Colle 3 - lundi 29 septembre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ où la matrice A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Planche 2. Résoudre le système linéaire suivant en x, y et z :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$, calculer $\prod_{k=1}^{n} 2k$ et $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

Exercice 2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Planche 3.

Question de cours. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le produit de matrices suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n!(n+2)S_n = (1 + (-1)^n)(n+1)!$$

Et en déduire S_n.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Démontrons ce résultat par récurrence. On considère pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion (P_n), $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. L'assertion P_0 est vraie. Supposons maintenant l'assertion (P_n) vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Utilisons cette hypothèse pour calculer

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} = (n+1) + n(n+1)/2 = (n+1)(n+2)/2$$

D'où l'assertion (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Autre démo sympa mais un peu tordu :

$$(n+1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = n + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

D'où on déduit $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $A = I + J$. La matrice I commute avec toutes les matrices donc en particulier avec J, donc on peut utiliser l'expression du binôme de Newton :

$$A^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$$

Or $I^n = I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il faut maintenant gérer les puissances de J :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J^3 = 0$. Donc on en déduit que $J^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.
Au final, on a donc

$$A^n = I + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Pour résoudre on peut exprimer x en fonction de z dans la 3ème équation : $x = 2-2z$. Puis insérer cette égalité dans la 2ème équation : $2 - z = y$. Puis on insère les deux expressions dans la 1ère : $2 - 2z + 2 - z + z = 1$. Donc on en déduit $z = 3/2$. De $x = 2 - 2z$ on en déduit $x = -1$. Puis finalement de $y = 2 - z$ on en déduit $y = 1/2$.

Ce système n'a donc qu'une seule solution : $x = -1, y = 1/2, z = 3/2$.

Exercice 1. Développons le produit :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2.4\ldots 2(n-1).2n$$

Remarquons que chacun des termes du produit est pair. Il y a n termes dans ce produit. Ainsi on peut factoriser par 2^n :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n(1.2\ldots(n-1)n) = 2^n n!$$

Raisonnons de même pour le second produit.

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)$$

On rajoute les termes pairs manquant en les enlevant en bas.

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 2. Cette somme ne ressemble pas vraiment à des sommes usuelles. Il reste alors la technique du télescopage. (wé il est cho cet exo)

On cherche des termes a_k tels que : $a_k - a_{k+1} = k/(k+1)!$. On le cherche en général sous forme de fraction. Donc en dessous il faut avoir quelque chose en factorielle. On trouve alors $a_k = 1/k!$:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

Par télescopage on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Solutions - Planche 3.

Question de cours.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 0 & 1+a \\ -a & 0 & -1+a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix}$$

Exercice.

$$n!(n+2)S_n = n!(n+2)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Tout se fait avec l'astuce du $a = a - b + b$:

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n+2)k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k((n-k+1)+(k+1))k!(n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k+1)k!(n-k)! + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)k!(n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!(n-k+1)! + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)!(n-k)!$$

On fait le changement de variable $p = k+1$ dans la seconde somme :

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!(n-k+1)! + \sum_{p=1}^{n+1}(-1)^{p-1}p!(n-p+1)!$$

On renomme :

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!(n-k+1)! + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k!(n-k+1)!$$

Puis on remarque que les termes pour k entre 1 et n s'annulent, il ne reste plus que :

$$= (n+1)! + (-1)^n(n+1)! = (n+1)!(1+(-1)^n)$$

D'où on obtient :

$$S_n = \frac{(1+(-1)^n)(n+1)!}{n!(n+2)} = (1+(-1)^n)\frac{n+1}{n+2}$$

Suivant la parité de n on a :

$$S_n = \begin{cases} 2\frac{n+1}{n+2} \text{ si n est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$