

Planche 1.

Question de cours. Soit P annulant u , alors $Sp(u) \subset rac(P)$.

Exercice 1. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi ${}^t A$ l'est.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Planche 2.

Question de cours. Lemme des noyaux.

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

Exercice 2. Soit $f \in L(E)$. Montrer que f est diagonalisable ssi f^2 l'est et si $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Planche 3.

Question de cours. $\dim(E_\lambda(u)) \leq mult(\lambda, u)$.

Exercice 1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable ssi BA l'est.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Quelle est la parité du rang de A ?

Hints

Planche 1.

Exercice 1. Utiliser la définition de diagonalisibilité avec PDP^{-1} .

Exercice 2. Le déterminant c'est le produit des valeurs propres dans \mathbb{C} . Les valeurs propres sont parmi les racines du polynôme annulateur. La multiplicité de λ est la même que celle de $\bar{\lambda}$ pour une matrice réelle.

Planche 2.

Exercice 1. Le déterminant c'est le produit des valeurs propres dans \mathbb{C} . Les valeurs propres réelles sont positives. Celles complexes se multiplient entre elles et donnent des modules. La multiplicité de λ est la même que celle de $\bar{\lambda}$ pour une matrice réelle.

Exercice 2. Un sens est facile : de gauche à droite. Il suffit d'écrire la matrice dans une bonne base.

L'autre plus compliqué : on utilise le lemme des noyaux en disant que si $Q(X) = P(X^2)$ annule A . Et on regarde ce qu'il se passe au niveau des racines en fonction de si elles sont nulles ou pas.

Planche 3.

Exercice 1. Utiliser la définition de diagonalisibilité avec PDP^{-1} .

Exercice 2. A est diagonalisable. Les valeurs propres possibles on les connaît : 0 j ou \bar{j} . La multiplicité de λ est la même que celle de $\bar{\lambda}$ pour une matrice réelle.

Solutions - Planche 1.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercice 2.

Solutions - Planche 2.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercice 2.

Solutions - Planche 3.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercise 2.