Capítulo 2

FUNÇÕES VETORIAIS

Neste capítulo introduzimos as funções vetoriais. As funções vetoriais são uma grande fonte de aplicações em diversas Ciências. Por exemplo, as curvas parametrizadas e os campos de vetores são funções vetoriais importantes.

2.1 Funções Vetoriais

Seja $n \geq 1$, denotemos o espaço vetorial euclidiano de dimensão n, por;

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots\ldots \mathbb{R}, \quad n\text{-vezes}$$

e por:

$$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots\ldots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e_n}\}$$

a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1. Sejam $n \geq 1$ e $m \geq 1$. Uma **função vetorial**:

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é uma regra que associa a cada ponto $\mathbf{u} \in A$ um único vetor $F(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m$.

Observação 2.1. Analogamente como no caso de uma variável:

1. O conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ onde F é definida é chamado **domínio** de F e é denotado por $Dom(F)$.

2. O conjunto $\{F(\mathbf{u}) \,/\, u \in Dom(F)\} \subset \mathbb{R}^m$ é chamado **imagem** de F e é denotado por $F(A)$.

Definição 2.2. Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial:

1. A função F define m funções reais

$$F_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que:

$$\begin{aligned} F(u) &= F_1(u)\,\vec{e}_1 + F_2(u)\,\vec{e}_2 + \ldots\ldots + F_m(u)\,\vec{e}_n \\ &= \big(F_1(u), F_2(u), \ldots\ldots, F_m(u)\big), \quad \forall\, u \in A. \end{aligned}$$

2. As F_i são chamadas **funções coordenadas** de F e denotamos:

$$F = (F_1, F_2, \ldots\ldots\ldots, F_m).$$

3. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. A função $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, diferenciável ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$ se cada uma de suas componentes F_i, é função contínua, diferenciável ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$, respectivamente.

Por exemplo, se $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, então:

1. Seja $a \in U$ tal que $A \subset U$:

$$\lim_{u \to a} F(u) = \big(\lim_{u \to a} F_1(u), \lim_{u \to a} F_2(u), \ldots, \lim_{u \to a} F_m(u)\big),$$

se os limites $\lim\limits_{u \to a} F_i(u)$ existem, para todo $i = 1, \ldots, m$.

2. Denotamos por $F^{(n)}$ a n-ésima derivada de F, se existir e $F^{(0)} = F$:

$$F^{(n)}(u) = (F_1^{(n)}(u), F_2^{(n)}(u), \ldots, F_m^{(n)}(u)),$$

Proposição 2.1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $F, G : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções vetoriais e $f,\, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções . Se F, G, f e g são contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$, respectivamente. Então:

1. $\big[f\,F \pm g\,G\big](u) = f(u)\,F(u) \pm g(u)\,G(u)$, para todo $u \in A$.

2. $\big[F \cdot G\big](u) = F(u) \cdot G(u)$, para todo $u \in A$.

3. $\big[F \times G\big](u) = F(u) \times G(u)$, para todo $u \in A$ e $m = 3$.

São contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$, respectivamente.

Prova: Exercício.

■

Observação 2.2. Como todo $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita p é isomorfo a $\mathbb{R}^p$, podemos extender todo o anterior para $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimensão finita.

2.2 Exemplos

[1] Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$F(x, y) = (k\,x, k\,y), \quad k \in \mathbb{R},\; k \neq 0.$$

A função F, tem como funções coordenadas:

$$F_1,\; F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $F_1(x, y) = k\,x$ e $F_2(x, y) = k\,y$, ambas de classe C^k; logo, F é de classe C^k.

Consideremos o disco:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

e a restrição de F:

$$F : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Para todo $(x, y) \in A$, fazemos:

$$\begin{cases} u &= k\,x \\ v &= k\,y, \end{cases}$$

então o par (u, v) satisfaz : $u^2 + v^2 \leq k^2$. Então:

$$F(A) = \{(u, v) \,/\, u^2 + v^2 \leq k^2\},$$

$F(A)$ é um disco fechado de raio k.

Este tipo de função é chamada de dilatação de fator k, se $k > 1$ e contração de fator k, se $0 < k < 1$.

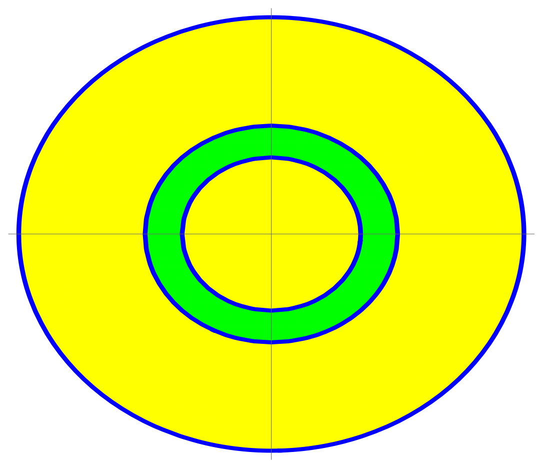

Figura 2.1: A região A para diferentes k

[2] Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$F(x, y, z) = (x, y).$$

Esta função é chamada projeção e é tal que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

[3] Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$F(x, y) = (x, y, 0).$$

Esta função é chamada de inclusão e é tal que $F(\mathbb{R}^2)$ é o plano xy em $\mathbb{R}^3$.

[4] Seja $F : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$F(x,y) = (x\,cos(y), x\,sen(y), y),$$

onde o domínio de F é a faixa $A = [0,+\infty) \times [0, 6\,\pi]$.

A imagem por F do segmento de reta $x = a$, $a \in [0,+\infty)$ para $0 \le y \le 6\,\pi$ é a curva:

$$\begin{cases} u = a\,cos(y) \\ v = a\,sen(y) \\ w = y; \qquad 0 \le y \le 6\,\pi. \end{cases}$$

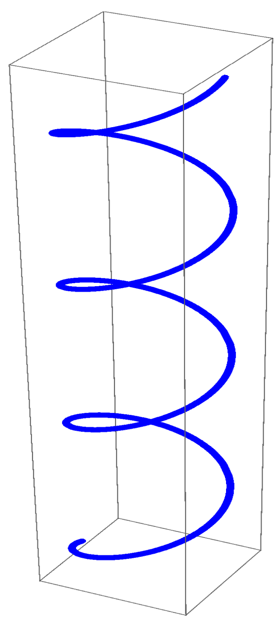

Figura 2.2: Exemplo [5]

[5] Seja o quadrado $D^* = [0,1] \times [0,1]$ e:

$$\begin{aligned} T : D^* &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longrightarrow (u+v, u-v). \end{aligned}$$

Determinemos $T(D^*)$.

Fazendo:

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u - v, \end{cases}$$

então:

$$\begin{cases} u = 0 & \Longrightarrow y = -x \\ v = 0 & \Longrightarrow y = x \\ u = 1 & \Longrightarrow y = 2 - x \\ v = 1 & \Longrightarrow y = x - 1. \end{cases}$$

A região $D = T(D^*)$ é a região do plano xy limitada pelas curvas

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = x - 2 \quad \text{e} \quad y = 2 - x.$$

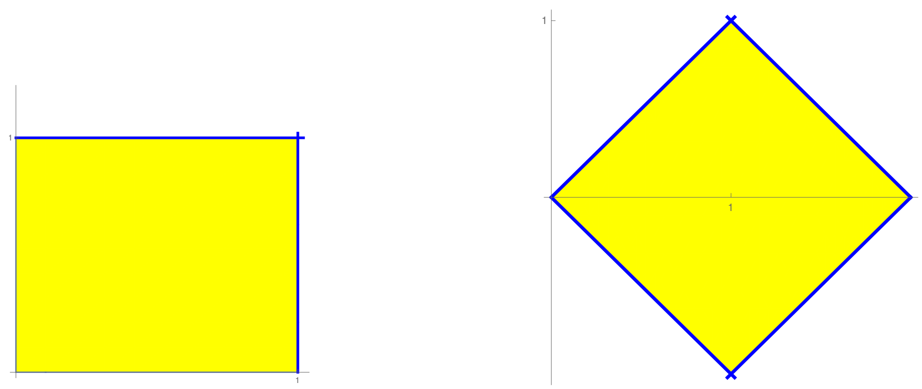

Figura 2.3: Gráficos de D^* e D, respectivamente

[6] Seja D^* a região limitada pelas curvas:

$$u^2 - v^2 = 1, \quad u^2 - v^2 = 9, \quad u\,v = 1 \quad \text{e} \quad u\,v = 4$$

no primeiro quadrante e:

$$\begin{aligned} T : D^* &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow (u^2 - v^2, u\,v). \end{aligned}$$

Determinemos $T(D^*) = D$.

Fazendo:

$$\begin{cases} x = & u^2 - v^2 \\ y = & u\,v; \end{cases}$$

então:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 & \Longrightarrow x = 1 \\ u^2 - v^2 = 9 & \Longrightarrow x = 9 \\ u\,v = 1 & \Longrightarrow y = 1 \\ u\,y = 4 & \Longrightarrow y = 4. \end{cases}$$

D é a região limitada por estas retas (T é injetiva):

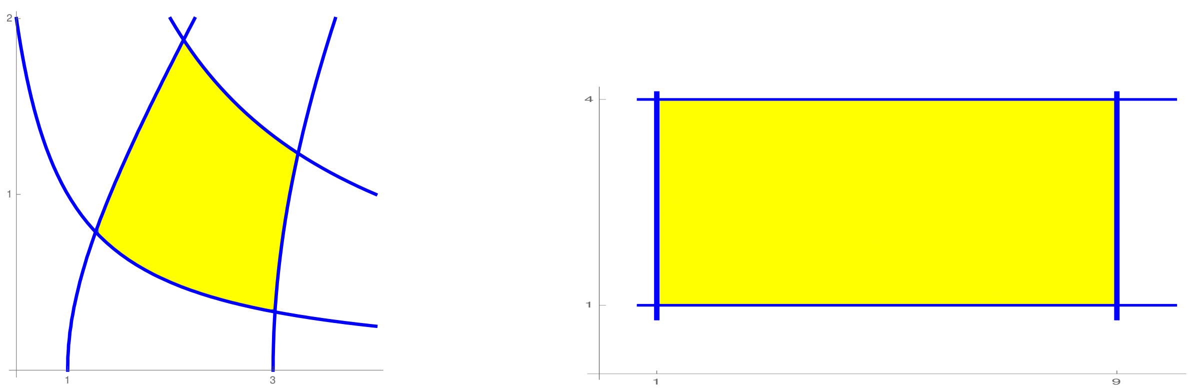

Figura 2.4: Gráficos de D^* e D, respectivamente

Observação 2.3. Outros exemplos importantes de funções vetoriais, são as mudanças e coordenadas. Utilizando as notações usuais das mudanças de coordenadas. Assim, chamamos as funções vetoriais que determinam as mudanças de variáveis de transformações.

Seja $A^* \subset \mathbb{R}^n$ uma região elementar em $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Denotamos a função ou transfomação vetorial, por:

$$T : A^* \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que: $T(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n))$, também denotadas por:

$$\begin{cases} x_1 &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n &= f_n(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{cases}$$

onde cada : $f_i : A^* \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Denotemos a imagem de A^* por T como $A = T(A^*)$.

Observação 2.4. A seguintes notações sã usualmente utilizadas:

1. Para $n = 2$, T é uma transformação do plano uv no plano xy, e:

$$\begin{cases} x = & x(u, v) \\ y = & y(u, v), \quad (u, v) \in A^*. \end{cases}$$

2. Para $n = 3$, T é uma transformação do do espaço uvw no espaço xyz, e:

$$\begin{cases} x = & x(u, v, w) \\ y = & y(u, v, w) \\ z = & z(u, v, w), \quad (u, v, w) \in A^* \end{cases}$$

3. Lembramos que uma boa mudança de coordenadas deve ser diferenciável e injectiva.

Exemplo 2.1.

[1] **Mudança Linear**: A mudança linear é definida pela seguinte transformação:

$$T(u, v) = (a_1\, u + b_1\, v,\; a_2\, u + b_2\, v),$$

onde, $a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \neq 0$. Equivalentemente:

$$\begin{cases} x = & x(u, v) = a_1\, u + b_1\, v \\ y = & y(u, v) = a_2\, u + b_2\, v; \end{cases}$$

Observação 2.5. Não é difícil ver que as inversas da transformação T, são:

$$\begin{cases} u = & u(x,y) = \dfrac{b_2\,x - b_1\,y}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ \\ v = & v(x,y) = \dfrac{-a_2\,x + a_1\,y}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases},$$

Por exemplo, seja A a região limitada pelas curvas $y - 2\,x = 2$, $y + 2\,x = 2$, $y - 2\,x = 1$ e $y + 2\,x = 1$.

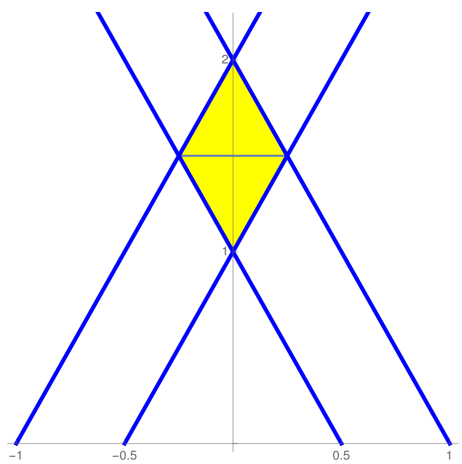

Figura 2.5: Região D

A presença dos termos $y + 2\,x$ e $y - 2\,x$ sugerem a seguinte mudança:

$$\begin{cases} u & = y + 2\,x \\ v & = y - 2\,x. \end{cases}$$

A^* é a região limitada pelas seguintes curvas: $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ e $v = 2$.

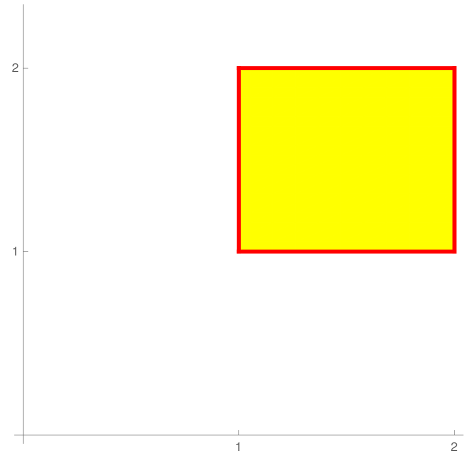

Figura 2.6: Região D^*

[2] **Mudança Polar de Coordenadas** Um ponto $P = (x, y)$ em coordenadas retangulares tem coordenadas polares (r, θ) onde r é a distância da origem a P e θ é o ângulo formado pelo eixo dos x e o segmento de reta que liga a origem a P.

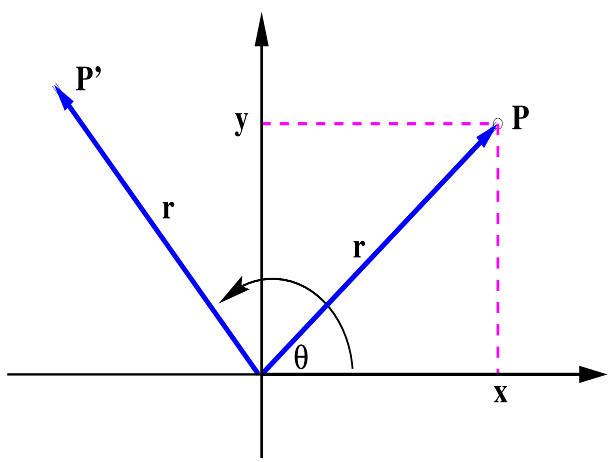

Figura 2.7: Mudança polar de coordenadas

A relação entre as coordenadas (x, y) e (r, θ) é dada por:

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \theta &= arctg\Big(\dfrac{y}{x}\Big), \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} x = & r\,cos(\theta) \\ y = & r\,sen(\theta); \end{cases}$$

logo:

$$T(r,\theta) = (r\,cos(\theta), r\,cos(\theta)).$$

Esta mudança é injetiva em:

$$A^* = \{(r,\theta)/r > 0,\, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\},$$

com θ_0 =constante.

Sejam $a > 0$ e região A, limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$, em coordenadas polares é dada por:

$$A^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \theta \leq 2\,\pi\} = [0,a] \times [0,2\,\pi].$$

O cilindro circular reto de raio a, em coordenadas cartesianas é definido como o seguinte conjunto:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\, x^2 + y^2 = a^2,\, a \geq 0\};$$

em coordenadas polares:

$$C^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3/r = a,\, 0 \leq \theta \leq 2\,\pi\}.$$

[3] **Coordenadas Cilíndricas**: Se $P = (x,y,z)$ é um ponto no espaço xyz, suas coordenadas cilíndricas são (r,θ,z), onde (r,θ) são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e são definidas por:

$$\begin{cases} x = & r\,cos(\theta), \\ y = & r\,sen(\theta), \\ z = & z, \end{cases}$$

ou, explicitamante $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = z$ e:

$$\theta = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x,\, y > 0, \\ \\ \pi + arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0, \\ \\ 2\pi + arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0,\, y < 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ quando $y > 0$ e $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ quando $y < 0$. Se $x = y = 0$, θ não é definido.

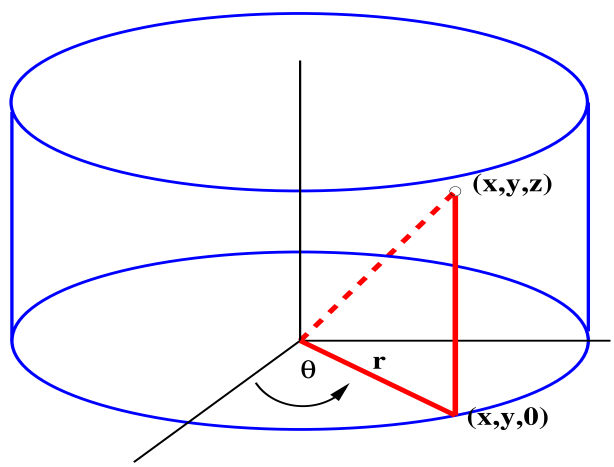

Figura 2.8: Coordenadas cilíndricas

Por exemplo, o cone com base num disco D de raio 1.5 centrado na origem e altura 3. Em coordenadas cilíndricas:

$$z = z, \quad 0 \le r \le \frac{3}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\,\pi$$

logo, o cone em coordenadas cilíndricas:

$$S = \{r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / \, 0 \le r \le \frac{3}{2},\, 0 \le \theta \le 2\,\pi,\, 0 < z < 3\}.$$

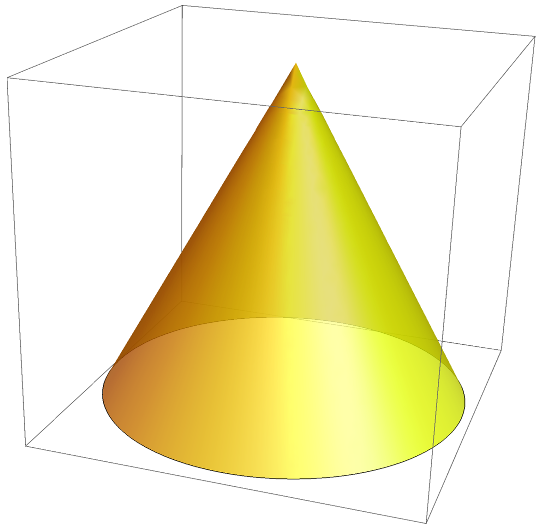

Figura 2.9: O cone do exemplo

[4] **Coordenadas Esféricas** Seja $P = (x, y, z)$ um ponto no espaço xyz. Suas coordenadas esféricas são (ρ, θ, ϕ) onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(x, y, 0)$ e ϕ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem:

$$\begin{cases} x = & \rho\, cos(\theta)\, sen(\phi) \\ y = & \rho\, sen(\theta)\, sen(\phi) \\ z = & \rho\, cos(\phi), \end{cases}$$

onde:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 \leq \theta < 2\,\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi, \end{cases}$$

o que define uma região no espaço $\rho\,\theta\,\phi$.

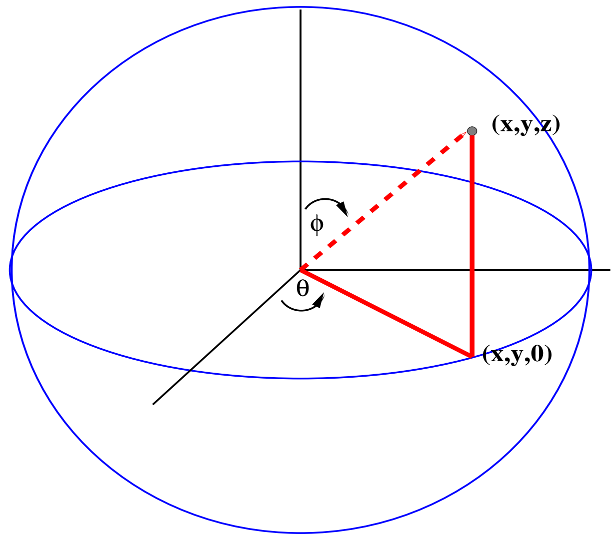

Figura 2.10: Coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas uma esfera de raio a, centrada na origem é:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / \rho = a,\, 0 \le \phi \le \pi,\, 0 \le \theta \le 2\,\pi\}.$$

Os cones circulares com eixos coincidentes com o eixo dos z são caracterizados por:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \rho \in [0, +\infty),\, \phi = c_0,\, 0 \le \theta \le 2\,\pi\},$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$.

Casos particulares:

1. Se $c_0 = 0$ e $\phi = 0$, S representa o semi-eixo positivo dos z.
2. Se $c_0 = \pi$ e $\phi = \pi$, S representa o semi-eixo negativo dos z.
3. Se $c_0 = \dfrac{\pi}{2}$ e $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, S representa o plano xy.
4. Se $0 < c_0 < \dfrac{\pi}{2}$ e $\phi = c_0$, o cone "abre"para cima.
5. Se $\dfrac{\pi}{2} < c_0 < \pi$ e $\phi = c_0$, o cone "abre"para baixo.

Observação 2.6. Nosso interesse nestas notas é estudar com alguma profundidade as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. As primeiras são chamadas curvas ou caminhos e as segundas campos de vetores.

2.3 Exercícios

1. Seja $F(t) = (\sqrt{1-t^2}, cos(t-1), \dfrac{1}{t^3-t})$:

   (a) Determine o domínio de F

   (b) Calcule: $\lim\limits_{t \to 1} F(t)$

   (c) Calcule: $F''(1)$

   (d) Calcule: $\|F'(1)\|$ e $\|F''(1)\|$.

2. Seja $F(x,y,z) = (\sqrt{x-1}, e^{2yz}, \sqrt{ln(x^2+y^2+z)})$:

   (a) Determine o domínio de F

   (b) Calcule: $\lim\limits_{(x,y,z) \to (1,0,1)} F(x,y,z)$

   (c) Calcule: $F''(1,1,1)$

   (d) Calcule: $\|F'(1,1,1)\|$ e $\|F''(1,1,1)\|$.

3. Verifique que:

   (a) $\big[F \pm G\big]'(u) = f(u)\, F'(u) \pm g(u)\, G'(u)$

   (b) $\big[F \cdot G\big]'(u) = F'(u) \cdot G(u) + F(u) \cdot G'(u)$

   (c) $\big[F \times G\big]'(u) = F'(u) \times G(u) + F(u) \times G'(u)$

4. Verifique que:

   (a) $\big[F \pm G\big]'(u) = f(u)\, F'(u) \pm g(u)\, G'(u)$

   (b) $\big[F \cdot G\big]'(u) = F'(u) \cdot G(u) + F(u) \cdot G'(u)$

   (c) $\big[F \times G\big]'(u) = F'(u) \times G(u) + F(u) \times G'(u)$

5. Sejam $F(t) = (t^4 + 3\,t^2, 5\,t^3 - t, 8\,t^5 - 5\,t)$ e $G(t) = (t^2 + 2\,t, t^2 - t, t^3 - 3\,t)$, calule:

   (a) $\big[F \cdot G'\big]'(t)$

   (b) $\big[F \times F'\big]'(t)$

   (c) $\big[F' \times G'\big]'(t)$

   (d) $\|\big[F \times F'\big]'(t)\|$

   (e) $\|\big[F' \times G'\big]'(t)\|$

6. Seja o quadrado $A^* = [0,1] \times [0,1]$ e:

$$\begin{aligned} T : A^* &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longrightarrow (2\,u - v, u + 2\,v). \end{aligned}$$

   Determine $T(A^*)$.

7. Seja D a região limitada pelas curvas $y = 2\,x$, $y = x$, $y = 2\,x - 2$ e $y = x + 1$. Utilzando coordenadas lineares, determine $T(A^*)$.

8. Seja D a região limitada pelas curvas $y + x = 1$, $y + x = 4$, $x - y = -1$ e $x - y = 1$. Utilzando coordenadas lineares, determine $T(A^*)$.

9. A lemniscata de Bernoulli é uma curva de equação cartesiana: $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$. Verifique que em coordenadas polares fica $r^2 = a^2\,cos(2\theta)$.

10. Seja cilindro C circular reto de raio a, em coordenadas cartesianas determine C em coordenadas polares.

11. Determine em coodenadas polares:

   (a) A região D, limitada por $(x - a)^2 + y^2 \le a^2$

   (b) A região D, limitada por $x^2 + (y - a)^2 \le a^2$

12. Utilize coordenadas cilíndricas para descrever o sólido W é limitado superiormente por $z = 4$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2$, tal que $x = 0$ e $y = 0$.

13. Utilize coordenadas cilíndricas para descrever o sólido W limitado por $x^2 + y^2 = 1$,
$z = 1 - x^2 - y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

14. Utilize coordenadas esféricas para descreve o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

15. Utilize coordenadas esféricas para descreve o sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.