Modèles stochastiques en finance MAP 552
École Polytechnique
Département de Mathématiques Appliquées

TP 2.1
Stratégie de couverture de Black-Scholes

Ce TP est associé au Chapitre 6 du polycopié de cours. On définit $T > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on utilisera $\Delta T := T/n$ et $t_i^n := i\Delta T$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$. On introduit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et le processus

$$S_t := S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0.$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont respectivement la tendance et la volatilité du processus.

Nous rappelons que, dans le modèle de Black-Scholes, le prix en Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) d'une option d'achat européenne sur l'actif sous-jacent, dont le processus de prix est $(S_t)_{t \geq 0}$, est donné par :

$$BS(S_0, K, T) = S_0 \mathbf{N}\left(d_+(S_0, Ke^{-rT}, \sigma^2 T)\right) - Ke^{-rT}\mathbf{N}\left(d_-(S_0, Ke^{-rT}, \sigma^2 T)\right),$$

où r est le taux sans risque instantané, K le prix d'exercice et T la maturité, et

$$d_\pm(s, k, v) := \frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)}{\sqrt{v}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v}.$$

La stratégie de couverture optimale est de détenir $(\Delta_t)_{0 \leq t \leq T}$ actions de prix $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ définie par

$$\Delta_t(S_t, K) := \mathbf{N}\left(d_+(S_0, Ke^{-r(T-t)}, \sigma^2(T-t))\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

On rappelle que pour stocker $m \geq 1$ trajectoires discrètes d'un processus stochastique, on le fait dans une matrice de `numpy` de dimensions $(n+1) \times m$ (on peut utiliser une boucle sur une dimension, mais pas deux). Remarque : on choisit $(n+1) \times m$ plutôt que $m \times (n+1)$ pour des raisons de performances liées à comment les matrices sont stockées en mémoire dans `numpy`. Si vous souhaitez définir les matrices en $m \times (n+1)$, lors de la définition de la matrice, il faut ajouter l'option `order='F'`.

Une partie des points sera accordée à la présence de commentaires et à la bonne vectorisation du code sur au moins une dimension.

1. Ecrivez une fonction qui permet de simuler $m = 10000$ trajectoires, sur votre grille discrète avec $n = 1000$ du processus $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ c'est-à-dire m trajectoires de $(S_{t_i^n})_{0 \leq i \leq n}$. On utilisera $T := 1.5, S_0 := 100, \sigma := 0.3$ et pour trois valeurs différentes $\mu \in \{0.02, 0.05, 0.45\}$ (il y a donc trois matrices). Calculez les moyennes, variances correspondantes et commentez.
2. On note

$$e^{-rT} X_T^n(S, K) := BS(S_0, K, T) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_{t_{i-1}^n}(S_{t_{i-1}^n}, K)\left(e^{-rt_i^n} S_{t_i^n} - e^{-rt_{i-1}^n} S_{t_{i-1}^n}\right)$$

   (a) Simulez $m = 10000$ réalisations de $X_T^n(S, K)$ pour chacune des trois valeurs de μ. On prendra $r = 0.05$. On utilisera $K \in \{80, 82, 84, \dots, 120\}$.

(b) Calculez la moyenne empirique et la variance empirique de ces trois variables aléatoires et commentez.

(c) Calculez les gains et pertes correspondantes :

$$PL_T^n(S, K) := X_T^n(S, K) - (S_T - K)^+.$$

(d) Pour chaque valeur de μ, affichez la moyenne et la variance empirique de $PL_T^n(S, K)$ en fonction de K. Refaites avec un $n = 100$ plus petit et comparez.