**Colle 12** ~ 14 janvier 2016 ~ Colleur : Isenmann ~ MPSI ~ Trinôme :

---

**Planche 1.**

**Exercice 1.** Calculer la limite $x^x$ lorsque $x \to 0$.

**Exercice 2.** Calculer la limite en 0 de $x \sin(1/x)$.

---

**Planche 2.**

**Exercice 1.** Calculer la limite de $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$ lorsque $x \to +\infty$.

**Exercice 2.** Calculer la limite en $+\infty$ de $e^{x-\sin(x)}$.

---

**Planche 3.**

**Exercice 1.** Calculer la limite de $\ln(x)\ln(\ln(x))$ lorsque $x \to 1$.

**Exercice 2.** Calculer la limite en 0 de $xE(1/x)$.

**Solutions - Planche 1.**

**Exercice 1.** On a $x^x = \exp(x\ln(x))$. Or en 0 par croissance comparée on a $x\ln(x) \to 0$. Donc en passant à l'exponentielle on a $x^x \to 1$ lorsque $x \to 0$.

**Exercice 2.** On a du sin, on utilise le théorème des gendarmes car $x$ tend vers 0 et sin est bornée. Lorsque $x \to 0$ on a :

$$|x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$$

Donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

**Solutions - Planche 2.**

**Exercice 1.** On utilise le trick de la mise en facteurs :

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x} = \frac{x}{x}\frac{1-\sqrt{x}/x}{1+\ln(x)/x} = \frac{1-\sqrt{x}/x}{1+\ln(x)/x}$$

Or $\sqrt{x}/x \to 0$ et $\ln(x)/x \to 0$ en $+\infty$ par croissance comparée. D'où le machin en entier tend vers 1.

**Exercice 2.** Du $\sin(x)$. Il va être petit par rapport à $x$ qui tend vers l'infini. On minore donc $x - \sin(x) \geq x - 1$ car $\sin(x) \leq 1$. D'où en passant à l'exponentielle qui est croissante on obtient

$$e^{x-\sin(x)} \geq \exp(x-1) \to +\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$$

**Solutions - Planche 3.**

**Exercice 1.** Ça rappelle le coup du $x\ln(x)$ en 0 qui tend vers 0. On s'y ramène en posant $x = e^y$. On a donc

$$\ln(x)\ln(\ln(x)) = \ln(e^y)\ln(\ln(e^y)) = y\ln(y)$$

Mais cette fois $y$ tend vers 0 car $x$ tend vers 1. Donc

$$\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$$

**Exercice 2.** On utilise la définition de la partie entière pour utiliser le théorème des gendarmes. On a

$$1/x - 1 \leq E(1/x) \leq 1/x$$

Donc en multipliant par $x \geq 0$ on obtient

$$1 - x \leq xE(1/x) \leq 1$$

Or $1 - x \to 1$ lorsque $x \to 0$. Donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to 0} xE(1/x) = 1$$