Colle 8 $\sim$ 18 novembre $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP* 1 $\sim$ Trinôme : 8

Planche 1.

Exercice 1. On pose $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$. Étudier la suite de fonctions sur $]0,+\infty[$. Trouver un équivalent en $+\infty$.

Exercice 2. Montrer que la série de fonctions $f_{n+1}(x) = \sin(2^n x)/2^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Planche 2.

Exercice 1. Soit $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$. On définit les fonctions f_n par récurrence :

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n$$

sur $[a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la série de fonctions des f_n pour $n \geq 1$.

Exercice 2. On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ pour un $\alpha > 0$. Où f est-elle définie ? Où converge elle uniformément ?

Planche 3.

Exercice 1. On pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ pour $x > -1$. Étudier la fonction, trouver un équivalent en -1 et en $+\infty$.

Exercice 2. On pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$. Calculer $\int_0^1 f$.

Solutions - Indications - Planche 1.

Exercice 1.

$$f(x) \sim \pi^2/(6x^2)$$

On multiplie $f(x)$ par x^2 et on étudie la nouvelle série de fonction.

Exercice 2. Continuité avec convergence normale. Prendre une bonne suite x_N qui tend vers 0 telle que $f(x_N)/x_N$ diverge.

Solutions - Indications - Planche 2.

Exercice 1. Former la somme g. La dériver. On obtient une équation différentielle du premier ordre. Pour justifier la dérivation on a besoin d'une convergence normale qui nécessite une étude fine de f_n.

Exercice 2. Transformation d'Abele pour utiliser Cauchy uniforme.

Solutions - Indications - Planche 3.

Exercice 1. L'équivalent en -1 est donné par le premier terme de la série. En $+\infty$ on utilise la formule $S(x) - S(x+1)$ qui permet de calculer $S(n)$ et d'intuiter le résultat.

Exercice 2. On montre une convergence uniforme. On peut intégrer terme à terme. Ça donne $\ln(2)$.