

Planche 1.

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$.

Exercice 2. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est.

Planche 2.

Exercice 1. Résoudre $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}, \operatorname{tr}(A^m) = \operatorname{tr}(B^m)$. Montrer que les matrices A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Planche 3.

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\operatorname{tr}(A)$ si $A^n = I_n$ et si la famille (I_n, \dots, A^{n-1}) est libre.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ est de rang 1. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.