

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM**

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE  
PROGRAMAÇÃO PARALELA**

**JOINVILLE**

**2023**

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE  
PROGRAMAÇÃO PARALELA**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

**JOINVILLE**

**2023**

Para gerar a ficha catalográfica de teses e  
dissertações acessar o link:  
<https://www.udesc.br/bu/manuais/ficha>

Bublitz, Lucas

PHILLIPO: aplicação do método de elementos finitos  
na análise estática de estruturas rígidas utilizando  
paradigmas de programação paralela / Lucas Bublitz. -  
Joinville, 2023.

84 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Pablo Muñoz.

.  
Dissertação - Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado  
em Engenharia Mecânica, Joinville, 2023.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave.  
4. Palavra-chave. 5. Palavra-chave. I. Muñoz, Pablo .  
II. , . III. Universidade do Estado de Santa Catarina,  
Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado em  
Engenharia Mecânica. IV. Título.

## ERRATA

Elemento opcional.

Exemplo:

SOBRENOME, Prenome do Autor. Título de obra: subtítulo (se houver). Ano de depósito. Tipo do trabalho (grau e curso) - Vinculação acadêmica, local de apresentação/defesa, data.

Folha	Linha	Onde se lê	Leia-se
1	10	auto-conclavo	autoconclavo

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE  
PROGRAMAÇÃO PARALELA**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

**BANCA EXAMINADORA:**

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Membros:

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Joinville, 01 de maio de 2023

Dedico este trabalho a quem, gostando de  
aprender, não fica cansado em fracassar.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Gerson e Klissia, e à minha vó, Norma, pelo suporte. Agradeço aos meus amigos, Ana, Gabriel, Willian, Lucas, Wesley (e o outro também!), Filipe e Gustavo, por estarem presente nessa longa caminhada da graduação.

“Mas o contraste não me esmaga liberta-me; e  
a ironia que há nele é sangue meu. O que  
deveria humilhar-me é a minha bandeira, que  
desfraldo; e o riso com que deveria rir de mim,  
é um clarim com que saúdo e gero uma  
alvorada em que me faço.” (Fernando Pessoa  
em Livro do Desassossego – *com uma pequena  
alteração minha*)



## **RESUMO**

Elemento obrigatório que contém a apresentação concisa dos pontos relevantes do trabalho, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo e das conclusões do mesmo. A apresentação e a redação do resumo devem seguir os requisitos estipulados pela NBR 6028 (ABNT, 2003). Deve descrever de forma clara e sintética a natureza do trabalho, o objetivo, o método, os resultados e as conclusões, visando fornecer elementos para o leitor decidir sobre a consulta do trabalho no todo.

**Palavras-chave:** Palavra 1. Palavra 2. Palavra 3. Palavra 4. Palavra 5.

## **ABSTRACT**

Elemento obrigatório para todos os trabalhos de conclusão de curso. Opcional para os demais trabalhos acadêmicos, inclusive para artigo científico. Constitui a versão do resumo em português para um idioma de divulgação internacional. Deve aparecer em página distinta e seguindo a mesma formatação do resumo em português.

**Keywords:** Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3. Keyword 4. Keyword 5.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Forças internas: seção em um sólido qualquer . . . . .	21
Figura 2 – Estado de tensão . . . . .	22
Figura 3 – Função de deslocamento sobre a região de um sólido . . . . .	25
Figura 4 – Deformação de um elemento quadrado infinitesimal . . . . .	26
Figura 5 – quadrilátero deformado . . . . .	29
Figura 6 – Domínio discretizado em elementos triangulares. . . . .	38
Figura 7 – Um triângulo de deformações constantes (CST). . . . .	39
Figura 8 – Um triângulo de deformações constantes sob carregamentos (CST) sob carregamentos uniformes. . . . .	40
Figura 9 – Uma estrutura discretizada em elementos CST. . . . .	47
Figura 10 – Elemento tetraédrico . . . . .	56
Figura 11 – Fluxograma de execução: GID . . . . .	60
Figura 12 – Fluxograma de execução: PHILLIPO.jl . . . . .	61
Figura 13 – Parte do arquivo de condições de contorno: PHILLIPO.cnd . . . . .	62
Figura 14 – Logo da linguagem Julia . . . . .	63

## **LISTA DE TABELAS**

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEF	Método dos Elementos Finitos
FEM	Finite Element Method
MVF	Método dos volumes finitos
SI	Sistema Internacional de Unidades

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	tensor de tensões
$\varepsilon$	tensor de deformações
$\mathcal{B}$	um corpo sólido, elástico, homogêneo e isotrópico, em equilíbrio
$\sigma_{ij}$	tensão na direção $i$ e sentido $j$
$\varepsilon_{ij}$	deformação na direção $i$ e sentido $j$
$\Omega$	região que compreende os pontos de um sólido
$\hat{n}$	um versor

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	17
1.2	OBJETIVO . . . . .	18
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivos propostos . . . . .</b>	<b>18</b>
1.3	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	18
<b>2</b>	<b>A MECÂNICA DOS SÓLIDOS: TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DES- LOCAMENTO . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	TENSÃO . . . . .	20
<b>2.1.1</b>	<b>Equações diferenciais governantes do equilíbrio estático . . . . .</b>	<b>23</b>
2.2	DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO . . . . .	24
2.3	A LEI DE HOOKE . . . . .	28
<b>2.3.1</b>	<b>A Lei de Hooke Uniaxial . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.3.2</b>	<b>A Lei de Hooke em Cisalhamento . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3</b>	<b>O Coeficiente de Poisson . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3.4</b>	<b>O Princípio da Sobreposição &amp; A Lei de Hooke Generalizada . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.3.5</b>	<b>Estado Plano de Deformação e de Tensão . . . . .</b>	<b>33</b>
2.4	TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA: A TENSÃO EQUI- VALENTE DE VON MISES . . . . .	34
<b>3</b>	<b>O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1	AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO . . . . .	41
3.2	AS RELAÇÕES DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO . . . . .	43
3.3	A MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL . . . . .	44
3.4	MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .	46
<b>3.4.1</b>	<b>Solução direta do sistema global . . . . .</b>	<b>51</b>
3.5	ANÁLISE TRIDIMENSIONAL SOBRE O TETRAEDRO . . . . .	54
<b>3.5.1</b>	<b>Relação entre tensão, deformação e deslocamento . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3.5.2</b>	<b>As funções de interpolação . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4</b>	<b>PHILLIPO . . . . .</b>	<b>58</b>
4.1	DISTRIBUIÇÃO PELO PKG.JL . . . . .	59
4.2	FLUXO DE EXECUÇÃO . . . . .	59
<b>4.2.1</b>	<b>Pré-processamento . . . . .</b>	<b>60</b>
4.3	GID . . . . .	61
<b>4.3.1</b>	<b>PHILLIPO.gid . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>JULIA . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1	ORIGEM . . . . .	63

<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO &amp; VERIFICAÇÃO . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO FONTE DE PHILLIPO.JL . . . . .</b>	<b>68</b>



## 1 INTRODUÇÃO

I think of myself as an engineer, not as a visionary or 'big thinker.' I don't have any lofty goals. (Linus Torvalds)

A limitação do ser humano em captar integralmente os fenômenos ao seu redor é evidente, a ponto de não conseguir compreender como eles se dão. Analisar um fenômeno, portanto, separando-o em pequenas partes (ou elementos) cujo comportamento é mais facilmente determinado, e, a partir da justaposição delas, reconstruir o funcionamento do próprio fenômeno, é um modo intuitivo que engenheiros e cientistas procedem em seus estudos. (ZIENKIEWICZ, 2000, p. 2).

[...]

O MEF consiste, basicamente, na ideia apresentada de análise, em que o domínio de uma equação diferencial é subdividido em elementos discretos, descritos por um conjunto de nós formando uma malha. Nesse método, os elementos tem suas propriedades herdadas do domínio (características, condições de contorno etc.), porém, a descrição do fenômeno é simplificada por meio de funções de interpolação. Essas discretizações são, então, justapostas sobre os nós da malha, de modo a garantir continuidade, formando um sistema de equações algébricas, cuja solução é uma aproximação da solução da própria equação diferencial. (QUEK, 2003, pág. 1 e 2)

Esse procedimento é muito custoso em termos de cálculo, visto que para cada elementos é necessário calcular suas funções de interpolação, e depois justapor todos em um grande sistema de equações algébricas, cuja solução também é custosa. É evidente, então, que o Método dos Elementos Finitos, ou os métodos numéricos em geral, acompanha o desenvolvimento da programação, impulsionado pelo avanço do processamento computacional (OñATE, 2009). O poder computacional permite que se trabalhe com um volume inconcebível, para a capacidade humana, de dados e operações, como também das estruturas de dados e algoritmos que os manipulam. O algoritmo e a estrutura de dados passam a ser tão relevantes quanto a própria equação diferencial. Então, é de se esperar que uma aplicação desse método seja acompanhada de aspectos de projeto de software conciso, cujo objetivo não seja só a otimização computacional, mas a legibilidade e modularização, que são características úteis quando se espera a reutilização, aprimoramento continuado e, acima de tudo, a comunicação do código-fonte.

A escolha da linguagem de programação, então, para uma aplicação do MEF, é o passo fundamental para se planejar a estrutura do código, pois, são as ferramentas de sintaxe e processamento que a linguagem e seu compilador/interpretador oferecem que vão ditar, em parte, a forma como os algoritmos são implementados, além de outros aspectos de execução, como otimização e estrutura de dados. Comumente, esses softwares de análise por elementos finitos, como Abaqus e Ansys, são escritos em linguagens compiladas, basicamente, C e FORTRAN, que são sinônimos de robustez e desempenho. Entretanto, também são conhecidas pela sua prolixidade, complexidade de sintaxe de distribuição de bibliotecas, empacotamento... Elas não se

mostram mais atrativas para se desenvolver, com praticidade, não só aplicações do MEF, como também a maioria das aplicações práticas na vida dos engenheiros e cientistas (automatização de tarefas, análise de dados e até computação algébrica simbólica). Hoje, Python e suas bibliotecas: Pandas, NumPy, CoolProp... utilizando-se de sua sintaxe de sua sintaxe simplificada, tipagem dinâmica e popularidade (ocupando o TIOBE Index três vezes nos últimos cinco anos), possibilita o acesso a ferramentas muito sofisticadas: manipulação de dados (estatística e filtragem com Pandas), construção de modelos físicos (interpolação de propriedades termodinâmicas com CoolProp) e automatização de tarefas. (ERNESTI, 2022) Porém, toda essa conveniência tem um preço: o desempenho.

É notável que linguagens interpretadas, como Python, tem desempenho, em termos de processamento, muito inferior ao de linguagens compiladas, como C e Fortran, cuja eficiência de execução é necessária, quando se trabalha com problemas grandes e complexos, para se obter um tempo de execução razoável, às custas de uma sintaxe prolixa, tipagem estática e gerenciamento manual de memória. Esse dilema entre a produtividade de linguagens como Python e o desempenho de linguagens como C, é conhecido como *The Two languages Problem*, ou, em tradução livre, O Problema das Duas Linguagens.

Visando unificar esses dois mundos, e diminuir a distância entre as linguagens, engenheiros do MIT desenvolveram Julia, "a programming language for the scientific community that combines features of productivity languages, such as Python or MATLAB, with characteristics of performance-oriented languages, such as C++ or Fortran." (BEZANSON et al., 2018, tradução livre) Por conta do sucesso de Julia, e de sua comunidade engajada, a linguagem vem sendo adotada mais e mais no âmbito acadêmico, incluindo na área de elementos finitos, o que motivou a escolha dela para o desenvolvimento deste trabalho.

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica poderosa para a análise de sólidos, e o seu desenvolvimento em linguagens como Julia oferece uma porta de entrada muito convidativa para novos engenheiros, assim como impulsiona novas pesquisas no campo. Entendendo como o método funciona e como é aplicado, observando aspectos tanto matemáticos e físicos, quanto de programação e de estrutura de dados, é crucial para que engenheiros possam aplicá-lo devidamente, principalmente quando se utilizam de soluções já prontas: de código aberto ou proprietárias. Este documento aborda o desenvolvimento de um desses softwares: PHILLIPO.jl, cujo objetivo é expor e aplicar o MEF, abordando alguns aspectos de programação diferenciados daqueles vistos na graduação, como programação paralela, modularização e empacotamento, sem o intuito de concorrer com outras soluções já consolidadas ou ser referência de aplicação, mas de ser exemplificativo.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O tema surgiu quando o autor se encontrou na tarefa de adicionar uma funcionalidade em um software já existente de elementos finitos, e, já visto uma introdução ao assunto na

graduação, teve o interesse de se aprofundar. Então resolveu por criar seu próprio programa, em Julia, aplicando seus conhecimentos prévios de projeto de software, desenvolvendo mais o seu entendimento sobre o Método dos Elementos Finitos, assim como de aspectos numéricos computacionais.

## 1.2 OBJETIVO

O objetivo geral deste trabalho foi desenvolver uma aplicação de MEF para a análise de tensão e deformação em estruturas sólidas sobre carregamentos estáticos em regime elástico linear, utilizando para tanto, aspectos de programação funcional, processamento paralelo, focando em algumas características modulares de implementação e de legibilidade, com o intuito secundário de expor as facilidades e vantagens da linguagem Julia, como também servir de exemplo menor.

### 1.2.1 Objetivos propostos

Foram propostos os seguintes objetivos específicos:

1. estudar o MEF aplicado na determinação de deformações de estruturas sólidas em regime elástico e linear, sob carregamentos estáticos (implementando os elementos triangulares e tetraédricos, de deformações constantes);
2. programar os algoritmos de MEF em Julia;
3. desenvolver um módulo que seja distribuível pelo gerenciador de pacotes Pkg.jl, em um repositório público hospedado no GitHub;
4. aplicar processamento paralelo em determinadas partes do programa em que as funções nativas não o fazem, a fim de utilizar mais da capacidade de processamento do computador que um código feito sobre o paradigma estruturado;
5. estudar as características da linguagem Julia, e como ela pode ser uma alternativa viável para C e FORTRAN em programação científica de alta performance.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento aborda o projeto e o desenvolvimento de um módulo em Julia, denominado PHILLIPO.jl, que aplica o Método de Elementos Finitos, integrado à ferramenta de pré e pós-processamento GiD, para realizar a análise das tensões em estruturas sólidas e elásticas sobre carregamentos estáticos; e é organizado em capítulos que abordam:

1. A mecânica dos sólidos: tensão e deformação no regime elástico;
2. O método de elementos finitos aplicado no equilíbrio estático de estruturas sólidas;

3. A linguagem de programação Julia: o processamento paralelo acessível a engenheiros mecânicos;
4. PHILLIPO.jl, o módulo;
5. Validação e verificação de resultados;
6. Objetivos alcançados e melhorias em projetos futuros;
7. Conclusão.

O código fonte de PHILLIPO.jl, sob a licença LGPL, assim como o das interfaces de integração com o GiD, estão impressas em anexos, cujos arquivos, incluindo o  $\text{\LaTeX}$  deste documento, podem ser acessados no repositório: <<https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO.jl>>.

Todas as figuras foram criadas pelo próprio autor.

## 2 A MECÂNICA DOS SÓLIDOS: TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO

A Mecânica dos Sólidos é parte da física que estuda o comportamento de objetos sólidos sobre carregamentos, aplicando métodos analíticos para determinar suas características de resistência, rigidez e estabilidade. Seu conteúdo é notório por ser fundamental para grande parte da vida dos engenheiros, como mecânicos, civis ou mesmo eletricitas, ao lado de outras áreas também tão fundamentais, Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica. Sua aplicação é voltada ao projeto de estruturas a fim de que cumpram determinadas exigências, sejam tanto de deformação máxima, capacidade de carga e peso, como também de economia de materiais. E, por meio de ferramentas matemáticas, estuda os efeitos de tensão e deformação no interior de corpos sólidos. (POPOV, 1990, pág. 2)

Corpos sólidos são conjuntos de matéria que resistem a forças cisalhantes, ou seja, que resistem a trações tangenciais às suas superfícies. Essa é a característica fundamental dos sólidos, e, para contextualização deste capítulo, é importante que também sejam elásticos, homogêneos e isotrópicos. Aqui, um corpo com essas características é denominado  $\mathcal{B}$ .

*Corpos sólidos elásticos* são aqueles que, quando submetidos a carregamentos, deformam-se, mas, quando o carregamento é retirado, retornam à sua forma original, dentro de seu regime elástico. *Corpos sólidos homogêneos* são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todos os pontos de sua geometria, como massa específica, rigidez etc., de modo que uma porção do corpo seja indistinta do restante. *Corpos sólidos isotrópicos* são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todas as direções de sua geometria.

Este capítulo aborda os seguintes temas de Mecânica dos Sólidos, relevantes para o desenvolvimento inicial do módulo PHILLIPO.jl voltado à análise de estruturas elásticas sobre carregamentos contantes:

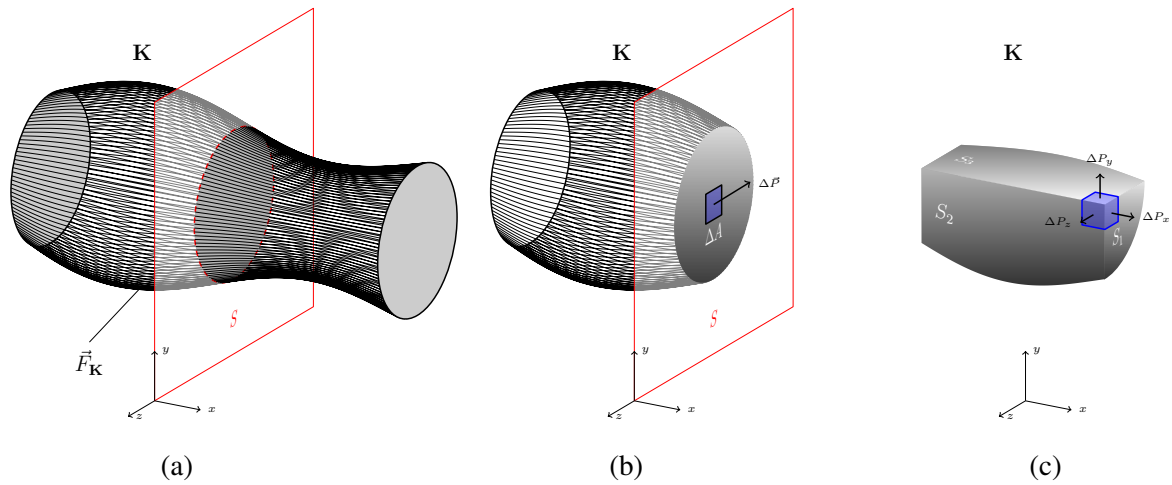
1. tensão;
2. deslocamento e deformação;
3. a lei de Hooke generalizada;
4. tensão de von mises.

### 2.1 TENSÃO

Um corpo sólido se deforma quando submetido a carregamentos externos<sup>1</sup>, distribuindo essas cargas ao longo de sua geometria. Tensão, no contexto de cargas mecânicas, define a grandeza dessa distribuição agindo sobre áreas infinitesimais, de modo que qualquer secção do corpo revele forças internas que estejam em equilíbrio entre si, e que sejam balanceadas pelos carregamentos externos. Essas forças, geralmente, variam ao longo do corpo, como também,

<sup>1</sup> Expressão que se refere tanto a carregamentos térmicos, quanto mecânicos, embora o primeiro não seja assunto deste texto.

Figura 1 – Forças internas: seção em um sólido qualquer



dependem do plano de seção. E, devido a sua forma vetorial, é conveniente que sejam decompostas em parcelas tangenciais e normais à seção. (POPOV, 1990, pág. 60)

Sejam um corpo  $\mathcal{B}$ , sólido, em equilíbrio e de geometria qualquer, situado sobre um sistema de referência  $(x, y, z)$ , submetido a forças externas na forma do carregamento  $\mathbf{F}$ , e as seções  $S_{1,2,3}$ , planos de corte através desse corpo (normais aos versores do sistema de referência), em que atuam as forças internas  $\mathbf{P}$ , conforme a figura 1a.  $\Delta\mathbf{P}$  é a resultante de forças que atuam sobre uma área  $\Delta A$  (centrada em um certo ponto  $p$ ), pertencente a  $S$ . O limite da razão entre cada componente de  $\Delta\mathbf{P}$  (tangenciais e normais) e a área  $\Delta A$ , quando  $\Delta A \rightarrow 0$ , define as componentes da tração agindo sobre o ponto de análise do corpo, de forma que

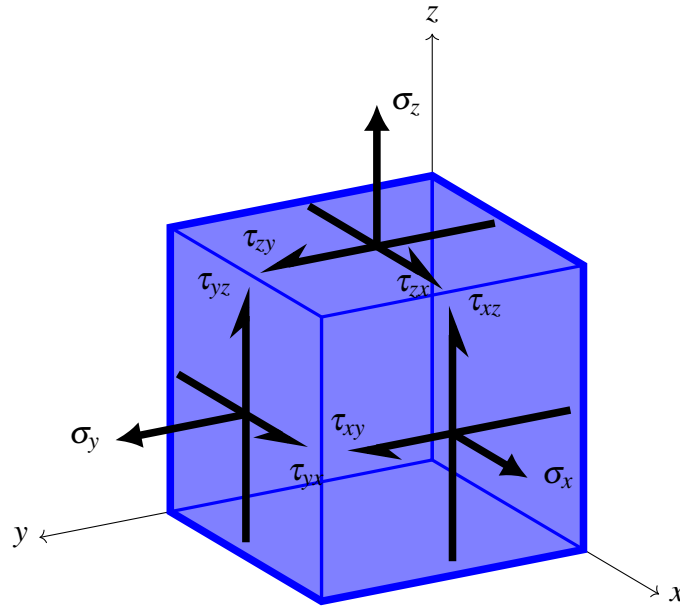
$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}, \quad (1)$$

em que os índices de  $\tau$  indicam, o primeiro, a normal do plano infinitesimal em que a tensão atua, e, o segundo, sua direção. Por conveniência, as tensões normais (aquelas que atuam perpendicularmente ao plano) são representadas por  $\sigma$ , ao invés de se utilizar  $\tau$  com índices repetidos ( $\tau_{xx} \equiv \sigma_x$ ). O símbolo *tau*, então, é reservado às tensões de cisalhamento, que atuam tangencialmente ao plano infinitesimal. No SI, a tensão é mensurada em Pascal ([Pa] = [N/m<sup>2</sup>]).

Se o mesmo procedimento for realizado para cada face de o elemento cúbico, formado por mais três seções paralelas e equidistantes a  $S_{1,2,3}$  da figura 1c, teremos a configuração da tração em três planos perpendiculares entre si para um certo ponto  $p$  em  $\mathcal{K}$ , conforme a figura 2, o que descreve o estado de tensão para aquele ponto. As componentes do estado de tensão podem ser dispostas na forma de uma matriz representativa do tensor de segunda ordem, denominado tensor de tensões, e, de acordo com Popov (1990), é

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Figura 2 – Estado de tensão



em que a linha indica o plano em que a componente age, e a coluna, sua direção.

O tensor de tensões é simétrico, o que pode ser demonstrado realizando o somatório de momentos sobre o elemento infinitesimal de tensão, de modo que esteja em equilíbrio. Oportunamente, escolhendo o ponto central para a análise do equilíbrio angular, podemos descrever as seguintes relações (POPOV, 1990, pág. 8):

$$\begin{cases} \vec{i}: \tau_{zy}(dxdy)\frac{dz}{2} - \tau_{yz}(dxdz)\frac{dy}{2} - \tau_{zy}(dydx)\frac{dz}{2} + \tau_{yz}(dxdy)\frac{dy}{2} = 0 \\ \vec{j}: \tau_{xz}(dydz)\frac{dx}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\frac{dz}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\frac{dz}{2} + \tau_{xz}(dydz)\frac{dx}{2} = 0 \\ \vec{k}: \tau_{yx}(dxdz)\frac{dy}{2} - \tau_{xy}(dydz)\frac{dx}{2} - \tau_{xy}(dydz)\frac{dx}{2} + \tau_{yx}(dxdz)\frac{dy}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} \end{cases} \quad (3)$$

Portanto,

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \iff \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t. \quad (4)$$

Essa propriedade torna com que o tensor de tensões possua apenas seis componentes independentes, ao invés de nove. Aproveitando-se disso, a notação de Voigt reduz a ordem do tensor, distribuindo as componentes em um vetor coluna de seis elementos, tal que, de acordo com Roylance (2000),

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^t. \quad (5)$$

### 2.1.1 Equações diferenciais governantes do equilíbrio estático

Outro fato importante sobre o estado de tensão vem do equilíbrio de forças. Assumindo que a distribuição de tensão  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)$  é contínua e diferenciável ao longo do domínio  $\Omega$  do sólido  $\mathcal{B}$ , podemos analisar sua variação sobre um elemento cúbico infinitesimal, de modo que a força resultante sobre ele seja nula. Como o tensor de tensões representa a decomposição das forças internas agindo sobre as faces de um cubo infinitesimal, o somatório de forças é a própria integral da tensão ao longo dessas superfícies, ou seja,

$$\oint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

São desconsideradas, aqui, as forças de campo, como gravidade ou eletromagnéticas. (ROY-LANCE, 2000, pág. 4, The Equilibrium Equations)

A integração é sobre uma região fechada, fronteira de um subdomínio de  $\Omega$ , e portanto, como a tensão foi assumida contínua e diferenciável em todo  $\Omega$ , podemos aplicar o teorema da divergência<sup>2</sup> à equação 6, obtendo que

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Essa relação é válida para qualquer volume infinitesimal no sólido, independente de sua orientação (ou seja, independente da escolha do sistema de referência), portanto o domínio de integração  $V$  é um volume arbitrário. Deste modo, como a integração deve ser nula independentemente do subdomínio de  $\Omega$  escolhido para compor  $V$ , a função integrada deve ser nula em todo domínio, ou seja,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Esse resultado é o sistema de equações diferenciais parciais de equilíbrio, que governa o estado de tensão. A partir dele, é possível obter tanto a distribuição de tensão sobre o sólido, desde que sejam conhecidas as condições de contorno. Comumente é solucionada por métodos numéricos, como o MEF, devido à dificuldade em encontrar soluções analíticas para geometrias muito complicadas.

Explicitamente, para três dimensões, o sistema de equações diferenciais de equilíbrio é

<sup>2</sup> O teorema da divergência, também conhecido como teorema de Gauss, afirma que, dada uma função vetorial contínua e diferenciável sobre uma região fechada:  $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ , em que  $\partial\Omega$  representa a fronteira da região  $\Omega$ .



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

A direção em que o elemento infinitesimal é orientado altera as componentes do seu estado de tensão, de modo que sua rotação evidencia direções nas quais as tensões não tem componentes tangenciais, ou seja, têm cisalhamento nulo. Essas tensões são chamadas, então, tensões principais.

O tensor de tensões é uma transformação linear que recebe um vetor unitário  $\hat{n}$  e retorna o vetor da tensão resultante,  $\sigma_{\hat{n}}$ , agindo sobre um plano normal a  $\hat{n}$ .<sup>3</sup> Caso exista uma tensão resultante que tenha a mesma direção  $\hat{n}$ , a tensão não terá componentes tangenciais, uma vez que, sendo colinear ao vetor unitário, é normal ao plano definido por ele. Em termos matemáticos, é o mesmo que  $\sigma_{\hat{n}} = \sigma \hat{n}$ <sup>4</sup>, ou, aplicando a transformação linear  $\sigma$ ,

$$\sigma \hat{n} = \sigma \hat{n}. \quad (12)$$

Observando a forma dessa equação, é evidente que  $\hat{n}$  é um autovetor de  $\sigma$ , e  $\sigma$  é o autovalor correspondente, portanto, determiná-los é equivalente a encontrar as tensões principais, ou seja, as raízes do polinômio característica do tensor de tensões:

$$\det(\sigma - \sigma I) = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Para o caso bidimensional, a solução desse sistema é bem conhecida, sendo dado por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (14)$$

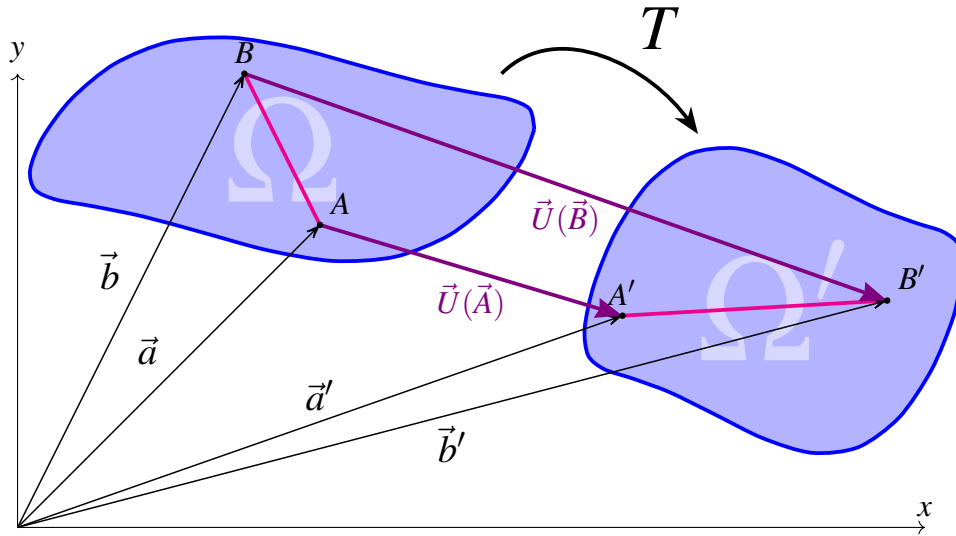
## 2.2 DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

O deslocamento de um sólido é uma função vetorial que mapeia cada ponto do seu domínio à variação entre sua posição original e a deslocada, de modo que se possa descrever a transformação sofre em termos do deslocamento e de sua posição original.

<sup>3</sup> Aplicando um vetor  $\hat{n}$  trivial ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) à transformação  $\sigma$ , obtém-se as próprias tensões mostradas na figura 2, como já era de se esperar.

<sup>4</sup>  $|\sigma|$ , nesse sentido, seria a norma da tensão resultante, uma vez que  $\hat{n}$  é unitário e adimensional.  $|\sigma_{\hat{n}}| = |\sigma \hat{n}| = |\sigma| |\hat{n}| = |\sigma|$

Figura 3 – Função de deslocamento sobre a região de um sólido



Seja um corpo  $\mathcal{B}$  definido sobre uma região  $\Omega$ , e a função  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , a representação de seu deslocamento, que descreve a transformação da posição original em deformada de cada ponto, mapeando  $\Omega$  para  $\Omega'$ .

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{U}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

em que  $u, v, w$  são as componentes do deslocamento nas direções de  $x, y, z$ , respectivamente,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  é o vetor posição do ponto.

Quando um sólido passa por uma transformação de deslocamentos, pode sofrer translações e deformações, ambas caracterizadas pelas distâncias entre pontos do corpo antes e após a transformação. A figura 3 exibe a transformação sobre um corpo  $\mathbf{K}$ , e como o segmento de reta  $AB$  é mapeado para sua nova configuração sobre  $\Omega'$ .

Nesse sentido, são duas as possibilidades:

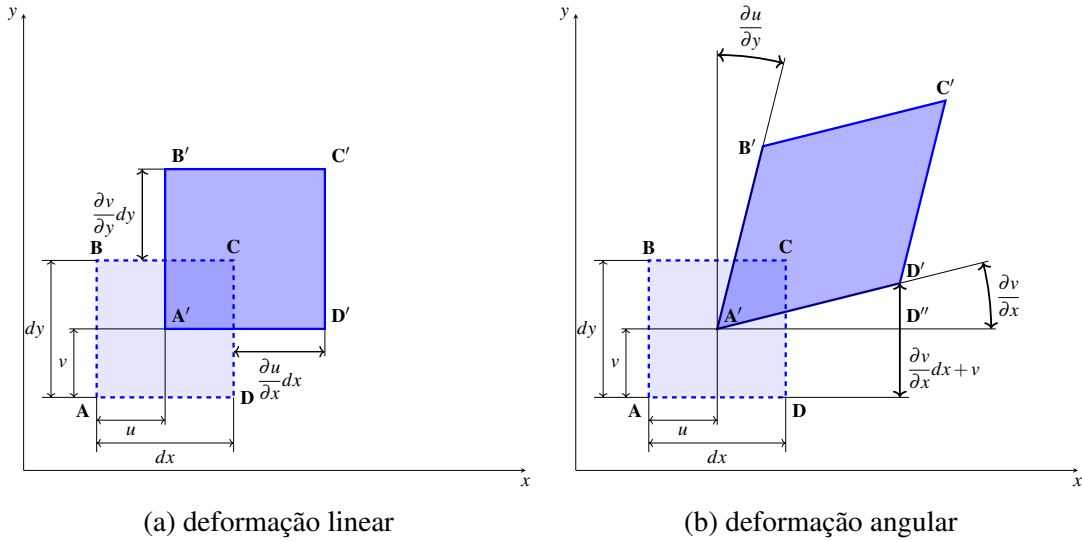
1. As distâncias entre os pontos permanece a mesma; Nesse caso, podemos dizer que a transformação é uma translação<sup>5</sup>, e que o corpo não sofreu de deformação, pois sua geometria foi conservada. Em termos matemáticos,

$$\|T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega. \quad (16)$$

2. As distâncias entre os pontos não se conservam; Quando isso ocorre, a geometria do corpo é alterada, deformando-se; não significa, entretanto, que o corpo não passou por uma translação. A deformação de sua geometria são as variações das distâncias entre os

<sup>5</sup> Essa transformação também é uma isometria, pois preserva a métrica do espaço, ou seja, o produto interno, de forma que  $T(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) \cdot T(\mathbf{b})$ .

Figura 4 – Deformação de um elemento quadrado infinitesimal



pontos antes e após a transformação, e nada diz respeito à mudança de posição do corpo. Em termos matemáticos, podemos dizer que

$$\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega : \|T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{b})\| \neq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|. \quad (17)$$

A deformação é esse alongamento, ou encurtamento, sofrido pelas linhas entre pontos do corpo, é descrita razão entre a variação do comprimento do segmento e o comprimento original, ou seja, a variação relativa do comprimento.

Essa definição, entretanto, está atrelada a uma curva no interior do sólido, e não descreve como que a deformação se manifesta ao longo de toda sua geometria, de forma a descrever continuamente ao longo de todo do domínio do corpo. Similarmente à tensão, define-se a deformação por um tensor de segunda ordem, de modo que suas componentes sejam determinadas pelo efeito que têm sobre um elemento infinitesimal (figura 4). (LUBLINER, 2017, pág. 230)

A figura 4a mostra um elemento infinitesimal, em que o segmento  $AD$  sofreu tanto uma translação quanto uma deformação, dado pelo campo de deslocamento  $\vec{U}$ , de modo a se tornar  $A'D'$ . Portanto,

$$\epsilon_x = \frac{\|A'D'\| - \|AD\|}{\|AD\|}. \quad (18)$$

O comprimento do segmento é o próprio infinitesimal,  $|AD| = dx$ , já o deformado, é dado pela diferença das posições dos pontos deslocados, de modo, e sabendo da diferenciabilidade do campo de deslocamentos<sup>6</sup>, é

$$\|A'D'\| = (u + A_x + dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - (u + A_x) \implies \|A'D'\| = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (19)$$

<sup>6</sup> Isso é importante pois o deslocamento de  $D'$  é descrito em função do deslocamento em  $A$ , de forma que  $u$ , ao ser expandido em uma série de Taylor, ao redor de  $A_x$ , seja, determinando se a deformação de  $D'$ ,  $u(A_x + dx) = u(A_x) + \frac{\partial u}{\partial x}(A_x)dx$ , em que os termos  $O(x^3)$  foram desconsiderado, visto que  $dx^2 \ll dx$ .

em que  $A_x$  representa a projeção do ponto  $A$  em  $x$ . Agora, substituindo essa expressão na equação 18, temos a definição da deformação linear na direção de  $x$ , em que

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (20)$$

O mesmo procedimento pode ser feito na direção de  $y$ , com o segmento  $AB$ , como na direção de  $z$ , assumindo um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura 2 do estado de tensão, obtendo-se, assim, todas as definições básicas de deformação linear (POPOV, 1990):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (21)$$

Na figura 4b, ocorre a deformação por cisalhamento, em que os segmentos  $AD$  e  $AB$  são, além de transladados, rotacionados em torno de  $A'$ , de modo a distorcer a geometria do elemento. Agora, a deformação ocorre na direção tanto em  $x$ , quanto em  $y$ , e é definida pela redução do ângulo reto  $\angle BAD$ , determinada, em termos do campo de deslocamentos (tal como na deformação linear) analisando o triângulo  $A'D'D''$ .

A função  $v$ , quando variada em  $x$  da posição de  $A$  até  $D$ , descreve o deslocamento dos pontos da face inferior do elemento infinitesimal na direção de  $y$ , ou seja, a hipotenusa do triângulo  $A'D'D''$ ; a inclinação, portanto, dessa reta é própria derivada de  $v$  na direção  $x$ , ou seja,

$$\angle D'A'D'' = \tan \frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}.^7 \quad (22)$$

Outro modo de se obter a mesma expressão é aplicar a definição trigonométrica da tangente sobre o triângulo  $A'D'D''$ , de forma que, em suma,

$$|A'D''| = \sqrt{dx^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}, \text{ Teorema de Pitágoras} \quad (23)$$

$$= \sqrt{dx^2}, \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2 \ll dx, \quad (24)$$

$$|A'D''| = dx, \quad (25)$$

$$\tan \angle D'A'D'' = \frac{|D'D''|}{|A'D''|}, \quad (26)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} dx \frac{1}{dx}, \quad (27)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (28)$$

$$(29)$$

<sup>7</sup> É essa aproximação é devida pois para ângulos suficientemente pequenos:  $\tan \theta = \theta$ , o que pode ser verificado expandindo a série de Taylor ao redor de  $x = 0$ .

O mesmo pode ser feito na direção de  $y$ , para encontrar a inclinação do segmento  $A'B'$ , como também para  $z$ , considerando um elemento infinitesimal cúbico.

A deformação, portanto, de cisalhamento do elemento infinitesimal é dada, em termos do deslocamento, por

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (30)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (31)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (32)$$

$$(33)$$

Por convenção<sup>8</sup>,  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i \neq j$ . (ROYLANCE, 2000)

O tensor de deformações é

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

ou, em notação indicial

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial i} + \frac{\partial U_i}{\partial j} \right), \quad (35)$$

em que vale o mesmo tipo de notação que as tensões,  $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i$ , e que  $U_x = u$ ,  $U_y = v$ ,  $U_z = w$ .

Tal como o tensor de tensões, o tensor de deformações é simétrico, e, portanto, só possui seis componentes independentes. Na notação de Voigt, de acordo com Roylance (2000),

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^t \quad (36)$$

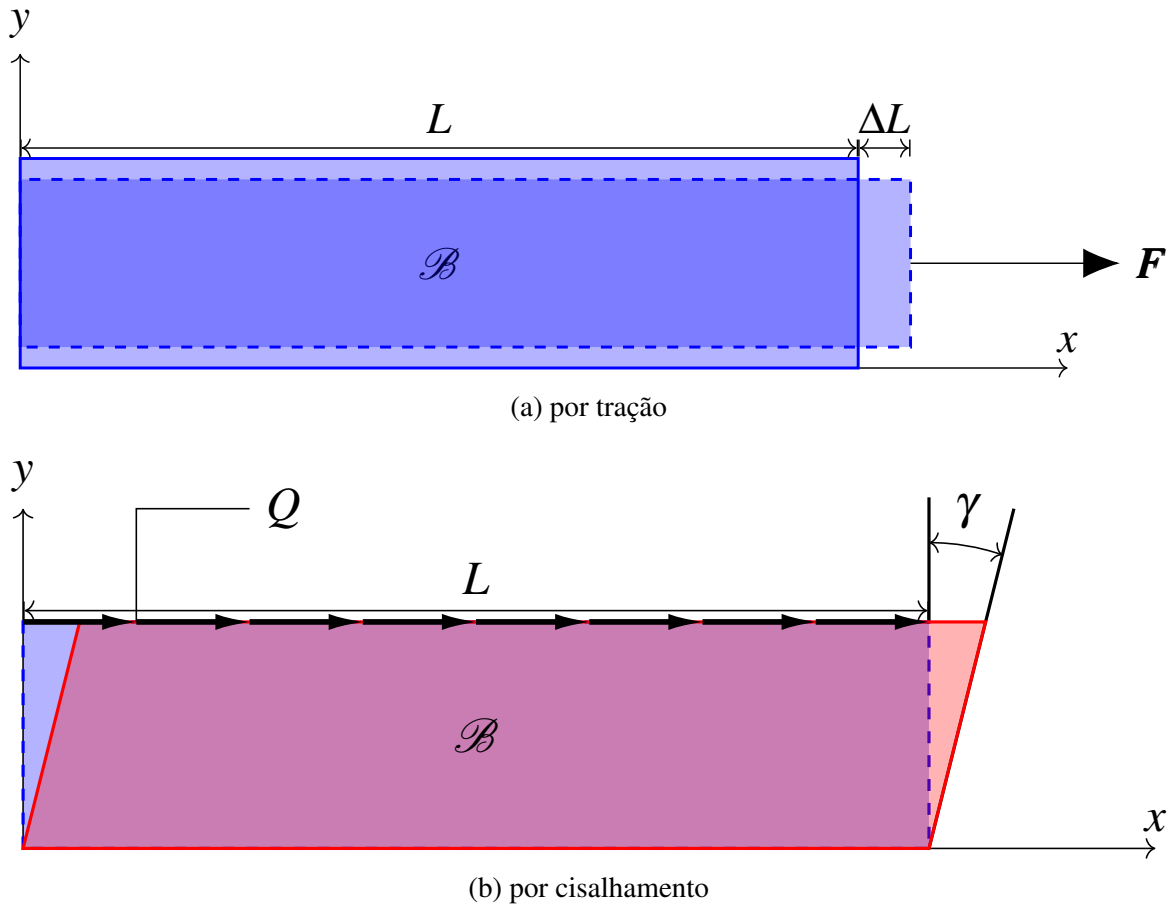
### 2.3 A LEI DE HOOKE

Em corpos sólidos e elásticos, a deformação está relacionada diretamente com a tensão em seu interior, de modo que se possa, dentro de certas condições, descrever uma transformação linear entre elas. Essa transformação é nomeada *Lei de Hooke*, e, utilizando a notação de Voigt, é descrita por

$$\{\sigma\} = \mathbf{C}\{\varepsilon\}. \quad (37)$$

<sup>8</sup> Essa convenção não é mero simbolismo, mas faz com que o tensor de deformações tenha propriedades interessantes; é possível, porém, intuir uma razão para tanto, observado que, para um mesmo elemento, a deformação por cisalhamento em  $x$  já tem a parcela da deformação na direção de  $y$ , e por conta disso, são divididas. (POPOV, 1990)

Figura 5 – quadrilátero deformado



$\mathbf{C}$  é denominada *matriz de constitutiva*<sup>9</sup>, definida em termos das características do material do corpo, como Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson, utilizando o *Princípio de Sobreposição*

### 2.3.1 A Lei de Hooke Uniaxial

Sejam o quadrilátero  $\mathcal{B}$ , um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento  $L$ , engastado em sua face esquerda, e de seção transversal  $A$ , e  $F$ , uma força constante que atua sobre a face direita de  $\mathcal{B}$ , na direção de  $x$ , que a deforma em  $\mathcal{B}'$  até um comprimento  $L + \Delta L$ , tal como na figura 5a.

A tensão desenvolvida em uma seção  $S$  de  $\mathcal{B}$ , perpendicular à força  $\vec{F}$ , pode ser descrita em termos do módulo de elasticidade,  $E$  (também denominado Módulo de Young), que é uma característica intrínseca do material de  $\mathcal{B}$ , e da deformação,  $\epsilon_x$ , atuando na mesma direção da força. Essa relação, denominada *Lei de Hooke Uniaxial*, é linear da forma

<sup>9</sup> A matriz constitutiva é uma forma de notação abreviada para descrever essa relação. Da mesma forma que o tensor de tensões é abreviado por um vetor na notação de Voigt, devido sua simetria, a matriz constitutiva é a abreviação de do tensor de elasticidade, um tensor de quarta ordem que mapeia o espaço das deformações no das tensões.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (38)$$

A unidade de  $E$  é a mesma de  $\sigma_x$ , o que é coerente, pois  $\varepsilon_x$  é adimensional, ou seja, o módulo de elasticidade é medido, no SI, em Pascal. O módulo de Young não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de  $\mathbf{K}$ . Aqui  $E$  é tratado como constante.

Essa relação desconsidera outros efeitos de deformação no interior do sólido, como a deformação transversal,  $\varepsilon_y$  (que pode ser observada como o encurtamento da altura da barra na figura 5a), e a por cisalhamento,  $\gamma_{xy}$ . É, comumente, empregado em casos que essas não são relevantes, como molas, barras e vigas. Vale lembrar que a Lei de Hooke é válida apenas para deformações elásticas, ou seja, que não ultrapassem o limite de elasticidade do material.<sup>10</sup>

### 2.3.2 A Lei de Hooke em Cisalhamento

Sejam a quadrilátero  $\mathcal{B}$ , um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento  $L$ , engastado em sua face inferior, e de seção transversal  $A$ , e  $Q$ , uma carregamento constante que atua sobre a face superior de  $\mathcal{B}$ , tangencialmente, na direção de  $x$ , que a deforma em  $\mathcal{B}'$ , inclinando-a, até um ângulo  $\gamma$ , tal como na figura 5b.

A tensão desenvolvida em uma seção  $S$  de  $\mathcal{B}$ , paralela ao carregamento de  $Q$ , pode ser descrita em termos do módulo de cisalhamento,  $G$ , que é uma característica intrínseca do material de  $\mathcal{B}$ , e da deformação angular,  $\gamma$ , atuando na inclinação das seções verticais. Essa relação, denominada *Lei de Hooke em Cisalhamento*, é linear da forma

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad = \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}. \quad (39)$$

O módulo de cisalhamento tem a mesma unidade de tensão, e, assim como o módulo de Young (a final,  $\gamma$  é adimensional), não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de  $\mathcal{B}$ . Aqui  $G$  é tratado como constante.

### 2.3.3 O Coeficiente de Poisson

Na deformação uniaxial de um corpo sólido, tal como na figura 5a, é razoável que o corpo também se deforme em outras direções, perpendiculares a aquela, de forma que existe,

<sup>10</sup> O limite de elasticidade do material é determinado experimentalmente, observando como se deforma sobre carregamentos controlados, determinando a região de deformações em que o material preserva-se na Lei de Hooke, ou seja, mantém uma relação linear entre deformação e tensão, e ao ser aliviado dos carregamentos externos, volta à geometria original.

dentro de determinados limites do regime elástico, uma relação entre essas deformações. Observa-se, por meio da experiência prática, que a deformação transversal geralmente é negativa, o corpo tende a se contrair quando submetido a uma deformação axial. Se o corpo se deforma ao longo de  $x$  um  $\varepsilon_x > 0$ , ele se contrai em  $y$ , ou seja, desenvolve uma deformação  $\varepsilon_y < 0$ , de forma que, de acordo com Lubliner (2017)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \quad (40)$$

em  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson, a razão entre a deformação transversal e a deformação axial, uma característica intrínseca do material, e, assim como os módulos de Young e de cisalhamento, não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de  $\mathcal{B}$ . Aqui  $\nu$  é tratado como constante.

### 2.3.4 O Princípio da Sobreposição & A Lei de Hooke Generalizada

O *princípio da sobreposição* permite a aditividade de efeitos (leia-se, deformações) na presença de múltiplas causa (leia-se, tensões). Invocando esse princípio, nós podemos expressar o total de deformação percebida pelo corpo como a soma de todas as deformações devidas aos componentes individuais de tensão presentes no corpo. (LUBLINER, 2017, pág. 252, tradução livre)

Esse princípio é válido quando, de acordo com (LUBLINER, 2017):

1. as equações de equilíbrio são lineares nas tensões;

Observando a equação 11, é possível notar que, dado dois conjuntos de tensões que satisfazem as equações de equilíbrio, a soma desses dois conjuntos também o faz, ou seja, as equações de equilíbrio são lineares nas tensões. Em termos matemáticos, é o mesmo que demonstrar a linearidade da transformação  $T(*) = \nabla \cdot (*)$ ,

$$\nabla \cdot (k_1[\boldsymbol{\sigma}]_1 + k_2[\boldsymbol{\sigma}]_2) = 0 \implies \nabla \cdot (k_1[\boldsymbol{\sigma}]_1) + \nabla \cdot (k_2[\boldsymbol{\sigma}]_2) = 0 \implies k_1 \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_1 + k_2 \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_2 = 0, \quad (41)$$

em que  $k_1, k_2$  são constantes reais, e  $[\boldsymbol{\sigma}]_1, [\boldsymbol{\sigma}]_2$  são conjuntos de tensões arbitrários, que satisfazem as equações de equilíbrio.

2. as relações entre deformação e deslocamento são lineares;

Tal como no item anterior, é possível demonstrar essa propriedade tomando dos conjuntos de deslocamentos arbitrários, que, quando somados, levam um conjunto de deformações que equivale ao somatório das deformações de cada conjunto de deslocamentos individualmente.



3. as relações entre tensão e deformação são lineares.

Observando as relações definidas para o módulo de Young, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, fica evidente que todas são lineares.

Assumindo agora que sobre um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura 2, atuam todas as componentes do tensor de tensões, de modo que, utilizando as relações entre deformação e tensão, das equações 38 e 39, como também a relação entre deformações, equação 40, é possível determinar o efeito de deformação causado por cada componente de tensão, tal que, devido à tensão  $\sigma_x$ , o elemento infinitesimal percebe as deformações

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (42)$$

As outras tensões,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , se comportam de forma análoga, de modo que

$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (43)$$

$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}. \quad (44)$$

As tensões de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , por sua vez, causam as deformações angulares,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (45)$$

Sobrepondo as deformações axiais para cada eixo, e as deformações angulares, é possível determinar as relações entre todas as tensões e todas as deformações, denominada *lei de Hooke generalizada*:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (47)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}, \quad (48)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (49)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (50)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (51)$$

O módulo de cisalhamento pode ser determinado em termos da razão de Poisson e do módulo de Young, de modo que<sup>11</sup>

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (52)$$

<sup>11</sup> A demonstração dessa relação se utiliza das fórmulas de rotação dos tensores de deformações e de tensores, que não são tratadas aqui.

Em forma matricial, a lei de Hooke generalizada pode ser escrita como, utilizando a notação de Voigt para  $\varepsilon$  e  $\sigma$ , como que  $\frac{\gamma}{2} = \varepsilon$ ,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

Invertendo esse sistema, obtemos a matriz constitutiva da equação 37,

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \{\varepsilon\} \quad (54)$$

Para que essa matriz exista, é necessário que  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ .<sup>12</sup>

### 2.3.5 Estado Plano de Deformação e de Tensão

Quando se analisa um problema plano, é possível simplificar as relações descritas pela matriz  $\mathbf{C}$  em dois casos, observando como a tensão é distribuída.

O Estado Plano de Tensão (EPT) é quando o corpo é suficientemente flexível em uma direção (como uma chapa ou uma placa), fazendo com que a tensão nessa direção possa ser negligenciada, ou seja,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a,

13

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (56)$$

$\varepsilon_z$  passou a ser uma variável dependente, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações. (ZIENKIEWICZ, 2000, pág. 90)

<sup>12</sup> Materiais com  $\nu = 0.5$  são chamados de incompressíveis, pois não sofrem deformações volumétricas.

<sup>13</sup> Tanto a matriz constitutiva do EPT e quando do EPD são facilmente deduzidas da lei de Hooke generalizada, apenas atribuindo os valores nulos e trabalhando com as inversas da matriz  $[\mathbf{C}]$ .

As Relações que definem a matriz constitutiva para o estado plano de tensão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

O Estado de Plano de Deformação (EPD), por sua vez, é quando o corpo é suficientemente rígido em uma direção (como uma barragem ou um muro), fazendo com que a deformação nessa direção possa ser negligenciada, ou seja,  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\varepsilon_{xz} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (59)$$

$\gamma_{xz}$  passou a ser uma variável dependente, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações. (ZIENKIEWICZ, 2000, pág. 91)

## 2.4 TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA: A TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES

A Teoria da Energia de Distorção máxima propõe que:

o escoamento em um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material ultrapassa a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples. (HIBBELER, 2010)

Essa proposição surge da observação que materiais dúcteis sob carregamentos hidrostáticos exibem uma resistência muito maior que em simples ensaios de tração uniaxial, e que, portanto, o escoamento não é um fenômeno compreendido, simplesmente, pela tração ou compressão, mas, majoritariamente, pela distorção do material. (HIBBELER, 2010)

A energia por unidade de volume, devida à deformação do material, é definida por um produto da tensão pela deformação. Em um elemento orientado sob tensões principais, de acordo com (HIBBELER, 2010)

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (60)$$

em que  $u$  denota a energia por unidade de volume,  $\sigma_i$  as tensões principais.

Substituindo as deformações pelas tensões, utilizando a lei de Hooke generalizada, equação 51, temos que

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] . \quad (61)$$

Essa energia pode ser compreendida como a soma de duas parcelas: a energia de deformação volumétrica,  $u_v$ , e a energia de deformação por cisalhamento,  $u_d$ . A energia de deformação volumétrica é a energia de deformação que tende a alterar o volume do elemento, sem distorcer sua geometria, ou seja, a energia de deformação devido à tensão média das tensões principais. Substituindo, então, as tensões principais pela tensão média na equação anterior, temos que

$$u_v = \frac{3\bar{\sigma}^2}{2E}(1 - 2\nu), \quad (62)$$

em que  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  é a tensão média.

A energia de distorção, portanto, é a diferença entre a energia total e a energia volumétrica, de modo que

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] . \quad (63)$$

Fazendo  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , temos a energia de deformação para o caso de tração uniaxial, de modo que

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3} S^2, \quad (64)$$

em que  $S$  é a tensão admissível do material num ensaio de tração. (HIBBELER, 2010)

Portanto, de acordo com o princípio da energia de distorção máxima, o escoamento ocorre quando a energia de distorção ultrapassa a energia de distorção de um ensaio de tração simples, ou seja, quando (HIBBELER, 2010)

$$S \leq \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} . \quad (65)$$

O lado direito dessa inequação pode ser interpretado como uma tensão equivalente ou efetiva do estado de tensão dado pelas tensões principais. De acordo com (HIBBELER, 2010), essa tensão é denominada *tensão equivalente de von Mises*, ou von Mises, definida por

$$\sigma_{eq} = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} . \quad (66)$$

Em termos de um sistema  $xyz$ , e utilizando todas as componentes do tensor de tensões, a tensão equivalente de von Mises pode ser expressa por

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (67)$$

### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

"As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality."(Albert Einstein)

O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento numérica utilizada para encontrar soluções de equações que modelam a natureza. É amplamente utilizado na simulação de fenômenos físicos, como mecânica dos sólidos, transferência de calor, eletromagnetismo e muitos outros. (OñATE, 2009)

A abordagem do MEF envolve a subdivisão de uma estrutura ou domínio contínuo em pequenos elementos geométricos finitos, definidos por nós, caracterizados por suas propriedades físicas e geométricas, em que são aplicadas as equações governantes do problema, cujo campo é aproximado, dentro de cada um, por meio de funções de interpolação, que vão discretizar o campo sobre os valores nodais. Em seguida, essas equações aproximadas são montadas, justapondo os elementos, em um sistema global, levando em consideração as condições de contorno e as restrições do problema. (QUEK, 2003)

Em suma, o método de elementos finitos segue o seguinte procedimento, de acordo com Oñate (2009):

1. definição do domínio, e das condições de contorno;
2. discretização do domínio em uma malha formada por nós que constituem os elemento;
3. aplicação das equações de governo sobre cada elemento, formando um sistema local de rigidez;
4. assemblagem dessas equações em um único grande sistema global;
5. resolução do sistema, encontrando os valores nodais do campo.

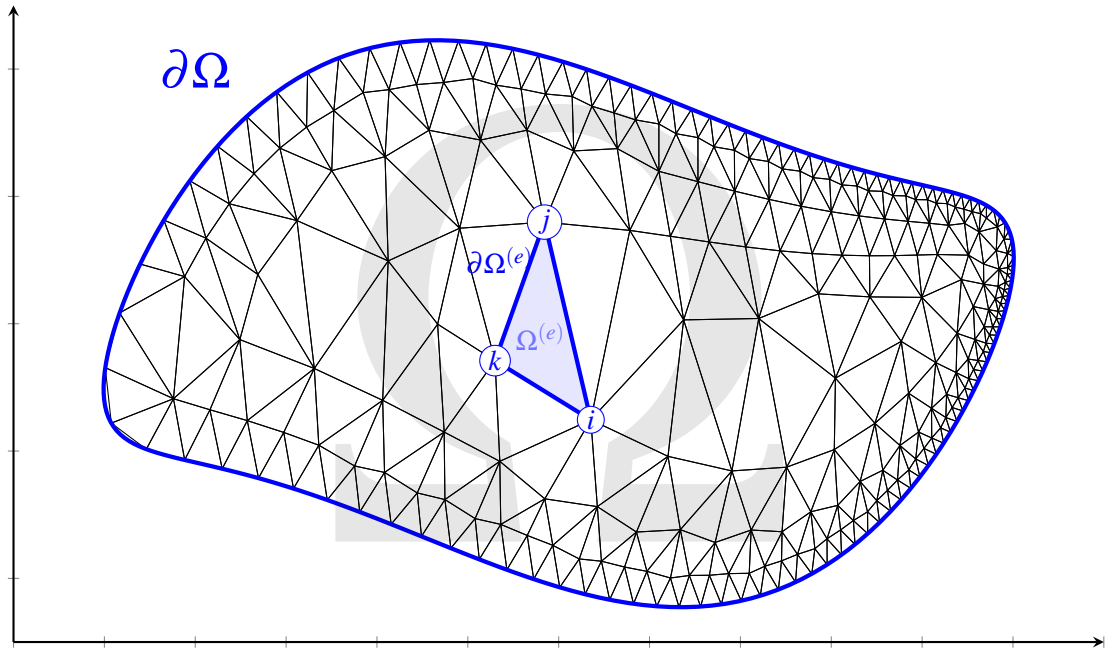
Na análise estrutural aqui abordada, o objetivo da aplicação do MEF é determinar o deslocamento de um sólido em equilíbrio sujeito a carregamentos e restrições, dentro do regime elástico modelado pela Lei de Hooke, utilizando funções de interpolações lineares em elementos triangulares (na análise 2D: EPT ou EPD) e tetraédricos (na análise 3D). Para tanto, resolver um sistema da forma

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}, \quad (68)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais, e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais.

Deste modo, convém definir os termos e símbolos dessas entidades matemáticas. Seja um corpo  $\mathcal{B}$ , definido por uma geometria sobre o domínio  $\Omega$ , sobre o qual é feito uma série

Figura 6 – Domínio discretizado em elementos triangulares.



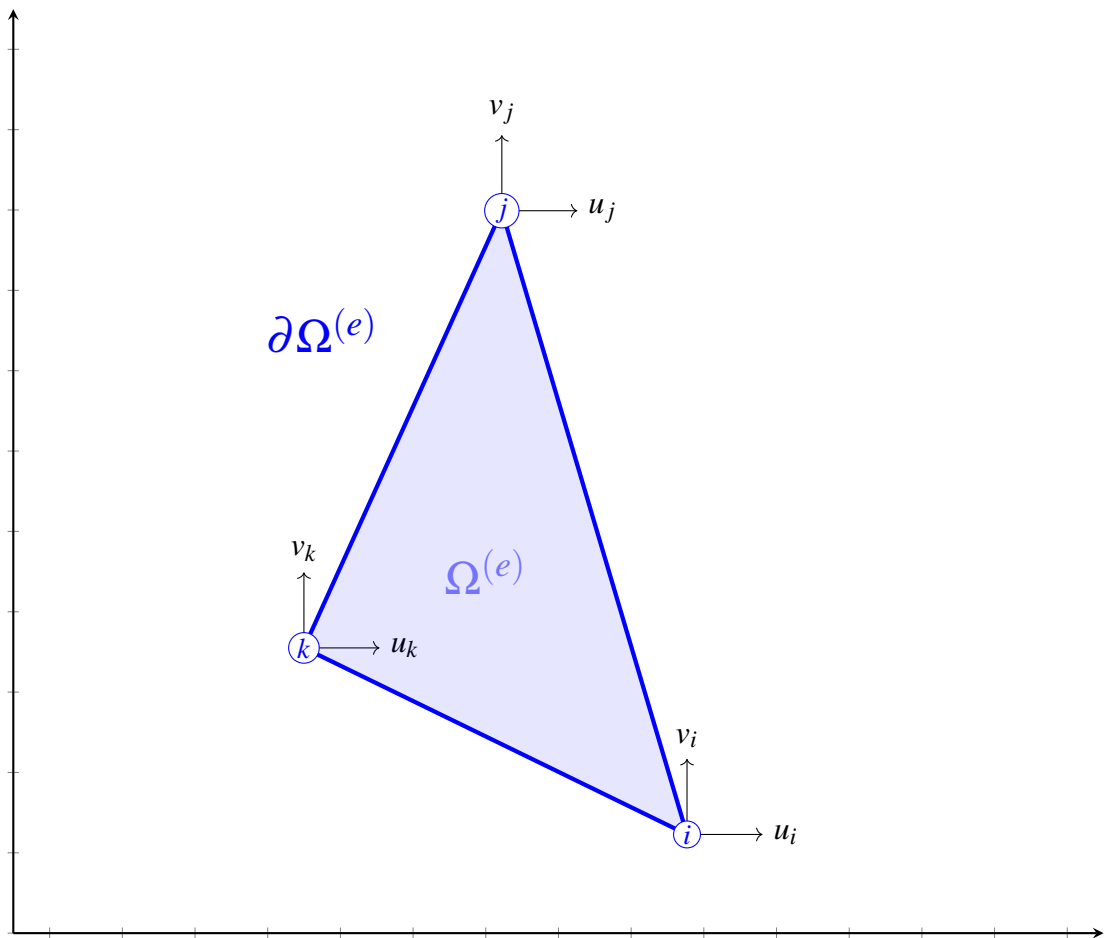
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

de repartições em pequenos elementos, de domínio  $\Omega^{(e)}$ , cuja fronteira se denomina  $\partial\Omega^{(e)}$ . A figura 6 mostra um domínio bidimensional  $\Omega$  discretizado em elementos triangulares, cujos nós são representados por  $i, j$  e  $k$ , e a figura 10 mostra um domínio tridimensional  $\Omega$  discretizado em elementos tetraédricos, cujos nós são representados por  $i, j, k$  e  $m$ . Quando uma entidade é definida sobre um elemento, ela é representada por um superescrito  $(e)$ , como por exemplo, o deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}^{(e)}$  sobre o elemento  $e$ . Quando uma entidade é definida sobre um nó, ela é representada por um subescrito  $(i)$ , como por exemplo, o deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}_i$  sobre o nó  $i$ . Quando uma entidade é definida sobre um elemento e um nó, ela é representada por um superescrito e um subescrito, como por exemplo, o deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}_i^{(e)}$  sobre o nó  $i$  do elemento  $e$ .

Neste capítulo é abordado como, na sequência proposta por Logan (2022),

1. selecionar as funções de interpolação;
2. definir as relações de tensão-deformação-deslocamento;
3. derivar a forma da matriz de rigidez;
4. montar o sistema global e introduzir as condições de contorno.

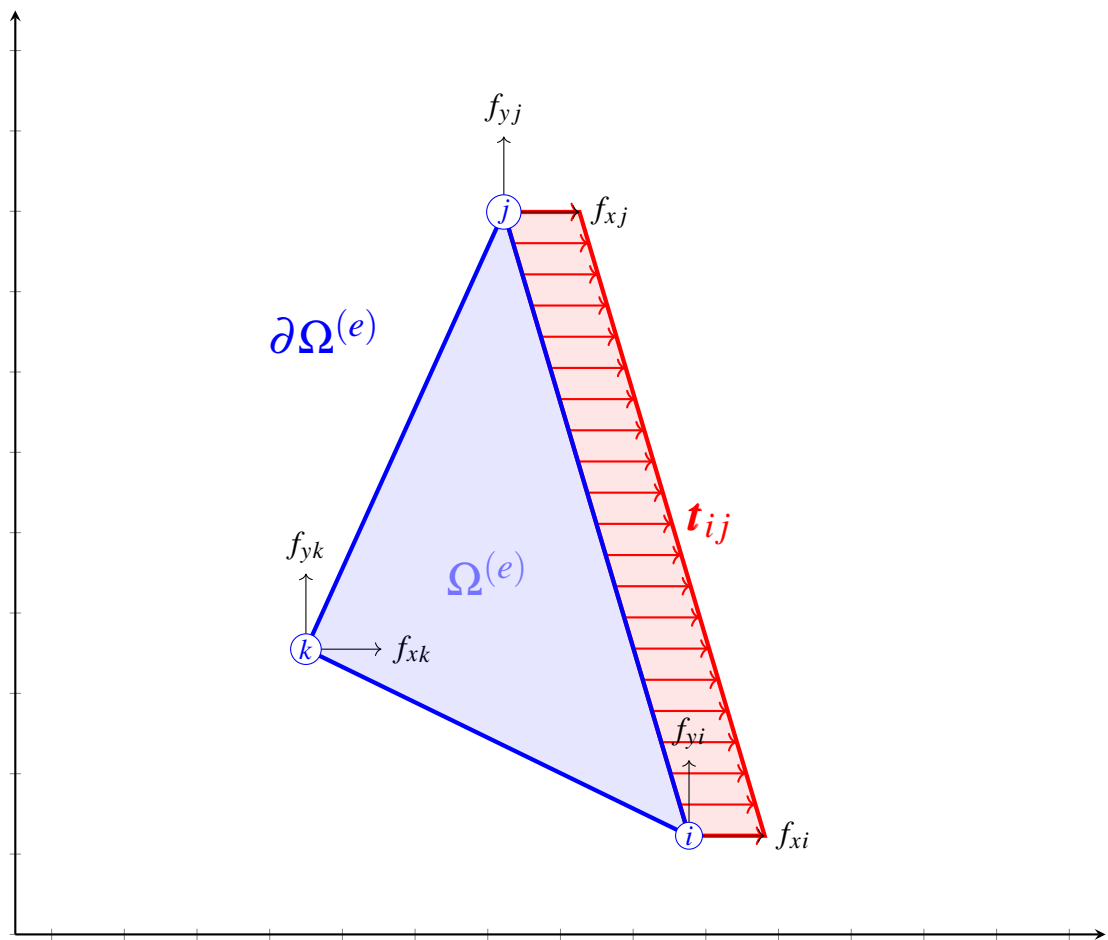
Figura 7 – Um triângulo de deformações constantes (CST).



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).



Figura 8 – Um triângulo de deformações constantes sob carregamentos (CST) sob carregamentos uniformes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

### 3.1 AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

As funções de interpolação são funções matemáticas que aproximam o campo de interesse, neste caso o deslocamento, dentro de um elemento, por meio de uma combinação linear de funções conhecidas, definidas sobre os nós do elemento. Essas funções são definidas, e depois justapostas, de modo que o campo seja contínuo. O objetivo dessa ferramenta é alterar os valores incógnitos do campo de contínuos para discretos, para que o deslocamento seja bem definido pelo seu valor sobre a posição cada nó, e que, por sobre o domínio de cada elemento, o campo seja interpolado. Esses valores discretos desconhecidos do campo nos nós, em que o campo tem "liberdade" para variar, denominam-se *graus de liberdade*. (LOGAN, 2022)

O CST, por exemplo, tem seis graus de liberdade, uma vez que para cada nó, o vetor de deslocamento tem três componentes. Os problemas abordados aqui tem sempre três graus de liberdade por nó.

Defini-se, então, a função de deslocamento sobre um elemento, representado pela figura 6, assim como a proposta linear de interpolação,

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ b_1 + b_2x + b_3y \end{Bmatrix}. \quad (69)$$

Nesse sentido, bidimensional,  $\boldsymbol{\phi}$  é uma função vetorial de campo que mapeia cada ponto do sólido para seu respectivo deslocamento nos eixos do sistema  $xy$  ( $u$  e  $v$  respectivamente).

Para determinar as constantes  $a$  e  $b$ , e termos dos deslocamentos nodais basta aplicar a condição de que em cada nó a função deve assumir o valor do deslocamento respectivo. Isto é, analisando somente a componente  $x$ , ou seja,  $u(x,y)$ , temos que

$$u(x_i, y_i) = u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i, \quad (70)$$

$$u(x_j, y_j) = u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j, \quad (71)$$

$$u(x_k, y_k) = u_k = a_1 + a_2x_k + a_3y_k, \quad (72)$$

em que  $u_i$  é o valor do deslocamento nodais  $i$ , assim como  $x_i$  e  $y_i$  é sua posição sobre o domínio  $\Omega$ .

Reescrevendo esse sistema na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

sendo que<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}, \quad (74)$$

em que  $A$  é área do elemento triangular.<sup>2</sup>

Deste modo, a função de interpolação para  $u(x,y)$  pode ser descrita em termos dos deslocamentos nodais na forma, utilizando o sistema 73,

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}. \quad (75)$$

Expandindo essas expressões, multiplicando as matrizes e rearranjado os termos, temos que

$$u(x,y) = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] u_i + \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] u_j + \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] u_k. \quad (76)$$

É possível, também, definir a função de interpolação para a componente  $v(x,y)$ , de modo análogo, obtendo, apenas substituindo a função  $u$  por  $v$  nas equações anteriores, que as mesmas relações de interpolações são válidas também para a outra componente de  $\boldsymbol{\phi}$ . Então,

$$v(x,y) = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] v_i + \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] v_j + \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] v_k. \quad (77)$$

Para simplificar a notação das equações 76 e 77, define-se funções  $N$  da forma

$$N_i = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y], \quad (78)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y], \quad (79)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y]. \quad (80)$$

Essas funções são denominadas *Funções de forma* e representam a contribuição de cada grau de liberdade sobre o campo de deslocamento.

Por fim,  $\boldsymbol{\phi}$  pode ser reescrito na forma matricial, em termos dessas funções  $N$  e dos deslocamentos nodais  $u$  e  $v$ , como

<sup>1</sup> É fácil demonstrar que esse sistema sempre é possível e determinado apenas observando o fato de que as posições dos nós são distintas e não colineares, a final, os elementos são triangulares.

<sup>2</sup> Essa forma de escrever a inversa de  $\mathbf{X}$  é interessante pois simplifica os termos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pelo determinante  $2A$ .

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{U}^{(e)}, \quad (81)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matrix de funções de interpolação, e  $\mathbf{U}^{(e)}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

### 3.2 AS RELAÇÕES DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

No caso bidimensional, o vetor de deformação, na notação de Voigt, é dado por, conforme definido no capítulo anterior,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Aplicando nessas derivas parciais as funções de interpolação de  $\boldsymbol{\varphi}$ , das equações 76 e 77, temos que, conforme Logan (2022),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} [\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k], \quad (83)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} [\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_k v_k], \quad (84)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} [\gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_k u_k + \beta_i v_i + \beta_j v_j + \beta_k v_k]. \quad (85)$$

Utilizando essas equações, é possível reescrever o vetor de deformação  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  em termos dos coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$ , como também do vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\{\mathbf{U}\}^{(e)}$ , na forma

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \mathbf{B}\mathbf{U}^{(e)}. \quad (86)$$

A matrix  $\mathbf{B}$  é denominada matrix gradiente, e é uma função das coordenadas dos nós do elemento, e relaciona o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\mathbf{U}^{(e)}$  com o vetor de deformações  $\{\varepsilon\}$ , assim como é constante ao longo de todo o elemento, o que é devido pela escolha de funções lineares para interpolar o campo de deslocamento sobre o elemento. Por causa dessa propriedade, esse elemento é denominado triângulo de deformações constantes, ou CST (*Constant Strain Triangle*). (LOGAN, 2022)

Por fim, ao passo que a relação entre deformação e tensão é dada pela Lei de Hooke generalizada, na forma da matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ , expressar a relação entre tensão e deslocamento, ou tensão-Deformação-Deslocamento, é simplesmente uma questão de multiplicar a matriz constitutiva pela matrix gradiente, obtendo assim a relação

$$\{\sigma\} = \mathbf{CBU}^{(e)}. \quad (87)$$

### 3.3 A MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL

A matriz de rigidez local é uma matriz quadrada, simétrica, que relaciona o vetor de forças nodais  $\mathbf{F}^{(e)}$  com o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}^{(e)}$ , na forma

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)}, \quad (88)$$

cujas derivação é feita aplicando a equação de governo, o equilíbrio estático nesse caso, sobre o elemento, utilizando as funções de interpolação para o campo de deslocamentos. (LOGAN, 2022)

$\mathbf{F}^{(e)}$  é um vetor que armazena as forças aplicadas sobre os nós do elemento, analogamente a  $\mathbf{U}^{(e)}$  que armazena os deslocamentos nodais, e tem a forma

$$\mathbf{F}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_j} \\ f_{x_j} \\ f_{y_j} \\ f_{x_k} \\ f_{y_k} \end{Bmatrix}. \quad (89)$$

Um dos métodos para derivar essa matriz é utilizar o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* de modo que a energia interna do elemento, devido à sua deformação elástica, seja igual ao trabalho virtual das forças externas. (ZIENKIEWICZ, 2000)

O *Princípio dos Trabalhos virtuais* (PTV), então, pode ser enunciado como:

Se um corpo deformável em equilíbrio é submetido a deslocamentos virtuais arbitrários (imaginários) associados a uma deformação compatível do corpo, o trabalho virtual das forças externas no corpo é igual à energia virtual de deformação das tensões internas. (LOGAN, 2022, pág. 876, tradução livre)

Nesse contexto, o trabalho virtual interno é causado por uma deformação do próprio corpo, denotada  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , enquanto o trabalho virtual externo, por sua vez, é causado diretamente por um deslocamento virtual das forças que atuam sobre as fronteiras do corpo, denotado  $\delta \mathbf{u}$ . Em um corpo elástico, modelado pela Lei de Hook, o trabalho virtual interno pode ser descrito em termos do deslocamento, como a energia armazenada na forma elástica, a fim de desenvolver as equações de equilíbrio estático apresentadas a seguir.<sup>3</sup>

Seja um elemento triangular, como da figura 6, que sofre um deslocamento virtual  $\delta \mathbf{U}^{(e)}$ . De acordo com Zienkiewicz (2000), o trabalho interno do elemento é dado por<sup>4</sup>

$$E_I = \int_{\Omega^{(e)}} \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t \{\boldsymbol{\sigma}\} dV, \quad (90)$$

Utilizando as relações de tensão-deformação-deslocamento, descritas nas equações 86 e 87, temos que<sup>5</sup>

$$E_I = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B} \delta \mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U}^{(e)} dV \implies E_I = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)}. \quad (91)$$

O trabalho desenvolvido pelas forças externas é dado, também de acordo com Zienkiewicz (2000), pelo produto dos deslocamento nodais e das forças nodais, na forma

$$E_E = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)}. \quad (92)$$

Igualando as duas parcelas de trabalho, temos que

$$E_I = E_E \implies \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)} = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)}. \quad (93)$$

Portanto,

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)}. \quad (94)$$

Comparando com a forma da equação 68, fica evidente que a matriz de rigidez local é dada por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (95)$$

<sup>3</sup> A notação  $\delta$  se refere a um variacional, que representa uma variação infinitesimal sobre o todo o contínuo da função, de modo que seja nulo na região em que são aplicadas as condições de contorno. O cálculo variacional, entretanto, não é abordado diretamente nesta monografia.

<sup>4</sup> Poder escrever a energia interna desta forma simples é devido à escolha de que, na notação de Voigt do tensor de deformação, foi utilizado a convenção de  $\gamma = 2\varepsilon$ .

<sup>5</sup> Utilizando também a propriedade de transposição do produto de matrizes,  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ .

O elemento tratado aqui é o CST, portanto, a matriz gradiente  $\mathbf{B}$  é constante em todo o domínio  $\Omega^{(e)}$ , como também é constante a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ . A integral, portanto, não precisa ser computada em um sistema local, pois todos os termos que a compõe são constantes.

<sup>6</sup> Logo, a matriz de rigidez local pode ser simplificada ainda mais, tornando-se, de acordo com Logan (2022)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} \int_{\Omega^{(e)}} dV = \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} V, \quad (96)$$

em que  $V$  é o volume do elemento, definido, no caso bidimensional, por  $V = Ad$ , em que  $d$  é a espessura.

Essa matriz pode ser lida como uma lista de causa e efeito. Enquanto a linha da matriz representa onde que o efeito do deslocamento é aplicado, a força no caso, a coluna informa qual é o deslocamento, o grau de liberdade, que o causa. (LOGAN, 2022)

Outra forma de derivar essa relação diretamente da equação de equilíbrio estático é por meio do método de Galerkin, em que as bases da função de deslocamento são as mesmas da função de ponderação, utilizando a chama formulação fraca da equação de governo. Esse método leva à mesma formulação mostrada acima.

Vale ressaltar que não foi preciso definir um sistema local de coordenadas para derivar essas relações, uma vez que o elemento tratado aqui, como também o tetraedro (tratado mais adiante), tem funções de interpolação simples o suficiente que um sistema orientado a cada elemento não é necessário. Elementos mais sofisticados, com funções de interpolação envolvendo termos não lineares, necessitam, por uma questão de manipulação algébrica, de um sistema de referência local. Esses elementos não são tratados aqui.

### 3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO

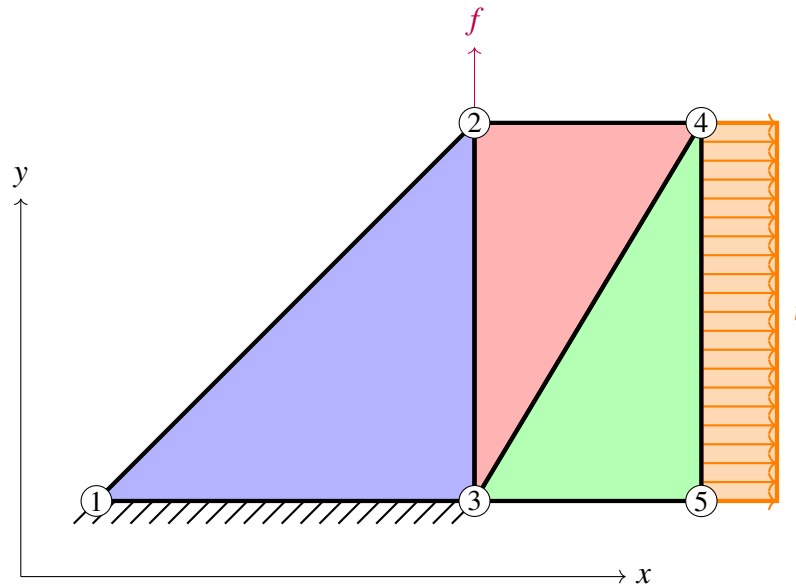
Para cada elemento do domínio é realizado o procedimento descrito na seção anterior, de encontrar a matriz de rigidez local que descreve o equilíbrio do elemento em termos das forças externas e do campo de deslocamento sobre os nós. Para resolver o problema, encontrar os deslocamentos de todos os nós, é necessário justapor essas matrizes locais em uma matriz global, ou seja,

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)}. \quad (97)$$

Nesse contexto,  $\Sigma$  representa, não uma soma ordinária, mas sim a sobreposição dos efeitos de rigidez sobre os nós, num procedimento chamado *Direct Stiffness Method*. (LOGAN, 2022)

<sup>6</sup> A definição de sistemas locais na formulação de outros tipos de elementos, em que a função de interpolação não é linear, como o quadrilátero, ou mesmo o triangular quadrático, é necessária, assim como definir transformações do sistema local para o global. Aqui, não são tradas transformações de coordenadas pela simplicidade dos elementos.

Figura 9 – Uma estrutura discretizada em elementos CST.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em cada elemento, a matriz local de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  define a interação de forças e deslocamentos entre os graus de liberdade dos nós. Analisando a estrutura como um todo, cada nó pode pertencer a vários elementos, pois é assim que a malha é constituída. O efeito de rigidez, então, sobre cada nó é a soma dos efeitos de todos os elementos que o contém. Isso vale para os deslocamentos nodais, como para as forças nodais. O procedimento, portanto, de assemblagem da matriz global de rigidez é a soma das matrizes locais de rigidez sobre as posições dos graus de liberdade respectivos das matrizes locais.

Seja um sólido  $\mathcal{B}$  discretizado por uma malha composta de cinco nós, formando três elementos, conforme a figura 9, engastado na superfície inferior do elemento azulado e sujeito a uma força  $f$  concentrada no nó 2, como também um carregamento distribuído  $t$  na superfície entre os nós 4 e 5.

As matrizes locais de rigidez desses elementos são quadradas  $6 \times 6$ , pois no CST existem três graus de liberdade, dois para cada nó, referente ao deslocamento nas direções de  $x$  e  $y$ . Os sistemas locais, então, para elemento da figura 9, têm a forma



$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (98)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (99)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \\ f_{x5} \\ f_{y5} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (100)$$

Aplicar o *Direct Stiffness Method* é somar essas matrizes de rigidez sobre os graus de liberdade. Observemos que o primeiro nó só faz parte de um elemento, o azul, portanto sua rigidez só tem contribuição desse elemento; o nó 3, por sua vez, pertence aos três elementos (azul, vermelho e verde), e, portanto, seu termo de rigidez tem contribuição de todos eles. Realizando esse procedimento, é possível montar a matriz global de rigidez, utilizando, para tanto, a notação dos vetores de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  e de forças nodais  $\mathbf{F}$ .

A matriz de rigidez global é quadrada  $10 \times 10$ , pois existem cinco nós, com dois graus de liberdade cada, e é dada por

$$\begin{bmatrix}
 k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\
 k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 \\
 k_{51} & k_{52} & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{55} + k_{33} + k_{11} & k_{56} + k_{34} + k_{12} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} \\
 k_{61} & k_{62} & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{65} + k_{43} + k_{21} & k_{66} + k_{44} + k_{22} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} \\
 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{55} + k_{33} & k_{56} + k_{34} & k_{35} & k_{36} \\
 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{65} + k_{43} & k_{66} + k_{44} & k_{45} & k_{46} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ f \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0
 \end{Bmatrix}.
 \quad (101)$$

Nas duas primeiras linhas do sistema, que representam as forças nodais sobre o primeiro nó, é possível notar que somente os deslocamentos do elemento azulado que impactam diretamente. Nos graus de  $u_3$  e  $u_v$ , fica evidente que todos os elementos contribuem para as forças nodais do nó 3, conforme descrito anteriormente.

Um outro passo nessa montagem do sistema global é a aplicação das condições de contorno. As condições de contorno, tradas aqui, podem ser divididas em dois tipos:

1. de Dirichlet, ou de primeiro tipo, e
2. de Neumann, ou de segundo tipo.

As condições de Dirichlet são aquelas que definem valores na fronteira do domínio do campo em si. Já as de Neumann, são aquelas que definem valores de contorno sobre a derivada nas fronteiras do domínio. Boyce (2012) Aqui, as condições de contorno de Dirichlet são restrições de deslocamento, enquanto as condições de Neumann são carregamentos aplicados sobre a estrutura.

As condições de contorno sobre os deslocamentos, então, dividem os graus de liberdade entre

1. livre; Quando não há informação prévia de seus valores, isto é, o campo pode variar livremente.
2. prescritos; prescritos quando há informação prévia de seus valores, e portanto, não podem variar. (LOGAN, 2022)

Um engaste, por exemplo, é uma condição de contorno de Dirichlet que gera graus de liberdade prescritos, pois impõe que o deslocamento naquela região do sólido é nulo. Um deslocamento conhecido, também o faz, determinando que os graus correspondentes recebam o valor deslocado.

O vetor de forças  $\mathbf{F}$  é nulo em regra sobre os graus de liberdade livres, pois essa entidade representa as forças externas sobre o elemento. Entretanto, como no MEF os deslocamentos são discretizados nos nós, o mesmo é feito com os carregamentos. Quando se aplica condições de contorno de Neumann, os graus correspondentes devem receber forças nodais equivalentes, de forma que representem os carregamentos por forças externas concentradas nos nó. Pode-se encontrar as forças nodais equivalentes utilizando o mesmo método da seção anterior: o princípio dos trabalhos virtuais, fazendo com que o trabalho de carregamentos sobre a fronteira de um elemento  $\partial\Omega^{(e)}$ , causado por um deslocamento virtual  $\delta\mathbf{U}^{(e)}$ , seja igual ao trabalho da forças nodais equivalentes. Em termos matemáticos, de acordo com Zienkiewicz (2000),

$$\delta(\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)} = \int_{\partial\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{t} dl, \quad (102)$$

em que  $\mathbf{t}$  é o vetor do carregamento sobre a fronteira do elemento, na forma

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x(x,y) \\ t_y(x,y) \end{Bmatrix}. \quad (103)$$

Aqui os carregamentos são constantes sobre as fronteiras dos elementos, isto é, são carregamentos distribuídos e uniformes. Deste modo, a equação anterior pode ser simplificada para

$$\delta(\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)} = \delta \mathbf{U}^{(e)} \int_{\partial\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^t d\mathbf{l}t. \quad (104)$$

Portanto, as forças nodais equivalentes, devidas a carregamentos uniformes sobre a fronteira do elemento, é dada por

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_{\partial\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^t d\mathbf{l}t. \quad (105)$$

Essa integração é por vezes trabalhosa, e não pode ser feita algebricamente, tal qual a integração de definição da matriz de rigidez local. O elemento triangular de deformações constantes, entretanto, tem funções de interpolações cuja integração da matriz  $\mathbf{N}$  seja possível de ser feita analiticamente. No elemento CST, o carregamento uniforme sobre a fronteira do elemento é aplicado igualmente sobre os nós que compõe aquela sessão da fronteira em forças nodais equivalentes, isto é, de acordo com (OñATE, 2009),

$$\mathbf{F}_t^{(e)} = \frac{1}{2} l^{(e)} d \mathbf{t} \quad (106)$$

em que  $\mathbf{F}_t^{(e)}$  são as forças equivalentes que compreendem a fronteira em que o carregamento  $\mathbf{t}$  é aplicado,  $l^{(e)}$  é o comprimento da fronteira do elemento, e  $d$  é a espessura do elemento.

Na equação 101, em que foi montado o sistema global, já foi aplicada essas condições de contorno. Pode-se notar que os deslocamentos vinculados à fronteira compostas pelos nós 1 e 3 são nulos, pois alí se faz um engaste. A força roxeada  $\mathbf{f}$ , agindo sobre o nó 2, faz-se presente diretamente no vetor de forças nodais, pois já é uma força concentrada em um nó. O carregamento alaranjado  $\mathbf{t}$ , por sua vez, foi decomposto em duas parcelas, para os nós 5 e 4, seguindo a expressão da equação anterior.

Vale ressaltar que nos graus de liberdade prescritos as forças nodais desconhecidas são as reações das estruturas, isto é, as forças de reação que as restrições fazem sobre o corpo que se mantenha em equilíbrio. Por conta disso, na equação 101, as forças sobre os graus prescritos foram denominadas  $\mathbf{R}$ , de reação.

### 3.4.1 Solução direta do sistema global

Com a determinação da matriz de rigidez global, as condições de contorno devidamente expressas em graus prescritos e livres (sejam deslocamento ou carregamentos), é possível reescrever o sistema geral da equação 68 na forma, de acordo com Rao (2018),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LP} \\ \mathbf{K}_{PL} & \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_P \end{Bmatrix}, \quad (107)$$

Nessa expressão, os graus de liberdade subdividem os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  em dois cada um, em prescritos ( $\mathbf{U}_P$  e  $\mathbf{F}_P$ ), e livres ( $\mathbf{U}_L$  e  $\mathbf{F}_L$ ). A matriz de rigidez, então, é subdividida em quatro, que relacionam os graus de liberdade prescritos e livres dos deslocamentos e das forças nodais, respectivamente.

Portanto, o sistema global pode ser reescrito mais uma vez em termos dessas submatrizes, como

$$\mathbf{K}_{LL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{LP}\mathbf{U}_P = \mathbf{F}_L \quad (108)$$

$$\mathbf{K}_{PL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{PP}\mathbf{U}_P = \mathbf{F}_P. \quad (109)$$

Os valores conhecidos desse sistema são os deslocamentos sobre os graus prescritos  $\mathbf{U}_P$ , e as forças externas sobre o graus livres  $\mathbf{F}_L$ , a final, são as próprias condições de contorno definidas matematicamente pelo MEF. Logo, como o objetivo de resolver o sistema é encontrar os deslocamentos nodais, é possível isolar  $\mathbf{U}_L$  na primeira equação, ou seja,

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\mathbf{F}_L - \mathbf{K}_{LP}\mathbf{U}_P), \quad (110)$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{K}_{PL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{PP}\mathbf{U}_P. \quad (111)$$

a matriz  $\mathbf{K}_{LL}$  é quadrada, simétrica e sempre possui inversa quando o problema está estaticamente determinado. (RAO, 2018)

Aplicando essas expressões à equação 101, referente ao exemplo da figura 9, temos que

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\ k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{55} + k_{33} & k_{56} + k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{61} & k_{62} & k_{65} + k_{43} & k_{66} + k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} \\ k_{41} & k_{42} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} \\ 0 & 0 & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} \\ 0 & 0 & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} \\ 0 & 0 & k_{51} & k_{52} \\ 0 & 0 & k_{61} & k_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \end{bmatrix} \\
\\
& \begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 3.5 ANÁLISE TRIDIMENSIONAL SOBRE O TETRAEDRO

#### 3.5.1 Relação entre tensão, deformação e deslocamento

Quando sólidos são postos sobre carregamentos, eles deformamam, criando tensões internas. A relação entre a tensão e a deformação

As componentes de tensão de sólidos em qualquer ponto são definidas sobre a superfície de um cubo infinitesimal, como mostrado na figura. Em cada superfície opera uma componente normal e duas tangenciais, denominadas, respectivamente, por tensão normal e de cisalhamento (o primeiro termo do índice subscrito indica a o plano de atuação da tensão, o segundo, a sua direção). O conjunto dessas tensões, de acordo com Popov (1990), quando posto em forma matricial, é chamado de tensor de Cauchy, em que as linhas indicam a superfície de atuação da tensão, e a coluna, a direção. Aplicando o somatório de momento no interior desse cubo, é fácil mostrar que, segundo Quek (2003):

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \quad (112)$$

Portanto, há somente um total de seis componentes distintas de tensão, permitindo que o tensor de Cauchy, possa ser reescrito de forma vetorial, mais compacta:

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (113)$$

A mesma estratégia pode, também, ser aplicada à matriz de deformação. Para cada componente do vector de tensão, em todo ponto do sólido, existe uma componenete do vector de deformação:

$$\varepsilon^t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (114)$$

A deformação é a variação da função de deslocamento por unidade de comprimento, desse modo, os componentes do vector de deformação podem definidos em função das derivadas da do deslocamento, da seguinte maneira, de acordo com Quek (2003):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (115)$$

Nessas expressões, as funções  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem às componentes nas direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, do vector de deslocamento sobre o sólido, que é definido como:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (116)$$

O conjunto de equações 115 pode ser reescrito em termos do vector de deformações e do vector de deslocamentos do sólido, obtendo assim a relação deslocamento-deformação em forma matricial, como consta na expressão 117.

$$\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (117)$$

em que a matrix  $\mathbf{L}$  é composta pelos operadores diferenciais parciais, da seguinte maneira:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

A relação entre tensão e deformação, ou equações constitutivas, é comumente denominada Lei de Hook, e é dada de acordo com Logan (2022), para um material isotrópico, em termos do módulo de Young ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), ambos obtidos experimentalmente. De forma similar à relação dentre deformação e deslocamento, a relação tensão-deformação é expressa por:

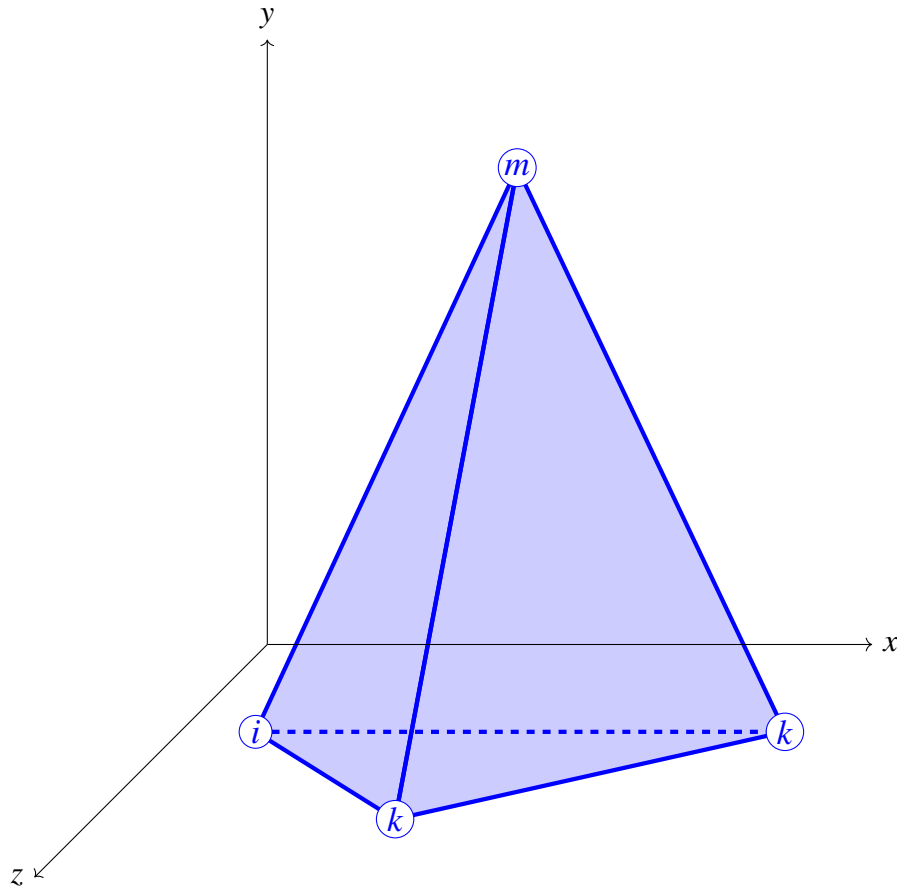
$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (119)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (120)$$

em que o termo  $D$  é denominado matriz constitutiva, que é constante ao longo de todo o sólido.



Figura 10 – Elemento tetraédrico



Fonte: Elaborado pelo autor (()).2022)

### 3.5.2 As funções de interpolação

Como já mencionado, a função de campo tratada aqui é o deslocamento sobre o sólido. Para cada elemento discretizado, essa função é interpolada por um polinômio, definido pelo valor do próprio campo nos nós do elemento. Em um elemento tetraédrico, como o da figura 10, há quatro nós ( $i$ ,  $j$ ,  $k$  e  $m$ ), e em cada um o campo de deslocamento tem três componentes. Essa liberdade do deslocamento que o campo tem nos nós é chamada de grau de liberdade. As funções de deslocamento, expressão 116, como ditas anteriormes, são definidas como lineares, o que garante a compatibilidade entre cada elemento, fazendo com que não existam desconitnuidades no campo de deslocamentos de acordo com Logan (2022). A função  $\phi$ , portanto, pode ser decomposta em termos de suas variáveis da seguinte forma:

$$\phi = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ b_1 + b_2x + b_3y + b_4z \\ c_1 + c_2x + c_3y + c_4z \end{Bmatrix} \quad (121)$$

Para encontrar esses fatores, basta aplicar as funções em cada nó.

$$\begin{cases} u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4z_i \\ u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j + a_4z_j \\ u_k = a_1 + a_2x_k + a_3y_k + a_4z_k \\ u_m = a_1 + a_2x_m + a_3y_m + a_4z_i \end{cases} \quad (122)$$

Esse sistema pode ser rearranjado na seguinte forma matricial:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (123)$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}^{-1} \{\mathbf{u}\} \quad (124)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado às outras funções de deslocamento ( $v$  e  $w$ ).

## 4 PHILLIPO

PHILLIPO é um *solver* para campos de deformação elástica em estruturas discretizadas por elementos finitos, e segue a simbologia e o padrão dos algoritmos descritos por Zienkiewicz em sua obra intitulada *The Finite Element Method*, com algumas otimizações computacionais relacionadas a paralelismo e matrizes esparsas, e que visa constituir-se como referência didática na implementação legível e concisa dos algoritmos de elementos finitos em Julia no âmbito acadêmico do campus CCT, da UDESC. PHILLIPO é um programa de código aberto, que é distribuído em um repositório público<sup>1</sup> sob a licença LGPL<sup>2</sup>. Portanto, sua utilização é gratuita e livre para fins acadêmicos e comerciais, que incluem a modificação, implementação e venda de qualquer parte do programa, como também da documentação que o acompanha; só se resguarda, entretanto, a devida citação deste documento.

PHILLIPO foi idealizado, a princípio, como um projeto de aplicação do método de elementos finitos em um contexto de programação estruturada, porém, observou-se que essa abordagem é, senão obsoleta, já muito utilizada em pesquisas científicas. Portanto, optou-se em trazer uma visão de projeto de software, alterando o paradigma para a programação em despachos múltiplos (um forma alternativa à orientação a objetos), uma vez que tópicos envolvendo esses assuntos não são muito discutidos nas cadeiras dos cursos de engenharia (menos a de software, é claro), e que as vantagens desse tipo de abordagem vão desde a legibilidade do código, até o reaproveitamento de estruturas de dados e funções.

Um *solver*, ou em melhor português, um solucionador em MEF não é uma novidade no mundo acadêmico, nem no comercial. Softwares como Calculix (que é distribuído integrado com o FreeCAD) e o FreeFEM, que já conta com 7 mil commits em seu repositório, são continuamente produzidos e aprimorados desde antes da virada do milênio, um trabalho que demanda tempo e uma comunidade bem ativa.

Destarte, a pretensão de PHILLIPO não é fornecer uma alternativa a esses softwares, muito menos servir de módulo ou biblioteca para agregar algum deles, além do mais, a elaboração de programas robustos e confiáveis é um trabalho demorado e de muitas pessoas. O próprio FreeFEM já conta com mais de 7 mil commits em seu repositório, com a participação de 41 desenvolvedores.

A pretensão de PHILLIPO é construir uma aplicação simples utilizando o MEF, que possa aproveitar algumas ferramentas de construção de código em Julia, como paralelismo e despachos múltiplos, para apresentar mais uma referência de programação em engenharia para os alunos do campus CCT, da UDESC, e, deste modo, evidenciar que é possível construir programas de engenharia de forma simples e legível, e que, por meio de uma linguagem de programação moderna, como Julia.

<sup>1</sup> O repositório é mantido no GitHub, assim como o presente documento em formato Latex: <<https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO>>

<sup>2</sup> O GiD, interface de pré e pós-processamento, é um software distribuído comercialmente, e não está sujeito à mesma licença que PHILLIPO.

Neste capítulo é apresentado como é feita a distribuição e como se dá o funcionamento de PHILLIPO, dividido em duas partes. A primeira, descrevendo o fluxo de execução normal do programa, isto é, utilizando o GID como interface de pré e pós-processamento, e, a segunda, esmiuçando o código, tanto do módulo PHILLIPO, quanto dos arquivos de integração com o GID.

#### 4.1 DISTRIBUIÇÃO PELO PKG.JL

O Pkg.jl é o gerenciador de pacotes anexado à Julia, tal como PIP é anexado ao Python. Ele é responsável por distribuir, gerir e empacotar os módulos da linguagem, permitindo relacionar dependências e controlar versionamento. PHILLIPO é distribuído por meio do Pkg.jl, porém, não pelo repositório oficial<sup>1</sup>, mas, pelo próprio repositório deste trabalho, utilizando-se de uma função do gerenciador de pacotes: a função *add*.

Como PHILLIPO foi encapsulado em um módulo, pode ser facilmente distribuído iniciando uma sessão Julia e executando:

```
1 add https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO.jl
```

O Pkg.jl então trata de buscar as dependências do módulo, isto é, os módulos que são importados para uso interno de PHILLIPO: o *SparseArrays*, que fornece as estruturas e funções para alocar e manipular eficientemente matrizes esparsas, o *LinearAlgebra*, implementação do LAPACK em Julia, e o *JSON*, um parser de objetos em JSON para dicionários. No arquivo *Projecy.toml* é possível encontrar tanto essa lista de dependência, e no *Manifest.toml*, são listadas as dependências das dependências, isto é, quais módulos cada módulo importado por PHILLIPO importa para si. Isso é devido ao fato de que o versionamento é mantido

#### 4.2 FLUXO DE EXECUÇÃO

O fluxo de execução é uma ferramenta de projeto que tem como objetivo descrever a ordem e as condições que determinadas seções do código são executadas. A utilização de PHILLIPO.jl segue os diagramas das figuras 11 e 12.

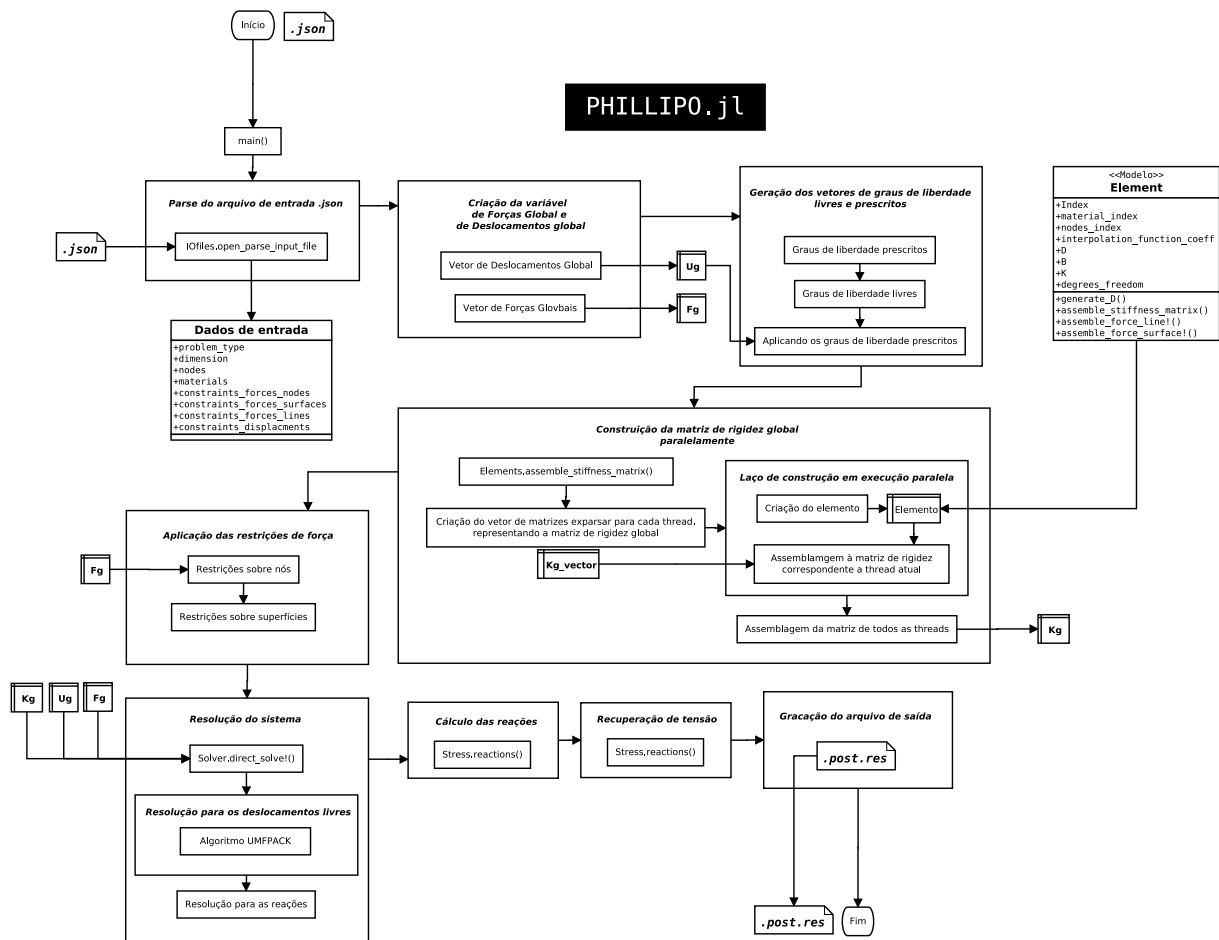
Nesses diagramas, é possível separar a execução de uma utilização normal do software em três partes principais:

1. Pré-processamento; Parte em que ocorre a criação da geometria, a definição das propriedades dos materiais, das condições de contorno e das cargas aplicadas, assim como a geração da malha e elementos.
2. Processamento; Parte em que é chamada uma sessão Julia para carregar o módulo PHILLIPO.jl, que é responsável por ler os arquivos de entrada, e executar o algoritmo de elementos finitos, gerando os arquivos de saída para o GID.

<sup>1</sup> Há uma série de critérios para que um módulo seja adicionado ao repositório oficial do Pkg.jl, além disso, não é objetivo de PHILLIPO ser distribuído massivamente.



Figura 12 – Fluxograma de execução: PHILLIPO.jl



### 4.3 GID

O GID é um software utilizado como pré e pós-processamento, neste caso, para PHILLIPO. Nele é possível criar a geometria do problema, definir as propriedades dos materiais, as condições de contorno, as cargas aplicadas, e, principalmente, gerar a malha de elementos. Além de se ser possível sua integração com um *solver* qualquer, por meio de um conjunto de arquivos de entrada e saída (ambos configurados de forma a permitir uma certa flexibilidade nessa integração), cuja execução é controlada por um *script* em Batch, o que possibilita a automatização do processo de simulação. Nesta seção é abordado como é feita a integração entre o GID e PHILLIPO, por meio das pastas *PHILLIPO.gid* e *PHILLIPO3D.gid*, sendo que, como a nomenclatura dos arquivos sugere, a primeira é utilizada para problemas bidimensionais, e a segunda para problemas tridimensionais.

#### 4.3.1 PHILLIPO.gid

O GID pode ser configurado para operar como pré e pós-processamentos de diversos programas, como o Abaqus, o Ansys, o Calculix..., por meio de um *Problem type*, que é como o

```

1 CONDITION: Constraint_displacement_point
2 CONDTYPE: over points
3 CONDMESHTYPE: over nodes
4 QUESTION: X
5 VALUE: 0.0
6 QUESTION: Y
7 VALUE: 0.0
8 QUESTION: Z
9 value: 0.0
10 END CONDITION

```

Figura 13 – Parte do arquivo de condições de contorno: PHILLIPO.cnd

GID chama o conjunto de arquivos que configuram o formato de saída dos dados, a criação de determinadas propriedades para as condições de contorno e materiais, como também automatizar a execução da simulação, chamando o programa. Pode-se dizer que o *Problem type* é uma interface para que as informações contidas no arquivo gerado pelo GID (geometria, malha, condições de contorno etc.) sejam salvas em um formato que o programa, o *solver* no caso, possa interpretar, ao passo que o *script* de execução automatiza o chamamento deste, e a simulação seja iniciada.

Na pasta *PHILLIPO.gid* é possível encontrar os seguinte arquivos:

1. *PHILLIPO.cnd*: define as condições de contorno e como são aplicadas;
2. *PHILLIPO.prb*: define as entradas de informações gerais;
3. *PHILLIPO.mat*: define as características dos materiais utilizados para os elementos;
4. *PHILLIPO.bas*: configura o arquivo de saída do GID para ser interpretado por PHILLIPO.jl;
5. *PHILLIPO.bat*: *script* para chamar uma sessão Julia, chamando *link.jl*;
6. *link.jl*: importa o módulo PHILLIPO e o executa.

O primeiro arquivo do *Problem type* de PHILLIPO é *PHILLIPO.cnd*, que define as condições de contorno e sobre quais entidades, leia-se nós, elementos ou geometrias (superfícies, volumes, linhas etc.), são aplicadas, por meio de uma sintaxe específica <sup>2</sup>, uma forma de marcação de texto, que é interpretada pelo GID.

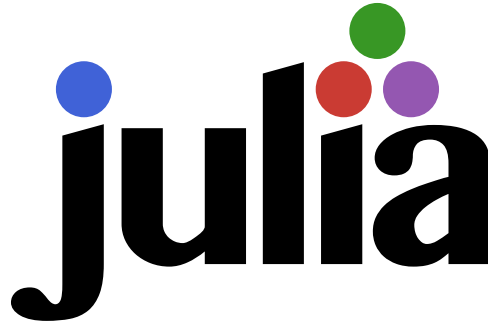
As linhas seguintes, 4 a 9, se referem aos valores da condição, neste caso, aos deslocamentos dos nós nas direções de X, Y e Z, e seus valores padrão, nesse caso,

<sup>2</sup> No manual do usuário do GID, acessível em <<https://gidsimulation.atlassian.net/wiki/spaces/GUM/overview>>, é possível encontrar a descrição o funcionamento de toda essa sintaxe, que compreende desde esse arquivo de condições de contorno, como também, dos outros que compõem a construção do *problem type*.

## 5 JULIA

A programming language to heal the planet together. (Alan Edelman)

Figura 14 – Logo da linguagem Julia



Julia é uma linguagem de programação dinâmica, opcionalmente tipada, pré-compilada, generalista, de código livre<sup>1</sup> e de alto nível, criada por Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em 2012, com o objetivo de minimizar o problema das duas linguagens (*the two language problem*). É voltada para a programação científica, com capacidades de alta performance e sintaxe simples, similar à notação matemática usual. (SHERRINGTON; BALBEART; SENGUPTA, 2015, Capítulo: The scope of Julia)

### 5.1 ORIGEM

"In short, because we are greedy."(Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em *Why We Created Julia*)

Os criados de Julia eram usuários de várias linguagens, cada uma utilizada para uma tarefa específica. C, C++, Fortran, Python, MATLAB, R, Perl, Ruby, Lisp, Clojure, Mathematica, e até mesmo Java, eram algumas das linguagens que eles utilizavam em seu dia a dia. Cada uma delas tinha suas vantagens e desvantagens, mas nenhuma delas era capaz de suprir todas as suas necessidades. A

<sup>1</sup> A Linguagem Julia, é distribuída, quase integralmente, sob a MIT License, que permite a modificação, utilização e distribuição, seja comercial ou não, de qualquer parte do código, assim como das documentações associadas. Os componentes do módulo Base e as bibliotecas e ferramentas externas, que têm licença diferente, assim como a da própria Julia, podem ser consultados diretamente no repositório da linguagem: <<https://github.com/JuliaLang/julia>>.



*asdasd*

## 6 VALIDAÇÃO & VERIFICAÇÃO

O desenvolvimento de softwares de simulação, seja utilizando o MEF ou não, é sempre acompanhado de uma bateria de testes, além de um procedimento de validação e verificação, que garante, dentro de uma margem de abrangência do que se propõe o software, sua capacidade de reproduzir resultados concisos, sendo, então, um espelho da realidade.

Verificação, dentro desse contexto, é o procedimento pelo qual se evidencia a exata implementação do modelo matemático no próprio software, ou seja, a verificação que a modelagem programada é equivalente ao algoritmo matemático, dentro dos limites impostos pela aritmética computacional em relação às operações em ponto flutuante<sup>1</sup>.

Para que um programa seja considerado válido, é preciso que passe tanto por uma bateria de testes, quanto por um processo de verificação & validação (V&V). O que ocorre, também, em programas sobre MEF. Verificação é o processo pelo qual se determina se um modelo computacional tem acurácia suficiente para representar o modelo matemático em que é embasado. Validação, por sua vez, é o processo para determinar a acurácia que um modelo computacional possui de representar a realidade, dentro dos limites que se propõe. (ASME)

---

<sup>1</sup> No computador, os números ditos Reais ( $\mathbb{R}$ ) são representados por um ponto flutuante, que é uma forma discreta, pois os computadores são desenvolvidos em lógica booleana

## REFERÊNCIAS

BEZANSON, Jeff; CHEN, Jiahao; CHUNG, Benjamin; KARPINSKI, Stefan; SHAH, Viral B.; VITEK, Jan; ZOUBRITZKY, Lionel. Julia: Dynamism and performance reconciled by design. **Proc. ACM Program. Lang.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 2, n. OOPSLA, oct 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/3276490>>. Citado na página 17.

BOYCE, Richard C. DiPrima William E. **Elementary Differential Equations**. 10. ed. Wiley, 2012. ISBN 0470458321,9780470458327. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=a91488d63754cd4053fba178078552cb>>. Citado na página 50.

ERNESTI, Peter Kaiser Johannes. **Python 3: The Comprehensive Guide to Hands-On Python Programming**. 1. ed. Rheinwerk Computing, 2022. ISBN 149322302X,9781493223022. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D3E79CF42FF64C30BCBD1365173C229B>>. Citado na página 17.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistências dos Materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method, Enhanced Edition, SI Version**. 6. ed. Cengage Learning, 2022. ISBN 0357676432,9780357676431. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=C987600444DEED4576ED20233CC49A72>>. Citado 8 vezes nas páginas 38, 41, 43, 44, 46, 50, 55 e 56.

LUBLINER, Panayiotis Papadopoulos (auth.) Jacob. **Introduction to Solid Mechanics: An Integrated Approach**. Springer International Publishing, 2017. ISBN 978-3-319-18878-2,978-3-319-18877-5. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=43b5224440ffc99f4b40d894dcbb2bdc>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 31.

OñATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences) (v. 1)**. 1. ed. [s.n.], 2009. ISBN 1402087322,9781402087325. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=589bba29f786a93857f01ff9d12136cc>>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 37 e 51.

POPOV, Egor P. **Engineering Mechanics of Solids**. Prentice Hall, 1990. (Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics). ISBN 0-13-279258-3,9780132792585. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=dab102c9ca4bd8e45556ebcd62b53b57>>. Citado 6 vezes nas páginas 20, 21, 22, 27, 28 e 54.

QUEK, G.R. Liu S. S. **The Finite Element Method: A Practical Course**. Butterworth-Heinemann, 2003. ISBN 9780750658669,9781417505593,0750658665. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=85760afdc4189ab75d846ee5fd53d6aa>>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 37 e 54.

RAO, Singiresu S. **The finite element method in engineering**. 6. ed. ed. Elsevier, 2018. ISBN 978-0-12-811768-2,0128117680. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=e7ef3750d9f7ed6b4cb908c1215ba393>>. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.

ROYLANCE, D. **Mechanics of Materials: Introduction to Elasticity**. Massachusetts Institute of Technology, 2000. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nP54tAEACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 28.

SHERRINGTON, Malcolm; BALBEART, Ivo; SENGUPTA, Avik. **Mastering Julia: Develop your analytical and programming skills further in Julia to solve complex data processing problems**. Packt Publishing, 2015. ISBN 978-1-78355-331-0. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=de5338c3a3b90bba52c20f544bd71456>>. Citado na página 63.

ZIENKIEWICZ, O.C. **the Finite Element Method**: Volume 1: The basis. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 16, 33, 34, 44, 45 e 50.

## ANEXO A – CÓDIGO FONTE DE PHILLIPO.JL

./src/PHILLIPO.jl

```

1 module PHILLIPO
2     # Módulo do escopo principal
3     include("../modules/includes.jl") # Módulos internos
4     # MÓDULOS EXTERNOS
5     import LinearAlgebra
6     import SparseArrays
7
8     # MÓDULOS INTERNOS
9     import .IOfiles
10    import .Elements
11    import .Solver
12    import .Matrices
13    import .Stress
14
15    # PONTO DE PARTIDA (aqui inicia a execução)
16    function main(
17        input_path::String, # Arquivo de entrada (.json)
18        output_path::String # Arquivo de saída (.post.res, formato
do GiD)
19    )
20        IOfiles.header_prompt()
21        println("Número de threads: $(Threads.nthreads())")
22        print("Lendo arquivo JSON...
                ")
23
24        @time input_dict = string(input_path) |> IOfiles.
open_parse_input_file
25
26        problem_type = input_dict["type"]
27        nodes = input_dict["nodes"]
28        materials = input_dict["materials"]
29        constraints_forces_nodes = input_dict["constraints"]["
forces_nodes"]
30        constraints_forces_lines = input_dict["constraints"]["
forces_lines"]
31        constraints_forces_surfaces = input_dict["constraints"]["
forces_surfaces"]
32        constraints_displacements = input_dict["constraints"]["
displacements"]
33
34        println("Tipo de problema: $(problem_type)")
35
36        # REMOVENDO ELEMENTOS NÃO UTILIZADOS

```

```

37     # esses elementos nulos são gerados pelo modo que o arquivo JSON
    é criado pelo GiD
38     # É uma falha que deve ser corrigida, mas que não é urgente.
39     pop!(nodes)
40     pop!(materials)
41     pop!(constraints_forces_nodes)
42     pop!(constraints_forces_lines)
43     pop!(constraints_forces_surfaces)
44     pop!(constraints_displacements)
45
46     if isempty(materials) error("Não há nenhum material definido!")
end
47
48     # VARIÁVEIS do PROBLEMA
49     dimensions = input_dict["type"] == "3D" ? 3 : 2
50     nodes_length = length(nodes)
51     Fg = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)
52     Ug = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)
53
54     # GRAUS DE LIBERDADE: LIVRES E PRESCRITOS
55     if problem_type == "3D"
56         dof_prescribe = reduce(vcat, map(
57             (x) -> [3 * x[1] - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]],
58             constraints_displacements
59         ))
60         dof_free = filter(x -> x dof_prescribe, 1:dimensions*
nodes_length)
61         # RESTRIÇÃO DE DESLOCAMENTO
62         Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3], x
[4]], constraints_displacements))
63     else
64         dof_prescribe = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x[1] - 1, 2 * x
[1]], constraints_displacements))
65         dof_free = filter(x -> x dof_prescribe, 1:dimensions*
nodes_length)
66         # RESTRIÇÃO DE DESLOCAMENTO
67         Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3]],
constraints_displacements))
68     end
69
70
71     # CONSTRUÇÃO DOS ELEMENTOS
72     print("Construindo os elementos e a matrix de rigidez global
paralelamente...")
73     @time Kg = Elements.assemble_stiffness_matrix(input_dict["
elements"]["linear"], materials, nodes, problem_type)
74

```

```

75     print("Aplicando as restrições de força...
76           ")
77     @time if problem_type == "3D"
78         # RESTRIÇÕES DE FORÇA SOBRE NÓS
79         if !isempty(constraints_forces_nodes)
80             dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) ->
81 [3 * x[1] - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]], constraints_forces_nodes))
82             Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x)
83 -> [x[2], x[3], x[4]], constraints_forces_nodes))
84         end
85         # RESTRIÇÃO DE FORÇAS SOBRE SUPERFÍCIES (somente
86 TetrahedronLinear)
87         if !isempty(constraints_forces_surfaces)
88             Elements.assemble_force_surface!(Fg, nodes,
89 constraints_forces_surfaces)
90         end
91         else
92             # RESTRIÇÕES DE FORÇA SOBRE NÓS
93             if !isempty(constraints_forces_nodes)
94                 dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) ->
95 [2 * x[1] - 1, 2 * x[1]], constraints_forces_nodes))
96                 Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x)
97 -> [x[2], x[3]], constraints_forces_nodes))
98             end
99             # RESTRIÇÃO DE FORÇAS SOBRE LINHAS (somente TriangleLinear)
100             if !isempty(constraints_forces_lines)
101                 Elements.assemble_force_line!(Fg, nodes,
102 constraints_forces_lines)
103             end
104         end
105
106     println("Resolvendo o sistema de $(size(Kg)) ")
107     @time Solver.direct_solve!(Kg, Ug, Fg, dof_free, dof_prescribe)
108
109     print("Calculando as reações...
110           ")
111     @time Re, Re_sum = Stress.reactions(Kg, Ug, dimensions)
112
113     println("Somatório das reações: $(Re_sum)")
114
115     print("Recuperando as tensões...
116           ")
117     @time , vm = Stress.recovery(input_dict["elements"]["linear"],
118 Ug, materials, nodes, problem_type)
119

```

```

110     print("Imprimindo o arquivo de saída...
111           ")
112     @time begin
113         output_file = open(string(output_path), "w")
114         IOfiles.write_header(output_file)
115
116         # Pontos gaussianos
117         if "tetrahedrons" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
118             write(output_file,
119                 "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Tetrahedra \n",
120                 " Number Of Gauss Points: 1 \n",
121                 " Natural Coordinates: internal \n",
122                 "end gausspoints \n",
123             )
124         if "triangles" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
125             write(output_file,
126                 "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Triangle \n",
127                 " Number Of Gauss Points: 1 \n",
128                 " Natural Coordinates: internal \n",
129                 "end gausspoints \n",
130             )
131         end
132
133         # DESLOCAMENTOS
134         IOfiles.write_result_nodes(output_file,
135             "Result \"Displacements\" \"Load Analysis\" 0 Vector
136 OnNodes",
137             dimensions, Ug
138         )
139
140         # ESTADO TENSÃO
141         IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,
142             "Result \"Stress\" \"Load Analysis\" 0 $( problem_type
143 == "3D" ? "matrix" : "PlainDeformationMatrix") OnGaussPoints \"
144 gpoints\"",
145         )
146
147         # REAÇÕES
148         IOfiles.write_result_nodes(output_file,
149             "Result \"Reactions\" \"Load Analysis\" 0 Vector OnNodes
150 ",
151             dimensions, Re
152         )
153
154         # VON MISSES
155         IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,

```



```

152         "Result \"Von Misses\" \"Load Analysis\" 0 scalar
        OnGaussPoints \"gpoints\"\",
153         vm
154     )
155
156     close(output_file)
157
158     end
159     print("Tempo total de execução: ")
160 end
161 end

```

./src/modules/includes.jl

```

1
2 # PHILLIP
3 # Script para adicionar todos os arquivos que contêm os módulos locais
4
5 include("IOfiles.jl")
6 include("Matrices.jl")
7 include("Elements.jl")
8 include("Solver.jl")
9 include("Stress.jl")

```

./src/modules/IOfiles.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: controle de entradas e saídas
4
5
6 module IOfiles
7
8     # MÓDULOS EXTERNOS
9     import JSON
10
11     # texto de cabeçalho (salvando durante a compilação)
12     header_msg_file = open(string(@__DIR__ ,"/header_msg.txt"), "r")
13     header_msg_text = read(header_msg_file, String)
14
15     function open_parse_input_file(file_name::String)::Dict
16         # Carrega e interpreta o arquivo de entrada
17         # Retorna um dicionário
18         JSON.parsefile(file_name, dicttype=Dict, use_mmap = true)
19     end
20
21     function header_prompt()
22         # Imprime o cabeçalho do prompt de execução do programa
23         # header_msg_file = open(string(@__DIR__ ,"/header_msg.txt"), "r")

```

```

24     # header_msg_text::String = read(header_msg_file, String)
25     println(header_msg_text)
26 end
27
28 function write_header(file::IOStream)
29     write(file, "GiD Post Results File 1.0", "\n")
30 end
31
32 function write_result_nodes(
33     file::IOStream,
34     header::String,
35     d::Integer,
36     vector::Vector{<:Real}
37 )
38     write(file, header, "\n")
39     vector_length = length(vector) ÷ d
40
41     write(file, "Values", "\n")
42     for i = 1:vector_length
43         write(file, " $(i)", " ",
44             join((vector[d * i - j] for j = (d - 1):-1:0), " "),
45             "\n"
46         )
47     end
48     write(file, "End Values", "\n")
49 end
50
51 function write_result_gauss_center(
52     file::IOStream,
53     header::String,
54     vector::Vector
55 )
56     write(file, header, "\n")
57     vector_length = length(vector)
58
59     write(file, "Values", "\n")
60     for i = 1:vector_length
61         write(file, " $(i)", " ",
62             join(vector[i], " "),
63             "\n"
64         )
65     end
66     write(file, "End Values", "\n")
67 end
68
69 end

```

./src/modules/Elements.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: definição dos elementos e funções relacionadas
4
5 module Elements
6
7     #MÓDULOS EXTERNOS
8     import LinearAlgebra
9     using SparseArrays
10    import ..Matrices
11
12    abstract type Element end
13
14    struct TriangleLinear <: Element
15
16        index::Integer
17        material_index::Integer
18        nodes_index::Vector{Integer}
19        interpolation_function_coeff::Matrix{Real}
20        D::Matrix{Real}
21        B::Matrix{Real}
22        K::Matrix{Real}
23        degrees_freedom::Vector{Integer}
24
25        function TriangleLinear(triangle_element_vector::Vector{Any},
26                                materials::Vector{Any}, nodes::Vector{Any}, problem_type::String)
27
28            index          = Integer(triangle_element_vector[1])
29            material_index = Integer(triangle_element_vector[2])
30            nodes_index    = Vector{Integer}(triangle_element_vector
31            [3:5])
32
33            i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
34            j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
35            m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])
36
37            position_nodes_matrix = [
38                1  i[1]  i[2];
39                1  j[1]  j[2];
40                1  m[1]  m[2]
41            ]
42
43            interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
44                position_nodes_matrix)
45
46        end
47    end
48 end

```

```

44         = 1/2 * LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)
45
46         a = interpolation_function_coeff[1,:]
47         b = interpolation_function_coeff[2,:]
48         c = interpolation_function_coeff[3,:]
49
50
51         B = [
52             b[1] 0      b[2] 0      b[3] 0      ;
53             0      c[1] 0      c[2] 0      c[3];
54             c[1] b[1] c[2] b[2] c[3] b[3]
55         ]
56
57         try
58             materials[material_index]
59         catch
60             error("Material não definido no elemento de índice: $(
index)")
61         end
62
63         D = generate_D(problem_type, materials[material_index])
64
65         K = B' * D * B * * 1
66
67         degrees_freedom = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x - 1, 2 * x
], nodes_index))
68
69         new(index, material_index, nodes_index,
interpolation_function_coeff, D, B, K, degrees_freedom)
70     end
71 end
72
73 struct TetrahedronLinear <: Element
74     index::Integer
75     material_index::Integer
76     nodes_index::Vector{<:Integer}
77     interpolation_function_coeff::Matrix{<:Real}
78     D::Matrix{<:Real}
79     B::Matrix{<:Real}
80     K::Matrix{<:Real}
81     degrees_freedom::Vector{<:Integer}
82     function TetrahedronLinear(tetrahedron_element_vector::Vector{<:
Any}, materials::Vector{<:Any}, nodes::Vector{<:Any})
83
84         index          = Integer(tetrahedron_element_vector[1])
85         material_index = Integer(tetrahedron_element_vector[2])
86         nodes_index    = Vector{Integer}(tetrahedron_element_vector

```

```

[3:6])
87
88
89     i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
90     j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
91     m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])
92     p = Vector{Real}(nodes[nodes_index[4]])
93
94     position_nodes_matrix = [
95         1 i[1] i[2] i[3];
96         1 j[1] j[2] j[3];
97         1 m[1] m[2] m[3];
98         1 p[1] p[2] p[3]
99     ]
100     interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
position_nodes_matrix)
101     V = 1/6 * LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)
102
103     a = interpolation_function_coeff[1,:]
104     b = interpolation_function_coeff[2,:]
105     c = interpolation_function_coeff[3,:]
106     d = interpolation_function_coeff[4,:]
107
108     B = [
109         b[1] 0 0 b[2] 0 0 b[3] 0 0 b
[4] 0 0 ;
110         0 c[1] 0 0 c[2] 0 0 c[3] 0 0
c[4] 0 ;
111         0 0 d[1] 0 0 d[2] 0 0 d[3] 0
0 d[4];
112         c[1] b[1] 0 c[2] b[2] 0 c[3] b[3] 0 c
[4] b[4] 0 ;
113         0 d[1] c[1] 0 d[2] c[2] 0 d[3] c[3] 0
d[4] c[4];
114         d[1] 0 b[1] d[2] 0 b[2] d[3] 0 b[3] d
[4] 0 b[4]
115     ]
116
117     try
118         materials[material_index]
119     catch
120         error("Material não definido no elemento de índice: $(
index)")
121     end
122
123     D = generate_D("3D", materials[material_index])
124

```

```

125         K = B' * D * B * V
126
127         degrees_freedom = Vector{Integer}(reduce(vcat, map((x) -> [3
128 * x - 2, 3 * x - 1, 3 * x], nodes_index)))
129
130         new(index, material_index, nodes_index,
131 interpolation_function_coeff, D, B, K, degrees_freedom)
132     end
133 end
134
135 function generate_D(problem_type, material)::Matrix{<:Real}
136     # Gera a matrix constitutiva
137     E::Float64 = material[2] # Módulo de young
138     ν::Float64 = material[3] # Coeficiente de Poisson
139
140     if problem_type == "plane_strain"
141         return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
142             (1 - ν)      0      ;
143             (1 - ν) 0      ;
144             0      0      (1 - 2ν) / 2
145         ]
146     end
147
148     if problem_type == "plane_stress"
149         return E / (1 - ν^2) * [
150             1      0      ;
151             ν      1      ;
152             0      0      (1 - ν) / 2
153         ]
154     end
155
156     if problem_type == "3D"
157         return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
158             (1 - ν)      0      0      0
159             ;
160             (1 - ν)      0      0      0
161             ;
162             (1 - ν) 0      0      0
163             ;
164             0      0      0      (1 - 2ν) / 2 0
165             ;
166             0      0      0      0      (1 - 2ν) / 2 0
167             ;
168             0      0      0      0      0      (1 - 2ν) / 2
169         ]

```

```

164         end
165
166         error("PHILLIPO: Tipo de problema desconhecido!")
167
168     end
169
170     function assemble_stiffness_matrix(input_elements, materials, nodes,
171         problem_type)
172         # Realiza a criação dos elementos e já aplica os valores de
173         rigez sobre a matriz global
174
175         # O paralelismo é realizado reservando para cada thread uma
176         matriz separada
177         Kg_vector = [Matrices.SparseMatrixCOO() for i = 1:Threads.
178             nthreads()]
179
180         if problem_type == "3D"
181             if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
182                 pop!(input_elements["tetrahedrons"])
183                 elements_length = length(input_elements["tetrahedrons"])
184                 Threads.@threads for j in 1:elements_length
185                     element = TetrahedronLinear(input_elements["
186 tetrahedrons"][j], materials, nodes)
187                     Matrices.add!(
188                         Kg_vector[Threads.threadid()],
189                         element.degrees_freedom,
190                         element.K
191                     )
192                 end
193             end
194         else
195             if "triangles" in keys(input_elements)
196                 pop!(input_elements["triangles"])
197                 elements_length = length(input_elements["triangles"])
198                 Threads.@threads for j in 1:elements_length
199                     element = TriangleLinear(input_elements["triangles
200 "] [j], materials, nodes, problem_type)
201                     Matrices.add!(
202                         Kg_vector[Threads.threadid()],
203                         element.degrees_freedom,
204                         element.K
205                     )
206                 end
207             end
208         end
209     end
210
211     # A matriz global de rigidez é a soma das matrizes globais

```

```

calculadas em cada thread
205     Kg = Matrices.sum(Kg_vector)
206
207     return Kg
208 end
209
210 function assemble_force_line!(
211     Fg::Vector{<:Real},
212     nodes::Vector,
213     forces::Vector,
214 )
215     # Aplica a força equivalente nos nós de linha que sofre um
carregamento constante.
216     # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
TriangleLinear
217     for force in forces
218         elements_index = force[1]
219         nodes_index     = force[2:3]
220         forces_vector   = force[4:5]
221
222         dof_i = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
nodes_index[1])
223         dof_j = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
nodes_index[2])
224
225         node_i = nodes[nodes_index[1]]
226         node_j = nodes[nodes_index[2]]
227
228         = LinearAlgebra.norm(node_i .- node_j)
229         F = 1/2 * .* forces_vector
230
231         Fg[dof_i] += F
232         Fg[dof_j] += F
233     end
234 end
235
236 function assemble_force_surface!(
237     Fg::Vector{<:Real},
238     nodes::Vector,
239     forces::Vector
240 )
241     # Aplica a força equivalente nos nós de superfícies que sofre um
carregamento constante.
242     # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
TetrahedronLinear
243     for force in forces
244         elements_index = force[1]

```



```

245         nodes_index      = force[2:4]
246         forces_vector     = force[5:7]
247
248         dof_i = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[1])
249         dof_j = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[2])
250         dof_k = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[3])
251
252         node_i = nodes[nodes_index[1]]
253         node_j = nodes[nodes_index[2]]
254         node_k = nodes[nodes_index[3]]
255
256         vector_ij = node_j .- node_i
257         vector_ik = node_k .- node_i
258
259         = 1/2 * LinearAlgebra.norm(LinearAlgebra.cross(vector_ij,
vector_ik))
260         F = 1/3 * .* forces_vector
261
262         Fg[dof_i] += F
263         Fg[dof_j] += F
264         Fg[dof_k] += F
265     end
266 end
267
268 end

```

./src/modules/Matrices.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: construção de matrizes esparsas baseada em coordenadas
4 # Este arquivo é construído sobre o FEMSparse.jl (módulo utilizado no
JuliaFEM.jl)
5
6 module Matrices
7
8     using SparseArrays
9     import Base.sum
10    export SparseMatrixC00, spC00, sum, add!
11
12    mutable struct SparseMatrixC00{Tv,Ti<:Integer} <:
AbstractSparseMatrix{Tv,Ti}
13        I :: Vector{Ti}
14        J :: Vector{Ti}
15        V :: Vector{Tv}

```

```

16     end
17
18     spCOO(A::Matrix{<:Number}) = SparseMatrixCOO(A)
19     SparseMatrixCOO() = SparseMatrixCOO{Int[], Int[], Float64[]}()
20     SparseMatrixCOO(A::SparseMatrixCSC{Tv, Ti}) where {Tv, Ti<:Integer} =
        SparseMatrixCOO(findnz(A)...)
21     SparseMatrixCOO(A::Matrix{<:Real}) = SparseMatrixCOO(sparse(A))
22     SparseArrays.SparseMatrixCSC(A::SparseMatrixCOO) = sparse(A.I, A.J,
        A.V)
23     Base.isempty(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A.I) && isempty(A.J) &&
        isempty(A.V)
24     Base.size(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A) ? (0, 0) : (maximum(A.I),
        maximum(A.J))
25     Base.size(A::SparseMatrixCOO, idx::Int) = size(A)[idx]
26     Base.Matrix(A::SparseMatrixCOO) = Matrix(SparseMatrixCSC(A))
27
28     get_nonzero_rows(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.I[findall(!iszero, A
        .V)])
29     get_nonzero_columns(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.J[findall(!iszero
        , A.V)])
30
31     function Base.getindex(A::SparseMatrixCOO{Tv, Ti}, i::Ti, j::Ti)
        where {Tv, Ti}
32         if length(A.V) > 1_000_000
33             @warn("Performance warning: indexing of COO sparse matrix is
                slow.")
34         end
35         p = (A.I .== i) .& (A.J .== j)
36         return sum(A.V[p])
37     end
38
39     """
40         add!(A, i, j, v)
41     Add new value to sparse matrix 'A' to location ('i','j').
42     """
43     function add!(A::SparseMatrixCOO, i, j, v)
44         push!(A.I, i)
45         push!(A.J, j)
46         push!(A.V, v)
47         return nothing
48     end
49
50     function Base.empty!(A::SparseMatrixCOO)
51         empty!(A.I)
52         empty!(A.J)
53         empty!(A.V)
54         return nothing

```

```

55     end
56
57     function assemble_local_matrix!(A::SparseMatrixC00, dofs1::Vector{<:
Integer}, dofs2::Vector{<:Integer}, data)
58         n, m = length(dofs1), length(dofs2)
59         @assert length(data) == n*m
60         k = 1
61         for j=1:m
62             for i=1:n
63                 add!(A, dofs1[i], dofs2[j], data[k])
64                 k += 1
65             end
66         end
67         return nothing
68     end
69
70     function add!(A::SparseMatrixC00, dof1::Vector{<:Integer}, dof2::
Vector{<:Integer}, data)
71         assemble_local_matrix!(A, dof1, dof2, data)
72     end
73
74     function sum(A::Vector{<:SparseMatrixC00})::SparseMatrixCSC
75         # Retorna uma matriz em CSC a partir de um vetor formado por
matrizes em C00
76         I = reduce(vcat, getfield.(A, :I))
77         J = reduce(vcat, getfield.(A, :J))
78         V = reduce(vcat, getfield.(A, :V))
79         sparse(I,J,V)
80     end
81
82     function add!(A::SparseMatrixC00, dof::Vector{<:Integer}, data)
83         assemble_local_matrix!(A, dof, dof, data)
84     end
85
86 end

```

./src/modules/Solver.jl

```

1 # PHILLIPO
2 # Módulos: funções para executar o método de solução
3
4 module Solver
5
6     using SparseArrays
7     using LinearAlgebra
8
9     function direct_solve!(
10         Kg::SparseMatrixCSC,

```

```

11         Ug::Vector{<:Real},
12         Fg::Vector{<:Real},
13         dof_free::Vector{<:Integer},
14         dof_prescribe::Vector{<:Integer}
15     )
16     # Realiza a solução direta para o sistema
17
18     Ug[dof_free] = Kg[dof_free, dof_free] \ (Fg[dof_free] -
19 Kg[dof_free, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe])
20     Fg[dof_prescribe] = Kg[dof_prescribe, dof_free] * Ug[dof_free]
21     + Kg[dof_prescribe, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe]
22 end

```

./src/modules/Stress.jl

```

1 # PHILLIPO
2 # Módulo: recuperação de tensão
3
4 module Stress
5
6     import ..Elements
7     using SparseArrays
8
9     function recovery(input_elements, Ug::Vector{<:Real}, materials::
10 Vector{Any}, nodes::Vector{Any}, problem_type)
11         map_function = e -> nothing
12         if problem_type == "3D"
13             if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
14                 type = "tetrahedrons"
15                 pop!(input_elements["tetrahedrons"])
16                 map_function = e -> begin
17                     el = Elements.TetrahedronLinear(e, materials, nodes)
18                     el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
19                 end
20             end
21         else
22             if "triangles" in keys(input_elements)
23                 type = "triangles"
24                 pop!(input_elements["triangles"])
25                 map_function = e -> begin
26                     el = Elements.TriangleLinear(e, materials, nodes,
27 problem_type)
28                     el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
29                 end
30             end
31         end
32     end
33 end

```

```

30
31         = Vector{Vector{Float64}}(map(
32             map_function,
33             input_elements[type]
34         ))
35         vm = von_misses.()
36         , vm
37     end
38
39     von_misses(::Vector{<:Real}) = length() == 3 ? von_misses_2D() :
von_misses_3D()
40
41     function von_misses_2D(::Vector{<:Real})
42         ([1]^2 - [1] * [2] + [2]^2 + 3 * [3]^2)
43     end
44
45     function von_misses_3D(::Vector{<:Real})
46         ((([1] - [2])^2 + ([2] - [3])^2 + ([3] - [1])^2 + 6 * ([4]^2 +
[5]^2 + [6]^2)) / 2)
47     end
48
49     function reactions(Kg::SparseMatrixCSC, Ug::Vector{<:Real}, d::
Integer)
50         nodes_length = length(Ug)
51         Re = Kg * Ug
52         Re_sum = sum.([Re[i:d:nodes_length] for i in 1:d])
53         return Re, Re_sum
54     end
55
56 end

```