Colle 3 $\sim$ 30 septembre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP*1 $\sim$ Trinôme : 4

Planche 1.

Exercice 1. Soit A un fermé et B un compact d'un espace vectoriel normé. Montrer que $A+B$ est fermée.

Exercice 2. Soit A une partie fermée non bornée convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A contient une demi-droite.

Planche 2.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit K un convexe compact. Soit $u \in L(E)$ tel que $u(K) \subset K$. On pose $u_n = \frac{1}{n}(id_E + u + \cdots + u^{n-1})$. On pose $H = \bigcap_{n\geq 1} u_n(K)$.

a) Montrer que si K est un compact, (F_n) une suite décroissante de fermés non vides dans K, alors l'intersection des F_n est non vide.

b) Montrer que H est non vide et que si $x \in K$, alors $x \in H \iff u(x) = x$.

c) Soit v un endomorphisme qui commute avec u. Montrer que u et v ont un point fixe en commun.

Planche 3.

Exercice 1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \to \pm\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$ si et seulement l'image réciproque de tout compact est compact.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'ensemble des polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ à racines simples est un ouvert.