Colle 14 ~ 20 janvier 2016 ~ Colleur : Isenmann ~ MP⋆1 ~ Trinôme :

Planche 1.

Exercice 1. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ pour $i \neq j$.

1. Montrer que $p-1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n+1$ vecteurs réunissant ces conditions.

3. Montrer que l'on peut en trouver $n+1$.

Planche 2.

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $f(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ sur $S_n(\mathbb{R})$. Trouver le minimum de f.

Planche 3.

Exercice 1. Soit C un convexe fermé non vide d'un espace euclidien. Soit $a \notin C$.

1. Montrer que la distance de a à C est atteinte en un unique point.

2. Soit h ce point. Montrer que pour tout $x \in C$, on a $\langle h - a, h - x \rangle \leq 0$.

3. Montrer qu'il existe un demi-espace contenant C mais qui ne contient pas a.

Hints

Planche 1. Montrons que $u_1, \ldots, u_{p-1}$ est libre. Supposons $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i u_i = 0$. On sépare suivant que α_i est positif ou non. I c'est les indices positifs J les négatifs. Alors on montre que $||\sum_I \alpha_i u_i||^2$ est négatif. On en déduit que c'est nul tout comme la somme sur J. On conclut en utilisant u_p quand même. On regarde le produit scalaire entre u_p est $\sum_I \alpha_i u_i$ pour conclure que tous les $\alpha_i$sont nuls.

Une famille libre à $p-1$ élements est telle que $p-1 \leq n$.

On prend un base orthonorme $e_1, \ldots, e_n$. On pose $u = -\sum e_i$. On a presque ce qu'on veut. On perturbe donc les e_k : $u_k = e_k + \lambda u$. On montre en calculant les produit scalaire qu'un λ tel que $\lambda < 1/n$ convient.

Planche 2. On interprète f comme la distance de A à M pour la norme canonique sur $M_n(\mathbb{R})$. Reste à projeter A sur $A_n(\mathbb{R})$ qui est l'orthogonal pour $S_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\mathrm{tr}({}^tAB)$.

Planche 3. On montre qu'il existe un tel point en utilisant une suite minimisante. Pour l'unicité : soit h et h' deux points possibles. On pose $u = \frac{h+h'}{2}$ et on montre qu'il est plus proche de a que les deux autres points en bidouillant sur la formule $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$.

Soit $x \in C$. Utilisons la convexité : pour tout $t \in [0,1]$ le point $th + (1-t)x$ doit être plus loin de a que h. On traduit ça en équation en développant avec la même formule qu'avant et puis ça va bugé pour un t.

Faire un dessin dans le plan. Le demi-espace sera déterminé par la direction $h - a$.