Examen de première session

Calculatrices non programmables ou avec mode examen autorisées.
La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision du raisonnement.

Exercice 1. [Généralités]

1. Faire un graphique qui corresponde à la phrase suivante : "La fonction f est paire sur $[-1,1]$, concave sur $[-1,1]$, discontinue en -1 et en 1 et est constante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$."

2. Traduire la phrase suivante à l'aide de quantificateurs et de symboles mathématiques : "Pour tout nombre réel M, il existe deux réels x et y tels que x est inférieur à y et tels que f est supérieure à M entre x et y".

Exercice 2. [Optimisation]
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x\sqrt{2x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Calculer f' et vérifiez que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f''(x) = \frac{-3x-2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$.

3. Montrer que f est strictement concave sur son domaine de définition.

4. Vérifier que $-\frac{1}{3}$ est un point critique.

5. Donner les extrema de f en précisant leur nature (min/max ? local/global ?)

Exercice 3. [Développements limités et applications]
Considérons la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Déterminer le développement limité de e^x à l'ordre 2 en $x = 0$.

2. Déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2 en $x = 0$.

3. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ en $x = 0$.

4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 ainsi que sa position par rapport à la courbe.

5. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

6. Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre -2 de $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 4. [Monotonie et convergence d'une suite]
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.

2. Montrer que la suite est décroissante.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

Exercice 5. [Convergence d'une série]
La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

On donne l'égalité $u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3})$.

1. Donner un équivalent de (u_n) au voisinage de $+\infty$.

2. Justifier que la série $\sum u_n$ est convergente.

3. Déterminer sa somme.

Exercice 6. [Primitive d'une fraction rationnelle]
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2-2x+1}$.

1. Vérifier que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et en déduire l'ensemble de définition de f.

2. Décomposer la fonction f en éléments simples.

3. En déduire l'expression d'une primitive de f sur son ensemble de définition.

Exercice 7. [Intégrations par partie]

1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_1^2 e^x \ln(x) dx$

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_{-1}^1 (x+1)e^x$.

Exercice 8. [Changement de variable]
À l'aide du changement de variable $\varphi(x) = e^x$, calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$.