Colle 2 ~ 24 septembre 2015 ~ Colleur : Isenmann ~ MPSI ~ Trinôme :

Planche 1.

Question de cours. Quelle est l'équation de la transformation qui consiste en une homotéthie de rapport 3 et de centre -1 suivie d'une rotation d'angle $\pi/2$ de centre i.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Planche 2.

Question de cours. Reconnaître la transformation suivante :

$$z \longmapsto (1-i)z - i$$

Exercice 1. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des entiers. Montrer qu'il existe A, B des entiers tels Quelle

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = A^2 + B^2$$

Planche 3.

Question de cours. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ des nombres complexes distincts. Que représente géométriquement l'ensemble suivant :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{a-z}{a-b} \in i\mathbb{R} \right\}$$

Exercice 1. Montrer que $\forall n \geq 2$,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Planche 1.

Question de cours. La première transformation est donnée par la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 3(z+1)-1 \end{array}$$

La seconde par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\pi/2}(z-i)+i \end{array}$$

Ainsi la composée recherchée est

$$g \circ f(z) = g(3(z+1)-1) = i(3z+3-1-i)+i = 3iz+3i+1$$

Exercice 1. On considère l'assertion suivante : $u_n = 2^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. L'assertion est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. On suppose l'assertion vraie au rang $n+1$ et n pour un $n \geq 1$. Montrons qu'elle est vraie pour $n+2$. En effet par hypothèse de récurrence on a

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+1}+1) - 2(2^n+1) = 2^n(3\times 2-2)+3-2 = 2^n(6-2)+1 = 2^n \times 4+1 = 2^{n+2}+1$$

Ainsi l'assertion est vraie pour $n+2$ (et $n+1$). Par récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Planche 2.

Question de cours. Comme le coefficient devant z est différent de 1, alors il s'agit d'une transformation à centre. Le centre w est donné par le point fixe de l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1-i)z - i \end{array}$$

D'où $w = (1-i)w - i$. On en déduit $w = -1$.

Le rapport de la transformation est le module du coefficient devant z et vaut donc $\sqrt{2}$. L'angle de la transformation est l'argument du nombre précédent et vaut $-\pi/4$.

Exercice 1. Montrons déjà le résultat $n = 2$. Soit a, b, c, d des entiers. Il faut trouver e et f deux entiers tels que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = e^2 + f^2$. On pourrait les trouver par tatonnement mais on va les trouver par une autre méthode. À quoi fait penser $a^2 + b^2$? Eh bien à une norme au carré d'un nombre complexe ? On pose $z = a + ib$ et $w = c + id$. Alors

$$|z|^2|w|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Mais en même temps il y a multiplicativité du module $|z||w| = |zw|$. D'où

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |zw|^2 = (e^2 + f^2)$$

où $zw = e + if$. En fait $e = ac - db$ et $f = ad + bc$. Donc e et f sont entiers. On a donc montré le résultat pour $n = 2$.

Montrons le résultat par récurrence. Supposons le résultat vrai pour $n \geq 2$. Soit $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$ des entiers. Par hypothèse de récurrence, il existe e et f des entiers tels que

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = (e^2 + f^2)$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n+1} (a_k^2 + b_k^2) = (e^2 + f^2)(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)$$

Or le résultat est aussi vrai pour $n = 2$, donc il existe g, h des entiers tels que

$$\prod_{k=1}^{n+1} (a_k^2 + b_k^2) = (g^2 + h^2)$$

et on a démontré le résultat par récurrence.

Planche 3.

Question de cours. Soit $z \in \mathbb{C}$ dans l'ensemble. Alors $arg(a - z) = arg(a - b) \pm \pi/2$. Donc si on note A, B, M les points correspondants aux affixes, alors (AM) est perpendiculaire à (AB). Donc l'ensemble considéré est la perpendiculaire à (AB) en A.

Exercice 1. On considère pour $n \geq 2$, l'assertion $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
Elle est vraie pour $n = 2$, en effet $1 + 1/4 > 6/5$ car $5/4 > 6/5$. Supposons donc l'assertion vraie pour un $n \geq 2$. Montrons là pour $n + 1$.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Il reste à montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$. On considère pour ce faire la différence. Après d'épiques calculs on devrait obtenir

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{n^2 + 2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} > 0$$

Ce qui nous permet de conclure que l'assertion est vraie au rang $n + 1$ et qu'elle est donc vraie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.