Colle 8 ~ 18 novembre 2015 ~ Colleur : Isenmann ~ MP1 ~ Trinôme : 1

Planche 1.

Question de cours. Théorème d'invariance du rayon de convergence.

Exercice 1. Développer en série entière en 0 la fonction arcsin. En intégrant $\arcsin(\sin(t))$, calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Planche 2.

Question de cours. Théorème de d'Alembert pour le rayon de convergence d'une série entière.

Exercice 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Quel le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

Planche 3.

Question de cours. Récupération locale et intégrale des coefficients.

Exercice 1. Calculer le rayon de convergence des séries entières de terme général

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n})$$

et

$$b_n = \sum_{k|n} k^2$$

Exercice 2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

Solutions - Planche 1.

Exercice 1. La dérivée de $\arcsin(x)$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. D'où il suffit d'intégrer le développement en série entière.

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\arcsin(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$$

Le rayon de convergence de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est 1 (par la méthode de d'Alembert). Donc le rayon de convergence de arcsin vaut 1 aussi car la primitive.

On va utiliser à bon escient l'indication. On a $\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2} tdt = \pi^2/8$. Or d'après le développement en série précédent on a

$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2}\sin^{2n+1}(t)dt$$

Et là une envie folle de permuter nous prend. Mais vérifions qu'on ait le droit quand même. Vérifions la convergence uniforme sur $[0,\pi/2]$. Il y a en fait convergence normale de la série sur $[0,\pi/2]$ car

$$\frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2}\sin^{2n+1}(t) \leq \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2}$$

Or cette dernière converge grâce à l'équivalent de Stirling de $n!$.

Du coup on a

$$\pi^2/8 = \int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))dt = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)dt$$

Pourquoi c'est mieux ça ? Parce que cette intégrale se calcule par récurrence à l'aide d'une intégration par parties. On trouve

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)dt = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Et là c'est trop mignon tout ce simplifie et il ne reste que

$$\pi^2/8 = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Solutions - Planche 2.

Exercice 1. Cherchons d'abord des majorations ou des équivalents avant d'avoir à utiliser la définition du rayon.

On a déjà une majoration évidente qui est $\frac{a_n}{n!} \leq a_n$. D'où $R \leq R_2$ où R est le rayon de $\sum a_n z^n$ et R_2 est le rayon de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

C'est déjà pas mal mais la majoration est beaucoup trop grossière. Regardons un exemple : si $a_n = 1$, alors $R = 1$ et $R_2 = +\infty$. Ce qui conduit à penser que $R_2 = +\infty$ dans tous les cas.

Soit $r > 0$. On cherche à montrer que $|a_n r^n / n!|$ est bornée. Par définition de $R > 0$, il existe $a > 0$ tel que $a < R$ et M_a une constante telle que

$$|a_n a^n| \leq M_a$$

On en déduit que

$$|a_n r^n / n!| \leq M_a (r/a)^n / n!|$$

Or $(r/a)^n / n!$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ par croissance comparée. On en déduit que cette suite est bornée et que la suite $|a_n r^n / n!|$ est bornée. Finalement $R_2 = +\infty$.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. On utilise le critère de d'Alembert pour le premier (parce qu'il y a un produit). En effet $a_n = (n+1)\cdots(2n)/n^n$. D'où

$$a_{n+1}/a_n = \frac{(n+2)\cdots(2n+2)n^n}{(n+1)\cdots(2n)(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2(1+1/n)^2} \to 4/e$$

D'où le rayon de convergence est $e/4$.

Pour le deuxième pas de d'Alembert mais des minorations / majorations devraient faire l'affaire. En effet grossièrement on a

$$1 \leq b_n \leq nn^2$$

Or le rayon de 1 c'est 1. De même le rayon de n^3 c'est 1 (par d'Alembert). Donc par encadrement le rayon de b_n c'est 1.

Exercice 2. Ça sent clairement l'interversion intégrale et série. Mais il n'y a pas de série explicitée il faut donc en trouver une qui fasse le job. Une première idée serait de prendre $f(x) = \frac{1}{1+t^a}$. Mais ceci ne marchera pas car il est difficile de développer en série entière cette fonction. Néanmoins elle se rapproche de $\frac{1}{1+t}$ dont on sait calculer le développement en série entière.

On part là dessus. On fixe $a > 0$ et on pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$$

sur $[0,1]$ car elle a 1 pour rayon de convergence. D'où $f(t^a) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{an}$ pour tout $t \in [0,1[$ car $0 \leq t^a < 1$. On note F la primitive de $\frac{1}{1+t^a}$ sur $[0,1]$. Alors par intégration terme à terme sur $[0,x]$ avec $x < 1$ on a

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^x t^{an}dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{an+1}}{an+1}$$

On aimerait bien identifier en $x = 1$. Ok F est continue sur $[0,1]$ par intégration d'une fonction continue sur $[0,1]$. Par contre pourquoi on a le droit faire $x = 1$ dans la seconde et de dire qu'il y a égalité ? Il faut la continuité de la série de fonctions sur $[0,1]$. Problème, son rayon de convergence vaut 1 (car au signe près le coefficient est une fraction rationnelle). Il nous faut montrer que la série est continue jusqu'en 1 (le rayon de convergence). Une convergence normale ne marche pas. Par contre comme c'est une série alternée on a un critère adapté. En effet le reste de la série est majoré par

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{an+1}}{an+1} \leq \frac{an+1}{\to}0$$

La majoration est uniforme et tend vers 0 donc la série converge uniformément sur $[0,1]$. D'après le théorème de double limite, on a donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = F(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{an+1}$$