Colle 9 $\sim$ 3 décembre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MPSI $\sim$ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Calculer les coefficients de Bézout de 13 et 15.

Exercice 1. Trouver tous les entiers naturels n tels que $ppcm(20, n) = 40$.

Exercice 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(11^{11})^{11}$ par 7.

Planche 2.

Question de cours. Calculer le $pgcd$ de 100 , 60 et 55.

Exercice 1. Soit n un entier naturel. Montrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système suivant

$$\begin{cases} pgcd(x, y) = 5 \\ ppcm(x, y) = 10 \end{cases}$$

Planche 3.

Question de cours. Montrer qu'il y a une infinité de nombre premiers.

Exercice 1. Calculer $pgcd(3^{123} - 5, 125)$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 5y = 3$.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$15 = 13 \times 1 + 2$$

$$13 = 2 \times 6 + 1$$

D'où $1 = 13 - 2 \times 6 = 13 - (15 - 13 \times 1) \times 6 = 7 \times 13 - 6 \times 15$.

Exercice 1. Deux méthodes. La plus directe consiste à remarquer que n doit diviser 40. Reste à tester tous les diviseurs de 40 et voir si ça marche. Au final il ne reste que 8 et 40 qui marchent.

Sinon une autre méthode plus générale. On se rappelle la propriété du *ppcm* en terme de p-valuation. La p-valuation du *ppcm* c'est le maximum de celles de a et b (pour $ppcm(a, b)$). Okay. $a = 20 = 4 * 5$. Et $ppcm() = 40 = 8 * 5$. Du coup on regarde nombre premiers par nombre premiers. Pour 5 c'est facile, comme a a déjà un 5 alors pas besoin d'en rajouter dans n pour obtenir une 5-valuation de 1. Du coup soit 5 est dans n une fois soit pas.

Pour 2, la 2-valuation de 40 c'est 3. Celle de 20 c'est 2. Donc pour que ça fasse 3 il faut que la 2-valuation de n soit de 3. Donc les solutions sont 8 et $8 \times 5 = 40$.

Exercice 2. On utilise les modulos. Alors $11 = 4[7]$. Donc $(11^{11})^{11} = (4^{11})^{11}[7]$. Ok et comment se comporte 4 modulo quand on lui met une puissance ? $4^2 = 8 = 1[7]$. Donc $4^{2n} = 1[7]$ pour tout entier n. Donc $4^{11} = 4[7]$. D'où $(11^{11})^{11} = (4^{11})^{11} = 4^{11} = 4[7]$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Les diviseurs de 55 sont $1, 5, 11$ et 55. Il n'y a que ça à tester du coup. 5 divise 100 et 60 mais pas 11. Donc on ne peut pas faire plus grand. Donc

$$pgcd(100, 60, 55) = 5$$

Exercice 1. On raisonne nombre premier par nombre premier. Donc regarde d'abord si $2|n(n+1)(n+2)$ puis on gère 3.

Pour 2. Si n est pair c'est bon. Sinon $n = 2m + 1$ avec m un entier. Donc $n + 1 = 2(m + 1)$ est divisible par 2. Donc dans tous les cas, $2|n(n + 1)(n + 2)$.

Pour 3. Si $n = 3m$ c'est bon. Sinon $n = 3m + 1$ et dans ce cas $n + 2 = 3(m + 1)$ est divisible par 3. Sinon $n = 3m + 2$ et dans ce cas $n + 1 = 3(m + 1)$ est divisible par 3. Dans tous les cas $3|n(n + 1)(n + 2)$.

Exercice 2. Soient x, y une solution. Alors x et y doivent diviser 10. Donc $x = 1, 2, 5$ ou 10. Pareil pour y. On pourrait tester tous les cas mais on va utiliser le fait que $pgcd(x, y) = 5$ quand même pour accélérer. Alors cela dit que 2 ne divise pas en même temps x et y alors que c'est le cas pour 5. Donc x et y sont divisibles par 5. Donc il ne reste que les couples $(5, 5)$, $(5, 10)$, $(10, 5)$. Or $ppcm(x, y) = 10$ donc $(5, 5)$ marche pas. Il n'y a qu'une solution à symétrie près c'est $(5, 10)$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. On suppose qu'il y en a un nombre fini. On les note alors $p_1, \ldots, p_r$. Et là, magie ! On pose $p = p_1 \times \cdots \times p_r + 1$. Vérifions que ce nombre est premier. S'il ne l'était pas il admettrait un plus petit diviseur $d > 1$ et $d < p$ qui est donc un p_i car ses seuls diviseurs sont 1 et d (sinon p aurait un plus petit diviseur). Du coup ce $d = p_i$ divise p. Or p_i divise $p_1 \times \cdots \times p_r$ donc divise 1. C'est exclu.

Il y a donc une infinité de nombres premiers.

Exercice 1. Remarquons que $125 = 5 * 5 * 5$. Donc $pgcd$ c'est $1, 5, 25$ ou 125. Or 5 ne divise pas $3^{123} - 5$ car 5 divise 5 mais pas 3. Donc

$$pgcd(3^{123} - 5, 125) = 1$$

Exercice 2. On trouve les coefficients de Bezout de 7 et 5 pour obtenir une solution particulière : $3 * 5 - 2 * 7 = 1$. Donc $x_0 = -2 * 3$ et $y_0 = 3 * 3$ est une solution particulière de l'équation.

Soit (x, y) une autre solution, alors $7(x - x0) + 5(y - y_0) = 0$. Donc par le lemme de Gauss, comme 7 est premier à 5, alors $x - x_0$ est divisible par 5 et donc il existe k un entier tel que $x = x_0 + 5k$. De même il existe un entier k' tel que $y = y_0 + 7k$.

Réciproquement, on vérifie que cela donne bien toutes les solutions.

Donc les solutions sont :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = -6 + 5k \\ y = 9 + 7k \end{cases}$$