Colle 18 - lundi 23 février 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Est-ce que une fraction rationelle de degré 0 est constante ?

Exercice 1. Calculer
$$\int_1^2 \frac{1}{x+x^3}dx$$

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ tel que $P(1) \neq 0$ et $\frac{P'(1)}{P(1)} \leq \frac{n}{2}$. Montrer que P a au moins une racine de module plus grand que 1.

Planche 2.

Question de cours. Soit $P(X) = X^2(X^2+1)^3$. Décomposer $P'(X)/P(X)$ en élements simples.

Exercice 1. Développer en élements simples sur $\mathbb{R}$:
$$\frac{1}{X^3(X^2-1)}$$

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n scindé dans $\mathbb{C}$ à racines simples $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que :
$$\frac{-1}{P(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

Planche 3.

Question de cours. Décomposer $\frac{1}{X^3+X^2+X}$ en élements simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Exprimer la dérivée d'ordre n de :
$$\frac{1}{X(X^2+1)}$$

Exercice 2. Décomposer en élements simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationelle :
$$\frac{X^{n-1}-1}{X^n-1}$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours. C'est faux. En effet $F(X) = \frac{X}{X+1}$ est de degré 0 mais n'est pas constante.

Exercice 1. On ne connaît pas de formules directes pour primitiver. Une IPP ne donnerait rien. Et puis on est dans le chapitre fractions rationnelles donc on va quand même utiliser une fraction rationnelle. Est ce qu'on sait primitiver certaines fractions rationnelles ? Oui les $\frac{1}{X-a}$ et les $\frac{1}{X^2+aX+c}$. Comment on s'y ramène ? Avec la **décomposition en élements simples** sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{X^3+X} = \frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{a}{X} - \frac{bX+c}{X^2+1}$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On calcule a par la méthode de base (on multiplie par X et on évalue en 0). On obtient $a = 1$. Pour b et c on peut faire la méthode de l'identification en calculant $\frac{1}{X(X^2+1)} - \frac{1}{X} = \frac{-X}{X^2+1}$. On en déduit que :

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx = [\ln(x)]_1^2 - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(5))$$

Exercice 2. Pour montrer cela on va supposer ce n'est pas le cas. P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Donc P s'écrit :

$$P(X) = u\prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{n_i}$$

où z_i sont les racines complexes de P et n_i est la mulitplicité. Par hypothèse $|z_i| < 1$. Or on a une inégalité sur P'/P. On va donc utiliser cette décomposition en fractions rationnelles :

$$P'(X)/P(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - z_i}$$

Donc par inégalité triangulaire :

$$|P'(1)/P(1)| = |\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{1 - z_i}| \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|1 - z_i|}$$

Or $|z_i| < 1$ pour tout i donc $|1 - z_i| \leq 1 + |z_i| < 2$ par inégalité triangulaire. Donc :

$$|P'(1)/P(1)| > \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} n_i = n/2$$

C'est impossible. Donc il existe bien une racine de module $\boxed{\text{plus grand que 1}}$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On utilise la décomposition en élements simples de P'/P : 0 est racine deux fois, i es racine 3 fois et $-i$ est racine 3 fois :

$$P'(X)/P(X) = \frac{2}{X} + \frac{3}{X-i} + \frac{3}{X+i}$$

Exercice 1. Les pôles sont : 0 d'ordre 3, 1 d'ordre 1 et -1 d'ordre 1 :

$$\frac{1}{X^3(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X+1}$$

On calcule c, d, e par la méthode de base en évaluant : $c = -1$, $d = 1/2$, $e = 1/2$. Par la méthode des résidus (comme le degré est plus petit que 2) : $a+d+e = 0$. Donc $a = -1$. Reste b. Mais si on met tous les élements déterminés à gauche on a :

$$\frac{1}{X^3(X-1)(X+1)} + \frac{1}{X} - \frac{1}{2}(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}) = \frac{b}{X^2}$$

Or à gauche c'est impaire et à droite c'est paire. Donc $b = 0$.

Exercice 2. Comme P est scindé à racines simples x_k, P s'écrit ainsi :

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_k)$$

où a est un complexe non nul. On considère la fraction rationelle suivante : $F(X) = \frac{1}{P(X)}$. Elle est de degré $-n$ et admet pour pôles les x_k qui sont simples car P est à racines simples. Donc F se développe en élements simples ainsi :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - x_k}$$

Comme les a_k correspondent à des pôles simples, on peut les calculer par la méthode de base :

$$a_k = \frac{1}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)}$$

Mais cela ne ressemble pas à ce que l'on veut montrer. On utilise donc la méthode qui fait intervenir une dérivée : $a_k = \frac{1}{P'(x_k)}$

Et là c'est exactement ce qu'on veut :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - x_k)P'(x_k)}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer en 0 et on obtient :

$$\frac{-1}{P(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

Solutions - Planche 3.

Question de cours. $P(X) = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$. Donc P admet $0, j$ et j^2 comme racine (où $j = e^{2i\pi/3}$). Donc sur $\mathbb{C}$ la décomposition est :

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-j} + \frac{\bar{b}}{X+j}$$

Par la méthode de base on a : $a = 1$ et $b = \frac{1}{j^2-1}$. Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$ on pourrait recoller les racines conjuguées mais ça fait beaucoup de calculs. Mieux vaut utiliser la méthode d'identification :

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1}$$

Exercice 1. On développe en élements simples dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

On utilise la méthode de base et on trouve $a = 1$ et $b = -1/2$ et $c = -1/2$.
Or

$$(X+a)^{n\prime} = n(X+a)^{n-1}$$

donc on montre par récurence que :

$$\left(\frac{1}{X+a}\right)^{(n)} = n!(-1)^n \frac{1}{(X+a)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{X(X^2+1)}\right)^{(n)} = n!(-1)^n \left(\frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1/2}{(X-i)^{n+1}} + \frac{1/2}{(X+i)^{n+1}}\right)$$

Exercice 2. Les pôles sont les $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et ils sont simples.
D'où :

$$\frac{X^{n-1}-1}{X^n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-w_k}$$

On calcule les a_k par la méthode de base (avec la dérivée). En remarquant que $w_k^n = 1$ donc $w_k^{n-1} = \frac{1}{w_k}$, on déduit que :

$$a_k = \frac{1-w_k}{n}$$

D'où :

$$\frac{X^{n-1}-1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-w_k}{X-w_k}$$