Colle 17 - lundi 2 février 2015 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en a. Montrer que fg est dérivable en a. De même, montrer le résultat concernant la composition.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{3/2} |\ln(|x - y|)|$$

Montrer que f est constante.

Exercice 2. Soit un entier n et $a_0, \ldots, a_n$ des réels non nuls. Soient $b_0, \ldots, b_n$ des réels deux à deux distincts.
On pose la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{b_k x}$
Montrer que f s'annule en au plus n réels.

Planche 2.

Question de cours. Démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 1. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ C^1 qui s'annule en $-1, 0, 1$. On pose $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$: $g(x) = 2x^4 + x + f(x)$.
Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(P) \geq 2$.

a) Montrer que si les zéros de P sont tous réels et simples, alors P' aussi.

b) Montrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}$ alors P' aussi.

Planche 3.

Question de cours. Soit f dérivable sur un intervalle I. Alors f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$.

Exercice 1. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[-1, 1]$, deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ telle que : $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f''(c) = 0$

Exercice 2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $0 < x < y \leq \pi/2$, on a :

$$x/y < \sin(x)/\sin(y) < \frac{\pi}{2} x/y$$

Solutions - Planche 1.

Question de cours.

Exercice 1. La différence entre $f(x)$ et $f(y)$ est majorée par rapoort à $|x-y|$. **C'est donc fortement lié à la continuité et à la dérivabilité**. En pensant à la dérivabilité on pense donc à montrer que la dérivée de f est nulle pour montrer que f est constante.

Pour faire apparaître la dérivée, on calcule un taux d'accroissement. On a pour $x \neq y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{1/2}|\ln(|x-y|)|$$

Fixons x. Par croissance comparée, le terme de droite tend vers 0 quand y tend x (car $\lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0$). Donc, par définition, f est dérivable en x et sa dérivée vaut 0. Donc $f'(x) = 0$ pour tout x. Donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Exercice 2. On veut monrer qu'il existe des zéros. Pour cela on a plusieurs théorèmes : théorème des valeurs intermédiaires et théorème de Rolle. Néanmoins il est impossible de faire cela directement. **Montrons donc cela par récurence**.

Pour $n = 0$, $f(x) = a_0e^{b_0x}$ ne s'annule par car $a_0 \neq 0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \ldots, a_{n+1}$ des réels non nuls et des réels $b_0, \ldots, b_{n+1}$ distincts deux à deux. D'où il va nous falloir dériver. Comment se ramener aux cas précédents ? L'idée est qu'une exponentielle ne s'annule pas. On pose alors $g(x) = e^{-b_{n+1}x}f(x)$. Ainsi on a :

$$g(x) = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k e^{(b_k - b_{n+1})x}$$

Maintenant si on dérive on obtient :

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k - b_{n+1})e^{(b_k-b_{n+1})x}$$

On s'est donc ramené au cas précedent car les $a_k(b_k - b_{n+1})$ ne sont pas nuls et les $(b_k - b_{n+1})$ sont distincts deux à deux. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurence à g'. g' admet au maximum n zéros. Donc d'après le théorème de Rolle, g admet au maximum $n+1$ racines. Donc f admet au maximum $n+1$ zéros car $e^{-b_{n+1}x}$ ne s'annule pas. On a donc $\boxed{\text{montré la propriété par récurrence}}$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours.

Exercice 1. Comme g est C^1, on peut utiliser les théorèmes importants du cours (TAF, TVI, Rolle). Faisons un dessin : on calcule donc les valeurs de g aux points connus. $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 3$. On voit alors qui doit y avoir un point tel que $g'(a) = 0$ car g "descend" puis "remonte".

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 1$. Par Rolle, il existe $a \in]-1, c[$ tel que $g'(a) = 0$ car $g(-1) = g(c)$.

On a donc montré qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $\boxed{g'(c) = 0}$.

Exercice 2.

a) D'après le théorème du cours, P est scindé sur $\mathbb{C}$. C'est à dire qu'il admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité). L'hypothèse implique que ces racines sont réelles et simples. D'où P s'écrit de la manière suivante :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

où les a_k sont des réels distincts et λ est un réel non nul. On suppose, quitte à les renuméroter, que $a_1 < \ldots < a_n$.

P étant continu sur $[a_k, a_{k+1}]$ pour tout $k \in [|1, n-1|]$, étant dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ (en fait P est même C^1 sur $\mathbb{R}$) et $P(a_k) = P(a_{k+1}) = 0$. Alors par le théorème de Rolle, il existe $y_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.

On obtient donc $n-1$ réels y_k tels que : $a_1 < y_1 < a_2 < \ldots < y_{n-1} < a_n$. Donc les y_k sont deux à deux distincts. Comme P' est de degré $n-1$, il en résulte que les zéros de P' sont exactement les y_k qui sont $\boxed{\text{tous réels et simples}}$.

b) Comme P est supposé scindé dans $\mathbb{R}$, alors il existe λ un réel non nul, $a_1, \ldots, a_N$ des réels distincts deux à deux tels que $a_1 < \ldots < a_N$ et tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{N} (X - a_k)^{\alpha_k}$$

Avec les α_k des entiers non nuls.

Comme on l'a montré dans la première partie de l'exercice, il existe $y_1, \ldots y_{N-1}$ des réels distincts deux à deux tels que : $y_k \in]a_k, a_{k+1}[$ et $P'(y_k) = 0$. De plus a_k est racine de P' d'ordre $\alpha_k - 1$.

Ainsi on a trouvé un certain nombre de racine de P' qui sont les y_k (cela en fait $N-1$) et les x_k (chacun d'ordre $\alpha_k - 1$). D'où on a trouvé $N-1+\sum_{k=1}^{N} \alpha_k - 1 = N-1-N+\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = n-1$ racines comptées avec multiplicité. Or P' est de degré $n-1$. Donc ce sont exactement les racines de P'. D'où $\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}}$.

Solutions - Planche 3.

Question de cours.

Exercice 1. Ça sent le théorème des accroissements finis car on va montrer que des dérivées s'annulent. Comme f est C^1, le TAF nous dit qu'il existe a dans $]-1,0[$ tel que $f'(a) = f(0)-f(-1)/(0-(-1)) = 1$ et qu'il existe b dans $]0,1[$ tel que $f'(b) = f(1)-f(0)/(1-0) = 1$.

Comme f' est dérivable, alors d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $\boxed{f''(c) = 0}$ car $f'(a) = f'(b)$.

Exercice 2. Premier réflexe, **on pose** $f(t) = \sin(t)/t$ **définie sur** $]0,\pi/2[$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que : $0 < x < y < \pi/2$. Cela revient donc à montrer que :

$$\frac{2}{\pi} f(x) < f(y) < f(x)$$

Et là on a plus de fonctions à deux variables et il suffit d'étudier les variations de f.

f est dérivable sur son intervalle de définition :

$$f'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$$

Comme le dénominateur est positif, il suffit d'étudier le signe de $A(t) = t\cos(t) - \sin(t)$. Or cette fonciton définie sur $[0,\pi/2[$ est dérivable sur ce même intervalle, et sa dérivée vaut : $A'(t) = -t\sin(t) \leq 0$ et même $A(t) < 0$ si $t \neq 0$. Donc A est strictement décroissante. De plus $A(0) = 0$, donc on en déduit que $A(t) < 0$. Donc $f'(t) < 0$ et f est strictement décroissante. De plus on sait que $f(t) \to 1$ quand $t \to 0$. Donc $f(t) \to 2/\pi$ quand $t \to \pi/2$.

Ainsi, si $0 < x < y < \pi/2$ alors

$$2/\pi < f(y) < f(x) < 1$$

On a donc d'une part que $f(y) < f(x)$. Et d'autre part $\frac{f(y)}{f(x)} > f(y)$ car $0 < f(x) < 1$. Donc $\frac{f(y)}{f(x)} > \frac{2}{\pi}$. On a donc démontré : $\boxed{x/y < \sin(x)/\sin(y) < \frac{\pi}{2} x/y}$