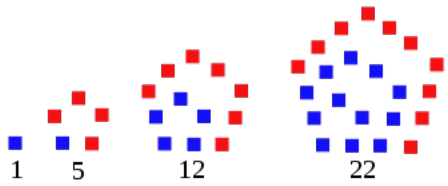
Planche 1.

Question de cours. Démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. On définit P_n le n-ième nombre pentagonal comme étant le nombre de points dans la figure obtenue au bout de n processus comme décrit ci-dessous.



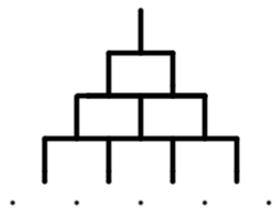
Ainsi $P_0 = 1$, $P_1 = 5$, $P_2 = 12$, $P_3 = 22$. Calculer P_n.

Planche 2.

Exercice 1. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 0 \\ -ax + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Un kapla pèse 13g et fait 10 cm de long. On fait une tour comme décrit ci après



Un kapla supporte au plus 100kg sur elle. Quelle hauteur au maximum peut-on faire ?

Planche 3.

Exercice 1. Calculer

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 2. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$$

Solutions - Planche 1.

Exercice 1. Remarquons que la n-ième figure a des côtés de taille n. Comment est-ce qu'on obtient P_n en fonction de P_{n-1} ? On rajoute 3 côtés à l'ancienne figure. Comme on compte deux fois les coins, alors on rajoute $3n-2$ points. Ainsi $P_n = 3n-2+P_{n-1}$. Il s'agit d'un processus sommatoire. On en déduit que

$$P_n = 3n - 2 + 3(n-1) - 2 + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n}(3k-2)$$

D'où l'on obtient

$$P_n = 3\sum_{k=1}^{n} k - 2n = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n^2+3n-4n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Solutions - Planche 2.

Exercice 1. Soit (x, y, z) une solution. On additionne les deux premières lignes. On obtient $2y + (2a + 1)z = 0$. Donc $y = -(a + 1/2)z$. On insère ceci dans la dernière ligne. On obtient

$$x - (2a + 1)z + 2z = 1$$

D'où $x = 1 + (2a - 1)z$. On remplace dans la première ligne.

$$a(1 + (1 - 2a)z) - (a + 1/2)z + 2z = 0$$

D'où $a + (2a^2 - 1/2)z = 0$. Si $a = \pm 1/2$, alors il n'y a pas de solution. Sinon $z = \frac{1/2-2a^2}{a}$. On obtient ensuite $x = 1 + (2a - 1)\frac{1/2-2a^2}{a} = 1 - 3/2a - 1/(2a) - 2a^3$ et $y = 2a^2 + a - 1/2 - 1/(4a)$.

Exercice 2. On note u_n le nombre de kaplas à l'étage n (où on va en décroissant). Il y en a 1 au premier étage $u_1 = 1$. Il y en a 3 au second. Puis 5 au troisième. On remarque Quelle

$$u_{n+1} = 2 + u_n$$

car il suffit de prendre l'étage précédent etde rajouter 2 kaplas (un vertical et un horizontal) pour former l'étage suivant (qui est en dessous). Donc $u_n = 2+2+2+\cdots+1 = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2 = 1+2n-2 = 2n - 1$.

On note v_n le nombre de kaplas utilisés au total pour faire une tour à n étages. Alors

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2n(n + 1)/2 - n = n^2 + n - n = n^2$$

A l'étage suivant il y aura n kaplas horizontaux qui devront supporter la charge de $v_n = n^2$ kaplas. La charge va se répartir équitablement sur les kaplas horizontaux qui ne supportent chacun que au maximum 100kg. Ainsi au maximum, $13n^2/n$ est la charge que va supporter un kapla horizontal. Donc il faut que $13n \leq 10^5$. Donc $n \leq 7692$. Donc il y au plus 7692 étages. Or un étage fait une hauteur 10cm de hauteur donc la tour fait au plus $\boxed{769,2\mathrm{m}}$ de haut.

Solutions - Planche 3.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$, alors

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}k+1}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

Exercice 2. Calculons quelques termes.

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{p+k}{k}=\binom{p}{0}=1$$

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{p+k}{k}=\binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}=2+p$$

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{p+k}{k}=\binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}=2+p+p(p+1)/2=(p+1)(p+2)/2$$

Cela ressemble à des binômes. On va donc essayer de simplifier la somme en enlevant des binômes. Pour ce faire, on va utilise la formule de Pascal.

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{p+k}{k}=\binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n}$$

Le gros trick c'est de dire que $\binom{p}{0}=\binom{p+1}{0}$ (car ils valent tous les deux 1). Du coup on se ramène à la formule de Pascal !

$$=\binom{p+1}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n}$$

$$=\binom{p+2}{1}+\binom{p+2}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n}$$

Et là, magie, on peut continuer.

$$=\binom{p+3}{2}+\binom{p+3}{3}+\cdots\binom{p+n}{n}$$

Jusqu'à obtenir

$$=\binom{p+n+1}{n}$$

Mais calmons nous, ceci n'est pas vraiment une preuve. On va maintenant montre la formule par récurrence. Supposons que la formule soit vraie pour n un entier. Montrons la pour $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{p+k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k}+\binom{p+n+1}{n+1}=\binom{p+n+1}{n}+\binom{p+n+1}{n+1}=\binom{p+n+2}{n+1}$$

D'où la formule est vraie par récurrence.