Colle 23 - lundi 30 mars 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Démontrer l'inégalité de Taylor Lagrange.

Exercice 1. Est ce que

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,x) \end{array}$$

est un projecteur ?

Exercice 2. Soit u une application linéaire d'un ev E. On dit qu'un sev F de E est stable par u si $u(x) \in F, \forall x \in F$.

Soit p un projecteur de E. Démontrer que u commute avec p si et seulement si $Im(p)$ et $ker(p)$ sont stables par u.

Planche 2.

Question de cours. Quels sont les liens entre continuité, continuité uniforme, lipschitzien ?

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Montrer que

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n) & \longmapsto & (v_n) \end{array}$$

où $v_{2n} = u_{2n}$ et $v_{2n+1} = -u_{2n+1}$ pour tout entier n, est une symétrie.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p,q deux projecteurs de E. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Planche 3.

Question de cours. Démontrer que si f est continue sur $[a,b]$ telle que $f \geq 0$, alors : si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 1. Quelles sont les applications linéaires qui sont à la fois des homothéties et des projecteurs ?

Exercice 2. Soit E un ev, p et q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0, q \neq 0, p \neq q$. Démontrer que s'il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $ap + bq = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

Solutions - Planche 1.

Exercice 1. Calculons p^2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$p^2(x, y) = p \circ p(x, y) = p(p(x, y)) = p(x, x) = (x, x) = p(x, y)$$

Donc il s'agit bien d'un projecteur. Calculons de plus son noyau et son image. Soit $(x, y) \in Ker(p)$. Alors $x = 0$. Donc $Ker(p) \subset Vect(0, 1)$. Réciproquement $Vect(0, 1) \subset Ker(p)$ donc $Ker(p) = Vect(0, 1)$. Soit $(x, y) \in Im(p)$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p(a, b) = (x, y)$. Donc $(a, a) = (x, y)$. Donc $x = y$. Donc $Im(p) \subset Vect(1, 1)$. Or récirproquement $Vect(1, 1) \subset Im(p)$. Donc $Im(p) = Vect(1, 1)$.

Au final, p est un projecteur sur $Vect(1, 1)$ parallèlement à $Vect(0, 1)$.

Exercice 2. Supposons que u commute avec p. Soit $x \in Ker(p)$. Montrons que $u(x) \in Ker(p)$, ie $p(u(x)) = 0$. Or u commute à p donc $p(u(x)) = u(p(x)) = u(0) = 0$. Soit $y \in Im(p)$. Montrons que $u(y) \in Im(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $p(x) = y$. Donc $u(y) = u(p(x)) = p(u(x))$. Donc $u(y) \in Im(p)$.

Remarque : on a pas utilisé le fait que p était un projecteur.

Supposons que $Im(p)$ et $Ker(p)$ sont stables par u. Montrons que u et p commute. Soit $x \in E$. Comme p est un projecteur alors $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont supplémentaires dans E. Donc il existe $y \in Ker(p)$ et $z \in Im(p)$ tels que $x = y + z$. Il existe $a \in E$ tel que $p(a) = z$. Donc

$$u(p(x)) = u(p(y + z)) = u(p(z)) = u(z)$$

Or $p(u(x)) = p(u(y) + u(z))$ et $Ker(p)$ est stable par u donc $u(y) \in Ker(p)$. Donc

$$p(u(x)) = p(u(z))$$

De même, $Im(p)$ est stable par u donc $u(z) \in Im(p)$. Donc

$$p(u(x)) = p(u(z)) = u(z)$$

D'où

$$p(u(x)) = u(p(x))$$

Donc p et u commutent.

Solutions - Planche 2.

Exercice 1. Soit $u = (u_n)$ une suite réelle. Alors $f(f(u)) = u$ car si on note $(v_n) = f(f(u))$ alors pour les termes d'indice pair, $v_{2n} = u_{2n}$, et pour les indice impair, $v_{2n+1} = -(-u_{2n+1}) = u_{2n+1}$. Donc $f^2 = id$ donc il s'agit d'une symétrie. Calculons maintenant par rapport à quoi.

Soit $u \in ker(f - id)$. Alors $f(u) = u$, donc cela dit que $u_{2n} = u_{2n}$ et que $u_{2n+1} = -u_{2n+1}$. Donc que $u_{2n+1} = 0 \forall n \geq 0$. Réciproquement ces suites conviennent (les suites nulles aux termes d'indice impair). Donc

$$Ker(f - id) = \{u \in E, u_{2n+1} = 0 \forall n \geq\}$$

De même on montre que

$$Ker(f + id) = \{u \in E, u_{2n} = 0 \forall n \geq\}$$

Donc f est la symétrie par rapport aux suites à termes d'indice impair nul parallèlement aux suites à termes d'indice pair nul.

Exercice 2. Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. On veut montrer que $(p + q)^2 = p + q$. Or

$$(p + q)^2 = (p + q) \circ (p + q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$$

Donc $p + q$ est un projecteur.
Réciproquement, supposons que $p + q$ soit un projecteur. On a alors :

$$p + q = (p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$$

D'où

$$p \circ q + q \circ p = 0$$

On composa par p à gauche et à droite et on obtient :

$$\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \end{cases}$$

D'où en soustrayant on obtient $p \circ q - q \circ p = 0$. Or $p \circ q + q \circ p = 0$. D'où on obtient $p \circ q = q \circ p = 0$.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$ qui est à la foi un projecteur et une homothétie. Comme c'est une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda id$. De plus comme f est un projecteur, alors $f^2 = id$. Donc

$$f^2 = f = \lambda id = f \circ \lambda id = \lambda^2 id$$

D'où $\lambda = \lambda^2$. Donc $\lambda = 1$ ou -1. Donc $f = id$ ou $f = 0$.
Réciproquement, ces deux applications conviennent.

Exercice 2. Supposons qu'il existe a, b des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et

$$ap + bq = 0$$

Si $a = 0$ alors $bq = 0$. Or $q \neq 0$ donc $b = 0$. Si $b = 0$ alors $ap = 0$. Or $p \neq 0$ donc $a = 0$. Donc on peut supposer que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soit $x \in Ker(p)$ alors $bq(x) = 0$. Donc $q(x) = 0$ donc $Ker(p) \subset Ker(q)$. Réciproquement on a aussi $Ker(q) \subset Ker(p)$. Donc $Ker(p) = Ker(q)$.

Soit $x \in Im(p)$ non nul. Alors $p(x) = x$. Donc $ax + bq(x)$. Donc $q(x) = -ax/b$. Or comme $Ker(p) \bigoplus Im(p) = E$ et $Ker(q) \bigoplus Im(q) = E$. Alors $x \in Im(q)$ car sinon $x \in Ker(q) = Ker(p)$ ce qui est exclu car $x = p(x)$ est non nul. Donc $x = -ax/b$. Donc $a = -b$. Donc $p = q$.