Colle 21 - lundi 16 mars 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Soient F et G deux sevs de E un ev. Est ce que $F \bigcup G$ est un sev de E ?

Exercice 1. On pose les vecteurs : $x = (1,1,0)$, $y = (1,0,1)$, $u = (1,3-2)$ et $v = (1,4,-3)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$Vect(x,y) = Vect(u,v)$$

Exercice 2. Soit $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $u = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que H et $Vect_K(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Planche 2.

Question de cours. Est ce que tout élement de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$?

Exercice 1. Soit F l'ensemble des polynômes à coefficients réels qui sont divisibles par X^2+1. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Trouver un supplémentaire de l'ensemble des fonctions réelles et paires dans l'espace vectoriel des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Planche 3.

Question de cours. Soient F et G deux sevs de E un ev tels que $F \bigoplus G = E$. Est ce que tout élement de E est soit dans F soit dans G ?

Exercice 1. Soit C l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$. On pose

$$F = \{f - g : (f,g) \in C^2\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit

$$F = \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = 0\right\}$$

et

$$G = \{x \longmapsto ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Le cours dit que si l'un des deux sous-espaces est inclus dans l'autre alors $F \bigcup G$ est un sev. Donnons un contre-exemple si ce n'est pas le cas. Pour cela, plaçons dans le cadre le plus simple : $E = \mathbb{R}^2$, $F = Vect(1,0)$ et $G = Vect(0,1)$. Alors si $F \bigcup G$ était un sous-espace vectoriel, on aurait que $(1,0) + (0,1) \in F \bigcup G$ car chacun des deux vecteurs est dedans. Donc $(1,1) \in F \bigcup G$. Mais $(1,1)$ n'est ni dans F ni dans G car s'il existait $a \in K$ tel que $(1,1) = a(1,0)$ on aurait $a = 1 = 0$ mais ce n'est pas possible (on donne le même argument pour G).

Finalement, $F \bigcup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel dans ce cas.

Exercice 1. Il s'agit de montrer une <u>double inclusion</u>. Il suffit de montrer que x et y sont combinaisons linéaires de u et v et réciproquement que u et v sont combinaisons linéaires de x et y.

Or $u = 3x - 2y$ et $v = 4x - 3y$. Donc $Vect(u,v) \subset Vect(x,y)$.

Or $x = 3u - 2v$ et $y = 4u - 3v$. Donc $Vect(x,y) \subset Vect(u,v)$.

Donc

$$Vect(x,y) = Vect(u,v)$$

Exercice 2. • Vérifions que H est <u>un sous-espace vectoriel</u> de $\mathbb{K}^n$. $H \subset \mathbb{K}^n$. H contient 0. Si $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in H$ car $\lambda x_1 + \cdots \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = 0$. De même $x + y \in H$ car

$$(x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = 0$$

• Montrons maintenant que $\underline{H + Vect_{\mathbb{K}}(u) = \mathbb{K}^n}$. Pour cela, on prend $x \in \mathbb{K}^n$ qui s'écrit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et on va montrer que c'est la somme d'un élement de H et d'un multiple de u. On pose $a = \sum_{i=1}^n x_i$. D'où $x - u\frac{a}{n} = x - (a/n, \cdots, a/n) = (x_1 - 1/n, \cdots, x_n - a/n)$. On vérifie alors que $v = x - u\frac{a}{n}$ est dans H. Donc $x = v + u\frac{a}{n}$. Donc $H + Vect_{\mathbb{K}}(u) = \mathbb{K}^n$.

• Il faut maintenant montrer qu'ils sont <u>en somme directe</u>. C'est-à-dire que l'intersection est réduite à 0. Soit $x \in H \bigcap Vect_{\mathbb{K}}(u)$. Alors il existe $a \in K$ tel que $x = au$. Donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$ et $x_i = a, \forall i$. Donc $a.n = 0$ et donc $a = 0$ (car $n \neq 0$). On en déduit que $x = 0$ et que les deux sous-espaces sont $\boxed{\text{supplémentaires dans } \mathbb{K}^n}$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Non ce n'est pas le cas : $(1,1) = 1.(1,0) + 1.(0,1) + 0.(1,1) = 0.(1,0) + 0.(0,1) + 1.(1,1)$.

Exercice 1. $F \subset \mathbb{R}[X]$. $0 \in F$ car X^2+1 divise 0. Si $P, Q \in F$ alors X^2+1 divise $\lambda P + Q$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions réelles. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose F l'ensemble des fonctions paires. On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de E : $F \subset E$, $0 \in F$ et toute combinaison linéaire reste paire.

On pose G l'ensemble des fonctions impaires. Il s'agit aussi d'un sous-espace vectoriel (on le montre aisément de la même manière que dans le cas paire).

• Montrons que F et G sont en somme directe. Soit $f \in F \bigcap G$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(-x) = -f(-x)$. Donc $f(x) = 0$. Donc $f = 0$.

• Montrons qu'ils sont supplémentaires. Soit $f \in E$.

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Or la fonction à gauche est paire et celle de droite est impaire. Donc ils sont bien $\boxed{\text{supplémentaires}}$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Non ce n'est pas le cas. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $F = Vect(1,0)$ et $G = Vect(0,1)$. Il est aisé de montrer que $F \bigoplus G = E$ (montrer que $F \bigcap G = \{0\}$ et $F + G = E$). Néanmoins, $(1,1)$ n'appartient ni à F ni à G. En effet, si tel était le cas, il existerait $a \in K$ tel que $(1,1) = a(1,0)$ (si $(1,1) \in F$) et $a = 1 = 0$ (ce qui est impossible).

Exercice 1. • Déjà, $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• L'élement nul 0 est dans F car $0 = 0 - 0$, où 0 est croissante.

• Montrons maintenant que F est stable par addition. Soient x et y dans F, il existe f, g, h, i dans C tels que : $x = f - g$ et $y = h - i$. Alors $x + y = (f + h) - (g + i)$. Or $f + h$ et $h + i$ sont croissantes donc $x + y \in F$.

• Montrons finalement que F est stable par multiplication par un scalaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in F$. Alors il existe f, g croissantes tels que $h = f - g$. $\lambda h = \lambda f - \lambda g$. Mais λf n'est pas forcément croissante ! Si λ est positif alors c'est le cas et $\lambda h \in F$. Sinon $\lambda h = (-\lambda)h - (-\lambda)f$, où ici on a bien deux fonctions croissantes. Donc dans tous les cas $\lambda h \in F$. Et donc F est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. • Montrons d'abord que F est un sous-espace vectoriel. $F \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a $0 \in F$. Soit λ un réel et $f, g \in F$. Alors $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$ et de même $(\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = 0$. Donc $\lambda f + g \in F$. D'où F est bien un sev.

• Montrons que G est un sous-espace vectoriel. $G \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $0 \in G$ en prenant $a = b = 0$. Soit λ un réel et $f, g \in G$. Alors $\lambda f + g = (\lambda a + c)x + (\lambda b + d)$ où $f = ax + b$ et $g = cx + d$. Donc $\lambda f + g \in G$, et donc G est un sev.

• Montrons qu'ils sont en somme directe. Soit $h \in F \bigcap G$. Alors $h(x) = ax + b$. $h(0) = 0 = b$ donc $b = 0$. De plus $h'(0) = a = 0$. Donc $h = 0$. Donc $F \bigcap G = 0$.

• Montrons qu'ils sont supplémentaires. Soit $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que h est somme d'un élement de F et d'un élement de G. On pose $a = h'(0)$ et $b = h(0)$. On pose $f = h - ax - b$. Donc $h = f + ax + b$. Or $ax + b \in G$ et on a bien $f \in F$ car $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$.

Donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.