Colle 5 $\sim$ 15 octobre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MPSI $\sim$ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Est-ce que f est injective, surjective, bijective ? Calculer $f([0,1])$ et $f^{-1}(\{2,4\})$.

Exercice 1. Soit X un ensemble et f une fonction de X dans X telle qu'il existe $c \in X$ de sorte que $f \circ f(x) = c$ pour tout $x \in X$. Est-ce que f est surjective, injective ?

Planche 2.

Question de cours. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Est-ce que la fonction f est injective, surjective, bijective ? Calculer $f([-1,0[\bigcup]0,1])$ et $f^{-1}([-1,2])$.

Exercice 1. Soit X un ensemble. Est-ce que si une fonction $f : X \to X$ est injective alors elle est bijective ? Et si X est un ensemble fini ?

Planche 3.

Question de cours. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Est-ce que la fonction f est injective, surjective, bijective ? Calculer $f([-1,1])$ et $f^{-1}([1,4])$.

Exercice 1. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que f est injective si et seulement si

$$f\left(A \bigcap B\right) = f(A) \bigcap f(B)$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Un dessin de la fonction laisse croire qu'elle n'est pas injective. Plus exactement on a par exemple $f(0) = 0$ et $f(0,5) = 0$. Par conséquent f n'est pas injective.

Toutes les valeurs entières semblent être atteintes. Prouvons le. Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(n) = E(n) = n$. Donc $n \in Im(f)$ et f est surjective.

Comme la fonction n'est pas injective alors n'est pas bijective. Néanmoins si on restreint la fonction à $\mathbb{Z}$, alors on obtient une fonction bijective.

Montrons que $f([0,1]) = \{0,1\}$. Soit $x \in [0,1[$, alors $f(x) = 0$. De plus $f(1) = 1$. Donc $f([0,1]) \subset \{0,1\}$. L'inclusion réciproque est claire et on a donc égalité.

Montrons que $f^{-1}(\{2,4\}) = [2,3[\bigcup[4,5[$. Soit $x \in [2,3[$, alors $f(x) = 2$. Soit $x \in [4,5[$, alors $f(x) = 4$. Donc $[2,3[\bigcup[4,5[\subset f^{-1}(\{2,4\})$. Soit maintenant $x \in f^{-1}(\{2,4\})$. Alors $f(x) = 2$ ou $f(x) = 4$. Si $f(x) = 2$, alors $2 \leq x < 3$ par définition de la partie entière. Donc $x \in [2,3[$. Si $f(x) = 4$, alors $x \in [4,5[$. On a donc montré l'égalité.

Exercice 1. Supposons que f soit surjective. Soit $y \in X$, alors il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Insérons ceci dans la propriété que vérifie f. On obtient $f(f(x)) = f(y) = c$. Donc pour tout $y \in X$, $f(y) = c$. Ainsi la fonction f ne peut être surjective à moins que $|X| = 1$.

Supposons que f soit injective. Distinguons les cas. Si $|Im(f)| \geq 2$, alors il existe $u \neq v$ dans X tels qu'il existe x et y dans X tels que $f(x) = u$ et $f(y) = v$. On en déduit que $f(f(x)) = f(u) = c = f(v) = f(f(y))$. Donc f ne peut être injective. Si par contre $|Im(f)| = 1$, alors pour tout $x \in X$, $f(x) = d$ pour un $d \in X$. On en déduit que f ne peut être injective à moins que $|X| = 1$.

Finalement, si $|X| = 1$, alors f est bijective. Sinon f n'est ni injective ni surjective.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Un joli dessin de la fonction nou permet de conjecturer que f est injective mais pas surjective. En effet 0 n'est pas atteint par f. De plus si $f(x) = f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}^*$, alors $1/x = 1/y$ donc $x = y$ et f est injective. On en déduit que f n'est pas bijective. Remarquons que si l'on restreint l'arrivée à $\mathbb{R}^*$ alors on a une bijection.

Montrons que $f([-1,0[\bigcup]0,1]) =]-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty[$. Soit $x \in [-1,0[$, alors $f(x) = 1/x \leq -1$. De plus si $x \in]0,1]$, alors $f(x) = 1/x \geq 1$. Donc $f([-1,0[\bigcup]0,1]) \subset]-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty[$. Soit $y \in]-\infty,-1]$. Alors en posant en posant $x = 1/y$ on a $f(x) = y$. Donc $y \in f([-1,0[)$. De même si $y \in [1,+\infty[$, alors $y \in f(]0,1])$. On en déduit l'égalité.

Montrons que $f^{-1}([-1,2]) =]-\infty,-1]\bigcup[1/2,+\infty[$. Soit $x \in]-\infty,-1]$, alors $f(x) = 1/x \geq -1$ et de plus $f(x) < 0$. Donc $x \in f^{-1}([-1,2])$. De même si $x \in [1/2,+\infty[$, alors $x \in f^{-1}([-1,2])$. Soit $x \in f^{-1}([-1,2])$. Alors si $x < 0$, on a $-1 \leq f(x) < 0$. Donc $x \in]-\infty,-1]$. De même si $x > 0$, alors $x \in [1/2,+\infty[$. On a donc montré l'égalité.

Exercice 1. Non prenons par exemple $f(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est injective mais n'est pas surjective. Ou sinon e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Par contre dans le cas où X est fini, l'injectivité implique la bijectivité. Soit $f : X \to X$ injective et supposons que f ne soit pas surjective. On note $n = |X|$ et $x_1, \ldots, x_n$ les élements de X. Alors $\mathsf{Im}(f) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$. Or f est injective donc $f(x_i) \neq f(x_j)$ pour tout $i \neq j$. On en déduit que $\mathsf{Im}(f) = n = |X|$. Or $\mathsf{Im}(f) \subset X$. Donc $X = \mathsf{Im}(f)$ et f est surjective.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. La fonction f est surjective car si $y \in \mathbb{R}^+$, alors en posant $x = \sqrt{y}$ on a $f(x) = x^2 = y$. La fonction f n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$. Donc f n'est pas bijective.

On calcule $f([-1, 1] = [0, 1]$ par double inclusion.

On calcule $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \bigcup [1, 2]$ par double inclusion.

Exercice 1. Remarquons déjà qu'un sens de l'égalité est toujours vérifiée. En effet on a $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$ pour toutes parties A, B de X. Soient A et B deux parties de X. Soit $y \in f(A \bigcap B)$, alors il existe $u \in A \bigcap B$ tel que $y = f(u)$. Donc $y \in f(A)$ car $u \in A$ et $y \in f(B)$ car $u \in B$. On en déduit l'inclusion.

Supposons maintenant que f soit injective. Soient A et B deux parties de X. Soit $y \in f(A) \bigcap f(B)$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $y = f(a)$ et $f(b) = y$. D'où $f(b) = f(a)$. Par injectivité de f on en déduit que $a = b$. On note $u = a = b$. Alors $u \in A \bigcap B$ et $f(u) = y$. D'où $y \in f(A \bigcap B)$. Donc on a l'égalité $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$.

Supposons que $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$ pour toutes parties A et B de X. Montrons que f est injective. Pour ce faire on considère x et y deux élements de X tels que $f(x) = f(y)$. On pose alors $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On note $u = f(x) = f(y)$. Alors $u \in f(A) \bigcap f(B)$. Donc $u \in f(A \bigcap B)$. Or si $x \neq y$, alors l'intersection est vide et c'est impossible. Ainsi $x = y$ et f est injective.