Planche 1.

Question de cours. Énoncer les propriétés du cours sur la fonction arctan.

Exercice 1. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Planche 2.

Question de cours. Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective. La réciproque est-elle vraie ? Est-ce que si la fonction est monotone alors elle est injective ?

Exercice 1. Étudier la fonction $\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(x))$ et la représenter.

Planche 3.

Question de cours. Trouver une fonction ni paire ni impaire. Quelles sont les fonctions impaires et paires en même temps ?

Exercice 1. Résoudre $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$.

Planche 1 - Solutions.

Question de cours. La fonction arctan est la réciproque de la fonction (bijective continue croissante) tan sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction arctan est alors bijective, continue, croissante. Sa dérivée est $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Le graphe est celui de tan mais en symétrique par rapport à la première bissectrice.

Exercice 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une solution. On suppose que y est non nulle. Alors on peut diviser les membres de chaque côtés. D'où

$$8^x 2^{-x} = 2$$

Donc $\exp(x \ln(8) - x \ln(2)) = 2$ et $x 2 \ln(2) = \ln(2)$. On en déduit que $x = 1/2$. Donc $y = \sqrt{8}/10 = \sqrt{2}/5$.

Si $y = 0$, alors $8^x = 0$ mais ce n'est pas possible. Donc $(1/2, \sqrt{2}/5)$ est la seule solution possible. On vérifie qu'il s'agit bien d'une solution en remontant les calculs.

Planche 2 - Solutions.

Question de cours. Soit f une fonction strictement monotone. Soient $x, y \in I$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$ alors quitte à permuter on peut supposer que $x < y$. D'où $f(x) < f(y)$ par strict monotonie. C'est impossible. Donc f est injective.

La réciproque n'est pas vraie. Il suffit de considérer une fonction par morceaux qui décroit au début et qui croit à la fin (avec un saut au milieu). On obtient alors une fonction injective mais pas monotone.

Une fonction constante est une fonction monotone mais pas injective.

Exercice 1. On pose $f(x) = \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est 2π-périodique, il suffit donc de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.

On sait que $\arcsin(\sin(x)) = x$ mais seulement sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et que $\arccos(\cos(x)) = x$ sur $[0, \pi]$. Il faut donc s'y ramener.

• Sur $[0, \pi/2]$ c'est facile, ça vaut x pour les deux. Donc $f(x) = 2x$.

• Sur $[-\pi, 0]$ par contre il va fallloir commencer à bidouiller car x est négatif et arccos(cos) c'est ok que quand $x < 0$. Du coup on pense à $\cos(x) = \cos(-x)$. Ainsi $\arccos(\cos(x)) = \arccos(\cos(-x)) = -x$ car $0 \leq -x \leq \pi$. De plus $\arcsin(\sin(x)) = x$. Du coup $f(x) = 0$ sur cet intervalle.

• Sur $[-\pi, -\pi/2]$. De même $\arccos(\cos(x)) = \arccos(\cos(-x)) = -x$ car $0 \leq -x \leq \pi$. Par contre ce n'est plus vraie pour arcsin. Donc on décale. $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin(-2\pi + \pi - x)) = \arcsin(\sin(-\pi - x)) = -\pi - x$ car $-\pi/2 \leq -\pi - x \leq 0$. Donc $f(x) = -\pi - 2x$.

• Sur $[\pi/2, \pi]$. Ici $\arccos(\cos(x)) = x$ car $0 \leq x \leq \pi$. De plus $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ car $0 \leq \pi - x \leq \pi/2$. Donc $f(x) = \pi$.

Planche 3 - Solutions.

Question de cours. La fonction qui vaut 0 sur les négatifs et x sur les positifs n'est ni paire ni impaire.

Soit f une fonction paire et impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Donc $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$. Donc f est nulle.

Exercice 1. On utilise la relation $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$. En effet

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3})) = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(x\sqrt{3}))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(x\sqrt{3}))}$$

$$= \frac{x + x\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}x^2} = \tan(7\pi/12)$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\tan(7\pi/12)$. Or

$$\tan(7\pi/12) = \tan(\pi/3 + \pi/4) = \frac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

D'où cela donne une équation du second degré $\sqrt{3}x^2 + x(1-\sqrt{3}) - 1 = 0$. Son discrimant vaut $2(2+\sqrt{3})$. Les solutions sont

$$\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{5\sqrt{3}+3}{6} \end{cases}$$