Colle 29 - lundi 8 juin 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. On pose la permutation suivante : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
Décomposer σ produit de cycles à support disjoints. Donner sa signature. Décomposer en transposition.

Exercice 1. Calculer par récurence :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 2. Soit A une matrice telle que $a_{i,j} = \pm 1$. Montrer que : $2^{n-1} | det(A)$

Planche 2.

Exercice 0. Cacluler $det(com(A))$.

Exercice 1. On pose $V = \{x \longmapsto e^x P(x) : P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Montrer que V est un sev des fonctions réelles. Calculer sa dimension. Calculer le déterminant de l'application suivante :

$$D : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

Planche 3.

Exercice 0. Montrer que si A est antisymétrique et n est impaire alors $det(A) = 0$.

Exercice 1. On pose la permutation : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Cacluler σ^{2015}.

Exercice 2. Calculer par récurence :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours On part d'un élement et on regarde son orbite : $1 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1$ et $4 \to 7 \to 4$. On a alors deux cycles à supports disjoints.

$$\sigma = (13625)\,(47) = (47)\,(13625)$$

Pour calculer la signature, on utilise que très peu la définition avec les inversions car plus longue à calculer. Ici, on a décomposé σ en cycles donc on utilise la définition avec les cycles :

$$\epsilon(\sigma) = \prod \epsilon(cycles) = \epsilon(13635)\epsilon(47) = (-1)^4(-1)^1 = (-1)$$

On décompose chaque cycle en transposition pour la décomposition en transpositions de σ :

$$\sigma = (13)(36)(62)(25)(47)$$

Exercice 1. Bidouillons, il y a deux outils : développer par une lige ou une colonne et faire des opérations élementaires. L'idée est de faire des opérations élementaires pour mettre des 0 ou des 1. On fait alors $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$.

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On sort le $n-1$ de la première colonne :

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Maintenant qu'on a une colonne avec uniquement des 1, on retranche la première colonne à toutes les autres pour faire plein de 0. $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour tout $j > 1$. D'où :

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On a alors une matrice triangulaire dont le déterminant est facile à calculer car c'est le produit des élements diagonaux. D'où :

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 2. Si on enlève la première colonne à toutes les autres, alors il ne reste à droite que des coefficients $= 0, \pm 2$. Du coup on peut factoriser par 2 chacune des colonnes à droite. D'où la formule.

Solutions - Planche 2.

Exercice 0. Il y a deux choses à connaître sur la comatrice. La définition avec les mineurs et la formule suivante :

$$^{t}com(A)A = det(A)In$$

Or en prenant le déterminant on obtient :

$$det(^{t}com(A))det(A) = det(A)^n$$

Si A est inversible alors $det(com(A)) = det(A)^{n-1}$. Si A n'est pas inversible alors $com(A)$ n'est pas inversible car $A^{t}com(A) = 0$.

Exercice 1. V est inclus dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$e^x(\lambda P(x) + Q(x)) = \lambda e^x P(x) + e^x Q(x)$$

Donc il s'agit d'un sev.

Pour trouver la dimension, soit on donne une base explicite soit on donne un isomorphisme avec un ev dont on connaît la dimension. On va faire les deux méthodes.

On pose : $e_i = e^x x^i$ pour $0 \leq i \leq n$. On va montrer que $\{e_0, \cdots, e_n\}$ est une base de V. Montrons qu'elle est génératrice. Soit $e^x P(x) \in V$, alors P s'écrit : $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Donc $e^x P(x) = \sum_{i=0}^n a_i e^x x^i = \sum_{i=0}^n a_i e_i$. Donc c'est générateur.

Montrons que la famille est libre. Supposons qu'il existe des a_i tels que :

$$\sum_{i=0}^n a_i e_i = 0$$

Alors $e^x(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = 0$. Or e^x ne s'annule pas donc $\sum_{i=0}^n a_i x^i$. Or les X^i forment une base de $\mathbb{R}_[X]$, donc $a_i = 0$ pour tout i. Donc la famille est libre. Finalement il s'agit d'une base. Donc la dimension de V est $n+1$.

La deuxième méthode consiste à poser :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & V \\ P & \longmapsto & e^x P(x) \end{array}$$

On vérifie alors de la même manière que précedemment qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Passons à D, on va calculer la matrice de D dans la base précédente.

$$D(e^x P(x)) = (P(x) + P'(x))e^x$$

Donc $D(e_i) = e_i + ie_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$ et $D(e_0) = e_0$.

$$M(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $det(D) = det(M(D)) = 1$.

Exercice 2. On note D_n le déterminant à calculer. On développe par rapport à la première ligne. Alors :

$$D_n = (-1)^{n+1} D_{n-1}$$

Donc $D_n = (-1)^{n+1}(-1)^n \cdots (-1)^3 D_1$ Pour tout $n \geq 1$. Or $D_1 = 1$. Donc $D_n = (-1)^{\sum_{k=0}^{n-1} k}$. Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = (n+1)n/2$$

Donc :

$$D_n = (-1)^{(n+1)n/2}$$

Solutions - Planche 3.

Exercice 0.
$$det(A) = det({}^tA) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$$
Donc $det(A) = 0$.

Exercice 1. On décompose en produit de cycle disjoint.

$$\sigma = (14)(253)$$

Or $\sigma^n = (14)^n(253)^n$ car les permutations sont à supports disjoints.

Or $(14)^2 = id$ et $(253)^3 = id$. Du coup il suffit de regarder à combien est congru 2015 modulo 2 et 3.

Or 2015 et impaire donc $(14)^{2015} = (14)$ et $2015 = 671 \times 3 + 2$ donc $(253)^{2015} = (253)^2 = (235)$.
Donc
$$\sigma^{2015} = (14)(235) = \sigma$$

Exercice 2. Même méthode que pour l'exercice de la planche 2, on fait des opérations pour se ramener au cas précédent. Pour ce faire on peut par exemple mettre plein de 0 sur la dernière colonne en faisant $C_n \leftarrow C_n - C_1$. On obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne. On obtient :

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

On enlève alors sur la deuxième matrice la première colonne (qui est une colonne que de 1) à toute les autres. On obtient :

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n-1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on obtient :

$$D_n = nD_{n-1} + Diag(1, \cdots, n-1) = nD_{n-1} + (n-1)!$$

On résoud maintenant cette suite. Il ne s'agit pas d'une suite récurente linéaire. Donc on ne peut pas utiliser le cours. Il faut utiliser le *trick* suivant : on pose $u_n = \frac{D_n}{n!}$. On obtient alors en divisant par $n!$:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$$

Ce qui est beaucoup mieux car : $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + H_n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Finalement on a :

$$D_n = (1 + H_n)n!$$