Colle 14 $\sim$ 20 janvier 2016 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP1 $\sim$ Trinôme :

Planche 1.

Exercice 1. Montrer que A est diagonalisable ssi ${}^tA$ l'est.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que son spectre réelle soit positif. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

Planche 2.

Exercice 1. Étudier la diagonalisabilité de la matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & a & .. \\ b & a & b & .. \\ a & b & a & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Planche 3.

Exercice 1. Étudier la diagonalisabilité de

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Hints

Planche 1. cf colle précédente ...

Planche 2. Commençons par calculer la dimension du noyau. Pour cela on calcule le rang. Or l'image est engendrée par les deux vecteurs. Donc le rang c'est 0, 1 ou 2. Pour savoir si c'est 2, on regarde s'il existe une sous-matrice extraite de taille 2 qui est inversible. Or il y a $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$.

•Si $a^2 \neq b^2$, alors $\dim(\ker(f)) = 2n - 2$. Reste à trouver les deux valeurs propres restantes. Pour ça le plus simple est de prendre un vecteur très "symétrique" pour trouver une autre valeur propre. On prend le vecteur composé que de 1 et bim ça sort $n(a + b)$ comme valeurs propres. Du coup on pense au vecteur qui alterne 1 et -1 pour obtenir la troisième valeur propre qui est $n(a - b)$. Pour trouver ça on aurait aussi pu regarder la matrice 2×2 et regarder le polynôme caractéristique. Au final : on a assez de valeurs propres avec les bonnes multiplicité pour que A soit diagonalisable.

•Si $a = b \neq 0$, alors on a la matrice avec que des 1. Son noyau est de dimension $2n - 1$. D'après la trace, $2n$ est l'unique autre valeur propre. Donc A est diagonalisable.

•Si $a = -b \neq 0$, pareil. C'est juste les vecteurs propres qui seront pas les mêmes.

•Si $a = b = 0$, on a la matrice nulle.

Planche 3. On calcule le déterminant caractéristique par récurrence :

$$\chi_A(X) = X^{n-2}(X^2 - (a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2))$$

Pour sentir ce résultat on peut d'abord le calculer pour $n = 2$ et 3 et puis intuiter.

On en déduit que A est diagonalisable ssi $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$ est non nul (sinon $\dim(\ker(f))$ ne serait pas de la bonne dimension ou alors il faudrait que les coefficients soient tous nuls).