Colle 19 $\sim$ 9 mars 2016 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP*1 $\sim$ Trinôme :

Planche 1.

Exercice 1. Soit A une partie fermée non bornée convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A contient une demi-droite.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $f(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ sur $S_n(\mathbb{R})$. Trouver le minimum de f.

Planche 2.

Exercice 0. Dans un evn. Soient A fermée et B compacte. Montrer que $A + B$ est fermée.

Exercice 1. On pose $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$. Étudier la suite de fonctions sur $]0, +\infty[$ et trouver un équivalent en $+\infty$.

Exercice 2. Soient $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de veteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u_i, u_j\rangle < 0$ pour tout $i \neq j$.

1. Montrer que $p-1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n + 1$ vecteurs réunissant ces conditions.
3. Montrer que l'on peut en trouver $n + 1$.

Planche 3.

Exercice 1. Calculer $h(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-(t^2 + x^2/t^2))dt$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercice 2.

Solutions - Planche 2.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercice 2.

Solutions - Planche 3.

Question de cours.

Exercice 1.

Exercice 2.