Colle 6 - lundi 3 novembre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Énoncer les propriétés du cours sur les fonctions arccos et arcsin. (ensemble de définition, croissance, graphe, ...)
Résoudre ensuite $\arcsin(x) = \arccos(4/5)$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 1. Soient $a, b > 0$, montrer que : $\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leq \ln(\frac{a+b}{2})$.

Exercice 2. Soit $x \geq 0$ réel. Montrer que :

$$\arctan(sh(x)) = \arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$

Planche 2.

Question de cours. Énoncer la définition de fonctions paires, impaires et périodiques. Donner des exemples. Étudier la parité de la fonction $x \longmapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ (et vérifier qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$).

Exercice 1. Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les applications constantes.

Exercice 2. Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur $[-1, 1]$.

Planche 3.

Question de cours. Soient a, b réels. Montrer que $sh(a+b) = ch(a)sh(b) + ch(b)sh(a)$.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en calculant $P_n(x)\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 2. Résoudre le système

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Solutions - Planche 1.

Question de cours. cos est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On note arccos sa réciproque sur ces intervalles. Alors $\arccos(\cos(x)) = x$ lorsque $x \in [0,\pi]$ et $\cos(\arccos(x)) = x$ lorsque $x \in [-1,1]$.

$\boxed{\text{Attention !}}$: on n'a pas $\arccos(\cos(x)) = x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Par exemple pour $x = 2\pi$. Dans ce cas $\cos(x) = 1 = \cos(0)$ et $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(\cos(0)) = 0$!

Maintenant, traçons le graphe de arccos. Pour ce faire, on calcule quelques points sur lesquelles on place la tangente (rappelons que la dérivée de la fonction en un point est la pente de la tangente en ce point). Par exemple : comme $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$, alors $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \pi/2$ et $\arccos(1) = 0$.

Or on connaît la dérivée des fonctions réciproque facilement grâce à la dérivée de la fonction réciproque elle même : $(f^{-1})' = 1/f' \circ f^{-1}$. D'où pour $x \in [-1,1]$:

$$\arccos'(x) = -1/\sin(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De même : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

[Si on veut apprendre ces formules par coeur, mieux vaut trouver un moyen mnémotechnique pour se souvenir qui a le -1. Perso, j'ai pas trouvé mieux que arcsin il y a un s comme dans positive, ... mouais ... sinon on peut juste se souvenir que la dérivée de la réciproque a le même signe que la dérivée de la fonction de base]

A l'aide de cette dérivée, on peut donc affiner le tracé. arccos a une tangente verticale en -1 et en 1 et a une tangente horizontale en 0.

Exercice 1. Partons de l'inégalité qu'on veut démontrer et cherchons des inégalités équivalentes pour la simplifier. Soit $a, b > 0$. Comme l'exponentielle est croissante, on en déduit que :

$$\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leq \ln((a+b)/2) \iff e^{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}} \leq (a+b)/2$$

On mouline maintenant avec les propriétés de exponentielle et de le logarithme. Or $e^{(\ln(a)+\ln(b))/2} = e^{\ln(a)/2+\ln(b)/2} = e^{\ln(\sqrt{a})+\ln(\sqrt{b})} = e^{\ln(\sqrt{a})}e^{\ln(\sqrt{b})} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. D'où l'inégalité précédente est équivalente à

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \leq (a+b)/2$$

[gros trick qu'il faut retenir] On sait que $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$. On développe cette inégalité. D'où $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$. Ainsi $\sqrt{a}\sqrt{b} \leq (a+b)/2$.

On en conclut que l'inégalité demandée est vraie.

Exercice 2. Tout l'exercice tient dans ce principe :

$\boxed{\text{Si } f' = g' \text{ et } f(a) = g(a) \text{ pour UN } a, \text{ alors } f = g}$

C'est **exactement** la même méthode que dans l'exercice du cours pour montrer que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$. C'est un principe à retenir qui revient pas mal surtout quand on ne connaît pas très bien la fonction elle même mais beaucoup plus sa dérivée.

Bref, c'est une bonne idée mais il faut calculer. On pose $f(x) = \arctan(sh(x))$ et $g(x) = \arccos(1/ch(x))$. Alors par dérivée composée :

$$f'(x) = \frac{ch(x)}{1+sh^2(x)} \text{ et } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-1/ch^2(x)}} . \frac{-sh(x)}{ch^2(x)}$$

Or $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$. Donc $f'(x) = 1/ch(x)$ et

$$g'(x) = \frac{sh(x)}{\sqrt{ch^2(x)-1} \times ch(x)} = 1/ch(x)$$

De plus $f(0) = \arctan(sh(0)) = \arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arccos(1/ch(0)) = \arccos(1) = 0$. D'où $f(0) = g(0)$. Donc on en conclut que $f = g$ sur $\mathbb{R}^+$.

Solutions - Planche 2.

Question de cours. On pose $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier que c'est bien définie il suffit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1}+x > 0$. Ce n'est pas forcément évident car pour x négatif la somme pourrait être négative. En tout cas pour $x \geq 0$ c'est bon. Maintenant si x est négatif on a $x^2+1 \geq (-x)^2$, donc en passant à la racine (qui est croissante) on a : $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ car $\sqrt{(-x)^2} = -x$ car $-x \geq 0$. Finalement f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le gros trick à utiliser ici c'est l'égalité remarquable

$$(a-b) = \frac{a^2-b^2}{(a+b)}$$

Il faut penser à utiliser les égalités remarquables quand on a une racine carré.

$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -f(x)$$

Donc f est impaire.

Exercice 1. Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui est continue. Si elle n'est pas constante, il existe x et y des réels tels que $x < y$ et a, b des entiers distincts tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$.

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $a < b$. Soit $u \in]a, b[$ non entier, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $w \in]x, y[$ tel que $f(w) = u$. Il y a donc contradiction avec le fait que f soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Donc f est constante.

Exercice 2. D'abord, on regarde l'intervalle de définiton de f. Il faut que $4x^3 - 3x \in [-1, 1]$. Or l'étude du polynôme montre que x doit être dans $[-1, 1]$. En effet on pose $P(x) = 4x^3 - 3x$, alors $P'(x) = 3(4x^2 - 1)$. Donc P' s'annule en $\pm 1/2$. Donc P est croissante sur $]-\infty, -1/2[$ et sur $]1/2, +\infty[$ et est décroissante sur $[-1/2, 1/2]$. Or $P(-1) = -1$, $P(1) = 1$ et $P(-1/2) = -4/8 + 3/8 = -1/8$ et $P(1/2) = 4/8 - 3/8 = 1/8$. Donc $P^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$. Donc f est bien définie sur cet intervalle.

On montre alors que $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$ grâce aux égalités trigonométriques. En effet : $\cos(3a) = \cos(2a + a) = \cos(2a)\cos(a) - \sin(a)\sin(2a)$. Or $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Donc :

$$\cos(3a) = (2\cos(a)^2 - 1)\cos(a) - 2\cos(a)\sin(a)^2$$

$$= 2\cos(a)^3 - \cos(a) - 2\cos(a)(1 - \cos(a)^2)$$

$$= 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$$

On pose alors $\theta(x) = arccos(x)$. Et on calcule maintenant $f(x)$ en passant par θ.

Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $a = \arccos(x)$. De sorte qu'on a $\cos(a) = x$. Donc $\cos(3a) = 4x^3 - 3x$. Donc $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x) = \arccos(\cos(3a))$.

Attention ! On a pas $\arccos(\cos(a)) = a$ toujours ! $\arccos \circ \cos = Id_{[0,\pi]}$. Donc c'est vraie que sur $[0, \pi]$ et $3a$ peut sortir de cet intervalle ...

Où est ce néanmoins le cas ? $3a \in [0, \pi]$ si et seulement si $a \in [0, \pi/3]$. Donc c'est le cas quand x est dans $[\cos(\pi/3), \cos(0)] = [1/2, 1]$.

On en conclut :

$$f(x) = \begin{cases} 3\arccos(x) \text{ si } x \in [1/2, 1] \\ 2\pi - 3\arccos(x) \text{ si } x \in [-1/2, 1/2] \\ 3\arccos(x) - 2\pi \text{ sinon} \end{cases}$$

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Développer le membre de droite avec la définition de ch et sh en utilisant que $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

Noter la ressemblence avec la démonstration des formules trigonométriques qui utilise les formules d'Euler.

Exercice 1. L'idée de cette exercice est la suivante : on voudrait calculer $P_n(x)$ par récurrence mais ça ne marche pas trop. Par contre si on considère $Q_n(x) = P_n(x)sh(x/2^n)$, là on trouve une formule de récurrence qui nous permet de calculer $Q_n(x)$ et donc $P_n(x)$.

Cherchons donc une formule de récurrence. On considère :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) = P_{n+1}(x)sh(x/2^{n+1}) &= (\prod_{k=1}^{n+1} ch(x/2^k))sh(x/2^{n+1}) \\ &= (\prod_{k=1}^{n} \dots)ch(x/2^{n+1})sh(x/2^{n+1}) \\ &= P_n(x)ch(x/2^{n+1})sh(x/2^{n+1}) \end{aligned}$$

Il faut voir une formule de trigonométrie hyperbolique. En prenant $a = b$ dans la formule que l'on vient de démontrer dans la question de cours précédente, on obtient :

$$sh(2a) = 2ch(a)sh(b)$$

D'où :

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}P_n(x)sh(x/2^n) = \frac{1}{2}Q_n(x)$$

Maintenant reconnaissons une suite géométrique de raison 1/2. Donc $Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}Q_1(x)$. Or on sait calculer $Q_1(x)$:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}ch(x/2)sh(x/2) = \frac{1}{2^n}sh(x)$$

Déduisons-en $P_n(x)$. On veut diviser par $sh(x/2^n)$ mais pour cela il faut que le sh soit non nul. Pour cela il faut supposer que x est non nul. Donc si $x \neq 0$, alors :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{sh(x)}{sh(x/2^n)}$$

Si $x = 0$, on peut faire le calcul directement. $P_n(x) = \prod_{k=1}^n ch(0) = 1$.

Exercice 2. D'abord on cherche des solutions évidentes pour voir qu'on a compris le problème. On trouve que le triplet nul est solution. Montrons que c'est la seule solution.

Soit (a, b, c) une solution. L'idée est de ramener le problème à seulement deux inconnues puis qu'une seule. On pose $x = e^a$ et $y = e^b$ (ouais c'est un peu magique ...). On a donc $x + y + 1/(xy) = 3$ et on a plus que deux inconnues (dans cette équation).

On considère alors la fonction $f(u) = u + y + 1/(uy)$. Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$. On étudie la fonction et on cherche son minimum.

C'est parti : $f'(u) = 1 + 0 - \frac{1}{yu^2}$. Donc la dérive s'annule quand $1 = \frac{1}{yu^2}$. Donc quand $u = \frac{1}{\sqrt{y}}$. À gauche de ce point la dérivée est négative et à droite elle est positive. Donc la fonction f est décroissante sur $]0, \frac{1}{\sqrt{y}}]$ et croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{y}}, +\infty[$ donc elle admet un minimum en $\frac{1}{\sqrt{y}}$ qui vaut $y + \frac{2}{\sqrt{y}}$. Donc $\boxed{x + y + \frac{1}{xy} = 3 \geq y + \frac{2}{\sqrt{y}}}$. Il reste à voir que $y + \frac{2}{\sqrt{y}}$ ne peut pas être plus petit que 3.

Pour cela on pose encore une fonction et on cherche son minimum. On pose $g(u) = u + 2/\sqrt{u}$ sur $]0, +\infty[$. Alors $g'(u) = 1 - \frac{1}{u\sqrt{u}}$. Donc la dérivée s'annule en 1 et de même qu'avant c'est un minimum. Donc $g(u) \geq g(1) = 3$.

Or il s'agit d'un minimum strict. D'où si $y \neq 1$ alors $f(x, y) > 3$. Or $f(x, y) = 3$. C'est impossible donc $y = 1$. Or $f(x, y) = 3$. Donc $x = 1$ et $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Finalement, le triplet nul est la seule solution.