Colle 24 - lundi 6 avril 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On note $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que :

$$|\int_0^1 (f(x) + xf(1-x))dx| \leq 3M/2$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^\pi e^{-u\sin(x)}dx \text{ et } \lim_{u\to\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2}dx$$

Planche 2.

Question de cours. Quels sont les liens entre continuité, continuité uniforme, lipschitzien ?

Exercice 1. Soient $a < b$ des réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) > 0$. $\int_a^b f = 0$. Montrer qu'il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

Exercice 2. Pour $x > 1$, calculer

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)dt$$

Planche 3.

Question de cours. Démontrer que si f est continue sur $[a,b]$ telle que $f \geq 0$, alors : si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}dx$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Démontrer : $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq M_0/a + M_2a/2$.

b) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que en notant $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

Solutions - Planche 1.

Exercice 1. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$|\int_0^1 (f(x) + xf(1-x))dx| = |\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(1-x)dx|$$

par linéarité de l'intégrale.

$$\leq |\int_0^1 f(x)dx| + |\int_0^1 xf(1-x)dx|$$

par inégalité triangulaire.

$$\leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 x|f(1-x)|dx \leq M + M\int_0^1 xdx = 3M/2$$

Exercice 2.

a) On effectue un changement de variable : $y = \pi - x$. On a alors :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-u\sin(x)}dx = \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin(x)}dx$$

Donc on restreint le calcul de l'intégrale à $[0, \pi/2]$.

$$\int_0^{\pi} e^{-u\sin(x)}dx = 2\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin(x)}dx$$

Montrons que sur cet intervalle, $\sin(x) \geq 2x/\pi$. On pose pour cela l'application $\varphi(x) = \sin(x) - 2x/\pi$ est alors de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. En étudiant la dérivée et la dérivée seconde de φ, on montre qu'il existe un unique réel $a \in]0, \pi/2[$ tel que φ' change de signe en a et donc que φ est croissante sur $[0, a]$ et décroissante sur $[a, \pi/2]$. Comme $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$ on conclut que $\varphi \geq 0$. Ce qui montre l'inégalité demandée.

On a alors :

$$0 \leq \int_0^{\pi} e^{-u\sin(x)}dx = 2\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin(x)}dx$$

$$\leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2ux/\pi}dx = \pi(1 - e^{-u})/u \leq \pi/u$$

Donc on conclut que $\int_0^{\pi} e^{-u\sin(x)}dx \to 0$ quand u tend vers l'infini.

b) On a pour tout $u > 0$.

$$0 \leq e^{-u^2} \in_0^u e^{t^2}dt \leq e^{-u^2}\int_0^u e^{tu}dt$$

$$= e^{-u^2}[e^{tu}/u]_0^u = e^{-u^2}\frac{e^{u^2} - 1}{u} = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \leq 1/u$$

Donc l'intégrale demandée tend vers 0.

Solutions - Planche 2.

Exercice 1. Raisonnons par l'absurde : supposons que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$$

. Puis que $\int_a^b f = 0$ et que f est continue et positive ou nulle sur $[a,b]$ on a alors $f = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse d'existence de x_1 tel que $f(x_1) > 0$.

On conclut qu'il existe x_2 tel que $f(x_2) < 0$.

Exercice 2. L'idée est d'utiliser des suites de Riemann.
D'abord on remarque que

$$1 - 2x\cos(t) + x^2 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t) > 0$$

donc l'application $f(t) = \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$ est bien définie et continue sur $[0, \pi]$. D'où l'existence de l'intégrale envisagée.

Posons la suite de Riemann. On note $u_n = \pi/n \sum_0^{n-1} f(k\pi/n)$ telle que :

$$u_n \to \int_0^\pi f(t)dt$$

Simplifions maintenant l'écriture de u_n.

$$u_n = \pi/n \ln \prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2x\cos(k\pi/n) + x^2) = \pi/n \ln \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{ik\pi/n})(x - e^{-ik\pi/n})$$

Or

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{ik\pi/n})(x - e^{-ik\pi/n}) &= \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{ik\pi/n}) \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{-ik\pi/n}) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{ik\pi/n}) \prod_{0}^{n-1}(x - e^{2(2n-k)i\pi/2n}) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{2ik\pi/2n}) \prod_{p=n+1}^{2n}(x - e^{2ip\pi/2n}) \\
&= \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=0}^{2n-1}(x - e^{2ik\pi/2n}) = \frac{x-1}{x+1}(x^{2n} - 1)
\end{aligned}$$

et donc

$$u_n = \pi/n \ln \frac{x-1}{x+1}(x^{2n} - 1)$$

$$u_n = \pi/n(2n\ln(x) + \ln(\frac{x-1}{x+1}(1 - \frac{1}{x^{2n}})))$$

D'où $u_n \to 2\pi\ln(x)$.
D'où l'intégrale voulue vaut $2\pi\ln(x)$.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. Comme $n\sin(x)/(x+n) \to \sin(x)$, on conjecture que la limite est $\int_0^\pi \sin(x)dx$. Pour montrer cela on regarde :

$$|\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}dx - \int_0^\pi \sin(x)dx| = |\int_0^\pi -x\sin(x)/(x+n)dx|$$

$$= \int_0^\pi x\sin(x)/(x+n)dx \leq \int_0^\pi \pi/ndx = \pi^2/n \to 0$$

Donc on a bien

$$\lim \int_0^\pi n\sin(x)/(x+n)dx = \int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

Exercice 2. Taylor Lagrange à f sur $[x-a,x]$ et sur $[x,x+a]$. dit que

$$|f(x-a) - f(x) + af'(x)| \leq a^2M_2/2$$

et

$$|f(x+a) - f(x) - af'(x)| \leq a^2M_2/2$$

D'où par inégalité triangulaire on a :

$$|f(x+a) - f(x-a) - 2af'(x)| \leq a^2M_2$$

Puis par inégalité triangulaire, on a :

$$2a|f'(x)| = |f(x+a) - f(x-a) - (f(x+a) - f(x-a) - 2af'(x))| \leq 2M_0 + a^2M_2$$

et donc

$$|f'(x)| \leq M_0/a + M_2a/2$$

b) L'application $\varphi(a) = M_0/a + M_2a/2$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ et donc $\varphi'(a) = -M_0/a^2 + M_2/a$. D'où en étudiant les variations de φ, on en déduit que l'infimum de φ sur $]0,+\infty[$ est atteint en $\sqrt{2M_0/M_2}$ et vaut $\sqrt{2M_0M_2}$
donc d'après la première question, on en déduit que

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

et donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$