Colle 8 $\sim$ 26 novembre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MPSI $\sim$ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Donner la définition de relation d'ordre et de relation d'équivalence. Donner un exemple de relation d'ordre partiel mais non total.

Exercice 1. On définit la relation sur $\mathbb{N}^*$ suivante : $n \sim m \iff \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 / 2^a n = 2^b m$. De quoi s'agit t'il comme relation binaire ?

Exercice 2. Calculer

$$\sup\{(-1)^{n^2}(1-e^{-n})\}$$

Planche 2.

Question de cours. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On définit la relation $x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N} : y = x^n$ sur $]0,+\infty[$. Quelles sont les propriétés de cette relation binaire ?

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B = \{a+b / a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A+B$ est majorée et

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Planche 3.

Question de cours. Donner les définitions de majorant, borne supérieure et maximum. Donner un exemple tel que la borne supérieure est un maximum et un exemple tel que ce ne soit pas le cas.

Exercice 1. On pose $A_k = \{-n^2 + nk + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ pour k un entier. Trouver un majorant et la borne supérieure.

Exercice 2. Soit R une relation binaire réflexive et transitive sur E. On définit S et T deux relations binaires sur E par

$$xSy \iff xRy \text{ et } yRx$$

$$xTy \iff xRy \text{ ou } yRx$$

Les deux relations S et T sont-elles des relations d'équivalence ?

Solutions - Planche 1.

Exercice 1. Montrons que cette une relation d'équivalence. Elle est réflexive car $n \sim n$ car $2^0 n = 2^0 n$ pour entier n. Elle est symétrique car si $2^a n = 2^b m$, alors $2^b m = 2^a n$. Elle est transitive c'est un peu plus chaud. En effet soient n, m et k des entiers tels qu'il existe a, b, c, d des entiers positifs tels que $2^a n = 2^b m$ et $2^c m = 2^d k$. Il faut relier n et k. Faisons le en multipliant par 2. On a en effet $2^c 2^b m = 2^d 2^b k$. Or $2^a 2^c n = 2^b 2^c m$. Donc $2^(a + c)n = 2^(b + d)k$. Du coup $n \sim k$. Et on a une relation d'équivalence.

Vu qu'on a une relation d'équivalence on peut décrire les classes d'équivalence. C'est un peu plus compliqué. Il faut montrer que c'est les $\overline{2n+1}$. C'est que chaque classe est caractérisé par un nombre impair. Pour montrer cela il faut montrer que deux impairs distincts ne sont pas dans la même classe et qu'un nombre pair est dans la classe d'un nombre impair.

Exercice 2. $(-1)^{n^2}(1 - e^{-n}) \leq 1$ De plus il existe des valeurs aussi proche qu'on veut de 1 car si on prend la sous-suite des $2n$ on a $(1 - e^{-2n})$ tend vers 1.

Solutions - Planche 2.

Exercice 1. Montrons que c'est une relation d'ordre. Elle est réflexive car $y = x^1$. Elle est antisymétrique. En effet si $y = x^n$ et $x = y^m$ alors $y = y^{nm}$. Donc si $y \neq 1$ on en déduit que $nm = 1$ car $1 = y^{nm-1}$ donc $0 = (nm-1)\ln(y)$ donc $nm = 1$. Par contre si $y = 1$ ça marche pas cet argument. Mais on s'en sort bien car dans ce cas $x = y^m = 1$ donc $x = y (= 1)$.

Montrons qu'elle est transitive. Soient x, y et z trois réels > 0 tels que $x = y^n$ et $y = z^m$. Donc $x = z^{mn}$.

Donc on a une relation d'ordre. Par contre elle est pas total. Par exemple 2 et par comparable à 3 : on peut pas avoir $2 = 3^n$ ni $3 = 2^n$.

Exercice 2. A est majorée par $\sup(A)$ et B est majorée par $\sup(B)$. Donc $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. On en déduit que $A + B$ est majorée et qu'en plus $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ok on a un sens de l'inégalité. Occupons nous de l'autre. On veut montrer que $\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B)$. Du coup on prend a et b. On a $a+b \leq \sup(A+B)$. On veut créer un sup. On peut pas faire les deux en même temps ! Du coup va falloir y aller en deux temps. On met le b de l'autre côté :

$$a \leq \sup(A + B) - b$$

Par définition de sup, on a $\sup(A) \leq \sup(A + B) - b$ et ceci pour tout $b \in B$. On inverse le sens.

$$b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$$

Et ça c'est vraie pour tout $b \in B$. Donc $\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$. Donc $\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A + B)$ et c'est gagnée !

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. On sait faire quand si n décrivait $\mathbb{R}$: il suffit d'étudier la fonction $-x^2 + xk + 1$. Qui admet son maximum en $-b/2a$ donc $k/2$ ici. Problème. k il est pas forcément pair.

Si néanmoins c'est le cas alors le maximum est $-(k/2)^2 + k^2/2 + 1 = k^2/4 + 1$ (qui est bien un entier).

Si c'est pas le cas, alors par croissance et décroissance de la fonction autour de $k/2$ alors le maximum est atteint soit $(k+1)/2$ soit en $(k-1)/2$. On calcule les deux valeurs pour n et on regarde qui c'est le plus grand.

Pour cela on fait la différence :

$$-((k+1)/2)^2 + (k+1)/2 + 1 - (-((k-1)/2)^2 + (k-1)/2 + 1) = ...$$

Exercice 2. S est une relation d'équivalence. En effet elle est réflexive car R est réflexive. Elle est symétrique (pas besoin que R le soit). Elle est transitive car R l'est.

On peut vérifier que T est réflexive et symétrique mais pour la démonstration de la transitivité ça a pas l'air de marcher. Il faudrait trouver en vraie une relation R telle que T ne soit pas transitive pour compléter la démonstration. Pour cela il suffit de créer une relation R à peu près random sur un petit ensemble et c'est bon.