Colle 10 ~ 2 décembre 2015 ~ Colleur : Isenmann ~ MP 1 ~ Trinôme : 3

Planche 1.

Question de cours. Définition de tribu, d'une probabilité. Donner un exemple pour le lancer de dé équilibré à 6 faces.

Exercice 1. Un magicien tient un paquet de deux cartes. L'une de ces cartes est noire des deux côtés, l'autre a un côté noir et un côté rouge. Vous tirez une carte et observez son recto. Il est noir. Quelle est la probabilité que le verso de la carte soit rouge ?

Exercice 2. Soit $p \in [0, 1]$. Soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre p définies sur le même espace probabilisé. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$ dans les cas suivants : $X = Y$; X et Y indépendants.

Planche 2.

Question de cours. Donner la définition d'un couple d'événements indépendants, puis d'une famille quelconque d'événements indépendants. Les événements ci-dessous sont-ils indépendants ? $A =$ la première pièce tombe sur pile. $B =$ la deuxième pièce tombe sur pile. $C =$ les deux pièces donnent le même résultat.

Exercice 1. Un événement peut-il être indépendant de lui-même ? Si oui, à quelle condition ?

Exercice 2. Soit $n \geq 1$. Soient $(X_1, \dots, X_{2n})$ une famille de $2n$ variables aléatoires indépendantes de même loi : $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Calculer $P(S_{2n} = 0)$ et trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Planche 3.

Question de cours. Rappeler la formule de Bayes. Claire et Gilles remplissent une urne avec 4 boules : une bleue, une blanche et deux rouges. Claire tire une première boule et ne la dévoile pas. Gilles tire une autre boule parmi celles restantes. Elle est rouge. Quelle est la probabilité que la boule de Claire est rouge ?

Exercice 1. On place 70 balles coloriées dans une urne, 10 pour chacune des 7 couleurs de l'arc-en-ciel. Si on en prend 20 au hasard quel est le nombre moyen de couleurs distinctes que l'on aura récupérées ?

Exercice 2. Dans une population de N individus, K votent OUI et $N - K$ votent NON. Un sondage sur n individus ($n \leq N$) consiste à trirer aléatoirement un échantillon de taille n de la population et à noter X le nombre de ces individus qui votent OUI. Déterminer la loi de la variable X.

On suppose maintenant que la taille de l'échantillon n est fixée, de même que la proportion d'individus votant OUI $p = K/N \in]0, 1[$ et on fait tendre la taille de la population N vers l'infini. Pour $k \leq n$ fixé, montrer que $P(X = k)$ converge.