Colle 1 - 17 septembre 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Démontrer la formule de trigonométrie suivante :

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

Exercice 1. Trouver les solutions de

$$e^{iz}z + i\bar{z}e^{i\bar{z}} = 0$$

Planche 2.

Question de cours. Résoudre l'équation du second degré suivante dans $\mathbb{R}$ d'abord puis dans $\mathbb{C}$:

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Exercice 1. Calculer l'argument et le module du nombre complexe suivant :

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Planche 3.

Question de cours. Calculer la racine carrée de $1-2i$.

Exercice 1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \leq |z|^2 + |z-1|$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On sait que $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$. On écrit cela sous forme trigonométrique :

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$$

$$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))$$

D'où en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

Exercice 1. Soit $z = a + ib$ une solution. On a :

$$e^{iz - i\bar{z}}z + i\bar{z} = 0$$

Donc

$$e^{-2b}(a+ib) + i(a-ib) = 0$$

D'où en identifiant partie réelle et partie imaginaire on a

$$\begin{cases} e^{-2b}a + b = 0 \\ e^{-2b}b + a = 0 \end{cases}$$

D'où en remplaçant a par son expression de la deuxième dans la première on obtient $-e^{-4b}b+b = 0$. Donc $b = 0$ et $a = 0$. Donc $z = 0$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On calcule le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Le discriminant étant strictement négatif, il n'y a pas de racines réelles par contre il y en a deux complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

et

$$z_2 = \bar{z_1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 1. Calculons le module : $|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.
On note θ l'argument de z. Or $2\cos(\theta) = |z|\cos(\theta) = Re(z) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. On ne peut pas directement en déduire θ par les valeurs connues de cos. Pour obtenir un cos plus simple on utilise la formule de trigonométrie suivante : $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$. On en déduit $\cos(2\theta) = \sqrt{2}/2$, donc $2\theta = \pm\pi/4$, $\theta = \pm\pi/8$. Pour connaître le signe on regarde le signe de la partie imaginaire. Comme elle est positive alors $\theta = \pi/8$. Donc

$$z = 2e^{i\pi/8}$$

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Première idée à avoir : mettre $1-2i$ sous forme exponentielle. On calcule donc son module ($\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$) et son argument. Le problème c'est que $\cos(\theta) = 1/\sqrt{5}$ permet difficilement de trouver θ.

On utilise donc la méthode suivante, qui consiste à chercher $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a+ib)^2 = 1-2i$. Donc $a^2 - b^2 + 2iab = 1 - 2i$. D'où en identifiant partie imaginaire et réelle on obtient : $a^2 - b^2 = 1$ et $ab = -1$. Or $a^2 + b^2 = \sqrt{5}$ en prenant l'égalité au module. En sommant la première équation obtenue et la troisième, on obtient $2a^2 = 1 + \sqrt{5}$. Donc $a = \pm\varphi$ où $\varphi = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Or $ab = -1$.

Donc les deux solutions sont :

$$\varphi - i/\varphi \text{ et } -\varphi + i/\varphi$$

Exercice 1. Ce genre d'inégalité fait penser à l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leq |a| + |b|$. Pour l'utiliser il faut écrire z comme un $a+b$ avec un a et un b qui ressemble à ce qu'on cherche à droite. Donc on a $|z| = |(z-z^2) + z^2| \leq |z^2| + |z||z-1|$ qui nous donne presque ce que l'on veut. La seule différence avec ce qu'on cherche est le $|z|$ qu'on veut remplacer par un 1.

Si $|z| \leq 1$ alors on a bien ce que l'on veut : $|z| \leq |z|^2 + |z||z-1| \leq |z|^2 + |z-1|$. Maintenant, il faut traiter le cas où $|z| \geq 1$. Dans ce cas on a pas besoin de l'inégalité précedente mais on a directement : $|z| \leq |z|^2 \leq |z|^2 + |z||z-1|$.

Ainsi dans tous les cas on a l'inégalité voulue :

$$|z| \leq |z|^2 + |z||z-1|$$