Colle 9 - lundi 24 novembre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Donner les définitions de : relation réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique ainsi que d'ordre. Donner un exemple de relation d'ordre partielle et une autre totale.

Exercice 1. Soit x et y deux réels tels que $x < y$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$x \leq \frac{k}{2^n} \leq y$$

Exercice 2. On pose la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} xE(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], f(f(x)) = f(x)$$

Planche 2.

Question de cours. Donner les définitions de majorant, de borne supérieure et de maximum. Donner un exemple tel que la borne supérieure est un maximum et un exemple tel que ce ne soit pas le cas.

Exercice 1. Soit E un ensemble et des parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E)$ non vides telles que :

$$A_i \bigcap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

et

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$$

On définit la relation R sur E par $xRy \iff \exists i \in [1, \cdots, n] : x \in A_i$ et $y \in A_i$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Exercice 2. On dit qu'une suite d'entiers $u = (u_k)_{k \geq 0}$ est stationnaire s'il existe un entier m tel que $u_k = 0, \forall k \geq m$. Donner un exemple de suite stationnaire. Pour une suite stationnaire d'entiers, on note $n(u)$ le plus petit tel indice. Montrer que $n(u)$ est bien définie.

Pour une suite stationnaire d'entiers u, on note $M(u) = \frac{1}{n(u)} \sum_{k=0}^{n(u)-1} |u_k|$ pour u différente de la suite nulle et on convient que $M(0) = 1$. Calculer la borne inférieure de

$$\{M(u), u \text{ suite stationnaire d'entiers}\}$$

Planche 3.

Question de cours. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble $\{-n^2 + n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ admet un maximum et le calculer.

Exercice 2. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. On pose la relation R sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$xRy \iff y - x \in A$$

Donner une CNS sur A pour que R soit une relation d'équivalence.

Donner une CNS sur A pour que R soit une relation d'ordre. Montrer que dans ce cas tous les élements de A sont tous positifs ou tous négatifs.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Soit E un ensemble et R une relation binaire.

- réflexive : $\forall x \in E, xRx$
- transitive : $\forall x, y, z \in E, (xRy, yRz \Rightarrow xRz)$
- symétrique : $\forall x, y \in E, (xRy \Rightarrow yRx)$
- antisymétrique : $\forall x, y \in E, (xRy, yRx \Rightarrow x = y)$

Une relation d'ordre est une relation réflexive, transitive et symétrique. La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ est totale. La relation d'ordre $\subset$ sur les parties d'un ensemble est partielle.

Exercice 1. Supposons qu'on ait n tel que $0 < \frac{1}{2^n} < y - x$. On pose alors $p = E(x2^n)$. On a donc :

$$p \leq x2^n < p + 1$$

Donc :

$$\frac{p}{2^n} \leq x < \frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^n} < \frac{p}{2^n} + y - x \leq x + y - x \leq y$$

Reste à trouver ce n. Il est tel que : $1 < (y - x)2^n$. Donc il faut que $0 < \ln(y - x) + n\ln(2)$. Donc $n > -\ln(y - x)/\ln(2)$. On peut par exemple prendre $E(-\ln(y - x)/\ln(2)) + 1$.

Exercice 2. Il faut calculer $E(1/x)$ explicitement. $E(1/x) = n$ équivaut à : $n \leq 1/x < n + 1$ donc à $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. On va donc étudier la fonction f sur ces intervalles. Soit maintenant $x \in [0, 1]$.
Si $x = 0$. Alors $f(x) = 1$. Donc $f(f(x)) = f(1) = 1 = f(x)$.
Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$ tel que $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. Donc $E(1/x) = n$. On en déduit que $f(x) = xn$. On calcule $f(f(x)) = f(xn)$. Il faut donc regarder où se situe xn :

$$\frac{n}{n+1} < nx \leq 1$$

Donc

$$1 \leq xn < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

Donc $E(\frac{1}{xn}) = 1$.
Ainsi $f(f(x)) = f(xn) = xnE(\frac{1}{xn}) = xn = f(x)$
Ainsi, dans tous les cas on a :

$$f(f(x)) = f(x)$$

Solutions - Planche 2.

Question de cours. $[-1,2[$ admet 2 pour borne supérieure mais ce n'est pas un maximum. $[-1,2]$ admet 2 pour maximum.

Exercice 1.

réflexive : Soit $x \in E$. Comme $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, alors il existe i tel que $x \in A_i$. Donc xRx.

symétrique : La définition de la relation est clairement symétrique.

transitive : Soit $x, y, z \in E$ tels que xRy et yRz. Alors il exite i tel que $x \in A_i$ et yA_i. De plus il existe j tel que $y \in A_j$ et $z \in A_j$. Donc $y \in A_i \bigcap A_j$. Or ces parties sont disjointes deux à deux. Donc $i = j$. Donc $x \in A_i$ et $z \in A_i$. D'où xRz.

Exercice 2. La suite $u = (1, 0, \dots)$ est stationnaire et $n(u) = 1$.

Soit u une suite stationnaire d'entiers. Montrons que $n(u)$ est bien définie. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} : u_i = 0 \forall i \geq n\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum.

Soit u une suite stationnaire d'entiers. Alors $M(u) \geq 0$. Donc 0 est un minorant. On va maintenant montrer que 0 est la borne inférieure. Pour ce faire on peut déjà chercher une suite telle que $M(u) = 0$. Si u est une suite stationnaire d'entiers non nulle telle que $M(u) = 0$. Alors $\forall i \in \{0, \dots, n(u)-1\}, |u_i| = 0$. Donc $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = 0$ et $u = 0$ ce qui est exclue. Donc 0 n'est pas atteint.

Pour montrer que 0 est la borne inférieure on montre donc qu'il existe des suites telles que $M(u)$ soit arbitrairement petit.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite u suivante : $u_k = 0$ si $k \neq p-1$ et $u_{p-1} = 1$. La suite u est donc une suite stationnaire d'entiers et $n(u) = p$. Donc $M(u) = \frac{1}{p}$. On pose alors m la borne inférieure des $M(u)$. Si $m > 0$, alors il existe p tel que $0 \leq \frac{1}{p} < m$ (on pose par exemple $p = E(1/m) + 1$). Or il existe une suite telle que $M(u) = 1/p < m$. Ceci contredit la minimalité de m. Donc $m = 0$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours.

Exercice 1. On étudie la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + x + 1$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Comme le coefficient devant x^2 est négatif alors la fonction f croît puis décroît. Donc f admet un majorant sur $\mathbb{R}$. Donc en particulier sur $\mathbb{Z}$.

En regardant le graphe de la fonction, si on cherche un éventuel maximum de f sur $\mathbb{Z}$, il suffit de le chercher quand f est positive. Les racines de f sont : $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Or $-1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{\sqrt{9}+1}{2} = 2$. Donc il suffit de chercher le maximum sur $\{0, 1\}$. Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 1$. Donc 1 est le maximum recherché et il est atteint pour $x = 0$ ou $x = 1$.

Exercice 2. Supposons que R soit une relation d'équivalence. Alors comme R est réflexive. $1R1$ donc $1 - 1 = 0 \in A$. Donc $0 \in A$. Soit $a \in A$, alors $0Ra$. Par symétrie, $aR0$ donc $-a \in A$. De plus si $a, b \in A$, alors $(-a)R0$ et $0Rb$ donc $(-a)Rb$ donc $b + a \in A$.

Réciproquement, si $0 \in A$, $(a \in A \Rightarrow -a \in A)$ et $(a, b \in A \Rightarrow a + b \in A)$. Alors : R est réflexive car si $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 \in A$ donc xRx. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que xRy. Alors $y - x \in A$. Donc $x - y \in A$ par la deuxième propriété. Donc yRx. Donc R est symétrique. Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que xRy , yRz, aloors $y - x \in A$ et $z - x \in A$. Donc $z - x = z - y + y - x \in A$ par la troisième propriété. Donc la relation R est transitive. Finalement R est une relation d'équivalence.

La CNS pour que R soit une relation d'équivalence est :

- $0 \in A$
- $a \in A \Rightarrow -a \in A$
- $a, b \in A \Rightarrow a + b \in A$

Pour relation d'ordre c'est presque pareil et c'est la même preuve.

- $0 \in A$
- $a \in A, -a \in A \Rightarrow a = 0$
- $a, b \in A \Rightarrow a + b \in A$