Colle 4 - lundi 6 octobre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Soient a, b, c des nombres différents deux à deux. Calculer : $\mathcal{P}(\{a,b\}) \bigcap \mathcal{P}(\{a,c\})$

Exercice 1.

a) Soient trois entiers k, n, p tels que $0 \leq p \leq k \leq n$. Montrer que : $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

b) Soient deux entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer que : $\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p < n \\ 1 \text{ si } p = n \end{cases}$

c) Soit (a_n) une suite de nombres complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$. Montrer que :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k$$

Exercice 3. Combien de rois au maximum peut-on placer sur l'échiquier de 8x8 cases de telle façon qu'aucun roi ne puisse prendre un autre ? (Rappelons qu'un roi attaque les 6 cases autour de lui).

Planche 2.

Question de cours. On pose $A\Delta B = (A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$. Montrer que : $A\Delta B = (A\bigcup B)\backslash(A\bigcap B)$

Exercice 1. Soient A, B, C des ensembles.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour qu'il existe X tel que $A\bigcap X = B$ et $A\bigcup X = C$.

b) On suppose cette condition satisfaite. Déterminer les ensembles X tels que $A\bigcap X = B$ et $A\bigcup X = C$.

Exercice 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$

Exercice 3. Dix nombres dont la somme est égale à 100 sont placés sur un cercle. La somme de trois nombres consécutifs quelconques parmi ces dix nombres est supérieure ou égale à 28. Montrez que les dix nombres placés sur le cercle sont tous inférieurs ou égaux à 16.

Planche 3.

Exercice 1. On pose $[x,y] = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Montrer que $[x,y] = [x',y']$ implique que $x = x'$ et $y = y'$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Exercie 3. Lors d'une soirée réunissant 3 couples chez un couple hôte, un certain nombres de ces personnes se serrent la main. Deux personnes dans un même couple ne se serrent bien sur pas la main. Un des hôtes ne se souvient pas combien il a serré de mains au cours de la soirée, mais par contre il sait que toutes les autres personnes ont serré un nombre de mains différent deux à deux. Peux tu lui dire combien de mains a t'il serré ?

Solutions - Planche 1.

Question de cours.

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) \bigcap \mathcal{P}(\{a,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \bigcap \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

Exercice 1.

a)

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{p!(n-k)!(k-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{(n-p)!}{(n-p-(k-p))!(k-p)!} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$$

b) On utilise le a) :

$$\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-p}{k-p}$$

On fait un changement de variable : on pose $u = k - p$. C'est donc égal à : $\binom{n}{p}\sum_{u=0}^{n-p}(-1)^{n-p-u}\binom{n-p}{u}$
Donc si $p = n$, cela vaut 1. Sinon, d'après le binôme de Newton cela vaut : $\binom{n}{p}(1-1)^{n-p} = 0$

c) On va partir de la droite en insérant l'expression de b_k pour retrouver a_n. Soit donc $n \in \mathbb{N}$.

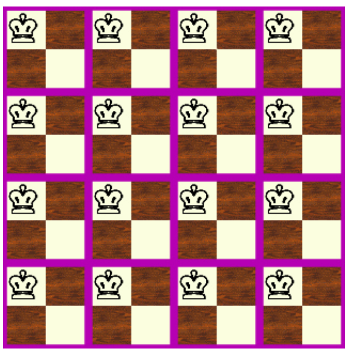
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}a_p = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\dots$$

On permute les indices de sommation :

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}a_p = \sum_{p=0}^{n}a_p\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}$$

D'après b), tous les termes dans la somme sur p s'annulent sauf celui pour $n = p$.
Donc on a l'égalité voulue : $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k$

Exercice 3. La solution la plus simple à ce problème est de mettre un roi toutes les deux cases toutes les deux lignes. On obtient donc 16 rois. Peut on faire mieux ? Non. Pour le montrer on divise l'échiquier en 16 grand carrés de $2x2$, comme sur la figure. Il ne peut y avoir plus de 1 roi par grand carré (car sinon ils pourraient se prendre). Donc il ne peut y avoir plus de 16 rois. D'où 16 est le maximum.



Solutions - Planche 2.

Question de cours. On pose $E = A\bigcup B$, de sorte qu'on puisse définir $\bar{A} = C_E(A)$ et $\bar{B} = C_E(B)$. Alors on utilise les règles de distributivité et de Morgan :

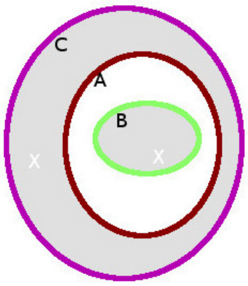
$$A\Delta B = (A\backslash B)\bigcup(B\backslash A) = (A\bigcap \bar{B})\bigcup(B\bigcap \bar{A})$$

$$= (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup \bar{A})\bigcap(\bar{B}\bigcup B)\bigcap(\bar{B}\bigcup \bar{A})$$

$$= (A\bigcup B)\bigcap(\bar{B}\bigcup \bar{A}) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bar{\bigcap}B) = (A\bigcup B)\backslash(A\bigcap B)$$

Exercice 1.

a) Pour ce genre d'exercice, faire un dessin ! Supposons qu'un tel X existe. On a alors $B\subset A$ car $A\bigcap X = B$. On a aussi $A\subset C$ car $A\bigcup C$. Montrons réciproquement que si $B\subset A\subset C$ alors il existe un tel X. Dans ce cas, on choisit $X = B\bigcup C\backslash A$ qui convient. Ainsi il existe une solution si et seulement si $B\subset A\subset C$.



b) Maintenant prouvons que $X = B\bigcup C\backslash A$ est l'unique solution. Pour ce faire, on se donne X une solution. On va procéder par double inclusion.

• Soit $x\in X$. Comme $A\bigcup X = C$, alors $X\subset C$, donc $x\in C$. Supposons que $x\in A\backslash B$. Comme $A\bigcap X = B$, c'est impossible car $x\in A\bigcap X$. Donc $x\in B\bigcup C\setminus A$.

On a donc montré que $X\subseteq B\bigcup C\setminus A$.

• Soit $x\in B\bigcup C\backslash A$. Si $x\in B$ alors $x\in A\bigcap X\subset X$. Donc $x\in X$. Si $x\in C\backslash A$, alors comme $A\bigcup X = C$, $x\in X$. Au final on a : $X = B\bigcup C\backslash A$ qui est donc l'unique solution.

On a montré l'autre inclusion. D'où l'égalité.

Exercice 2. Le réflexe : insérer l'expression en factorielle du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}$$

On veut simplifier l'expression en un coefficient binômial :

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n+2-(k+1))!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}$$

On fait alors un changement de variable, en posant $u = k+1$, c'est égal à $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{u=1}^{n+1}\binom{n+2}{u}$

On rappelle qu'on a : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. On va donc rajouter les deux termes qui manquent :

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{u=0}^{n+2}\binom{n+2}{u} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}(1+1) = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$$

Exercice 3. Soit a un nombre de ce cercle. On répartit les 9 autres en 3 groupes de 3 nombres consécutifs. On note la somme respective de chacun des 3 groupes b_1 , b_2 et b_3. On a donc $a + b_1 + b_2 + b_3 = 100$. Or $a = 100 - b_1 - b_2 - b_3 \leq 100 - 3 \times 28 = 16$.

Donc chaque nombre est plus petit que 16.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. Supposons que $[x,y]=[x',y']$. L'ensemble $\{x\}$ est donc dans $[x',y']$ et $\{x,y\}$ est dans $[x',y']$. Il faut faire une disjonction de cas :

• Premier cas :$\{x\}=\{x'\}$ et dans ce cas $x=x'$. Si $\{x,y\}=\{x'\}$ on a alors $x=y=x'$. Comme $\{x',y'\}$ est dans $[x,y]$ alors $y'=x=y=x'$. Sinon $\{x,y\}=\{x',y'\}$, on a alors $y=y'$ car $x=x'$.

• Second cas : $\{x\}=\{x',y'\}$. Donc dans ce cas $x=x'=y'$. Si $\{x,y\}=\{x'\}$ on a alors $x=y=x'=y'$. Sinon $\{x,y\}=\{x',y'\}$, on a alors $y=y'$ car $y'=x'$.

Donc dans tous les cas, cela implique que $x=x'$ et $y=y'$.

Réciproquement il est clair que si $x=x'$ et $y=y'$ alors $[x,y]=[x',y']$.

Exercice 2. On montre l'égalité par récurrence. L'initialisation est claire. Supposons que l'égalité soit vraie au rang n. On utilise alors la formule du triangle pour se ramener au rang n :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1-k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{n+1}-(1-1)^{n+1}/(n+1)=\frac{1}{n+1}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

On a montré le résultat par récurrence.

Exercice 3. Il y a une personne (différente de l'hôte tête en l'air) qui a serré la main à 6 personnes. Ce ne peut être le conjoint de l'hôte précédent car sinon personne d'autres que cet hôte n'aurait serré la main à 0 personnes. Donc il s'agit d'un convive. Le conjoint de ce convive a alors serré la main à 0 personnes (sinon ce ne serait le cas de personne). On continue, il y a un convive qui a serré la main à 5 personnes et son conjoint à 1 personne. On continue, le dernier convive a serré la main à 4 personnes et son conjoint à 2 personnes.

Au final, l'hôte a serré la main à 3 personnes (tout comme son conjoint).