Modélisation et détection de délit d'initié

BROUX Lucas, HEANG Kitiyavirayuth

20 mars 2018

Présentation du projet

- **Modélisation et détection de délit d'initié :**
  Que se passe t'il lorsqu'un agent dispose d'une information confidentielle sur l'évolution future du marché ?
- Objectifs :
  - Analyser le gain de l'initié par rapport à un non-initié.
  - Simuler la richesse de l'initié et du non-initié.

Choix du sujet

- Problématique concrète.
- Aspect théorique : notions profondes et techniques.
- Étude de cas particuliers possible à notre niveau.

Plan de la présentation

Modèle diffusif - cas particulier

Marché

On considère 2 actions risquées sur le marché financier sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$, dont les prix évoluent selon l'équation :

$$\begin{cases} S_t^0 = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^1 = S_0^1 + \int_0^t S_s^1 b_s^1 ds + \int_0^t S_s^1 \sigma_s^1 dW_s, & 0 \leq t \leq T \\ S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t S_s^2 b_s^2 ds + \int_0^t S_s^2 \sigma_s^2 dW_s, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- W est un mouvement brownien à 2 dimensions dont $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle.
- Pour simplifier, on suppose que b, r et σ sont constants.

Marché

Les prix peuvent donc s'expliciter :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 e^{rt} \\ S_t^1 & = S_0^1 e^{\left(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_1||^2\right)t + (\sigma_1, W(t))} \\ S_t^2 & = S_0^2 e^{\left(b_2 - \frac{1}{2}||\sigma_2||^2\right)t + (\sigma_2, W(t))} \end{cases}$$

Initié

- On suppose qu'à $t = 0$, l'initié dispose a une information sur le futur, $L := \ln(S^1_T) - \ln(S^2_T)$, dont les autres investisseurs sur le marché ne disposent pas.
- Sa filtration naturelle est donc $\mathcal{Y}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.
- Il dispose d'un capital X_0 à $t = 0$, consomme à une vitesse c, et il place la quantité θ^i sur l'actif i.
- $\pi^i_t = \theta^i_t S^i_t$: la somme investie sur le i-ième l'actif, $i = \{1, 2\}$.

Hypothèse d'autofinancement

- Sa richesse au temps t s'exprime donc :

$$X_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^2 S_t^2 - \int_0^t c_s ds$$

- Nous supposons que son portefeuille est autofinançant :

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1 + \theta_t^2 dS_t^2 - c_t dt$$

- En notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on obtient :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = \int_0^t (R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) ds + \int_0^t (R_s \pi_s, \sigma_s dW_s)$$

Stratégie optimale

L'initié cherche à optimiser son "utilité" :

$$J : \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Stratégies admissibles}} \to \mathbb{R}$$

$$(\pi, c) \longmapsto J(X_0, \pi, c) := \mathbb{E}\left[\int_0^A \log(c_t)\, dt + \log\left(\underbrace{X_A^{\pi,c}}_{\text{Richesse au temps } A}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]$$

Stratégie optimale

- où

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c), \begin{cases} \pi \ \ \mathcal{Y} - \text{prévisible}, \\ c > 0 \ \ \mathcal{Y} - \text{adapté}, \\ \int_0^T c_s ds < +\infty \ \text{ et } \ \sigma^* \pi \in L^2[0; T] \ \ \mathbb{P} - p.s., \\ X^{\pi, c} \geq 0 \ \ dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \end{cases} \right\}$$

- $A < T$: *Temps final.*

Peut-on caractériser $\mathcal{A}$ sous une forme exploitable ?

Raisonnement

- La filtration de W empèche le changement de probabilité pour se ramener à une mesure risque-neutre.
- On va donc :
  - construire une probabilité $\mathbb{Q}$ pour laquelle W est un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.
  - construisons un nouveau mouvement brownien B sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$ par la méthode de grossissement de filtration.
  - construire un mouvement brownien $\tilde{B}$ sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$, avec $\mathbb{Q}_1$ probabilité risque-neutre sur $\mathcal{Y}$.

Changement de probabilités

Proposition : Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{Y}_A$, telle que pour $t \leq A$, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont $\mathbb{Q}$-indépendantes.
En outre, $(W_t, t \leq A)$ est un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Grossissement de filtration

Propostion : Sous hypothèses (techniques mais raisonnables), la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une $\mathcal{F}$-martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$

Grossissement de filtration

- On a $L = \ln(S_T^1) - \ln(S_t^2)$

$$= \underbrace{\ln(\frac{S_0^1}{S_0^2}) + ((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2|^2))T}_{=:\beta} + (\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{=:\gamma}, W(T)).$$

- La loi conditionnelle de L sachant F_t suit donc une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\beta + (\gamma, W(t)), ||\gamma||^2 (T - t)\right)$
- Donc $p(t, x) = \frac{1}{||\gamma||\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\beta-(\gamma, W(t)))^2}{||\gamma||^2(T-t)}}}_{=:f(t, W(t))}$

Grossissement de filtration

- On a montré que $p(t,x) =$
$$p(0,x) + \int_0^t \left(\underbrace{\frac{(x-\beta-(\gamma, W(t)))}{||\gamma||^3 \sqrt{2\pi}\,(T-t)^{\frac{3}{2}}} f(t, W(t))\,\gamma}_{:=\alpha(s,x)}, dW(s) \right)$$

Grossissement de filtration

Proposition : Si M est une $\mathcal{F}$-martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d < M, P >_t$ est égal à $d < \alpha, \beta >_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t \frac{<\alpha(.,x),\beta>_u|_{x=L}}{p(u,L)} du$ est une $\mathcal{Y}$-martingale locale continue.

- En corollaire, le processus vectoriel $\left(B_t = W_t - \displaystyle\int_0^t \frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)} du, t \in [0,T[\right)$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

Grossissement de filtration

On a donc construit un mouvement brownien B sur l'espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$, qui est l'espace de probabilité de l'initié

$$B_t = W_t - \int_0^t \underbrace{\frac{(\gamma, W(T) - W(u))\,\gamma}{||\gamma||^2\,(T-u)}}_{=:l(u,L)} du.$$

Changement de probabilité

- La forme de $l_t := l(t, L)$ ne permet le changement de probabilité que sur $[0, A], A < T$ en non sur $[0, T]$.
- On introduit donc $\xi_t = -l_t - \eta_t$ où $\eta_t = (\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t\mathbf{1})$.

Changement de probabilité

Proposition : Posons $M_t = e^{\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||\xi_s||^2 d}$ pour $t \in [0, A], A < T$. Alors M est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable et, sous $\mathbb{Q}_1 = M.\mathbb{P}$, le processus

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$$

est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$-mouvement brownien et les prix actualisés sont des $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$-martingales locales.

Caractérisation de $\mathcal{A}$

- Pour caracteriser $\mathcal{A}$, on introduit d'abord la *stratégie de consommation-placement* (π, c) $\mathcal{Y}$*-admissible* qui rassure que la richesse finale $X^{\pi,c}$ pour la stratégie est toujours à valeurs positives ou nulles. .
- Par propositions, on obtient

$$\mathcal{A} = \left\{ (\pi, c) \, , \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \,|\, \mathcal{Y}_0 \right] \leq X_0 \right\}.$$

Résolution du problème d'optimisation

Notre problème d'optimisation est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log\left(c_t\right) dt + \log\left(X_A^{\pi,c}\right) \mid \mathcal{Y}_0\right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\left[X_A^{\pi,c} R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0\right] \leq X_0$$

Résolution du problème d'optimisation

Les solutions du problème sont

$$\begin{cases} R_t c_t^* & = \frac{X_0}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* & = \frac{X_0(A+1-t)}{A+1} \frac{1}{Y}(t) \end{cases}$$

où :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t (\eta_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s+\eta_s, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|I_s+\eta_s\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

Forme explicite du gain

On a :

$$Y(t) = \begin{cases} e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} =: Y_0(t) & \text{pour le non initié} \\ e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds} & \text{pour l'initié} \end{cases}$$

On s'intéresse au gain de l'initié par rapport au non-initié :

$$Z(t) := \frac{Y_0(t)}{Y(t)} = \frac{e^{-(\eta, W_t) - \frac{1}{2} t \|\eta\|^2}}{e^{-\int_0^t (I_s + \eta, dW_s - I_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s + \eta\|^2 ds}}$$
$$= e^{\int_0^t [(I_s, dW_s) ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \|I_s\|^2 ds}$$

Forme explicite du gain

Donc

$$d\log\left(Z\left(t\right)\right)=\underbrace{\left(l_s,dW_s\right)}_{=\frac{dp(t,L)}{p(t,L)}}-\frac{1}{2}\left\|l_s\right\|^2ds=d\log\left(p\left(t,L\right)\right)$$

Donc $\frac{Z(t)}{p(t,L)}$ est constant :

$$Z\left(t\right)=\frac{Z\left(0\right)}{p\left(0,L\right)}p\left(t,L\right)$$

Interprétation : pour tout t, le gain proportionnel de l'initié correspond - à une constante initiale près - à la densité conditionnelle de la variable L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x=L$.

Forme explicite du gain

On obtient donc :

$$\boxed{Z(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} e^{\frac{-(\gamma, W(T)-W(t))^2}{2||\gamma||^2(T-t)} + \frac{(\gamma, W(T))^2}{2||\gamma||^2 T}}}$$

En remplaçant $(\gamma, W(T) - W(t))^2$ par son espérance $||\gamma||^2 (T-t)$,

$$Z(t) \simeq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}}$$

raisonnement heuristique,
n'est pas une estimation de $\mathbb{E}[Z(t)]$

Analyse du gain

Cela fournit un minorant (via $e^x \geq 1 + x$) :

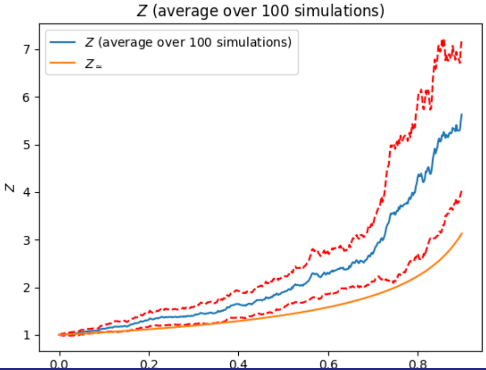
$$Z(t) \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \left(1 + \left(\underbrace{\frac{-\left(\gamma, W(T) - W(t)\right)^2}{2\|\gamma\|^2 (T-t)} + \frac{\left(\gamma, W(T)\right)^2}{2\|\gamma\|^2 T}}_{\mathbb{E}[\cdot]=0} \right) \right)$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[Z(t)\right] \geq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \xrightarrow[t \to T]{} +\infty$$

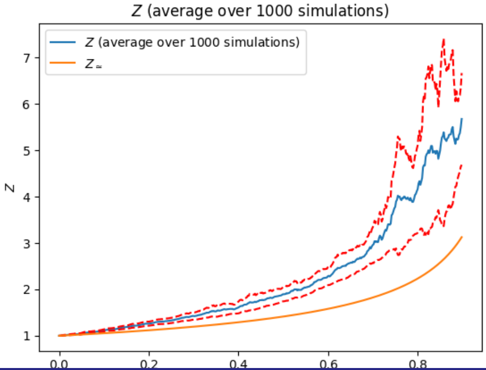
Visualisation

Moyenne de 100 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



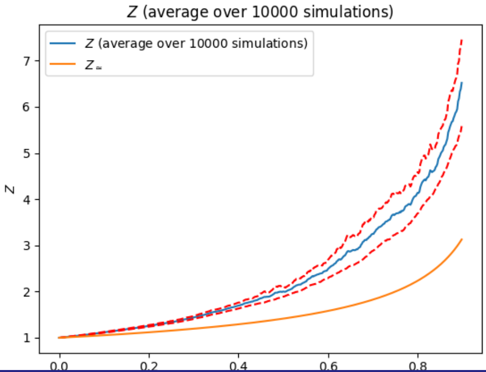
Visualisation

Moyenne de 1000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



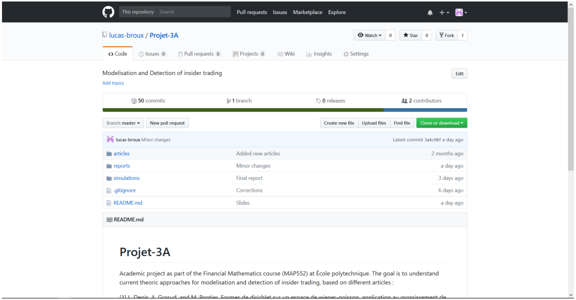
Visualisation

Moyenne de 10000 simulations de Z (*simulations_averages.py*) :



Simulations

Nous avons implémenté numériquement les formules (*repository Github* du projet : `https://github.com/lucas-broux/Projet-3A`).



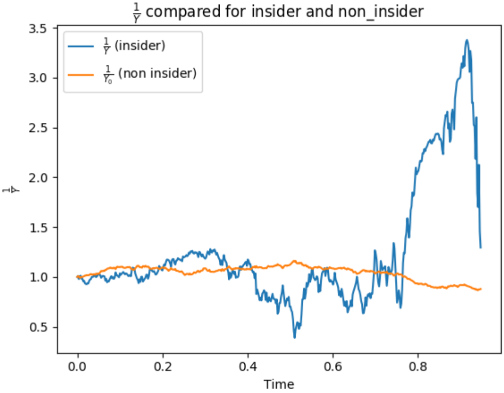
Exemple de simulation

simulations_diffusive_model.py,

$$\begin{cases} T & = 1 \\ A & = 0.95 \\ d & = 2 \\ r & = 0.1 \\ b & = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma & = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemple de simulation

Exemple de simulation



Choix des paramètres

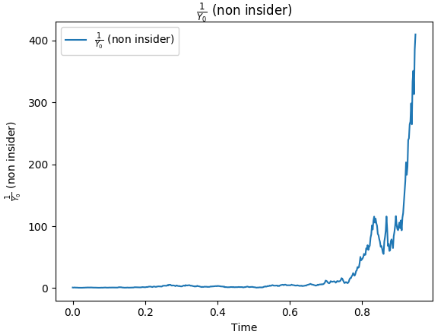
On a

$$\frac{1}{Y_0\left(t\right)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η grand (σ petit ou/et b éloigné de r) : le terme en $t\|\eta\|^2$ domine : explosion de la richesse.

Simulations

$$\begin{cases} r &= 0.1 \\ b &= \begin{bmatrix} 0.55 & -0.35 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Choix des paramètres

On a

$$\frac{1}{Y_0\left(t\right)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η grand (σ petit ou/et b éloigné de r) : le terme en $t\|\eta\|^2$ domine : explosion de la richesse.
  Interprétation : faible volatilité et/ou fort drift : les agents peuvent établir de bonnes stratégies.

Choix des paramètres

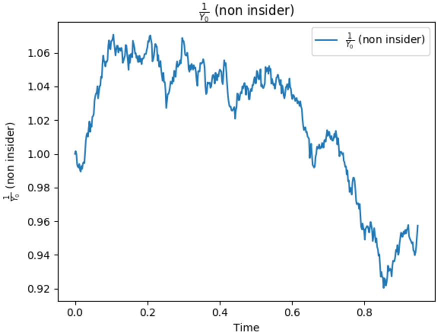
On a

$$\frac{1}{Y_0\left(t\right)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2}t\|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η petit (σ grand ou/et b proche de r) : le terme en (η, W_t) domine : caractère "aléatoire" de la richesse.

Simulations

$$\begin{cases} r &= 0.1 \\ b &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.05 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Choix des paramètres

On a

$$\frac{1}{Y_0\left(t\right)} = e^{(\eta, W_t) + \frac{1}{2} t \|\eta\|^2} \quad \text{avec } \eta = (\sigma)^{-1}(b - r\mathbf{1})$$

- Si η petit (σ grand ou/et b proche de r) : le terme en (η, W_t) domine : caractère "aléatoire" de la richesse.
  Interprétation : forte volatilité et/ou drift incertain : les agents ont du mal à établir de bonnes stratégies.

Modèle avec sauts

Marché

On considère d actions risquées sur le marché sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t; t \in [0, T], \mathbb{P})$. Les prix des actions, dirigés par un mouvement brownien W de dimension m et un processus de Poisson N de dimension n, qui produit des sauts, ont pour équation :

$$\begin{cases} S_t^0 & = S_0^0 + \int_0^t S_s^0 r_s ds \\ S_t^i & = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_t^{ij} \sum_{j=1}^d d(W^*, N^*)_j^*(s) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq T, i = 1, ..., d, m + n = d$

Raisonnement

- On adapte les informations et le comportement de l'initié décrits dans le marché diffusif.
- L'initié cherche à optimiser la fonction

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log(c_t)dt + \log(X_A^{\pi,c})\middle|\mathcal{Y}_0\right]$$

  dans l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.
- Les méthodes dans le marché diffusif s'appliquent pour ce marché aussi pour faire grossir la filtration et se ramener à une mesure risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_1)$.

Résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^A \log(c_t)dt + \log(X_A^{\pi,c})\middle|\mathcal{Y}_0\right]$$

sous contrainte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\left[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt \mid \mathcal{Y}_0\right] \leq X_0$$

a pour solutions :

$$\text{pour } t \in [0,A], \quad \begin{cases} R_t c_t^* & = \frac{X_0}{A+1}\frac{1}{Y}(t) \\ R_t X_t^* & = \frac{X_0(A+1-t)}{A+1}\frac{1}{Y}(t) \\ \pi_t^* & = (\sigma_t^*)^{-1}\frac{Y(t)}{Y(t^{-1})}\widehat{X}_t l_t \end{cases}$$

Résolution du problème d'optimisation

- avec $Y(t) = Y_0(t)/Z(t)$, la relation liant la stratégie optimale de l'initié $(Y(t))$ avec celle du non initié $(Y_0(t))$
- Z est la densité conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$, prise en $x = L$,
- $Y_0 = \varepsilon\left(\int_0^{\cdot} \left(-\left(\eta_W\left(s\right), dW_s\right) + \left(-\eta_M\left(s\right) - I_n, dM_s\right)\right)\right)$, où
  - $\eta_W\left(t\right) :=$ m premières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.
  - $\eta_M\left(t\right)$ est un processus de dimension n, dont les composants sont supposés positifs, tel que $q_t.\kappa_t :=$ n dernières lignes de $(\sigma_t)^{-1}(b_t - r_t I_d)$.

Conclusion

Conclusion

- Il est possible d'exprimer et d'étudier le gain de l'initié dans des cas plus ou moins particuliers.
- Des théorèmes généraux mais techniques assurent que - sous hypothèses - le raisonnement reste vrai.
- Simulations numériques possibles dans certains cas, mais rendues difficiles dans d'autres.

Retour d'expérience

Retour d'expérience

- Travail de lecture d'article :
  - Identifier les passages trop techniques.
  - Étudier en détail les cas particuliers.
- Travail en binôme.

Merci !

Questions ?