

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM**

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS SÓLIDAS UTILIZANDO ALGUNS ASPECTOS DE  
PROGRAMAÇÃO FUNCIONAL, PROCESSAMENTO PARALELO E  
EMPACOTAMENTO**

**JOINVILLE**

**2023**

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS SÓLIDAS UTILIZANDO ALGUNS ASPECTOS DE  
PROGRAMAÇÃO FUNCIONAL, PROCESSAMENTO PARALELO E  
EMPACOTAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

**JOINVILLE**

**2023**

Para gerar a ficha catalográfica de teses e  
dissertações acessar o link:  
<https://www.udesc.br/bu/manuais/ficha>

Bublitz, Lucas

PHILLIPO: aplicação do método de elementos finitos na análise estática de estruturas sólidas utilizando alguns aspectos de programação funcional, processamento paralelo e empacotamento / Lucas Bublitz. - Joinville, 2023.

95 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Pablo Muñoz.

.  
Dissertação - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado em Engenharia Mecânica, Joinville, 2023.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. 4. Palavra-chave. 5. Palavra-chave. I. Muñoz, Pablo . II. , . III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Bacharelado em Engenharia Mecânica. IV. Título.

## ERRATA

Elemento opcional.

Exemplo:

SOBRENOME, Prenome do Autor. Título de obra: subtítulo (se houver). Ano de depósito. Tipo do trabalho (grau e curso) - Vinculação acadêmica, local de apresentação/defesa, data.

<b>Folha</b>	<b>Linha</b>	<b>Onde se lê</b>	<b>Leia-se</b>
1	10	auto-conclavo	autoconclavo

**LUCAS BUBLITZ**

**PHILLIPO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE  
ESTÁTICA DE ESTRUTURAS SÓLIDAS UTILIZANDO ALGUNS ASPECTOS DE  
PROGRAMAÇÃO FUNCIONAL, PROCESSAMENTO PARALELO E  
EMPACOTAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Muñoz

**BANCA EXAMINADORA:**

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Membros:

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Nome do Orientador e Titulação  
Nome da Instituição

Joinville, 01 de maio de 2023

Dedico este trabalho à Norma Kaizer Streit (*in  
memoriam*).

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Gerson e Klissia, e à minha vó, Norma, pelo suporte. Agradeço aos meus amigos, Ana, Gabriel, Willian, Lucas, Wesley (e o outro também!), Filipe e Gustavo, por estarem presente nessa longa caminhada da graduação.

“Mas o contraste não me esmaga liberta-me; e  
a ironia que há nele é sangue meu. O que  
deveria humilhar-me é a minha bandeira, que  
desfraldo; e o riso com que deveria rir de mim,  
é um clarim com que saúdo e gero uma  
alvorada em que me faço.” (Fernando Pessoa  
em Livro do Desassossego – *com uma pequena  
alteração minha*)



## **RESUMO**

Elemento obrigatório que contém a apresentação concisa dos pontos relevantes do trabalho, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo e das conclusões do mesmo. A apresentação e a redação do resumo devem seguir os requisitos estipulados pela NBR 6028 (ABNT, 2003). Deve descrever de forma clara e sintética a natureza do trabalho, o objetivo, o método, os resultados e as conclusões, visando fornecer elementos para o leitor decidir sobre a consulta do trabalho no todo.

**Palavras-chave:** Palavra 1. Palavra 2. Palavra 3. Palavra 4. Palavra 5.

## **ABSTRACT**

Elemento obrigatório para todos os trabalhos de conclusão de curso. Opcional para os demais trabalhos acadêmicos, inclusive para artigo científico. Constitui a versão do resumo em português para um idioma de divulgação internacional. Deve aparecer em página distinta e seguindo a mesma formatação do resumo em português.

**Keywords:** Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3. Keyword 4. Keyword 5.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Forças internas: seção em um sólido qualquer . . . . .	22
Figura 2 – Estado de tensão . . . . .	23
Figura 3 – Função de deslocamento sobre a região de um sólido . . . . .	26
Figura 4 – Deformação de um elemento quadrado infinitesimal . . . . .	27
Figura 5 – quadrilátero deformado . . . . .	30
Figura 6 – Domínio discretizado em elementos triangulares. . . . .	38
Figura 7 – Um triângulo de deformações constantes (CST). . . . .	39
Figura 8 – Um triângulo de deformações constantes sob carregamentos (CST) sob carregamentos uniformes. . . . .	44
Figura 9 – Uma estrutura discretizada em elementos CST. . . . .	46
Figura 10 – Elemento tetraédrico . . . . .	54
Figura 11 – Fluxograma de execução: GID . . . . .	59
Figura 12 – Fluxograma de execução: PHILLIPO.jl . . . . .	60
Figura 13 – Parte do arquivo de condições de contorno: PHILLIPO.cnd . . . . .	62
Figura 14 – Logo da linguagem Julia . . . . .	63
Figura 15 – O cubo unitário. . . . .	67
Figura 16 – Condições de contorno para os casos tridimensionais. . . . .	69
Figura 17 – O quadrado unitário. . . . .	71
Figura 18 – Condições de contorno para os casos bidimensionais. . . . .	72
Figura 19 – Uma viga longa. . . . .	75
Figura 20 – Comparação dos deslocamentos da linha elástica da viga longa com elementos tetraédricos. . . . .	75
Figura 21 – Comparação dos deslocamentos da linha elástica da viga longa com elementos CST. . . . .	76

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição dos nós para a malha do cubo unitário. . . . .	67
Tabela 2 – conectividade dos elementos na malha do cubo unitário. . . . .	68
Tabela 3 – Deslocamentos nodais para o primeiro caso tridimensional. . . . .	68
Tabela 4 – Tensões sobre os elementos para o primeiro caso tridimensional. . . . .	68
Tabela 5 – Deslocamentos nodais para o segundo caso tridimensional. . . . .	69
Tabela 6 – Tensões sobre os elementos para o segundo caso tridimensional. . . . .	70
Tabela 7 – Deslocamentos nodais para o terceiro caso tridimensional. . . . .	70
Tabela 8 – Tensões sobre os elementos para o terceiro caso tridimensional. . . . .	70
Tabela 9 – Descrição dos nós para a malha do quadrado unitário. . . . .	71
Tabela 10 – conectividade dos elementos na malha do quadrado unitário. . . . .	71
Tabela 11 – Deslocamentos nodais para o primeiro caso bidimensionais. . . . .	72
Tabela 12 – Tensões sobre os elementos para o primeiro caso tridimensional. . . . .	72
Tabela 13 – Deslocamentos nodais para o segundo caso bidimensionais. . . . .	73
Tabela 14 – Tensões sobre os elementos para o segundo caso tridimensional. . . . .	73
Tabela 15 – Deslocamentos nodais para o terceiro caso bidimensionais. . . . .	73
Tabela 16 – Tensões sobre os elementos para o terceiro caso tridimensional. . . . .	73

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEF	Método dos Elementos Finitos
FEM	Finite Element Method
MVF	Método dos volumes finitos
SI	Sistema Internacional de Unidades

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	tensor de tensões
$\varepsilon$	tensor de deformações
$\mathcal{B}$	um corpo sólido, elástico, homogêneo e isotrópico, em equilíbrio
$\sigma_{ij}$	tensão na direção $i$ e sentido $j$
$\varepsilon_{ij}$	deformação na direção $i$ e sentido $j$
$\Omega$	região que compreende os pontos de um sólido
$\hat{n}$	um versor

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	17
1.2	OBJETIVO . . . . .	17
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivos propostos . . . . .</b>	<b>18</b>
1.3	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	18
<b>2</b>	<b>A MECÂNICA DOS SÓLIDOS: TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DES- LOCAMENTO . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	TENSÃO . . . . .	20
<b>2.1.1</b>	<b>Equações diferenciais governantes do equilíbrio estático . . . . .</b>	<b>23</b>
2.2	DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO . . . . .	25
2.3	A LEI DE HOOKE . . . . .	29
<b>2.3.1</b>	<b>A Lei de Hooke Uniaxial . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.3.2</b>	<b>A Lei de Hooke em Cisalhamento . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3</b>	<b>O Coeficiente de Poisson . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.3.4</b>	<b>O Princípio da Sobreposição &amp; A Lei de Hooke Generalizada . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.3.5</b>	<b>Estado Plano de Deformação e de Tensão . . . . .</b>	<b>33</b>
2.4	TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA: A TENSÃO EQUI- VALENTE DE VON MISES . . . . .	34
<b>3</b>	<b>O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1	AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO . . . . .	38
3.2	AS RELAÇÕES DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO . . .	41
3.3	A MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL . . . . .	42
3.4	MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO . . .	45
<b>3.4.1</b>	<b>Solução direta do sistema global . . . . .</b>	<b>50</b>
3.5	EXPRESSÕES PARA O TETRAEDRO LINEAR . . . . .	53
<b>3.5.1</b>	<b>As funções de interpolação . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>3.5.2</b>	<b>As Relações de Tensão-Deformação-Deslocamento . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>3.5.3</b>	<b>As condições de contorno . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4</b>	<b>PHILLIPO . . . . .</b>	<b>57</b>
4.1	DISTRIBUIÇÃO PELO PKG.JL . . . . .	57
4.2	FLUXO DE EXECUÇÃO . . . . .	58
<b>4.2.1</b>	<b>Pré-processamento . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Processamento . . . . .</b>	<b>61</b>
4.3	GID . . . . .	61
<b>4.3.1</b>	<b>PHILLIPO.gid . . . . .</b>	<b>61</b>

<b>5</b>	<b>JULIA &amp; SEUS MÓDULOS . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1	O ESCOPO DE JULIA . . . . .	64
<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO &amp; VERIFICAÇÃO . . . . .</b>	<b>65</b>
6.1	VERIFICAÇÃO . . . . .	65
<b>6.1.1</b>	<b>Casos tridimensionais (elemento tetraédrico) . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>6.1.2</b>	<b>Casos bidimensionais (elemento triangular) . . . . .</b>	<b>71</b>
6.2	VALIDAÇÃO . . . . .	74
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO FONTE DE PHILLIPO.JL . . . . .</b>	<b>79</b>



## 1 INTRODUÇÃO

I think of myself as an engineer, not as a visionary or 'big thinker.' I don't have any lofty goals. (Linus Torvalds)

A limitação do ser humano em captar integralmente os fenômenos ao seu redor é evidente, a ponto de não conseguir compreender como eles se dão. Analisar um fenômeno, portanto, separando-o em pequenas partes (ou elementos) cujo comportamento é mais facilmente determinado, e a partir da justaposição delas reconstruir o funcionamento do próprio fenômeno, é um modo intuitivo que engenheiros e cientistas procedem em seus estudos (ZIENKIEWICZ, 2000, p. 2).

O MEF consiste, basicamente, na ideia apresentada de análise, em que o domínio contínuo de uma equação diferencial é subdividido em elementos discretos, descritos por um conjunto de nós formando uma malha. Os elementos têm suas propriedades herdadas do domínio (características, condições de contorno etc.), porém, a descrição do fenômeno físico é simplificada por meio de funções de interpolação, que interpolam os valores do campo. A equação diferencial então é aplicada sobre essas funções, gerando um conjunto de equações algébricas, que são, por fim, justapostas sobre os nós da malha, de modo a garantir continuidade, formando um sistema, cuja solução é uma aproximação da solução da própria equação diferencial. (QUEK; LIU, 2003, pág. 1 e 2)

Esse procedimento é custoso em termos de cálculo, visto que para cada elemento é necessário calcular suas funções de interpolação, e depois justapor todos em um grande sistema de equações algébricas, cuja solução também é custosa. É evidente, então, que o Método dos Elementos Finitos, ou os métodos numéricos em geral, acompanham o desenvolvimento da programação, impulsionado pelo avanço do processamento computacional (OñATE, 2009, pág. 2). O poder computacional permite que se trabalhe com um volume inconcebível para a capacidade humana, de dados e operações, como também das estruturas de dados e algoritmos que os manipulam. O algoritmo e a estrutura de dados passam a ser tão relevantes quanto a própria equação diferencial. Então, é de se esperar que uma aplicação desse método seja acompanhada de aspectos de projeto de software conciso, cujo objetivo não seja só a otimização computacional, mas a legibilidade e modularização, que são características úteis quando se espera a reutilização, aprimoramento continuado e, acima de tudo, a comunicação do código-fonte.

A escolha da linguagem de programação para uma aplicação do MEF, é o passo fundamental para se planejar a estrutura do código, pois, são as ferramentas de sintaxe e processamento que a linguagem e seu compilador/interpretador oferecem que vão ditar, em parte, a forma como os algoritmos são implementados, além de outros aspectos de execução, como otimização e estrutura de dados. Comumente, programas comerciais de análise por elementos finitos, como Abaqus e Ansys, são escritos em linguagens compiladas, basicamente, C e FORTRAN, que são sinônimos de robustez e desempenho. Entretanto, também são conhecidas pela sua prolixidade, complexidade de sintaxe de distribuição de bibliotecas, empacotamento etc

Entretanto, linguagens compiladas não se mostram mais atrativas para se desenvolver, com praticidade, não só aplicações do MEF, como também a maioria das aplicações práticas na vida dos engenheiros e cientistas (automatização de tarefas, análise de dados e até computação algébrica simbólica). Linguagens como Python e suas bibliotecas, como Pandas e NumPy, utilizando-se de sua sintaxe simplificada, tipagem dinâmica e popularidade (ocupando o TIOBE Index três vezes nos últimos cinco anos), oferecem uma praticidade maior, e possibilitam uma produtividade maior na construção de programas. A conveniência dessas linguagens, porém, é acompanhada de um preço: o desempenho.

A performance de linguagens interpretadas é notavelmente inferior a linguagens compiladas, quando são implementadas em problemas grandes e complexos, envolvendo muito cálculos e um grande volume de variáveis. Esse dilema, entre performance (de linguagens como C e FORTRAN) e produtividade (de linguagens como Python) é conhecido como *The Two language Problem*, em tradução livre, O Problema de Duas Linguagens.

Visando unificar esses dois mundos, e diminuir a distância entre as linguagens, engenheiros do MIT desenvolveram Julia, "a programming language for the scientific community that combines features of productivity languages, such as Python or MATLAB, with characteristics of performance-oriented languages, such as C++ or Fortran." (BEZANSON et al., 2018, tradução livre) Por conta do sucesso de Julia, e de sua comunidade engajada, a linguagem vem sendo adotada mais e mais no âmbito acadêmico, incluindo na área de elementos finitos, o que motivou a escolha dela para o desenvolvimento deste trabalho.

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica poderosa para a análise em sólidos, e o seu desenvolvimento em linguagens como Julia oferece uma porta de entrada muito convidativa para novos engenheiros, assim como impulsiona novas pesquisas no campo. Esta monografia aborda o desenvolvimento de um desses programas: PHILLIPO.jl, cujo objetivo é expor e aplicar o MEF, com alguns aspectos de programação funcional, programação paralela e empacotamento.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O tema surgiu quando o autor se encontrou na tarefa de adicionar uma funcionalidade em um software já existente de elementos finitos, e, já visto uma introdução ao assunto na graduação, teve o interesse de se aprofundar. Então resolveu por criar seu próprio programa, em Julia, aplicando seus conhecimento prévios de projeto de software, desenvolvendo mais o seu entendimento sobre o Método dos Elementos Finitos, assim como de aspectos numéricos computacionais.

## 1.2 OBJETIVO

O objetivo geral deste trabalho foi desenvolver uma aplicação de MEF para a análise de tensão e deformação em estruturas sólidas sob carregamentos estáticos em regime elástico

linear, utilizando para tanto, aspectos de programação funcional, processamento paralelo, focando em algumas características modulares de implementação e de legibilidade, com o intuito secundário de expor as facilidades e vantagens da linguagem Julia, como também servir de exemplo menor.

### 1.2.1 Objetivos propostos

Foram propostos os seguintes objetivos específicos:

1. estudar o MEF aplicado na determinação de deformações de estruturas sólidas em regime elástico e linear, sob carregamentos estáticos (implementando os elementos triangulares e tetraédricos, de deformações constantes);
2. programar os algoritmos de MEF em Julia;
3. desenvolver um módulo que seja distribuível pelo gerenciador de pacotes Pkg.jl, em um repositório público hospedado no GitHub;
4. aplicar processamento paralelo em determinadas partes do programa em que as funções nativas não o fazem, a fim de utilizar mais da capacidade de processamento do computador que um código feito sobre o paradigma estruturado;
5. estudar as características da linguagem Julia, e como ela pode ser uma alternativa viável para C e FORTRAN em programação científica de alta performance.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento aborda o projeto e o desenvolvimento de um módulo em Julia, denominado PHILLIPO.jl, que aplica o Método de Elementos Finitos, integrado à ferramenta de pré e pós-processamento GiD, para realizar a análise das tensões em estruturas sólidas e elásticas sob carregamentos estáticos, e está organizado em capítulos que abordam:

1. A mecânica dos sólidos: tensão e deformação no regime elástico;
2. O método de elementos finitos aplicado no equilíbrio estático de estruturas sólidas;
3. A linguagem de programação Julia: o processamento paralelo acessível a engenheiros mecânicos;
4. PHILLIPO.jl, o módulo;
5. Validação e verificação de resultados;
6. Objetivos alcançados e melhorias em projetos futuros;
7. Conclusão.

O código fonte de PHILLIPO.jl, sob a licença LGPL, assim como o das interfaces de integração com o GiD, estão impressas em anexos, cujos arquivos, incluindo o  $\text{\LaTeX}$  deste documento, podem ser acessados no repositório: <<https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO.jl>>.

Todas as figuras foram criadas pelo próprio autor.

## 2 A MECÂNICA DOS SÓLIDOS: TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO

A Mecânica dos Sólidos estuda o comportamento de objetos sólidos sob carregamentos externos, aplicando métodos analíticos para determinar características de resistência, rigidez e estabilidade. Sua aplicação é voltada ao projeto de estruturas a fim de que cumpram determinadas exigências, tais como deformação máxima, capacidade de carga e peso, ou economia de materiais. E, por meio de ferramentas matemáticas, estuda os efeitos de tensão e deformação no interior de corpos sólidos (POPOV, 1990, pág. 2).

Um corpo sólido por ser descrito como um conjunto de pontos materiais que resistem a forças cisalhantes, ou seja, que resistem a trações tangenciais às suas superfícies. Neste trabalho são considerados corpos sólido elásticos, homogêneos e isotrópicos. Aqui, um corpo com essas características é denominado  $\mathcal{B}$ .

Corpos sólidos elásticos são aqueles que, quando submetidos a carregamentos, deformam-se, mas quando o carregamento é retirado, retornam à sua forma original. Corpos sólidos homogêneos são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todos os pontos materiais (tais como massa específica, rigidez etc.), de modo que uma porção do corpo seja indistinta do restante. Corpos sólidos isotrópicos são aqueles que possuem as mesmas propriedades físicas em todas direções do espaço.

Este capítulo aborda os seguintes temas de Mecânica dos Sólidos, relevantes para o desenvolvimento inicial do módulo PHILLIPO.jl voltado à análise de estruturas elásticas sob carregamentos constantes:

1. conceito de tensão;
2. conceito de deslocamento e deformação;
3. comportamento dos materiais: a lei de Hooke generalizada;

### 2.1 TENSÃO

Um corpo sólido se deforma quando submetido a carregamentos externos<sup>1</sup> sobre sua geometria, de modo que qualquer seção plana arbitrária do corpo revele forças internas que estejam em equilíbrio entre si, e que sejam balanceadas pelos carregamentos externos. Essas forças geralmente variam ao longo do corpo, como também dependem da orientação do plano dessa seção. Tensão define a intensidade da força interna agindo sobre uma área infinitesimal do plano de seção (POPOV, 1990, págs. 4 e 5).

Seja um corpo  $\mathcal{B}$ , sólido, em equilíbrio e de geometria qualquer, descrito sobre um sistema de referência  $(xyz)$  com origem em  $o$ , submetido a forças externas na forma do carregamento  $\mathbf{F}$ . Sejam também as seções  $S_{1,2,3}$ , planos de corte através desse corpo (normais aos

<sup>1</sup> Expressão que se refere tanto a carregamentos térmicos, quanto mecânicos, embora o primeiro não seja assunto deste texto.

versores do sistema de referência), em que atuam as forças internas  $\mathbf{P}$ , conforme a figura 1a.  $\Delta\mathbf{P}$  é a resultante de forças que atuam sobre uma área  $\Delta A$  (centrada em um certo ponto  $p$ ), pertencente a  $S$ . O limite da razão entre cada componente de  $\Delta\mathbf{P}$  (tangenciais e normais) e a área  $\Delta A$ , quando  $\Delta A \rightarrow 0$ , define o vetor tração, cuja decomposição nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , define as componentes do tensor tensão sobre o ponto  $p$ , de forma que

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A_x}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A_x}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A_x}, \quad (1)$$

em que os índices de  $\tau$  indicam, o primeiro, a normal do plano infinitesimal em que a tensão atua, e, o segundo, sua direção. Por conveniência, as tensões normais (aquelas que atuam perpendicularmente ao plano) são representadas por  $\sigma$ , ao invés de se utilizar  $\tau$  com índices repetidos ( $\tau_{xx} \equiv \sigma_x$ ). O símbolo *tau*, então, é reservado às tensões de cisalhamento, que atuam tangencialmente ao plano infinitesimal. No SI, a tensão é mensurada em Pascal ([Pa] = [N/m<sup>2</sup>]) (POPOV, 1990, pág. 5).

Se o mesmo procedimento for realizado para cada face do elemento cúbico, formado por mais três seções paralelas a  $S_{1,2,3}$  da figura 1c, teremos a configuração da tração em três planos perpendiculares entre si para um certo ponto  $p$  em  $\mathcal{B}$ , conforme a figura 2, o que descreve o estado de tensão para aquele ponto. As componentes do estado de tensão podem ser dispostas na forma de uma matriz representativa do tensor de segunda ordem, denominado tensor de tensões, e, de acordo com Popov (1990), é

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que a linha indica o plano em que a componente age, e a coluna, sua direção.

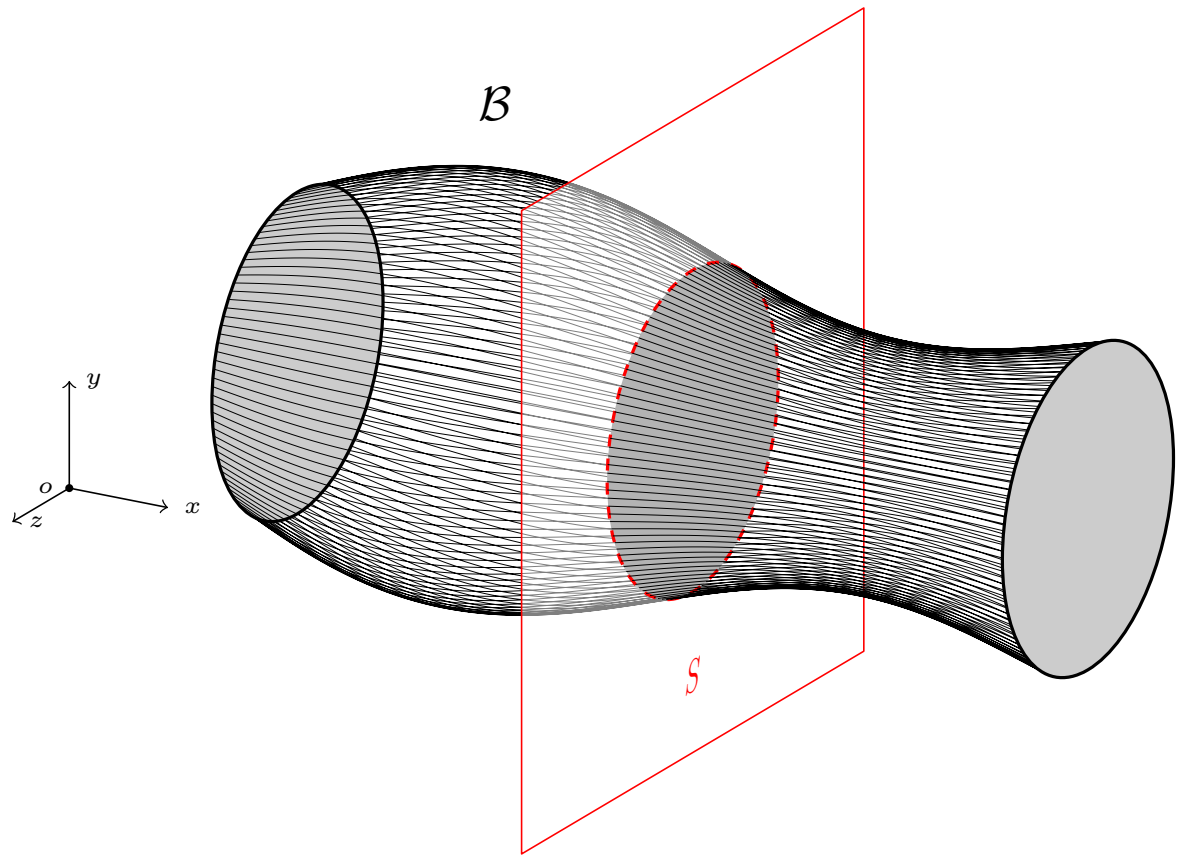
O tensor de tensões é simétrico, o que pode ser demonstrado realizando o somatório de momentos sobre o elemento infinitesimal de tensão, de modo que esteja em equilíbrio. Oportunamente, escolhendo o ponto central para a análise do equilíbrio angular, podemos descrever as seguintes relações (POPOV, 1990, pág. 8):

$$\begin{cases} \vec{i}: \tau_{zy}(dxdy)\frac{dz}{2} - \tau_{yz}(dxdz)\frac{dy}{2} - \tau_{zy}(dydx)\frac{dz}{2} + \tau_{yz}(dxdy)\frac{dy}{2} = 0 \\ \vec{j}: \tau_{xz}(dydz)\frac{dx}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\frac{dz}{2} - \tau_{zx}(dxdy)\frac{dz}{2} + \tau_{xz}(dydz)\frac{dx}{2} = 0 \\ \vec{k}: \tau_{yx}(dxdz)\frac{dy}{2} - \tau_{xy}(dydz)\frac{dx}{2} - \tau_{xy}(dydz)\frac{dx}{2} + \tau_{yx}(dxdz)\frac{dy}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} \end{cases} \quad (3)$$

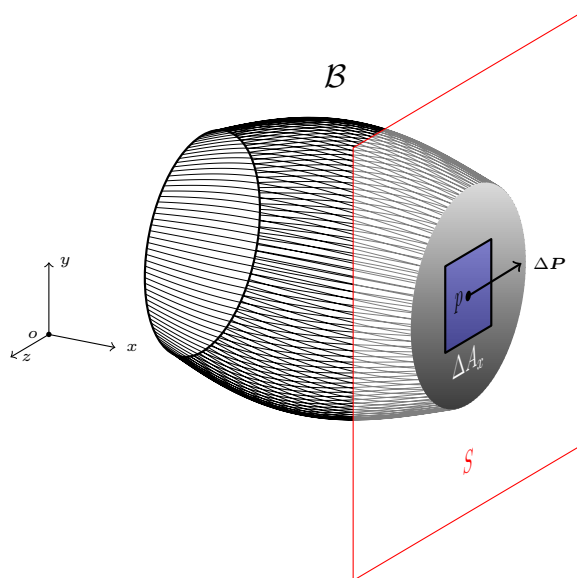
Portanto,

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \iff \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t. \quad (4)$$

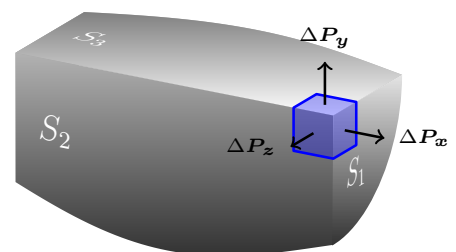
Figura 1 – Forças internas: seção em um sólido qualquer



(a)

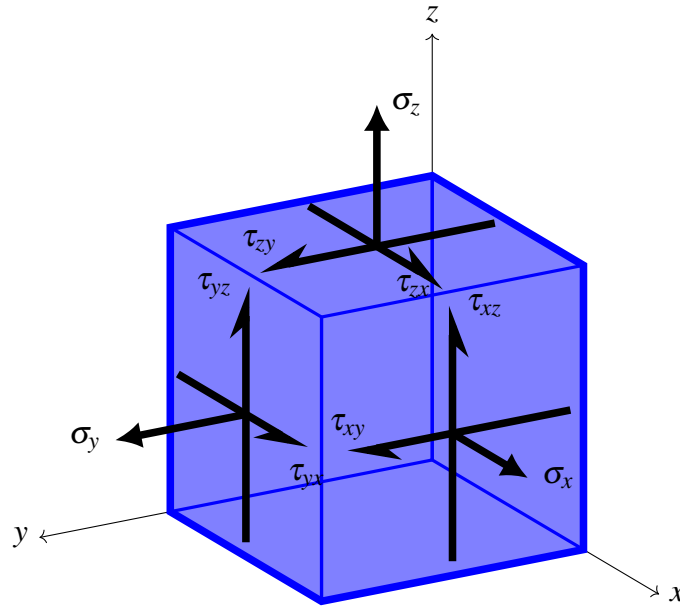


(b)



(c)

Figura 2 – Estado de tensão



Essa propriedade implica em que o tensor de tensões possua apenas seis componentes independentes, ao invés de nove. Aproveitando-se disso, a notação de Voigt reduz a ordem do tensor, distribuindo as componentes em uma matriz coluna de seis elementos, tal que, de acordo com Roylance (1995),

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^t. \quad (5)$$

### 2.1.1 Equações diferenciais governantes do equilíbrio estático

Outro fato importante sobre o estado de tensão vem do equilíbrio de forças. Assumindo que a distribuição de tensão  $\boldsymbol{\sigma}(x,y,z)$  é contínua e diferenciável ao longo do domínio  $\Omega$  do sólido  $\mathcal{B}$ , podemos analisar sua variação sobre um elemento cúbico infinitesimal, de modo que a força resultante sobre ele seja nula. Como o tensor de tensões representa a decomposição das forças internas agindo sobre as faces de um cubo infinitesimal, o somatório de forças é a própria integral da tensão ao longo dessas superfícies, ou seja,

$$\oint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

São desconsideradas, aqui, as forças de campo, como gravidade ou eletromagnética. (ROY-LANCE, 1995, pág. 4, The Equilibrium Equations)

A integração é realizada sobre uma região fechada, fronteira de um subdomínio de  $\Omega$ , e portanto, como a tensão foi assumida contínua e diferenciável em todo  $\Omega$ , podemos aplicar o



teorema da divergência<sup>2</sup> à equação 6, obtendo que

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = 0. \quad (7)$$

Essa relação é válida para qualquer volume infinitesimal no sólido, independente de sua orientação (ou seja, independente da escolha do sistema de referência), portanto o domínio de integração  $V$  é um volume arbitrário. Deste modo, como a integração deve ser nula independentemente do subdomínio de  $\Omega$  escolhido para compor  $V$ , a função integrada deve ser nula em todo domínio, ou seja,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (8)$$

Esse resultado é o sistema de equações diferenciais parciais de equilíbrio, que governa o estado de tensão. A partir dele, é possível obter a distribuição de tensão sobre o sólido, desde que sejam conhecidas as condições de contorno. Comumente esta distribuição é solucionada por métodos numéricos, como o MEF, devido à dificuldade em encontrar soluções analíticas para geometrias muito complicadas.

Explicitamente, para três dimensões, o sistema de equações diferenciais de equilíbrio é

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

A direção em que o elemento infinitesimal é orientado altera as componentes do seu estado de tensão, de modo que sua rotação evidencia direções nas quais as tensões não tem componentes tangenciais, ou seja, têm cisalhamento nulo. Essas tensões são chamadas, então, tensões principais.

O tensor de tensões é uma transformação linear que recebe um vetor unitário  $\hat{n}$  e retorna o vetor da tração resultante,  $\mathbf{t}$ , agindo sobre um plano normal a  $\hat{n}$ .<sup>3</sup> Caso exista um vetor tração resultante que tenha a mesma direção de  $\hat{n}$ , a tensão não terá componentes tangenciais, uma vez que, sendo colinear ao vetor unitário, é normal ao plano definido por ele. Em termos matemáticos, é o mesmo que  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \hat{n}$ <sup>4</sup>, ou, aplicando a transformação linear  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} \hat{n} = \boldsymbol{\sigma} \hat{n}. \quad (12)$$

<sup>2</sup> O teorema da divergência, também conhecido como teorema de Gauss, afirma que, dada uma função vetorial contínua e diferenciável sobre uma região fechada:  $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ , em que  $\partial\Omega$  representa a fronteira da região  $\Omega$ .

<sup>3</sup> Aplicando um vetor  $\hat{n}$  trivial ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) à transformação  $\boldsymbol{\sigma}$ , obtém-se as próprias tensões mostradas na figura 2, como já era de se esperar.

<sup>4</sup>  $|\boldsymbol{\sigma}|$ , nesse sentido, seria a norma da tração resultante, uma vez que  $\hat{n}$  é unitário e adimensional.  $|\mathbf{t}| = |\boldsymbol{\sigma} \hat{n}| = |\boldsymbol{\sigma}| |\hat{n}| = |\boldsymbol{\sigma}|$

Observando a forma dessa equação, é evidente que  $\hat{n}$  é um autovetor de  $\sigma$ , e  $\sigma$  é o autovalor correspondente, portanto, determiná-los é equivalente a encontrar as tensões principais, ou seja, as raízes do polinômio característica do tensor de tensões:

$$\det(\sigma - \sigma I) = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Para o caso bidimensional, a solução desse sistema é bem conhecida, sendo dado por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (14)$$

## 2.2 DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

O deslocamento de um sólido é uma função vetorial que mapeia a cada ponto do seu domínio à variação entre sua posição original e a deslocada, de modo que se possa descrever sua posição final sofre em termos do deslocamento e de sua posição original.

Seja um corpo  $\mathcal{B}$  definido sobre uma região  $\Omega$ , e a função  $\phi(\mathbf{x})$ , a representação de seu deslocamento, a transformação que mapeia a posição original na posição deformada de cada ponto, mapeando  $\Omega$  para  $\Omega'$ , é dada por

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

em que  $u, v, w$  são as componentes do deslocamento nas direções de  $x, y, z$ , respectivamente,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  é o vetor posição do ponto (ver figura 3).

Quando um sólido passa por uma transformação de deslocamentos, pode sofrer translações e deformações, ambas caracterizadas pelas distâncias entre pontos do corpo antes e após a transformação. A figura 3 exibe a transformação sobre um corpo  $\mathcal{B}$ , e como o segmento de reta  $AB$  é mapeado para sua nova configuração sobre  $\Omega'$ .

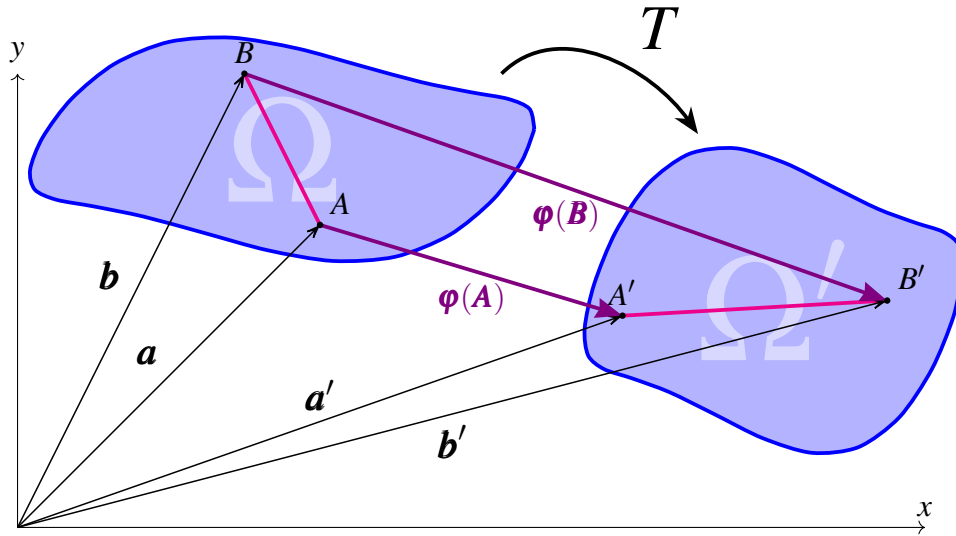
Nesse sentido, são duas as possibilidades:

1. As distâncias entre os pontos permanecem a mesmas. Nesse caso, podemos dizer que a transformação é uma translação<sup>5</sup>, e que o corpo não sofreu de deformação, pois sua geometria foi conservada. Em termos matemáticos,

$$\|T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega. \quad (16)$$

<sup>5</sup> Essa transformação também é uma isomeria, pois preserva a métrica do espaço, ou seja, o produto interno, de forma que  $T(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) \cdot T(\mathbf{b})$ .

Figura 3 – Função de deslocamento sobre a região de um sólido



2. As distâncias entre os pontos não se conservam. Quando isso ocorre, a geometria do corpo é alterada, e podemos dizer que houve deformação <sup>6</sup>. Em termos matemáticos, podemos dizer que

$$\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega : \|T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{b})\| \neq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|. \quad (17)$$

A deformação normal é o alongamento ou encurtamento sofrido pelas linhas entre os pontos do corpo, de forma que é descrita entre a variação do comprimento do segmentos e o comprimento original, ou seja, a variação relativa do comprimento. Como deformação geralmente varia ao longo do sólido, podemos descrevê-la observado seus efeitos sobre um elemento infinitesimal, e, similarmente à tensão, descrevendo um tensor de segunda ordem, com componentes normais e cisalhantes. (figura 4) (POPOV, 1990, pág. 143).

A figura 4a mostra um elemento infinitesimal ( $dx \times dy$ ), em que o segmento  $AD$  sofreu tanto uma translação quanto uma deformação, dados pelo campo de deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}$ , de modo a se tornar  $A'D'$ . A deformação normal desse segmento é dado por

$$\varepsilon_x = \frac{\|A'D'\| - \|AD\|}{\|AD\|}. \quad (18)$$

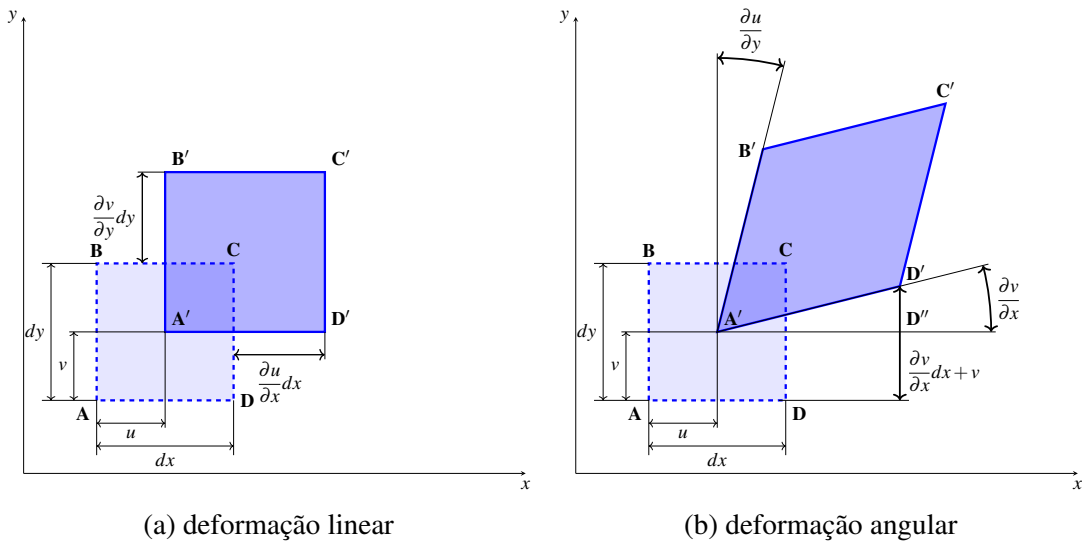
O comprimento do segmento antes da deformação  $AD$  é o próprio infinitesimal  $dx$ , já o deformado, é dado pela diferença das posições dos pontos deslocados  $\|A'D'\|$ , em termos do campo de deslocamento, é o mesmo que

$$\|A'D'\| = (D_x + u(D_x)) - (A_x + u(A_x)), \quad (19)$$

em que o subscrito  $x$  denota a respectiva componente da posição do ponto.

<sup>6</sup> Deformação e traslação não são excludentes. Um corpo pode deformar e também trasladar.

Figura 4 – Deformação de um elemento quadrado infinitesimal



Como  $D_x = A_x + dx$ , podemos expandir a função  $u$  ao redor de  $A_x$ , obtendo que<sup>7</sup>

$$u(D_x) = u(A_x + dx) = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (20)$$

Portanto,

$$||A'D'|| - ||AD|| = (D_x + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - A_x) - (D_x - A_x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (21)$$

em que  $A_x$  representa a projeção do ponto  $A$  em  $x$ . Agora, substituindo essa expressão na equação 18, temos a definição da deformação normal na direção de  $x$ , em que

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (22)$$

O mesmo procedimento pode ser feito tanto na direção de  $y$ , com o segmento  $AB$ , quanto na direção de  $z$ , assumindo um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura 2 do estado de tensão, obtendo-se, assim, todas as definições básicas de deformação normal (POPOV, 1990):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (23)$$

Na figura 4b, ocorre a deformação por cisalhamento, em que os segmentos  $AD$  e  $AB$  são, além de transladados, rotacionados em torno de  $A'$ , de modo a distorcer a geometria do elemento. Agora, a deformação ocorre tanto na direção em  $x$ , quanto em  $y$ , e é definida pela alteração do ângulo reto  $\angle BAD$ , determinada, em termos do campo de deslocamentos (tal como na deformação normal) analisando o triângulo  $A'D'D''$ .

<sup>7</sup> Os termos  $O(3)$  da expansão são desprezados pois a diferença entre os pontos é infinitesimal, logo  $dx \gg dx^2$ .

A função  $v$ , quando variada em  $x$  da posição de  $A$  até  $D$ , descreve o deslocamento dos pontos da face inferior do elemento infinitesimal na direção de  $y$ , ou seja, a hipotenusa do triângulo  $A'D'D''$ . A inclinação, portanto, dessa reta é própria derivada de  $v$  na direção  $x$ , ou seja,

$$\angle D'A'D'' = \tan \frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}.^8 \quad (24)$$

Outro modo de se obter a mesma expressão é aplicar a definição trigonométrica da tangente sobre o triângulo  $A'D'D''$ , de forma que, em suma,

$$|A'D''| = \sqrt{dx^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}, \text{ Teorema de Pitágoras} \quad (25)$$

$$= \sqrt{dx^2}, \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2 \ll dx, \quad (26)$$

$$|A'D''| = dx, \quad (27)$$

$$\tan \angle D'A'D'' = \frac{|D'D''|}{|A'D''|}, \quad (28)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} dx \frac{1}{dx}, \quad (29)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (30)$$

$$(31)$$

O mesmo pode ser feito na direção de  $y$ , para encontrar a inclinação do segmento  $A'B'$ , como também para  $z$ , considerando um elemento infinitesimal cúbico.

Portanto, a deformação cisalhante do elemento infinitesimal é dada, em termos do deslocamento, por

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (32)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (33)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (34)$$

$$(35)$$

Por convenção<sup>9</sup>,  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i \neq j$ . (ROYLANCE, 1995)

<sup>8</sup> É essa aproximação é devida pois para ângulos suficientemente pequenos:  $\tan \theta = \theta$ , o que pode ser verificado expandindo a série de Taylor ao redor de  $x = 0$ .

<sup>9</sup> Essa convenção não é mero simbolismo, mas faz com que o tensor de deformações tenha propriedades interessantes; é possível, porém, intuir uma razão para tanto, observado que, para um mesmo elemento, a deformação por cisalhamento em  $x$  já tem a parcela da deformação na direção de  $y$ , e por conta disso, são divididas. (POPOV, 1990)

O tensor de deformações é

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Tal como o tensor de tensões, o tensor de deformações é simétrico, e, portanto, só possui seis componentes independentes. Na notação de Voigt, de acordo com Roylance (1995),

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^t \quad (37)$$

### 2.3 A LEI DE HOOKE

Em corpos sólidos, a deformação está relacionada diretamente com a tensão em seu interior, de modo que se possa, dentro de certas condições, descrever uma transformação linear entre elas. Essa transformação é nomeada *Lei de Hooke*, e, utilizando a notação de Voigt, é descrita por

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}. \quad (38)$$

em que  $[\mathbf{C}]$  é denominada *matriz constitutiva*<sup>10</sup>, e é definida em termos das características do material do corpo, tais como Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson.

#### 2.3.1 A Lei de Hooke Uniaxial

Sejam o quadrilátero  $\mathcal{B}$ , um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento  $L$ , engastado em sua face esquerda, e de seção transversal  $A$ . Seja também  $F$ , uma força constante que atua sobre a face direita de  $\mathcal{B}$ , na direção de  $x$ , que a deforma em  $\mathcal{B}'$  até um comprimento  $L + \Delta L$ , tal como na figura 5a.

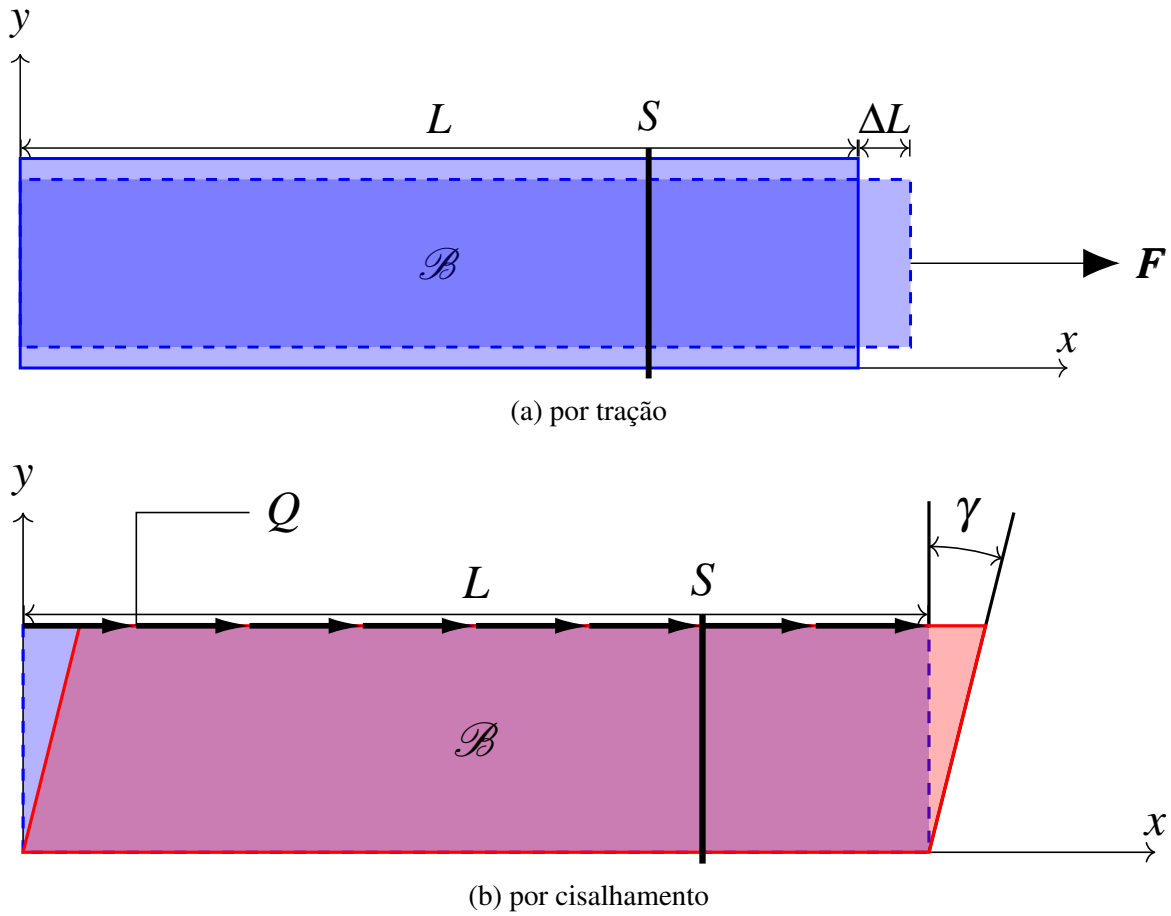
A tensão desenvolvida em um ponto de uma seção transversal  $S$  de  $\mathcal{B}$ , perpendicular à força  $\vec{F}$ , pode ser descrita em termos do módulo de elasticidade,  $E$  (também denominado Módulo de Young), que é uma característica intrínseca do material de  $\mathcal{B}$ , e da deformação,  $\varepsilon_x$ , atuando na mesma direção da força. Essa relação, denominada *Lei de Hooke Uniaxial*, é linear da forma

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (39)$$

A unidade de  $E$  é a mesma de  $\sigma_x$ , o que é coerente, pois  $\varepsilon_x$  é adimensional, ou seja, o módulo de elasticidade é medido, no SI, em Pascal.

<sup>10</sup> A matriz constitutiva é uma forma de notação abreviada para descrever essa relação. Da mesma forma que o tensor de tensões é abreviado por um vetor na notação de Voigt, devido sua simetria, a matriz constitutiva é a abreviação de do tensor de elasticidade, um tensor de quarta ordem que mapeia o espaço das deformações no das tensões.

Figura 5 – quadrilátero deformado



Essa relação desconsidera outros efeitos de deformação no interior do sólido, como a deformação transversal,  $\epsilon_y$  (que pode ser observada como o encurtamento da altura da barra na figura 5a), e a por cisalhamento,  $\gamma_{xy}$ .<sup>11</sup>

### 2.3.2 A Lei de Hooke em Cisalhamento

Seja um quadrilátero  $\mathcal{B}$ , um corpo sólido, homogêneo, em equilíbrio, de comprimento  $L$ , engastado em sua face inferior, e de seção transversal  $S$ , e seja  $Q$ , uma carregamento constante que atua sobre a face superior de  $\mathcal{B}$ , tangencialmente, na direção de  $x$ , que a deforma em  $\mathcal{B}'$ , inclinando-a, até um ângulo  $\gamma$ , tal como na figura 5b.

A tensão desenvolvida em uma seção  $S$  de  $\mathcal{B}$ , paralela ao carregamento de  $Q$ , pode ser descrita em termos do módulo de cisalhamento,  $G$ , que é uma característica intrínseca do material de  $\mathcal{B}$ , e da deformação angular,  $\gamma$ , atuando na inclinação das seções verticais. Essa relação, denominada *Lei de Hooke em Cisalhamento*, é linear da forma

<sup>11</sup> O limite de elasticidade do material é determinado experimentalmente, observando como se deforma sobre carregamentos controlados, determinando a região de deformações em que o material preserva-se na Lei de Hooke, ou seja, mantém uma relação linear entre deformação e tensão, e ao ser aliviado dos carregamentos externos, volta à geometria original.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \implies \tau_{xy} = 2G\epsilon_{xy}. \quad (40)$$

O módulo de cisalhamento tem a mesma unidade de tensão, e, assim como o módulo de Young ( $\gamma$  é adimensional), não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito.

### 2.3.3 O Coeficiente de Poisson

Na deformação uniaxial de um corpo sólido, tal como na figura 5a, é razoável que o corpo também se deforme nas direções transversais, de forma que existe, dentro de determinados limites do regime elástico, uma relação entre essas deformações. Observa-se, por meio da experiência prática, que a deformação transversal geralmente é negativa, o corpo tende a se contrair quando submetido a uma deformação axial positiva. Se o corpo se deforma ao longo de  $x$  um  $\epsilon_x > 0$ , ele se contrai em  $y$ , ou seja, desenvolve uma deformação  $\epsilon_y < 0$ , de forma que, de acordo com Lubliner (2017), para deformação axial

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}, \quad (41)$$

em que  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson, a razão entre a deformação transversal e a deformação axial.

O coeficiente de Poisson é uma característica intrínseca do material, e, assim como os módulos de Young e de cisalhamento, não depende da geometria do corpo, mas do material de que é feito (dentre outras condições mais específicas), entretanto, pode variar conforme a direção da deformação, para materiais que não são isotrópicos, diferentemente, de  $\mathcal{B}$ . Aqui  $\nu$  é tratado como constante.

### 2.3.4 O Princípio da Sobreposição & A Lei de Hooke Generalizada

*O princípio da sobreposição* permite a aditividade de efeitos (leia-se, deformações) na presença de múltiplas causa (leia-se, tensões). Invocando esse princípio, nós podemos expressar o total de deformação percebida pelo corpo como a soma de todas as deformações devidas aos componentes individuais de tensão presentes no corpo. (LUBLINER, 2017, pág. 252, tradução livre)

Esse princípio é válido quando, de acordo com (LUBLINER, 2017):

1. as equações de equilíbrio são lineares nas tensões;

Observando a equação 11, é possível notar que, dado dois conjuntos de tensões que satisfazem as equações de equilíbrio, a soma desses dois conjuntos também o faz, ou seja, as equações de equilíbrio são lineares nas tensões. Em termos matemáticos, é o mesmo que demonstrar a linearidade do operador divergência ( $\nabla \cdot (*)$ ).

2. as relações entre deformação e deslocamento são lineares;



Tal como no item anterior, é possível demonstrar essa propriedade tomando dos conjuntos de deslocamentos arbitrários, que, quando somados, levam um conjunto de deformações que equivale ao somatório das deformações de cada conjunto de deslocamentos individualmente.

3. as relações entre tensão e deformação são lineares.

Observando as relações definidas para o módulo de Young, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, fica evidente que todas são lineares.

Assumindo agora que sobre um elemento infinitesimal cúbico, tal qual a figura 2, atuam todas as componentes do tensor de tensões, de modo que, utilizando as relações entre deformação e tensão, das equações 39 e 40, como também a relação entre deformações, equação 41, é possível determinar o efeito de deformação causado por cada componente de tensão, tal que, devido à tensão  $\sigma_x$ , o elemento infinitesimal percebe as deformações

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (42)$$

As outras tensões,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , se comportam de forma análoga, de modo que

$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (43)$$

$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}. \quad (44)$$

As tensões de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , por sua vez, causam as deformações angulares,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (45)$$

Sobrepondo as deformações axiais para cada eixo, e as deformações angulares, é possível determinar as relações entre todas as tensões e todas as deformações, denominada *lei de Hooke generalizada*:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (47)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}, \quad (48)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (49)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (50)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (51)$$

O módulo de cisalhamento pode ser determinado em termos da razão de Poisson e do módulo de Young, de modo que<sup>12</sup>

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (52)$$

Utilizando a notação de Voigt, a Lei de Hooke generalizada pode ser em forma compacta como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

Invertendo esse sistema, obtemos a matriz constitutiva da equação 38,

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[C]} \{\varepsilon\} \quad (54)$$

Para que essa matriz exista, é necessário que  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ .<sup>13</sup>

### 2.3.5 Estado Plano de Deformação e de Tensão

Quando se analisa um problema plano, é possível simplificar as relações descritas pela matriz  $[C]$  em dois casos, observando a rigidez do corpo nas direção transversal ao plano de análise.

O Estado Plano de Tensão (EPT) ocorre quando a rigidez do corpo na direção transversal é muito baixa (como uma chapa ou uma placa), fazendo com que a tensão nessa direção possa ser negligenciada, ou seja,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a,<sup>14</sup>

<sup>12</sup> A demonstração dessa relação se utiliza das fórmulas de rotação dos tensores de deformações e de tensores, que não são tratadas aqui.

<sup>13</sup> Materiais com  $\nu = 0.5$  são chamados de incompressíveis, pois não sofrem deformações volumétricas.

<sup>14</sup> Tanto a matriz constitutiva do EPT e quando do EPD são facilmente deduzidas da lei de Hooke generalizada, apenas atribuindo os valores nulos e trabalhando com as inversas da matriz  $[C]$ .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (55)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (56)$$

$\varepsilon_z$  passou a ser uma variável dependente, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações. (ZIENKIEWICZ, 2000, pág. 90)

As Relações que definem a matriz constitutiva para o estado plano de tensão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (57)$$

O Estado de Plano de Deformação (EPD), por sua vez, ocorre quando o corpo é muito rígido na direção transversal (como uma barragem ou um muro), fazendo com que a deformação nessa direção possa ser negligenciada, ou seja,  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Nesse caso, a lei de Hooke generalizada se reduz a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (58)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (59)$$

$\gamma_{xz}$  passou a ser uma variável dependente, pois é determinada, totalmente, pelas outras deformações. (ZIENKIEWICZ, 2000, pág. 91)

## 2.4 TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA: A TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES

A Teoria da Energia de Distorção máxima propõe que:

o escoamento em um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material ultrapassa a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples. (HIBBELER, 2010)

Essa proposição surge da observação que materiais dúcteis sob carregamentos hidrostáticos exibem uma resistência muito maior que em simples ensaios de tração uniaxial, e que,

portanto, o escoamento não é um fenômeno compreendido, simplesmente, pela tração ou compressão, mas, majoritariamente, pela distorção do material. (HIBBELER, 2010)

A energia por unidade de volume, devida à deformação do material, é definida por um produto da tensão pela deformação. Em um elemento orientado sob tensões principais, de acordo com (HIBBELER, 2010)

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (60)$$

em que  $\mathcal{U}$  denota a energia por unidade de volume,  $\sigma_i$  as tensões principais.

Substituindo as deformações pelas tensões, utilizando a lei de Hooke generalizada, equação 51, temos que

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (61)$$

Essa energia pode ser compreendida como a soma de duas parcelas: a energia de deformação volumétrica,  $u_v$ , e a energia de deformação por cisalhamento,  $u_d$ . A energia de deformação volumétrica é a energia de deformação que tende a alterar o volume do elemento, sem distorcer sua geometria, ou seja, a energia de deformação devido à tensão média das tensões principais. Substituindo, então, as tensões principais pela tensão média na equação anterior, temos que

$$\mathcal{U}_v = \frac{3\bar{\sigma}^2}{2E}(1 - 2\nu), \quad (62)$$

em que  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  é a tensão média.

A energia de distorção, portanto, é a diferença entre a energia total e a energia volumétrica, de modo que

$$\mathcal{U}_d = \mathcal{U} - \mathcal{U}_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]. \quad (63)$$

Fazendo  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , temos a energia de deformação para o caso de tração uniaxial, de modo que

$$\mathcal{U} = \frac{1 + \nu}{3} \sigma_e^2, \quad (64)$$

em que  $\sigma_e$  é a tensão admissível do material num ensaio de tração. (HIBBELER, 2010)

Portanto, de acordo com o princípio da energia de distorção máxima, o escoamento ocorre quando a energia de distorção ultrapassa a energia de distorção de um ensaio de tração simples, ou seja, quando (HIBBELER, 2010)

$$\sigma_e \leq \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}. \quad (65)$$

O lado direito dessa inequação pode ser interpretado como uma tensão equivalente ou efetiva do estado de tensão dado pelas tensões principais. De acordo com (HIBBELER, 2010), essa tensão é denominada *tensão equivalente de von Mises*, definida por

$$\sigma_{eq} = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}. \quad (66)$$

Em termos de um sistema  $xyz$ , e utilizando todas as componentes do tensor de tensões, a tensão equivalente de von Mises pode ser expressa por

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (67)$$

### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

"As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality." (Albert Einstein)

O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento numérico utilizada para encontrar soluções de equações que modelam a natureza. É amplamente utilizado na simulação de fenômenos físicos, como mecânica dos sólidos, transferência de calor, eletromagnetismo e muitos outros. (OñATE, 2009)

A abordagem do MEF envolve a subdivisão de uma estrutura ou domínio contínuo em pequenos elementos geométricos finitos, definidos por nós, caracterizados por suas propriedades físicas e geométricas, em que são aplicadas as equações governantes do problema, cujo campo é aproximado, dentro de cada um, por meio de funções de interpolação, que vão discretizar o campo sobre os valores nodais. Em seguida, essas equações aproximadas são montadas, justapondo os elementos, em um sistema global, levando em consideração as condições de contorno e as restrições do problema. (QUEK; LIU, 2003)

Em suma, o método de elementos finitos segue o seguinte procedimento, de acordo com Oñate (2009):

1. definição do domínio, e das condições de contorno;
2. discretização do domínio em uma malha formada por nós que constituem os elementos;
3. aplicação das equações de governo sobre cada elemento, formando um sistema local de rigidez;
4. montagem dessas equações em um único grande sistema global;
5. resolução do sistema, encontrando os valores nodais do campo.

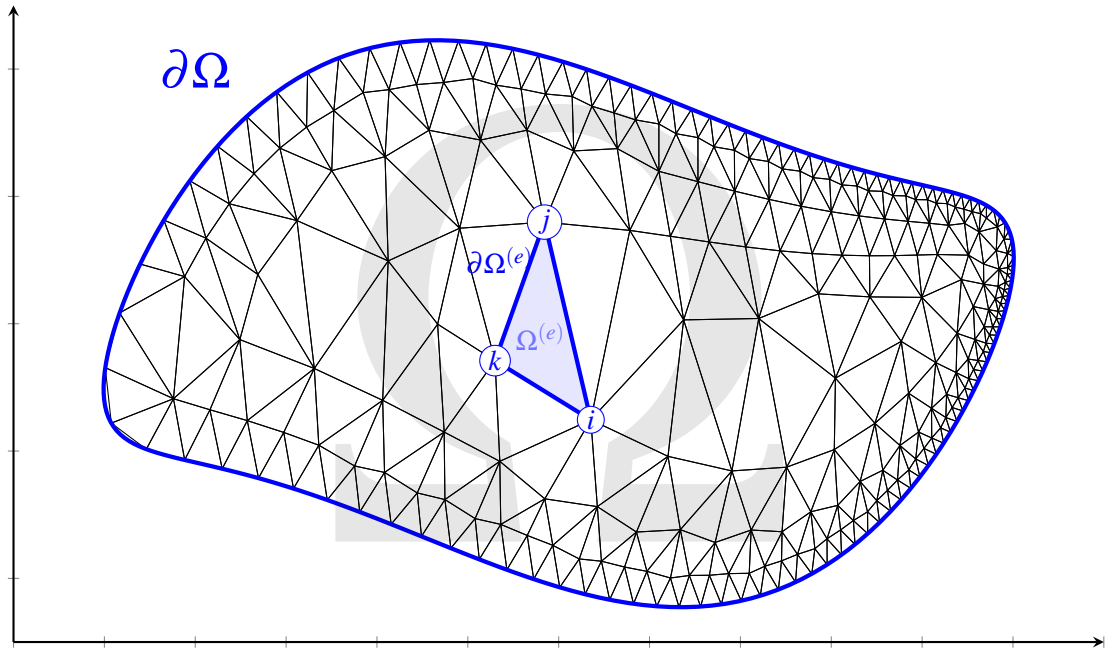
Na análise estrutural aqui abordada, o objetivo da aplicação do MEF é determinar o deslocamento de um sólido em equilíbrio sujeito a carregamentos e restrições, dentro do regime elástico modelado pela Lei de Hooke, utilizando funções de interpolações lineares em elementos triangulares (na análise 2D: EPT ou EPD) e tetraédricos (na análise 3D). Para tanto, resolver um sistema da forma

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}, \quad (68)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais, e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais.

Deste modo, convém definir os termos e símbolos dessas entidades matemáticas. Seja um corpo  $\mathcal{B}$ , definido por uma geometria sobre o domínio  $\Omega$ , que é repartido em pequenos

Figura 6 – Domínio discretizado em elementos triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

elementos, de domínio  $\Omega^{(e)}$ , cuja fronteira se denomina  $\partial\Omega^{(e)}$ . A figura 6 mostra um domínio bidimensional  $\Omega$  discretizado em elementos triangulares, cujos nós são representados por  $i, j$  e  $k$ . Quando uma entidade é definida sobre um elemento, ela é representada por um superescrito  $(e)$ , como por exemplo o deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}^{(e)}$  sobre o elemento  $e$ .

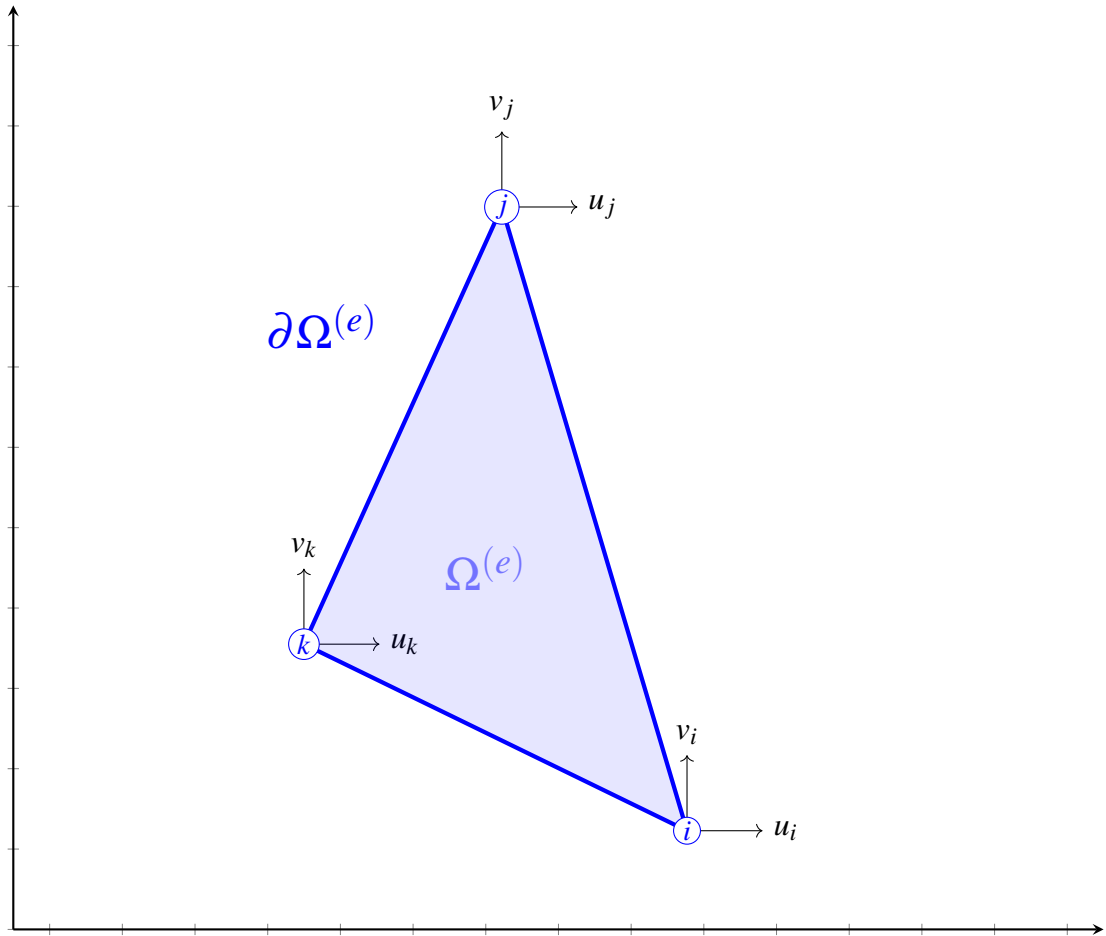
Segundo Logan (2022), neste capítulo aborda-se como

1. selecionar as funções de interpolação;
2. definir as relações de tensão-deformação-deslocamento;
3. derivar a forma da matriz de rigidez;
4. montar o sistema global e introduzir as condições de contorno.

### 3.1 AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

As funções de interpolação são funções matemáticas que aproximam o campo de interesse, neste caso o deslocamento, dentro de um elemento, por meio de uma combinação linear de funções conhecidas, definidas sobre os nós do elemento. Essas funções são definidas, e depois justapostas, de modo que o campo seja contínuo. O objetivo dessa ferramenta é alterar os valores incógnitos do campo de contínuos para discretos, para que o deslocamento seja bem definido pelo seu valor sobre a posição cada nó, e que, por sobre o domínio de cada elemento, o campo seja interpolado. Esses valores discretos desconhecidos do campo nos nós, em que o campo tem "liberdade" pra variar, denominam-se *graus de liberdade*. (LOGAN, 2022)

Figura 7 – Um triângulo de deformações constantes (CST).



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O CST, por exemplo, tem seis graus de liberdade, uma vez que para cada nó, o vetor de deslocamento têm três componentes. Os problemas abordados aqui têm sempre três graus de liberdade por nó.

Define-se, então, a função de deslocamento sobre um elemento, representado pela figura 7, assim como a proposta linear de interpolação,

$$\boldsymbol{\varphi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ b_1 + b_2x + b_3y \end{Bmatrix}^{(e)}. \quad (69)$$

Nesse sentido, bidimensional,  $\boldsymbol{\varphi}$  é uma função vetorial de campo que mapeia cada ponto do sólido para seu respectivo deslocamento nos eixos do sistema  $xy$  ( $u$  e  $v$  respectivamente).

Para determinar as constantes  $a$  e  $b$ , e termos dos deslocamentos nodais basta aplicar a condição de que em cada nó a função deve assumir o valor do deslocamento respectivo. Isto é, analisando somente a componente  $x$ , ou seja,  $u(x,y)$ , temos que



$$u(x_i, y_i) = u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i, \quad (70)$$

$$u(x_j, y_j) = u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j, \quad (71)$$

$$u(x_k, y_k) = u_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k, \quad (72)$$

em que  $u_i$  é o valor do deslocamento nodais  $i$ , assim como  $x_i$  e  $y_i$  é sua posição sobre o domínio  $\Omega$ .

Reescrevendo esse sistema na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

sendo que<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}, \quad (74)$$

em que  $A$  é área do elemento triangular.<sup>2</sup>

Deste modo, a função de interpolação para  $u(x, y)$  pode ser descrita em termos dos deslocamentos nodais na forma, utilizando o sistema 73,

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}. \quad (75)$$

Expandido essas expressões, multiplicando as matrizes e rearranjado os termos, temos que

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] u_i + \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] u_j + \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] u_k. \quad (76)$$

É possível, também, definir a função de interpolação para a componente  $v(x, y)$ , de modo análogo, obtendo, apenas substituindo a função  $u$  por  $v$  nas equações anteriores, que as mesmas relações de interpolações são válidas também para a outra componente de  $\boldsymbol{\varphi}$ . Então,

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] v_i + \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] v_j + \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] v_k. \quad (77)$$

<sup>1</sup> É fácil demonstrar que esse sistema sempre é possível e determinado apenas observando o fato de que as posições dos nós são distintas e não colineares, a final, os elementos são triangulares.

<sup>2</sup> Essa forma de escrever a inversa de  $\mathbf{X}$  é interessante pois simplifica os termos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pelo determinante  $2A$ .

Para simplificar a notação das equações 76 e 77, define-se funções  $N$  da forma

$$N_i = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y], \quad (78)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y], \quad (79)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y]. \quad (80)$$

Por fim,  $\boldsymbol{\varphi}$  pode ser reescrito na forma matricial, em termos dessas funções  $N$  e dos deslocamentos nodais  $u$  e  $v$ , como

$$\boldsymbol{\varphi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (81)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matrix de funções de interpolação, e  $\mathbf{U}^{(e)}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

### 3.2 AS RELAÇÕES DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

No caso bidimensional, o vetor de deformação, na notação de Voigt, é dado por, conforme definido no capítulo anterior,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Aplicando nessas derivadas parciais as funções de interpolação de  $\boldsymbol{\varphi}$ , das equações 76 e 77, temos que, conforme Logan (2022),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} [\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k], \quad (83)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} [\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_k v_k], \quad (84)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} [\gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_k u_k + \beta_i v_i + \beta_j v_j + \beta_k v_k]. \quad (85)$$

Utilizando essas equações, é possível reescrever o vetor de deformação  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  em termos dos coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$ , como também do vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\{\mathbf{U}\}^{(e)}$ , na forma

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \mathbf{B} \mathbf{U}^{(e)}. \quad (86)$$

A matrix  $\mathbf{B}$  é uma função das coordenadas dos nós do elemento, e relaciona o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\mathbf{U}^{(e)}$  com o vetor de deformações  $\{\varepsilon\}$ , assim como é constante ao longo de todo o elemento, o que é devido pela escolha de funções lineares de interpolação. Por causa dessa propriedade, esse elemento é denominado triângulo de deformações constantes, ou CST (*Constant Strain Triangle*).

Por fim, ao passo que a relação entre deformação e tensão é dada pela Lei de Hooke generalizada, na forma da matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  (por conveniência, a matriz constitutiva será expressa sem a notação usual  $[C]$ ), expressar a relação entre tensão e deslocamento, ou tensão-Deformação-Deslocamento, é simplesmente uma questão de multiplicar a matriz constitutiva pela matriz  $\mathbf{B}$ , obtendo assim a relação

$$\{\sigma\} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U}^{(e)}. \quad (87)$$

### 3.3 A MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL

A matriz de rigidez local é uma matriz quadrada, simétrica, que relaciona o vetor de forças nodais  $\mathbf{F}^{(e)}$  com o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}^{(e)}$ , na forma

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (88)$$

cujas derivação é feita aplicando a equação de governo, o equilíbrio estático nesse caso, sobre o elemento, utilizando as funções de interpolação para o campo de deslocamentos. (LOGAN, 2022)

$\mathbf{F}^{(e)}$  é um vetor que armazena as forças aplicadas sobre os nós do elemento, analogamente a  $\mathbf{U}^{(e)}$  que armazena os deslocamentos nodais, e tem a forma

$$\mathbf{F}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_j} \\ f_{x_j} \\ f_{y_j} \\ f_{x_k} \\ f_{y_k} \end{Bmatrix}. \quad (89)$$

Um dos métodos para derivar essa matriz é utilizar o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, que pode ser enunciado como:

Se um corpo deformável em equilíbrio é submetido a deslocamentos virtuais arbitrários (imaginários) associados a uma deformação compatível do corpo, o trabalho virtual das forças externas no corpo é igual à energia virtual de deformação das tensões internas. (LOGAN, 2022, pág. 876, tradução livre)

Nesse contexto, o trabalho virtual interno é causado por uma deformação do próprio corpo, denotada  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , enquanto o trabalho virtual externo, por sua vez, é causado diretamente por um deslocamento virtual das forças que atuam sobre as fronteiras do corpo, denotado  $\delta \mathbf{u}$ . Em um corpo elástico, modelado pela Lei de Hooke, o trabalho virtual interno pode ser descrito em termos do deslocamento, como a energia armazenada na forma elástica, a fim de desenvolver as equações de equilíbrio estático apresentadas a seguir.<sup>3</sup>

Seja um elemento triangular, como da figura 8, que sofre um deslocamento virtual  $\delta \mathbf{U}^{(e)}$ . De acordo com Zienkiewicz (2000), o trabalho interno do elemento é dado por<sup>4</sup>

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega^{(e)}} \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t \{\boldsymbol{\sigma}\} dV, \quad (90)$$

Utilizando as relações de tensão-deformação-deslocamento, descritas nas equações 86 e 87, temos que<sup>5</sup>

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B} \delta \mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U}^{(e)} dV \implies \mathcal{U} = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)}. \quad (91)$$

O trabalho desenvolvido pelas forças externas é dado, também de acordo com Zienkiewicz (2000), pelo produto dos deslocamento nodais e das forças nodais, na forma

$$\mathcal{W} = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)}. \quad (92)$$

Igualando as duas parcelas de trabalho, temos que

$$\mathcal{U} = \mathcal{W} \implies \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)} = \delta (\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)}. \quad (93)$$

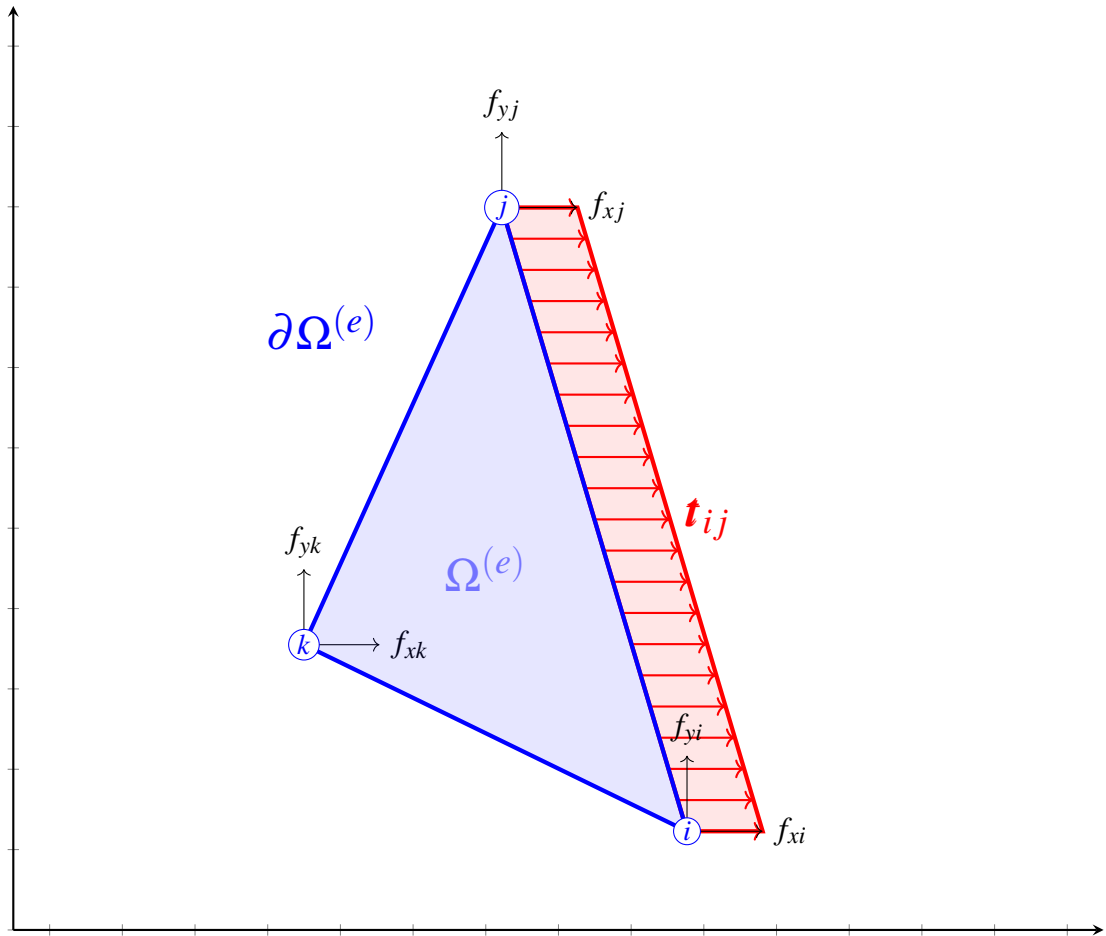
Portanto,

<sup>3</sup> A notação  $\delta$  se refere a um variacional, que representa uma variação infinitesimal sobre o todo o contínuo da função, de modo que seja nulo na região em que são aplicadas as condições de contorno. O cálculo variacional, entretanto, não é abordado diretamente nesta monografia.

<sup>4</sup> Poder escrever a energia interna desta forma simples é devido à escolha de que, na notação de Voigt do tensor de deformação, foi utilizado a convenção de  $\gamma = 2\varepsilon$ .

<sup>5</sup> Utilizando também a propriedade de transposição do produto de matrizes,  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ .

Figura 8 – Um triângulo de deformações constantes sob carregamentos (CST) sob carregamentos uniformes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^{(e)}. \quad (94)$$

Comparando com a forma da equação 68, fica evidente que a matriz de rigidez local é dada por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (95)$$

O elemento tratado aqui é o CST, portanto, a matriz  $\mathbf{B}$  é constante em todo o domínio  $\Omega^{(e)}$ , como também é constante a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ . A integral, portanto, não precisa ser computada em um sistema local, pois todos os termos que a compõe são constantes. Logo, a matriz de rigidez local pode ser simplificada ainda mais, tornando-se, de acordo com Logan (2022)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} \int_{\Omega^{(e)}} dV = \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} V, \quad (96)$$

em que  $V$  é o volume do elemento, definido, no caso bidimensional, por  $V = Ad$ , em que  $d$  é a espessura.

Essa matriz pode ser lida como uma lista de causa e efeito. Enquanto a linha da matriz representa onde que o efeito do deslocamento é aplicado, a força no caso, a coluna informa qual é o deslocamento, o grau de liberdade, que o causa. (LOGAN, 2022)

Outra forma de derivar essa relação diretamente da equação de equilíbrio estático é por meio do método de Galerkin, em que as bases da função de interpolação são as mesmas da função de ponderação, utilizando a chamada formulação fraca da equação de governo. Esse método leva à mesma formulação mostrada acima.

Vale ressaltar que não foi preciso definir um sistema local de coordenadas para derivar essas relações, uma vez que o elemento tratado aqui, como também o tetraedro (tratado mais adiante), tem funções de interpolação simples o suficiente que um sistema orientado a cada elemento não é necessário. Elementos mais sofisticados necessitam, por uma questão de manipulação algébrica, de um sistema de referência local. Esses elementos não são tratados aqui.

### 3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para cada elemento do domínio é realizado o procedimento descrito na seção anterior, de encontrar a matriz de rigidez local que descreve o equilíbrio do elemento em termos das forças externas e do campo de deslocamento sobre os nós. Para resolver o problema, encontrar os deslocamentos de todos os nós, é necessário justapor essas matrizes locais em uma matriz global, ou seja,

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)}. \quad (97)$$

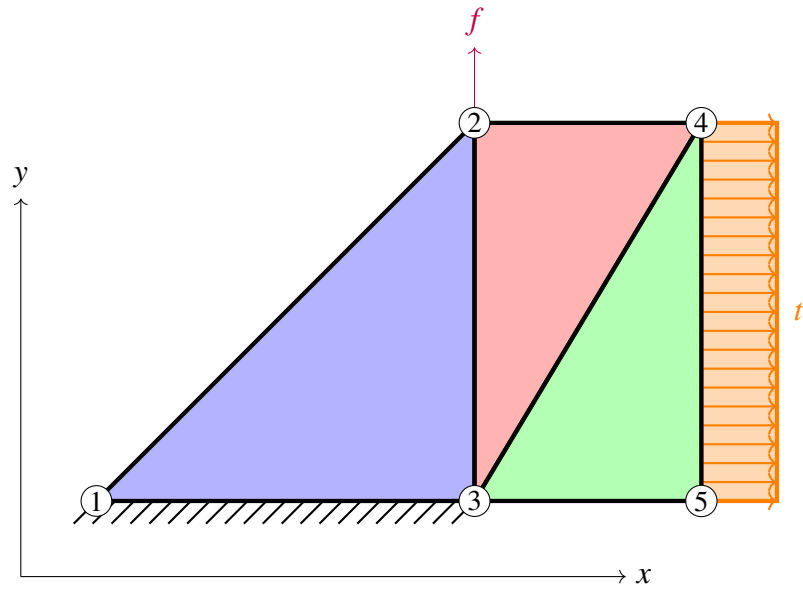
Nesse contexto,  $\Sigma$  representa, não uma soma ordinária, mas sim a sobreposição dos efeitos de rigidez sobre os nós. (LOGAN, 2022)

Em cada elemento, a matriz local de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  define a interação de forças e deslocamentos entre os graus de liberdade dos nós. Analisando a estrutura como um todo, cada nó pode pertencer a vários elementos, pois é assim que a malha é constituída. O efeito de rigidez, então, sobre cada nó é a soma dos efeitos de todos os elementos que o contém. Isso vale para os deslocamentos nodais, como para as forças nodais. O procedimento, portanto, de montagem da matriz global de rigidez é a soma das matrizes locais de rigidez sobre as posições dos graus de liberdade respectivos das matrizes locais (mapeamento local-global).

Seja um sólido  $\mathcal{B}$  discretizado por uma malha composta de cinco nós, formando três elementos, conforme a figura 9, engastado na superfície inferior do elemento azulado e sujeito a uma força  $f$  concentrada no nó 2, como também um carregamento distribuído  $t$  na superfície entre os nós 4 e 5.

As matrizes locais de rigidez desses elementos são quadradas  $6 \times 6$ , pois no CST existem três graus de liberdade, dois para cada nó, referente ao deslocamento nas direções de  $x$  e  $y$ . Os

Figura 9 – Uma estrutura discretizada em elementos CST.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

sistemas locais, então, para elemento da figura 9, têm a forma

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}^{(1)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (98)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}^{(2)} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (99)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}^{(3)} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x5} \\ f_{y5} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \iff \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (100)$$

A montagem do sistema global é somar essas matrizes de rigidez sobre os graus de liberdade. Observemos que o primeiro nó só faz parte de um elemento, o azul, portanto sua

rigidez só tem contribuição desse elemento; o nó 3, por sua vez, pertence aos três elementos (azul, vermelho e verde), e, portanto, seu termo de rigidez tem contribuição de todos eles. Realizando esse procedimento, é possível montar a matriz global de rigidez, utilizando, para tanto, a notação dos vetores de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  e de forças nodais  $\mathbf{F}$ .

A matriz de rigidez global é quadrada  $10 \times 10$ , pois existem cinco nós, com dois graus de liberdade cada, e é dada por



$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{55} + k_{33} + k_{11} & k_{56} + k_{34} + k_{12} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{65} + k_{43} + k_{21} & k_{66} + k_{44} + k_{22} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{55} + k_{33} & k_{56} + k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{65} + k_{43} & k_{66} + k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ f \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(101)

Nas duas primeiras linhas do sistema, que representam as forças nodais sobre o primeiro nó, é possível notar que somente os deslocamentos do elemento azulado que impactam diretamente. Nos graus de  $u_3$  e  $u_v$ , fica evidente que todos os elementos contribuem para as forças nodais do nó 3, conforme descrito anteriormente.

Um outro passo nessa montagem do sistema global é a aplicação das condições de contorno. As condições de contorno, tradas aqui, podem ser divididas em dois tipos:

1. de Dirichlet, ou de primeiro tipo, e
2. de Neumann, ou de segundo tipo.

As condições de Dirichlet são aquelas que definem valores da variável incógnita na fronteira do domínio. Já as de Neumann, são aquelas que definem valores de contorno sobre a derivada da variável incógnita nas fronteiras do domínio (MUFTU, 2022). Aqui, as condições de contorno de Dirichlet são restrições de deslocamento, enquanto as condições de Neumann são carregamentos aplicados sobre a estrutura.

As condições de contorno sobre os deslocamentos, então, dividem os graus de liberdade entre

1. livre; Quando não há informação prévia de seus valores, isto é, o campo pode variar livremente.
2. prescritos; prescritos quando há informação prévia de seus valores, e portanto, não podem variar. (LOGAN, 2022)

Um engaste, por exemplo, gera uma condições de contorno de Dirichlet, definindo graus de liberdade prescritos, pois impõe que o deslocamento naquela região do sólido é nulo. Um deslocamento conhecido, também o faz, determinando que os graus correspondentes recebam o valor deslocado.

O vetor de forças  $\mathbf{F}$  é nulo em regra sobre os graus de liberdade livres, pois essa entidade representa as forças externas sobre o elemento. Entretanto, como no MEF os deslocamentos são discretizados nos nós, o mesmo é feito com os carregamentos. Quando se aplicam condições de contorno de Neumann, os graus correspondentes devem receber forças nodais equivalentes, de forma que representem os carregamentos por forças externas concentradas nos nó. Pode-se encontrar as forças nodais equivalentes utilizando o mesmo método da seção anterior: o princípio dos trabalhos virtuais, fazendo com que o trabalho de carregamentos sobre a fronteira de um elemento  $\partial\Omega^{(e)}$ , causado por um deslocamento virtual  $\delta\mathbf{U}^{(e)}$ , seja igual ao trabalho da forças nodais equivalentes. Em termos matemáticos, de acordo com Zienkiewicz (2000),

$$\delta(\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)} = \int_{\partial\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{t} d\ell, \quad (102)$$

em que  $\mathbf{t}$  é o vetor do carregamento sobre a fronteira do elemento, na forma

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x(x,y) \\ t_y(x,y) \end{Bmatrix}. \quad (103)$$

e  $d\ell$  é o infinitesimal de área da fronteira do elemento.

Aqui os carregamentos são constantes sobre as fronteiras dos elementos, isto é, são carregamentos distribuídos e uniformes. Deste modo, a equação anterior pode ser simplificada para

$$\delta(\mathbf{U}^{(e)})^t \mathbf{F}^{(e)} = \delta \mathbf{U}^{(e)} \int_{\partial\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^t d\ell \mathbf{t}. \quad (104)$$

Portanto, as forças nodais equivalentes, devidas a carregamentos uniformes sobre a fronteira do elemento, é dada por

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_{\partial\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^t d\ell \mathbf{t}. \quad (105)$$

No elemento CST, pela simplicidade das funções de interpolação, é possível realizar essa integração analiticamente. A solução mostra que o carregamento uniforme sobre a fronteira do elemento é equivalente à distribuição dessa carga duas forças nodais iguais, agindo nas extremidades da face em que atua o carregamento, ou seja, de acordo com (OñATE, 2009),

$$\mathbf{F}_t^{(e)} = \frac{1}{2} l^{(e)} \mathbf{t} \quad (106)$$

em que  $\mathbf{F}_t^{(e)}$  são as forças equivalentes que compreendem a fronteira em que o carregamento  $\mathbf{t}$  é aplicado,  $l^{(e)}$  é o comprimento da fronteira do elemento, e  $d$  é a espessura do elemento.

Na equação 101, em que foi montado o sistema global, já foram aplicada essas condições de contorno. Pode-se notar que os deslocamentos vinculados à fronteira compostas pelos nós 1 e 3 são nulos, pois ali se faz um engaste. A força roxeada  $\mathbf{f}$ , agindo sobre o nó 2, faz-se presente diretamente no vetor de forças nodais, pois já é uma força concentrada em um nó. O carregamento alaranjado  $\mathbf{t}$ , por sua vez, foi decomposto em duas parcelas, para os nós 5 e 4, seguindo a expressão da equação anterior.

Vale ressaltar que nos graus de liberdade prescritos as forças nodais desconhecidas são as reações das estruturas, isto é, as forças de reação que as restrições fazem sobre o corpo que se mantenha em equilíbrio. Por conta disso, na equação 101, as forças sobre os graus prescritos foram denominadas  $R$ , de reação.

### 3.4.1 Solução direta do sistema global

Com a determinação da matriz de rigidez global, as condições de contorno devidamente expressas em graus prescritos e livres (sejam deslocamento ou carregamentos), é possível reescrever o sistema geral da equação 68 na forma, de acordo com Rao (2018),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LP} \\ \mathbf{K}_{PL} & \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_P \end{Bmatrix}, \quad (107)$$

Nessa expressão, os graus de liberdade subdividem os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  em dois cada um, em prescritos ( $\mathbf{U}_P$  e  $\mathbf{F}_P$ ), e livres ( $\mathbf{U}_L$  e  $\mathbf{F}_L$ ). A matriz de rigidez, então, é subdividida em quatro, que relacionam os graus de liberdade prescritos e livres dos deslocamentos e das forças nodais, respectivamente.

Portanto, o sistema global pode ser reescrito mais uma vez em termos dessas submatrizes, como

$$\mathbf{K}_{LL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{LP}\mathbf{U}_P = \mathbf{F}_L \quad (108)$$

$$\mathbf{K}_{PL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{PP}\mathbf{U}_P = \mathbf{F}_P. \quad (109)$$

Os valores conhecidos desse sistema são os deslocamentos sobre os graus prescritos  $\mathbf{U}_P$ , e as forças externas sobre o graus livres  $\mathbf{F}_L$ , a final, são as próprias condições de contorno definidas matematicamente pelo MEF. Logo, como o objetivo de resolver o sistema é encontrar os deslocamentos nodais, é possível isolar  $\mathbf{U}_L$  na primeira equação, ou seja,

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\mathbf{F}_L - \mathbf{K}_{LP}\mathbf{U}_P), \quad (110)$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{K}_{PL}\mathbf{U}_L + \mathbf{K}_{PP}\mathbf{U}_P. \quad (111)$$

a matriz  $\mathbf{K}_{LL}$  é quadrada, simétrica e sempre possui inversa quando o problema está estaticamente determinado. (RAO, 2018)

Aplicando essas expressões à equação 101, referente ao exemplo da figura 9, temos que

$$\begin{bmatrix} k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\ k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{55} + k_{33} & k_{56} + k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{61} & k_{62} & k_{65} + k_{43} & k_{66} + k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} \\ k_{41} & k_{42} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} \\ 0 & 0 & k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} \\ 0 & 0 & k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} \\ 0 & 0 & k_{51} & k_{52} \\ 0 & 0 & k_{61} & k_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \\ \frac{1}{2}\ell_{4-5}t \\ 0 \end{bmatrix}$$
  

$$\begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{53} + k_{31} & k_{54} + k_{32} & k_{35} + k_{13} & k_{36} + k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{63} + k_{41} & k_{64} + k_{42} & k_{45} + k_{23} & k_{46} + k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{bmatrix}$$

### 3.5 EXPRESSÕES PARA O TETRAEDRO LINEAR

As mesmas relações gerais da seção anterior podem ser utilizadas para derivar as expressões para o elemento tetraédrico linear (figura 10). A grande diferença é a passagem de uma modelagem bidimensional para uma tridimensional, o que implica em um aumento do número de graus de liberdade, e o abandono de EPT e EPD, como também a introdução de uma nova condição de contorno sobre superfícies propriamente. De modo similar ao CST, o tetraedro é definido por três nós, nomeados  $i$ ,  $j$ ,  $k$  e  $m$ , sobre os quais tanto o deslocamento é discretizado.

#### 3.5.1 As funções de interpolação

A primeira grande diferença é que agora a função de deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}^{(e)}$ , tem três componentes, na forma

$$\boldsymbol{\varphi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ b_1 + b_2x + b_3y + b_4z \\ c_1 + c_2x + c_3y + c_4z \end{Bmatrix}^{(e)}. \quad (112)$$

em que  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do deslocamento nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

A proposta de interpolação desses valores continua sendo linear, isto é, a função de deslocamento é interpolada por um polinômio de primeiro grau, que é definido pelos valores do campo nos nós do elemento. No caso do tetraedro linear, há quatro nós, e portanto, quatro valores de deslocamento. Para descrever esses coeficientes em termos do deslocamento discretizado nos nós, basta seguir o mesmo procedimento da seção anterior, e montar um sistema de equações, na forma

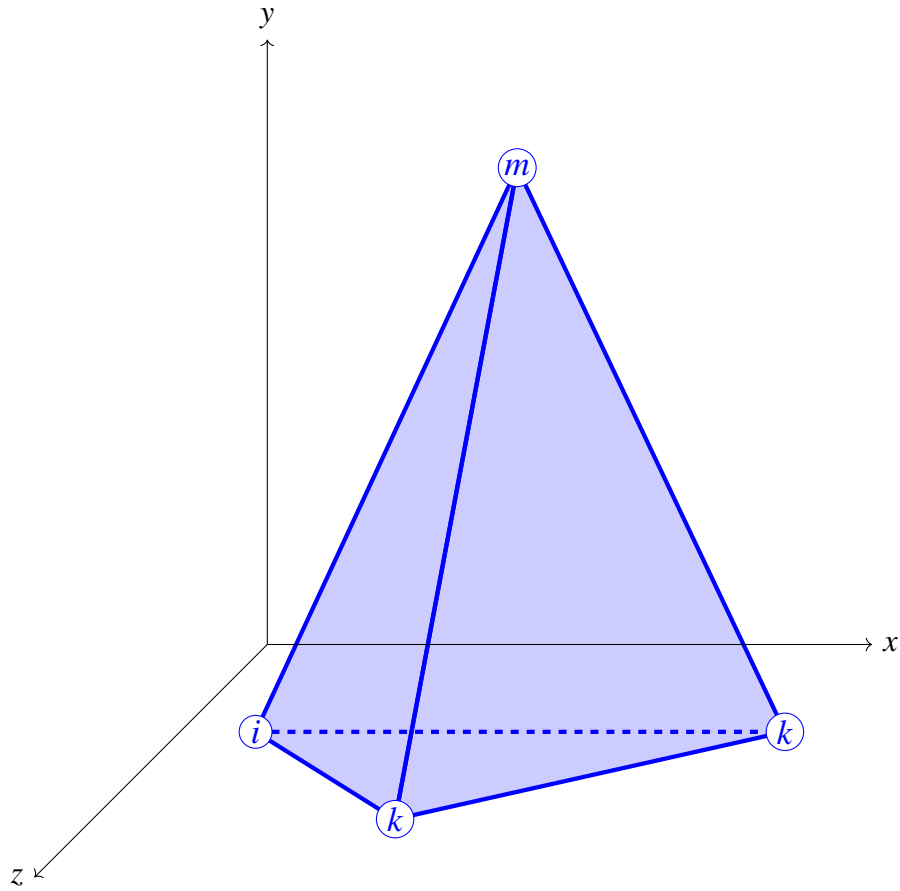
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (113)$$

Logo, os coeficientes são expressos por

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (114)$$

Portanto,

Figura 10 – Elemento tetraédrico



Fonte: Elaborado pelo autor (()).2022)

$$u(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (115)$$

em que  $V$  é o volume do tetraedro.

Expandindo os termos, temos que

$$u(x, y, z) = \frac{1}{6V} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z) u_1 + (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z) u_2 + (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z) u_3 + (\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z) u_4 \quad (116)$$

Desta forma, as funções de interpolação  $N$  têm a forma

$$N_i = \frac{1}{6V} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z). \quad (117)$$

Por fim, a forma discretizada da função de deslocamento  $\boldsymbol{\varphi}^{(e)}$ , em termos dos deslocamentos nodais, é

$$\boldsymbol{\varphi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix}. \quad (118)$$

### 3.5.2 As Relações de Tensão-Deformação-Deslocamento

Aplicando as definições do tensor de deformações na notação de Voigt, temos que

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6V} [\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k + \beta_m u_m] \quad (119)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{6V} [\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_k v_k + \gamma_m v_m] \quad (120)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{6V} [\delta_i w_i + \delta_j w_j + \delta_k w_k + \delta_m w_m] \quad (121)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{6V} [\beta_i v_i + \beta_j v_j + \beta_k v_k + \beta_m v_m + \gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_k u_k + \gamma_m u_m] \quad (122)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{6V} [\delta_i u_i + \delta_j u_j + \delta_k u_k + \delta_m u_m + \beta_i w_i + \beta_j w_j + \beta_k w_k + \beta_m w_m] \quad (123)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{6V} [\gamma_i w_i + \gamma_j w_j + \gamma_k w_k + \gamma_m w_m + \delta_i v_i + \delta_j v_j + \delta_k v_k + \delta_m v_m]. \quad (124)$$

Portanto, a relação entre deformação e deslocamento é dada por



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 & \beta_j & 0 & 0 & \beta_k & 0 & 0 & \beta_m & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & 0 & \gamma_j & 0 & 0 & \gamma_k & 0 & 0 & \gamma_m & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i & 0 & 0 & \delta_j & 0 & 0 & \delta_k & 0 & 0 & \delta_m \\ \gamma_i & \beta_i & 0 & \gamma_j & \beta_j & 0 & \gamma_k & \beta_k & 0 & \gamma_m & \beta_m & 0 \\ \delta_i & 0 & \beta_i & \delta_j & 0 & \beta_j & \delta_k & 0 & \beta_k & \delta_m & 0 & \beta_m \\ 0 & \delta_i & \gamma_i & 0 & \delta_j & \gamma_j & 0 & \delta_k & \gamma_k & 0 & \delta_m & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix}. \quad (125)$$

A relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke generalizada (equação 38). Logo,

$$\{\sigma\} = \mathbf{C}\{\varepsilon\} \implies \{\sigma\} = \mathbf{CBU}^{(e)}. \quad (126)$$

### 3.5.3 As condições de contorno

Tal qual o CST, os carregamentos aplicados sobre as fronteiras dos elementos devem ser decompostos em forças nodais equivalentes. O mesmo procedimento descrito na seção anterior é aplicando o PTV. A integração da equação 94 então deve ser feita sobre o tetraedro o que, similar ao CST, tem uma forma algébrica, devido ao fato da simplicidade das funções de interpolação, como também é a mera distribuição uniforme do carregamento sobre os nós que compõe a superfície sobre a qual é aplicado. De acordo com Oñate (2009), a força nodal equivalente sobre os nós de um carregamento uniforme na superfície de um elemento tetraédrico linear é dado por

$$\mathbf{F}_t^{(e)} = \frac{1}{3} A^{(e)} \mathbf{t}, \quad (127)$$

em que  $A^{(e)}$  é a área da superfície do elemento em que atua o carregamento uniforme  $\mathbf{t}$ .

## 4 PHILLIPO

PHILLIPO é um *solver* para campos de deformação elástica em estruturas discretizadas por elementos finitos, com algumas otimizações computacionais relacionadas a paralelismo e matrizes esparsas, e que visa constituir-se como exemplo didático na implementação legível e concisa dos algoritmos de elementos finitos em Julia no âmbito acadêmico do campus CCT, da UDESC. PHILLIPO é um programa de código aberto, que é distribuído em um repositório público<sup>1</sup> sob a licença LGPL<sup>2</sup>. Portanto, sua utilização é gratuita e livre para fins acadêmicos e comerciais, que incluem a modificação, implementação e venda de qualquer parte do programa, como também da documentação que o acompanha; só se resguarda, entretanto, a devida citação deste documento.

Um *solver*, ou em melhor português, um solucionador em MEF não é uma novidade no mundo acadêmico, nem no comercial. Softwares como Calculix (que é distribuído integrado com o FreeCAD) e o FreeFEM, que já conta com 7 mil commits em seu repositório, são continuamente produzidos e aprimorados desde antes da virada do milênio, um trabalho que demanda tempo e uma comunidade bem ativa. Deste modo, a pretensão de PHILLIPO não é fornecer uma alternativa a esses softwares, muito menos servir de módulo ou biblioteca para agregar algum deles, além do mais, a elaboração de programas robustos e confiáveis é um trabalho demorado e de muitas pessoas.

A pretensão de PHILLIPO é construir uma aplicação simples utilizando o MEF, que possa aproveitar algumas ferramentas de construção de código em Julia, como paralelismo e despachos múltiplos, para apresentar mais uma referência de programação em engenharia para os alunos do campus CCT, da UDESC, e, deste modo, evidenciar que é possível construir programas de engenharia de forma simples e legível, e que, por meio de uma linguagem de programação moderna, como Julia.

Neste capítulo é apresentado como é feita a distribuição e como se dá o funcionamento de PHILLIPO, dividido em duas partes. A primeira, descrevendo o fluxo de execução normal do programa, isto é, utilizando o GiD como interface de pré e pós-processamento, e, a segunda, esmiuçando o código, tanto do módulo PHILLIPO, quanto dos arquivos de integração com o GiD.

### 4.1 DISTRIBUIÇÃO PELO PKG.JL

O Pkg.jl é o gerenciador de pacotes anexado à Julia, tal como PIP é anexado ao Python. Ele é responsável por distribuir, gerir e empacotar os módulos da linguagem, permitindo relacionar dependências e controlar versionamento. PHILLIPO é distribuído por meio do Pkg.jl,

<sup>1</sup> O repositório é mantido no GitHub, assim como o presente documento em formato LaTeX: <<https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO>>

<sup>2</sup> O GiD, interface de pré e pós-processamento, é um software distribuído comercialmente, e não está sujeito à mesma licença que PHILLIPO.

porém, não pelo repositório oficial<sup>1</sup>, mas, pelo próprio repositório deste trabalho, utilizando-se de uma função do gerenciador de pacotes: a função *add*.

Como PHILLIPO foi encapsulado em um módulo, pode ser facilmente distribuído iniciando uma sessão Julia e executando:

```
1 add https://github.com/lucas-bublitz/PHILLIPO.jl
```

O *Pkg.jl* então trata de buscar as dependências do módulo, isto é, os módulos que são importados para uso interno de PHILLIPO: o *SparseArrays*, que fornece as estruturas e funções para alocar e manipular eficientemente matrizes esparsas, o *LinearAlgebra*, implementação do LAPACK em Julia, e o *JSON*, um parser de objetos em JSON para dicionários. No arquivo *Projecy.toml* é possível encontrar tanto essa lista de dependência, e no *Manifest.toml*, são listadas as dependências das dependências, isto é, quais módulos cada módulo importado por PHILLIPO importa para si.

O versionamento é importante pois permite que a compilação do pacote seja feita utilizando exatamente os códigos dos módulos de quando foi desenvolvido, assim baixando o risco de resultados inesperados devido a uma alteração no funcionamento de um módulo exterior ao que se trabalha.

## 4.2 FLUXO DE EXECUÇÃO

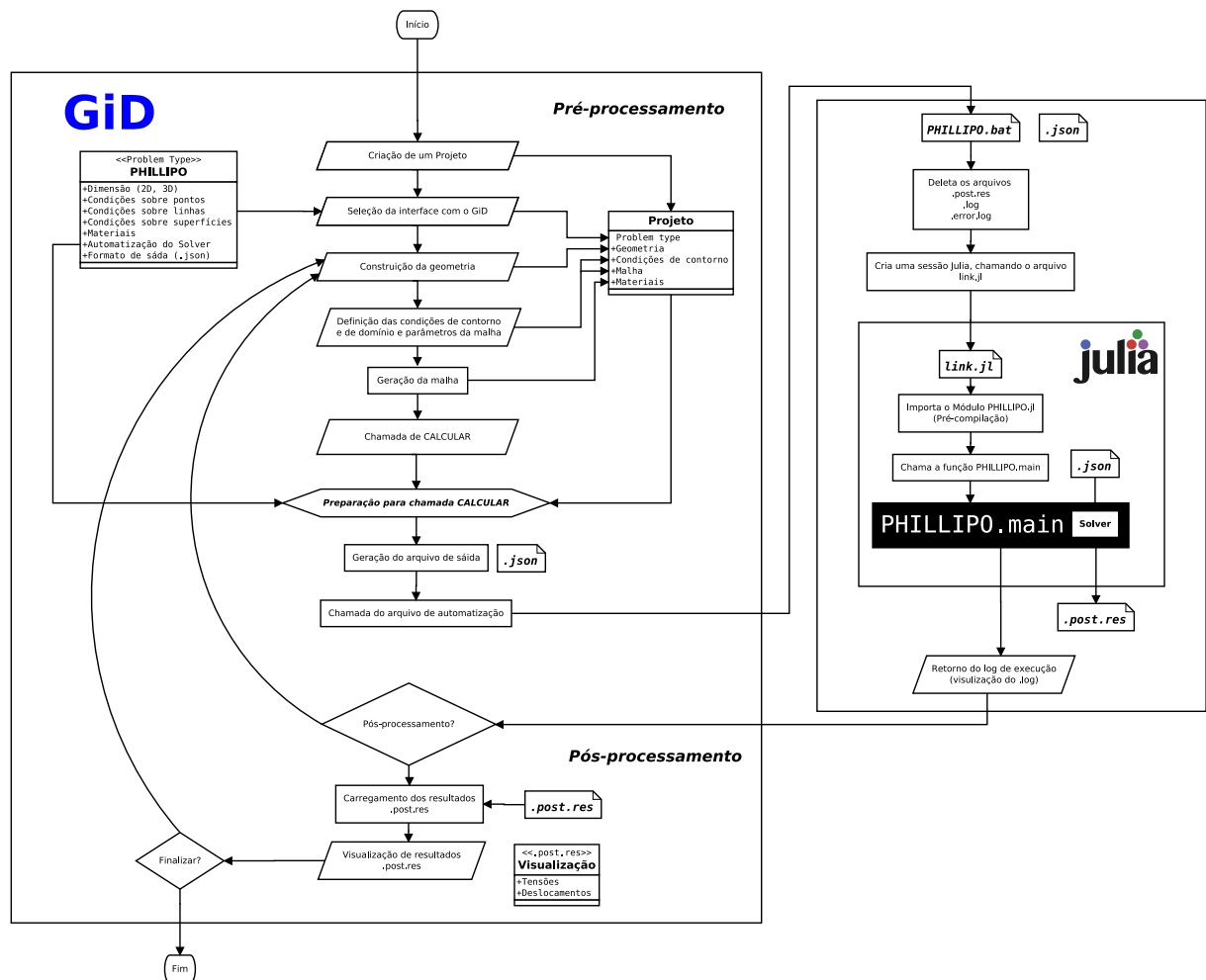
O fluxo de execução é uma ferramenta de projeto que tem como objetivo descrever a ordem e as condições que determinadas seções do código são executadas. A utilização de PHILLIPO.jl segue os diagramas das figuras 11 e 12. Esses diagramas não representações simplificadas e parciais, e não utilizam um padrão ou simbologia formal que é própria desses diagramas.

Nesses diagramas, é possível separar a execução de uma utilização normal do software em três partes principais:

1. Pré-processamento; Parte em que ocorre a criação da geometria, a definição das propriedades dos materiais, das condições de contorno e das cargas aplicadas, assim como a geração da malha e elementos.
2. Processamento; Parte em que é chamada uma sessão Julia para carregar o módulo PHILLIPO.jl, que é responsável por ler os arquivos de entrada, e executar o algoritmo de elementos finitos, gerando os arquivos de saída para o GID.
3. Pós-processamento; Parte em que o GID lê os arquivos de saída, e gera os gráficos de resultados.

<sup>1</sup> Há uma série de critérios para que um módulo seja adicionado ao repositório oficial do *Pkg.jl*, além disso, não é objetivo de PHILLIPO ser distribuído massivamente.

Figura 11 – Fluxograma de execução: GID



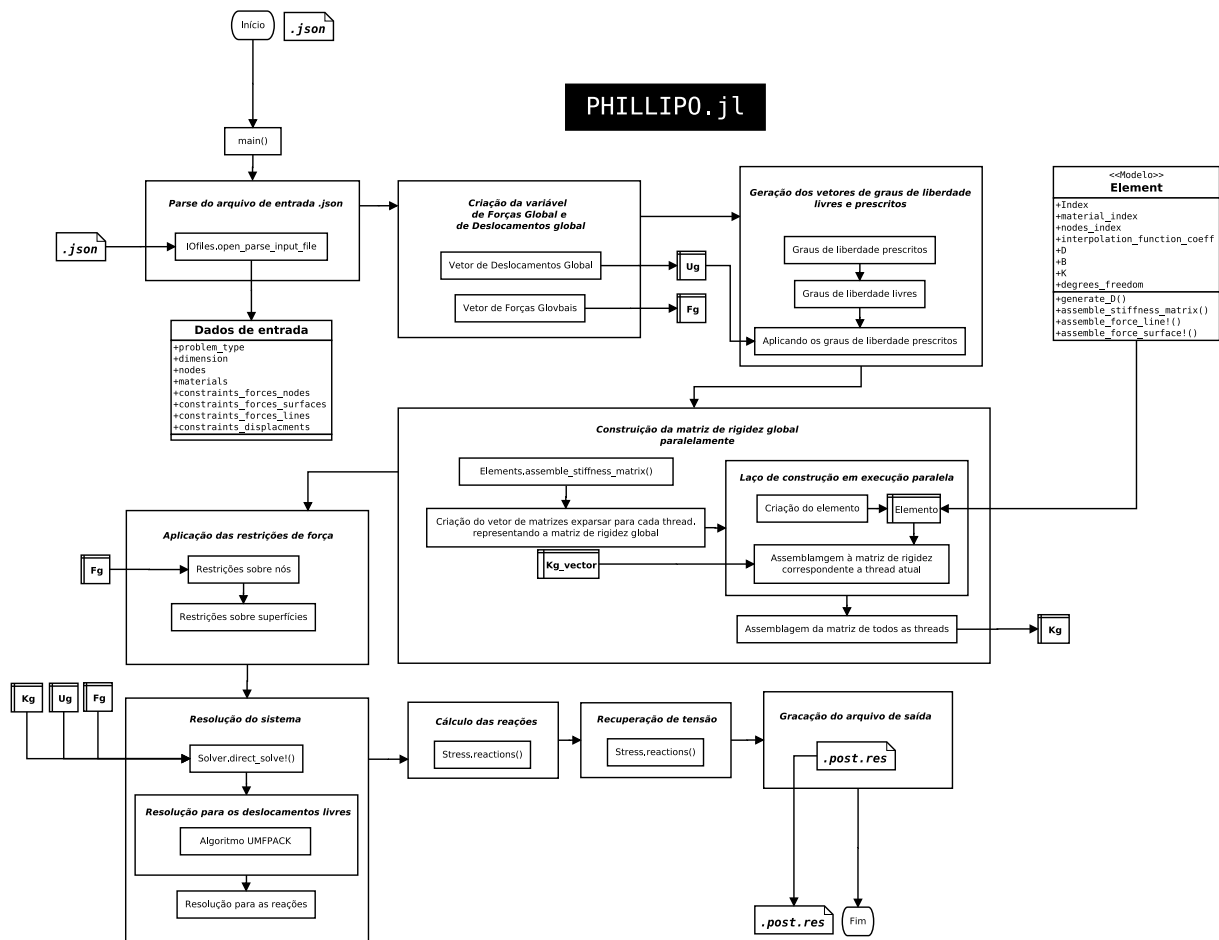
#### 4.2.1 Pré-processamento

O pré-processamento é realizado totalmente pelo GID, e consiste na definição da geometria, das condições de contorno, do material e na geração de malha, e segue:

1. Definição do *Problem type*. Caso o problema físico seja modelado em duas dimensões, deve-se escolher o *Problem type PHILLIPO*, caso seja modelado em três dimensões, deve-se escolher o *Problem type PHILLIPO3D*. Essa escolha define quais arquivos serão utilizados para a definição das condições de contorno, dos materiais, e como será a geração da malha.
2. Definição da geometria do problema, que pode ser tanto construída utilizando as ferramentas CAE do próprio GID, como também, importada de um arquivo externo de algum outro software CAD cujo formato seja reconhecido pelo GID <sup>2</sup>.

<sup>2</sup> O GID reconhece uma grande variedade de arquivo de entrada (sejam de geometria, malhas, condições de contorno), inclusive arquivos próprios de programas comerciais, como ANSYS e Abaqus;

Figura 12 – Fluxograma de execução: PHILLIPO.jl



3. O próximo passo é definir as características do material, como também as condições de contorno: sejam elas deslocamentos sobre pontos, linhas e superfícies, ou carregamentos concentrados sobre pontos, ou carregamentos distribuídos sobre linhas e superfícies.<sup>3</sup>
4. Geração da malha, que pode ser amplamente configurada pelas ferramentas oferecidas pelo GID para gerar malhas estruturadas ou não estruturadas, com refinamentos em determinadas regiões, e com a possibilidade de se definir o tipo de elemento a ser utilizado.
5. Por fim, é chamada a função de CALCULAR, que vai tanto gerar o arquivo de entrada para o PHILLIPO, pelas regras definidas do arquivo .bas, como executar o arquivo .bat, que é o responsável por criar a sessão Julia e executar o módulo PHILLIPO.jl.

O GID, então, deleta possíveis arquivos de saída anteriores, e gera os arquivos de saída .dat<sup>4</sup>, assim como os arquivos de log, e cria a sessão Julia, chamando para ser executado nela o arquivo link.jl.

<sup>3</sup> Carregamentos sobre linha só estão disponíveis para o *Problem type PHILLIPO*.

<sup>4</sup> Embora o arquivo esteja nomeado no formato *dat* ele, na verdade, é um *.json*.

Na sessão Julia, o módulo PHILLIPO.jl é importado, momento em que ocorre a pré-compilação do código, e, em seguida, chama a função principal do módulo, passando como parâmetros os caminhos para o arquivo *.json* e o caminho de saída do resultado da análise, assim iniciando o processamento.

#### 4.2.2 Processamento

A execução propriamente dita de PHILLIPO pode ser dividida em três partes: a leitura do arquivo de entrada; definição dos graus de liberdade livres e prescritos; Construção da matriz global de rigidez paralelamente; aplicação das restrições de forças; resolução do sistema cálculo das reações e recuperação de tensão geração do arquivo de saída.

a resolução do sistema.

### 4.3 GID

O GID é um software utilizado como pré e pós-processamento, neste caso, para PHILLIPO. Nele é possível criar a geometria do problema, definir as propriedades dos materiais, as condições de contorno, as cargas aplicadas, e, principalmente, gerar a malha de elementos. Além de se ser possível sua integração com um *solver* qualquer, por meio de um conjunto de arquivos de entrada e saída (ambos configurados de forma a permitir uma certa flexibilidade nessa integração), cuja execução é controlada por um *script* em Batch, o que possibilita a automatização do processo de simulação. Nesta seção é abordado como é feita a integração entre o GID e PHILLIPO, por meio das pastas *PHILLIPO.gid* e *PHILLIPO3D.gid*, sendo que, como a nomenclatura dos arquivos sugere, a primeira é utilizada para problemas bidimensionais, e a segunda para problemas tridimensionais.

#### 4.3.1 PHILLIPO.gid

O GID pode ser configurado para operar como pré e pós-processamentos de diversos programas, como o Abaqus, o Ansys, o Calculix..., por meio de um *Problem type*, que é como o GID chama o conjunto de arquivos que configuram o formato de saída dos dados, a criação de determinadas propriedades para as condições de contorno e materiais, como também automatizar a execução da simulação, chamando o programa. Pode-se dizer que o *Problem type* é uma interface para que as informações contidas no arquivo gerado pelo GID (geometria, malha, condições de contorno etc.) sejam salvas em um formato que o programa, o *solver* no caso, possa interpretar, ao passo que o *script* de execução automatiza o chamamento deste, e a simulação seja iniciada.

Na pasta *PHILLIPO.gid* é possível encontrar os seguinte arquivos:

1. *PHILLIPO.cnd*: define as condições de contorno e como são aplicadas;
2. *PHILLIPO.prb*: define as entradas de informações gerais;

```

1 CONDITION: Constraint_displacement_point
2 CONDTYPE: over points
3 CONDMESHTYPE: over nodes
4 QUESTION: X
5 VALUE: 0.0
6 QUESTION: Y
7 VALUE: 0.0
8 QUESTION: Z
9 value: 0.0
10 END CONDITION

```

Figura 13 – Parte do arquivo de condições de contorno: PHILLIPO.cnd

3. *PHILLIPO.mat*: define as características dos materiais utilizados para os elementos;
4. *PHILLIPO.bas*: configura o arquivo de saída do GID para ser interpretado por PHILLIPO.jl;
5. *PHILLIPO.bat*: *script* para chamar uma sessão Julia, chamando *link.jl*;
6. *link.jl*: importa o módulo PHILLIPO e o executa.

O primeiro arquivo do *Problem type* de PHILLIPO é *PHILLIPO.cnd*, que define as condições de contorno e sobre quais entidades, leia-se nós, elementos ou geometrias (superfícies, volumes, linhas etc.), são aplicadas, por meio de uma sintaxe específica<sup>5</sup>, uma forma de marcação de texto, que é interpretada pelo GID.

Em sua representação parcial, da figura 13, é possível notar a construção de uma condição de contorno por meio de um bloco que inicia na linha 1, com a expressão *CONDITION: Constraintdisplacementpoint*, que também nomeia esta condição, referente a restrição de deslocamento em pontos (entidade geométrica discretizada por um nó), e que acaba com *END CONDITION*. Dentre essas linhas, são definidas as formas e os valores que essa condição vai aplicar sobre a geometria selecionada, neste caso, os pontos. Na linha 2, é definido, justamente, sobre qual entidade geométrica se aplica essa condição: pontos. Na próxima linha, é definido como que essa informação, que foi associada à entidade geométrica se traduz na malha, neste caso, essa condição é aplicada sobre os nós que correspondem aos pontos, ou seja, quando o GID for gerar a malha, vai aplicar essa condição para o nó que corresponde ao ponto.<sup>6</sup> As linhas seguintes, 4 a 9, se referem aos valores da condição, neste caso, aos deslocamentos prescritos sobre os nós nas direções de *X*, *Y* e *Z*.

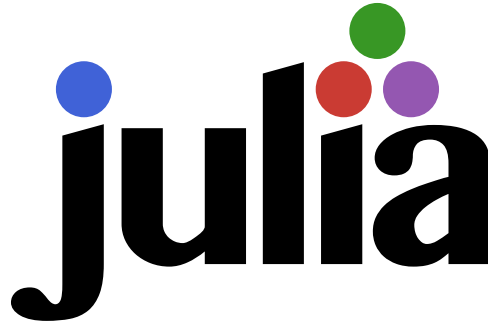
<sup>5</sup> No manual do usuário do GID, acessível em <<https://gidsimulation.atlassian.net/wiki/spaces/GUM/overview>>, é possível encontrar a descrição o funcionamento de toda essa sintaxe, que compreende desde esse arquivo de condições de contorno, como também, dos outros que compõem a construção do *problem type*.

<sup>6</sup> Isso se deve porque a malha é criada sobre a geometria, posteriormente à aplicação das condições de contorno sobre aquela.

## 5 JULIA & SEUS MÓDULOS

A programming language to heal the planet together. (Alan Edelman)

Figura 14 – Logo da linguagem Julia



Julia é uma linguagem de programação dinâmica, opcionalmente tipada, pré-compilada, generalista, de código livre<sup>1</sup> e de alto nível, criada por Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em 2012, com o objetivo de minimizar o problema das duas linguagens (*the two language problem*). É voltada para a programação científica, com capacidades de alta performance e sintaxe simples, similar à notação matemática usual. (SHERRINGTON; BALBEART; SENGUPTA, 2015)

Na aplicação do MEF, a linguagem se destaca por sua sintaxe próxima à linguagem matemática, principalmente na manipulação de matrizes e vetores, que permite a implementação de algoritmos de forma simples e rápida, e por sua capacidade de processamento paralelo, que permite a otimização na construção e resolução de sistemas algébricos grandes. Além disso, o empacotamento oferecido pela linguagem, por meio do *Pkg.jl*, fornece ferramentas de controle e versionamento, como também, a criação de pacotes, que são facilmente compartilhadas e instalados.

Este capítulo aborda os seguintes tópicos que são relevantes para a aplicação do MEF em Julia, e que foram explorados no desenvolvimento de PHILLIPO:

1. Notação matrizes e vetores;
2. empacotamento com *Pkg.jl*;
3. performance de Julia;
4. processamento paralelo com *Threads*;

<sup>1</sup> A Linguagem Julia, é distribuída, quase integralmente, sob a MIT License, que permite a modificação, utilização e distribuição, seja comercial ou não, de qualquer parte do código, assim como das documentações associadas. Os componentes do módulo Base e as bibliotecas e ferramentas externas, que têm licença diferente, assim como a da própria Julia, podem ser consultados diretamente no repositório da linguagem: <<https://github.com/JuliaLang/julia>>.



## 5.1 O ESCOPO DE JULIA

"In short, because we are greedy."(Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah e Alan Edelman, em *Why We Created Julia*)

A linguagem Julia é rápida. Tão rápida (BEZANSON et al., 2014)

## 6 VALIDAÇÃO & VERIFICAÇÃO

O desenvolvimento de softwares de simulação, seja utilizando o MEF ou não, é sempre acompanhado de uma bateria de testes, além de um procedimento de validação e verificação (V & V), que garante, dentro de uma margem de abrangência do que se propõe, sua capacidade de reproduzir resultados concisos, sendo, então, um espelho da realidade.

Verificação, dentro desse contexto, é o procedimento pelo qual se evidencia a exata implementação do modelo matemático no próprio software, ou seja, a verificação que a modelagem programada é equivalente ao algoritmo matemático, dentro dos limites impostos pela aritmética computacional em relação às operações em ponto flutuante<sup>1</sup>. Já a validação, por sua vez, é o processo para determinar a acurácia que um modelo computacional possui de apresentar a realidade, dentro dos limites que se propõe. Essas definições estão de acordo com o documento *An Overview of the Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*, referente a norma ASME respectiva.

Por questões de simplificação, a verificação foi realizada por comparação com outro programa que realiza a mesma análise, o Abaqus, e a validação, por comparação com resultados analíticos, já consolidados experimentalmente.

### 6.1 VERIFICAÇÃO

Para verificar os resultados foram utilizados seis sequências de comparação (três com o elemento tetraédrico, e três triangulares), nas quais aplicaram-se todas as condições de contorno (deslocamentos prescritos, carregamentos pontuais, em linhas e superficiais). Os resultados foram comparados com os obtidos no Abaqus, nas mesmas condições de contorno e geometrias, para deslocamentos nodais e tensões sobre os elementos. As geometrias empregadas foram simples, com malhas pouco refinadas, a fim de facilitar a comparação sobre todos os nós e elementos.

Os arquivos de verificação estão disponíveis no repositório do projeto, na pasta *verification*, na qual constam os arquivos de entrada do Abaqus (.cae) e do GID (.gid), além dos arquivos respectivos arquivos de saída, (.rpt e .post.res)

Em todos os casos, definiu-se o aço ASIS 4340 como material, cujas características físicas empregadas aqui foram:  $E = 210\text{GPa}$  (módulo de elasticidade) e  $\nu = 0.3$  (coeficiente de Poisson).

Primeiramente, o problema é definido no Abaqus, para depois ser exportado para o GID, a fim de se manter tanto a geometria como a malha e, principalmente, as identificações dos nós e elementos, o que facilitada a comparação dos resultados. O procedimento empregado em todos os casos foi o seguinte:

<sup>1</sup> No computador, os números ditos Reais ( $\mathbb{R}$ ) são representados por um ponto flutuante, que é uma forma discreta, pois os computadores são desenvolvidos em lógica booleana

1. Definição do problema no Abaqus (*.cae*);
  - a) Construção da geometria;
  - b) Definição do material (AISI 4340 STEEL);
  - c) Construção da malha;
  - d) Definição das condições de contorno;
2. Execução da análise;
3. Exportação dos resultados para um arquivo de texto (*.rpt*);
  - a) utilização da ferramenta *probe* sobre os nós (deslocamentos nodais);
  - b) utilização da ferramenta *probe* sobre os elementos (componentes das tensões e tensão de von Mises);
4. Importação do arquivo de *input* no GID (*.inp*);
5. Definição do problema no GID;
  - a) Definição do material (AISI 4340 STEEL);
  - b) Definição das condições de contorno;
6. Execução da análise;
7. Exportação do arquivo de resultados (*.post.res*);
8. Comparação dos resultados.

As análises podem ser repetidas diretamente utilizando os arquivos *.inp*, para dar entrada com dados do problema no Abaqus, e os arquivos *.dat* (dentro da pasta *.gid*), para dar entrada com dados do problema em PHILLIPO. No Abaqus é necessário importar o modelo, e no PHILLIPO é necessário chamar a função principal do módulo indicando a localização do arquivo *.dat*, para que não seja preciso utilizar a interface do GID. A numeração dos casos de verificação segue a mesma sequência de apresentação deste capítulo.

### 6.1.1 Casos tridimensionais (elemento tetraédrico)

Nos casos tridimensionais foi empregado a geometria de um cubo unitário, conforme a figura 15a, com a malha descrita na tabela 1 (figura 15b) e conectividade na tabela 2. A face formada pelos nós 3, 4, 7 e 6 foi engastada, e as demais condições de contorno foram aplicadas nas seguintes sequências:

1. Carregamento superficial (figura 16a), resultados nas tabelas 3 e 4;

Figura 15 – O cubo unitário.

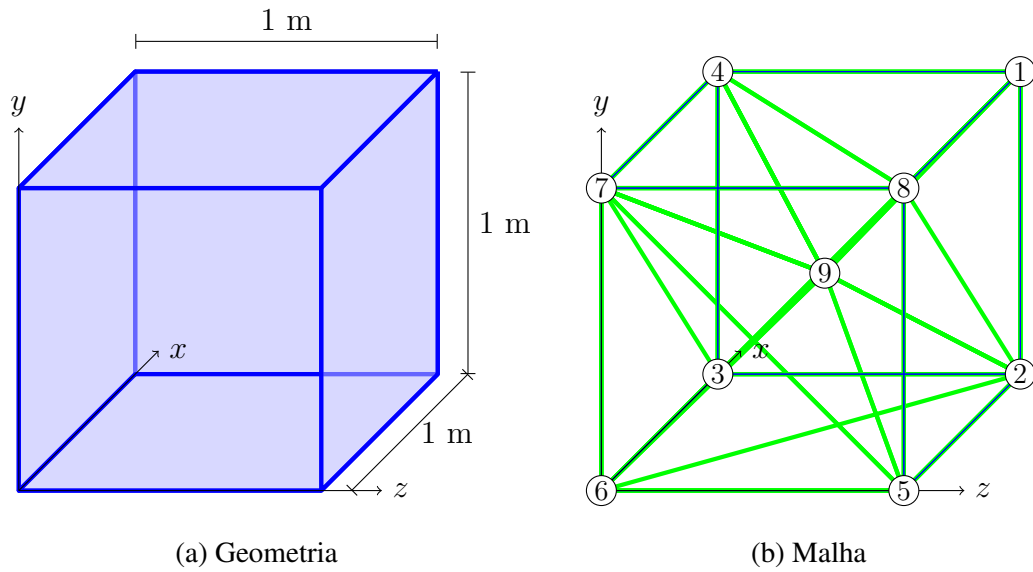


Tabela 1 – Descrição dos nós para a malha do cubo unitário.

Nó	x [m]	y [m]	z [m]
1	1.00	1.00	1.00
2	1.00	0.00	1.00
3	1.00	0.00	0.00
4	1.00	1.00	0.00
5	0.00	0.00	1.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	1.00	0.00
8	0.00	1.00	1.00
9	4.929074e-01	5.337674e-01	5.471772e-01

2. Carregamento pontual (figura 16b), resultados nas tabelas 5 e 6;
3. Deslocamento prescrito (figura 16c), resultados nas tabelas 7 e 8.

Em todas as sequências de comparação para o caso tridimensionais, os resultados exportados do Abaqus convergiram com os produzidos por PHILLIPO, com exceção dos deslocamentos prescritos, que não são definidos exatamente zero nos engastes, o que pode ser devido ao procedimento de solução do sistema no Abaqus, por algum método iterativo ou de penalização, porém essa diferença é desprezível.

Destes modo, fica demonstrado que algoritmo matemático do ME foi implementado corretamente nessas condições.

Tabela 2 – conectividade dos elementos na malha do cubo unitário.

Elemento	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
1	2	6	5	9
2	9	6	5	7
3	7	9	8	5
4	6	7	9	3
5	4	9	1	8
6	3	4	9	1
7	3	7	9	4
8	3	9	2	1
9	5	9	8	2
10	9	2	1	8
11	6	9	2	3
12	7	9	4	8

Tabela 3 – Deslocamentos nodais para o primeiro caso tridimensional.

Nó	PHILLIPO.jl		
	x [m]	y [m]	z [m]
1	$8.65925 \times 10^{-8}$	$-8.92024 \times 10^{-6}$	$1.71092 \times 10^{-6}$
2	$2.34872 \times 10^{-7}$	$-7.50586 \times 10^{-6}$	$-2.45344 \times 10^{-6}$
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0
5	$-4.97641 \times 10^{-7}$	$-7.52208 \times 10^{-6}$	$-1.51181 \times 10^{-6}$
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	$-2.34375 \times 10^{-7}$	$-1.04911 \times 10^{-5}$	$3.58197 \times 10^{-6}$
9	$-1.43153 \times 10^{-7}$	$-4.38813 \times 10^{-6}$	$1.65793 \times 10^{-7}$

Tabela 4 – Tensões sobre os elementos para o primeiro caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{zy}$
1	$-3.96885 \times 10^4$	$-2.42821 \times 10^5$	$-4.02234 \times 10^5$	$-3.37838 \times 10^4$	$-3.87057 \times 10^5$	$-1.16248 \times 10^5$
2	$-1.09096 \times 10^5$	$-1.51419 \times 10^5$	$-3.95636 \times 10^5$	$-4.46066 \times 10^4$	$-6.07553 \times 10^5$	$1.22526 \times 10^5$
3	$1.36097 \times 10^5$	$-3.78867 \times 10^5$	$6.79384 \times 10^5$	$1.60388 \times 10^4$	$-4.35943 \times 10^5$	$7.62264 \times 10^4$
4	$3.67093 \times 10^4$	$3.67093 \times 10^4$	$8.56550 \times 10^4$	0.00000	$-6.47735 \times 10^5$	$-2.11311 \times 10^4$
5	$-3.70490 \times 10^4$	$-5.35656 \times 10^5$	$1.87482 \times 10^5$	$1.31695 \times 10^5$	$-4.22653 \times 10^5$	$-1.44130 \times 10^5$
6	$3.13504 \times 10^5$	$2.52807 \times 10^5$	$5.29187 \times 10^5$	$-7.84963 \times 10^4$	$-7.20481 \times 10^5$	$1.29700 \times 10^5$
7	$3.67093 \times 10^4$	$3.67093 \times 10^4$	$8.56550 \times 10^4$	0.00000	$-6.47735 \times 10^5$	$-2.11311 \times 10^4$
8	$-3.61274 \times 10^5$	$-6.51080 \times 10^5$	$-8.18929 \times 10^5$	$-8.74518 \times 10^4$	$-2.69891 \times 10^5$	$1.32782 \times 10^5$
9	$1.77784 \times 10^3$	$-5.96175 \times 10^5$	$8.93419 \times 10^4$	$2.25736 \times 10^4$	$-4.28830 \times 10^5$	$-4.98169 \times 10^4$
10	$6.71645 \times 10^4$	$-2.13160 \times 10^5$	$2.12365 \times 10^5$	$1.14907 \times 10^5$	$-4.96502 \times 10^5$	$-1.26844 \times 10^5$
11	$-3.61046 \times 10^5$	$-4.46115 \times 10^5$	$-7.57371 \times 10^5$	$-4.11090 \times 10^4$	$-3.78014 \times 10^5$	$1.89704 \times 10^4$
12	$8.25382 \times 10^4$	$-3.86038 \times 10^5$	$6.61165 \times 10^5$	$2.58282 \times 10^3$	$-5.36544 \times 10^5$	$-1.89303 \times 10^4$

Figura 16 – Condições de contorno para os casos tridimensionais.

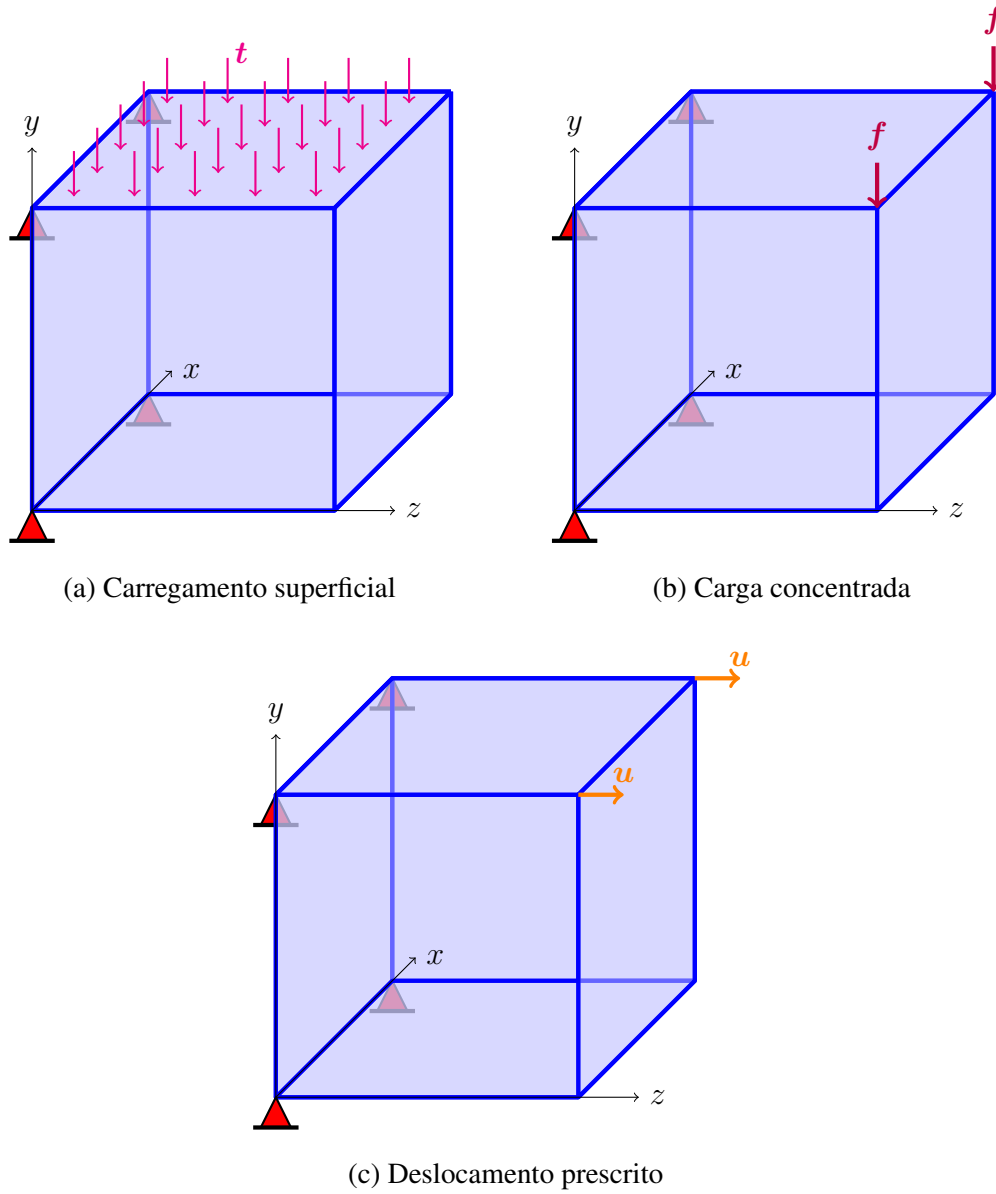


Tabela 5 – Deslocamentos nodais para o segundo caso tridimensional.

Nó	PHILLIPO.jl		
	x [m]	y [m]	z [m]
1	$1.02738 \times 10^{-6}$	$-2.02588 \times 10^{-5}$	$3.00251 \times 10^{-6}$
2	$-4.34358 \times 10^{-7}$	$-1.56996 \times 10^{-5}$	$-4.85199 \times 10^{-6}$
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0
5	$-1.19159 \times 10^{-6}$	$-1.38869 \times 10^{-5}$	$-2.90123 \times 10^{-6}$
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	$4.4546 \times 10^{-7}$	$-1.89878 \times 10^{-5}$	$6.81349 \times 10^{-6}$
9	$-3.03331 \times 10^{-7}$	$-8.53913 \times 10^{-6}$	$1.49066 \times 10^{-7}$

Tabela 6 – Tensões sobre os elementos para o segundo caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{zy}$
1	$-1.48107 \times 10^5$	$-2.84665 \times 10^5$	$-7.39090 \times 10^5$	$-1.50128 \times 10^5$	$-7.13362 \times 10^5$	$-2.53806 \times 10^5$
2	$-1.51519 \times 10^5$	$-2.65791 \times 10^5$	$-7.34452 \times 10^5$	$-1.54118 \times 10^5$	$-1.12164 \times 10^6$	$1.88313 \times 10^5$
3	$3.31474 \times 10^5$	$-5.63353 \times 10^5$	$1.36127 \times 10^6$	$4.57622 \times 10^4$	$-7.48975 \times 10^5$	$1.91682 \times 10^5$
4	$3.30055 \times 10^4$	$3.30055 \times 10^4$	$7.70128 \times 10^4$	0.0	$-1.26047 \times 10^6$	$-4.47749 \times 10^4$
5	$3.41582 \times 10^4$	$-7.18663 \times 10^5$	$4.25177 \times 10^5$	$-3.84442 \times 10^3$	$-1.04271 \times 10^6$	$-2.24829 \times 10^5$
6	$8.46258 \times 10^5$	$5.70548 \times 10^5$	$1.05557 \times 10^6$	$-4.05526 \times 10^5$	$-1.63629 \times 10^6$	$3.20919 \times 10^5$
7	$3.30055 \times 10^4$	$3.30055 \times 10^4$	$7.70128 \times 10^4$	0.0	$-1.26047 \times 10^6$	$-4.47749 \times 10^4$
8	$-6.68634 \times 10^5$	$-1.67458 \times 10^6$	$-1.72188 \times 10^6$	$-2.77724 \times 10^5$	$-6.33643 \times 10^5$	$1.86079 \times 10^5$
9	$-8.99318 \times 10^4$	$-1.03624 \times 10^6$	$2.06398 \times 10^5$	$-1.41868 \times 10^4$	$-8.14231 \times 10^5$	$-9.35646 \times 10^4$
10	$-8.71417 \times 10^4$	$-9.17625 \times 10^5$	$2.19806 \times 10^5$	$1.54039 \times 10^4$	$-9.61902 \times 10^5$	$-2.44647 \times 10^5$
11	$-5.76185 \times 10^5$	$-5.60648 \times 10^5$	$-1.35997 \times 10^6$	$-9.93562 \times 10^3$	$-8.43752 \times 10^5$	$-3.50827 \times 10^4$
12	$3.44607 \times 10^5$	$-2.96558 \times 10^5$	$1.44525 \times 10^6$	$9.47744 \times 10^4$	$-9.13586 \times 10^5$	$3.59795 \times 10^4$

Tabela 7 – Deslocamentos nodais para o terceiro caso tridimensional.

Nó	PHILLIPO.jl		
	x [m]	y [m]	z [m]
1	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.10000 \times 10^0$
2	$-5.32004 \times 10^{-3}$	$-1.33670 \times 10^{-3}$	$-1.85191 \times 10^{-3}$
3	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$
4	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$
5	$1.45540 \times 10^{-2}$	$1.22280 \times 10^{-2}$	$2.39641 \times 10^{-2}$
6	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$
7	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$
8	$0.00000 \times 10^0$	$0.00000 \times 10^0$	$0.10000 \times 10^0$
9	$1.19228 \times 10^{-3}$	$1.15650 \times 10^{-2}$	$2.80404 \times 10^{-2}$

Tabela 8 – Tensões sobre os elementos para o terceiro caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{zy}$
1	$-9.09572 \times 10^7$	$6.61804 \times 10^9$	$6.99059 \times 10^9$	$-6.37915 \times 10^8$	$5.17203 \times 10^9$	$-9.09626 \times 10^8$
2	$-9.80149 \times 10^8$	$1.239 \times 10^9$	$5.11012 \times 10^9$	$7.98683 \times 10^8$	$9.87649 \times 10^8$	$3.62163 \times 10^9$
3	$7.42606 \times 10^9$	$7.28382 \times 10^9$	$2.5413 \times 10^{10}$	$-2.14641 \times 10^8$	$6.14136 \times 10^9$	$1.43759 \times 10^9$
4	$6.2086 \times 10^9$	$6.2086 \times 10^9$	$1.44867 \times 10^{10}$	0.0	$1.70712 \times 10^9$	$1.75993 \times 10^8$
5	$9.11014 \times 10^9$	$5.10314 \times 10^9$	$2.5264 \times 10^{10}$	$-2.06548 \times 10^8$	$4.62152 \times 10^9$	0.0
6	$1.14507 \times 10^{10}$	$1.18305 \times 10^{10}$	$2.79844 \times 10^{10}$	$-1.84206 \times 10^9$	0.0	$4.24913 \times 10^9$
7	$6.2086 \times 10^9$	$6.2086 \times 10^9$	$1.44867 \times 10^{10}$	0.0	$1.70712 \times 10^9$	$1.75993 \times 10^8$
8	$-7.66859 \times 10^8$	$-1.48395 \times 10^8$	$-6.63477 \times 10^8$	$-1.41522 \times 10^9$	$8.11854 \times 10^9$	$3.60189 \times 10^9$
9	$-7.36171 \times 10^8$	$4.98949 \times 10^8$	$1.0959 \times 10^{10}$	$-2.27113 \times 10^9$	$3.90283 \times 10^9$	$-2.83479 \times 10^9$
10	$6.70973 \times 10^9$	$6.92566 \times 10^9$	$1.54401 \times 10^{10}$	$4.29695 \times 10^8$	$6.05251 \times 10^9$	$-6.55085 \times 10^8$
11	$2.56666 \times 10^9$	$6.28802 \times 10^9$	$2.2675 \times 10^9$	$6.20905 \times 10^8$	$4.28842 \times 10^9$	$-4.29695 \times 10^8$
12	$9.11014 \times 10^9$	$5.10314 \times 10^9$	$2.5264 \times 10^{10}$	$-2.06548 \times 10^8$	$4.62152 \times 10^9$	0.0

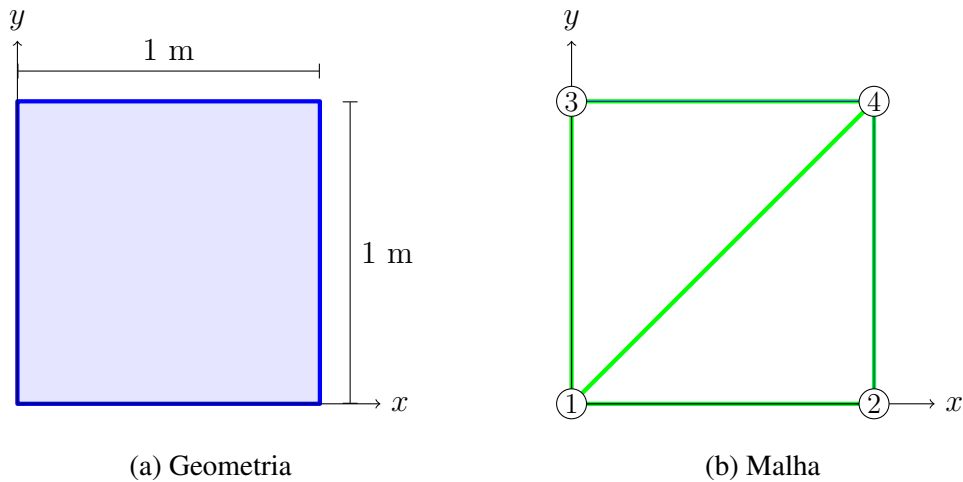
Tabela 9 – Descrição dos nós para a malha do quadrado unitário.

Nó	x [m]	y [m]
1	0.000000e+00	0.000000e+00
2	1.000000e+00	0.000000e+00
3	0.000000e+00	1.000000e+00
4	1.000000e+00	1.000000e+00

Tabela 10 – conectividade dos elementos na malha do quadrado unitário.

Elemento	Nó 1	Nó 2	Nó 3
1	1	2	4
2	4	3	1

Figura 17 – O quadrado unitário.



### 6.1.2 Casos bidimensionais (elemento triangular)

Nos casos bidimensionais foi empregado a geometria de um quadrado unitário, conforme a figura 17a, com a malha descrita na tabela 9 (figura 15b) e conectividade na tabela 10. A fronteira formada pelos nós 1 e 3, foi engastada, e as demais condições de contorno foram aplicadas nas seguintes sequências, dentro da análise do EPT:

1. Carregamento em linha (figura 18a), resultados nas tabelas 11 e 12;
2. Carregamento pontual (figura 18b), resultados nas tabelas 13 e ??;
3. Deslocamento prescrito (figura 16c) resultados nas tabelas 15 e ??.

Em todas as sequências de comparação para o caso bidimensionais, os resultados exportados do Abaqus convergiram com os produzidos por PHILLIPO, com exceção, tal qual nos casos tridimensionais, dos deslocamentos prescritos, que não são definidos exatamente zero nos engastes, e, da mesma forma, essa diferença é desprezível.



Figura 18 – Condições de contorno para os casos bidimensionais.

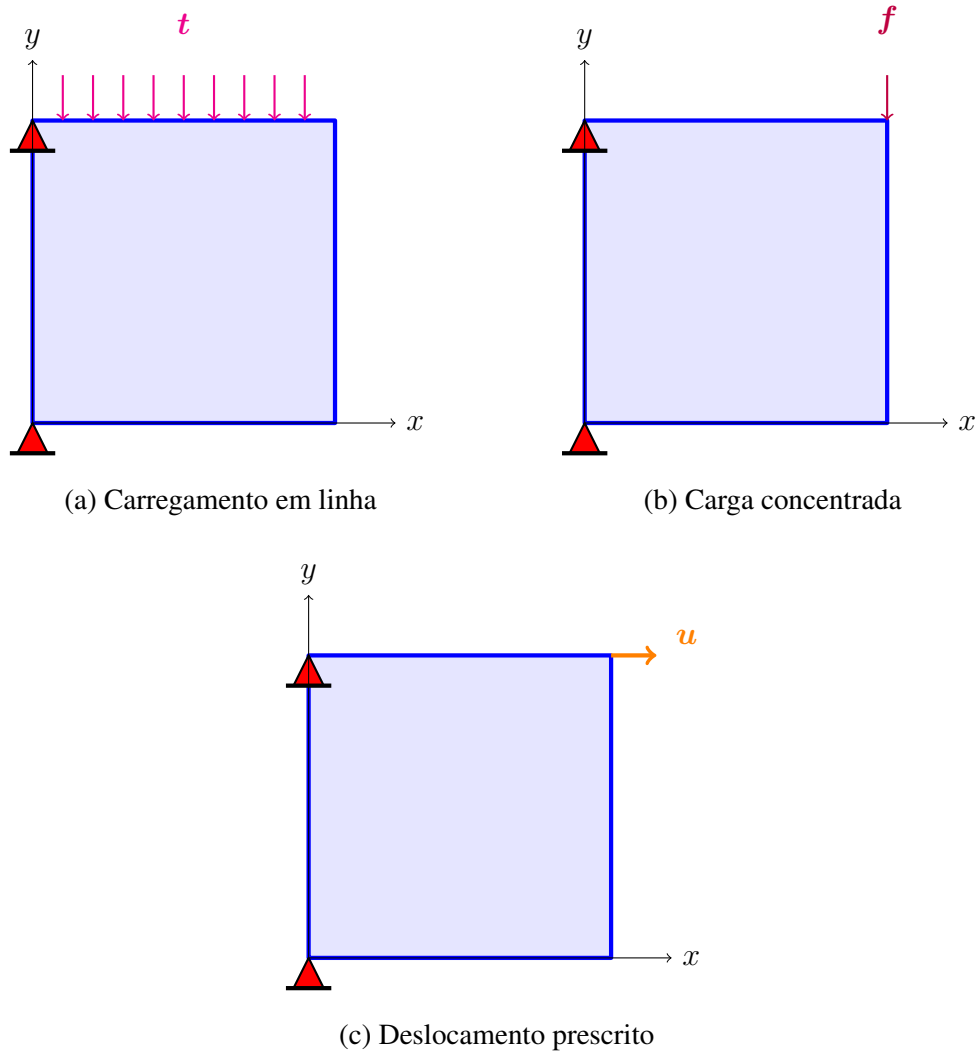


Tabela 11 – Deslocamentos nodais para o primeiro caso bidimensionais.

Nó	PHILLIPO.jl	
	x [m]	y [m]
1	0.0	0.0
2	$-1.15402 \times 10^{-6}$	$-6.94059 \times 10^{-6}$
3	0.0	0.0
4	$1.50022 \times 10^{-6}$	$-8.09460 \times 10^{-6}$

Tabela 12 – Tensões sobre os elementos para o primeiro caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{xy}$
1	$-3.46205 \times 10^5$	$-3.46205 \times 10^5$	$-3.46205 \times 10^5$
2	$3.46205 \times 10^5$	$1.03862 \times 10^5$	$-6.53794 \times 10^5$

Tabela 13 – Deslocamentos nodais para o segundo caso bidimensionais.

Nó	PHILLIPO.jl	
	x [m]	y [m]
1	0.0	0.0
2	$-1.15402 \times 10^{-6}$	$-6.94059 \times 10^{-6}$
3	0.0	0.0
4	$1.50022 \times 10^{-6}$	$-8.09460 \times 10^{-6}$

Tabela 14 – Tensões sobre os elementos para o segundo caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{xy}$
1	$-3.46205 \times 10^5$	$-3.46205 \times 10^5$	$-3.46205 \times 10^5$
2	$3.46205 \times 10^5$	$1.03862 \times 10^5$	$-6.53794 \times 10^5$

Tabela 15 – Deslocamentos nodais para o terceiro caso bidimensionais.

Nó	PHILLIPO.jl	
	x [m]	y [m]
1	0.0	0.0
2	$1.75000 \times 10^{-2}$	$-1.75000 \times 10^{-2}$
3	0.0	0.0
4	$1.00000 \times 10^{-1}$	0.0

Destes modo, fica demonstrado que algoritmo matemático do ME foi implementado corretamente nessas condições.

Tabela 16 – Tensões sobre os elementos para o terceiro caso tridimensional.

ID	PHILLIPO.jl [Pa]		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{xy}$
1	$5.25000 \times 10^9$	$5.25000 \times 10^9$	$5.25000 \times 10^9$
2	$2.30769 \times 10^{10}$	$6.92308 \times 10^9$	0.0

## 6.2 VALIDAÇÃO

Para validar os resultados obtidos pelo PHILLIPO.jl, foi utilizado a comparação com a solução analítica um problema de viga longa, na teoria de Euler-Bernoulli, analisando o deslocamento vertical sobre a linha elástica, que passa no centro da viga.

A viga longa é um problema clássico, que consiste em simplificações da teoria da elasticidade aplicada diretamente sobre vigas. Nesse contexto, os deslocamentos da linha elástica da viga é modelado pela equação diferencial de Euler-Bernoulli, dada por:

$$EIv^{(4)}(x) = q(x), \quad (128)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga,  $v(x)$  é o deslocamento vertical da linha elástica,  $q(x)$  é a carga normal a sua superfície,  $x$  é a posição ao longo da viga. Para determinar a distribuição  $v(x)$  é necessário conhecer as condições de contorno que descrevem a liberdade da viga. (HIBBELER, 2010)

Seja uma viga  $\mathcal{B}$ , como na figura 19a, composta pelo aço AISI, de  $E = 210\text{GPa}$  (módulo de elasticidade) e  $\nu = 0.3$ , e que está engastada em uma extremidade e livre na outra, e sujeita a um carregamento distribuído  $t = -100\text{ kPa } \hat{y}$ , conforme a figura 19b. A viga possui uma seção transversal quadrada, logo seu momento de inércia é dado por  $I = \frac{b^4}{12}$ , em que  $b$  é a largura da seção transversal da viga.

Para essas condições de contorno, a solução analítica para o deslocamento vertical  $v(x)$  é dada por, de acordo com Hibbeler (2010):

$$v(x) = -\frac{t_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + L^2), \quad (129)$$

em que  $L$  é o comprimento da viga.

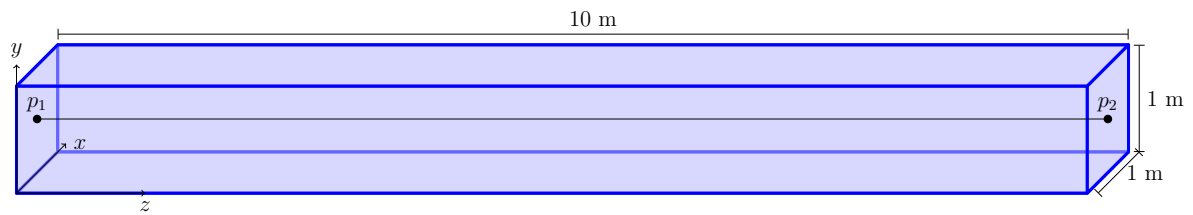
No GID, a geometria da viga foi construída utilizando quatro paralelepípedos idênticos, conforme a figura 19c, para que fosse possível extrair o deslocamento sobre a linha elástica de forma direta. Foram geradas malhas não estruturas com quantidade de nós diferentes. Os resultados de deslocamento da linha elástico foram plotados na figura 20, como também a solução analítica.

É possível notar que os resultados obtidos pelo PHILLIPO.jl, no caso tridimensional, convergem para a solução analítica, conforme a malha é refinada, o que demonstra que o algoritmo matemático implementado é válido para representar o problema físico.

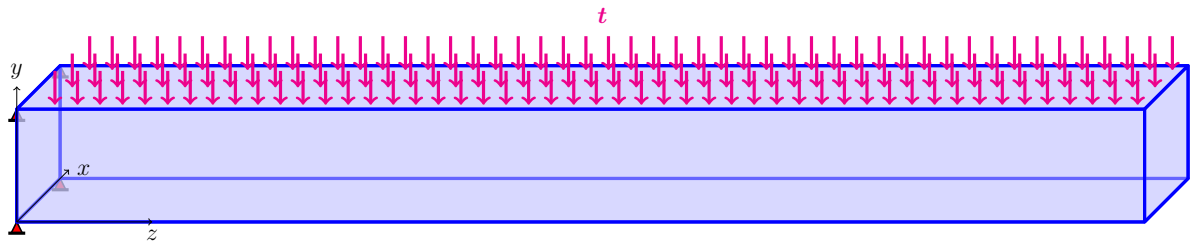
A mesma análise foi realizada utilizando elementos CST, modelando a viga por um EPT, cujo resultado consta na figura 21.

É possível notar que a modelagem por CST converge mais rápido, para o total de nós utilizado em cada análise, que a feita por elementos tetraédricos. Isso é devido porque no caso tridimensional os nós são postos sobre toda a geometria da viga, e no caso bidimensional, os nós são postos apenas sobre um plano e os efeitos transversais são definidos pelo EPT.

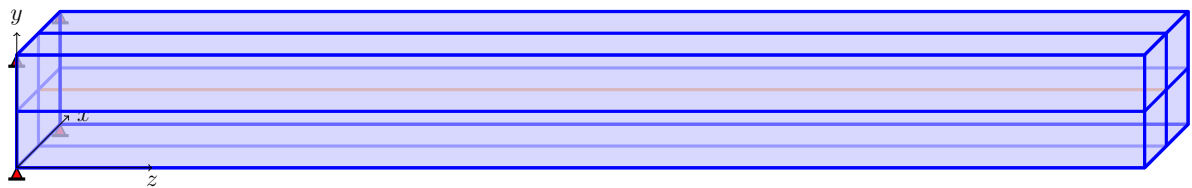
Figura 19 – Uma viga longa.



(a) Geometria



(b) Condições de contorno



(c) Geometria no GID

Figura 20 – Comparação dos deslocamentos da linha elástica da viga longa com elementos tetraédricos.

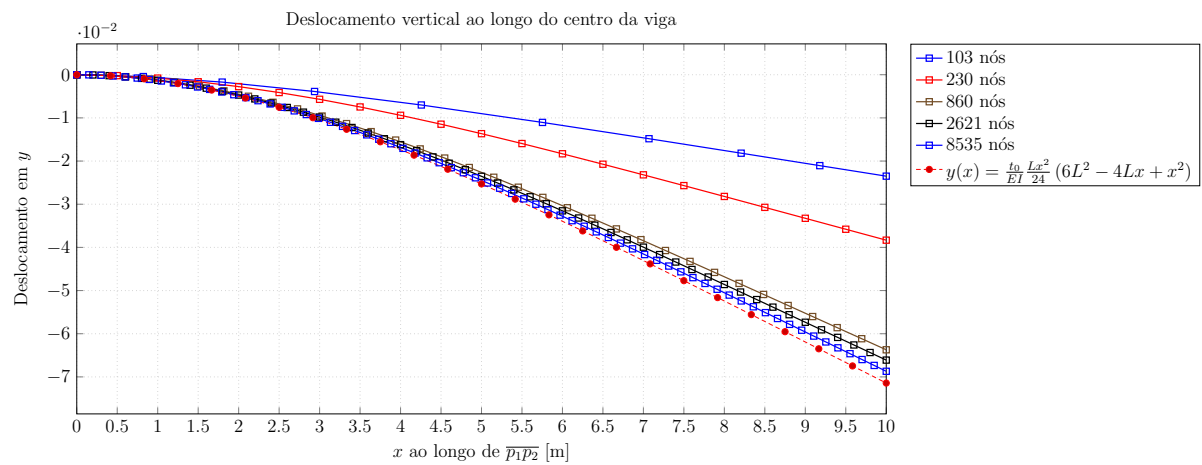
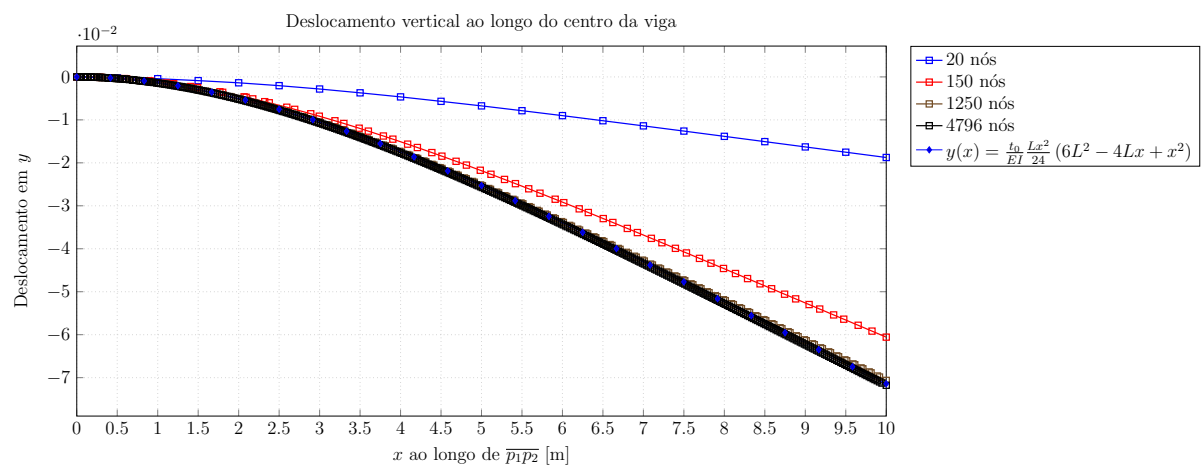


Figura 21 – Comparação dos deslocamentos da linha elástica da viga longa com elementos CST.



## REFERÊNCIAS

BEZANSON, Jeff; CHEN, Jiahao; CHUNG, Benjamin; KARPINSKI, Stefan; SHAH, Viral B.; VITEK, Jan; ZOUBRITZKY, Lionel. Julia: Dynamism and performance reconciled by design. **Proc. ACM Program. Lang.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 2, n. OOPSLA, oct 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/3276490>>. Citado na página 17.

BEZANSON, Jeff; EDELMAN, Alan; KARPINSKI, Stefan; SHAH, Viral B. Julia: A fresh approach to numerical computing. **CoRR**, abs/1411.1607, 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1411.1607>>. Citado na página 64.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistências dos Materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 36 e 74.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method, Enhanced Edition, SI Version**. 6. ed. Cengage Learning, 2022. ISBN 0357676432,9780357676431. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=C987600444DEED4576ED20233CC49A72>>. Citado 7 vezes nas páginas 38, 41, 42, 43, 44, 45 e 49.

LUBLINER, Panayiotis Papadopoulos (auth.) Jacob. **Introduction to Solid Mechanics: An Integrated Approach**. Springer International Publishing, 2017. ISBN 978-3-319-18878-2,978-3-319-18877-5. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=43b5224440ffc99f4b40d894dcbb2bdc>>. Citado na página 31.

MUFTU, Sinan. **Finite Element Method: Physics and Solution Methods**. 1. ed. Academic Press, 2022. ISBN 012821127X,9780128211274. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=19BB81D50D51BD23CC315B2F8E43F4C0>>. Citado na página 49.

OñATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences) (v. 1)**. 1. ed. [s.n.], 2009. ISBN 1402087322,9781402087325. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=589bba29f786a93857f01ff9d12136cc>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 37, 50 e 56.

POPOV, Egor P. **Engineering Mechanics of Solids**. Prentice Hall, 1990. (Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics). ISBN 0-13-279258-3,9780132792585. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=dab102c9ca4bd8e45556ebcd62b53b57>>. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 26, 27 e 28.

QUEK, S. S.; LIU, G.R. **The Finite Element Method: A Practical Course**. Butterworth-Heinemann, 2003. ISBN 9780750658669,9781417505593,0750658665. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=85760afdc4189ab75d846ee5fd53d6aa>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 37.

RAO, Singiresu S. **The finite element method in engineering**. 6. ed. ed. Elsevier, 2018. ISBN 978-0-12-811768-2,0128117680. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=e7ef3750d9f7ed6b4cb908c1215ba393>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

ROYLANCE, D. **Mechanics of Materials: Introduction to Elasticity**. Massachusetts Institute of Technology, 1995. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nP54tAEACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 28 e 29.

SHERRINGTON, Malcolm; BALBEART, Ivo; SENGUPTA, Avik. **Mastering Julia: Develop your analytical and programming skills further in Julia to solve complex data processing problems**. Packt Publishing, 2015. ISBN 978-1-78355-331-0. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=de5338c3a3b90bba52c20f544bd71456>>. Citado na página 63.

ZIENKIEWICZ, O.C. **the Finite Element Method**: Volume 1: The basis. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 16, 34, 43 e 49.

## ANEXO A – CÓDIGO FONTE DE PHILLIPO.JL

./src/PHILLIPO.jl

```

1 module PHILLIPO
2     # Módulo do escopo principal
3     include("../modules/includes.jl") # Módulos internos
4     # MÓDULOS EXTERNOS
5     import LinearAlgebra
6     import SparseArrays
7
8     # MÓDULOS INTERNOS
9     import .IOfiles
10    import .Elements
11    import .Solver
12    import .Matrices
13    import .Stress
14
15    # PONTO DE PARTIDA (aqui inicia a execução)
16    function main(
17        input_path::String, # Arquivo de entrada (.json)
18        output_path::String # Arquivo de saída (.post.res, formato
do GiD)
19    )
20        IOfiles.header_prompt()
21        println("Número de threads: $(Threads.nthreads())")
22        print("Lendo arquivo JSON...
                ")
23
24        @time input_dict = string(input_path) |> IOfiles.
open_parse_input_file
25
26        problem_type = input_dict["type"]
27        nodes = input_dict["nodes"]
28        materials = input_dict["materials"]
29        constraints_forces_nodes = input_dict["constraints"]["
forces_nodes"]
30        constraints_forces_lines = input_dict["constraints"]["
forces_lines"]
31        constraints_forces_surfaces = input_dict["constraints"]["
forces_surfaces"]
32        constraints_displacements = input_dict["constraints"]["
displacements"]
33
34        println("Tipo de problema: $(problem_type)")
35
36    # REMOVENDO ELEMENTOS NÃO UTILIZADOS

```



```

37     # esses elementos nulos são gerados pelo modo que o arquivo JSON
    é criado pelo GiD
38     # É uma falha que deve ser corrigida, mas que não é urgente.
39     pop!(nodes)
40     pop!(materials)
41     pop!(constraints_forces_nodes)
42     pop!(constraints_forces_lines)
43     pop!(constraints_forces_surfaces)
44     pop!(constraints_displacements)
45
46     if isempty(materials) error("Não há nenhum material definido!")
end
47
48     # VARIÁVEIS do PROBLEMA
49     dimensions = input_dict["type"] == "3D" ? 3 : 2
50     nodes_length = length(nodes)
51     Fg = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)
52     Ug = zeros(Float64, dimensions * nodes_length)
53
54     # GRAUS DE LIBERDADE: LIVRES E PRESCRITOS
55     if problem_type == "3D"
56         dof_prescribe = reduce(vcat, map(
57             (x) -> [3 * x[1] - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]],
58             constraints_displacements
59         ))
60         dof_free = filter(x -> x dof_prescribe, 1:dimensions*
nodes_length)
61         # RESTRIÇÃO DE DESLOCAMENTO
62         Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3], x
[4]], constraints_displacements))
63         else
64             dof_prescribe = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x[1] - 1, 2 * x
[1]], constraints_displacements))
65             dof_free = filter(x -> x dof_prescribe, 1:dimensions*
nodes_length)
66             # RESTRIÇÃO DE DESLOCAMENTO
67             Ug[dof_prescribe] = reduce(vcat, map((x) -> [x[2], x[3]],
constraints_displacements))
68         end
69
70
71     # CONSTRUÇÃO DOS ELEMENTOS
72     print("Construindo os elementos e a matrix de rigidez global
paralelamente...")
73     @time Kg = Elements.assemble_stiffness_matrix(input_dict["
elements"]["linear"], materials, nodes, problem_type)
74

```

```

75     print("Aplicando as restrições de força...
76           ")
77     @time if problem_type == "3D"
78         # RESTRIÇÕES DE FORÇA SOBRE NÓS
79         if !isempty(constraints_forces_nodes)
80             dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) ->
81 [3 * x[1] - 2, 3 * x[1] - 1, 3 * x[1]], constraints_forces_nodes))
82             Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x)
83 -> [x[2], x[3], x[4]], constraints_forces_nodes))
84         end
85         # RESTRIÇÃO DE FORÇAS SOBRE SUPERFÍCIES (somente
86 TetrahedronLinear)
87         if !isempty(constraints_forces_surfaces)
88             Elements.assemble_force_surface!(Fg, nodes,
89 constraints_forces_surfaces)
90         end
91         else
92             # RESTRIÇÕES DE FORÇA SOBRE NÓS
93             if !isempty(constraints_forces_nodes)
94                 dof_constraints_forces_nodes = reduce(vcat, map((x) ->
95 [2 * x[1] - 1, 2 * x[1]], constraints_forces_nodes))
96                 Fg[dof_constraints_forces_nodes] = reduce(vcat, map((x)
97 -> [x[2], x[3]], constraints_forces_nodes))
98             end
99             # RESTRIÇÃO DE FORÇAS SOBRE LINHAS (somente TriangleLinear)
100             if !isempty(constraints_forces_lines)
101                 Elements.assemble_force_line!(Fg, nodes,
102 constraints_forces_lines)
103             end
104         end
105
106     println("Resolvendo o sistema de $(size(Kg)) ")
107     @time Solver.direct_solve!(Kg, Ug, Fg, dof_free, dof_prescribe)
108
109     print("Calculando as reações...
110           ")
111     @time Re, Re_sum = Stress.reactions(Kg, Ug, dimensions)
112
113     println("Somatório das reações: $(Re_sum)")
114
115     print("Recuperando as tensões...
116           ")
117     @time , vm = Stress.recovery(input_dict["elements"]["linear"],
118 Ug, materials, nodes, problem_type)
119

```

```

110     print("Imprimindo o arquivo de saída...
111           ")
112     @time begin
113         output_file = open(string(output_path), "w")
114         IOfiles.write_header(output_file)
115
116         # Pontos gaussianos
117         if "tetrahedrons" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
118             write(output_file,
119                 "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Tetrahedra \"n\",
120                 " Number Of Gauss Points: 1 \"n\",
121                 " Natural Coordinates: internal \"n\",
122                 "end gausspoints \"n\",
123             )
124         end
125         if "triangles" in keys(input_dict["elements"]["linear"])
126             write(output_file,
127                 "GaussPoints \"gpoints\" ElemType Triangle \"n\",
128                 " Number Of Gauss Points: 1 \"n\",
129                 " Natural Coordinates: internal \"n\",
130                 "end gausspoints \"n\",
131             )
132         end
133
134         # DESLOCAMENTOS
135         IOfiles.write_result_nodes(output_file,
136             "Result \"Displacements\" \"Load Analysis\" 0 Vector
137             OnNodes",
138             dimensions, Ug
139         )
140
141         # ESTADO TENSÃO
142         IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,
143             "Result \"Stress\" \"Load Analysis\" 0 $( problem_type
144             == "3D" ? "matrix" : "PlainDeformationMatrix") OnGaussPoints \"
145             gpoints\"",
146         )
147
148         # REAÇÕES
149         IOfiles.write_result_nodes(output_file,
150             "Result \"Reactions\" \"Load Analysis\" 0 Vector OnNodes
151             ",
152             dimensions, Re
153         )
154
155         # VON MISSES
156         IOfiles.write_result_gauss_center(output_file,

```

```

152         "Result \"Von Misses\" \"Load Analysis\" 0 scalar
        OnGaussPoints \"gpoints\" ,
153             vm
154     )
155
156     close(output_file)
157
158     end
159     print("Tempo total de execução: ")
160 end
161 end

```

./src/modules/includes.jl

```

1
2 # PHILLIP
3 # Script para adicionar todos os arquivos que contêm os módulos locais
4
5 include("IOfiles.jl")
6 include("Matrices.jl")
7 include("Elements.jl")
8 include("Solver.jl")
9 include("Stress.jl")

```

./src/modules/IOfiles.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: controle de entradas e saídas
4
5
6 module IOfiles
7
8     # MÓDULOS EXTERNOS
9     import JSON
10
11     # texto de cabeçalho (salvando durante a compilação)
12     header_msg_file = open(string(@__DIR__ ,"/header_msg.txt"), "r")
13     header_msg_text = read(header_msg_file, String)
14
15     function open_parse_input_file(file_name::String)::Dict
16         # Carrega e interpreta o arquivo de entrada
17         # Retorna um dicionário
18         JSON.parsefile(file_name, dicttype=Dict, use_mmap = true)
19     end
20
21     function header_prompt()
22         # Imprime o cabeçalho do prompt de execução do programa
23         # header_msg_file = open(string(@__DIR__ ,"header_msg.txt"), "r")

```

```

24     # header_msg_text::String = read(header_msg_file, String)
25     println(header_msg_text)
26 end
27
28 function write_header(file::IOStream)
29     write(file, "GiD Post Results File 1.0", "\n")
30 end
31
32 function write_result_nodes(
33     file::IOStream,
34     header::String,
35     d::Integer,
36     vector::Vector{<:Real}
37 )
38     write(file, header, "\n")
39     vector_length = length(vector) ÷ d
40
41     write(file, "Values", "\n")
42     for i = 1:vector_length
43         write(file, " $(i)", " ",
44             join((vector[d * i - j] for j = (d - 1):-1:0), " "),
45             "\n"
46         )
47     end
48     write(file, "End Values", "\n")
49 end
50
51 function write_result_gauss_center(
52     file::IOStream,
53     header::String,
54     vector::Vector
55 )
56     write(file, header, "\n")
57     vector_length = length(vector)
58
59     write(file, "Values", "\n")
60     for i = 1:vector_length
61         write(file, " $(i)", " ",
62             join(vector[i], " "),
63             "\n"
64         )
65     end
66     write(file, "End Values", "\n")
67 end
68
69 end

```

./src/modules/Elements.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: definição dos elementos e funções relacionadas
4
5 module Elements
6
7     #MÓDULOS EXTERNOS
8     import LinearAlgebra
9     using SparseArrays
10    import ..Matrices
11
12    abstract type Element end
13
14    struct TriangleLinear <: Element
15
16        index::Integer
17        material_index::Integer
18        nodes_index::Vector{Integer}
19        interpolation_function_coeff::Matrix{Real}
20        D::Matrix{Real}
21        B::Matrix{Real}
22        K::Matrix{Real}
23        degrees_freedom::Vector{Integer}
24
25        function TriangleLinear(triangle_element_vector::Vector{Any},
26                                materials::Vector{Any}, nodes::Vector{Any}, problem_type::String)
27
28            index          = Integer(triangle_element_vector[1])
29            material_index = Integer(triangle_element_vector[2])
30            nodes_index    = Vector{Integer}(triangle_element_vector
31                                              [3:5])
32
33            i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
34            j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
35            m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])
36
37            position_nodes_matrix = [
38                1  i[1]  i[2];
39                1  j[1]  j[2];
40                1  m[1]  m[2]
41            ]
42
43            interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
44                position_nodes_matrix)
45
46        end
47    end
48 end

```

```

44         = 1/2 * LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)
45
46         a = interpolation_function_coeff[1,:]
47         b = interpolation_function_coeff[2,:]
48         c = interpolation_function_coeff[3,:]
49
50
51         B = [
52             b[1] 0      b[2] 0      b[3] 0      ;
53             0      c[1] 0      c[2] 0      c[3];
54             c[1] b[1] c[2] b[2] c[3] b[3]
55         ]
56
57         try
58             materials[material_index]
59         catch
60             error("Material não definido no elemento de índice: $(
index)")
61         end
62
63         D = generate_D(problem_type, materials[material_index])
64
65         K = B' * D * B * 1
66
67         degrees_freedom = reduce(vcat, map((x) -> [2 * x - 1, 2 * x
], nodes_index))
68
69         new(index, material_index, nodes_index,
interpolation_function_coeff, D, B, K, degrees_freedom)
70     end
71 end
72
73 struct TetrahedronLinear <: Element
74     index::Integer
75     material_index::Integer
76     nodes_index::Vector{<:Integer}
77     interpolation_function_coeff::Matrix{<:Real}
78     D::Matrix{<:Real}
79     B::Matrix{<:Real}
80     K::Matrix{<:Real}
81     degrees_freedom::Vector{<:Integer}
82     function TetrahedronLinear(tetrahedron_element_vector::Vector{<:
Any}, materials::Vector{<:Any}, nodes::Vector{<:Any})
83
84         index          = Integer(tetrahedron_element_vector[1])
85         material_index = Integer(tetrahedron_element_vector[2])
86         nodes_index    = Vector{Integer}(tetrahedron_element_vector

```

```

[3:6])
87
88
89     i = Vector{Real}(nodes[nodes_index[1]])
90     j = Vector{Real}(nodes[nodes_index[2]])
91     m = Vector{Real}(nodes[nodes_index[3]])
92     p = Vector{Real}(nodes[nodes_index[4]])
93
94     position_nodes_matrix = [
95         1 i[1] i[2] i[3];
96         1 j[1] j[2] j[3];
97         1 m[1] m[2] m[3];
98         1 p[1] p[2] p[3]
99     ]
100     interpolation_function_coeff = LinearAlgebra.inv(
position_nodes_matrix)
101     V = 1/6 * LinearAlgebra.det(position_nodes_matrix)
102
103     a = interpolation_function_coeff[1,:]
104     b = interpolation_function_coeff[2,:]
105     c = interpolation_function_coeff[3,:]
106     d = interpolation_function_coeff[4,:]
107
108     B = [
109         b[1] 0 0 b[2] 0 0 b[3] 0 0 b
[4] 0 0 ;
110         0 c[1] 0 0 c[2] 0 0 c[3] 0 0
c[4] 0 ;
111         0 0 d[1] 0 0 d[2] 0 0 d[3] 0
0 d[4];
112         c[1] b[1] 0 c[2] b[2] 0 c[3] b[3] 0 c
[4] b[4] 0 ;
113         0 d[1] c[1] 0 d[2] c[2] 0 d[3] c[3] 0
d[4] c[4];
114         d[1] 0 b[1] d[2] 0 b[2] d[3] 0 b[3] d
[4] 0 b[4]
115     ]
116
117     try
118         materials[material_index]
119     catch
120         error("Material não definido no elemento de índice: $(
index)")
121     end
122
123     D = generate_D("3D", materials[material_index])
124

```



```

125         K = B' * D * B * V
126
127         degrees_freedom = Vector{Integer}(reduce(vcat, map((x) -> [3
128 * x - 2, 3 * x - 1, 3 * x], nodes_index)))
129
130         new(index, material_index, nodes_index,
131 interpolation_function_coeff, D, B, K, degrees_freedom)
132     end
133 end
134
135 function generate_D(problem_type, material)::Matrix{<:Real}
136     # Gera a matrix constitutiva
137     E::Float64 = material[2] # Módulo de young
138     ν::Float64 = material[3] # Coeficiente de Poisson
139
140     if problem_type == "plane_strain"
141         return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
142             (1 - ν)      0      ;
143             (1 - ν) 0      ;
144             0      0      (1 - 2ν) / 2
145         ]
146     end
147
148     if problem_type == "plane_stress"
149         return E / (1 - ν^2) * [
150             1      0      ;
151             ν      1      ;
152             0      0      (1 - ν) / 2
153         ]
154     end
155
156     if problem_type == "3D"
157         return E / ((1 + ν) * (1 - 2ν)) * [
158             (1 - ν)      0      0      0
159             ;
160             (1 - ν)      0      0      0
161             ;
162             (1 - ν) 0      0      0
163             ;
164             0      0      0      (1 - 2ν) / 2 0
165             ;
166             0      0      0      0      (1 - 2ν) / 2 0
167             ;
168             0      0      0      0      0      (1 - 2ν) / 2
169         ]
170     end
171 end

```

```

164         end
165
166         error("PHILLIPO: Tipo de problema desconhecido!")
167
168     end
169
170     function assemble_stiffness_matrix(input_elements, materials, nodes,
171         problem_type)
172         # Realiza a criação dos elementos e já aplica os valores de
173         rigez sobre a matriz global
174
175         # O paralelismo é realizado reservando para cada thread uma
176         matriz separada
177         Kg_vector = [Matrices.SparseMatrixCOO() for i = 1:Threads.
178             nthreads()]
179
180         if problem_type == "3D"
181             if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
182                 pop!(input_elements["tetrahedrons"])
183                 elements_length = length(input_elements["tetrahedrons"])
184                 Threads.@threads for j in 1:elements_length
185                     element = TetrahedronLinear(input_elements["
186 tetrahedrons"][j], materials, nodes)
187                     Matrices.add!(
188                         Kg_vector[Threads.threadid()],
189                         element.degrees_freedom,
190                         element.K
191                     )
192                 end
193             end
194         else
195             if "triangles" in keys(input_elements)
196                 pop!(input_elements["triangles"])
197                 elements_length = length(input_elements["triangles"])
198                 Threads.@threads for j in 1:elements_length
199                     element = TriangleLinear(input_elements["triangles
200 "] [j], materials, nodes, problem_type)
201                     Matrices.add!(
202                         Kg_vector[Threads.threadid()],
203                         element.degrees_freedom,
204                         element.K
205                     )
206                 end
207             end
208         end
209     end
210
211     # A matriz global de rigidez é a soma das matrizes globais

```

```

calculadas em cada thread
205     Kg = Matrices.sum(Kg_vector)
206
207     return Kg
208 end
209
210 function assemble_force_line!(
211     Fg::Vector{<:Real},
212     nodes::Vector,
213     forces::Vector,
214 )
215     # Aplica a força equivalente nos nós de linha que sofre um
carregamento constante.
216     # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
TriangleLinear
217     for force in forces
218         elements_index = force[1]
219         nodes_index     = force[2:3]
220         forces_vector   = force[4:5]
221
222         dof_i = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
nodes_index[1])
223         dof_j = mapreduce(el -> [2 * el - i for i in 1:-1:0], vcat,
nodes_index[2])
224
225         node_i = nodes[nodes_index[1]]
226         node_j = nodes[nodes_index[2]]
227
228         = LinearAlgebra.norm(node_i .- node_j)
229         F = 1/2 * .* forces_vector
230
231         Fg[dof_i] += F
232         Fg[dof_j] += F
233     end
234 end
235
236 function assemble_force_surface!(
237     Fg::Vector{<:Real},
238     nodes::Vector,
239     forces::Vector
240 )
241     # Aplica a força equivalente nos nós de superfícies que sofre um
carregamento constante.
242     # Por enquanto, só funciona para problemas com elementos do tipo
TetrahedronLinear
243     for force in forces
244         elements_index = force[1]

```

```

245         nodes_index      = force[2:4]
246         forces_vector     = force[5:7]
247
248         dof_i = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[1])
249         dof_j = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[2])
250         dof_k = mapreduce(el -> [3 * el - i for i in 2:-1:0], vcat,
nodes_index[3])
251
252         node_i = nodes[nodes_index[1]]
253         node_j = nodes[nodes_index[2]]
254         node_k = nodes[nodes_index[3]]
255
256         vector_ij = node_j .- node_i
257         vector_ik = node_k .- node_i
258
259         = 1/2 * LinearAlgebra.norm(LinearAlgebra.cross(vector_ij,
vector_ik))
260         F = 1/3 * .* forces_vector
261
262         Fg[dof_i] += F
263         Fg[dof_j] += F
264         Fg[dof_k] += F
265     end
266 end
267
268 end

```

./src/modules/Matrices.jl

```

1
2 # PHILLIPO
3 # Módulo: construção de matrizes esparsas baseada em coordenadas
4 # Este arquivo é construído sobre o FEMSparse.jl (módulo utilizado no
JuliaFEM.jl)
5
6 module Matrices
7
8     using SparseArrays
9     import Base.sum
10    export SparseMatrixC00, spC00, sum, add!
11
12    mutable struct SparseMatrixC00{Tv,Ti<:Integer} <:
AbstractSparseMatrix{Tv,Ti}
13        I :: Vector{Ti}
14        J :: Vector{Ti}
15        V :: Vector{Tv}

```

```

16     end
17
18     spCOO(A::Matrix{<:Number}) = SparseMatrixCOO(A)
19     SparseMatrixCOO() = SparseMatrixCOO{Int[], Int[], Float64[]}()
20     SparseMatrixCOO(A::SparseMatrixCSC{Tv, Ti}) where {Tv, Ti<:Integer} =
        SparseMatrixCOO(findnz(A)...)
21     SparseMatrixCOO(A::Matrix{<:Real}) = SparseMatrixCOO(sparse(A))
22     SparseArrays.SparseMatrixCSC(A::SparseMatrixCOO) = sparse(A.I, A.J,
        A.V)
23     Base.isempty(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A.I) && isempty(A.J) &&
        isempty(A.V)
24     Base.size(A::SparseMatrixCOO) = isempty(A) ? (0, 0) : (maximum(A.I),
        maximum(A.J))
25     Base.size(A::SparseMatrixCOO, idx::Int) = size(A)[idx]
26     Base.Matrix(A::SparseMatrixCOO) = Matrix(SparseMatrixCSC(A))
27
28     get_nonzero_rows(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.I[findall(!iszero, A
        .V)])
29     get_nonzero_columns(A::SparseMatrixCOO) = unique(A.J[findall(!iszero
        , A.V)])
30
31     function Base.getindex(A::SparseMatrixCOO{Tv, Ti}, i::Ti, j::Ti)
        where {Tv, Ti}
32         if length(A.V) > 1_000_000
33             @warn("Performance warning: indexing of COO sparse matrix is
                slow.")
34         end
35         p = (A.I .== i) .& (A.J .== j)
36         return sum(A.V[p])
37     end
38
39     """
40         add!(A, i, j, v)
41     Add new value to sparse matrix 'A' to location ('i','j').
42     """
43     function add!(A::SparseMatrixCOO, i, j, v)
44         push!(A.I, i)
45         push!(A.J, j)
46         push!(A.V, v)
47         return nothing
48     end
49
50     function Base.empty!(A::SparseMatrixCOO)
51         empty!(A.I)
52         empty!(A.J)
53         empty!(A.V)
54         return nothing

```

```

55     end
56
57     function assemble_local_matrix!(A::SparseMatrixC00, dofs1::Vector{<:
Integer}, dofs2::Vector{<:Integer}, data)
58         n, m = length(dofs1), length(dofs2)
59         @assert length(data) == n*m
60         k = 1
61         for j=1:m
62             for i=1:n
63                 add!(A, dofs1[i], dofs2[j], data[k])
64                 k += 1
65             end
66         end
67         return nothing
68     end
69
70     function add!(A::SparseMatrixC00, dof1::Vector{<:Integer}, dof2::
Vector{<:Integer}, data)
71         assemble_local_matrix!(A, dof1, dof2, data)
72     end
73
74     function sum(A::Vector{<:SparseMatrixC00})::SparseMatrixCSC
75         # Retorna uma matriz em CSC a partir de um vetor formado por
matrizes em C00
76         I = reduce(vcat, getfield.(A, :I))
77         J = reduce(vcat, getfield.(A, :J))
78         V = reduce(vcat, getfield.(A, :V))
79         sparse(I,J,V)
80     end
81
82     function add!(A::SparseMatrixC00, dof::Vector{<:Integer}, data)
83         assemble_local_matrix!(A, dof, dof, data)
84     end
85
86 end

```

./src/modules/Solver.jl

```

1 # PHILLIPO
2 # Módulos: funções para executar o método de solução
3
4 module Solver
5
6     using SparseArrays
7     using LinearAlgebra
8
9     function direct_solve!(
10         Kg::SparseMatrixCSC,

```

```

11         Ug::Vector{<:Real},
12         Fg::Vector{<:Real},
13         dof_free::Vector{<:Integer},
14         dof_prescribe::Vector{<:Integer}
15     )
16     # Realiza a solução direta para o sistema
17
18     Ug[dof_free] = Kg[dof_free, dof_free] \ (Fg[dof_free] -
19 Kg[dof_free, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe])
20     Fg[dof_prescribe] = Kg[dof_prescribe, dof_free] * Ug[dof_free]
21     + Kg[dof_prescribe, dof_prescribe] * Ug[dof_prescribe]
22 end

```

./src/modules/Stress.jl

```

1 # PHILLIPO
2 # Módulo: recuperação de tensão
3
4 module Stress
5
6     import ..Elements
7     using SparseArrays
8
9     function recovery(input_elements, Ug::Vector{<:Real}, materials::
10 Vector{Any}, nodes::Vector{Any}, problem_type)
11         map_function = e -> nothing
12         if problem_type == "3D"
13             if "tetrahedrons" in keys(input_elements)
14                 type = "tetrahedrons"
15                 map_function = e -> begin
16                     el = Elements.TetrahedronLinear(e, materials, nodes)
17                     el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
18                 end
19             end
20         else
21             if "triangles" in keys(input_elements)
22                 type = "triangles"
23                 map_function = e -> begin
24                     el = Elements.TriangleLinear(e, materials, nodes,
25 problem_type)
26                     el.D * el.B * Ug[el.degrees_freedom]
27                 end
28             end
29         end
30         println("TESTE: ", size(input_elements[type]))
31         = Vector{Vector{Float64}}(map(

```

```

30         map_function,
31         input_elements[type]
32     ))
33     vm = von_misses.()
34     , vm
35 end
36
37     von_misses(::Vector{<:Real}) = length() == 3 ? von_misses_2D() :
von_misses_3D()
38
39     function von_misses_2D(::Vector{<:Real})
40         ([1]^2 - [1] * [2] + [2]^2 + 3 * [3]^2)
41     end
42
43     function von_misses_3D(::Vector{<:Real})
44         ((([1] - [2])^2 + ([2] - [3])^2 + ([3] - [1])^2 + 6 * ([4]^2 +
[5]^2 + [6]^2)) / 2)
45     end
46
47     function reactions(Kg::SparseMatrixCSC, Ug::Vector{<:Real}, d::
Integer)
48         nodes_length = length(Ug)
49         Re = Kg * Ug
50         Re_sum = sum.([Re[i:d:nodes_length] for i in 1:d])
51         return Re, Re_sum
52     end
53
54 end

```