

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE RIO DE JANEIRO

PRIMEIRA PROVA DE ÁLGEBRA I– 13 de outubro de 2016

NOME DO ALUNO :
TURMA :

INSTRUÇÕES

1. Preencha o cabeçalho acima.
2. A prova deve ser feita sem consulta a apontamentos, cadernos, livros ou colegas.

DURAÇÃO DA PROVA: 1 hora e 30 minutos

B O A P R O V A

1. (valor 2 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\infty, -1 \rangle \cup [0, +\infty \rangle$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1, \\ x-2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Diga se f é sobrejetora, é injetora ou bijetora. Em caso seja bijetora calcular a inversa.

2. (valor 2 pontos) Diga se as expressões de abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique. Em caso afirmativo prove por indução:

(a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{5}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 2,$

(b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$

3. (valor 2 pontos) Para quaisquer conjunto A, B e C , vale:

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C,$

(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$

Dica: Use as regras da lógica para verificar.

4. (valor 2 pontos) Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 1, \\ -x-1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

Fazer o gráfico de g e calcular $g \circ f(x)$.

5. Calcule o numero de elementos de $P(A)$ para os seguintes conjuntos A de abaixo.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \text{ e } x^2 - 4 > 0\}$

(b) Se $A = X - Y$, onde $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, m\}$, com $m < n$.

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} + 4 = x\}$

6. (valor 2 pontos) (opcional) Prove, usando indução matemática, que

$$10^{n+1} - 9n - 10, \quad \text{é múltiplo de 3, para todo } n \geq 1.$$