UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM

LUCAS BUBLITZ

PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE PROGRAMAÇÃO PARALELA

JOINVILLE
2023

LUCAS BUBLITZ

PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE PROGRAMAÇÃO PARALELA

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

JOINVILLE

2023

Para gerar a ficha catalográfica de teses e
dissertações acessar o link:
https://www.udesc.br/bu/manuais/ficha

Bublitz, Lucas
PHILLIPO: aplicação do método de elementos finitos na análise estática de estruturas rígidas utilizando paradigmas de programação paralela / Lucas Bublitz. -- Joinville, 2023.
?? p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Pablo Muñoz.
.
Dissertação -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado em Engenharia Mecânica, Joinville, 2023.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. 4. Palavra-chave. 5. Palavra-chave. I. Muñoz, Pablo . II. , . III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado em Engenharia Mecânica. IV. Título.

ERRATA

Elemento opcional.

Exemplo:

SOBRENOME, Prenome do Autor. Título de obra: subtítulo (se houver). Ano de depósito. Tipo do trabalho (grau e curso) - Vinculação acadêmica, local de apresentação/-defesa, data.

Folha	**Linha**	**Onde se lê**	**Leia-se**
1	10	auto-conclavo	autoconclavo

LUCAS BUBLITZ

PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS RÍGIDAS UTILIZANDO PARADIGMAS DE PROGRAMAÇÃO PARALELA

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

BANCA EXAMINADORA:

Nome do Orientador e Titulação
Nome da Instituição

Membros:

Nome do Orientador e Titulação
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação
Nome da Instituição

Joinville, 01 de maio de 2023

Dedico este trabalho a quem, gostando de aprender, não fica cansado em fracassar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Gerson e Klissia, e à minha vó, Norma, pelo suporte. Agradeço aos meus amigos, Ana, Gabriel, Willian, Lucas, Wesley (e o outro também!), Filipe e Gustavo, por estarem presente nessa longa caminhada da graduação.

“Mas o contraste não me esmaga — liberta-me; e a ironia que há nele é sangue meu. O que deveria humilhar-me é a minha bandeira, que desfraldo; e o riso com que deveria rir de mim, é um clarim com que saúdo e gero uma alvorada em que me faço.”
(Fernando Pessoa em Livro do Desassossego – *com uma pequena alteração minha*)

RESUMO

Elemento obrigatório que contém a apresentação concisa dos pontos relevantes do trabalho, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo e das conclusões do mesmo. A apresentação e a redação do resumo devem seguir os requisitos estipulados pela NBR 6028 (ABNT, 2003). Deve descrever de forma clara e sintética a natureza do trabalho, o objetivo, o método, os resultados e as conclusões, visando fornecer elementos para o leitor decidir sobre a consulta do trabalho no todo.

Palavras-chave: Palavra 1. Palavra 2. Palavra 3. Palavra 4. Palavra 5.

ABSTRACT

Elemento obrigatório para todos os trabalhos de conclusão de curso. Opcional para os demais trabalhos acadêmicos, inclusive para artigo científico. Constitui a versão do resumo em português para um idioma de divulgação internacional. Deve aparecer em página distinta e seguindo a mesma formatação do resumo em português.

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3. Keyword 4. Keyword 5.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
FEM	Finite Element Method
MVF	Método dos volumes finitos
SI	Sistema Internacional de Unidades

LISTA DE SÍMBOLOS

1	pipoca

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> I think of myself as an engineer, not as a visionary or 'big thinker.' I don't have any lofty goals. (Linus Torvalds)

A limitação do ser humano em captar, integralmente, os fenômenos ao seu redor é evidente, a ponto de não conseguir compreender como eles se dão; analisar um fenômeno, portanto, separando-o em pequenas partes (ou elementos) cujo comportamento já é conhecido (simplificado ou não), e, a partir da justaposição delas, reconstruir o funcionamento do próprio fenômeno, é um modo intuitivo que engenheiros e cientistas procedem em seus estudos, criando modelos matemáticos sobre a natureza (**??**, p. 2).

Decorrente dessa limitação, a necessidade de se criar modelos matemáticos padronizados para a compreensão de fenômenos físicos se faz constante, tanto por permitir sua disseminação e comunicação, quanto por generalizar suas aplicações. A física se utiliza, fortemente, de modelos descritos por equações diferencias, e isso não é por acaso. Não é como se os físicos tivesses uma preferências sobre símbolos, ou que achassem elegante assim descrever seus modelos. Os físicos, os engenheiros e os cientistas no geral, utilizam-se de equações diferencias, simplesmente, porque, traduzindo suas observações e modelos nesses objetos matemáticos, a solução, ou seja a predição do fenômeno, pode ser obtida por métodos numéricos já bem consolidados, ou algebricamente em casos particulares. O MEF (Método dos Elementos Finitos) é um desses métodos numéricos: objeto de estudo desta dissertação, em que é aplicado à análise de tensão e deformação em estruturas sólidas sobre carregamentos estáticos em regime elástico linear.

O MEF consiste, basicamente, na ideia apresentada de análise, em que o domínio de uma equação diferencial é subdividido em elementos discretos, descritos por um conjunto de nós formando uma malha. Nesse método, os elementos tem suas propriedades herdadas do domínio (características, condições de contorno etc.), entretanto, a descrição do fenômeno é simplificada por meio de funções de interpolação, descritas pelas características de seus nós. Essas discretizações são, então, justapostas, de modo a garantir a continuidade, formando um sistema linear, cuja solução é uma aproximação da solução da própria equação diferencial.

Esse procedimento é muito custoso em termos de cálculo, visto que para cada elementos é necessário calcular suas funções de interpolação, e depois justapor todos em um grande sistema linear, cuja solução também é custosa. É evidente, então, que o Método dos Elementos Finitos, ou os métodos numéricos em geral, acompanha o desenvolvimento da programação, impulsionado pelo avanço do processamento computacional (**??**). O poder computacional permite que se trabalhe com um volume inconcebível, para a capacidade humana, de dados e operações, como também das estruturas de dados e algoritmos que os manipulam. O algoritmo e a estrutura de dados passam a ser tão relevantes quanto a própria equação diferencial. Então, é de se esperar que uma aplicação desse método seja acompanhada de um projeto de software conciso, cujo objetivo não seja só a otimização computacional, mas a legibilidade e modularização.

A abordagem do tema na graduação de engenharia mecânica, porém, é focada, fortemente, na aplicação direta dos algoritmos, sem muita dedicação a assuntos relacionados à legibilidade e à estruturação de dados, o que pode ser devido, dentre outros aspectos, à falta de cadeiras abordando o desenvolvimento de aplicações, ou mesmo de programação como um todo. Com exceção de algumas propedêuticas, que ensinam introdução à lógica de programação em C++, a grade curricular do engenheiro mecânico não contempla o projeto de software, e, portanto, faz com que os discente, que queiram seguir em áreas mais computacionais, como simulação de fluidos, de estruturas ou análise de dados, tenham que estudar por conta, e, por decorrência disso, acabam desenvolvendo má práticas de programação, ou mesmo, não conseguem desenvolver aplicações de qualidade[1].

Essas cadeiras de programação, pelo menos na perspectiva do aluno de graduação em engenharia mecânica na UDESC, ensinam ferramentas inapropriadas para suas necessidades acadêmicas. Hoje, Python e suas bibliotecas: Pandas, NumPy, CoolProp..., utilizando-se de sua sintaxe simplificada, tipagem dinâmica e popularidade (ocupando a TIOBE Index três vezes nos últimos cinco anos), para possibilitar o acesso facilitado a ferramentas de manipulação de dados (estatística e filtragem com Pandas), construção de modelos físicos (interpolações de propriedades termodinâmicas com CoolProp) e, principalmente, automatização de tarefas (**??**). Em contra partida, seu desempenho, em termos de processamento, é muito inferior ao de linguagens compiladas, como C e Fortran, cuja eficiência de execução é necessária, quando se trabalha com problemas grandes e complexos, para se obter um tempo de execução razoável, as custas de uma sintaxe prolixa, tipagem estática e gerenciamento manual de memória. Esse dilema entre produtividade de linguagens como Python e o desempenho de linguagens como C, é conhecido como *The Two languages Problem*, ou, em tradução livre, O Problema das Duas Linguagens.

Visando unificar esses dois mundos, e diminuir a distância entre as linguagens, engenheiros do MIT desenvolveram Julia, "a programming language for the scientific community that combines features of productivity languages, such as Python or MATLAB, with characteristics of performance-oriented languages, such as C++ or Fortran."(**??**, tradução livre) Por conta do sucesso de Julia, e de sua comunidade engajada, a linguagem vem sendo adotada mais e mais no âmbito acadêmico, incluindo na área de elementos finitos, o que motivou a escolha dela para o desenvolvimento deste trabalho.

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica poderosa para a análise de sólidos, e o seu desenvolvimento em linguagens como Julia oferece uma porta de entrada muito convidativa para novos engenheiros, assim como impulsiona novas pes-

---

[1] Aplicação de qualidade, é definida aqui, tal como dito no capítulo **??** **??**, como aquela desenvolvida por bons programadores, que visam a legibilidade e simplicidade do código. Nas palavras de **??** (**??**): qualquer um pode escrever códigos que o computador compreenda, bons programadores escrevem códigos que humanos possam entender.

quisas no campo. Entendendo como o método funciona e como é aplicado, observando aspectos tanto matemáticos e físicos, quanto de programação e de estrutura de dados, é crucial para que engenheiros possam aplicá-lo devidamente, principalmente quando se utilizam de soluções já prontas: de código-aberto ou proprietárias. Este documento aborda o desenvolvimento de um desses softwares: PHILLIPO.jl, cujo objetivo é expor e aplicar o MEF, abordando alguns aspectos de programação diferenciados daqueles vistos na graduação como programação paralela, modularização e empacotamento, sem o intuito concorrer com outras soluções já consolidadas ou ser referência de aplicação, mas de ser exemplificativo.

1.1 MOTIVAÇÃO

O tema surgiu quando o autor se encontrou na tarefa de adicionar uma funcionalidade em um software já existente de elementos finitos, e percebeu que, mesmo tendo visto o assunto na graduação, não detinha o conhecimento necessário para compreender o seu funcionamento. Então resolveu por criar seu próprio programa, em Julia, aplicando seus conhecimento prévios de projeto de software, desenvolvendo mais o seu entendimento sobre o Método dos Elementos Finitos, assim como de aspectos numéricos computacionais.

1.2 OBJETIVO

O objetivo geral deste trabalho foi desenvolver uma aplicação de MEF para a análise de tensão e deformação em estruturas sólidas sobre carregamentos estáticos em regime elástico linear, utilizando para tanto, aspectos de programação funcional, processamento paralelo, focando em características modulares de implementação e de legibilidade, com o intuito secundário de expor das facilidades e vantagens da linguagem Julia, como também servir de exemplo menor.

1.2.1 Objetivos propostos

Foram propostos os seguintes objetivos específicos:

1. estudar o MEF aplicado na determinação de deformações de estruturas sólidas em regime elástico e linear, sob carregamentos estáticos (implementando os elementos triangulares e tetraédricos, de deformações constantes);

2. programar os algoritmos de MEF em Julia;

3. desenvolver um módulo que seja distribuível pelo gerenciador de pacotes Pkg.jl, em um repositório público hospedado no GitHub;

4. aplicar processamento paralelo em determinadas partes do programa em que as funções nativas não o fazem, a fim de utilizar mais da capacidade de processamento do computador que um código feito sobre o paradigma estruturado;
5. estudar as características da linguagem Julia, e como ela pode ser uma alternativa viável para C e FORTRAN em programação científica de alta performance.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento aborda o projeto e o desenvolvimento de um módulo em Julia, denominado PHILLIPO.jl, que aplica o Método de Elementos Finitos, integrado à ferramenta de pré e pós-processamento GiD, para realizar a análise das tensões em estruturas sólidas e elásticas sobre carregamentos estáticos; e é organizado em capítulos que abordam:

1. A mecânica dos sólidos: tensão e deformação no regime elástico;
2. O método de elementos finitos aplicado no equilíbrio estático de estruturas sólidas;
3. A linguagem de programação Julia: o processamento paralelo acessível a engenheiros mecânicos;
4. PHILLIPO.jl, o módulo;
5. Validação e verificação de resultados;
6. Objetivos alcançados e melhorias em projetos futuros;
7. Conclusão.

O código fonte de PHILLIPO.jl, sob a licença LGPL, assim como o das interfaces de integração com o GiD, estão impressas em anexos, cujos arquivos, incluindo o LaTeX deste documento, podem ser acessados no repositório: <https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO.jl>.

Todas as figuras foram criadas pelo próprio autor.

2 A MECÂNICA DOS SÓLIDOS: TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO

A Mecânica dos Sólidos é parte da física que estuda o comportamento de objetos sólidos sobre carregamentos, aplicando métodos analíticos para determinar suas características de resistência, rigidez e estabilidade. Seu conteúdo é notório por ser fundamental para grande parte da vida dos engenheiros, sendo mecânicos, civis ou mesmo eletricistas, ao lado de outras áreas também tão fundamentais, Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica. Sua aplicação é voltada ao projeto de estruturas a fim de que cumpram determinadas exigências, sejam tanto de deformação máxima, capacidade de carga e peso, como também de economia de materiais. E, por meio de ferramentas matemáticas, estuda os efeitos de tensão e deformação no interior de corpos sólidos. (**??**, pág. 2)

Corpos sólidos são conjuntos de matéria que resistem a forças cisalhantes, ou seja, que resistem a trações tangenciais à suas superfícies. Essa é a característica fundamental dos sólidos, e, para contextualização deste capítulo, é importante que também sejam elásticos, homogêneos e isotrópicos. Aqui, um corpo com essas características é denominado $\boldsymbol{K}$.

Corpos sólidos elásticos são aqueles que, quando submetidos a carregamentos, deformam-se, mas, quando cessados os carregamentos, retornam à sua forma original, dentro de seu regime elástico. *Corpos sólidos homogêneos* são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todos os pontos de sua geometria, como massa específica, resistência à deformação etc., de modo que uma porção do corpo seja indistinta do restante. *Corpos sólidos isotrópicos* são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todas as direções de sua geometria.

Este capítulo aborda os seguintes temas de Mecânica dos Sólidos, relevantes para o desenvolvimento inicial do módulo PHILLIPO.jl voltado à análise de estruturas elásticas sobre carregamentos contantes:

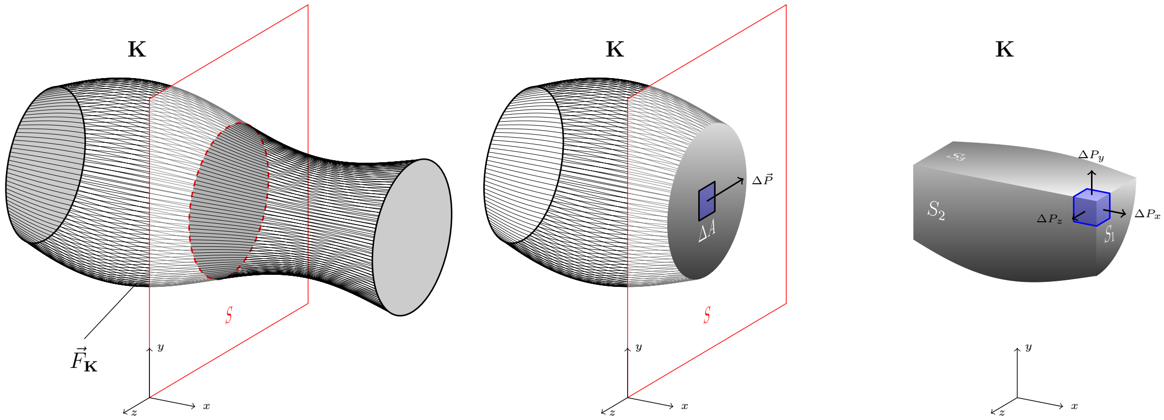
1. tensão;
2. deslocamento e deformação;
3. a lei de Hooke generalizada;
4. modelo de viga de Euler-Bernoulli;
5. tensão de von mises.

2.1 TENSÃO

Um corpo sólido se deforma quando submetido a carregamentos externos[1], distribuindo essas cargas ao longo de sua geometria. Tensão define a grandeza dessa distribuição

[1] Também quando submetido a variações de temperatura. Tal deformação não é tema deste trabalho.

Figura 1 – Forças internas: seção em um sólido qualquer



(a) (b) (c)

agindo sobre áreas infinitesimais, de modo que qualquer secção do corpo revele forças internas que estejam em equilíbrio entre si, e que sejam balanceadas pelos carregamentos externos. Essas forças, geralmente, variam ao longo do corpo, como também, dependem do plano de seção. E, devido a sua forma vetorial, é conveniente que sejam decompostas em parcelas tangenciais e normais à seção. (**??**, pág. 60)

Sejam um corpo $\boldsymbol{K}$, sólido, em equilíbrio e de geometria qualquer, submetido a forças externas na forma do carregamento $\vec{F}$, e as seções $S_{1,2,3}$, planos de corte através de esse corpo, ortogonais entre si, em que atuam as forças internas $\vec{P}$, conforme a figura **??**. ΔP é a resultante de forças que atuam sobre uma área ΔA (centrada em um certo ponto p) discretizada de S. O limite da razão entre cada componente de ΔP (tangenciais e normais) e a área ΔA, quando $\Delta A \to 0$, define a tensão sobre o ponto de análise do corpo, de forma que

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}, \qquad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}, \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}, \tag{1}$$

em que os índices de τ indicam, o primeiro, a normal do plano infinitesimal em que a tensão atua, e, o segundo, sua direção. Por conveniência, as tensões normais (aquelas que atuam perpendicularmente ao plano) são representadas por σ, ao invés de se utilizar τ com índices repetidos ($\tau_{xx} \equiv \sigma_x$). O símbolo *tau*, então, é reservado às tensões de cisalhamento, que atuam tangencialmente ao plano infinitesimal. No SI, a tensão é mensurada em Pascal ($[\mathrm{Pa}] = [\mathrm{N/m^2}]$).

Se o mesmo procedimento for realizado para cada face de o elemento cúbico, formado por mais três seções paralelas e equidistantes a $S_{1,2,3}$ da figura **??**, teremos a configuração da tensão em três planos perpendiculares entre si para um certo ponto p em $\boldsymbol{K}$, conforme a figura **??**, o que descreve o estado de tensão para aquele ponto. As componentes do estado de tensão podem ser dispostas na forma do tensor de segunda ordem, denominado tensor de tensões, e, de acordo com **??** (**??**), é

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \tag{2}$$

em que a linha indica o plano em que a componente age, e a coluna, sua direção.

O tensor de tensões é simétrico, o que pode ser demonstrado realizando o somatório de momentos sobre o elemento infinitesimal de tensão, de modo que esteja em equilíbrio. Oportunamente, escolhendo o ponto central para a análise do equilíbrio angular, podemos descrever as seguintes relações (??, pág. 8):

$$\begin{cases} \vec{i}: \tau_{zy}(dxdy)\dfrac{dz}{2} - \tau_{yz}(dxdz)\dfrac{dy}{2} - \tau_{zy}(dydx)\dfrac{dz}{2} + \tau_{yz}(dxdy)\dfrac{dy}{2} = 0 \\ \vec{j}: \tau_{xz}(dydz)\dfrac{dx}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\dfrac{dz}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\dfrac{dz}{2} + \tau_{xz}(dydz)\dfrac{dx}{2} = 0 \\ \vec{k}: \tau_{yx}(dxdz)\dfrac{dy}{2} - \tau_{xy}(dydz)\dfrac{dx}{2} - \tau_{xy}(dydz)\dfrac{dx}{2} + \tau_{yx}(dxdz)\dfrac{dy}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} \end{cases}. \tag{3}$$

Portanto,

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \iff [\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}]^t. \tag{4}$$

Essa propriedade torna com que o tensor de tensões possua apenas seis componentes independentes, ao invés de nove. Aproveitando-se disso, a notação de Voigt reduz a ordem do tensor, distribuindo as componentes em um vetor coluna de seis elementos, tal que, de acordo com **??** (??),

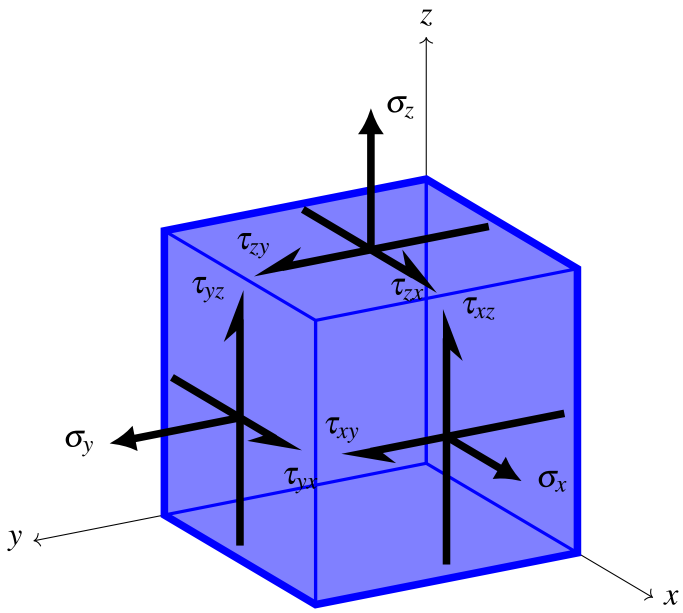
$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^t. \tag{5}$$

2.1.1 Equações diferenciais governantes do equilíbrio estático

Outro fato importante sobre o estado de tensão vem do equilíbrio de forças. Assumindo que a distribuição de tensão $[\boldsymbol{\sigma}](x,y,z)$ é contínua e diferenciável ao longo do domínio Ω do sólido $\boldsymbol{K}$, podemos analisar sua variação sobre um elemento cúbico infinitesimal, de modo que a força resultante sobre ele seja nula. Como o tensor de tensões representa a decomposição das forças internas agindo sobre as faces de um cubo infinitesimal, o somatório de forças é a própria integral da tensão ao longo dessas superfícies, ou seja,

$$\oiint_A [\boldsymbol{\sigma}] \cdot d\vec{A} = \vec{0}, \tag{6}$$

Figura 2 – Estado de tensão



A integração é sobre uma região fechada, fronteira de um subdomínio de $\mathbf{\Omega}$, e portanto, como a tensão foi assumida contínua e diferenciável em todo $\mathbf{\Omega}$, podemos aplicar o teorema da divergência[2] à equação **??**, obtendo que

$$\int_V \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}] dV = \vec{0}. \tag{7}$$

Essa relação é válida para qualquer volume infinitesimal no sólido, independente de sua orientação, ou seja, o domínio de integração V é um volume arbitrário. Deste modo, como a integração deve ser nula independentemente do subdomínio de $\mathbf{\Omega}$ escolhido para compor V, a função integrada deve ser nula em todo domínio, ou seja,

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = \vec{0}. \tag{8}$$

Esse resultado é o sistema de equações diferenciais parciais de equilíbrio, que governa o estado de tensão. A partir dele, é possível obter tanto a distribuição de tensão sobre o sólido, desde que sejam conhecidas as condições de contorno. Comumente é solucionada por métodos numéricos, como o MEF, devido à dificuldade em encontrar soluções analíticas para geometrias muito complicadas.

Explicitamente, para três dimensões, o sistema de equações diferenciais de equilíbrio é

[2] O teorema da divergência, também conhecido como teorema de Gauss, afirma que, dada uma função vetorial contínua e diferenciável sobre uma região fechada: $\oiint_{\partial\omega} \vec{f} d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{f} dV$, em que $\partial\Omega$ representa a fronteira da região $\mathbf{\Omega}$.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

A direção em que o elemento infinitesimal é orientado altera as componentes do seu estado de tensão, de modo que sua rotação evidencia direções nas quais as tensões não tem componentes tangenciais, ou seja, tem cisalhamento nulo. Essas tensões são chamadas, então, tensões principais.

O tensor de tensões pode ser interpretado como uma transformação linear que recebe um vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}$ e retorna o vetor da tensão resultante, $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\hat{n}}$, agindo sobre um plano normal a $\hat{\boldsymbol{n}}$.[3] Caso exista uma tensão resultante que tenha a mesma direção $\hat{\boldsymbol{n}}$, a tensão não tera componentes tangenciais, uma vez que, sendo colinear ao vetor unitário, é normal ao plano definido por ele. Em termos matemáticos, é o mesmo que $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\hat{n}} = \boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}$[4], ou, aplicando a transformação linear $[\boldsymbol{\sigma}]$,

$$[\boldsymbol{\sigma}]\hat{n} = \sigma\hat{n}. \quad (12)$$

Oberservando a forma dessa equação, é evidente que $\hat{\boldsymbol{n}}$ é um autovetor de $[\boldsymbol{\sigma}]$, e $\boldsymbol{\sigma}$ é o autovalor correspondente, portanto, determiná-los é equivalente a encontrar as tensões principais, ou seja, as raízas do polinômio característica do tensor de tensões:

$$\det\left([\boldsymbol{\sigma}] - \sigma \boldsymbol{I}\right) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Para o caso bidimensional, a solução desses sistema é bem conhecida, sendo dado por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (14)$$

2.2 DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

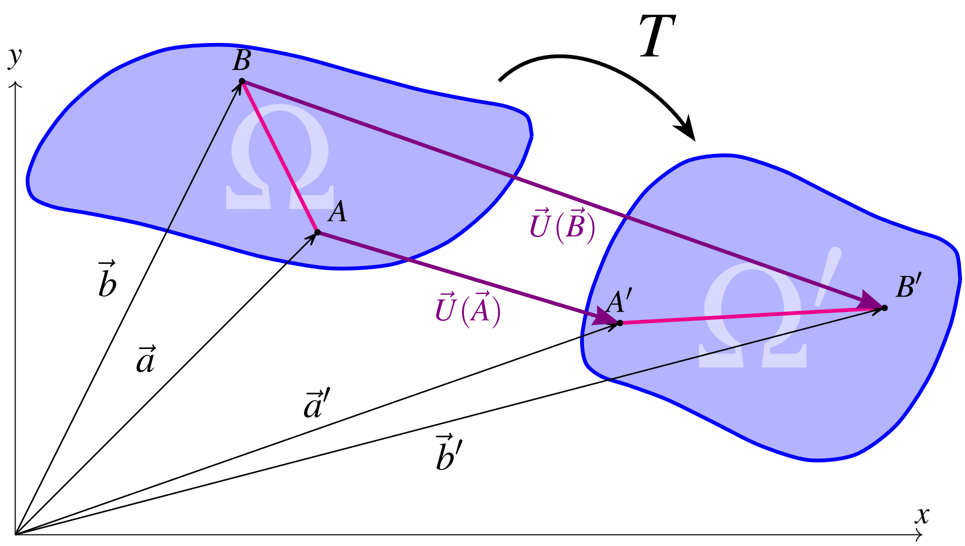
O deslocamento de um sólido é uma função vetorial que mapeia cada ponto do domínio ao seu respectivo deslocamento, de modo que é igual à variação entre a posição original e a deslocada do ponto.

---

[3] Aplicando um vetor $\hat{n}$ trivial $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ à trasnformação $[\boldsymbol{\sigma}]$, obtém-se as próprias tensões mostradas na figura **??**, como já era de se esperar.

[4] $|\sigma|$, nesse sentido, seria a norma da tensão resultante, uma vez que $\hat{n}$ é unitário e adimensional. $|\vec{\sigma}_{\hat{n}}| = |\sigma\hat{n}| = |\sigma||\hat{n}| = |\sigma|$

Figura 3 – Função de deslocamento sobre a região de um sólido



Seja um corpo $\boldsymbol{K}$ definido sobre uma região $\boldsymbol{\Omega}$, e a função $\vec{U}(\vec{x})$, a representação de seu deslocamento, que descreve a transformação da posição original em deformada de cada ponto, mapeando $\boldsymbol{\Omega}$ para $\boldsymbol{\Omega}'$.

$$T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{U}(\vec{x}), \vec{U}_{\boldsymbol{K}}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

em que u,v,w são as componentes do deslocamento nas direções de x,y,z, respectivamente, e $\vec{x} = (x,y,z)$ é o vetor posição do ponto.

Quando um sólido passa por uma transformação de deslocamentos, pode sofrer translações e deformações, ambas caracterizadas pelas distâncias entre pontos do corpo antes e após a transformação. A figura **??** exibe a transformação sobre um corpo $\boldsymbol{K}$, e como o segmento de reta AB é mapeado para sua nova configuração sobre $\boldsymbol{\Omega}'$.

Nesse sentido, são duas as possibilidades:

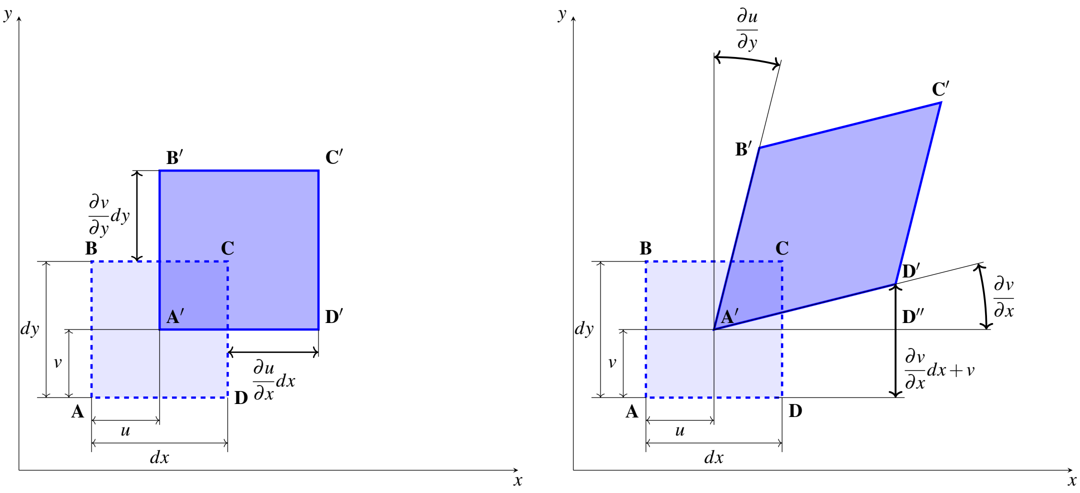
1. As distâncias entre os pontos permanece a mesma; Nesse caso, podemos dizer que a transformação é uma translação[5], e que o corpo não sofreu de deformação, pois sua geometria foi conservada. Em termos matemáticos,

$$||T(\vec{a}) - T(\vec{b})|| = ||\vec{a} - \vec{b}||, \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in \Omega. \tag{16}$$

2. As distâncias entre os pontos não se conservam; Quando isso ocorre, a geometria do corpo é alterada, deformando-se; não significa, entretanto, que o corpo não passou por uma translação. A deformação de sua geometria são as variações das distâncias

[5] Esse transformação também é uma isomeria, pois preserva a métrica do espaço, ou seja, o produto interno, de forma que $T(\vec{a} \cdot \vec{b}) = T(\vec{a}) \cdot T(\vec{b})$.

Figura 4 – Deformação de um elemento quadrado infinitesimal



(a) deformação linear

(b) deformação angular

entre os pontos antes e após a transformação, e nada diz respeito à mudança de posição do corpo. Em termos matemáticos, podemos dizer que

$$\exists \vec{a}, \vec{b} \in \Omega : \ ||T(\vec{a}) - T(\vec{b})|| \neq ||\vec{a} - \vec{b}||. \tag{17}$$

A deformação é esse alongamento, ou encurtamento, sofrido pelas linhas entre pontos do corpo, é descrita pela variação do comprimento do segmento divido pelo comprimento original, ou seja, a variação relativa do comprimento, tal que

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \tag{18}$$

É notável observar que a deformação é uma grandeza adimensional, pois é a razão entre duas grandezas de mesma unidade, porém, é escrita muitas vezes em mm/mm, ou ainda, em porcentagem.

Essa definição, entretanto, está atrelada a uma curva no interior do sólido, e não descreve como que a deformação se manifesta ao longo de toda sua geometria. Similarmente à tensão, define-se a deformação por um tensor de segunda ordem, de modo que suas componentes sejam determinadas pelo efeito que tem sobre um elemento infinitesimal (**??**). (**??**)

A figura **??** mostra um elemento infinitesimal, em que o segmento AD sofreu tanto uma translação quanto uma deformação, dado pelo campo de deslocamento $\vec{U}$, de modo a se tornar $A'D'$. Portanto,

$$\varepsilon_x = \frac{|A'D'| - |AD|}{|AD|}. \tag{19}$$

O comprimento do segmento é o próprio infinitesimal, $|AD| = dx$, já o deformado, é dado pela diferença das posições dos pontos deslocados, de modo, e sabendo da diferenciabilidade do campo de deslocamentos[6], é

$$|A'D'| = (u + A_x + dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - (u + A_x) \implies |A'D'| = \frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{20}$$

Agora, substituindo essa expressão na equação **??**, temos a definição da deformação linear na direção de x, em que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

O mesmo procedimento pode ser feito na direção de y, com o segmento AB, como na direção de z, assumindo um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura **??** do estado de tensão, obtendo-se, assim, todas as definições básicas de deformação linear (**??**):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{22}$$

Na figura **??**, ocorre a deformação por cisalhamento, em que os segmentos AD e AB são, além de transladados, rotacionados em torno de A', de modo a distorcer a geometria do elemento. Agora, a deformação ocorre na direção tanto em x, quanto em y, e é definida pela redução do ângulo reto $\angle BAD$, determinada, em termos do campo de deslocamentos (tal como na deformação linear) analisando o triângulo $A'D'D''$.

A função v, quando variada em x da posição de A até D, descreve o deslocamento dos pontos da face inferior do elemento infinitesimal na direção de y, ou seja, a hipotenusa do triângulo $A'D'D''$; a inclinação, portanto, dessa reta é própria derivada de v na direção x, ou seja,

$$\angle D'A'D'' = \tan\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \tag{23}$$

7

Outro modo de se obter a mesma expressão é aplicar a definição trigonométrica da tangente sobre o triângulo $A'D'D''$, de forma que, em suma,

---

[6] Isso é importante pois o deslocamento de D' é descrito em função do deslocamento em A, de forma que u, ao ser expandido em uma série de Taylor, ao redor de A_x, seja, determinando se a deformação de D', $u(A_x + dx) = u(A_x) + \frac{\partial u}{\partial x}(A_x)dx$, em que os termos $O(x^3)$ foram desconsiderado, visto que $dx^2 << dx$.

[7] É essa aproximação é devida pois para ângulos suficientemente pequenos: $\tan\theta = \theta$, o que pode ser verificado expandindo a série de Taylor ao redor de $x = 0$.

$$|A'D''| = \sqrt{dx^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}, \text{Teorema de Pitágoras} \tag{24}$$

$$= \sqrt{dx^2}, \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2 << dx, \tag{25}$$

$$|A'D''| = dx, \tag{26}$$

$$\tan \angle D'A'D'' = \frac{|D'D''|}{|A'D''|}, \tag{27}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}dx\frac{1}{dx}, \tag{28}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

O mesmo pode ser feito na direção de y, para encontrar a inclinação do segmento $A'B'$, como também para z, considerando um elemento infinitesimal cúbico.

A deformação, portanto, de cisalhamento do elemento infinitesimal é dada, em termos do deslocamento, por

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{31}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{32}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Por convenção[8], $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, i \neq j.$(??)

O tensor de deformações é

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{35}$$

ou, em notação indicial

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}_j}{\partial i} + \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial j}\right), \tag{36}$$

em que vale o mesmo tipo de notação que as tesões, $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i$, e que $\vec{U}_x = u, \vec{U}_y = v, \vec{U}_z = w$.

[8] Essa convenção não é mero simbolismo, mas faz com que o tensor de deformações tenha propriedades interessantes; é possível, porém, intuir uma razão para tanto, observado que, para um mesmo elemento, a deformação por cisalhamento em x já tem a parcela da deformação na direção de y, e por conta disso, são divididas. (??)

Tal como o tensor de tensões, o tensor de deformações é simétrico, e, portanto, só possui seis componentes independentes. Na notação de Voigt, de acordo com ?? (??),

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^t \tag{37}$$

2.3 A LEI DE HOOKE

Em corpos sólidos e elásticos, a deformação está relacionada diretamente com a tensão em seu interior, de modo que se possa, dentro de certas condições, descrever uma transformação linear entre elas. Essa transformação é nomeada *Lei de Hooke*, e, utilizando a notação de Voigt, é descrita por

$$\{\sigma\} = [\boldsymbol{C}]\{\varepsilon\}. \tag{38}$$

$[\boldsymbol{C}]$ é denominada *matriz de constitutiva*[9], definida em termos das características do material do corpo, como Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson, utilizando o *Princípio de Sobreposição*

2.3.1 A Lei de Hooke Uniaxial

Sejam a barra $\boldsymbol{B}$, um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento L, engastado em sua face esquerda, e de seção transversal A, e F, uma força constante que atua sobre a face direita de $\boldsymbol{B}$, na direção de x, que a deforma em $\boldsymbol{B}'$ até um comprimento $L + \Delta L$, tal como na figura ??.

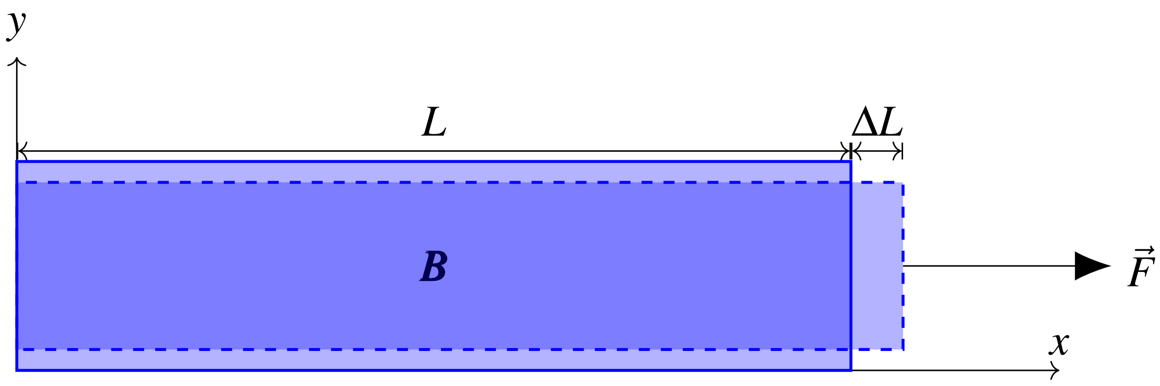
A tensão desenvolvida em uma seção S de $\boldsymbol{B}$, perpendicular à força $\vec{F}$, pode ser descrita em termos do módulo de elasticidade, E (também denominado Módulo de Young), que é uma característica intrínseca do material de $\boldsymbol{B}$, e da deformação, ε_x, atuando na mesma direção da força. Essa relação, denominada *Lei de Hooke Uniaxial*, é linear da forma

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{39}$$

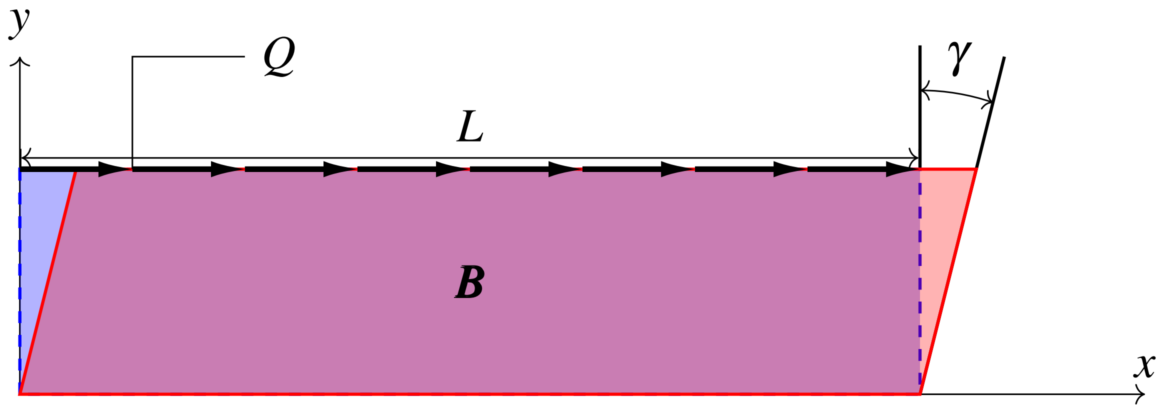
A unidade de E é a mesma de σ_x, o que é coerente, pois ε_x é adimensional, ou seja, o módulo de elasticidade é medido, no SI, em Pascal. O módulo de Young não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de $\boldsymbol{K}$. Aqui E é tratado como constante.

[9] A matriz constituiva é uma forma de notação abrevida para descrever essa relação. Da mesma forma que o tensor de tensões é abreviado por um vetor na notação de Voigt, devido sua simetria, a matriz constituiva é a abreviação de do tensor de elasticidade, um tensor de quarta ordem que mapeia o espaço das deformações no das tensões.

Figura 5 – Barra deformada



(a) por tração



(b) por cisalhamento

Essa relação desconsidera outros efeitos de deformação no interior do sólido, como a deformação transversal, $epsilon_y$ (que pode ser observada como o encurtamento da altura da barra na figura ??), e a por cisalhamento, γ_{xy}. É, comumente, empregado em casos que essas não são relevantes, como molas, barras e vigas. Vale lembrar que a Lei de Hooke é válida apenas para deformações elásticas, ou seja, que não ultrapassem o limite de elasticidade do material. [10].

2.3.2 A Lei de Hooke em Cisalhamento

Sejam a barra $\boldsymbol{B}$, um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento L, engastado em sua face inferior, e de seção transversal A, e Q, uma carregamento constante que atua sobre a face superior de $\boldsymbol{B}$, tangencialmente, na direção de x, que a deforma em $\boldsymbol{B}'$, inclinando-a, até um ângulo γ, tal como na figura ??.

A tensão desenvolvida em uma seção S de $\boldsymbol{B}$, paralela ao carregamento de Q, pode ser descrita em termos do módulo de cisalhamento, G, que é uma característica intrínseca

[10] O limite de elasticidade do material é determinado experimentalmente, observando como se deforma sobre carregamentos controlados, determinando a região de deformações em que o material preserva-se na Lei de Hooke, ou seja, mantém uma relação linear entre deformação e tensão, e ao ser aliviado dos carregamentos externos, volta à geometria original.

do material de $\boldsymbol{B}$, e da deformação angular, γ, atuando na inclinação das seções verticais. Essa relação, denominada *Lei de Hooke em Cisalhamento*, é linear da forma

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \qquad = \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}. \tag{40}$$

O módulo de cisalhamento tem a mesma unidade de tensão, e, assim como o módulo de Young (a final, γ é adimensional), não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de $\boldsymbol{K}$. Aqui $\boldsymbol{G}$ é tratado como constante.

2.3.3 O Coeficiente de Poisson

Na deformação uniaxial de um corpo sólido, tal como na figura **??**, é razoável que o corpo também se deforme em outras direções, perpendiculares a aquela, de forma que existe, dentro de determinados limites do regime elástico, uma relação entre essa deformações. Observa-se, por meio da experiência prática, que a deformação transversal é negativa, o corpo tende a se contrair quando submetido a uma deformação axial. Se o corpo se deforma ao longo de x um $\varepsilon_x > 0$, ele se contrai em y, ou seja, desenvolve uma deformação $epsilon_y < 0$, de forma que (**??**)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \tag{41}$$

em ν representa o coeficiente de Poisson, a razão entre a deformação transversal e a deformação axial, uma característica intrínseca do material, e, assim como os módulos de Young e de cisalhamento, não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de $\boldsymbol{K}$. Aqui ν é tratado como constante.

2.3.4 O Princípio da Sobreposição & A Lei de Hooke Generalizada

> O *princípio da sobreposição* permite a aditividade de efeitos (leia-se, deformações) na presença de múltiplas causa (leia-se, tensões). Invocando esse princípio, nós podemos expressão o total de deformação percebida pelo corpo como a soma de todas as deformações devidas aos componentes individuais de tensão presentes no corpo. (**??**, pág. 252, tradução livre)

Esse princípio é válido quando, de acordo com (**??**):

1. as equações de equilíbrio são lineares nas tensões;

Observando a equação ??, é possível notar que, dado dois conjuntos de tensões que satisfazem as equações de equilíbrio, a soma desses dois conjuntos também o faz, ou seja, as equações de equilíbrio são lineares nas tensões. Em termos matemáticos, é o mesmo que desmonstrar a linearidade da transformação $T(*) = \nabla \cdot (*)$,

$$\nabla \cdot (k_1[\boldsymbol{\sigma}]_1 + k_2[\boldsymbol{\sigma}]_2) = 0 \implies \nabla \cdot (k_1[\boldsymbol{\sigma}]_1) + \nabla \cdot (k_2[\boldsymbol{\sigma}]_2) = 0 \implies k_1\nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_1 + k_2\nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_2 = 0, \tag{42}$$

em que k_1, k_2 são constantes reais, e $[\boldsymbol{\sigma}]_1, [\boldsymbol{\sigma}]_2$ são conjuntos de tensões arbitrários, que satisfazem as equações de equilíbrio.

2. as relações entre deformação e deslocamento são lineares;

   Tal como no item anterior, é possível demonstrar essa propriedade tomando dos conjuntos de deslocamentos arbitrários, que, quando somados, levam um conjunto de deformações que equivale ao somatório das deformações de cada conjunto de deslocamentos individualmente.

3. as relações entre tensão e deformação são lineares.

   Observando as relações definidas para o módulo de Young, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, fica evidente que todas são lineares.

Assumindo agora que sobre um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura ??, atuam todas as componentes do tensor de tensões, de modo que, utilizando as relações entre deformação e tensão, das equações ?? e ??, como também a relação entre deformações, equação ??, é possível determinar o efeito de deformação causado por cada componente de tensão, tal que, devido à tensão σ_x, o elemento infinitesimal percebe as deformações

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}. \tag{43}$$

As outras tensões, σ_y e σ_z, se comportam de forma análoga, de modo que

$$\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E}, \tag{44}$$

$$\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}. \tag{45}$$

As tensões de cisalhamento, τ_{xy}, τ_{xz} e τ_{yz}, por sua vez, causam as deformações angulares,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{,} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \tag{46}$$

Sobrepondo as deformações axiais para cada eixo, e as deformações angulares, é possível determinar as relaçãoes entre todas as tensões e todas as deformações, denominada *lei de Hooke generalizada*:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}, \tag{47}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}, \tag{48}$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}, \tag{49}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \tag{50}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \tag{51}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \tag{52}$$

O módulo de cisalhamento pode ser determinado em termos da razão de Poisson e do módulo de Young, de modo que[11]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{53}$$

Em forma matricial, a lei de Hooke generalizada pode ser escrita como, utilizando a notação de Voigt para $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, como que $\frac{\gamma}{2} = \varepsilon$,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

Invertendo esse sistema, obtemos a matriz constitutiva da equação **??**,

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{C}]} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{55}$$

Para que essa matriz exista, é necessário que $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.[12]

[11] A demonstração dessa relação se utiliza daas fórmulas de rotação dos tensores de deformações e de tensores, que não são tratadas aqui.

[12] Materiais com $\nu = 0.5$ são chamados de incompressíveis, pois não sofrem deformações volumétricas.

2.3.5 Estado Plano de Deformação e de Tensão

O Estado Plano de Tensão (EPT) é quando o corpo é suficientemente flexível em uma direção (como uma chapa ou uma placa), fazendo com que a tensão nessa direção possa ser neglicenciada, ou seja, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a[13]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}. \tag{57}$$

$\boldsymbol{epsilon}_z$ passou a ser uma variável dependende, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações.

As Relações que definem a matriz constitutiva para o estado plano de tensão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{C}]} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \tag{58}$$

O Estado de Plano de Deformação (EPD), por sua vez, é quando o corpo é suficientemente rígido em uma direção (como uma barragem ou um muro), fazendo com que a deformação nessa direção possa ser neglicenciada, ou seja, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{C}]} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$\gamma_{xz} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}. \tag{60}$$

γ_{xz} passou a ser uma variável dependende, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações. (**??**)

---

[13] Tanto a matriz consitutiva do EPT e quando do EPD são facilmende deduzidas da lei de Hooke generalizada, apenas atribuindo os valores nulos e trabalhando com as inversas da matriz $[\boldsymbol{C}]$.

3 PHILLIPO

PHILLIPO é um *solver* para campos de deformação em estruturas discretizadas por elementos finitos, e segue a simbologia e o padrão dos algoritmos descritos por Zienkiewicz em sua obra intitulada *The Finite Element Method*, com algumas otimizações computacionais relacionadas a paralelismo e matrizes esparsas, e que visa constituir-se como base didática na implementação legível e concisa dos algoritmos de elementos finitos em Julia no âmbito acadêmico nacional. PHILLIPO é um programa de código aberto, que é distribuído em um repositório público[1] sob a licença LGPL[2]. Portanto, sua utilização é gratuita e livre para fins acadêmicos e comerciais, que incluem a modificação, implementação e venda de qualquer parte do programa, como também da documentação que o acompanha; só se resguarda, entretanto, a devida citação deste documento.

PHILLIPO foi idealizado, a princípio, como um projeto de aplicação do método de elementos finitos em um contexto de programação estruturada, porém, observou-se que essa abordagem é, senão obsoleta, já muito utilizada em pesquisas científicas. Portanto, optou-se em trazer uma visão de projeto de software, alterando o paradigma para a programação em despachos múltiplos (um forma alternativa à orientação a objetos), uma vez que tópicos envolvendo esses assuntos não são muito discutidos nas cadeiras dos cursos de engenharia (menos a de software, é claro), e que as vantagens desse tipo de abordagem vão desde a legibilidade do código, até o reaproveitamento de estruturas de dados e funções.

Um *solver*, ou em melhor português, um solucionador em MEF não é uma novidade no mundo acadêmico, nem no comercial. Softwares como Calculix (que é distribuído integrado com o FreeCAD) e o FreeFEM, que já conta com 7 mil commits em seu repositório, são continuamente produzidos e aprimorados desde antes da virada do milênio, um trabalho que demanda tempo e uma comunidade bem ativa.

Destarte, a pretensão de PHILLIPO não é fornecer uma alternativa a esses softwares, muito menos servir de módulo ou biblioteca para agregar algum deles, além do mais, a elaboração de programas robustos e confiáveis é um trabalho demorado e de muitas pessoas. O próprio FreeFEM já conta com mais de 7 mil commits em seu repositório, com a participação de 41 desenvolvedores. (**??**).

3.1 O PROJETO

PHILLIPO foi idealizado para ser modular, implicando em ser encapsulado no sentido de que cada parte do código ao mesmo tempo que fosse integrada com o restante, fosse suficientemente independente a ponto de ser reutilizada por novas adições ao programa.

[1] O repositório é mantido no GitHub, assim como o presente documento em formato Latex: <https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO>

[2] O GiD, interface de pré e pós-processamento, é um software distribuído comercialmente, e não está sujeito à mesma licença que PHILLIPO.

Por conta disso, a elaboração de um conjunto de módulos e tipos, dentro do paradigma de despachos múltiplos, foi vital para alcançar essa meta, que não visa só a organização do código, mas sim, construir uma base forte o baste para possibilitar a fácil implementação futura de novas funcionalidades.

3.2 FLUXO DE EXECUÇÃO

O fluxo de execução é uma ferramenta de projeto que tem como objetivo descrever a ordem e as condições que determinadas seções do código são executadas. A utilização de PHILLIPO.jl segue os digramas das figuras **??** e **??**

Figura 6 – Fluxograma de execução: GID

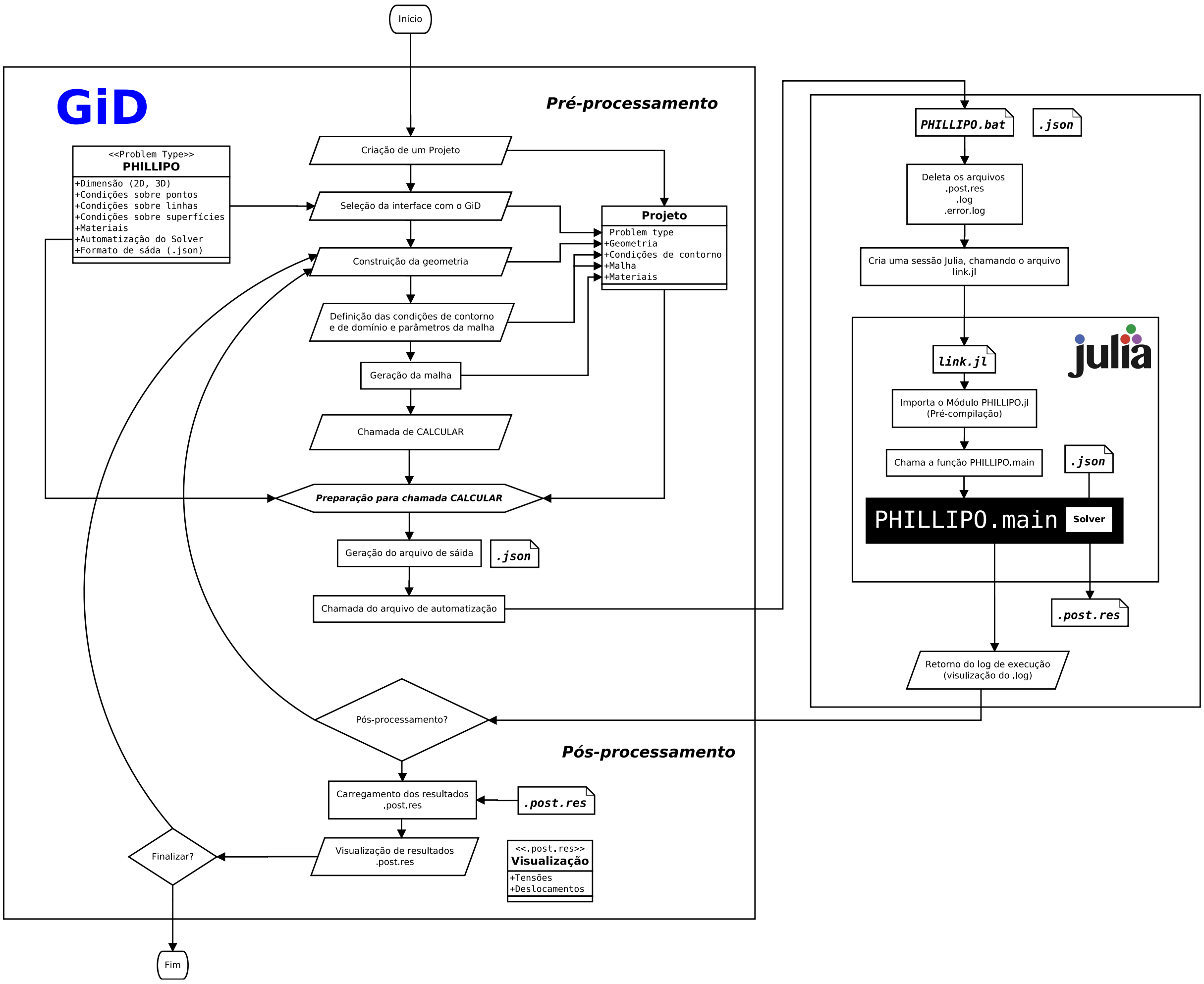
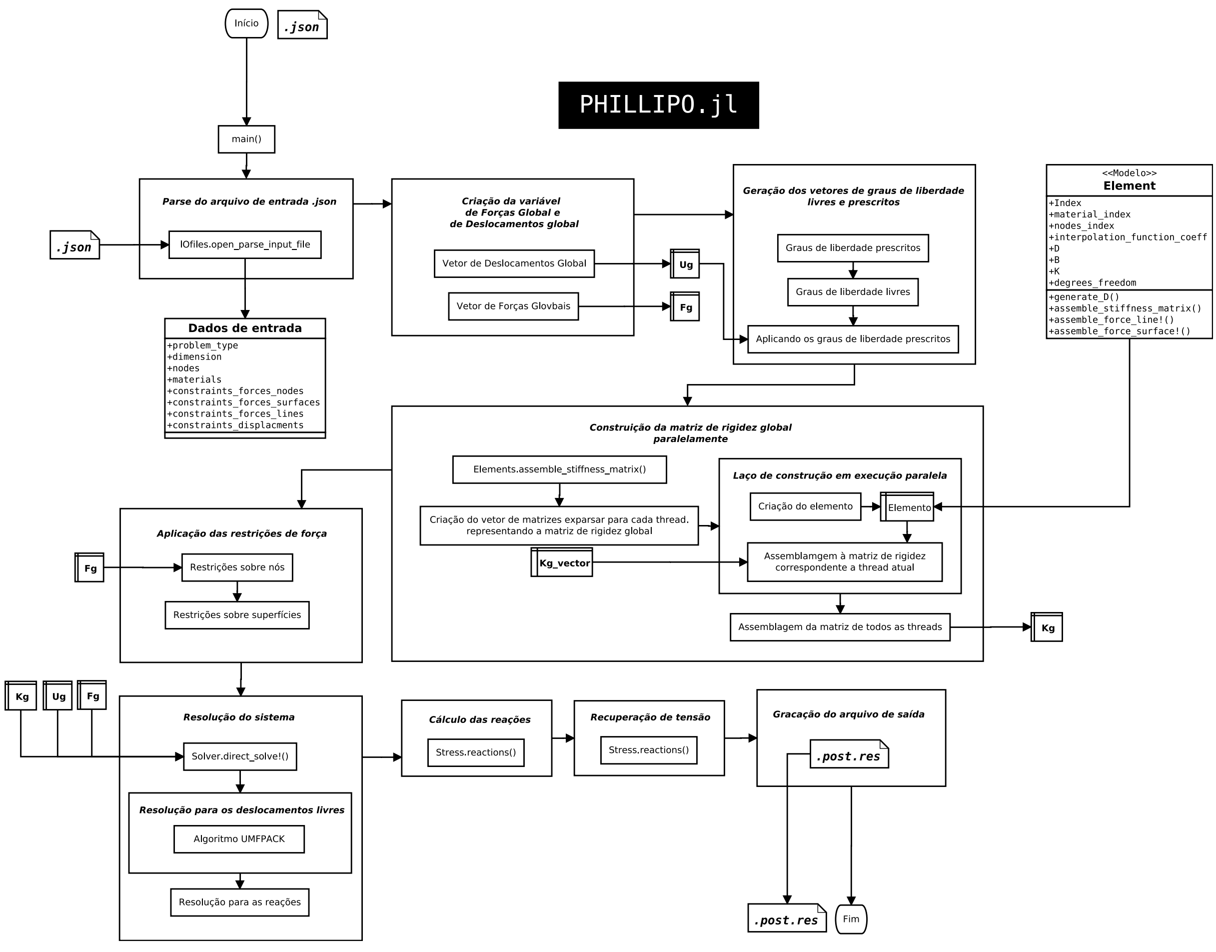


Figura 7 – Fluxograma de execução: PHILLIPO.jl



4 JULIA

A programming language to heal the planet together. (Alan Edelman)

Figura 8 – Logo da linguagem Julia

Julia é uma linguagem de programação dinâmica, opcionalmente tipada, pré-compilada, generalista, de código livre[1] e de alto nível, criada por Jeff Bezanso, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em 2012, com o objetivo de minimizar o problema das duas linguagens (*the two language problem*). É voltada para a programação científica, com capacidades de alta performance e sintaxe simples, similar à notação matemática usual. (**??**, Capítulo: The scope of Julia)

4.1 ORIGEM

"In short, because we are greedy."(Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em *Why We Created Julia*)

Os criados de Julia eram usuários de várias linguagens, cada uma utilizada para uma tarefa específica. C, C++, Fortran, Python, MATLAB, R, Perl, Ruby, Lisp, Clojure, Mathematica, e até mesmo Java, eram algumas das linguagens que eles utilizavam em seu dia a dia. Cada uma delas tinha suas vantagens e desvantagens, mas nenhuma delas era capaz de suprir todas as suas necessidades. A

1 A Linguagem Julia, é distribuída, quase integralmente, sob a MIT License, que permite a modificação, utilização e distribuição, seja comercial ou não, de qualquer parte do código, assim como das documentações associadas. Os componentes do módulo Base e as bibliotecas e ferramentas externas, que têm licença diferente, assim como a da própria Julia, podem ser consultados diretamente no repositório da linguagem: <https://github.com/JuliaLang/julia>.

5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

”As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.”(Albert Einstein)

O Método dos Elementos Finitos (MEF), *Finite Element Method* (FEM), é um método numérico, e tem como finalidade aproximar a solução de funções de campo numericamente, o domínios que são difíceis de se obter repostas diretas algebricamente. Para tanto, esse domínio é discretizado em vários elementos, ou sub-domínios (ver Figura **??**), de tamanho finito, cujos comportamentos já são conhecidos da aplicação de leis físicas. A função de campo desconhecida é aproximada em cada elemento por meio de funções interpoladoras polinomiais, calculadas sobre o valor de campo em cada nó, que são os pontos do domínio sobre os quais os elementos são construídos (o campo, portanto, passa a ser definido não mais pelo conjunto de valores do contínuo, mais sim por essas variáveis desconhecidas discretizadas). Para cada elemento, são definidas equações, por meio das quais eles se relacionam entre si e com o campo. Isso leva à formação de um grande sistema linear, que pode ser resolvido facilmente, e obter-se, dessa forma, a aproximação da função de campo. (**??**) Em sua, o método de elementos finitos segue o seguinte procedimento:

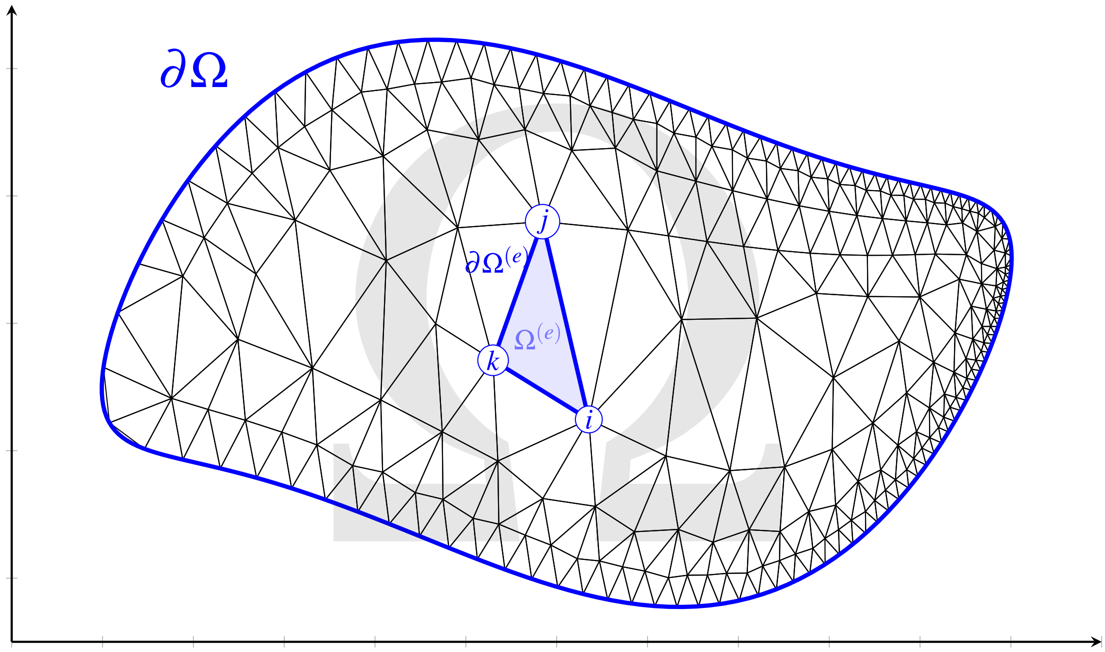
1. definição do domínio ($\boldsymbol{\Omega}$), e das condições de contorno ($\boldsymbol{\partial\Omega}$);
2. discretização do domínio em uma malha formada por nós que constituem os elementos ($\boldsymbol{\Omega}^{(e)}$);
3. aplicação da equação de governo sobre cada elemento;
4. assemblagem dessas equações em um único grande sistema linear global ($\boldsymbol{K}^{(g)}$);
5. resolução do sistema, encontrando os valores nodais do campo ($\boldsymbol{U}^{(g)}$).

No âmbito da análise estrutural aqui aplicada, a função de campo é o deslocamento sobre a estrutura, cuja geometria é o próprio domínio. A equação que rege os elementos é derivada do princípios dos trabalhos virtuais, em que há o balanço de energia entre o trabalho realizado pela deformação do elemento e pelas forças que atuam sobre ele. O sistema formado pelo conjunto dessas equações, aplicadas previamente em cada elemento, tem três termos, que se relacionam assim:

$$K_g \delta u = F \tag{61}$$

O primeiro termo, $[K_g]$, relaciona as deformações dos nós com as forças externas aplicadas sobre a estrura. $\{U\}$ e $\{F\}$, por sua vez, são, respectivamento, o pseuvetor das deformações dos nós e o pseudovetor das forças externas.

Figura 9 – Domínio discretizado em elementos triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

São dois os tipos de elementos tratados aqui: o triângulo de tensão constante, ou *Constant Strain Triangle* (CST) na aplicação bidimensional, e o tetraedro linear, na aplicação tridimensional.

5.1 ANÁLISE TRIDIMENSIONAL SOBRE O TETRAEDRO

5.1.1 Relação entre tensão, deformação e deslocamento

Quando sólidos são postos sobre carregamentos, eles deforamam, criando tensões internas. A relaçaõ entre a tensão e a deformação

As componentes de tensão de sólidos em qualquer ponto são definidas sobre a superfície de um cubo infinitesimal, como mostrado na figura. Em cada superfície opera uma componente normal e duas tangenciais, denominadas, respectivamente, por tensão normal e de cisalhamento (o primeiro termo do índice subescrito indica a o plano de atuação da tensão, o segundo, a sua direção). O conjunto dessas tensões, de acordo com **??** (**??**), quando posto em forma matricial, é chamado de tensor de Couchy, em que as linhas indicam a superfície de atuação da tensão, e a coluna, a direção. Aplicando o somatório de momento no interior desse cubo, é fácil mostrar que, segundo **??** (**??**):

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \qquad \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \tag{62}$$

Portanto, há somente um total de seis componentes distintas de tensão, permitindo que o tensor de Cauchy, possa ser reescrito de forma vetorial, mais compacta:

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{63}$$

A mesma estratégia pode, também, ser aplicada à matriz de deformação. Para cada componente do vector de tensão, em todo ponto do sólido, existe uma componenete do vector de deformação:

$$\varepsilon^t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{64}$$

A deformação é a variação da função de deslocamento por unidade de comprimento, desse modo, os componentes do vetor de deformação podem definidos em função das derivadas da do desclocamento, da seguinte mandeira, de acordo com **??** (**??**):

$$\begin{matrix} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} & \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \tag{65}$$

Nessas expressões, as funções u, v e w correspondem às componentes nas direções de x, y e z, respectivamento, do vector de deslocamento sobre o sólido, que é definido como:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} \tag{66}$$

O cojunto de equaçãoes **??** pode ser reescrito em termos do vector de deformações e do vetor de deslocamentos do sólido, obtendo assim a relação deslocamento-deformação em forma matricial, como consta na expressão **??**.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{U} \tag{67}$$

em que a matrix **L** é composta pelos operadores diferenciais parciais, da seguinte maneira:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{68}$$

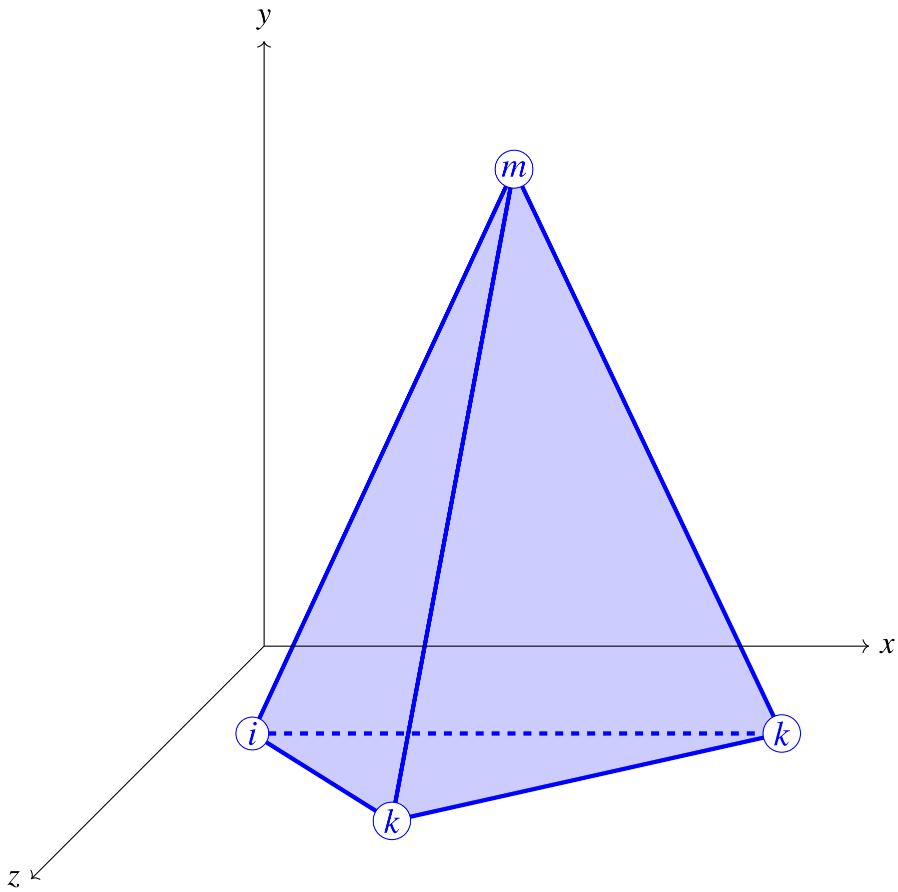
A relação entre tensão e deformação, ou equações constitutivas, é comumente denomianda Lei de Hook, e é dada de acordo com **??** (**??**), para um material isotrópico, em termos do módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν), ambos obtidos experimentalmente. De forma similar à relação dentre deformação e deslocamento, a relação tensão-deformação é expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{69}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{70}$$

em que o termo $\boldsymbol{D}$ é denominado matriz constitutiva, que é constante ao longo de todo o sólido.

Figura 10 – Elemento tetraédrico



Fonte: Elaborado pelo autor (().2022)

5.1.2 As funções de interpolação

Como já mencionado, a função de campo tratada aqui é o deslocamento sobre o sólido. Para cada elemento discretizado, essa função é interpolada por um polinômio, definido pelo valor do próprio campo nos nós do elemento. Em um elemento tetraédico, como o da figura **??**, há quatro nós (i, j, k e m), e em cada um o campo de deslocamento tem três componentes. Essa liberdade do deslocamento que o campo tem nos nós é chamada de grau de liberdade. As funções de deslocamento, expressão **??**, como ditas anteriormes, são defnidas como lineares, o que garate a compatibilidade entre cada elemento, fazendo com que não existam desconitnuidades no campo de deslocamentos de acordo com **??** (**??**). A função φ, portanto, pode ser decomposta em termos de suas variáveis da seguinte forma:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ b_1 + b_2x + b_3y + b_4z \\ c_1 + c_2x + c_3y + c_4z \end{Bmatrix} \tag{71}$$

Para encotrar esses fatores, basta aplicar as funções em cada nó.

$$\begin{cases} u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4z_i \\ u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j + a_4z_j \\ u_k = a_1 + a_2x_k + a_3y_k + a_4z_k \\ u_m = a_1 + a_2x_m + a_3y_m + a_4z_i \end{cases} \tag{72}$$

Esse sistema pode ser rearranjado na seguinte forma matricial:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{73}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}^{-1} \{\mathbf{u}\} \tag{74}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado às outras funções de deslocamento (v e w).

6 VALIDAÇÃO & VERIFICAÇÃO

Para que um programa seja considerado válido, é preciso que passe tanto por uma bateria de testes, quanto por um processo de verificação & validação (V&V). O que ocorre, também, em programas sobre MEF. Verificação é o processo pelo qual se determina se um modelo computacional tem acurácia suficiente para representar o modelo matemático em que é embasado. Validação, por sua vez, é o processo para determinar a acurácia que um modelo computacional possui de representar a realidade, dentro dos limites que se propõe. (ASME)

REFERÊNCIAS

BEZANSON, Jeff; CHEN, Jiahao; CHUNG, Benjamin; KARPINSKI, Stefan; SHAH, Viral B.; VITEK, Jan; ZOUBRITZKY, Lionel. Julia: Dynamism and performance reconciled by design. **Proc. ACM Program. Lang.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 2, n. OOPSLA, oct 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3276490>. Citado na página 16.

ERNESTI, Peter Kaiser Johannes. **Python 3: The Comprehensive Guide to Hands-On Python Programming**. 1. ed. Rheinwerk Computing, 2022. ISBN 149322302X,9781493223022. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D3E79CF42FF64C30BCBD1365173C229B>. Citado na página 16.

FOWLE, Martin; BECK, Kent; BRANT, John; OPDYKE, William; ROBERTS, Don. **Refactoring - Improving the Design of Existing Code**. 1. ed. Addison-Wesley Professional, 1999. ISBN 9780201485677,0201485672. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=cc6376a683c9a78b10c073aa2eddd3d5>. Citado na página 16.

HECHT, F. New development in freefem++. **J. Numer. Math.**, v. 20, n. 3-4, p. 251–265, 2012. ISSN 1570-2820. Disponível em: <https://freefem.org/>. Citado na página 34.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method, Enhanced Edition, SI Version**. 6. ed. Cengage Learning, 2022. ISBN 0357676432,9780357676431. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=C987600444DEED4576ED20233CC49A72>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

OñATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences) (v. 1)**. 1. ed. [s.n.], 2009. ISBN 1402087322,9781402087325. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=589bba29f786a93857f01ff9d12136cc>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 39.

POPOV, Egor P. **Engineering Mechanics of Solids**. Prentice Hall, 1990. (Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics). ISBN 0-13-279258-3,9780132792585. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=dab102c9ca4bd8e45556ebcd62b53b57>. Citado 6 vezes nas páginas 19, 20, 21, 26, 27 e 41.

QUEK, G.R. Liu S. S. **The Finite Element Method: A Practical Course**. Butterworth-Heinemann, 2003. ISBN 9780750658669,9781417505593,0750658665. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=85760afdc4189ab75d846ee5fd53d6aa>. Citado na página 41.

SHERRINGTON, Malcolm; BALBEART, Ivo; SENGUPTA, Avik. **Mastering Julia: Develop your analytical and programming skills further in Julia to solve complex data processing problems**. Packt Publishing, 2015. ISBN 978-1-78355-331-0. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=de5338c3a3b90bba52c20f544bd71456>. Citado na página 38.

ZIENKIEWICZ, O.C. **the Finite Element Method**: Volume 1: The basis. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Citado na página 15.

ANEXO A – CÓDIGO FONTE DE PHILLIPO.JL

./src/PHILLIPO.jl

```
module PHILLIPO
    # Módulo do escopo principal
    include("./modules/includes.jl") # Módulos internos
    # MÓDULOS EXTERNOS
    import LinearAlgebra
    import SparseArrays

    # MÓDULOS INTERNOS
    import .IOfiles
    import .Elements
    import .Solver
    import .Matrices
    import .Stress

    # PONTO DE PARTIDA (aqui inicia a ãexecuço)
    function main(
            input_path::String, # Arquivo de entrada (.json)
            output_path::String # Arquivo de saida (.post.res, formato do GiD)
        )
        IOfiles.header_prompt()
        println("Número de threads: $(Threads.nthreads())")
        print("Lendo arquivo JSON...
          ")

        @time input_dict = string(input_path) |> IOfiles.open_parse_input_file

        problem_type = input_dict["type"]
        nodes = input_dict["nodes"]
        materials = input_dict["materials"]
        constraints_forces_nodes    = input_dict["constraints"]["forces_nodes"]
        constraints_forces_lines    = input_dict["constraints"]["forces_lines"]
        constraints_forces_surfaces = input_dict["constraints"]["forces_surfaces
    "]
        constraints_displacments    = input_dict["constraints"]["displacements"]

        println("Tipo de problema: $(problem_type)")

        # REMOVENDO ELEMENTOS ÃNO UTILIZADOS
        # esses elementos nulos ãso gerados pelo modo que o arquivo JSON é
    criado pelo GiD
        # É uma falha que deve ser corrigida, mas que ãno é urgente.
        pop!(nodes)
        pop!(materials)
        pop!(constraints_forces_nodes)
        pop!(constraints_forces_lines)
        pop!(constraints_forces_surfaces)
        pop!(constraints_displacments)

        if isempty(materials) error("ãNo há nenhum material definido!") end

        # VARIÁVEIS do PROBLEMA
        dimensions = input_dict["type"] == "3D" ? 3 : 2
        nodes_length = length(nodes)
```

```
    Fg = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)
    Ug = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)

    # GRAUS DE LIBERDADE: LIVRES E PRESCRITOS
    if problem_type == "3D"
        dof_prescribe = reduce(vcat, map(
                (x) -> [3 * x[1] - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]],
                constraints_displacments
            ))
        dof_free = filter(x -> x ∉ dof_prescribe, 1:dimensions*nodes_length)
        # ÃRESTRIÇO DE DESLOCAMENTO
        Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3], x[4]],
constraints_displacments))
    else
        dof_prescribe = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x[1] - 1, 2 * x[1]],
constraints_displacments))
        dof_free = filter(x -> x ∉ dof_prescribe, 1:dimensions*nodes_length)
        # ÃRESTRIÇO DE DESLOCAMENTO
        Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3]],
constraints_displacments))
    end


    # ÃCONSTRUÇO DOS ELEMENTOS
    print("Construindo os elementos e a matrix de rigidez global
paralelamente...")
    @time Kg = Elements.assemble_stiffness_matrix(input_dict["elements"]["
linear"], materials, nodes, problem_type)

    print("Aplicando as õrestriçes de força...
      ")
    @time if problem_type == "3D"
        # ÕRESTRIÇES DE FORÇA SOBRE NÓS
        if !isempty(constraints_forces_nodes)
            dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) -> [3 * x[1]
 - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]], constraints_forces_nodes))
            Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2]
, x[3], x[4]], constraints_forces_nodes))
        end
        # ÃRESTRIÇO DE FORÇAS SOBRE SUPERFÍCIES (somente TetrahedronLinear)
        if !isempty(constraints_forces_surfaces)
            Elements.assemble_force_surface!(Fg, nodes,
constraints_forces_surfaces)
        end
    else
        # ÕRESTRIÇES DE FORÇA SOBRE NÓS
        if !isempty(constraints_forces_nodes)
            dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x[1]
 - 1, 2 * x[1]], constraints_forces_nodes))
            Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2]
, x[3]], constraints_forces_nodes))
        end
        # ÃRESTRIÇO DE FORÇAS SOBRE LINHAS (somente TriangleLinear)
        if !isempty(constraints_forces_lines)
            Elements.assemble_force_line!(Fg, nodes,
constraints_forces_lines)
        end
    end
```

```
    println("Resolvendo o sistema de $(size(Kg)) ")
    @time Solver.direct_solve!(Kg, Ug, Fg, dof_free, dof_prescribe)

    print("Calculando as õreaçes...
      ")
    @time Re, Re_sum = Stress.reactions(Kg, Ug, dimensions)

    println("Somatório das õreaçes: $(Re_sum)")

    print("Recuperando as õtenses...
      ")
    @time σ, σvm = Stress.recovery(input_dict["elements"]["linear"], Ug,
materials, nodes, problem_type)

    print("Imprimindo o arquivo de saída...
      ")
    @time begin
        output_file = open(string(output_path), "w")
        IOfiles.write_header(output_file)

        # Pontos gaussianos
        if "tetrahedrons" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
            write(output_file,
                "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Tetrahedra \n",
                " Number Of Gauss Points: 1 \n",
                " Natural Coordinates: internal \n",
                "end gausspoints \n",
            )
        end
        if "triangles" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
            write(output_file,
                "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Triangle \n",
                " Number Of Gauss Points: 1 \n",
                " Natural Coordinates: internal \n",
                "end gausspoints \n",
            )
        end

        # DESLOCAMENTOS
        IOfiles.write_result_nodes(output_file,
            "Result \"Displacements\" \"Load Analysis\" 0 Vector OnNodes",
            dimensions, Ug
        )

        # ESTADO ÃTENSO
        IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,
            "Result \"Stress\" \"Load Analysis\" 0 $( problem_type == "3D" ?
 "matrix" : "PlainDeformationMatrix") OnGaussPoints \"gpoints\"",
            σ
        )

        # ÕREAÇES
        IOfiles.write_result_nodes(output_file,
            "Result \"Reactions\" \"Load Analysis\" 0 Vector OnNodes",
            dimensions, Re
        )
        # VON MISSES
        IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,
```

```
                "Result \"Von Misses\" \"Load Analysis\" 0 scalar OnGaussPoints
      \"gpoints\"",
                σvm
            )

            close(output_file)

        end
        print("Tempo total de ãexecuço: ")
    end
end
```

./src/modules/includes.jl

```
# PHILLIP
# Script para adicionar todos os arquivos que contêm os módulos locais

include("IOfiles.jl")
include("Matrices.jl")
include("Elements.jl")
include("Solver.jl")
include("Stress.jl")
```

./src/modules/IOfiles.jl

```
# PHILLIPO
# Módulo: controle de entradas e saídas


module IOfiles

    # MÓDULOS EXTERNOS
    import JSON

    # texto de cabeçalho (salvando durate a ãcompilaço)
    header_msg_file = open(string(@__DIR__ ,"/header_msg.txt"), "r")
    header_msg_text = read(header_msg_file, String)

    function open_parse_input_file(file_name::String)::Dict
        # Carrega e interpreta o arquivo de entrada
        # Retorna um dicionário
        JSON.parsefile(file_name, dicttype=Dict, use_mmap = true)
    end

    function header_prompt()
        # Imprime o cabeçalho do prompt de ãexecuço do programa
        # header_msg_file = open(string(@__DIR__,"header_msg.txt"), "r")
        # header_msg_text::String = read(header_msg_file, String)
        println(header_msg_text)
    end

    function write_header(file::IOStream)
```

```
        write(file, "GiD Post Results File 1.0", "\n")
    end

    function write_result_nodes(
            file::IOStream,
            header::String,
            d::Integer,
            vector::Vector{<:Real}
        )
        write(file, header, "\n")
        vector_length = length(vector) ÷ d

        write(file, "Values", "\n")
        for i = 1:vector_length
            write(file, " $(i)", " ",
                join((vector[d * i - j] for j = (d - 1):-1:0), " "),
                "\n"
            )
        end
        write(file, "End Values", "\n")
    end

    function write_result_gauss_center(
            file::IOStream,
            header::String,
            vector::Vector
        )
        write(file, header, "\n")
        vector_length = length(vector)

        write(file, "Values", "\n")
        for i = 1:vector_length
            write(file, " $(i)", " ",
                join(vector[i], " "),
                "\n"
            )
        end
        write(file, "End Values", "\n")
    end

end
```

./src/modules/Elements.jl

```
# PHILLIPO
# Módulo: ãdefiniço dos elementos e õfunçes relacionadas

module Elements

    #MÓDULOS EXTERNOS
    import LinearAlgebra
    using SparseArrays
    import ..Matrices

    abstract type Element end
```

```
struct TriangleLinear <: Element

    index::Integer
    material_index::Integer
    nodes_index::Vector{Integer}
    interpolation_function_coeff::Matrix{Real}
    D::Matrix{Real}
    B::Matrix{Real}
    K::Matrix{Real}
    degrees_freedom::Vector{Integer}

    function TriangleLinear(triangle_element_vector::Vector{Any}, materials:
:Vector{Any}, nodes::Vector{Any}, problem_type::String)

        index          = Integer(triangle_element_vector[1])
        material_index = Integer(triangle_element_vector[2])
        nodes_index    = Vector{Integer}(triangle_element_vector[3:5])


        i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
        j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
        m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])

        position_nodes_matrix = [
            1  i[1]  i[2];
            1  j[1]  j[2];
            1  m[1]  m[2]
        ]

        interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
position_nodes_matrix)

        Δ = 1/2 *  LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)

        a = interpolation_function_coeff[1,:]
        b = interpolation_function_coeff[2,:]
        c = interpolation_function_coeff[3,:]


        B = [
            b[1] 0    b[2] 0    b[3] 0   ;
            0    c[1] 0    c[2] 0    c[3];
            c[1] b[1] c[2] b[2] c[3] b[3]
        ]

        try
            materials[material_index]
        catch
            error("Material ãno definido no elemento de índice: $(index)")
        end

        D = generate_D(problem_type, materials[material_index])

        K = B' * D * B * Δ * 1

        degrees_freedom = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x - 1, 2 * x],
nodes_index))
```

```
        new(index, material_index, nodes_index, interpolation_function_coeff
 , D, B, K, degrees_freedom)
    end
end

struct TetrahedronLinear <: Element
    index::Integer
    material_index::Integer
    nodes_index::Vector{<:Integer}
    interpolation_function_coeff::Matrix{<:Real}
    D::Matrix{<:Real}
    B::Matrix{<:Real}
    K::Matrix{<:Real}
    degrees_freedom::Vector{<:Integer}
    function TetrahedronLinear(tetrahedron_element_vector::Vector{<:Any},
 materials::Vector{<:Any}, nodes::Vector{<:Any})

        index          = Integer(tetrahedron_element_vector[1])
        material_index = Integer(tetrahedron_element_vector[2])
        nodes_index    = Vector{Integer}(tetrahedron_element_vector[3:6])


        i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
        j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
        m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])
        p = Vector{Real}(nodes[nodes_index[4]])

        position_nodes_matrix = [
            1 i[1] i[2] i[3];
            1 j[1] j[2] j[3];
            1 m[1] m[2] m[3];
            1 p[1] p[2] p[3]
        ]
        interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
 position_nodes_matrix)
        V = 1/6 * LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)

        a = interpolation_function_coeff[1,:]
        b = interpolation_function_coeff[2,:]
        c = interpolation_function_coeff[3,:]
        d = interpolation_function_coeff[4,:]

        B = [
            b[1]  0     0    b[2]  0     0    b[3]  0     0    b[4]  0
    0   ;
            0     c[1]  0    0     c[2]  0    0     c[3]  0    0     c[4]
    0   ;
            0     0     d[1] 0     0     d[2] 0     0     d[3] 0     0
    d[4];
            c[1]  b[1]  0    c[2]  b[2]  0    c[3]  b[3]  0    c[4]  b[4]
    0   ;
            0     d[1]  c[1] 0     d[2]  c[2] 0     d[3]  c[3] 0     d[4]
    c[4];
            d[1]  0     b[1] d[2]  0     b[2] d[3]  0     b[3] d[4]  0
    b[4]
        ]

        try
            materials[material_index]
```

```
        catch
            error("Material ãno definido no elemento de índice: $(index)")
        end

        D = generate_D("3D", materials[material_index])

        K =  B' * D * B * V

        degrees_freedom = Vector{Integer}(reduce(vcat, map((x) -> [3 * x - 2
, 3 * x - 1, 3 * x], nodes_index)))

        new(index, material_index, nodes_index, interpolation_function_coeff
, D, B, K, degrees_freedom)
    end
end


function generate_D(problem_type, material)::Matrix{<:Real}
    # Gera a matrix constitutiva
    E::Float64 = material[2] # Módulo de young
    ν::Float64 = material[3] # Coeficiente de Poisson

    if problem_type == "plane_strain"
        return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
            (1 - ν) ν       0           ;
            ν       (1 - ν) 0           ;
            0       0       (1 - 2ν) / 2
        ]
    end

    if problem_type == "plane_stress"
        return E / (1 - ν^2) * [
            1       ν       0           ;
            ν       1       0           ;
            0       0       (1 - ν) / 2
        ]
    end

    if problem_type == "3D"
        return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
            (1 - ν) ν       ν         0            0            0
;
            ν       (1 - ν) ν         0            0            0
;
            ν       ν       (1 - ν)   0            0            0
;
            0       0       0         (1 - 2ν) / 2 0            0
;
            0       0       0         0            (1 - 2ν) / 2 0
;
            0       0       0         0            0            (1 - 2ν) / 2
        ]
    end

    error("PHILLIPO: Tipo de problema desconhecido!")

end

function assemble_stiffness_matrix(input_elements, materials, nodes,
```

```
problem_type)
    # Realiza a ãcriaço dos elementos e já aplica os valores de rigez sobre
 a matriz global

    # O paralelismo é realizado reservando para cada thread uma matriz
 separada
    Kg_vector = [Matrices.SparseMatrixCOO() for i = 1:Threads.nthreads()]

    if problem_type == "3D"
        if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
            pop!(input_elements["tetrahedrons"])
            elements_length = length(input_elements["tetrahedrons"])
            Threads.@threads for j in 1:elements_length
                element = TetrahedronLinear(input_elements["tetrahedrons"][j
 ], materials, nodes)
                Matrices.add!(
                    Kg_vector[Threads.threadid()],
                    element.degrees_freedom,
                    element.K
                )
            end
        end
    else
        if "triangles" in keys(input_elements)
            pop!(input_elements["triangles"])
            elements_length = length(input_elements["triangles"])
            Threads.@threads for j in 1:elements_length
                element = TriangleLinear(input_elements["triangles"][j],
 materials, nodes, problem_type)
                Matrices.add!(
                    Kg_vector[Threads.threadid()],
                    element.degrees_freedom,
                    element.K
                )
            end
        end
    end

    # A matriz global de rigidez é a soma das matrizes globais calculadas em
  cada thread
    Kg = Matrices.sum(Kg_vector)

    return Kg
end

function assemble_force_line!(
        Fg::Vector{<:Real},
        nodes::Vector,
        forces::Vector,
    )
    # Aplica a força equivalente nos nós de linha que sofre um carregamento
 constante.
    # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
 TriangleLinear
    for force in forces
        elements_index = force[1]
        nodes_index    = force[2:3]
        forces_vector  = force[4:5]
```

```
            dof_i = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
 nodes_index[1])
            dof_j = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
 nodes_index[2])

            node_i = nodes[nodes_index[1]]
            node_j = nodes[nodes_index[2]]

            Δ =  LinearAlgebra.norm(node_i .- node_j)
            F =  1/2 * Δ .* forces_vector

            Fg[dof_i] += F
            Fg[dof_j] += F
        end
    end

    function assemble_force_surface!(
            Fg::Vector{<:Real},
            nodes::Vector,
            forces::Vector
        )
        # Aplica a força equivalente nos nós de superfícies que sofre um
 carregamento constante.
        # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
 TetrahedronLinear
        for force in forces
            elements_index = force[1]
            nodes_index    = force[2:4]
            forces_vector  = force[5:7]

            dof_i = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
 nodes_index[1])
            dof_j = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
 nodes_index[2])
            dof_k = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
 nodes_index[3])

            node_i = nodes[nodes_index[1]]
            node_j = nodes[nodes_index[2]]
            node_k = nodes[nodes_index[3]]

            vector_ij = node_j .- node_i
            vector_ik = node_k .- node_i

            Δ =  1/2 * LinearAlgebra.norm(LinearAlgebra.cross(vector_ij,
 vector_ik))
            F =  1/3 * Δ .* forces_vector

            Fg[dof_i] += F
            Fg[dof_j] += F
            Fg[dof_k] += F
        end
    end

end
```

./src/modules/Matrices.jl

```
# PHILLIPO
# Módulo: àconstruço de matrizes esparsas baseada em coordenadas
# Este arquivo é construído sobre o FEMSparse.jl (módulo utilizado no JuliaFEM.
    jl)

module Matrices

    using SparseArrays
    import Base.sum
    export SparseMatrixCOO, spCOO, sum, add!

    mutable struct SparseMatrixCOO{Tv,Ti<:Integer} <: AbstractSparseMatrix{Tv,Ti
     }
        I :: Vector{Ti}
        J :: Vector{Ti}
        V :: Vector{Tv}
    end

    spCOO(A::Matrix{<:Number}) = SparseMatrixCOO(A)
    SparseMatrixCOO() = SparseMatrixCOO(Int[], Int[], Float64[])
    SparseMatrixCOO(A::SparseMatrixCSC{Tv,Ti}) where {Tv, Ti<:Integer} =
     SparseMatrixCOO(findnz(A)...)
    SparseMatrixCOO(A::Matrix{<:Real}) = SparseMatrixCOO(sparse(A))
    SparseArrays.SparseMatrixCSC(A::SparseMatrixCOO) = sparse(A.I, A.J, A.V)
    Base.isempty(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A.I) && isempty(A.J) && isempty(A
     .V)
    Base.size(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A) ? (0, 0) : (maximum(A.I), maximum
     (A.J))
    Base.size(A::SparseMatrixCOO, idx::Int) = size(A)[idx]
    Base.Matrix(A::SparseMatrixCOO) = Matrix(SparseMatrixCSC(A))

    get_nonzero_rows(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.I[findall(!iszero, A.V)])
    get_nonzero_columns(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.J[findall(!iszero, A.V)])

    function Base.getindex(A::SparseMatrixCOO{Tv, Ti}, i::Ti, j::Ti) where {Tv,
     Ti}
        if length(A.V) > 1_000_000
            @warn("Performance warning: indexing of COO sparse matrix is slow.")
        end
        p = (A.I .== i) .& (A.J .== j)
        return sum(A.V[p])
    end

    """
        add!(A, i, j, v)
    Add new value to sparse matrix `A` to location (`i`,`j`).
    """
    function add!(A::SparseMatrixCOO, i, j, v)
        push!(A.I, i)
        push!(A.J, j)
        push!(A.V, v)
        return nothing
    end

    function Base.empty!(A::SparseMatrixCOO)
        empty!(A.I)
        empty!(A.J)
```

```
        empty!(A.V)
        return nothing
    end

    function assemble_local_matrix!(A::SparseMatrixCOO, dofs1::Vector{<:Integer}
    , dofs2::Vector{<:Integer}, data)
        n, m = length(dofs1), length(dofs2)
        @assert length(data) == n*m
        k = 1
        for j=1:m
            for i=1:n
                add!(A, dofs1[i], dofs2[j], data[k])
                k += 1
            end
        end
        return nothing
    end

    function add!(A::SparseMatrixCOO, dof1::Vector{<:Integer}, dof2::Vector{<:
    Integer}, data)
        assemble_local_matrix!(A, dof1, dof2, data)
    end

    function sum(A::Vector{<:SparseMatrixCOO})::SparseMatrixCSC
        # Retorna uma matriz em CSC a partir de um vetor formado por matrizes em
      COO
        I = reduce(vcat, getfield.(A, :I))
        J = reduce(vcat, getfield.(A, :J))
        V = reduce(vcat, getfield.(A, :V))
        sparse(I,J,V)
    end

    function add!(A::SparseMatrixCOO, dof::Vector{<:Integer}, data)
        assemble_local_matrix!(A, dof, dof, data)
    end

end
```

./src/modules/Solver.jl

```
# PHILLIPO
# Módulos: õfunçes para executar o método de ãsoluaço

module Solver

    using SparseArrays
    using LinearAlgebra

    function direct_solve!(
            Kg::SparseMatrixCSC,
            Ug::Vector{<:Real},
            Fg::Vector{<:Real},
            dof_free::Vector{<:Integer},
            dof_prescribe::Vector{<:Integer}
        )
        # Realiza a ãsoluaço direta para o sistema
```

```
        Ug[dof_free]        = Kg[dof_free, dof_free] \ (Fg[dof_free] - Kg[
    dof_free, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe])
        Fg[dof_prescribe]   = Kg[dof_prescribe, dof_free] * Ug[dof_free] + Kg[
    dof_prescribe, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe]
    end

end
```

./src/modules/Stress.jl

```
# PHILLIPO
# Módulo: ārecuperaço de ātenso

module Stress

    import ..Elements
    using SparseArrays

    function recovery(input_elements, Ug::Vector{<:Real}, materials::Vector{Any}
    , nodes::Vector{Any}, problem_type)
        map_function = e -> nothing
        if problem_type == "3D"
            if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
                type = "tetrahedrons"
                pop!(input_elements["tetrahedrons"])
                map_function = e -> begin
                    el = Elements.TetrahedronLinear(e, materials, nodes)
                    el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
                end
            end
        else
            if "triangles" in keys(input_elements)
                type = "triangles"
                pop!(input_elements["triangles"])
                map_function = e -> begin
                    el = Elements.TriangleLinear(e, materials, nodes,
    problem_type)
                    el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
                end
            end
        end

        σ   = Vector{Vector{Float64}}(map(
            map_function,
            input_elements[type]
        ))
        σvm = von_misses.(σ)
        σ, σvm
    end

    von_misses(σ::Vector{<:Real}) = length(σ) == 3 ? von_misses_2D(σ) :
    von_misses_3D(σ)

    function von_misses_2D(σ::Vector{<:Real})
        √(σ[1]^2 - σ[1] * σ[2] + σ[2]^2 + 3 * σ[3]^2)
```

```
    end

    function von_misses_3D(σ::Vector{<:Real})
        √(((σ[1] - σ[2])^2 + (σ[2] - σ[3])^2 + (σ[3] - σ[1])^2 + 6 * (σ[4]^2 + σ
     [5]^2 + σ[6]^2)) / 2)
    end

    function reactions(Kg::SparseMatrixCSC, Ug::Vector{<:Real}, d::Integer)
        nodes_length = length(Ug)
        Re = Kg * Ug
        Re_sum = sum.([Re[i:d:nodes_length] for i in 1:d])
        return Re, Re_sum
    end

end
```