Sobre a Conjectura dos Jogos Únicos

Lucas Daher
Orientadora: Yoshiko Wakabayashi

2 de dezembbro de 2019

Visão geral

Visão geral

Contexto

- Um dos maiores avanços recentes na área de algoritmos de aproximação (especificamente na dificuldade de aproximação), proposta em [Kho02]
- Muitos resultados fortes:
  - limite de inaproximabilidade de cobertura por vértices pode ser $2 - \epsilon$, provado em [KR08], coincidente com o melhor algoritmo que conhecemos, proposto em [BE81];
  - limite de inaproximabilidade do max cut pode ser $\alpha_{MC} - \epsilon$, provado em [Kho+07], coincidente com o melhor algoritmo que conhecemos, proposto em [GW95];
  - limite de inaproximabilidade do max 2-sat pode ser $\alpha_{LLZ} - \epsilon$, provado em [Aus07], coincidente com o melhor algoritmo que conhecemos, proposto em [LLZ02];
  - limite de inaproximabilidade de subgrafo acíclico máximo pode ser $2 - \epsilon$, provado em [GMR08], coincidente com o melhor algoritmo que conhecemos (trivial);

Unique label cover

- Nesse problema, temos um grafo bipartido, um conjunto de rótulos e uma restrição associada a cada aresta do grafo. Cada restrição vem na forma de uma bijeção. Isso implica que se temos, por exemplo, uma aresta uv e damos um rótulo x para a aresta u, existe um e apenas um rótulo que podemos dar para a aresta v que satisfaz a restrição.
- formalmente: sejam $G(V \cup W, E)$ um grafo bipartido, $[M]$ o universo de possíveis rótulos e σ um conjunto de bijeções $\sigma_{vw} : [M] \to [M]$ para todo $vw \in E$. Definimos uma instância do Unique Label Cover como $\mathcal{L}(G, [M], \sigma)$. Queremos atribuir rótulos $l(v) : [M] \to [M]$, para todo $v \in V \cup W$ de modo a satisfazer o máximo de arestas possíveis. Uma aresta vw é satisfeita se e somente se:

$$\sigma_{vw}(l(v)) = l(w)$$

Unique Games Conjecture

- Sejam $\eta,\ \gamma > 0$ quaisquer. Existe $M = M(\eta,\ \gamma)$ tal que é NP-difícil distinguir se a solução ótima de uma instância do Unique Label Cover com conjunto de rótulos de tamanho M satisfaz uma fração de pelo menos $1 - \eta$ ou no máximo γ.
- Uma consequência direta da conjectura é que para $\eta,\ \gamma$ quaisquer não existe um algoritmo polinomial com razão de aproximação maior ou igual a $\frac{1-\eta}{\gamma}$. Como podemos escolher η e γ arbitrariamente, concluímos que não existem algoritmos de aproximação para o Unique Label Cover com razão constante, ou seja, o problema não está na classe APX.

ULC-gap

- uma variação do problema Unique Label Cover, que chamaremos de ULC-gap. Nessa versão, recebemos uma instância em que ou uma fração muito grande das arestas ou muito pequena é satisfeita e queremos apenas distinguir entre elas.
- Formalmente: sejam $\mathcal{L}(G, [M], \sigma)$ uma instância do Unique Label Cover e η, $\gamma > 0$. Queremos saber se a solução ótima de $\mathcal{L}$ satisfaz uma fração de pelo menos $1 - \eta$ ou no máximo γ das arestas.

Visão geral

Max cut

- Seja $G(V,\ E)$ um grafo, queremos encontrar $S \subseteq V$ tal que o número de arestas entre S e seu complemento seja máximo, ou seja, queremos maximizar $C \subseteq E$ em que $C := \{uv\ : u \in S,\ v \notin S\}$.
- Um dos 21 problemas NP-completos propostos em [Kar72].

Estado da arte

- Algoritmo de aproximação proposto em [GW95], que possui o melhor bound que conhecemos, $\alpha_{gw} \approx 0.878$, é ótimo caso a UGC seja verdadeira (provado em [Kho+07]);
- O melhor limite de inaproximabilidade que conhecemos, supondo que a UGC seja falsa, é $\frac{16}{17} \approx 0.941$, provado em [Hås01].

Visão geral

uma visão (muito) superficial I

PCP (probabilistic checkable proofs) é um sistema de provas que funciona como um jogo entre dois jogadores que recebem uma instância de um problema de decisão binário (digamos que com respostas SIM e NÃO) e um oráculo quer sempre convencer o outro jogador de que a resposta certa é *sim* e um verificador que tenta não ser enganado pelo oráculo.

uma visão (muito) superficial II

Como o nome indica, existe um elemento probabilístico no jogo (introduzido por um gerador de números aleatórios usado pelo verificador). Chamamos a chance do verificador ser convencido pelo oráculo quando a resposta é de fato SIM de *completness* e a chance dele ser convencido quando a resposta é NÃO de *soundness*.

Visão geral

Visão Geral

- Para provar o limite de inaproximabilidade do max cut, vamos construir um PCP para o ULC-gap em que o verificador lê dois bits da prova e a aceita se e somente se eles forem diferentes.
- Podemos modelar a prova como um grafo em que cada bit é um vértice e para cada par de bits que pode ser escolhido pelo verificador, inserimos uma aresta. Assim, geramos um gap *soundness*/*completness*, que é exatamente o bound que queremos provar.

Por que garante o bound?

Pela UGC, é difícil distinguir entre as instancias do ULC, mas seja I uma instancia SIM. Então, ela deve ser aceita com probabilidade maior ou igual a c. Pensando na prova como uma instância do max cut, isso significa que o corte ótimo corta uma fracão maior ou igual a c das arestas. Agora, suponha que existe um algoritmo de aproximação melhor do que α_{GW}, então se rodássemos esse algoritmo, acabaríamos com um corte que corta uma fração maior ou igual a s das arestas. Assim, saberíamos em tempo polinomial que I é uma instancia SIM, contrariando a UGC.

Visão geral

A conjectura

Max cut

PCP

Redução do ULC-gap ao max cut

Bibliografia

Bibliografia I

Per Austrin. "Balanced max 2-sat might not be the hardest". In: *STOC*. Vol. 7. Citeseer. 2007, pp. 189–197.

Reuven Bar-Yehuda and Shimon Even. "A linear-time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem". In: *Journal of Algorithms* 2.2 (1981), pp. 198–203.

Venkatesan Guruswami, Rajsekar Manokaran, and Prasad Raghavendra. "Beating the random ordering is hard: Inapproximability of maximum acyclic subgraph". In: *2008 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE. 2008, pp. 573–582.

Bibliografia II

Michel X Goemans and David P Williamson. "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming". In: *Journal of the ACM (JACM)* 42.6 (1995), pp. 1115–1145.

Johan Håstad. "Some optimal inapproximability results". In: *Journal of the ACM (JACM)* 48.4 (2001), pp. 798–859.

Richard M Karp. "Reducibility among combinatorial problems". In: *Complexity of computer computations*. Springer, 1972, pp. 85–103.

Subhash Khot et al. "Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other 2-variable CSPs?" In: *SIAM Journal on Computing* 37.1 (2007), pp. 319–357.

Bibliografia III

Subhash Khot. "On the power of unique 2-prover 1-round games". In: *Proceedings of the thiry-fourth annual ACM symposium on Theory of computing.* ACM. 2002, pp. 767–775.

Subhash Khot and Oded Regev. "Vertex cover might be hard to approximate to within 2- ε". In: *Journal of Computer and System Sciences* 74.3 (2008), pp. 335–349.

Michael Lewin, Dror Livnat, and Uri Zwick. "Improved rounding techniques for the MAX 2-SAT and MAX DI-CUT problems". In: *International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization.* Springer. 2002, pp. 67–82.