Colle 13 ~ 19 janvier 2016 ~ Colleur : Isenmann ~ MPSI ~ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue.

Exercice 1. $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Étudier la continuité de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

Planche 2.

Exercice 0. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1. Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Utilisons le caractère séquentielle. Soit a_n une suite de I qui tend vers $a \in I$. Alors comme f est continue en a, alors $f(a_n) \to f(a)$. $f(a_n)$ est alors une suite de J (car $f(I) \subset J$) et $f(a)$ aussi. Donc comme g est continue en $f(a)$, $g(f(a_n)) \to g(f(a))$. Donc $g \circ f$ est continue en tout point de I donc est $\boxed{\text{continue sur } I}$.

On peut aussi faire avec des voisinages ou avec des ϵ.

Exercice 1. Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ on distingue les cas en fonction de la où on se place.

$\diamond$ f est continue en tout point non entier : sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

$\diamond$ Il faut donc regarder si la fonction est continue aux points $a \in \mathbb{Z}$. Soit donc $a \in \mathbb{Z}$. On va calculer la limite à gauche et à droite. Il faut vérifier que ces deux limites valent $f(a) = a + \sqrt{0} = a$.

Commencons en a^+. Comme $E(x) \to a$ en a^+, alors par continuité de la racine on a :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} E(x) + \sqrt{x - E(x)} = \lim_{x \to a^+} a + \sqrt{a - a} = a = f(a)$$

Maintenant en a^-. $\lim_{x \to a^-} E(x) = a - 1$. Donc par continuité de la racine, on a :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} E(x) + \sqrt{x - E(x)} = \lim_{x \to a^-} a - 1 + \sqrt{a - (a-1)} = a - 1 + 1 = a = f(a)$$

Finalement, f est continue en a.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$. Notons que l'argument de la continuité de la racine est fondamental et est souvent oublié.

Solutions - Planche 2.

Exercice 0. On utilise la technique fondamentale suivante : **si on veut montrer que f a un point fixe, on montre que $f(x) - x$ a un zéro**. Pourquoi ? Car on possède des critères efficaces pour montrer qu'une fonction a des zéros. Par exemple le théorème des valeurs intermédiaires. On pose $g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue sur $[0, 1]$. Or $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g sur $[0, 1]$, il existe un zéro pour g sur $[0, 1]$. On le note a. Alors $f(a) = a$ et $\boxed{a \text{ est un point fixe de } f}$.

Exercice 1. Soit f continue et périodique. On note T sa période :

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Sur $[0, T]$, qui est un **segment, f est continue donc bornée**. Il existe donc $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ sur $[0, T]$. On va maintenant ramener tout point hors de ce segment à ce segment.

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier relatif n tel que $x + nT \in [0, T]$. Pourquoi ? On cherche n tel que $0 \leq x + nT \leq T$. Donc tel que $-x/T \leq n \leq 1 - x/T$. Il suffit donc de choisir $n = E(-x/T)$. Du coup par périodicité, $f(x + nT) = f(x)$. Or $x + nT \in [0, T]$ donc par ce qui précède, $|f(x + nT)| \leq M$. Finalement, $\boxed{|f(x)| \leq M \text{ sur } \mathbb{R}}$.