Colle 15 - lundi 19 janvier 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Exercice 0. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1. Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Déterminer f.

Planche 2.

Question de cours. Montrer que la composée de deux fonctions continues est continue.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1 périodique. Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+c) = f(c)$.

Planche 3.

Exercice 0. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

Exercice 1. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que

$$f \circ f = id$$

Déterminer f.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment non vide de $[0,1]$.

Solutions - Planche 1.

Exercice 0. On utilise la technique fondamentale suivante : **si on veut montrer que f a un point fixe, on montre que $f(x) - x$ a un zéro**. Pourquoi ? Car on possède des critères efficaces pour montrer qu'une fonction a des zéros. Par exemple le théorème des valeurs intermédiaires. On pose $g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue sur $[0, 1]$. Or $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g sur $[0, 1]$, il existe un zéro pour g sur $[0, 1]$. On le note a. Alors $f(a) = a$ et $\boxed{a \text{ est un point fixe de } f}$.

Exercice 1. Soit f continue et périodique. On note T sa période :

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Sur $[0, T]$, qui est un **segment, f est continue donc bornée**. Il existe donc $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ sur $[0, T]$. On va maintenant ramener tout point hors de ce segment à ce segment.

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier relatif n tel que $x + nT \in [0, T]$. Pourquoi ? On cherche n tel que $0 \leq x + nT \leq T$. Donc tel que $-x/T \leq n \leq 1 - x/T$. Il suffit donc de choisir $n = E(-x/T)$. Du coup par périodicité, $f(x + nT) = f(x)$. Or $x + nT \in [0, T]$ donc par ce qui précède, $|f(x + nT)| \leq M$. Finalement, $\boxed{|f(x)| \leq M \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 2. Procédons par analyse et synthèse. D'abord essayons de deviner la solution. La relation précédente est une relation dite "linéaire". Les applications linéaires vérifient donc cela : $f(x) = ax$ vérifie bien la propriété pour tout $a \in \mathbb{R}$. On va montrer que ce sont les seules.

Analysons. Soit f une solution. Appliquons la relation à des cas particuliers. Commençons par : $x = y = 0$. Alors $f(0) = f(0) + f(0)$. Donc $f(0) = 0$. La fonction passe déjà par l'origine. Passons à $x = y = 1$: $f(1 + 1) = f(2) = 2f(1)$. C'est là qu'il faut penser à $f(x) = ax$. On devine alors que le a doit être le $f(1)$. Il faut donc montrer que $f(x) = xf(1)$ pour tout x. C'est déjà vrai pour 0, 1 et 2. Est ce que c'est vrai pour d'autres nombres ? Montrons le pour les entiers. Cela se fait par récurrence. Supposons que cela soit vraie pour $n \geq 0$. Alors $f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1)$. Donc par récurrence $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \geq 0$. De plus comme $f(0) = 0$, alors $f(-x) = -f(x)$. Donc $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On se dirige vers une preuve par densité comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$. Montrons donc que pour tout rationnel p/q on a $f(p/q) = p/qf(1)$.

Soit q un entier positif non nul on a :

$$f(1) = f(1/q + \cdots + 1/q) = qf(1/q)$$

Donc $f(1/q) = 1/qf(1)$. Donc $f(p/q) = p/qf(1)$.

Maintenant utilisons la densité et la continuité. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite x_n de rationnels telle que $x_n \to x$. Or f est continue en x_0, donc $f(x_n) \to f(x)$. Or $f(x_n) = x_nf(1)$ d'après ce qu'on a fait avant. Donc $x_nf(1) \to f(x)$. Or $x_n \to x$. Donc par unicité de la limite, $\boxed{xf(1) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On utilise le critère séquentiel ici, mais on aurait aussi pu utilisé les voisinages.

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est continue sur I et g est continue sur J. Soit (x_n) une suite de I qui converge vers $x \in I$. Alors par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$. $(f(x_n))$ est une suite suite de J qui converge vers $f(x)$. Donc par continuité de g, $g(f(x_n)) \to g(f(x))$. Donc $\boxed{g \circ f \text{ est continue sur } I}$.

Exercice 1. Pour montrer qu'une **fonction s'annule on utilise le TVI**. Ici il faut faire un dessin pour comprendre ce qu'il se passe : f est proche de 1 à droite et est proche de -1 à gauche. Comme f est continue elle "passe bien par 0" à un moment.

Formalisons cela. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, alors il existe $b > 0$ tel que $f(b) \geq 1/2$. De même, il existe $a < 0$ tel que $f(a) \leq -1/2$. En appliquant le TVI à f sur $[a, b]$, on conclut qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ s'annule}}$.

Exercice 2. On sent l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires. Soit $a > 0$. La **technique classique consite à poser** $g(x) = f(x + a) - f(x)$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On va donc chercher à montrer que g s'annule en trouvant deux réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) \geq 0$ et $g(x_2) \leq 0$.

Comme f est **continue sur le segment** $[0, 1]$ **alors** f **est bornée et atteint ses bornes**. Il existe donc x_1 et x_2 dans $[0, 1]$ tels que $f(x_1)$ réalise le minimum de f sur $[0, 1]$ et $f(x_2)$ le maximum de f sur $[0, 1]$. C'est-à-dire :

$$f(x_1) = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$$

Or par 1-périodicité de f, $f(x_1) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Pourquoi ? Motrons que $f(x_1) \leq f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Pour ce faire, il faut ramener x à $[0, 1]$. On cherche n tel que $0 \leq x + n \leq 1$. Donc tel que $-x \leq n \leq 1 - x$. Il suffit donc de choisir $n = E(-x)$. On a alors $f(x + n) = f(x)$. Or $x + n \in [0, 1]$ donc $f(x) \geq f(x_1)$.

Du coup par définition de x_1 on a :

$$g(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geq 0$$

De même on montre que

$$g(x_2) \leq 0$$

D'où on conclut avec les théorème des valeurs intermédiaires : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$. Donc $\boxed{f(a + c) = f(c)}$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrons que f est constante. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont des entiers. Alors il existe $y \in]f(a), f(b)[$ qui ne soit pas entier. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y \notin \mathbb{Z}$. C'est impossible donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Exercice 1. Premier réflexe, chercher une fonction qui marche. Ici c'est l'identité. Est ce qu'il y en a d'autres ? On dirait pas. On va donc montrer que l'identité est la seule fonction qui vérifie cela.

Soit f qui convient. Supposons que $f \neq id$. Alors il existe $x \geq 0$ tel que $f(x) \neq x$. f est bijective car admet un inverse. f est **donc monotone** sur $\mathbb{R}^+$. Or f ne peut décroître sinon elle serait bornée alors qu'elle doit être surjective. Donc f est croissante.

Supposons alors que $f(x) < x$. Dans ce cas, comme f est croissante, alors $f(f(x)) < f(x)$. Or $f(f(x)) = x$. Donc $x < f(x) < x$, c'est impossible.

De même, si $f(x) > x$, par croissance, on a : $f(f(x)) > f(x)$. Or $f(f(x)) = x$, donc $x > f(x) > x$, c'est aussi impossible. Donc $\boxed{f = id}$ est la seule fonction qui convient.

Exercice 2. On note F l'ensemble des points fixes. $F = \{x \in [0, 1] : f(x) = x\}$. Quel théorème du cours fait intervenir un segment ? Le TVI ! Il dit que **l'image d'un segment par une fonction continue est un segment**. Il faut donc interpréter F comme l'image par une fonction continue d'un segment et c'est gagné. Choisissons donc une fonction continue et un segment. Qu'est ce qu'on a comme choix pour la fonction continue ? Bah on pense à f d'abord. Et pour le segment ? Bah $[0, 1]$ parce que c'est l'ensemble de définition de f. Du coup est ce qu'on a $F = f([0, 1])$? Procédons par **double inclusion** :

Prenons $x \in F$. On a alors $x = f(x) \in f([0, 1])$. Donc $F \subset f([0, 1])$.

Réciproquement, prenons $x \in f([0, 1])$. Alors il existe $t \in [0, 1]$ tel que $f(t) = x$. On a par hypothèse sur f :

$$f(x) = f(f(t)) = f(t) = x$$

Donc $x \in F$. Donc $f([0, 1]) \subset F$. Finalement, on a bien $F = f([0, 1])$ et $\boxed{F \text{ est un segment}}$.