Colle 7 ~ 19 novembre 2015 ~ Colleur : Isenmann ~ MPSI ~ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Donner le “type” des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et dire si le cours permet directement de les résoudre.

$$y^{(3)} + y = 1$$

$$e^t y' + ty = 0$$

$$y' + |y| = 2$$

Exercice 1. Résoudre l’équation différentielle $y' - \frac{1}{t}y = t$ sur $]0, +\infty[$ avec condition initiale $y(1) = 2$.

Planche 2.

Question de cours. Donner le “type” des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et dire si le cours permet directement de les résoudre.

$$iy'' + (1-i)y' + y = e^{2i\pi/7}$$

$$\sinh(t)y' + \cosh(t)y = 1$$

$$2y' - y^2 = |t|$$

Exercice 1. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 0$.

Planche 3.

Question de cours. Donner le “type” des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et dire si le cours permet directement de les résoudre.

$$y' + y = E(t)$$

$$y'' - 2y + ty = 0$$

$$(1+t^2)y' - 2y = t\sinh(t)$$

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+t^2)y' + 2ty + 1 = 0$ avec $y(1) = 1$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. La première est de l'ordre 3 : on ne sait pas faire. La seconde : ordre 1 avec coefficient dominant qui ne s'annule pas : on sait faire. La troisième : ce n'est pas une équation différentielle linéaire.

Exercice 1. Cherchons d'abord une solution particulière évidente. C'est t^2. Reste à résoudre l'équation homogène.

$$y' = \frac{1}{t}y$$

On trouve $y(t) = At$ avec A une constante.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(t) = t^2 + At$. Or on veut $y(1) = 2 = 1 + A$. D'où $A = 1$.

La solution cherchée est $y(t) = t^2 + t$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. La première : équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. On sait faire.

La seconde : le coefficient devant le y' s'annule donc on n'est pas dans le cas connu du premier ordre.

La troisième : pas linéaire. On sait pas faire.

Exercice 1. On résoud d'abord l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2$ qui admet pour racines 1 et 2. La solution générale est donc

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

Occupons nous du second membre. On cherche une solution particulière du type $P(t)e^t$ avec P de degré 1 car 1 est racine simple du polynôme caractéristique. Du coup en insérant $P(t) = at + b$ on obtient après simplification par e^t :

$$2a + (at + b) - 3(a + at + b) + 2(at + b) = 1$$

On identifie maintenant les coefficients de ce polynôme en t. On obtient

$$\begin{cases} 2a + b - 3a - 3b + 2b = 1 \\ a - 3a + 2a = 0 \end{cases}$$

D'où $a = -1$ et b est quelconque. On prend $b = 0$ et on obtient la solution particulière $y(t) = -te^t$. D'où les solutions au final sont

$$y(t) = (A - t)e^t + Be^{2t}$$

Or on veut $y'(0) = 0$. Or $y'(t) = -e^t + (A - t)e^t + 2Be^{2t}$ donc $y'(0) = -1 + A + 2B$. Du coup $A = 1 - 2B$. Les solutions cherchées sont de la forme

$$y(t) = (1 - 2B - t)e^t + Be^{2t}$$

Solutins - Planche 3.

Question de cours. Pour la première : non on ne sait pas faire, le second membre n'est pas continue.

Pour la seconde : non on ne sait pas faire, c'est une ED du second ordre homogène à coefficients **non** constants.

Pour la troisième : oui on gère, c'est une ED du premier ordre, le coefficient devant y' importe peu car il ne s'annule pas.

Exercice 1. C'est une ED du premier ordre avec un second membre -1. On commence par l'ED homogène.

On trouve $y(x) = \exp(\int_0^x \frac{-2t}{1+t^2} dt)$. D'où $y(t) = \frac{C}{1+t^2}$ où C est une constante.

Pour le seoncd membre. On utilise la méthode de variation de la constante. D'où après calculs on arrive à

$$C'(t) = -1$$

D'où $C(t) = -t + C$ où C est une constante. Donc les solutions générales sont

$$y(t) = \frac{-t + C}{1 + t^2}$$

Si on veut $y(1) = 1$, alors il faut $-1 + C = 2$ d'où $C = 3$.