Colle 20 - lundi 8 mars 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

Exercice 1. Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(e^{2x}+2e^x+3)$$

Exercice 2. Soit u_n une suite réelle vérifiant $u_n^5+nu_n-1=0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Planche 2.

Question de cours. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n = O(v_n)$ et (v_n) converge. Est ce que (u_n) converge ?

Exercice 1. Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\sqrt{8+\sqrt{1+6x}}$$

Exercice 2. Soit la suite (u_n) réelle définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Planche 3.

Question de cours. Donner un équivalent de $\ln(n+1)-\ln(n+2)$.

Exercice 1. Former le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de :

$$ch(\ln(ch(x)))$$

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application C^2 et $f(0) = 0$. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$. Montrer que $u_n \to \frac{1}{2}f'(0)$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. On a $(1+\frac{1}{n})^n = \exp(n\ln(1+1/n))$. Or $\ln(1+1/n) = 1/n - 1/(2n^2) + o(1/n)$. Donc $n\ln(1+1/n) = 1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)$. On en déduit :
$(1+1/n)^n = \exp(1-1/(2n)+o(1/n)) = e\exp(-1/(2n)+o(1/n)) = e(1+1/(2n)+o(1/n))$

Exercice 1.

$$\ln(e^{2x}+2e^x+3) = \ln[(1+2x+\frac{1}{2!}(2x)^2) + 2(1+x+\frac{1}{2!}x^2) + 3 + o(x^2)]$$

$$= \ln(6+4x+3x^2+o(x^2)) = \ln(6) + \ln(1+2x/3+x^2/2+o(x^2))$$

$$= \ln(6) + (2x/3+x^2/2) - 1/2(2x/3+x^2/2)^2 + o(x^2)$$

$$= \ln(6) + \frac{2}{3}x + \frac{5}{18}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 2. [chaud]
On pose le polynôme $P_n(X) = X^5 + nX - 1$. u_n est alors une racine de P_n. On va étudier la fonction $P_n(x)$ pour obtenir des informations sur u_n (c'est ultra classique). Dérivons P_n : $P_n'(X) = 5X^4 + n \geq 0$. Donc P_n est croissante. De plus $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'unique racine u_n de P_n est situé entre 0 et 1 :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Devinons la limite : ça va être 0 ou 1. Pour montrer que u_n tend vers 0 on cherche à la majorer par genre $1/n$? Pour faire cela il faut regarder le polynôme en cette valeur : $P_n(1/n) = (1/n)^5 + 1 - 1 = (1/n)^5 \geq 0$. Donc $0 \leq u_n \leq 1/n$. Donc $u_n \to 0$.

Ok, maintenant pour continuer devinons d'abord l'équivalent. $1/n$? Pour montrer cela il faudrait minorer par une suite équivalente à u_n. Genre $1/(n+1)$? Comme avant on va essayer de montrer que $P_n(1/(n+1)) \leq 0$:

$$P_n(1/(n+1)) = \frac{1}{(n+1)^5} + \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{1}{(n+1)^5} - \frac{1}{n+1}$$

Or $1/(n+1)^5 = o(1/(n+1))$ donc $P_n(1/(n+1))$ est du signe de $-1/(n+1)$ donc négatif. Donc

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

C'est gagné $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Plus rapide : on peut essayer directement la formule : $nu_n = 1 - u_n^5 \to 1$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Du coup c'est plus facile pour faire le reste du développement. On pose $v_n = u_n - 1/n$. On a alors :

$$v_n = -u_n^5/n \simeq -\frac{1}{n^6}$$

Donc $\boxed{u_n = 1/n + 1/n^6 + o(1/n^6)}$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. $u_n = \cos(n)$ et $v_n = 1$. v_n converge et $|u_n| \leq |v_n|$. Mais u_n ne converge pas.

Exercice 1.

$$\sqrt{1+6x} = 1 + \frac{1}{2}6x - \frac{1}{8}(6x)^2 + o(x^2) = 1 + 3x - 9x^2/2 + o(x^2)$$

On insère le développement :

$$\sqrt{8+\sqrt{1+6x}} = \sqrt{9+3x-9x^2/2+o(x^2)}$$

$$= 3\sqrt{1+x/3-x^2/2+o(x^2)} = 3(1+x/6-19x^2/72+o(x^2))$$

$$= 3 + \frac{1}{2}x - \frac{19}{24}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 2. Commençons à déterminer la limite. On montre par récurrence que $u_n \geq 0$ et donc $u_n \geq \sqrt{n}$ donc $u_n \to \infty$. Un équivalent ? Bah $\sqrt{n}$. Ok mais faut majorer par un truc en $\sqrt{n}$. Calculons les premiers termes : $u_1 = 1$. $u_2 = \sqrt{3} \leq 2\sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{3+\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{3}$. Donc $u_n \leq 2\sqrt{n}$ par récurrence ? Supposons que $u_n \leq 2\sqrt{n}$. Alors $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1+2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$??? Pour montrer cela on passe au carré : Est ce que $n+1+2\sqrt{n} \leq 4(n+1)$? bah oui $2\sqrt{n} \leq 3(n+1)$.

Donc $u_n = O(\sqrt{n})$. Or $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n}\sqrt{1+u_{n-1}/n}$. Or $u_n/n \to 0$. Donc $u_n \sim \sqrt{n}$. Réinsérons le premier terme du développement.

$$v_n = u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}} \to 1/2$$

On conclut que $u_n = \sqrt{n} + 1/2 + o(1)$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. $\ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln(\frac{n+1}{n+2}) = \ln(\frac{n+2-1}{n+2}) = \ln(1 - \frac{1}{n+2}) \sim \frac{-1}{n}$

Exercice 1.

$$\ln(ch(x)) = \ln(1 + x^2/(2!) + x^4/(4!) + o(x^4)) = x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$$

puis

$$ch(\ln(ch(x)) = ch(x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)) = 1 + \frac{1}{2!}(x^2/2 - x^4/12 + o(x^4))^2 + o(x^6)$$

$$= 1 + x^4/8 - x^6/24 + o(x^4)$$

Exercice 2. On va utiliser Taylor-Lagrange : comme f est C^2 sur un segment, alors d'après le théorème de Heine, f'' est bornée par M. Donc avec Taylor Lagrange en 0 on a :

$$|f(k/n^2) - f(0) - k/n^2 f'(0)| \leq \frac{(k/n^2 - 0)^2}{2!} \sup_{[0,1]} |f''| \leq \frac{k^2}{2n^4} M$$

Sommons cela :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(k/n^2) - k/n^2 f'(0)| \leq M/n^4 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{Mn(n+1)(2n+1)}{6n^4} \to 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} k/n^2 f'(0) = \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{f'(0)n(n+1)}{2n^2} \to \frac{f'(0)}{2}$$

Donc u_n converge aussi vers $f'(0)/2$.