
Planche 1.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en 0 et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$ on ait

$$f(tx) = tf(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 2. Calculer la différentielle de $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(M) = (\mathsf{tr}(M), \ldots, \mathsf{tr}(M^n))$$

Planche 2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable partout. On suppose f constante sur $S(0,1)$. Montrer qu'il existe a telle que $||a|| < 1$ et $df_a = 0$.

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Trouver pour quels p, la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0, différentiable ou C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x+y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$$

Planche 3.

Exercice 1. Soit $f : E \to E$ C^1 où E est un espace euclidien. Soit $K \geq 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\forall x, y \in E, \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq K||x-y||^2$
2. $\forall x, h \in E,\ \langle df_x(h), h\rangle \geq K||h||^2$

Exercice 2. Trouver les extremums locaux et globaux de $x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$.