ESTATÍSTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO

Thiago Marzagão[1]

[1]marzagao.1@osu.edu

PROBABILIDADE

o que é probabilidade?

o que é probabilidade?

- Definição informal: probabilidade = chance de alguma coisa acontecer. Mas como a calculamos?
- Se jogamos uma moeda p/ cima duas vezes, qual a probabilidade de obtermos o mesmo resultado nos dois lançamentos?
- Resultados possíveis:
- CARA-CARA, COROA-COROA, CARA-COROA, COROA-CARA
- O conjunto de tudo o que pode acontecer é chamado de *espaço amostral*.
- De quantas maneiras diferentes podemos obter a mesma face em dois lançamentos?
- R: de duas maneiras diferentes (CARA-CARA e COROA-COROA).
- Logo, a probabilidade de obtermos o mesmo resultado nos dois lançamentos é de 2 em 4, ou 50%
- Probabilidade = de quantas maneiras diferentes X pode acontecer / quantidade de coisas diferentes que podem acontecer

conjuntos

- A = {João, Maria, Augusto, Cristina}
- B = {João, Maria, Fábio, Renata}
- A $\cap$ B = {João, Maria}
- A $\cup$ B = {João, Maria, Augusto, Cristina, Fábio, Renata}
- A - B = {Augusto, Cristina}
- B - A = {Fábio, Renata}

probabilidade

probabilidade (c/ 1 dado honesto)

- espaço amostral $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$
- $P(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6)$
- $= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$
- $= 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6$
- $= 6/6$
- $= 1$
- $P(\neq 3) = P(3') = P(3^c) = 1 - P(3) = 1 - 1/6 = 5/6$
- $P(7) = 0$
- $P(1 \cap 2) = 0$
- $0 \leq P \leq 1$

probabilidade (c/ 1 dado viciado)

- $P(6) = 5/20 = 1/4 = 0{,}25$
- $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 3/20 = 0{,}15$
- espaço amostral $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $P(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6)$
- $= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$
- $= 3/20 + 3/20 + 3/20 + 3/20 + 3/20 + 5/20$
- $= 20/20$
- $= 1$
- $P(\neq 3) = P(3') = P(3^c) = 1 - P(3) = 1 - 3/20 = 17/20$
- $P(7) = 0$
- $P(1 \cap 2) = 0$
- $0 \leq P \leq 1$

probabilidade (c/ 2 dados)

probabilidade (c/ 2 dados honestos)

- espaço amostral = {(1;1), (1;2) ... (6;6)}
- espaço amostral tem 36 elementos no total (6×6)
- P({3;5}) = ?
- $P(\{3;5\}) = P(3 \cap 5) = P(3) \times P(5) = 1/6 \times 1/6$

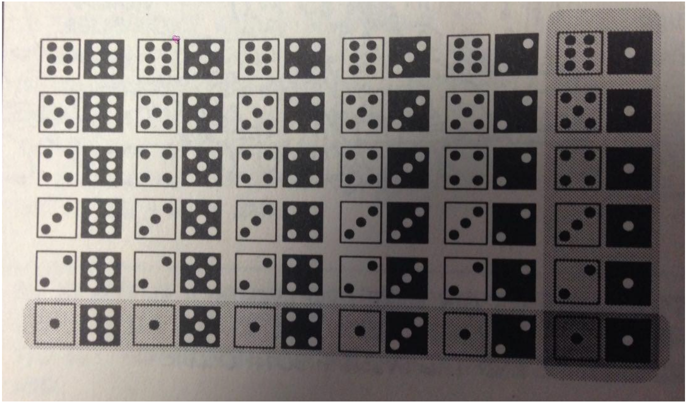
probabilidade (c/ 2 dados honestos)

- espaço amostral = {(1;1), (1;2) ... (6;6)}
- espaço amostral tem 36 elementos no total (6×6)
- P(dados somam 4) = ?
- dados somam 4 = {(1;3), (3;1), (2;2)}
- P(dados somam 4) = P({1;3} ou {3;1} ou {2;2})
- = 3 eventos em 36 = $3/36 = 1/12$
- ou:
- P({1;3} ou {3;1} ou {2;2}) = $P(\{1;3\} \cup \{3;1\} \cup \{2;2\})$
- $= P(\{1;3\}) + P(\{3;1\}) + P(\{2;2\})$
- $= (1/6 \times 1/6) + (1/6 \times 1/6) + (1/6 \times 1/6)$
- $= 1/36 + 1/36 + 1/36$
- $= 3/36$
- $= 1/12$
- Note: aqui os eventos são mutuamente excludentes.
- $(1;3) \cap (3;1) = \{\}$, $(1;3) \cap (2;2) = \{\}$, $(3;1) \cap (2;2) = \{\}$

probabilidade (c/ 2 dados honestos)

- espaço amostral = {(1;1), (1;2) ... (6;6)}
- espaço amostral tem 36 elementos no total (6×6)
- dado branco dá 1: {(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6)} = A
- dado preto dá 1: {(1;1), (2;1), (3;1), (4;1), (5;1), (6;1)} = B
- P(A) = 6/36
- P(B) = 6/36
- P(A ou B) = ?
- P(A ou B) = $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Note: aqui os eventos *não* são mutuamente excludentes.
- $A \cap B$ = (1;1)

espaço amostral c/ 2 dados



probabilidade (c/ 2 dados honestos)

- espaço amostral = {(1;1), (1;2) ... (6;6)}
- espaço amostral tem 36 elementos no total (6×6)
- dado branco dá 1: {(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6)} = A
- dado preto dá 1: {(1;1), (2;1), (3;1), (4;1), (5;1), (6;1)} = B
- P(A) = 6/36
- P(B) = 6/36
- P(A ou B) = ?
- P(A ou B) = $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Note: aqui os eventos *não* são mutuamente excludentes.
- $A \cap B$ = (1;1)
- = 6/36 + 6/36 - 1/36
- = 11/36

fórmula mais importante da aula de hoje

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

quando os eventos são mutuamente excludentes:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Se os eventos são mutuamente excludentes, então:
- $A \cap B = \{\}$
- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$
- $P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

mais de 2 eventos:

- $P(A \cup B \cup C)$
- $= P(A) + P(B) + P(C)$
- $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
- $+ P(A \cap B \cap C)$

exercício 1

- Em uma urna são colocadas 2 bolas brancas e 4 pretas. Alberto e Beatriz retiram bolas da urna alternadamente, iniciando-se com Alberto, até que a urna esteja vazia. A probabilidade de que a primeira bola branca saia para Alberto é:
- (a) 1/2
- (b) 3/5
- (c) 5/9
- (d) 7/12
- (e) 8/12
- (Engenheiro, BNDES, CESGRANRIO, 2011)

exercício 1 - resolução

- Rodadas:
- Alberto
- Beatriz
- Alberto
- Beatriz
- Alberto
- Beatriz

exercício 1 - resolução

- Três maneiras diferentes de a primeira bola branca sair p/ Alberto:
- Na primeira rodada: $2/6 = 1/3$
- Na terceira rodada: $4/6 \times 3/5 \times 2/4 = 24/120 = 1/5$
- Na quinta rodada: $4/6 \times 3/5 \times 2/4 \times 1/3 \times 2/2 = 48/720 = 1/15$
- Somando-se as três probabilidades: $1/3 + 1/5 + 1/15 = 3/5$

exercício 2

- Sabe-se que A, B e C são eventos independentes, associados a um mesmo espaço amostral, com probabilidades dadas, respectivamente, por $1/3$, $1/5$ e $1/2$. A probabilidade de que exatamente dois desses eventos ocorram é igual a:
- (a) $1/10$
- (b) $2/15$
- (c) $7/30$
- (d) $1/3$
- (e) $11/30$
- (Analista Judiciário, TRE-SP, FCC, 2012)

exercício 2 - resolução

- Reescrevendo, temos:
- $P(A) = 1/3$
- $P(B) = 1/5$
- $P(C) = 1/2$
- O que queremos encontrar:
- $P(A \cap B \cap C') + P(A \cap C \cap B') + P(B \cap C \cap A')$
- $P(A \cap B \cap C') = P(A) \times P(B) \times P(C') = 1/3 \times 1/5 \times 1/2 = 1/30$
- $P(A \cap C \cap B') = P(A) \times P(C) \times P(B') = 1/3 \times 1/2 \times 4/5 = 4/30$
- $P(B \cap C \cap A') = P(B) \times P(C) \times P(A') = 1/5 \times 1/2 \times 2/3 = 2/30$
- $P(A \cap B \cap C') + P(A \cap C \cap B') + P(B \cap C \cap A') = 1/30 + 4/30 + 2/30 = 7/30$

exercício 3

- Sabe-se que 80% de todos os eleitores de uma grande cidade brasileira são favoráveis a que se aplique, nas próximas eleições, a Lei da Ficha Limpa. Se 4 eleitores são selecionados ao acaso e com reposição dentre todos os eleitores dessa cidade, a probabilidade de que pelo menos 3 sejam favoráveis a que a referida lei seja aplicada nas próximas eleições é:
- (a) 0,8192
- (b) 0,8150
- (c) 0,8012
- (d) 0,7896
- (e) 0,7894
- (Analista Judiciário, TRE-SP, FCC, 2012)

exercício 3 - resolução

- $P(F) \times P(F) \times P(F) \times P(C) = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}1024$
- O eleitor contrário pode aparecer em 4 posições diferentes, portanto $0{,}1024 \times 4 = 0{,}4096$
- $P(F) \times P(F) \times P(F) \times P(F) = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}4096$
- Resposta $= 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192$

exercício 4

- Uma urna contém 3 bolas brancas, 4 pretas e 3 amarelas. Desta urna, 3 bolas são selecionadas ao acaso e com reposição. A probabilidade de que, entre as 3 selecionadas, no máximo duas sejam pretas é:
- (a) 0,976
- (b) 0,936
- (c) 0,875
- (d) 0,784
- (e) 0,652
- (Analista Judiciário, TRE-SP, FCC, 2012)

exercício 4 - resolução

- $P(P) = 4/10$
- $P(P') = 6/10$
- $P(P') \times P(P') \times P(P') = (6/10)^3 = 0{,}216$
- $P(P') \times P(P') \times P(P) = (6/10)^2(4/10) = 0{,}144$
- A bola preta pode estar em 3 posições diferentes, portanto $0{,}144 \times 3 = 0{,}432$
- $P(P') \times P(P) \times P(P) = (6/10)(4/10)^2 = 0{,}096$
- A bola não-preta pode estar em 3 posições diferentes, portanto $0{,}096 \times 3 = 0{,}288$
- Resposta $= 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}976$

exercício 5

- Segundo o controle de qualidade de uma empresa, a probabilidade do seu produto apresentar falha é de 0,10. Três pessoas compram o produto. A probabilidade de somente duas dessas pessoas terem comprado o produto com falha é:
- (a) 0,001
- (b) 0,009
- (c) 0,027
- (d) 0,243
- (e) 0,810
- (Auditor Público Externo, TCE-RS, FCC, 2011)

exercício 5 - resolução

- $P(F) \times P(F) \times P(F') = 0{,}10 \times 0{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}009$
- O produto sem falha pode aparecer em três posições diferentes, portanto $0{,}009 \times 3 = 0{,}027$

exercício 6

- Após o lançamento de um novo modelo de automóvel observou-se que 20% deles apresentavam defeitos na suspensão, 15% no sistema elétrico e 5% na suspensão e no sistema elétrico. Selecionaram-se aleatoriamente e com reposição 3 automóveis do modelo novo. A probabilidade de pelo menos dois apresentarem algum tipo de defeito é:
- (a) 0,354
- (b) 0,324
- (c) 0,316
- (d) 0,296
- (e) 0,216
- (Analista Judiciário, TRT-RJ, FCC, 2011)

exercício 6 - resolução

- Reescrevendo, temos:
- $P(S) = 0{,}20$
- $P(E) = 0{,}15$
- $P(S \cap E) = 0{,}05$
- $P(\text{problema}) = P(S \cup E) = P(S) + P(E)$ - $P(S \cap E)$
- $= 0{,}20 + 0{,}15$ - $0{,}05 = 0{,}30$
- P(3 carros c/ problema $=$ P(problema) $\times$ P(problema) $\times$ P(problema)
- $= 0{,}30 \times 0{,}30 \times 0{,}30 = 0{,}027$
- P(2 carros c/ problema) $=$ P(problema) $\times$ P(problema) $\times$ P(problema') $\times$ 3
- $= 0{,}30 \times 0{,}30 \times 0{,}70 \times 3 = 0{,}189$
- Resposta $=$ P(3 carros c/ problema) $+$ P(2 carros c/ problema) $=$ $0{,}027 + 0{,}189 = 0{,}216$

exercício 7

- Um jogo consiste em lanar uma moeda honesta até obter duas caras consecutivas ou duas coroas consecutivas. Na primeira situação, ao obter duas caras consecutivas, ganha-se o jogo. Na segunda, ao obter duas coroas consecutivas, perde-se o jogo. A probabilidade de que o jogo termine, com vitória, até o sexto lance, é:
- (a) 7/16
- (b) 31/64
- (c) 1/2
- (d) 1/32
- (e) 1/64
- (Administrador Júnior, Petrobrás, CESGRANRIO, 2011)

exercício 7 - resolução

- 5 maneiras diferentes de o jogo terminar em vitória:
- CARA-CARA
- COROA-CARA-CARA
- CARA-COROA-CARA-CARA
- COROA-CARA-COROA-CARA-CARA
- CARA-COROA-CARA-COROA-CARA-CARA

exercício 7 - resolução

- Probabilidades:
- P(CARA-CARA) $= 1/2^2$
- P(COROA-CARA-CARA) $= 1/2^3$
- P(CARA-COROA-CARA-CARA) $= 1/2^4$
- P(COROA-CARA-COROA-CARA-CARA) $= 1/2^5$
- P(CARA-COROA-CARA-COROA-CARA-CARA) $= 1/2^6$
- Somando-se essas probabilidades temos $31/64$

exercício 8

- Em um posto de combustíveis entram, por hora, cerca de 300 clientes. Desses, 210 vão colocar combustível, 130 vão completar o óleo lubrificante e 120 vão calibrar os pneus. Sabe-se, ainda, que 70 colocam combustível e completam o óleo; 80 colocam combustível e calibram os pneus e 50 colocam combustível, completam o óleo e calibram os pneus. Considerando que os 300 clientes entram no posto de combustíveis para executar uma ou mais das atividades acima mencionadas, qual a probabilidade de um cliente entrar no posto para completar o óleo e calibrar os pneus?
- (a) 0,10
- (b) 0,20
- (c) 0,25
- (d) 0,40
- (e) 0,45
- (Administrador, Petrobrás, CESGRANRIO, 2010)

exercício 8 - resolução

- P/ mais de 2 eventos:
- $P(C \cup L \cup P)$
- $= P(C) + P(L) + P(P)$
- - $P(C \cap L)$ - $P(C \cap P)$ - $P(L \cap P)$
- $+ P(C \cap L \cap P)$
- Aqui, $P(C \cup L \cup P) = 300/300$
- $300/300 = 210/300 + 130/300 + 120/300$ - $70/300$ - $80/300$ - $P(L \cup P) + 50/300$
- $P(L \cup P) = 60/300 = 0{,}20$

exercício 9

- O número de televisores vendidos diariamente em uma loja apresenta a seguinte distribuição de probabilidades de venda:
- $P(0) = x$, $P(1) = 3y$, $P(2) = z$, $P(3) = z$, $P(4) = 2y$, $P(5) = x$
- A probabilidade de que, em um determinado dia, não seja vendido nenhum televisor é igual a 10% e de que sejam vendidos mais que 3 é igual a 30%. Então, a probabilidade de que em um determinado dia sejam vendidos 2 televisores é de:
- (a) 10%
- (b) 12%
- (c) 15%
- (d) 18%
- (e) 20%
- (Analista Judiciário - Área Administrativa, TRF, FCC, 2010)

exercício 9 - resolução

- $P(0) = x = 10$
- $P(4 \cup 5) = 2y + x = 2y + 10 = 30$
- Logo, $y = 10$
- A soma das probabilidades tem que ser 100:
- $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 100$
- $10 + 30 + z + z + 20 + 10 = 100$
- $z = P(2) = P(3) = 15\%$

exercício 10

- Considere um grupo de 15 pessoas dos quais 5 são estrangeiros. Ao se escolher ao acaso 3 pessoas do grupo, sem reposição, qual a probabilidade de exatamente uma das três pessoas escolhidas ser um estrangeiro?
- (a) 45/91
- (b) 1/3
- (c) 4/9
- (d) 2/9
- (e) 42/81
- (Analista Técnico, SUSEP, ESAF, 2010)

exercício 10 - resolução

- $5/15 \times 10/14 \times 9/13 \times 3 = 45/91$

exercício 11

- Um torneio será disputado por 4 tenistas (entre os quais A e B) de mesma habilidade, isto é, em qualquer jogo entre dois dos quatro jogadores, ambos têm a mesma chance de ganhar.
  Na primeira rodada, eles se enfrentarão em dois jogos, com adversários definidos por sorteio. Os vencedores disputarão a final. A probabilidade de que o torneio termine com A derrotando B na final é:
- (a) 1/2
- (b) 1/4
- (c) 1/6
- (d) 1/8
- (e) 1/12
- (Fiscal de Rendas, SEFAZ-RJ, FGV, 2009)

exercício 11 - resolução

- Possíveis finais: AB, AC, AD, BC, BD, CD (6 no total)
- P(final entre A e B $\cap$ A vence B) $= 1/6 \times 1/2 = 1/12$

exercício 12

- Os eventos A e B são tais que $P(A) = 0{,}4$ e $P(B) = 0{,}9$. Assinale a única alternativa que apresenta um possível valor para $P(A \cap B)$:
- (a) 0,13
- (b) 0,22
- (c) 0,31
- (d) 0,49
- (e) 0,54
- (Fiscal de Rendas, SEFAZ-RJ, FGV, 2009)

exercício 12 - resolução

- (Desenhar diagramas de Venn no quadro)
- Maior intersecção possível: $A \subseteq B$
- Ou seja, sempre que A ocorre B também ocorre.
- Nesse caso, $P(A \cap B) = P(A) = 0{,}40$
- Menor intersecção possível: ?
- Intersecção vazia implicaria em $P(\text{total}) = 0{,}90 + 0{,}40 = 1{,}3$, o que não existe
- Qual a menor intersecção que respeita $P(\text{total}) = 1$?
- $1 - 0{,}90 = 0{,}10$: essa é a menor $P(A \cap B')$ possível
- Logo, pelo menos 0,30 de A precisam estar dentro de B
- Portanto $0{,}30 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}40$

exercício 13

- Sejam A, B e C três eventos quaisquer definidos em um espaço amostral S. Então, $P(A) + P(B) + P(C)$ - $P(A \cap B)$ - $P(A \cap C)$ - $P(B \cap C)$
- (a) um ou dois dos eventos
- (b) exatamente um dos eventos
- (c) pelo menos um dos eventos
- (d) no máximo dois eventos
- (e) pelo menos dois eventos
- (Fiscal de Rendas, SEFAZ-RJ, FGV, 2008)

exercício 13 - resolução

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- Ou seja:
- $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B \cap C) = P(\text{um ou dois dos eventos})$

exercício 14

- Uma urna contém: 1 bola amarela; 4 bolas azuis; 10 bolas brancas; 15 bolas vermelhas; e 20 bolas pretas. Dado que na primeira extração foi retirada uma bola vermelha, a probabilidade de na segunda tentativa retirar-se uma bola vermelha novamente é:
- (a) maior que retirar uma bola branca ou azul
- (b) maior que retirar uma bola preta
- (c) menor que retirar uma bola branca
- (d) menor que retirar uma bola azul
- (e) menor que retirar uma bola amarela ou branca ou azul
- (Auditor do Tesouro Municipal, Prefeitura de Natal-RN, EASF, 2008)

exercício 14 - resolução

- P(outra bola vermelha) $= 14/49$
- (a) maior que retirar uma bola branca ou azul?
- P(branca $\cup$ azul) $= 10/49 + 4/49 = 14/49$
- (b) maior que retirar uma bola preta?
- P(preta) $= 20/49$
- (c) menor que retirar uma bola branca?
- P(branca) $= 10/49$
- (d) menor que retirar uma bola azul?
- P(azul) $= 4/49$
- (e) menor que retirar uma bola amarela ou branca ou azul?
- P(amarela $\cup$ branca $\cup$ azul) $= 1/49 + 10/49 + 4/49 = 15/49$

exercício 15

- O IBGE estima que em 2050 17,7% dos brasileiros terão entre 0 e 14 anos e 18,8% dos brasileiros terão 65 anos ou mais. Considere que, em 2050, serão selecionados aleatoriamente três indivíduos, um após o outro, do grupo de pessoas que compõem a parcela da população brasileira com 15 anos ou mais. Nessa situação, a probabilidade de que apenas o terceiro indivíduo escolhido tenha pelo menos 65 anos de idade será superior a 0,5 e inferior a 0,6.
- (a) certo
- (b) errado
- (Analista do Seguro Social, INSS, CESPE, 2008; adaptada)

exercício 15 - resolução

- P(não-idoso) $\times$ P(não-idoso) $\times$ P(idoso)
- P($<$ 65) $\times$ P($<$ 65) $\times$ P($\geq$ 65)
- Importante "...com 15 anos ou mais".
- % de idosos na população com 15 anos ou mais?
- 18,8 / 82,3 = 22,84%
- % de não-idosos na população com 15 anos ou mais?
- 100 - 22,84 = 77,16%
- P(não-idoso) $\times$ P(não-idoso) $\times$ P(idoso) $= 0{,}7716 \times 0{,}7716 \times 0{,}2284 = 0{,}136$