**Colle 8 - lundi 17 novembre 2014 -** Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

---

**Planche 1.**

**Question de cours.** Parmis ces équations différentielles, lesquelles sait on résoudre directement grâce au cours et pourquoi ?

$$yy' + 2y = \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$y^{(3)} + 2y' + y = ch(t) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$y'' + iy' + (1+i)y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{C}$$

**Exercice 1.** Trouver les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de :

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

**Exercice 2.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un changement de variable :

$$(x^2+1)^2y'' + 2x(x^2+1)y' + y = 0$$

---

**Planche 2.**

**Question de cours.** Parmis ces équations différentielles, lesquelles sait on résoudre directement grâce au cours et pourquoi ?

$$y' = 2\sin(t) + \cos(t) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\sin(t)y' + y = 2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$y'' + 2y' + y = e^t \text{ sur } \mathbb{R}$$

**Exercice 1.** Trouver les fonctions $y$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $y' - xy = x$ et $y(0) = 0$.

**Exercice 2.** Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution à valeurs réelles de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

---

**Planche 3.**

**Question de cours.** Parmis ces équations différentielles, lesquelles sait on résoudre directement grâce au cours et pourquoi ?

$$\sin(t)y' + y = 2 \text{ sur } ]0, \pi[$$

$$y' + ch(t)y = sh(t) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$y'' + y' + y^2 = 2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

**Exercice 1.** Résoudre sur $]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$$

**Exercice 2.** Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt$$

**Solutions - Planche 1.**

**Question de cours.** (1) Non, ce n'est pas une ED linéaire.
(2) Non, car c'est une ED du troisième ordre.
(3) Oui, une ED linéaire du second ordre à coefficients constants.

**Exercice 1.** Il s'agit d'une ED linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$X^2 - 3X + 2$$

Ses racines sont 1 et 2. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

$$\{\lambda e^x + \mu e^{2x} : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On cherche maintenant une solution particulière à l'ED. On peut se rappeler pour cela la méthode (donnée dans le cours) pour trouver une solution particulière à une ED du premier ordre où le second membre est un $\sin(x)$ :

$$y' + ay = \sin(t)$$

Pour trouver une telle solution particulière, on cherche une solution à :

$$y' + ay = e^{it}$$

Ainsi, on va appliquer la même idée à notre ED. On pose donc la nouvelle ED suivante :

$$z'' - 3z' + 2z = e^{2ix} \text{ (E')}$$

On cherche alors une solution particulière de la forme $z(x) = \lambda e^{2ix}$. En insérant cette forme dans l'ED précédente, on arrive à :

$$(-2 - 6i)\lambda e^{2ix} = e^{2ix}$$

D'où :

$$z(x) = \frac{3i - 1}{20} e^{2ix}$$

Comme $z$ est solution de $(E')$ alors la partie imaginaire est solution de $(E)$. En effet on note $z = g + ih$ où $g = Re(z)$ et $h = Im(z)$. On a alors $z' = g' + ih'$. On insère dans l'équation $(E')$, on identifie partie imaginaire et partie réelle, on en déduit que :

$$g'' - 3g' + 2g = \cos(2x) \text{ et } h'' - 3h' + 2h = \sin(2x)$$

Ainsi, on en déduit la solution particulière suivante à notre ED initiale :

$$y(x) = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$$

L'ensemble des solutions de notre ED initiale est donc :

$$\{\frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) + \lambda e^x + \mu e^{2x} : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice 2.** La première difficulté de cette exercice est de trouver le changement de variable à effectuer. Pour le trouver, il faut se dire qu'on va simplifier l'ED, donc enlever les termes en $(1 + x^2)$. Mais avant cela on va normaliser l'ED :

$$y'' + \frac{2x}{1 + x^2} y' + \frac{1}{(1 + x^2)^2} y = 0$$

Les $\frac{1}{1+x^2}$ doivent alors faire penser à des dérivées d'arctan.
On fait par conséquent le changement de variables $t = \arctan(x)$. On pose alors $u(t) = y(\tan(t)) = y(x) = u(\arctan(x))$.
On a maintenant deux angles d'attaque. Soit on calcule les dérivées de $u$ en fonction des dérivées de $y$ et on essaye de trouver une ED vérifier par $u$ (en variable $t$). Cette méthode est efficace quand on peut vite lire l'ED vérifiée par $u$ dans l'ED initiale. Dans notre cas c'est pas le cas. Un exemple où ça marche mieux de faire comme ça : $(1 + x^2)y'' + xy - 4y = 0$ avec $t = Argsh(t)$.

Soit la méthode mécanique qui marche presque tout le temps : calculer les dérivées en $x$ de $y$ en fonction de $u$. Puis insérer dans l'ED initiale. On obtient alors une ED vérifier par $u$.

Dans notre cas, on a donc :

$$y(x) = u(\arctan(x))$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}u'(\arctan(x))$$

$$y''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}u''(\arctan(x)) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}u'(\arctan(x))$$

On remplace dans l'ED initiale, les $(1+x^2)^2$ se simplifient alors, de même que les termes en $u'$ se simplifient. Il reste alors :

$$u'' + u = 0$$

On en déduit :

$$u(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

On en déduit les solutions de l'ED initiale en remplacant $t$ par $\arctan(x)$.

$$\{\lambda\cos(\arctan(x)) + \mu\sin(\arctan(x)) : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Or $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. En effet on a :

$$\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$$

D'où les solutions sont :

$$\{\frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1+x^2}} : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

---

**Résumé pratique :** Ce qu'on gère :

- ED linéaire du premier ordre ( solution homogène puis méthode de variation de la constante) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
- ED linéaire **à coefficients constants** avec un certain type de second membre : $ay'' + by' + cy = h(t)$ où $h(t) = P(t)e^{\alpha t}$.

Après le reste c'est du calcul d'intégrales, il y a 3 méthodes :

- Primitiver directement (peut être avec des formes compliquées de dérivée de composée genre $u'/u$).
- IPP
- changement de variables

Si on est pas dans les cas précédents d'ED, on s'y ramène. Par exemple :

- Si $ty'(t) + a(t)y(t) = 0$, on divise par $t$ mais on scinde l'intervalle de recherche en deux.
- Si équation linéaire d'ordre 2 mais pas à coefficients constants : changement de variables.

**Solutions - Planche 2.**

**Question de cours.** (1) Oui, c'est une ED linéaire du premier ordre.
(2) Non, le coefficient devant $y'$ s'annule.
(3) Oui, c'est une ED linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre du type $P(t)e^{\alpha t}$.

**Exercice 1.** On commence par résoudre l'équation homogène $y' - xy = 0$. D'où :

$$y(x) = A\exp(\int_0^x tdt) = Ae^{x^2/2}$$

où $A$ est une constante. Ensuite on utilise la méthode de variation de la constante. On cherche une solution de l'ED sous la forme $A(x)\exp(x^2/2)$. On insère cette expression dans l'ED et on obtient après simplification.

$$A'(x)e^{x^2/2} = x$$

D'où $A'(x) = xe^{-x^2/2}$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $A(x) = c + \int_0^x t\exp(-t^2/2)dt = c + e^{-x^2/2} - 1$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielles sont :

$$y(x) = 1 - Ae^{x^2/2}$$

Or on cherche la solution telle que $y(0) = 0 = 1 - A$. Donc $A = 1$. Finalement la solution recherchée est : $\boxed{y(x) = 1 - e^{x^2/2}}$

**Exercice 2.** Posons $\Delta = a^2 - 4b$ le déterminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
Si $\Delta > 0$, on note $r_1$ et $r_2$ les deux racines (distinctes). Les solutions sont du type :

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des réels. $y$ est donc bornée, si et seulement $r_1 \leq 0$ et $r_2 \leq 0$. On veut des conditions sur $a$ et $b$. Il faut donc les relier aux racines. Comme $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r - 2)$, on en déduit que $a = -r_1 - r_2$ et $r_1r_2 = b$. Or $r_1 \leq 0, r_2 \leq 0$ si et seulement si $b \geq 0$ et $a \geq 0$.
Si $\Delta = 0$, $r_1 = r_2$. Les solutions sont du type :

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{r_1x}$$

qui est bornée si et seulement si $r_1 < 0$. Or $a = -2r_1$. Donc $y$ est bornée si et seulement si $a > 0$.
Si $\Delta < 0$, $r_1 = s + it$ et $r_2 = s - it$. Les solutions sont du type :

$$y(x) = (C_1\cos(tx) + C_2\sin(tx))e^{sx}$$

Les solutions sont bornées si et seulement si $s \leq 0$. Or $a = -s - it - s + it = -2s$. Donc les solutions sont bornées si et seulement si $a \geq 0$.
Au final les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $R^+$ si, et seulement si, $a, b \geq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

---

**Résumé pratique :** Ce qu'on gère :

- ED linéaire du premier ordre ( solution homogène puis méthode de variation de la constante) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
- ED linéaire **à coefficients constants** avec un certain type de second membre : $ay'' + by' + cy = h(t)$ où $h(t) = P(t)e^{\alpha t}$.

Après le reste c'est du calcul d'intégrales, il y a 3 méthodes :

- Primitiver directement (peut être avec des formes compliquées de dérivée de composée genre $u'/u$).
- IPP
- changement de variables

Si on est pas dans les cas précédents d'ED, on s'y ramène. Par exemple :

- Si $ty'(t) + a(t)y(t) = 0$, on divise par $t$ mais on scinde l'intervalle de recherche en deux.
- Si équation linéaire d'ordre 2 mais pas à coefficients constants : changement de variables.

**Solutions - Planche 3.**

**Question de cours.** (1) Oui, $\sin(t)$ ne s'annule pas sur l'ensemble sur lequel on regarde l'ED. Donc on peut la transformer en une ED linéaire du premier ordre.
(2) Oui, ED linéaire du premier ordre.
(3) Non, l'ED n'est pas linéaire.

**Exercice 1.** On transforme l'ED en :

$$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On peut car le terme qu'on a divisé ne s'annule pas. On résoud d'abord l'équation homogène :

$$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

Pour la résoudre il faut primitiver $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Sa primitive est arcsin. D'où les solutions de l'ED homogène sont du type :

$$y(x) = Ke^{-\arcsin(x)}$$

Maintenant pour l'ED entière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On pose donc

$$y(x) = K(x)e^{-\arcsin(x)}$$

On insère dans $y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On en déduit que

$$K'(x)e^{-\arcsin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'où

$$K(x) = C + e^{\arcsin(x)}$$

Finalement les solutions de l'ED sont du type :

$$y(x) = 1 + Ce^{-\arcsin(x)}$$

où $C$ est un réel.

**Exercice 2.** Il faut trouver une ED vérifiée par $f$. Il faut donc dériver. Mais on ne peut pas dériver directement l'intégrale car il y a du $x$ dans l'intérale. Il faut donc le sortir. Pour ce faire on utilise la formule de trigonométrie $\cos(a+b)$. On en déduit :

$$f(x) = 1 + 2\cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + 2\sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$$

Et là on sait dériver :

$$\begin{aligned} f'(x)/2 &= -\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)f(x)\cos(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + \sin(x)f(x)\sin(x) \\ &= f(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt \end{aligned}$$

On ne reconnaît pas dans les intégrales la fonction $f$ donc on redérive.

$$\begin{aligned} f''(x)/2 &= f'(x) - \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \sin(x)f(x)\cos(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + \cos(x)f(x)\sin(x) \\ &= f'(x) - \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 1$$

Qui est une ED linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre constant. Donc on sait faire.
L'ED homogène est $y'' - 2y' + y = 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ qui a 1 pour racine double. D'après le cours, les solutions sont du type :

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^x$$

1 étant une solution particulière de $y'' - 2y' + y = 1$, on en déduit que $f$ est de la forme :

$$f(x) = 1 + (C_1 x + C_2)e^x$$

Or on sait d'après les formules obtenues précedement que :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 2$$

On en déduit que $C_2 = 0$ et $C_1 = 2$. D'où

$$f(x) = 2xe^x + 1$$

---

**Résumé pratique :** Ce qu'on gère :

- ED linéaire du premier ordre ( solution homogène puis méthode de variation de la constante) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
- ED linéaire **à coefficients constants** avec un certain type de second membre : $ay'' + by' + cy = h(t)$ où $h(t) = P(t)e^{\alpha t}$.

Après le reste c'est du calcul d'intégrales, il y a 3 méthodes :

- Primitiver directement (peut être avec des formes compliquées de dérivée de composée genre $u'/u$).
- IPP
- changement de variables

Si on est pas dans les cas précédents d'ED, on s'y ramène. Par exemple :

- Si $ty'(t) + a(t)y(t) = 0$, on divise par $t$ mais on scinde l'intervalle de recherche en deux.
- Si équation linéaire d'ordre 2 mais pas à coefficients constants : changement de variables.