

Planche 1.

Echauffement. Calculer les coefficients de Bezout de 16 et 26.

Contre-exemple. Montrer que le théorème de Fermat est faux si on ne suppose pas p premier.

Exercice 1. Calculer le reste de la division euclidienne de $(11^{11})^{11}$ par 7.

Planche 2.

Echauffement. Calculer le 7ème nombre premier.

Contre-exemple. Trouver un contre exemple au lemme de Gauss si on ne suppose pas a premier à b .

Exercice 1. Combien y a t'il d'entiers naturels non nuls n plus petits que 400 tels que $\text{pgcd}(n, 34) = 17$?

Planche 3.

Echauffement. Calculer le pgcd de 420, 384 et 33.

Contre-exemple. Montrer que l'assertion suivante est fausse. Si a, b sont deux entiers tels qu'il existe u, v entier et d un entier tels que $au + bv = d$ alors $\text{pgcd}(a, b) = d$.

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $7x + 5y = 3$.

Solutions - Planche 1.

Echauffement. On applique l'algorithme d'Euclide. On a $26 = 16 * 1 + 10$. Puis $16 = 10 * 1 + 6$. Puis $10 = 6 * 1 + 4$. Puis $6 = 4 * 1 + 2$. Puis $4 = 2 * 2 + 0$. Donc le pgcd est 2. On remonte les coefficients :

$$2 = 6 - 4 * 1$$

$$2 = 6 - (10 - 6) * 1 = 2 * 6 - 10$$

$$2 = 2 * (16 - 10) - 10 = 2 * 16 - 3 * 10$$

$$2 = 2 * 16 - 3 * (26 - 16) = 5 * 16 - 3 * 26$$

D'où $\boxed{2 = 5 * 16 - 3 * 26}$.

Contre-exemple. On prend $n = 6$. Alors on a $2^6 \neq 2[6]$. Donc $\boxed{n = 6 \text{ ne vérifie pas la propriété de Fermat}}$.

Exercice 1. On utilise les congruences modulo 7 d'abord. $11 = 4[7]$. D'où $11^2 = 4^2 = 16 = 2[7]$ et $11^3 = 4^3 = 2 * 4 = 8 = 1[7]$. Donc $11^k = 11^u[7]$ où u est le reste de la division euclidienne de k par 3. En effet : $k = 3s + u$ donc

$$11^k = 11^{3s} * 11^u = 11^{3s} * 11^u = 1 * 11^u = 11^u[7]$$

Or $11 = 3 * 3 + 2$, donc $11^{11} = 11^2 = 4^2 = 2[7]$. Il reste donc à calculer $2^{11}[7]$. Or $2^3 = 8 = 1[7]$ donc pareil $2^{11} = 2^{3*3+2} = (2^3)^3 * 2^2 = 2^2 = 4[7]$

D'où $\boxed{(11^{11})^{11} = 4[7]}$.

Solutions - Planche 2.

Echauffement. Faisons le de manière intelligente : 1 n'est pas premier. 2 est premier donc tous les multiples de 2 strictement plus grand que 2 ne sont pas premiers. Donc tous les pairs différents de 2 ne sont pas premiers : on a pas besoin de tester 4, 6, 8, 10, 12. Puis 3 est premier. Pareil tous les multiples différents de 3 ne sont pas premiers, donc on n'a pas besoin de tester 6, 9, 12, 15,

On arrive alors à 5, car pas besoin de tester 4, qui est premier. Puis 6 non, 7 oui est le quatrième. 8, 9, 10 sont exclus par les cas précédents, 11 est premier. 12 non et 13 est premier. Puis 14, 15, 16 ne sont pas premiers.

17 est le septième nombre premier.

Contre-exemple. 2 divise $2 * 3$ où $a = 2$, $b = 2$ et $c = 3$. On a pas $a|c$.

Exercice 1. Soit n un tel entier. Alors 17 divise n et 2 ne divise pas n . Donc n s'écrit $n = 17k$ avec k un entier naturel non nul tel que $17k \leq 400$. Donc $k \leq 400/17$ et donc $k \leq 13 = E(400/17)$. De plus k doit être impair donc $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Réciproquement tous les $n = 17k$ avec un tel k conviennent. Donc il y en a 7 au total.

Solutions - Planche 3.

Echauffement. Calculons de manière astucieuse. 420 et 384 sont des gros nombres alors que 33 c'est juste $3 * 11$. Donc le pgcd des trois nombres contient au plus un 3 et au plus un 11. Il suffit donc juste de voir si 3 divise 420 et 384 ce qui est le cas par division euclidienne. Par contre 11 ne divise pas 420 car $420 = 11 * 38 + 2$. Donc $\boxed{\text{pgcd}(420, 384, 33) = 3}$.

Contre-exemple. Il suffit de prendre $a = 2$, $b = 3$ on a $3 - 2 = 1$ (c'est le théorème de Bezout car 2 et 3 sont premiers entre eux). Donc en multipliant par 2 on obtient : $3 * 2 - 2 * 2 = 2$ mais $\boxed{\text{on a pas } \text{pgcd}(2, 3) = 2}$.

Exercice 1. On trouve les coefficients de Bezout de 7 et 5 pour obtenir une solution particulière : $3 * 5 - 2 * 7 = 1$. Donc $x_0 = -2 * 3$ et $y_0 = 3 * 3$ est une solution particulière de l'équation.

Soit (x, y) une autre solution, alors $7(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0$. Donc par le lemme de Gauss, comme 7 est premier à 5, alors $x - x_0$ est divisible par 5 et donc il existe k un entier tel que $x = x_0 + 5k$. De même il existe un entier k' tel que $y = y_0 + 7k$.

Réciproquement, on vérifie que cela donne bien toutes les solutions.

Donc les solutions sont :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = -6 + 5k \\ y = 9 + 7k \end{cases}$$