Unique Games - pt. II

Lucas Daher

2018

1 Redução ao multi cut

1.1 MAX 2LIN

Existe uma versão especial do *unique games problem* chamada MAX 2LIN(k), em que temos um conjunto de rótulos $L = \{0,\ 1, \ldots,\ k-1\}$ e é dado um grafo $G = (V,\ E)$. Para cada $uv \in E$, a permutação π_{uv} é dada por uma constante $c_{uv} \in L$, tal que se u recebe o rótulo $x_u \in L$ e v, $x_v \in L$, então $\pi_{uv}(x_u) = x_v$ se e somente se $x_u - x_v = c_{uv} \pmod k$.

Para o MAX 2LIN, definimos outra conjectura, equivalente à UGC definida originalmente:

Conjectura 1.1 *(LUGC: Linear Unique Games Conjecture) dados δ, $\epsilon > 0$ quaisquer, existe $k > 0$ dependente de δ e ϵ tal que, para o MAX 2LIN(k), é NP-difícil distinguir entre instâncias em que pelo menos uma fração de $1-\epsilon$ das restrições pode ser satisfeita e instâncias em que no máximo uma fração δ das restrições pode ser satisfeita.*

1.2 MULTI CUT

Relembramos a definição do problema do multi cut: dado um grafo $G = (V,\ E)$ com custos $c_e \geq 0$ para todo $e \in E$ e pares de vértices $L := \{(s_1,\ t_1),\ (s_2,\ t_2), \ldots,\ (s_n, t_n)\}$ com $s_i \neq t_i$, para $1 \leq i \leq n$, queremos encontrar um conjunto de arestas R de custo mínimo tal que para todo $1 \leq i \leq n$ não há caminho entre s_i e t_i no grafo $(V,\ E - R)$.

1.3 Modelagem

Consideramos uma instância do MAX 2LIN(k) que recebe o grafo $G = (V,\ E)$. Criamos uma instância do multi cut descrita a seguir:

* Seja $V' := V$ x L
* Seja E' conjunto de aresta tal que $((u,\ i),\ (v,\ j)) \in E'$ se e somente se $uv \in E$ e $i - j = c_{uv} \pmod{k}$. Para todo $e \in E'$, e tem custo unitário
* $G' := (V',\ E')$
* para todo $u \in V$ e todo par $i,\ j \in L$ com $i \neq j$ criamos um par $((u,\ i),\ (u,\ j)) \in L$

Note que $|E'| = k|E|$ e $|V'| = k|V|$.

1.4 Desenvolvimento

Primeiramente apresentamos os lema 1.1 e lema 1.2:

Lema 1.1 *Para $0 \leq \epsilon \leq 1$ qualquer, dado uma solução viável de uma instância do MAX 2LIN(k) que satisfaz pelo menos $(1-\epsilon)|E|$ arestas, existe uma solução viável da instância equivalente do multi cut de custo $\leq \epsilon|E'|$.*

Lema 1.2 *Para $0 \leq \epsilon \leq 1$ qualquer, dado uma solução viável de uma instância do multi cut de custo $\leq \epsilon|E'|$, existe uma solução viável da instância equivalente do MAX 2LIN(k) que satisfaz pelo menos $(1-2\epsilon)|E|$ arestas.*

A partir desses dois lemas, derivamos o seguinte corolário:

Corolário 1.1 *Assumindo a UGC e que $P \neq NP$, para qualquer constante $\alpha \geq 1$, não existe α-aproximação para o problema do multicut.*

1.5 Provas adicionais

Apresentaremos a seguir provas para lema 1.1, lema 1.2 e corolário 1.1:

Lema 1.1. Começamos com uma instância MAX 2LIN(k) e uma solução viável que satisfaz pelo menos $(1-\epsilon)|E|$ arestas. Construiremos uma solução para a instância do multi cut equivalente de custo menor ou igual a $\epsilon k|E| = \epsilon|E'|$.

Dividimos o conjunto de vértices V' em k partes: $V'_0, \ldots,\ V'_{k-1}$. Para $0 \leq i \leq k-1$ e para todo $v \in V$, fazemos $(v,\ x_v + i \pmod{k}) \in V'_i$. Para toda aresta uv tal que $u \in V'_i$, $v \in V'_j$ e $i \neq j$, $uv \in R$.

Primeiramente, notamos que R é de fato um multi corte de G'. Lembramos que todos os pares *source-sink* são da forma $((u,\ i),\ (u,\ j))$ com $i \neq j$. É claro que $(u,\ i) \in V'_m$ e $(u,\ j) \in V'_n$ com $m \neq n$. Como removemos todas as arestas entre os conjuntos de vértices, se dois vértices estão em conjuntos diferentes, eles estão em componentes conexas diferentes de $(V',\ E' - R)$. Assim, não há caminho entre $(u,\ i)$ e $(u,\ j)$.

Agora devemos calcular o custo de R. Vamos provar que se $((u,\ i),\ (v,\ j)) \in R$, então uv não é satisfeita pela solução do MAX 2LIN(k), ou seja, $c_{uv} \neq (x_u - x_v) \pmod k$. Como para cada $uv \in E$ correspondem k arestas em E' e a solução satisfaz pelo menos $(1 - \epsilon)|E|$ arestas, temos que $|R| \leq k|E|\epsilon \leq k|E'|$.

Seja $((u,\ i),\ (v,\ j))$ uma aresta qualquer tal que $(u,\ i)$ e $(v,\ j)$ estão em conjuntos diferentes, digamos $(u,\ i) \in V'_\alpha$ e $(v,\ j) \in V'_\beta$, com $\alpha \neq \beta$. Por construção, temos que:

$$
\begin{aligned}
i - j &= c_{uv} \pmod k \\
i &= x_u + \alpha \pmod k \\
j &= x_v + \beta \pmod k
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
c_{uv} &= i - j \pmod k \\
&= (x_u + \alpha) - (x_v + \beta) \pmod k \\
&= (x_u - x_v) + (\alpha - \beta) \pmod k \\
&\neq (x_u - x_v) \pmod k
\end{aligned}
$$

Lema 1.2. Suponha que ao remover as arestas de G' que resolvem uma instância do multi cut, acabamos com l componentes conexas. Vamos indexar aleatoriamente rótulos de 1 a l para o conjunto de vértices de cada partição resultando nos conjuntos $V'_1,\ V'_2, \ldots,\ V'_l$. Usaremos essa partição para determinar a solução da instância do MAX 2LIN(k).

Seja $u \in V$, existe uma componente V'_c com c mínimo tal que para algum $i \in L$ existe um vértice $(u,\ i) \in V'_c$ e para todo $j \in L$, $j \neq i$ não existe vértice $(u,\ j) \in V'_{c'}$ para $c' < c$. Como a partição é dada por um multi corte, sabemos que não há $(u,\ j) \in V_c'$ com $j \neq i$. Daremos rótulo i para o u e dizemos que V_c' *define* u.

Seja $uv \in E$, analisaremos as k arestas correspondentes em E'. Seja ϵ_{uv} a fração das k arestas que faz parte do multi corte, então para a fração de $(1-\epsilon_{uv})$, ambas as pontas de cada aresta estão dentro de uma mesma componente.

Seja V_c' uma componente que contém os vértices $(u,\ i)$ e $(v,\ j)$ e a aresta $((u,\ i),\ (v,\ j))$. Notamos que se V_c' define u e v, então os rótulos dados a u e v satisfazem $uv \in E$, pois a existência da aresta $((u,\ i),\ (v,\ j))$ implica que $i - j = c_{uv} \pmod k$. Definimos que $(u,\ i)$ e $(v,\ j)$ são uma componente da subpartição *boa*. Para uv, há $(1 - \epsilon_{uv})k$ componentes na subpartição *boa*.

Agora, analisaremos a probabilidade de uma componente da subpartição *boa* definir u e v, um *lower bound* da probabilidade de satisfazer uv. Temos no máximo $2\epsilon_{uv}k$ componentes da subpartição *ruim*, que são de 3 possíveis tipos:

* contém $(u,\ i)$ e não contém $(v,\ j)$;
* contém $(v,\ j)$ e não contém $(u,\ i)$;
* contém $(u,\ i)$ e $(v,\ j)$, mas não contém $((u,\ i),\ (v,\ j))$;

Se uma componente de *ruim* for ordenada primeiro, uma componente de *boa* não irá definir os rótulos de u e v. Seja $b \leq 2\epsilon_{uv}k$ a quantidade de partições ruins, a probabilidade de uma partição ruim ser ordenada primeiro é:

$$\frac{b}{b + (1 - \epsilon_{uv})k} \leq \frac{2\epsilon_{uv}k}{2\epsilon_{uv}k + (1 - \epsilon_{uv})k} \leq \frac{2\epsilon_{uv}}{1 + \epsilon_{uv}} \leq 2\epsilon_{uv}$$

Assim, o número esperado de arestas não satisfeitas é $\leq 2\Sigma_{uv\in E}\epsilon_{uv}$. Por definição, $k\Sigma_{uv\in E}\epsilon_{uv}$ arestas estão no multi corte. Assim, se o multi corte tem custo $k\Sigma_{uv\in E}\epsilon_{uv} \leq \epsilon|E'| = \epsilon k|E|$, então $\Sigma_{uv\in E}\epsilon_{uv} \leq \epsilon|E|$. Finalmente, o número esperado de arestas não satisfeitas é $\leq 2\epsilon|E|$ e o número esperado de arestas satisfeitas é pelo menos $(1 - 2\epsilon)|E|$.

Desaleatorizando o algoritmo, obtemos o corolário 1.2:

Corolário 1.2 *Existe um algoritmo determinístico polinomial tal que, dado uma solução viável de uma instância do multi cut de custo* $\leq \epsilon|E'|$, *retorna uma solução viável da instância equivalente do MAX 2LIN(k) que satisfaz pelo menos* $(1 - 2\epsilon)|E|$ *arestas.*

Corolário 1.1. Supomos que para alguma constante $\alpha \geq 1$ existe uma α-aproximação para o problema do multi cut. Escolhemos ϵ e δ quaisquer tais que

$\epsilon < \frac{1-\delta}{2\alpha}$. Dado uma instância qualquer do MAX 2LIN(k), criamos uma instância do multi cut como descrita na seção 1.3. Para essa instância do multi cut criada, encontramos a α-aproximação e, utilizando o resultado do corolário 1.2, obtemos uma solução para a instância do MAX 2LIN(k).

Dado uma instância do MAX 2LIN(k) em que pelo menos $(1-\epsilon)|E|$ restrições podem ser satisfeitas, pelo lema 1.1, a solução ótima da instância equivalente do multi cut tem solução ótima de custo menor ou igual a $\epsilon|E'|$. Então, a solução retornada pelo algoritmo terá custo menor ou igual a $\epsilon\alpha|E'|$. Pelo corolário 1.2, a solução que obtemos do MAX 2LIN(k) satisfaz pelo menos $(1 - 2\epsilon\alpha)|E|$ restrições.

Dado uma instância do MAX 2LIN(k) em que no máximo $\delta|E|$ restrições podem ser satisfeitas, nosso algoritmo irá satisfazer no máximo $\delta|E|$ restrições. Como $\epsilon < \frac{1-\delta}{2\alpha}$, então $(1 - 2\epsilon\alpha) > \delta$ e conseguimos distinguir em tempo polinomial entre instâncias que satisfazem no máximo $\delta|E|$ e no mínimo $(1 - \epsilon)|E|$ restrições. Absurdo!