ESTATÍSTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO

Thiago Marzagão[1]

[1]marzagao.1@osu.edu

PROBABILIDADE CONDICIONAL

probabilidade condicional

- Sejam A e B dois eventos quaisquer. P(A) dado que B acontece?
- Ex.: probabilidade de dois dados somarem 4, sabendo que um dá 2.
- A: dados somam 4: $\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$
- B: um dos dados dá 2
- $P(A \mid B) =$ P(A) dado que B acontece
- Se B acontece então nosso espaço amostral é reduzido:
- $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$
- Dados somam 4: $\{(2, 2)\}$
- $P(A \mid B) = 1/6$

probabilidade condicional

- $\text{P(A | B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

probabilidade condicional

- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A) = 3/36$
- $P(B) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$
- B: {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)}
- $P(A \cap B) = 1/36$
- $P(A \mid B) = \dfrac{1/36}{1/3} = 3/36 = 1/12$

eventos independentes

- Ex.: P(um dado cair 3 e outro dado cair 6)
- O resultado de um dado não influencia o resultado do outro.
- Nesses casos:
- $P(A \mid B) = P(A)$
- $P(\text{um dado cair 3} \mid \text{o outro dado caiu 6}) = P(\text{um dado cair 3}) = 1/6$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- (Já tínhamos visto isso na aula anterior! Mas implicitamente.)

mais um exemplo

- Família c/ 2 crianças.
- Se uma das crianças é um menino, qual a probabilidade de ambas as crianças serem meninos?
- 1/2? Não!
- A = ambas as crianças são meninos
- B = pelo menos uma das crianças é um menino
- P(A | B) $= \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)/P(B) = \dfrac{1/4}{3/4} = 1/3$
- visualmente: {(m,m)} / {(m,m), (m,f), (f,m)}

Teorema de Bayes

- Teorema de Bayes:
- P(A | B) $= \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$
- Utilidade: o Teorema de Bayes nos permite calcular P(A | B) a partir de P(B | A)
- Fácil de derivar:
- P(A | B) $= \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- P(A ∩ B) = P(A | B)P(B)
- P(A | B) $= \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

- Teste p/ detectar febre zika
- A: pessoa tem zika
- A': pessoa não tem zika
- B: teste dá positivo
- P(A) = 0,0001
- P(A') = 0,9999
- P(B | A) = 0,90
- P(B | A') = 0,001
- P(A | B) = ?
- P(A | B) = $\dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$
- P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | A')P(A')
- = 0,90 × 0,0001 + 0,001 × 0,9999 = 0,00009 + 0,0009999 = 0,0010899
- P(A | B) = $\dfrac{0,90 \times 0,0001}{0,0010899} = 0,0825$

probabilidade condicional

- Terminologia:
- P(A) = probabilidade *a priori*
- P(A | B) = probabilidade *a posteriori*

Teorema de Bayes

- Preparem-se...

A Porta dos Desesperados

A Porta dos Desesperados

- https://www.youtube.com/watch?v=VCPBvKYqm5U
- (Mostrar só o comecinho do vídeo.)

Porta dos Desesperados

- Qual a melhor estratégia? Trocar de porta ou não?

Teorema de Bayes

- Você escolhe a porta 1.
- O Sérgio Mallandro *sabe* de antemão onde está o prêmio.
- Logo, ele vai abrir a porta em que o prêmio *não* está.
- Ou seja, ele não escolhe a porta aleatoriamente.
- Digamos que o Sérgio Mallandro abre então a porta 2.
- A = prêmio está atrás da porta 1
- B = Sérgio Mallandro abre a porta 2

Teorema de Bayes

- P(A) $= 1/3$
- P(B) $= 1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3 = 1/3$
- P(B | A) $= 1/2$
- P(A | B) $= \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{1/2 \times 1/3}{1/3} = 1/3$
- Ou seja, P(prêmio atrás da porta 1 | Sérgio Mallandro abriu a porta 2) $= 1/3$
- Logo, P(prêmio atrás da porta 3) $= 2/3$
- A melhor estratégia é mudar de porta!

Teorema de Bayes

- P(A | B) $= \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$
- Na maior parte das vezes o ponto crucial é calcular o denominador.
- P/ calcularmos a probabilidade *incondicional* de B nós multiplicamos, p/ cada evento A_1, A_2, ..., A_n, a probabilidade de B acontecer dado aquele evento (digamos, $P(B \mid A_1)$) pela probabilidade de aquele evento acontecer ($P(A_1)$) e somamos todos esses produtos:
- $P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n)$
- $P(B)$ é uma média ponderada.

probabilidade condicional

- Lição: probabilidade condicional é com freqüência contra-intuitiva.
- Nossa intuição nos engana:
- ...P(2 meninos | pelo menos 1 um menino) = 1/3
- ...P(zika | teste deu positivo) = 8,25%
- ...P(prêmio atrás da porta 3 | SM abriu a porta 2) = 1/3

probabilidade condicional

- Como identificar um problema de probabilidade condicional:
- ...contém expressões como "dado que", "considerando que", "sabendo que", etc

exercício 1

- Em uma fábrica existem 3 máquinas A, B e C que produzem diariamente 10.000 peças. Sabe-se que A, B e C produzem, respectivamente, 2000, 5000 e 3000 peças. Da produção de A, B e C, respectivamente, 5%, 10% e 20% so defeituosas. Seleciona-se uma peça ao acaso e verifica-se que é defeituosa. A probabilidade de ela ser proveniente da máquina C é:
- (a) 0,20
- (b) 0,25
- (c) 0,30
- (d) 0,40
- (e) 0,50
- (Analista de Controle, TCE-PR, FCC, 2011)

exercício 2

- Dois professores corrigem a prova de redação de um concurso público. O professor A corrige o dobro de provas do que o professor B. Sabe-se que 60% das provas corrigidas pelo professor A tiveram nota superior a 7, enquanto apenas 20% das provas corrigidas pelo professor B tiveram nota superior a 7. Se um candidato teve conceito não superior a 7, a probabilidade de sua prova ter sido corrigida pelo professor A é:
- (a) 0,85571
- (b) 0,75000
- (c) 0,33333
- (d) 0,50000
- (e) 0,25000
- (Auditor Público Externo, TCE-RS, FMP-RS, 2011)

exercício 3

- Um dado é viciado de tal modo que a probabilidade de ocorrer face par é duas vezes maior que a de ocorrer face ímpar. O dado é lançado duas vezes independentemente. Considere os seguintes eventos:
  A = a soma dos pontos das faces é 6
  B = no primeiro lançamento a face é menor que 3
  Nessas condições a probabilidade de A, sabendo que ocorreu B, é:
- (a) 5/27
- (b) 5/81
- (c) 27/81
- (d) 18/81
- (e) 8/27
- (Estatístico, INFRAERO, FCC, 2011; adaptada)

exercício 4

- Um estudo sobre fidelidade do consumidor à operadora de telefonia móvel, em uma determinada localidade, mostrou as seguintes probabilidades sobre o hábito de mudança:

Probabilidade de um consumidor mudar de (ou manter a) operadora

		A nova operadora é		
		A	B	C
Se a operadora atual é	A	0,50	0,35	0,15
	B	0,20	0,70	0,10
	C	0,40	0,30	0,30

- A probabilidade de o 1° telefone de um indivíduo ser da operadora A é 0,60; a probabilidade de o 1° telefone ser da operadora B é de 0,30; e a de ser da operadora C é 0,10. Dado que o 2° telefone de um cliente é da operadora A, a probabilidade de o 1° também ter sido é de:

exercício 4 (cont.)

- (a) 0,75
- (b) 0,70
- (c) 0,50
- (d) 0,45
- (e) 0,40
- (Administrador Júnior, Petrobrás, CESGRANRIO, 2011)

exercício 5

- Admita que a probabilidade de uma pessoa de um particular grupo genético ter uma determinada doenąa é de 30%. Um custoso e invasivo exame para diagnóstico específico dessa doença tem uma probabilidade de um resultado falso positivo de 10% e de um resultado falso negativo de 30%. Considerando que uma pessoa desse grupo genético com suspeita da doença fez o referido exame, qual a probabilidade dela ter a doença dado que o resultado do exame foi negativo?
- (a) 30%
- (b) 7,5%
- (c) 25%
- (d) 15%
- (e) 12,5%
- (Analista Técnico, SUSEP, ESAF, 2010)

exercício 6

- Determinados processos de um tribunal são encaminhados para a análise de 3 analistas: X, Y e Z. Sabe-se que 30% de todos esses processos são encaminhados para X, 45% para Y e 25% para Z. Usualmente, por falta de documentação, uma parcela de tais processos é devolvida. Sabe-se que 5% , 10% e 10% dos processos de X, Y e Z, respectivamente, são devolvidos. A probabilidade de que um processo escolhido ao acaso tenha sido encaminhado para X, sabendo que foi devolvido, é:
- (a) 4/15
- (b) 3/17
- (c) 6/19
- (d) 7/15
- (e) 3/19
- (Analista Judiciário, TRT-MG, FCC, 2009)

exercício 7

- A tabela a seguir apresenta o número estimado da população em cada região brasileira no ano de 2007 (fonte: IBGE), a porcentagem estimada de pessoas por região que possuem aparelho de telefone celular (fonte: TIC Domicílios do NIC.br), e a multiplicação dessas duas quantidades por região (pop x cel), com duas casas decimais de precisão:

Região	Número de habitantes da região (em 1.000.000) (pop)	Porcentagem de habitantes da região que possuem celular (cel)	pop x cel
Sudeste	77,9	52%	40,51
Nordeste	51,5	44%	22,66
Sul	26,7	61%	16,29
Norte	14,6	43%	6,28
Centro-Oeste	13,3	60%	7,92
Total	184,0	–	93,66

exercício 8

- Durante um blackout, 100 pessoas são presas sob suspeita de saqueamento. Cada suspeito é submetido a um polígrafo. O polígrafo é 90% confiável quando o suspeito é culpado e 98% confiável quando o suspeito é inocente. Sabemos que 12 dos 100 suspeitos são de fato culpados. Qual a probabilidade de um suspeito ser inocente se o polígrafo diz que ele é culpado?
- (adaptado de Larsen and Marx, *An introduction to mathematical statistics and its applications - 4a edição*)

exercício 9

- O alarme da sua casa dispara com probabilidade 95% se alguém entrar. Nos últimos dois anos o alarme disparou em 5 noites diferentes, sempre sem motivo. Dadas as estatísticas criminais do seu bairro, a probabilidade de ladrões entrarem na sua casa é de 1 em 5000. Se seu alarme disparar hoje á noite, qual a probabilidade de alguém ter entrado na sua casa?
- (adaptado de Larsen and Marx, *An introduction to mathematical statistics and its applications - 4a edição*)

exercício 10

- Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total, respectivamente. Da produção de cada máquina 5%, 4% e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que venha da máquina A? Da B? Da C?
- (Bussab & Morettin, *Estatística Básica*)

exercício 11

- Para estudar o comportamento do mercado automobilístico, as marcas foram divididas em três categorias: marca F, marca W, e as demais reunidas como marca X. Um estudo sobre o hábito de mudança de marca mostrou o seguinte quadro de probabilidade:

Proprietário de carro da marca	Probabilidade de mudança para		
	W	*F*	*X*
W	0,50	0,25	0,25
F	0,15	0,70	0,15
X	0,30	0,30	0,40

- A compra do primeiro carro é feita segundo as seguintes probabilidades: marca W com 50%, marca F com 30% e marca X com 20%.
- (a) Qual a probabilidade de um indivíduo comprar o terceiro carro da marca W?
- Se o terceiro carro é da marca W, qual a probabilidade de o primeiro também ter sido da marca W?
- (Bussab & Morettin, *Estatística Básica*)

exercício 12

- A empresa M & B tem 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

Idade \ Sexo	Homens (M)	Mulheres (F)	Total
< 25 anos (A)	2.000	800	2.800
25 – 40 anos (B)	4.500	2.500	7.000
> 40 anos (C)	1.800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

- Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ser ele:
- (a) um empregado com 40 anos de idade ou menos;
- (b) um empregado com 40 anos de idade ou menos, e mulher;
- (c) um empregado com mais de 40 anos de idade e que seja homem;
- uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.
- (Bussab & Morettin, *Estatística Básica*)

exercício 13

- Os colégios A, B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, *com* reposição. Se o resultado for RRRMMMMM (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C?
- (Bussab & Morettin, *Estatística Básica*)

exercício 14

- Num mercado, três corretoras, A, B e C são responsáveis por 20%, 50% e 30% do volume total de contratos negociados, respectivamente. Do volume de cada corretora, 20%, 5% e 2%, respectivamente, são contratos futuros em dólares. Qual é a probabilidade de ter sido negociado pela corretora A? E pela corretora C?
- (Bussab & Morettin, *Estatística Básica*)