Colle 6 ~ 4 novembre 2015 ~ Colleur : Isenmann ~ MP1 ~ Trinôme : 15

Planche 1.

Question de cours. Si $(e_n)_{n\geq 0}$ est totale, la suite des projetés orthogonaux de x sur $\mathsf{vect}(e_0,\dots,e_n)$ converge vers x.

Exercice 1. Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexe est convexe.

Planche 2.

Question de cours. Montrer que la fonction ζ est C^∞.

Exercice 1. On pose $u_n(x) = x^n \ln(x)$ sur $]0,1]$ et $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence ou non de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.

Planche 3.

Question de cours. Théorème de continuité.

Exercice 1. On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1-x^n}$ sur $]-1,1[$. Montrer que f est continue puis C^1 sur $]-1,1[$.

Planche 1 - Solutions.

Exercice 1. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes qui converge vers f. Soit $a < b$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors pour tout n

$$f_n(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1 - \lambda)f_n(b)$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

D'où f est convexe.

Planche 2 - Solutions.

Exercice 1. Les fonctions u_n sont continues. Soit $x \in]0,1]$. Alors $u_n(x) = x^n \ln(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc la limite simple est 0. Montrons la convergence uniforme. u_n est dérivable sur $]0,1]$ et $u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln(x))$. D'où le maximum est atteint lorsque x est telle que $1 + n\ln(x) = 0$. Donc lorsque $x = e^{-1/n}$. On en déduit que

$$||u_n||_\infty = |u_n(e^{-1/n})| = 1/(ne) \to 0$$

D'où (u_n) converge uniformément vers 0.

Planche 3 - Solutions.

Exercice 1. On pose $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ sur $]-1,1[$. Essayons de montrer une convergence normale. On ne peut le faire sur $]-1,1[$ car on aura des problèmes pour majorer. Du coup on utilise la méthode de la restriction à un compact $[-a,a]$. Soit $0 < a < 1$, sur $[-a,a]$ on a la majoration suivante

$$|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a^n}$$

La majoration est indépendante de x et la série des $\frac{a^n}{1-a^n}$ converge car le terme général (positif) est équivalent à a^n. On en déduit que f est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a < 1$. D'où f est continue sur $]-1,1[$.

On dérive et on refait pareil. $u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. D'où sur $[-a,a]$ on a la majoration

$$|u_n'(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2}$$

qui nous permet encore de montrer que la série de fonction u_n' converge uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $a < 1$. On en déduit que f est C^1 sur $]-1,1[$.