Colle 7 - lundi 10 novembre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(x)dx$$

Exercice 1. Soient n et m deux entiers relatifs. Calculer :

$$I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt$$

Exercice 2. Calculer :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

Planche 2.

Question de cours. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^2 \ln(x)dx$$

Exercice 1. Soif $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$ telle que :

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est T-périodique.

Exercice 2. a) Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

Planche 3.

Question de cours. À l'aide d'une IPP calculer :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

Exercice 1. Calculer :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos(t))\sin(t)dt$$

Exercice 2. a) Remarquer que : $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)dt = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)dt$
b) Calculer :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours. L'idée d'utiliser une IPP vient du fait qu'en dérivant deux fois le x^2 on obtient une constante, et intégrer deux fois le cos on sait faire. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos(x)dx &= [2x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin(x)dx\\ &= 0 - 2\int_0^\pi x\sin(x)\\ &= -2\left([-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)dx\right)\\ &= -2(\pi + [\sin(x)]_0^\pi) = -2(\pi+0) = -2\pi\end{aligned}$$

Exercice 1. On voit des cos, donc on pense tout de suite à des formules de trigonométrie. En effet, on peut utiliser la formule : $\cos(p)\cos(q) = (\cos(p-q)+\cos(p+q))/2$ pour simplifier et pouvoir intégrer car on peut intégrer le cos de gauche puis le cos de droite.

D'où :

$$I_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos((n-m)x)dx + \int_0^{2\pi}\cos((n+m)x)dx\right)$$

Pour intégrer maintenant le $\cos((n-m)x)$, il faut faire un changement de variable pour se ramener à $\cos(x)$. Seulement il faut attention si $n = m$ car dans ce cas là, on ne peut pas faire le changement de variable $u = (n-m)x$.

Ainsi si $n = m$, $I_{n,n} = \frac{1}{2}\left(2\pi + \int_0^{2\pi}\cos(2nx)dx\right)$. Déjà si $n = 0$, alors $\boxed{I_{0,0} = 2\pi}$. Sinon on fait un changement de variable $u = 2nx$ dans l'intégrale de droite. D'où $\int_0^{4n\pi}\cos(u)\frac{du}{2n} = \frac{1}{2n}[\sin(x)]_0^{4n\pi} = 0$

D'où $\boxed{I_{n,n} = \pi \text{ si } n \neq 0}$.

Si $n = -m$ et $n \neq 0$, $I_{n,-n} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos(2nx)dx + 2\pi\right) = \pi$ de même.

Sinon, $n \neq m$ et $n \neq -m$, alors on peut faire le changement $u = (n-m)x$ dans la première intégrale et on peut faire le changement de variable $u = (n+m)x$ dans la seconde. On obtient :

$$I_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{(n-m)2\pi}\cos(u)\frac{du}{(n-m)} + \int_0^{(n+m)2\pi}\cos(u)\frac{du}{(n+m)}\right)$$

Or ces intégrales valent 0, donc $\boxed{I_{n,m} = 0 \text{ si } n \neq m}$

Exercice 2. Pour calculer cette intégrale on regarde d'abord si il y a des primitives usuelles. Ce n'est pas le cas. Est ce qu'on peut faire une intégration par parties ? On ne voit pas trop quoi dériver et quoi primitiver ... Du coup ça part en changement de variables. Si on change le $\cos^2(t)$ en u^2 ça peut faire penser à la dérivée de arctan et alors on peut intégrer.

On pose donc $u = \cos(t)$. Donc $du = -\sin(t)dt$. Le plus simple pour faire le changement de variable est de faire apparaître le $\sin(t)dt$. Pour ce faire il suffit de changer le $\sin(2t)$ en $2\sin(t)\cos(t)$. On obtient alors :

$$= -\int_1^0 \frac{u^2}{1+u^2}du = \int_0^1\frac{u^2}{1+u^2}du$$

et là pour se ramener à la dérivée de arctan , il suffit d'utiliser le méga trick suivant :

$$\begin{aligned}&= 2\int_0^1\frac{u^2+1-1}{1+u^2}du = 2\int_0^1 1du - 2\int_0^1\frac{1}{1+u^2}du\\ &= 2 - 2[\arctan(u)]_0^1 = 2-\pi/2\end{aligned}$$

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On dérive $\ln(x)$ et on intègre 1, on obtient :

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 1dx = 2\ln(2) - 1$$

Exercice 1. Pour résoudre cet exercice il faut faire le lien entre la primitive et la fonction qui est obtenu par dérivation. On pose F une primitive de f. D'après l'égalité vérifiée par f,

$$\varphi(x) = F(x+T) - F(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc φ est constante donc de dérivée nulle. Or $\varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Donc

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où f est périodique de période T.

Exercice 2.

a) Stratégiquement, on montre d'abord la première égalité puis la seconde. Pour montrer que les deux intégrales, il faut remarquer que le sin c'est juste un cos mais avec une autre “phase”. En effet $\sin(t) = \cos(\pi/2 - t)$. D'où on pose le changement de variables $u = \pi/2 - t$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\pi/2-t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt \\ &= -\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(t)}{\cos(\pi/2-t)+\sin(\pi/2-t)}dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt\end{aligned}$$

Maintenant qu'on sait ça, il suffit juste de sommer les deux intégrales. On note I la première et J la deuxième. Alors :

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt = \pi/2$$

D'où $2I = \pi/2$ et donc $I = \pi/4$.

b) L'intégrale ne ressemble pas du tout à celle d'avant, on va donc faire un changement de variables à partir de la première en posant $u = \cos(t)$. Alors $du = -\sin(t)dt$ et :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt = \int_1^0 \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}+u}du = \int_0^1 \frac{1}{u+\sqrt{1-u^2}}$$

D'où $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{u+\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4}}$

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Ici on dérive le x^2 pour enlever le polynôme et garder le exp qu'on sait intégrer. D'où :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx$$
$$= e - 2\left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\right)$$
$$= e - 2(e - [e^x]_0^1) = e - 2(e - e + 1) = e - 2$$

Exercice 1. On commence par regarder si on peut primitiver mais rien ne se dégage. Du coup on a le choix entre IPP et changement de variables. Pour l'IPP on ne va pas primitiver le ln donc on le dériverai. Mais dans ce cas là on obtient une formule trigonométrique un peu trop compliquée qui n'aboutit pas. On part donc sur un changement de variables. Le plus simple est de poser $u = \cos(t)$. On a alors $du = -\sin(t)dt$ et là c'est parfait parce que l'on reconnaît du directement dans l'intégrale. Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos(t))\sin(t)dt = -\int_1^0 \ln(1+u)du = \int_0^1 \ln(1+u)du$$

On pose alors pour simplifier le calcul le changement de variables $t = 1 + u$ (on pourrait aussi primitiver directement car on connaît la primitive de ln mais c'est plus risqué en calculs). On obtient :

$$= \int_1^2 \ln(u)du = [t\ln(t) - t]_1^2 = 2\ln(2) - 1$$

Exercice 2.

a) On fait le changement de variables $t = \pi/4 - u$ dans la première intégrale. On a donc $dt = -du$:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))dt = -\int_{\pi/4}^0 \ln(\cos(\pi/4 - u)du = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t))$$

b) L'idée est de se ramener à $\ln(\cos(t))$ comme cela est implicitement suggérée par la première question. Pour s'y ramener on écrit $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ et utilise les propriétés du ln pour obtenir :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t)+\sin(t))dt - \int_0^{\pi/4} \cos(t)dt$$

Maintenant il faut ramener le $1+\sin(t)$ à un cos à l'aide des formules de trigonométries. On utilise $\cos(p) + \cos(q)$ avec $p = t$ et $q = \pi/2 - t$. On obtient :

$$\cos(t) + \sin(t) = \cos(t) + \cos(\pi/2 - t) = 2\cos((p-q)/2)\cos((p+q)/2) = 2\cos((t - \pi/2 + t)/2)\cos(\pi/4)$$
$$= \sqrt{2}\cos(\pi/4 - t)$$

D'où :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}\cos(\pi/4 - t))dt - \int_0^{\pi/4} \cos(t)dt$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln(2)dt + \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t))dt - \int_0^{\pi/4} \cos(t)dt$$
$$= \frac{\ln(2)\pi}{8}$$