

Estimação e Avaliação de Performance de Parâmetros em Modelos de Mistura GEV via Algoritmo EM

Lucas Alonso de Almeida

Abstract

Este trabalho desenvolve e avalia um método computacional para a estimação de parâmetros em modelos de mistura finita de duas componentes da distribuição de Valor Extremal Generalizado (GEV), um modelo robusto com ampla aplicabilidade em áreas como hidrologia e finanças. Utilizando o algoritmo Esperança-Maximização (EM), foram obtidos os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros da mistura. O desempenho desses estimadores foi então investigado através de um robusto estudo de simulação de Monte Carlo, que quantificou o viés e o erro quadrático médio (EQM) sob diversas configurações de parâmetros. Adicionalmente, a metodologia foi aplicada a um conjunto de dados reais sobre o consumo de petróleo per capita, validando sua utilidade prática. Os resultados da simulação revelam um complexo balanço entre a estabilidade e a precisão do algoritmo: cenários com componentes bem definidos apresentaram altas taxas de convergência, mas, em alguns casos, ao custo de uma alta variância na estimativa de certos parâmetros, como o de escala. Inversamente, cenários com maior sobreposição de componentes mostraram taxas de convergência mais baixas e estimativas enviesadas, indicando convergência para máximos locais. Apesar dos desafios, a aplicação aos dados reais demonstrou que o modelo de mistura GEV, combinado com uma estratégia de inicialização robusta, é uma ferramenta eficaz para descrever a bimodalidade dos dados. O estudo, portanto, valida a implementação do EM para este problema e oferece uma análise quantitativa da performance dos estimadores, servindo como um guia prático sobre suas potencialidades e limitações.

Index Terms

Mistura de Distribuições, Distribuição de Valor Extremal Generalizado (GEV), Algoritmo EM, Simulação de Monte Carlo, Máxima Verossimilhança.

I. BLOCO 01

INTRODUÇÃO

Modelos de misturas finitas de distribuições de probabilidade constituem uma ferramenta estatística de grande flexibilidade, frequentemente utilizados para modelar dados provenientes de populações heterogêneas [7]. A ideia central de um modelo de mistura é representar a densidade de probabilidade de uma população como uma soma ponderada de um número finito de densidades componentes, onde cada componente corresponde a uma subpopulação distinta. Tais modelos permitem a construção de arcabouços probabilísticos para uma vasta gama de fenômenos, com aplicações que se estendem por diversas áreas como engenharia, economia, hidrologia, entre outras [4].

Dentre as possíveis escolhas para as distribuições componentes, a Distribuição de Valor Extremal Generalizado (GEV) possui particular interesse. A GEV é a distribuição limite para o máximo (ou mínimo) de uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, o que a torna fundamental na teoria de valores extremos [2]. Sua função de distribuição acumulada, $G_\gamma(x)$, é definida por:

$$G_\gamma(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \frac{\gamma}{\sigma}(x - \mu) \right]^{-1/\gamma} \right\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os parâmetros de locação, escala e forma. Quando $\gamma = 0$, a GEV assume a forma da distribuição de Gumbel; para $\gamma > 0$, a de Fréchet; e para $\gamma < 0$, a de Weibull. Devido a essa propriedade, a GEV é amplamente utilizada para modelar eventos extremos, como a frequência de cheias em rios na hidrologia ou o cálculo do Valor em Risco (VaR) em finanças [5].

A combinação de modelos de mistura com componentes GEV surge como uma solução poderosa para analisar dados de eventos extremos que se originam de múltiplas fontes ou regimes. Escalante-Sandoval [1], por exemplo, utilizou misturas de duas componentes GEV para modelar a frequência de fluxos em rios. Contudo, a estimativa dos parâmetros de tais modelos apresenta desafios significativos. A função de verossimilhança de uma mistura é uma soma de termos, o que a torna analiticamente complexa de maximizar diretamente, podendo levar a problemas de convergência em métodos de otimização numérica [5].

Para contornar essa dificuldade, o algoritmo Esperança-Maximização (EM) se apresenta como uma abordagem robusta e elegante [6]. O EM é um método iterativo projetado para encontrar estimativas de máxima verossimilhança (EMV) em problemas com dados faltantes ou variáveis latentes, sendo os modelos de mistura um caso canônico de sua aplicação [4]. O algoritmo simplifica o problema de maximização ao alternar entre um passo de esperança (Passo E), que calcula a probabilidade de cada observação pertencer a cada componente, e um passo de maximização (Passo M), que atualiza os parâmetros do modelo de forma ponderada. Embora o EM seja uma ferramenta poderosa, é crucial avaliar o desempenho dos estimadores que ele produz. Estudos de simulação de Monte Carlo são a metodologia padrão para investigar propriedades de estimadores, como seu viés e erro quadrático médio (EQM), em cenários controlados [3].

Neste contexto, o presente trabalho tem um triplo objetivo. Primeiramente, implementar o algoritmo EM para a estimação dos parâmetros de um modelo de mistura de duas componentes GEV. Em segundo lugar, conduzir um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar a performance dos estimadores obtidos, analisando seu comportamento sob diferentes configurações de parâmetros e para um tamanho de amostra fixo. Por fim, demonstrar a aplicabilidade prática do método ajustando o modelo a um conjunto de dados reais sobre o consumo de petróleo, conforme explorado em Otiniano e Teixeira [5].

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção Metodologia detalha a metodologia, incluindo a formulação do modelo de mistura GEV e a derivação dos passos do algoritmo EM. A Seção Resultados apresenta e discute os resultados do estudo de simulação e da aplicação aos dados reais. Finalmente, a Seção Conclusões oferece as conclusões do estudo, discutindo as implicações dos resultados e possíveis direções para trabalhos futuros.

II. BLOCO 02 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho é dividida em três partes principais. Primeiro, descreve-se o modelo de mistura finita de duas componentes GEV. Em seguida, detalha-se a implementação do algoritmo Esperança-Maximização (EM) para a estimativa dos parâmetros deste modelo. Por fim, apresenta-se o desenho do estudo de simulação de Monte Carlo conduzido para avaliar a performance dos estimadores obtidos.

A. O Modelo de Mistura GEV

Um modelo de mistura finita representa a função de densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X como uma soma convexa de k densidades componentes. Para este estudo, consideramos o caso de uma mistura de duas componentes ($k = 2$), cuja f.d.p. é dada por:

$$h(x; \Theta) = p_1 g_1(x; \theta_1) + (1 - p_1) g_2(x; \theta_2) \quad (2)$$

onde $p_1 \in (0, 1)$ é o peso da primeira componente, e g_1 e g_2 são as f.d.p. das componentes, cada uma pertencente à família de distribuições de Valor Extremal Generalizado (GEV). O vetor de parâmetros completo do modelo é $\Theta = (p_1, \theta_1, \theta_2)$, onde $\theta_l = (\gamma_l, \mu_l, \sigma_l)$ para $l = 1, 2$.

A f.d.p. de uma componente GEV, conforme Jenkinson [2] e Otiniano e Teixeira [5], é:

$$g(x; \gamma, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{\gamma}{\sigma}(x - \mu) \right]^{-\frac{1}{\gamma}-1} \exp \left\{ - \left[1 + \frac{\gamma}{\sigma}(x - \mu) \right]^{-1/\gamma} \right\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

com suporte definido por $1 + \frac{\gamma}{\sigma}(x - \mu) > 0$.

Dada uma amostra aleatória x_1, \dots, x_N da mistura, a função de log-verossimilhança a ser maximizada é:

$$\mathcal{L}(\Theta | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \log (p_1 g_1(x_i; \theta_1) + (1 - p_1) g_2(x_i; \theta_2)) \quad (4)$$

A maximização direta da Equação (4) é complexa devido à soma dentro do logaritmo. Por essa razão, optou-se pelo uso do algoritmo EM.

B. Estimação via Algoritmo Esperança-Maximização (EM)

O algoritmo EM é um procedimento iterativo para encontrar estimativas de máxima verossimilhança em modelos com dados incompletos ou variáveis latentes [4], [6]. No contexto de misturas, a variável latente é a identidade da componente da qual cada observação foi gerada. O algoritmo alterna entre dois passos até a convergência.

1) *Passo E (Esperança)*: Na iteração (k) , dado o conjunto de parâmetros corrente $\Theta^{(k)}$, o Passo E calcula a probabilidade esperada de cada observação x_i pertencer à componente l , conhecida como responsabilidade. Para $l = 1, 2$, esta é calculada por:

$$\tau_{il}^{(k)} = P(Z_i = l | x_i, \Theta^{(k)}) = \frac{p_l^{(k)} g_l(x_i; \theta_l^{(k)})}{\sum_{j=1}^2 p_j^{(k)} g_j(x_i; \theta_j^{(k)})} \quad (5)$$

onde Z_i é a variável latente que indica a componente de origem da observação x_i .

2) *Passo M (Maximização)*: Na iteração $(k+1)$, o Passo M atualiza os parâmetros Θ maximizando a log-verossimilhança dos dados completos esperada, o que equivale a:

(a) **Atualização do peso p_1** : O novo peso é a média das responsabilidades da primeira componente:

$$p_1^{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_{i1}^{(k)} \quad (6)$$

(b) **Atualização dos parâmetros das componentes θ_1 e θ_2** : Para cada componente $l = 1, 2$, o novo vetor de parâmetros $\theta_l^{(k+1)}$ é encontrado maximizando a log-verossimilhança daquela componente, ponderada pelas suas respectivas responsabilidades:

$$\theta_l^{(k+1)} = \arg \max_{\theta_l} \sum_{i=1}^N \tau_{il}^{(k)} \log g_l(x_i; \theta_l) \quad (7)$$

Em nossa implementação, utilizamos o método quasi-Newton BFGS, disponível na função optim() do software R. Diferente do método de Newton-Raphson, o BFGS não requer o cálculo analítico da matriz Hessiana (a matriz de segundas derivadas), mas sim a constrói de forma aproximada a cada iteração. Esta abordagem é computacionalmente menos custosa e mais simples de implementar, sendo uma escolha robusta para funções de verossimilhança complexas como a da mistura GEV.

3) *Critério de Convergência:* Os Passos E e M são repetidos até que a mudança na log-verossimilhança (Equação (4)) entre duas iterações consecutivas seja menor que uma tolerância pré-definida ϵ , ou seja, quando $\mathcal{L}(\Theta^{(k+1)}) - \mathcal{L}(\Theta^{(k)}) < \epsilon$. Para este trabalho, foi utilizado $\epsilon = 10^{-5}$.

C. Desenho do Estudo de Simulação

Para avaliar a performance dos estimadores obtidos via algoritmo EM, foi conduzido um estudo de simulação de Monte Carlo. O objetivo é analisar o comportamento dos estimadores em termos de viés e erro quadrático médio (EQM) sob diferentes cenários de parâmetros.

O procedimento para cada cenário foi o seguinte:

- 1) Foram realizadas $B = 1000$ réplicas de Monte Carlo.
- 2) Em cada réplica, foi gerada uma amostra de tamanho $n = 100$ da respectiva mistura de duas componentes GEV. A geração foi feita utilizando o método da transformação inversa, conforme descrito na Seção 3 do artigo de referência [5].
- 3) O algoritmo EM, descrito na seção anterior, foi aplicado a cada amostra gerada para obter o vetor de estimativas dos parâmetros, $\hat{\Theta}$.
- 4) Foram consideradas apenas as réplicas em que o algoritmo EM atingiu a convergência.
- 5) Ao final das B réplicas, o Viés e o EQM para cada estimador $\hat{\theta}$ foram calculados, respectivamente, como:

$$\text{Viés}(\hat{\theta}) = \left(\frac{1}{B_c} \sum_{i=1}^{B_c} \hat{\theta}_i \right) - \theta \quad (8)$$

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = \frac{1}{B_c} \sum_{i=1}^{B_c} (\hat{\theta}_i - \theta)^2 \quad (9)$$

onde B_c é o número de réplicas convergidas e θ é o valor verdadeiro do parâmetro.

Os cenários de simulação foram baseados nos “Casos” 4, 5 e 6 apresentados em Otiniano e Teixeira [5], contemplando misturas de componentes das famílias G_+ , G_- e G_0 .

D. Aplicação a Dados Reais

Para demonstrar a utilidade prática do método implementado, foi realizado um ajuste do modelo a um conjunto de dados públicos. **Optou-se por utilizar o mesmo conjunto de dados sobre o consumo de petróleo per capita de Otiniano e Teixeira (2014) [5], uma escolha que permite uma validação direta e uma comparação dos resultados obtidos pela nossa implementação do algoritmo EM com os da literatura de referência.** O ajuste foi realizado utilizando a estratégia de inicialização via k-means, que se mostrou a mais robusta nos testes preliminares.

III. BLOCO 03 RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos tanto no estudo de simulação de Monte Carlo quanto na aplicação do modelo de mistura GEV a um conjunto de dados reais. A análise foca na performance do algoritmo EM e na precisão dos estimadores gerados.

A. Resultados do Estudo de Simulação

O estudo de simulação foi conduzido conforme descrito na metodologia, com $B = 1000$ réplicas para cada um dos 6 cenários selecionados, utilizando amostras de tamanho $n = 100$.

1) *Análise de Convergência do Algoritmo:* A primeira métrica de performance avaliada foi a taxa de convergência do algoritmo EM para cada cenário, definida como a proporção de réplicas em que o critério de parada da log-verossimilhança foi atingido dentro do máximo de 100 iterações. A Figura 1 apresenta um resumo visual destas taxas.

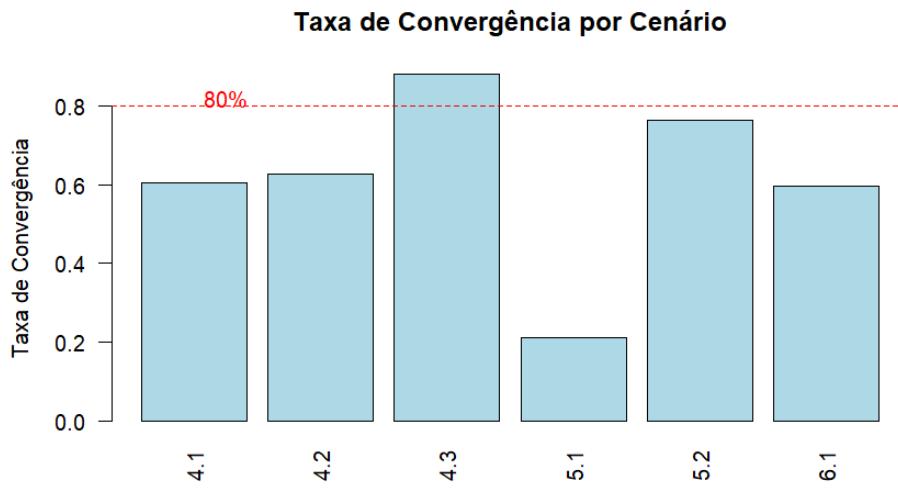


Figura 1: Taxa de convergência do algoritmo EM para cada cenário de simulação, com uma linha de referência em 80%.

Observa-se uma variação considerável na estabilidade do algoritmo. O Cenário 4.3 apresentou a melhor performance, com uma taxa de convergência superior a 88%. Em contrapartida, o Cenário 5.1 mostrou-se o mais desafiador, com o algoritmo convergindo em apenas 21.2% das réplicas. Os demais cenários apresentaram taxas de convergência intermediárias, entre 59% e 77%. Este resultado sugere que a performance do algoritmo EM é sensível à forma e à separação dos componentes da mistura.

2) *Análise do Viés e Erro Quadrático Médio (EQM):* Para as réplicas que convergiram, foram calculados o viés e o erro quadrático médio (EQM) de cada estimador. As Tabelas I e II sumarizam estes resultados.

TABLE I: Média das estimativas dos parâmetros para cada cenário ($n = 100$, $B = 1000$).

Cenário	\hat{p}_1	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\sigma}_2$
4.1	0.476	0.774	-0.034	2.093	0.220	0.708	1.394
4.2	0.502	0.398	-0.890	0.664	-0.077	2.886	2.823
4.3	0.439	1.866	1.585	5.775	0.535	0.530	0.691
5.1	0.675	-0.129	-1.448	1.206	-0.459	-0.137	1.580
5.2	0.620	0.062	0.058	2.191	-0.277	1.707	0.934
6.1	0.342	0.343	0.294	1.034	-0.651	1.136	1.118

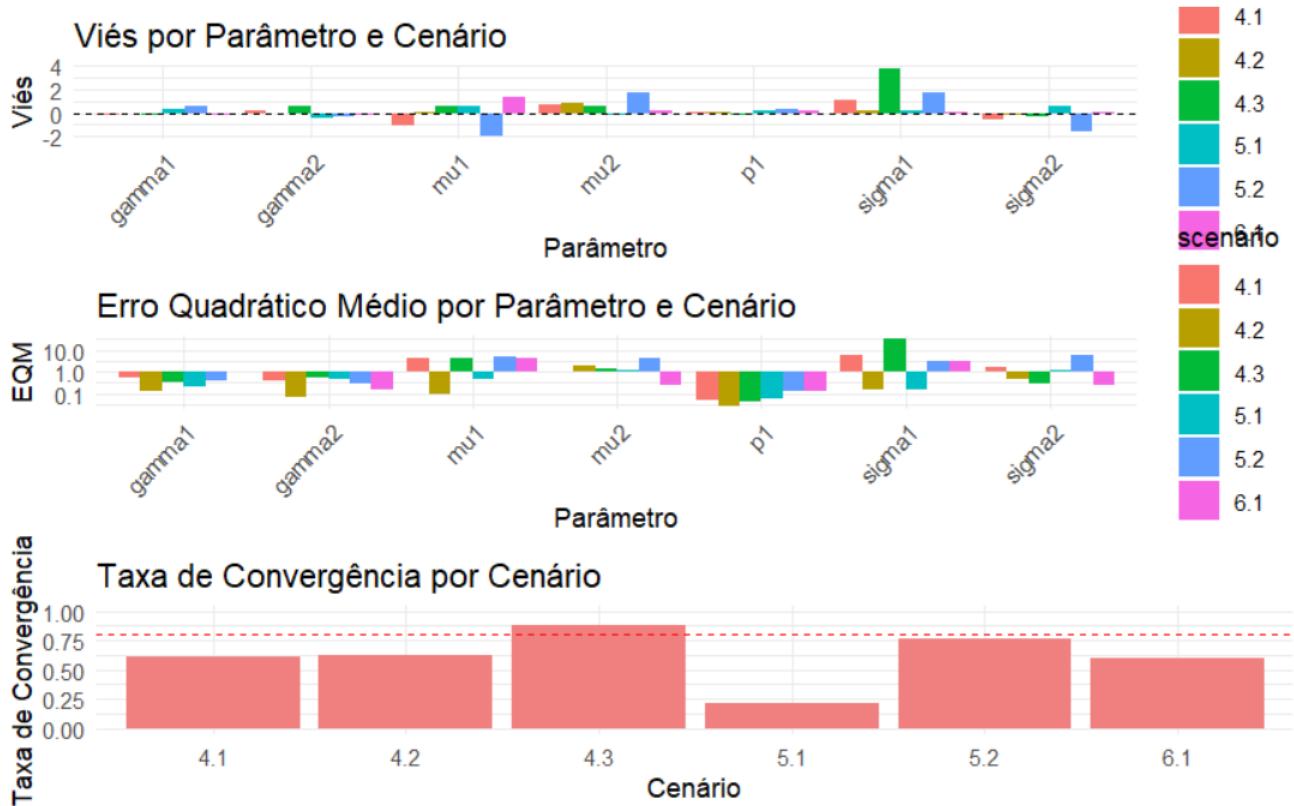
TABLE II: Erro Quadrático Médio (EQM) dos estimadores para cada cenário.

Cenário	\hat{p}_1	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\sigma}_2$
4.1	0.0485	0.5397	4.3613	6.1762	0.3877	0.9517	1.7542
4.2	0.0274	0.1214	0.0942	0.1618	0.0640	2.0637	0.4468
4.3	0.0436	0.3299	3.9624	33.1679	0.5778	1.3340	0.2920
5.1	0.0584	0.2118	0.4623	0.1485	0.4731	1.1031	1.1064
5.2	0.1201	0.3640	4.8226	3.2926	0.3016	3.9493	5.8180
6.1	0.1243	0.9360	4.3429	3.0924	0.1480	0.2538	0.2343

A análise das tabelas e das Figuras 2 e 3 revela padrões importantes. O Cenário 4.2 foi o que apresentou o menor EQM médio geral (0.426), indicando a melhor performance global do estimador.

Um resultado notável ocorreu no Cenário 4.3. Apesar de sua alta taxa de convergência, ele apresentou o maior EQM médio geral (5.672), impulsionado quase que inteiramente pela alta imprecisão na estimativa do parâmetro de escala σ_1 (EQM ≈ 33.17). O gráfico de viés na Figura 2 mostra que isso está associado a um forte viés positivo, indicando uma superestimação sistemática deste parâmetro. O painel correspondente a σ_1 na Figura 3 ilustra visualmente esta alta variância e viés, com pontos muito dispersos e acima da linha de referência.

O Cenário 5.2 também se destaca por apresentar vieses elevados para múltiplos parâmetros simultaneamente (e.g., p_1 , μ_1 , σ_1 , μ_2 , σ_2), sugerindo que, embora o algoritmo tenha收敛ido em 76.3% das vezes, frequentemente o fez para um máximo local distante dos verdadeiros valores dos parâmetros.

**Figura 2:** Comparação do Viés, Erro Quadrático Médio (em escala logarítmica) e Taxa de Convergência entre os cenários.

Estimativas vs Valores Verdadeiros

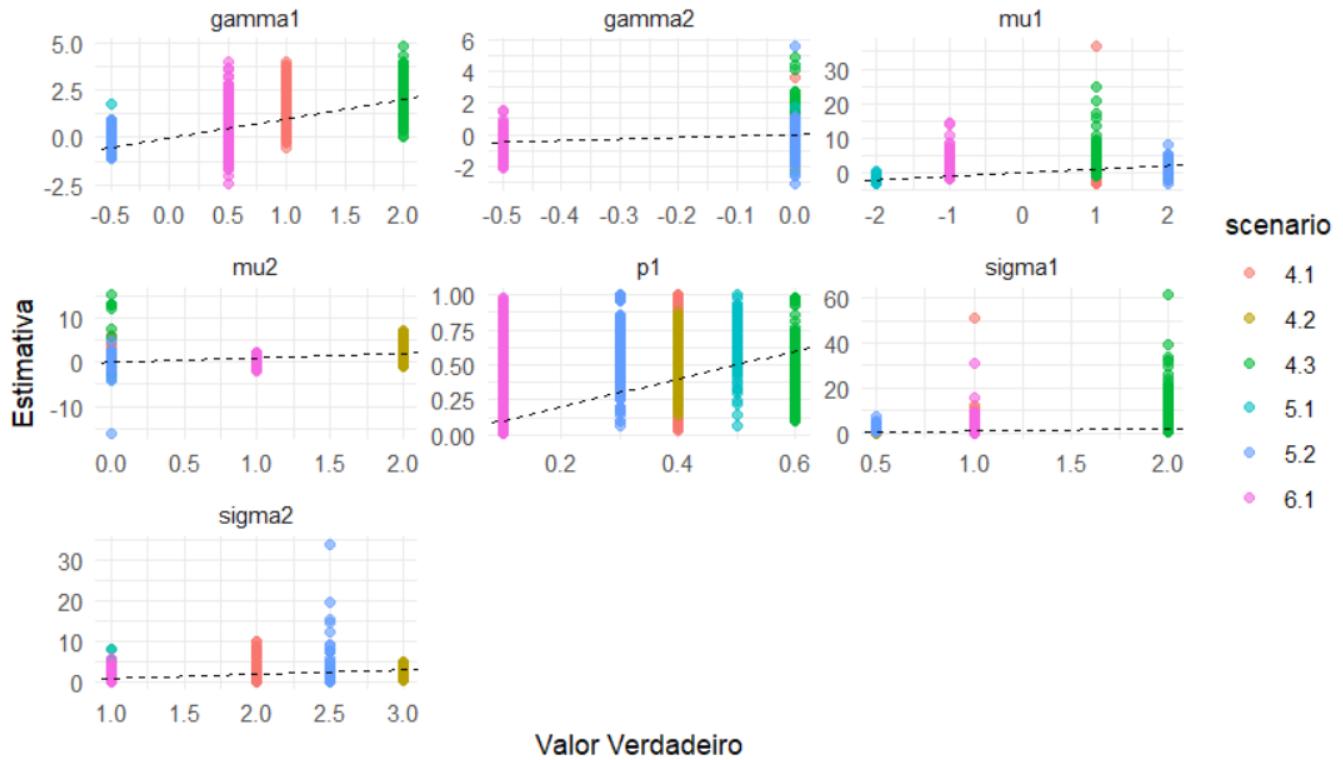


Figura 3: Dispersão das estimativas obtidas versus os valores verdadeiros para cada parâmetro, agregando todos os cenários.

B. Aplicação a Dados Reais

Para demonstrar a utilidade prática do método, o algoritmo EM foi aplicado a um conjunto de dados reais sobre o logaritmo do consumo de petróleo per capita em 135 países no ano de 2001, obtidos do Banco Mundial. Os dados, apresentados no histograma da Figura 4, sugerem uma clara bimodalidade, justificando o uso de um modelo de mistura.

A estratégia de inicialização via k-means, combinada com o algoritmo EM, convergiu com sucesso após 128 iterações, atingindo uma log-verossimilhança final de -225.08. Os parâmetros estimados para o modelo de mistura de duas componentes GEV foram: $\hat{p}_1 = 0.714$, $\hat{\theta}_1 = (\hat{\gamma}_1 = -0.453, \hat{\mu}_1 = 7.566, \hat{\sigma}_1 = 1.201)$ e $\hat{\theta}_2 = (\hat{\gamma}_2 = 0.048, \hat{\mu}_2 = 5.423, \hat{\sigma}_2 = 0.696)$.

A Figura 4 sobrepõe a densidade da mistura ajustada ao histograma dos dados. O ajuste visual é bastante satisfatório, com o modelo capturando bem as duas modas e a dispersão dos dados, o que valida a eficácia do algoritmo implementado para descrever dados de populações heterogêneas.

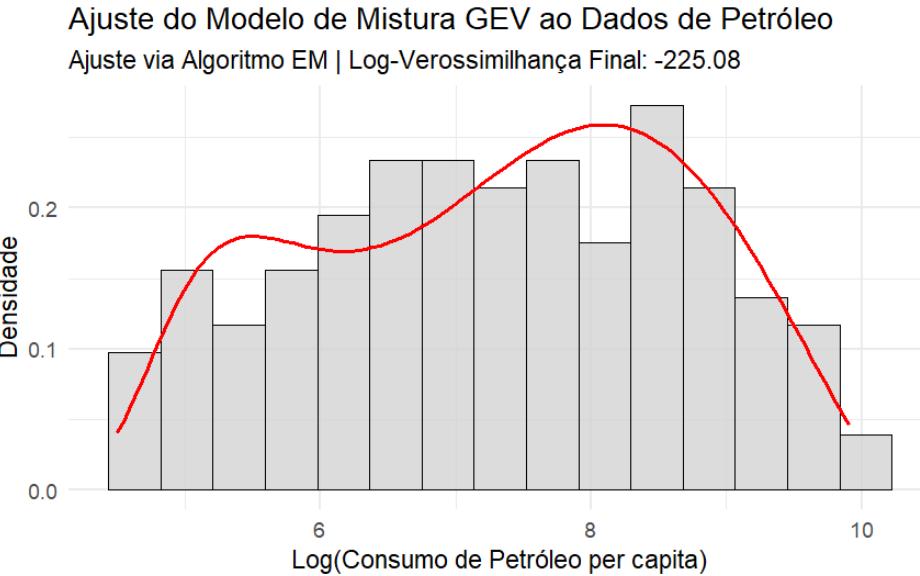


Figura 4: Histograma dos dados de consumo de petróleo e a densidade da mistura de duas componentes GEV ajustada via algoritmo EM.

IV. BLOCO 04 CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

Este trabalho propôs-se a desenvolver e avaliar um método para a estimação de parâmetros em modelos de mistura finita de duas componentes GEV, utilizando o algoritmo Esperança-Maximização (EM). A performance dos estimadores foi investigada através de um robusto estudo de simulação de Monte Carlo com 1000 réplicas, e a aplicabilidade do método foi demonstrada em um conjunto de dados reais.

Os resultados da simulação revelaram que o desempenho do algoritmo EM é fortemente dependente da estrutura dos dados. A estabilidade do algoritmo, medida pela taxa de convergência (Figura 1), variou de forma expressiva, com taxas tão baixas quanto 21.2% (Cenário 5.1) e tão altas quanto 88.1% (Cenário 4.3). Isto sugere que a topografia da função de verossimilhança se torna particularmente complexa em cenários com componentes de caudas opostas (G_- e G_+) ou com separação inadequada, dificultando a convergência do otimizador numérico no Passo M.

Uma conclusão crucial deste estudo é que a convergência do algoritmo não garante, por si só, estimativas precisas. O Cenário 4.3, apesar da sua alta taxa de convergência, apresentou um Erro Quadrático Médio (EQM) extremamente elevado para o parâmetro de escala σ_1 (Tabela II), um padrão visualmente confirmado na Figura 3. Este fenômeno pode ser atribuído a problemas de identificabilidade no modelo; quando uma das componentes tem uma variância muito grande, a verossimilhança pode se tornar “plana” na direção deste parâmetro, fazendo com que o algoritmo converja para uma região ampla de valores plausíveis, resultando em estimativas com alta variância. Adicionalmente, o comportamento no Cenário 5.2, com vieses elevados em múltiplos parâmetros, é um exemplo clássico de convergência para um máximo local.

As dificuldades encontradas reforçam a necessidade de estratégias robustas na aplicação prática do algoritmo EM. A sensibilidade aos valores iniciais e a complexidade da superfície de verossimilhança demandam uma implementação cuidadosa. A estratégia de inicialização via k-means, utilizada na aplicação aos dados reais, mostrou-se crucial para obter uma convergência estável e um ajuste visualmente satisfatório (Figura 4). Sua eficácia se deve à capacidade de fornecer uma partição inicial dos dados em agrupamentos. Os centroides e as proporções de cada cluster servem como estimativas iniciais informadas para os parâmetros de locação (μ) e os pesos de mistura (p_1), respectivamente. Esta abordagem posiciona o algoritmo EM em uma região promissora do espaço de parâmetros desde a primeira iteração, aumentando significativamente a probabilidade de convergência para o máximo global e evitando máximos locais de baixa qualidade. A aplicação prática demonstrou, portanto, que superados os desafios de estimação, o modelo de mistura GEV é uma ferramenta poderosa e flexível.

Como propostas para trabalhos futuros, diversas extensões podem ser exploradas. Uma generalização natural seria adaptar o algoritmo para misturas com mais de duas componentes ($k > 2$). Do ponto de vista da estimação, seria interessante comparar o desempenho do algoritmo EM com abordagens alternativas, como métodos Bayesianos via MCMC (e.g., Amostrador de Gibbs), que poderiam oferecer maior robustez em cenários de difícil convergência e quantificar a incerteza dos parâmetros de forma mais completa. Por fim, o modelo poderia ser estendido para um contexto de regressão, onde os parâmetros da GEV, como a locação μ , seriam modelados em função de covariáveis, aumentando ainda mais a aplicabilidade do modelo.

REFERENCES

- [1] C. Escalante-Sandoval, "A Mixed distribution with EV1 and GEV components for analyzing heterogeneous samples," *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. 8, no. 3, pp. 123-133, 2007.
- [2] A. F. Jenkinson, "The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements," *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 81, no. 348, pp. 158-171, 1955.
- [3] D.B.M. Maciel, G.I.A. Vieira, e P.R.D. Marinho, "Avaliação dos Desempenhos de Estimadores para os Parâmetros da Distribuição Birnbaum-Saunders," *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 14, no. 3, pp. 373-382, 2013.
- [4] G.J. McLachlan e D. Peel, *Finite mixture models*. New York: Wiley, 2000.
- [5] C.E.G. Otiniano e E.C.M. Teixeira, "Estimação dos Parâmetros da Mistura de Duas Componentes GEV via Algoritmo EM," *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 15, no. 1, pp. 59-71, 2014.
- [6] C. P. Robert e G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd ed. New York: Springer, 2004.
- [7] D.M. Titterington, A.F.M. Smith, e U.E. Makov, *Statistical analysis of finite mixture distributions*. New York: Wiley, 1985.