Colle 7 $\sim$ 10 novembre 2015 $\sim$ Colleur : Isenmann $\sim$ MP*1 $\sim$ Trinôme : 3

Planche 1.

Exercice 1. Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

sur $[0,1]$ avec un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f_n : [a,b] \to (E, ||.||)$ des fonctions k-lipschitziennes avec $k \geq 0$. On suppose que f_n converge simplement vers f. Montrer que f est k-lipschitzienne et qu'il y a convergence uniforme sur $[a,b]$.

Planche 2.

Exercice 1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ qui converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit (x_n) une suite de $[a,b]$ qui converge vers x. Montrer que $f_n(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2. Soit P_n une suite de fonctions polynomiales réelles qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est polynomiale.

Planche 3.

Exercice 1. Étudier la convergence sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$$

Exercice 2. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions décroissantes et continues telles que f_n converge simplement vers 0. Montrer qu'il y a convergence uniforme.