**Colle 5** $\sim$ 14 octobre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP1 $\sim$ Trinôme : 14

---

**Planche 1.**

**Question de cours.** Montrer qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

**Exercice.** Sit $E = \mathbb{R}[X]$. On note $||P|| = \sup_{[0,1]} |P(x)|$ pour $P \in E$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

---

**Planche 2.**

**Question de cours.** Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$.

**Exercice.** Soit $K$ un compact d'un evn et soit $(F_n)$ une suite décroissante de fermés non vides tels que $F_n \subset K$ pour tout $n$. Montrer que

$$\bigcap_{\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

---

**Planche 3.**

**Question de cours.** Si $F$ est un sous-espace vectoriel, on n'a pas toujours $E = F \bigoplus^{\perp} F^{\perp}$. Si $F$ est de dimension finie, en revanche, c'est le cas.

**Exercice.** Soit $K$ un compact d'un evn et $f$ une fonction de $K$ dans $K$ telle que pour tout $x \neq y$ dans $K$ on a

$$||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

Montrer que $f$ admet un unique point fixe $l$. Montrer que toute suite définie $(u_n)$ définie par $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $l$.

**Solutions - Planche 1.**

**Exercice.** L'application $f$ est clairement linéaire. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Essayons de majorer $|P(a)|$ en fonction de $||P||$. On voudrait quelque chose du genre

$$|P(a)| \leq \sup_{[0,1]} |P(x)|$$

En tout cas c'est vrai si $a \in [0,1]$. Il va du coup falloir distinguer les cas.

Si $a \in [0,1]$, alors $|f(P)| \leq ||P||$. Donc $f$ est continue et $|||f||| \leq 1$. Est-ce que 1 est la meilleure constante possible ? Si on prend le polynôme constant à 1, alors $|f(1)| = 1$ et $||1|| = 1$. Donc oui $|||f||| = 1$.

Si maintenant $a > 1$. Alors il ne devrait y avoir aucun lien entre $|P(a)|$ et $||P||$. L'un peut être grand et l'autre petit en même temps. On va donc montrer que $f$ n'est pas continue. Pour ce faire on cherche un polynôme $P$ tel que $|P(a)|$ est grand mais $||P||$ est petit. On peut par exemple considérer $P(X) = X^n$. On a alors $P(a) = a^n$ qui diverge. Tandis que $||P|| = \sup_{[0,1]} |x^n| = 1$. Si $f$ était continue il existerait donc une constante $C$ tel que $a^n \leq C$ pour tout $n$. C'est exclu car $a^n$ diverge. Donc $f$ n'est pas continue dans ce cas.

Si $a < 0$. Montrons de même que $f$ n'est pas continue. Cette fois ci on considère le polynôme $P(X) = (1-X)^n$. Alors $P(a) = (1-a)^n$ diverge tandis que la norme de $P$ vaut 1. Donc $f$ n'est pas continue.

**Solutions - Planche 2.**

**Exercice.** Comme $F_n$ est non vide pour tout $n$, il existe $u_n \in F_n$ pour tout $n$. Or $F_n \subset K$ pour tout $n$. Donc $(u_n)$ est une suite de $K$. Or $K$ est compact. Donc il existe une extraction $\varphi$ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers une limite $l$. On sent que $l$ va être dans l'intersection. Montrons le. Soit $p$ un entier, montrons que $l \in F_p$. Or $u_{\varphi(n)} \in F_p$ pour tout $n \geq p$, car $\varphi(n) \geq n \geq p$ et $F_n \subset F_p$ (par décroissance). Or $F_p$ est fermé. Donc $l$ comme limite d'une suite de $F_p$ est dans $F_p$. On en déduit que

$$l \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$$

Et donc que l'intersection est non vide.

**Solutions - Planche 3.**

**Exercice.**

**a)** Commençons par l'unicité (c'est souvent plus simple). Supposons qu'il existe $l$ et $l'$ dans $K$ deux points fixes différents. Alors par l'inégalité vérifiée par $f$ on a

$$||f(l) - f(l')|| < ||l - l'||$$

Or $f(l) = l$ et $f(l') = l'$ donc $||l - l'|| < ||l - l'||$. C'est impossible. Donc $f$ admet au plus un point fixe.

Soit $x \in K$. L'élement $x$ est un point fixe si et seulement si $||f(x) - x|| = 0$. On cherche donc à montrer que la fonction $g(x) = ||f(x) - x||$ sur $K$ admet 0 comme minimum. Or $g$ est continue car la norme est continue et $f$ est continue. Comme $K$ est compact, alors $g$ admet un minimum $a$ sur $K$ mais ce n'est pas forcément 0. Ce minimum est atteint en un $l \in K$. Or

$$||f(f(l)) - f(l)|| < ||f(l) - l||$$

Donc $g(f(l)) < g(l)$ ce qui contredit la minimalité de $l$ à moins que $f(l) = l$ et on a donc un point fixe.

**b)** Soit $u_0 \in K$ et $(u_n)$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons que $u_n$ converge $l$. Pour ce faire montrons que $||u_n - l||$ tend vers 0. On va étudier cette quantité. On la note $d_n = ||u_n - l||$. Par l'inégalité on a

$$d_{n+1} = ||u_{n+1} - l|| = ||f(u_n) - f(l)|| < ||u_n - l|| = d_n$$

Donc la suite positive $(d_n)$ est décroissante et minorée. Elle converge donc. Si elle convergeait vers 0 on aurait gagné. Sinon on note $d > 0$ sa limite. Or $(u_n)$ est une suite de $K$ compact donc admet une valeur d'adhérence $l' \in K$. Il existe une extractrice $\varphi$ telle que $u_{\varphi(n)} \to l'$. Or $d_{\varphi(n)} = ||u_{\varphi(n)} - l|| \to ||l' - l|| = d > 0$. De plus $d_{\varphi(n)+1}$ tend vers la même limite $d$ en $+\infty$. Or

$$d_{\varphi(n)+1} = ||u_{\varphi(n)+1} - l|| \to ||f(l') - l||$$

Donc $||l' - l|| = ||f(l') - f(l)||$. Mais c'est exclu par l'inégalité stricte vérifiée par $f$. Donc la suite $d_n$ converge vers 0 et $u_n$ converge vers $l$.