Colle 5 - lundi 13 octobre 2014 - Colleur : Isenmann - MPSI .. - Groupe ..

Planche 1.

Question de cours. Déterminer si la fonction suivante est injective et/ou surjective : $f(x) = x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f n'est pas injective, trouver une partie $\mathbb{R}$ telle que la restriction de f à cette partie le soit. Déterminer l'image réciproque de $[-1, 4]$ et de $[1, 4]$ par f.

Exercice 1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 2. Soient E un ensemble, $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B))$$

Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = X$.
[Attention le X a trouvé est assez chaud à trouver ...]

Planche 2.

Question de cours. Soit n un entier. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelle de la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} f: & \{0, \dots, n\} & \longrightarrow & \{0, \dots, n\} \\ & a & \longmapsto & \begin{cases} a+1 \text{ si } a < n \\ 0 \text{ si } a = n \end{cases} \end{array}$$

Exercice 1. Soit une application $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Exercice 2. Quelles sont les fonctions injectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifient $f(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$? Quelles sont les fonctions surjectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifient $f(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$?

Planche 3.

Question de cours. On pose la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} f: & [0, 4] & \longrightarrow & [0, 2] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } x < 2 \\ 3 - x \text{ si } x \in [2, 3] \\ 2 \text{ si } x > 3 \end{cases} \end{array}$$

Est ce que f est injective, surjective, bijective ? La restriction à $[0, 2]$ est elle injective, surjective, bijective ? Calculer $f^{-1}([1, 2])$.

Exercice 1. Soit une applicaiton $f : E \to F$. Montrer que pour toute partie A de E, et toute partie B de F, on a :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Quid de l'autre inclusion ?

Exercice 2. Soit f une fonction de X dans Y. On pose

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\tilde{f}$ soit injective. Ainsi qu'une CNS sur f pour $\tilde{f}$ soit surjective.

Solutions - Planche 1.

Question de cours. Comme $f(1) = f(-1)$ alors f n'est pas injective. Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors -1 n'est pas atteint par f. Donc f n'est pas surjective. On considère la restriction g de f à $\mathbb{R}^+$. La fonction g est alors injective. En effet soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x^2 = y^2$. Alors on a $x = y$ ou $x = -y$. Le deuxième cas est impossible à moins que $x = y = 0$ car x et y sont positifs.

Remarque : $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est surjective. Car pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on peut poser $x = \sqrt{y}$ et on alors $g(x) = x^2 = y$.

$$f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$$

$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \bigcup [1, 2]$$

Cela se voit sur le graphe de la fonction et cela suffit en général comme démonstration.

Néanmoins cette démonstration n'est pas formelle ... Une vraie démonstration consiste à écrire pour le premier cas que

$$x \in f^{-1}([-1, 4]) \iff f(x) \in [-1, 4]$$

$$\iff x^2 \in [-1, 4]$$

$$\iff -1 \leq x^2 \leq 4$$

$$\iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$$

La dernière équivalence se démontre ainsi. Supposons que $x^2 \leq 4$. Alors si on a pas $-2 \leq x \leq 2$ c'est que soit $x > 2$ et dans ce cas $x^2 > 4$ soit $x < -2$ et dans ce cas $x^2 > 4$. Dans les deux cas c'est impossible. D'où $-2 \leq x \leq 2$.

L'autre sens se fait ainsi. Supposons que $-2 \leq x \leq 2$. Si x est positif alors $x^2 \leq 4$ (par croissance de la fonction carré). Sinon x est négatif et on a alors $-x \leq 2$. D'où $(-x)^2 \leq 4$ et $x^2 \leq 4$.

Exercice 1. Supposons f injective. Soit $y \in E$. Comme $f(y) = f(f(f(y)))$. Alors $y = f(f(y))$ car f est injective. On pose $x = f(y)$. On a alors $f(x) = f(f(y)) = y$. Donc y a un antécédent par f. Donc f est surjective.

Supposons f surjective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Comme f est surjective, $f \circ f$ est aussi surjective donc il existe x' et y' tel que $x = f(f(x'))$ et $y = f(f(y'))$. Donc $f(f(f(x'))) = f(f(f(y')))$. Ainsi $f(x') = f(y')$. En appliquant f, on en déduit que $f(f(x')) = f(f(y'))$. Ce qui se traduit en $x = y$. Donc f est injective.

Finalement, f est une bijection.

Remarque : autre méthode pour la deuxième implication. On va montrer que $f \circ f = id_E$. Pour ce faire, on prend $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $f(f(f(x))) = f(x)$. Donc $y = f(f(y))$. Donc $f \circ f = id_E$. On en déduit maintenant l'injectivité de f : soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $f(f(x)) = f(f(x'))$. D'où $x = x'$.

Exercice 2. On pose $A = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq f(X)\}$ et $F = \bigcup_{X \in A} X$.

On va montrer, par double inclusion, que F est fixé par f. Montrons d'abord que $F \subseteq f(F)$. Soit $X \in A$. $X \subseteq F$. Donc par la propriété vérifiée par f, on a $f(X) \subseteq f(F)$. Or $X \subseteq f(X)$. Donc $X \subseteq f(F)$. On en déduit que

$$F = \bigcup_{X \in A} X \subseteq f(F)$$

Montrons maintenant que $f(F) \subseteq F$. Comme $F \subseteq f(F)$ alors $f(F) \subseteq f(f(F))$ par croissance de f. Donc $f(F) \in A$. Donc $f(F) \subseteq \bigcup_{X \in A} X = F$

D'où

$$F = f(F)$$

Solutions - Planche 2.

Question de cours. Vérifions l'injectivité : soit $a, b \in \{0, \dots, n\}$ tel que $f(a) = f(b)$. Il faut différencier les différents cas. 1er cas : $a \neq n$ et $b \neq n$. On a alors $a+1 = b+1$. D'où $a = b$. 2ème cas : $a = n$ et $b = n$ alors $a = b$. 3ème cas : $a = n$ et $b \neq n$. Donc $0 = b + 1$ c'est impossible. Le 4ème cas $a \neq n$ et $b = n$ est symétrique au 3ème. Finalement, $a = b$ dans tous les cas. Donc f est injective.

Vérifions la surjectivité. Soit $b \in \{0, \dots, n\}$. Si $b = 0$ alors $b = f(n)$. Si $b \neq 0$ alors $b = f(b-1)$.

Donc f est bijective et sa réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} : & \{0, \dots, n\} & \longrightarrow & \{0, \dots, n\} \\ & a & \longmapsto & \begin{cases} n \text{ si } a = 0 \\ a - 1 \text{ si } a > 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 1. On procède par double implication.

$\Rightarrow$ Soit A une partie de E. On procède par double inclusion.

Soit $y \in f(E \setminus A)$, il existe $x \in E \setminus A$ tel que $y = f(x)$.

Supposons que $y \in f(A)$. Il existe alors $x' \in A$ tel que $y = f(x') = f(x)$. Par injectivité, cela implique que $x = x'$. Or $x \notin A$ et $x' \in A$. C'est impossible. Donc on a l'inclusion :

$$f(E \setminus A) \subseteq F \setminus f(A)$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in F \setminus f(A)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $y \notin f(A)$, donc $x \notin A$. D'où $y \in f(E \setminus A)$. D'où la seconde inclusion. On conclut :

$$f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

$\Leftarrow$ Montrons d'abord l'injectivité de f. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Supposons que $x \neq x'$. On pose alors $A = \{x\}$, de telle sorte que $x' \notin A$. Comme $f(x') \in f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$, on en déduit que $f(x') \neq f(x)$. Ce qui est contradictoire. Donc $x = x'$. Donc f est injective.

Montrons maintenant la surjectivité. On pose $A = E$. Comme $f(E \setminus E) = f(\emptyset) = \emptyset = F \setminus f(E)$, on en déduit que $f(E) = F$. D'où la surjectivité.

Finalement, f est bijective.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$ et étant injective. On a $f(0) = 0$. Montrons par récurence que $f = id_{\mathbb{N}}$.

L'hypothèse pour le rang 0 est vraie.

Supposons alors que $f(m) = m, \forall m \in \{0, \dots, n\}$. On sait que $f(n+1) \leq n+1$. Or $f(n+1) < n+1$ est impossible car f est injective (les valeurs en dessous de $n+1$ on déjà été atteintes). Donc $f(n+1) = n+1$. L'hypothèse est donc encore vraie au rang $n+1$. Par récurence, on a montré que $f = id_{\mathbb{N}}$.

Réciproquement, l'identité convient pour cette propriété. Donc l'identité est la seule fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ et étant surjective. Montrons de même par récurence que $f = id_{\mathbb{N}}$. Comme f est surjective, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = 0$. Or $f(m) \geq m$. Donc $m = 0$. L'hypothèse de récurence est donc vraie au rang 0.

Supposons alors que $f(m) = m, \forall m \in [|0, n|]$. Par surjectivité, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = n+1$. Or $f(m) \geq m$. Donc $m \leq n+1$. Or $m < n+1$ est impossible car sinon on aurait $f(m) = m < n+1$ par hypothèse de récurrence. Donc $f(n+1) = n+1$. L'hypothèse est donc encore vraie au rang $n+1$. Par récurence, on a montré que $f = id_{\mathbb{N}}$.

Réciproquement, l'identité convient. Donc l'identité est la seule fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

Solutions - Planche 3.

Question de cours. Voici le graphe de la fonction :

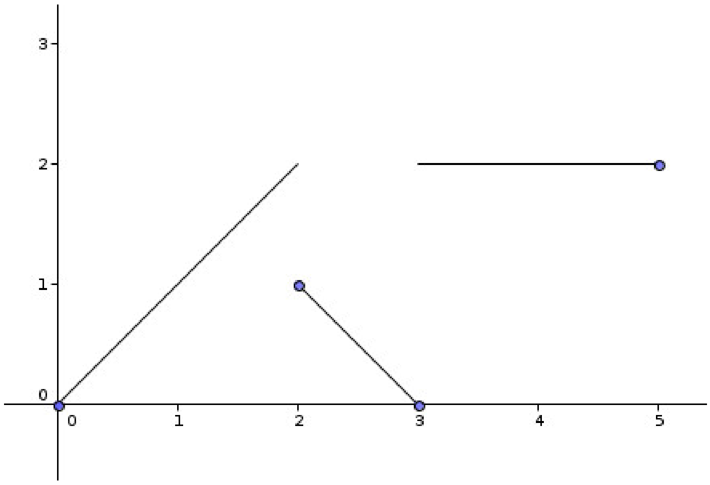

Figure 1: Graphe de la fonction f.

Comme on le voit sur le graphe, $f(0) = f(3) = 0$. Donc f n'est pas injective. f est surjective. En effet : soit $y \in [0, 2]$. Si $y = 2$ alors y admet 4 pour antécedent. Sinon $y < 2$ et y admet y pour antécedent (donné par la première partie de la fonction).

La restriction à $[0, 2]$ n'est pas injective car $f(1) = f(2) = 1$. De plus la restriction n'est pas surjective car 2 n'est pas atteint.

$$f^{-1}([1, 2]) = [1, 2] \bigcup]3, 4]$$

Exercice 1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $f(x) \in B$, donc $y \in B$. D'où $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

De manière générale les inclusions réciproques de ces deux propriété n'est pas vraie. On peut par exemple définir la fonction f sur $\{1, 2\}$ définie par $f(1) = f(2) = 1$. On considère $A = \{1\}$. Alors $f(A) = \{1\}$. Mais $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$. Donc on a pas $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

Exercice 2.

1. Montrons que f est injective si et seulement si $\tilde{f}$ est injective.

Supposons f injective. Montrons que $\tilde{f}$ est injective. Soient A, B des parties de X telles que $\tilde{f}(A) = \tilde{f}(B)$, c'est-à-dire $f(A) = f(B)$. Soit alors $x \in A$. Comme $f(x) \in f(B)$, il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Or f est injective, donc $x = y \in B$. Donc $A \subseteq B$. On procède de manière symétrique pour montrer que $B \subseteq A$. D'où $A = B$ et $\tilde{f}$ est injective.

Supposons que $\tilde{f}$ est injective. Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$. On pose alors $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Donc $f(A) = f(B)$. Or $\tilde{f}$ est injective donc $A = B$, donc $x = y$. Donc f est injective.

2. Montrons que f est surjective si et seulement si $\tilde{f}$ est surjective.

Supposons f surjective. Montrons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $B \subseteq Y$. On pose $A = f^{-1}(B)$. Alors $f(A) = B$. En effet, soit $y \in B$. Par surjectivité de f, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. D'où $x \in f^{-1}(B) = A$. Donc $y = f(x) \in f(A)$ et $B \subseteq f(A)$. Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Or $x \in A = f^{-1}(B)$ d'où $f(x) \in B$. D'où $y = f(x) \in B$. Ainsi on l'autre inclusion $f(A) \subseteq B$ qui nous assure que $f(A) = B$. On en conclut que f est $\tilde{f}$ est surjective.

Supposons $\tilde{f}$ surjective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in Y$. On pose $B = \{y\}$, comme $\tilde{f}$ est surjective, il existe $A \subset X$ tel que $f(A) = B$. A n'est pas vide car B n'est pas vide. Donc il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.