Colle 11 ~ 5 janvier 2016 ~ Colleur : Isenmann ~ MPSI ~ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Montrer que l'ensemble des bijections d'un ensemble forme un groupe pour la loi de composition.

Est-ce que l'ensemble des fonctions injectives de X dans X forme un groupe la loi de composition ?

Exercice 1. Étudier la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $(G, \times)$ un groupe, où l'on note e le neutre, tel que $x^2 = e$ pour tout élement x. Montrer que G est commutatif.

Planche 2.

Question de cours. Est-ce que tout anneau est intègre ?

Exercice 1. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ avec $u_0 \in [-2, 2]$. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ est un groupe où p est un nombre premier.

Planche 3.

Question de cours. Quels sont les élements inversibles de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?

Exercice 1. On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$ avec $u_0 \geq 1$. Étudier cette suite.

Exercice 2. Soit $(G, \times)$ un groupe et a un élement. On pose $\langle a \rangle = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe de G.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Les bijections forment un groupe car elles contiennent l'identité, elles sont stables par composition, elles sont inversibles (en prenant l'inverse au sens de la composition) et la loi est associative.

Les injections par contre ne forment pas un groupe. Elles ont beau contenir l'identité et être stables par composition elles ne sont pas forcément toutes inversibles. En effet si on prend $X = \mathbb{R}$, alors $f(x) = \exp(x)$ est injective mais pas bijective.

Exercice 1. On pose $f(x) = x^2 + 1$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite (u_n) est bien définie car $\mathbb{R}$ est un intervalle stable de f.

On étudie donc $f(x) - x$ pour connaître la monotonie de (u_n). Or $x^2 - x + 1$ est de discriminant $-3 < 0$ donc $f(x) - x > 0$. Donc (u_n) est croissante.

Comme (u_n) est croissante, elles converge ou diverge vers $+\infty$. Si elle convergeait vers l alors $l^2 - l + 1 = 0$ ce qui est impossible car le discriminant est négatif strictement. Donc $u_n \to +\infty$.

Exercice 2. Soit x et $y \in G$. Montrons que $xy = yx$. Or $x^2 = e$ d'après l'hypothèse. Cela dit que $x^{-1} = x$. Donc on utilise ça : $xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Non $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre car $2 \times 3 = 0$ modulo 6.

Exercice 1. On pose $f(x) = \sqrt{2-x}$. Montrons que la suite est bien définie. Or f est décroissante car $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$. Or $f(2) = 0$. Donc $f \geq 0$ et $f(-2) = 2$ Donc $f(x) \in [-2, 2]$ si $x \in [-2, 2]$. Donc cet intervalle est stale donc la suite (u_n) est bien définie.

Si la suite (u_n) converge c'est vers un point fixe de f. Donc $x^2 + x - 2 = 0$. D'où $x = 1$ ou $x = -2$. Donc le seul point fixe est 1. Montrons donc que u_n converge vers 1. Pour cela on étudie $v_n = |u_n - 1|$.

Montrons que v_n tend vers 0. Montrons déjà que v_n décroit.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = |\frac{\sqrt{2-u_n} - 1}{u_n - 1}|$$

Et là on utilise le gros trick du $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ qui donne

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = |\frac{2 - u_n - 1}{(\sqrt{2-u_n}+1)(u_n - 1)}| = \frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1} \leq 1$$

Donc la suite v_n décroit et converge donc car positive. Si $v_n \to \alpha > 0$, alors on tire de

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1}$$

en passant à la limite que

$$\sqrt{2-l} + 1 = 1$$

donc $u_n \to 2$. Mais ça c'est exclu. Donc $v_n \to 0$ donc $u_n \to 1$.

Exercice 2. 1 est l'élement neutre du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ (qui est multiplicatif). Or c'est un carré $1 = 1^2$.

Soient x et y deux carrés. Alors il existe a et b tels que $x = a^2$ et $y = b^2$. Donc $xy = a^2 b^2 = (ab)^2$ car le groupe est commutatif.

Soit x un carré. Il existe a tel que $x = a^2$. Donc $x^{-1} = (a^2)^{-1}$. Donc l'inverse est encore dans l'ensemble des carrés.

Les carrés forment donc un sous-groupe.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. $xy = 1$ n'a que deux solutions $x = 1, y = 1$ et $x = -1, y = -1$. Donc 1 et -1 sont les seuls élements inversibles de $\mathbb{Z}$. En effet si x est non nul différent de 1 et -1 et inversible alors il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1$. Or $y = 1/x \in \mathbb{Z}$ ce n'est pas possible car $0 < |1/x| \leq 1/2$ car $|x| \geq 2$.

Exercice 1. On pose $f(x) = 1 + \ln(x)$. Or f est croissante car $f'(x) = 1/x \geq 0$ si $x \geq 1$. Donc $f(x) \geq f(1) = 1$ pour $x \geq 1$. Donc $[1, +\infty[$ est stable par f. On en déduit que (u_n) est bien définie.

On pose $g(x) = f(x) - x$. Montrons que g est positive ou négative. Or $g'(x) = 1/x - 1 \leq 0$ pour $x \geq 1$. Donc g est décroissante. De plus $g(1) = 1 - 1 = 0$. Donc $g \leq 0$ sur $[1, +\infty[$. D'où (u_n) est décroissante et minorée. Donc converge.

On note l la limite. Alors $l = 1 + \ln(l)$. Par l'étude de g qui vient d'être faite on en déduit que $l = 1$.

D'où $u_n \to 1$.

Exercice 2. Le neutre 1 est dedans (pour $k = 0$). (On note le groupe multiplicativement). Soit x et y dedans. Il existe k et k' deux entiers tels que $x = a^k$ et $y = a^{k'}$. On en déduit que $xy = a^{k+k'}$. Donc l'ensemble est stable par multiplication.

Soit x dedans. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^k$. Donc $x^{-1} = a^{-k}$. On en déduit que l'ensemble est stable par passage à l'inverse.

C'est donc un sous-groupe.