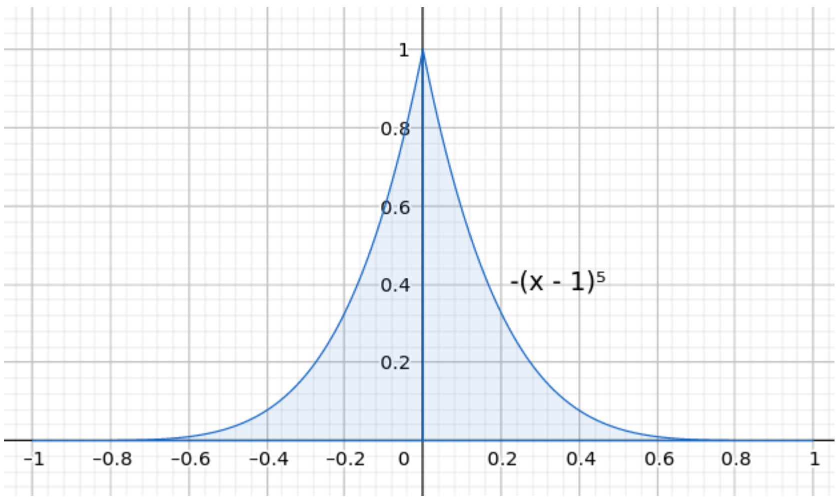
[Analyse2] Entrainement Exam 2022

Exercice 1

On considère la surface en bleue décrite par la fonction $-(x-1)^5$ sur $[0, 1]$ et par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sur $[-1, 0]$.



Calculer l'aire géométrique (donc positive) de cette surface en utilisant un changement de variable.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f(x) = \frac{x^a}{x^{2a}+x^a}$ définie sur $]0, +\infty[$.

a. Montrer que si $a = 0$, alors $f(x)$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. Montrer que si $a < 0$, $f(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ en utilisant un équivalent.

c. Montrer que si $a > 0$, $f(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ en utilisant un équivalent.

d. Montrer que si $a > 0$, $f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ que si $a > 1$ en utilisant un équivalent.

e. En regroupant tous les résultats précédents, à quelle condition sur a la fonction $f(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 3

On considère $f(x) = x \ln(x)$.

a. Quel est l'ensemble de définition de $f(x)$?

b. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 x\ln(x)dx$.

c. Était il possible de prévoir le signe du résultat précédent sans calculer l'intégrale ?

Exercice 4

a. En utilisant le changement de variable $t = e^x + e^{-x}$ calculer $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$.

b. Calculer $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ en utilisant une intégration par parties et une décomposition en éléments simples.

Exercice 5

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

a. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ sur $[0,1]$.

b. En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx$.

c. Calculer $\int_0^1 x^n dx$.

d. Montrer que $\int_0^1 x^n dx$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

e. Montrer que $0 \leq I_n$ pour tout $n \geq 0$.

f. En déduire que I_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6

On considère $f(x) = \frac{-x^3+2x}{x^2-x-2}$.

a. Calculer l'ensemble de définition de f.

b. Décomposer f en éléments simples.

c. Trouver une primitive de f sur son ensemble de définition.

d. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

e. Montrer que $f(x)$ n'est pas intégrable sur $[0,2[$.

Exercice 7

a. Calculer la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+7n+12}$.

b. Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n}{3^{n+1}n}x^n$.

c. Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{n}{4^{n^2}}x^n$.

d. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{2^n}+\frac{1}{n})x^n$.

e. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3+4^n}{n!}x^n$.

f. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{3^n}{2^n})x^n$.

Exercice 8

a. Calculer les développements en séries entières des fonctions suivantes :

$$\ln(1+x)-\ln(1-x) \qquad 3e^{2x} \qquad \frac{1}{1+x}+e^{-x} \qquad -\ln(1+3x)$$

b. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ où f est la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^n}x^n$$

Exercice 9 [difficile]

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une série de rayon de convergence $+\infty$ où (a_n) est une suite inconnue. On suppose que $f'(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Trouver une formule de récurrence pour (a_n) et en déduire une expression de a_n.

Corrigé

Exercice 1

On pose le changement de variable $t = x - 1$. On peut inverser le changement de variable : $x = t + 1$ donc $dx = dt$.

$$\int_0^1 -(x-1)^5 dx = \int_1^0 -t^5 dt = -\int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = [\frac{1}{6}t^6]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Par symétrie, l'aire bleue vaut deux fois l'aire précédente. Donc l'aire bleue vaut $2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

a. Si $a = 0$, alors $f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^b}$ avec $b = 0$ donc $f(x)$ n'est pas intégrable sur $]1, +\infty[$ car $b < 1$ (Riemann). Donc $f(x)$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. Si $a < 0$, alors $x^{2a} + x^a \sim x^a$ (en effet $\frac{x^{2a}+x^a}{x^a} = x^a + 1$ tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$ car $a < 0$). Donc $f(x) \sim \frac{x^a}{x^a} = 1$. Donc $f(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car 1 n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann avec $b = 0$).

c. Si $a > 0$. $x^{2a} + x^a \sim x^a$ (en effet $\frac{x^{2a}+x^a}{x^{2a}} = x^a + 1 \to 0$ lorsque $x \to 0$ car $a > 0$). Donc $f(x) \sim \frac{x^a}{x^a} = 1$. Or 1 est intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann).

d. Si $a > 0$. $x^{2a} + x^a \sim x^{2a}$ (en effet $\frac{x^{2a}+x^a}{x^{2a}} = 1 + x^{-a} \to 0$ lorque $x \to +\infty$ car $-a < 0$). Donc $f(x) \sim \frac{x^a}{x^{2a}} = \frac{1}{x^a}$. Par Riemann, $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

e. $f(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

Exercice 3

a. $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln(x)$ n'est définie que si $x > 0$.

b.

$$\begin{aligned}
\int_t^1 x\ln(x)dx &= [\frac{x^2}{2}\ln(x)]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{t^2}{2}\ln(t) - \int_t^1 \frac{x}{2}dx \\
&= 0 - \frac{t^2}{2}\ln(t) - [\frac{x^2}{4}]_t^1 \\
&= -\frac{t^2}{2}\ln(t) - (\frac{1}{4} - \frac{t^2}{4}) \\
&= -\frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} \to 0 - \frac{1}{4} + 0
\end{aligned}$$

car $t\ln(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$ par croissance comparée. Donc f est intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 x\ln(x)dx = -\frac{1}{4}$.

c. Oui, $\ln(x)$ est négatif sur $]0, 1]$ et x est positif sur $]0, 1]$ donc $f(x)$ est négatif sur $]0, 1]$. Donc si f est intégrable sur $]0, 1]$, alors son intégrale est négatif.

Exercice 4

a. On pose $t = e^x + e^{-x}$ donc $dt = (e^x - e^{-x})dx$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_a^b \frac{dt}{t}$$

avec a et b tel que $a = e^0 + e^{-0} = 2$ et $b = e^1 + e^{-1} = e + 1/e$. Donc

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_2^{e+1/e} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_2^{e+1/e} = \ln(e + 1/e) - \ln(2)$$

b. On pose $u = \ln(1 + x^2)$ et $v' = x$. Donc

$$\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = [\ln(1 + x^2)\frac{x^2}{2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{2x}{1 + x^2} dx = \ln(1 + 1)\frac{1}{2} - 0 - \int_0^1 \frac{2x^3}{1 + x^2} dx$$

Or en cherchant a, b, c, d tels que $2x^3 = (ax + b)(1 + x^2) + (cx + d)$ on trouve que

$$\frac{2x^3}{1 + x^2} = 2x - \frac{2x}{1 + x^2}$$

Comme $1 + x^2$ est décomposé en facteurs irréductibles (car le discriminant est strictement négatif), alors $\frac{2x}{1+x^2}$ est déjà décomposé en éléments simples. Donc une primitive de $\frac{2x^3}{1+x^2}$ est $x^2 - \ln(1 + x^2)$. Donc

$$\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = \frac{\ln(2)}{2} - [x^2 - \ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} - (1 - \ln(2) - (0 - \ln(1))) = \frac{\ln(2)}{2} - 1 + \ln(2) = \frac{3\ln(2)}{2} - 1$$

Exercice 5

a. On étudie la fonction $g(x) = \ln(1 + x) - x$. Il faut montrer que $g(x)$ est négatif sur $[0, 1]$. Pour obtenir les variations de g, on dérive : $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ car $x \in [0, 1]$ et $1 + x > 0$. On en déduit que g est décroissante sur $[0, 1]$. Or $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et $g(1) = \ln(2) - 1 < 0$. Donc g est négatif sur $[0, 1]$. Donc $\ln(1 + x) \leq x$ sur $[0, 1]$.

b. Comme $x^n \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 0$. On en déduit que $\ln(1+x^n) \leq x^n$. Donc $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx$.

c. $\int_0^1 x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

d. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, alors $\int_0^1 x^n dx$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

e. Comme $0 \leq \ln(1 + x^n)$ (car $1 \leq 1 + x^n$) pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 0$, on en déduit que $\int_0^1 0dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$. Donc $0 \leq I_n$.

f. Comme $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, on en déduit que I_n tend vers 0 par le théorème des gendarmes (0 tend vers 0 et $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0).

Exercice 6

a. Comme $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, alors f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

b. On cherche a, b, c, d tels que

$$-x^3 + 2x = (ax + b)(x^2 - x - 2) + (cx + d)$$

On trouve

$$-x^3 + 2x = (-x - 1)(x^2 - x - 2) + (-x - 2)$$

Donc

$$\frac{-x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} = -x - 1 - \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}$$

Or

$$\frac{x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 2}$$

On trouve

$$\frac{x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-1}{3(x + 1)} + \frac{4}{3(x - 2)}$$

Donc

$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{4}{3(x - 2)}$$

c. Donc une primitive de f est $\frac{-x^2}{2} - x + \frac{1}{3}\ln(|x + 1|) - \frac{4}{3}\ln(|x - 2|)$.

d.

$$\int_0^1 f(x)dx = [\frac{-x^2}{2} - x + \frac{1}{3}\ln(|x + 1|) - \frac{4}{3}\ln(|x - 2|)]_0^1 = -\frac{3}{2} - \frac{\ln(2)}{3} + \ln(4)$$

e.

$$\int_0^t f(x)dx = [\frac{-x^2}{2} - x + \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{4}{3}\ln(|x-2|)]_0^t = \frac{-t^2}{2} - t + \frac{1}{3}\ln(t+1) - \frac{4}{3}\ln(2-t) - (0^2 - 0 + \frac{1}{3}\ln(0+1) - \frac{4}{3}\ln(2-1))$$

Or $\frac{-t^2}{2} - t$ tend vers $-2^2/2 - 2 = -4$ lorsque $t \to 2$. Or $\ln(t + 1) \to \ln(3)$ lorsque $t \to 2$. Or $\ln(2 - t) \to -\infty$ lorsque $t \to 2$. Donc $\int_0^t f(x)dx \to +\infty$ lorsque $t \to 2$ et f n'est pas intégrable sur $[0, 2[$.

Exercice 7

a. Comme $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$, alors on cherche a et b des réels tels que

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{a}{x + 3} + \frac{b}{x + 4}$$

On trouve

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 4}$$

Donc

$$\frac{1}{n^2 + 7n + 12} = \frac{1}{n + 3} - \frac{1}{n + 4}$$

On pose $a_n = \frac{1}{n+3}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+3} = \frac{1}{n+4}$. Donc $u_n = a_n - a_{n+1}$ (où $u_n = \frac{1}{n^2+7n+12}$). Comme a_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12} = a_0 - \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{0 + 3} - 0 = \frac{1}{3}$$

b. On pose $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}n}$. Donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}(n+1)}}{\frac{2^n}{3^{n+1}n}} = \frac{2^{n+1}3^{n+1}n}{3^{n+2}2^n(n+1)} = \frac{2n}{3(n+1)} \to \frac{2}{3}$$

Donc le rayon de convergence est 3/2.

c. On pose $a_n = \frac{n}{4^{n^2}}$. Donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{4^{(n+1)^2}}}{\frac{n}{4^{n^2}}} = \frac{(n+1)4^{n^2}}{n4^{(n+1)^2}} = \frac{n+1}{n}\frac{4^{n^2}}{4^{n^2+2n+1}} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{4^{2n+1}} \to 0$$

Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$.

d.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{2^n}+\frac{1}{n})x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{2^n}x^n+\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}4(\frac{x}{2})^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n = 4((\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n)-1)-\ln(1-x) = 4(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-1)-\ln(1-x)$$

e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3+4^n}{n!}x^n = 3\sum_{n=0}^{=\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(4x)^n = 3\exp(x)+\exp(4x)$$

f.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{3^n}{2^n})x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3x}{2})^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} + (\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{3x}{2})^n - 1) = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + (\frac{1}{1-\frac{3x}{2}} - 1)$$

$$= \frac{-1}{x}((\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n) - (-x)) + (\frac{1}{1-\frac{3x}{2}} - 1) = \frac{-1}{x}(\ln(1-x)+x) + \frac{1}{1-\frac{3x}{2}} - 1$$

Exercice 8

a.

$$\ln(1+x)-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}x^n$$

$$3e^{2x} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\cdot 2^n}{n!}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}+e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n!})x^n$$

$$-\ln(1+3x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(3x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n}x^n$$

b. Pour le premier cas :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{0^2 + 2 \cdot 0}{0 + 1} = 0 \\
f'(0) &= 1! \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} \\
f''(0) &= 2! \frac{2^2 + 2 \cdot 2}{2 + 1} = 2\frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Pour le second cas :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{(0!)^2}{2^0} = \frac{1}{1} = 1 \\
f'(0) &= 1! \frac{(1!)^2}{2^1} = \frac{1}{2} \\
f''(0) &= 2! \frac{(2!)^2}{2^2} = 2\frac{2^2}{2^2} = 2
\end{aligned}$$

Exercice 9

Comme $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$ par décalage d'indice, alors par identification avec $f(x)$ (car $f'(x) = f(x)$), on en déduit que

$$a_{n+1}(n+1) = a_n$$

pour tout $n \geq 0$. Donc $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$.

On montre par récurrence que $a_n = a_0 \frac{1}{n!}$.