Colle 11 - lundi 8 décembre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours.

- Est ce qui si une suite est bornée, alors elle converge ?
- Démontrer que si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $v_n \to l' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \to l + l'$.

Exercice 1. Trouver tous les x entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} pgcd(x, 33) = 11 \\ ppcm(x, 10) = 220 \end{cases}$$

Exercice 2. On dit que a un entier naturel est un carré parfait s'il existe b un entier naturel tel que $a = b^2$. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré parfait alors a et b sont des carrés parfaits.

Planche 2.

Question de cours.

- Est ce que si $u_n < a$ pour tout n et si $u_n \to l \in \mathbb{R}$, alors $l < a$.
- Démontrer que si $u_n \to l \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite de u_n converge vers l.

Exercice 1. Trouver a un entier naturel différent de 1 tel que $a = 1[5]$ et $a = 1[7]$.
Est ce qu'il existe un entier naturel tel que $a = 1[7]$ et $a = 2[14]$?

Exercice 2. Montrer que si x, y sont des entiers tels que pour tout nombre premier p, $x = y[p]$, alors $x = y$.

Planche 3.

Question de cours.

- Est ce que si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $v_n \to l' \in \mathbb{R}$ avec $v_n \neq 0, \forall n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \to l/l'$?
- Démontrer que si une suite réelle converge, alors elle est bornée.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} pgcd(x, y) = 18 \\ ppcm(x, y) = 540 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit a, b, n, m des entiers naturels avec $pgcd(n, m) = 1$ et $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe un entier c tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Non. Si $u_n = (-1)^n$, alors la suite est bornée mais ne converge pas. Cette réciproque au théorème qui dit qu'une suite qui converge est borné n'est

Exercice 1. Soit x une solution. On utilise la définition de *pgcd* et de *ppcm* avec les minima (pour *pgcd*) et les maxima (pour *ppcm*) des p-valuations. Alors $pgcd(x, 33) = 11$ dit exactement que x est divisible par 11 et x n'est pas divisible par 3. La deuxième dit que comme $220 = 2 * 2 * 5 * 11$, alors la 2-valuation de x est 2, la 5-valuation est 0 ou 1 et la 11-valuation de x est 1 et aucun autre nombre premiers ne divise x.
Donc : $x = 2^2 * 5^a * 11$ avec $a = 0$ ou 1. $\boxed{\text{Donc } x = 44 \text{ ou } x = 220.}$

Exercice 2. ab est un carré parfait donc $ab = c^2$. Soit p un nombre premier divisant a. On note n la p-valuation de a. Comme p ne divise pas b alors la p-valuation de a est la même que celle de c^2. On note m celle de c. Alors la p-valuation de c^2 est $2m$. Donc $n = 2m$. Donc la p-valuation de a pour tout nombre premier divisant a est paire. On pose donc :

$$a = \prod_{i=1}^{l} p_i^{2a_i}$$

on peut donc poser $d = \prod_{i=1}^{l} p_i^{a_i}$. On a donc $d^2 = a$, d'où $\boxed{a \text{ est un carré parfait}}$. On conclut de même pour b par symétrie.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On a $u_n = 1-1/n < 1$ pour tout $n \geq 1$. Mais la limite de u_n est 1 et on a pas $1 < 1$.

Exercice 1. On ne peut manier les congruences directement comme ça car ce n'est pas le même modulo. On passe donc à la définition. Soit a une solution différente de 1, alors il existe k et k' deux entiers tels que $a = 1+5k = 1+7k'$. D'où $5k = 7k'$. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, 5 divise k' et 7 divise k. C'est les seuls conditions. Donc le plus simple est de choisir $k = 7$ et $k' = 5$. D'où $\boxed{a = 1+5*7 = 1+7*5 = 36 \text{ convient.}}$

Exercice 2. Soit x, y tels que $x = y[p]$ pour tout nombre premier p. Alors $p|x-y$ pour tout nombre premier p. Or si $x-y \neq 0$, alors $x-y$ s'écrit avec un nombre fini de facteurs premiers. Or les nombres premiers sont en nombre infini donc il existe p tels que $p \not| x-y$. D'où $x-y=0$ et $\boxed{x = y}$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Il faut faire attention aux division par 0 ! Si $l' = 0$ ce n'est pas vrai et on ne peut rien conclure. Par exemple : si $u_n = 1$ et $v_n = 1/n$ alors $u_n/v_n \to \infty$. Si $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n$ alors $u_n/v_n \to 1$. Si $u_n = 1/n^2$ et $v_n = 1/n$ alors $u_n/v_n = 1/n \to 0$.

Exercice 1. Soit x, y une solution. On sait que $pgcd(x,y) * ppcm(x,y) = xy$. Donc $xy = 18 * 540$. Ainsi (x,y) doit faire partie des couples de diviseurs de $18*540$. Mais cela ne suffit pas, il faut aussi que $pgcd(x,y) = 18$ et $ppcm(x,y) = 540$. Passons pas la définition de $pgcd$ et $ppcm$ avec les p-valuations.

Déjà $18 = 2 * 3^2$ et $540 = 10 * 54 = 2 * 5 * 2 * 27 = 2^2 * 5 * 3^3$. Donc comme x et y divisent $18 * 540$, ils n'utilisent que des nombres premiers parmi $2, 3$ et 5. On pose $x = 2^a 3^b 5^c$ et $y = 2^d 3^e 5^f$. Alors d'après $pgcd(x,y) = 18$, comme on prend le minimum des p-valuations : $c = 0$ ou $f = 0$. Or $c + f = 1$ car $xy = 18 * 540$. Donc $(c = 0, f = 1)$ ou $(c = 1, f = 0)$. De même pour 3 : $\min(b,e) = 2$ et $b + e = 5$. Donc $(b = 2, e = 3)$ ou $(b = 3, e = 2)$. Pour 2 : $\min(a,d) = 1$ et $a + d = 2$. Donc $(a = 1, d = 1)$.

Finalement les solutions sont :

$$(x = 5 * 3^2 * 2, y = 3^3 * 2), (x = 5 * 3^3 * 2, y = 3^2 * 2)$$

$$(x = 3^2 * 2, y = 5 * 3^3 * 2), (x = 3^3 * 2, y = 5 * 3^2 * 2)$$

Exercice 2. Soit p divisant a. Alors comme $p | a^n$, $p | b$. On va chercher à calculer u la p-valuation de a. Par $a^n = b^m$, on en déduit que $un = mv$ où v est la p-valuation de b. Donc m divise u car n et m sont premiers entre eux. On en déduit que $u = mk$ où k est un entier naturel. Ceci étant vraie pour tout diviseur premier de a, on peut poser :

$$a = \prod_{i=1}^{l} p_i^{mu_i}$$

On pose alors $c = \prod_{i=1}^{l} p_i^{u_i}$. On a donc $c^m = a$. Or on vient de voir que si p divise a, alors p divise b. De plus c'est réciproque, donc les diviseur premiers de a sont les mêmes que ceux de b. De plus par symétrie du problème on peut écrire :

$$b = \prod_{i=1}^{l} p_i^{nv_i}$$

Alors $b = c^n$.

Finalement, on conclut que $\boxed{a = c^m \text{ et } b = c^n}$.