{P})$. Notons alors $\mathcal{Y}$ la filtration "naturelle" de l'initié obtenue par grossissement initial de $\mathcal{F}$, lui adjoignant la variable aléatoire L : $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$.

A l'instant $t = 0$, l'initié dispose d'un capital X_0. Il consomme à une vitesse c, un processus positif $\mathcal{Y}$-adapté, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$, et place sur l'actif i la quantité θ^i. Notons $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, ..., d$. Sa richesse au temps t s'exprime donc par :

$$X_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i - \int_0^t c_s ds$$

Exploitons cette première équation en introduisant l'hypothèse naturelle d'autofinancement :

$$\mathbf{H2} : dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$$

Notons $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, alors la formule d'Itô donne

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i dS_t^i + \theta_t^0 dS_t^0 - c_t dt, \text{ avec } dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \big(S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t \big) + \theta_t^0 S_t^0 r_t dt - c_t dt \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t + (X_t - \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i) r_t dt - c_t dt \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i (b_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i S_t^i \sigma_t^i dW_t \\
&= (X_t r_t - c_t) dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}
$$

Nous avons encore par Itô

$$
\begin{aligned}
d(R_t) &= -\frac{dS_t^0}{(S_t^0)^2} + \frac{1}{2(S_t^0)^3} d < S^0 >_t \\
&= -\frac{r_t}{S_t^0} dt = -r_t R_t dt
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t + d < X, R >_t \\
&= -X_t r_t R_t dt + R_t (X_t r_t - c_t) dt + R_t (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + R_t (\pi_t, \sigma_t dW_t) \\
&= -R_t c_t dt + (R_t \pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) dt + (R_t \pi_t, \sigma_t dW_t)
\end{aligned}
$$

Ainsi, la richesse X actualisée vérifie l'équation :

$$
X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds + \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s) \tag{2}
$$

Étudions désormais la stratégie de l'initié. Nous supposons que celui-ci optimise sa stratégie au sens suivant : il optimise la fonction de perte :

$$
\begin{aligned}
&J \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\
&\quad (\pi, c) \mapsto J\left(X_0, \pi, c\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^A U_1\left(c_t\right) dt + U_2\left(X_A^{\pi, c}\right) \mid \mathcal{Y}_0 \right]
\end{aligned}
$$

où :

— $\mathcal{A}$ est l'ensemble des stratégies *admissibles* i.e. des stratégies (π, c) telles que π est $\mathcal{Y}$-prévisible, c est $\mathcal{Y}$-adapté, $c > 0, \int_0^T c_s ds < +\infty$ et $\sigma^* \pi \in L^2 [0;T]$ $\mathbb{P}$-p.s., et telle que la richesse engendrée par cette stratégie satisfasse $X^{\pi,c} \geq 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$-p.s.
— U_1 et U_2 sont des *fonctions d'utilité* i.e. positives, croissantes, concaves, $\mathcal{C}^1$ avec $\lim_{x \to +\infty} U_i' (x) = 0$. Par la suite, nous supposerons $U_1 = U_2 = \log$.
— A est un temps strictement inférieur à T, qui correspondra au *temps final* de notre analyse. En effet, des phénomènes d'explosion en temps fini lorsque $A \to 1$, décrits avec précision dans [**?**], nous empêchent d'étudier l'évolution de l'initié sur $[0;T]$ tout entier.

L'interprétation est la suivante : l'initié choisit, parmi toutes les stratégies admissibles, celle qui optimise en moyenne son utilité (fonction de sa consommation et de sa richesse finale) sachant les informations connues sur le marché en $t = 0$ ainsi que l'information supplémentaire L.

La difficulté ici est de caractériser $\mathcal{A}$. En effet, W est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mais pas sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, ce qui nous empêche de faire un simple changement de probabilité comme dans les cas usuels pour nous ramener à la probabilité risque-neutre. Le raisonnement est adapté suivant les étapes suivantes :

1. *Changement de probabilité* : nous construisons une probabilité $\mathbb{Q}$ pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien
2. *Grossissement de filtration* : nous construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.
3. *Changement de probabilité* : nous construisons un mouvement brownien $\tilde{B}$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec $\mathbb{Q}_1$ probabilité risque-neutre sur $\mathcal{Y}$.