Colle 30 - lundi 15 juin 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$, $< P, Q >= \int_{-1}^{1} PQ$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $< f, g > \to \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

b) Vérifier qu'aucun $k > 0$ ne vérifie $\forall f \in E, |f(0)| \leq k||f||$.

c) En déduire qu'il n'existe aucun polynôme P qui vérifie $(P, f) = f(0)$ pour tout polynôme f. Cela contredit-il le théorème de Riesz ?

Planche 2.

Question de cours. Démontrer le théorème de Riesz.

Exercice 1. Trouver une base orthonormée des solutions du système suivant dans $\mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire usuel) :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2x + 3z + 4w = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit E euclidien. On pose pour $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$:

$$G(x_1, \cdots, x_n) = ((x_i, x_j)) \in M_n(\mathbb{R})$$

Soit $x_1, \ldots, x_n$ une famille libre de E. On note $F = Vect(x_i)$. Montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{det(G(x, x_1, \cdots, x_n)}{det(G(x_1, \cdots, x_n)}$$

Planche 3.

Question de cours Démontrer que f est orthogonale ssi elle change une base orthonormale en une base orthonormale.

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous ≥ 0. Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$P(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 \leq P(x)P(y)$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit n un entier non nul et des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$. On suppose que :

$$\forall i, ||e_i|| \geq 1$$

et

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} < e_i|x >^2 = ||x||^2$$

Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Attention à bien renormaliser ! On trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, X\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, (X^2 - 1/3)\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}$$

Exercice 1. • L'application considérée est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Si $\int_0^1 f^2 = 0$ alors $f^2 = 0$ car f et continue. On en déduit que $f = 0$ et qu'on a bien un produit scalaire.

• Supposons qu'un tel $k > 0$ existe. Alors pour tout $f \in E$, on a : $|f(0)| \leq k||f||$. Pour contredire cette inégalité on cherche f telle que $f(0)$ est grande et $||f||$ est petite. On pose $f(x) = n(1-x)^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors $f(0) = n$. On calcule $||f|| = \sqrt{n}$. Donc $n \leq k\sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. C'est donc impossible.

• L'application qui à f associe $f(0)$ est une forme linéaire. Mais elle n'est pas de la forme $< P, f >$ car sinon d'après Cauchy Schwartz on aurait le b). Cela ne contredit pas Riesz car Riesz c'est pour les espaces de dimension finie.

Solutions - Planche 2.

Question de cours.

Exercice 2. La distance à un sous-espace vectoriel est atteinte et vaut $||x - p(x)||^2$ où $p(x)$ est la projection sur F. Attention, on a pas *a priori* que $p(x) = \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)x_i$ car la famille x_i n'est pas forcément orthonormée. Par contre on a quand même que $x - p(x) \in F^{\perp}$. C'est ça qu'on va utiliser en plus d'opérations sur les lignes et les colonnes du déterminant. On regarde

$$det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,x_1) & \cdots & (x,x_n) \\ (x_1,x) & (x_1,x_1) & \cdots & (x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n,x) & (x_n,x_1) & \cdots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

On reconnaît la matrice $G(x_1, \dots, x_n)$ comme une sous matrice. On va donc s'y ramener en développant suivant la première ligne ou colonne. Mais pour faire cela il faut d'abord mettre plein de zéros. On va utiliser $p(x)$ et utiliser que $x - p(x)$ est orthogonal à tous les x_i.

On note $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. On fait alors les opérations suivantes sur les lignes :

$$C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_{j-1} C_j$$

Qu'est ce qu'on obtient dans la première colonne ? Le premier coefficient c'est $(x, x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x, x_i) = (x, x - \sum_{i=1}^{n} x_i) = (x, x - p(x)) = (x - p(x), x - p(x))$ car $x - p(x)$ est orthogonal à $p(x)$. Donc on obtient $||x - p(x)||^2 = d(x, F)^2$.

Et les autres coefficients ? Ce sera $(x_i, x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x_i, x_j) = (x_i, x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) = (x_i, x - p(x)) = 0$ par orthogonalité. On obtient alors :

$$det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \begin{vmatrix} d(x,F)^2 & (x,x_1) & \cdots & (x,x_n) \\ 0 & (x_1,x_1) & \cdots & (x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_n,x_1) & \cdots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

Et là en développant on obtient la formule annoncée.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. On applique Cauchy Schwartz dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le tout est de bien choisir à quoi on l'applique. On pose $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ telle que $a_i \geq 0$. Soit $x, y \geq 0$. On a :

$$P(\sqrt{x}\sqrt{y}) \leq \sum_{i=0}^{n} a_i \sqrt{x}^i \sqrt{y}^i = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{a_i x}^i \sqrt{a_i y}^i \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i y^i} \leq \sqrt{P(x)P(y)}$$

Exercice 2. On montre d'abord que la famille est orthogonale. Pour ce faire, on applique l'égalité à $x = e_i$. Ce qui donne :

$$||e_i||^2 = ||e_i||^4 + \sum < e_i|e_j >^2$$

Du coup

$$||e_i||^2 - ||e_i||^4 = \sum < e_i|e_j >^2$$

Or $||e_i|| \geq 1$. Donc la somme est négative, donc tous les termes sont nuls.
On fait ça avec tous les e_i et c'est bon c'est orthogonale.
On montre maintenant que la norme vaut 1. On utilise l'égalité d'avant qui donne maintenant :

$$||e_i||^4 = ||e_i||^2$$

qui donne $||e_i|| = 1$.