Otimização Combinatória – parte 3

Professora: Luiza Maria Oliveira da Silva

Método das duas fases

Quando a origem pode não ser vértice da região viável, ou equivalentemente, as variáveis de folga não fornecem uma solução básica inicial, o que fazer?
O problema a seguir ilustra essa situação e indica um procedimento para contornar essa dificuldade.

$$\max Z = -8x1 + x2$$

Sujeito a:

$$3x1 + x2 = 3$$

$$4x1 + 3x2 \geq 6$$

$$x1 + 2x2 \leq 4$$

$$x1 \geq 0 \ \ e \ x2 \geq 0$$

Colocando-se as variáveis de folga F1 e F2, o PPL fica:

$$\max Z = -8x1 + x2$$

Sujeito a:

$$3x1 + x2 \qquad\qquad = 3$$

$$4x1 + 3x2 - F1 \qquad = 6$$

$$x1 + 2x2 \qquad + F2 = 4$$

$$x1, x2, F1 \ e \ F2 \geq 0$$

Como há três equações e quatro variáveis, o número de variáveis básicas é três e de variáveis não básicas é um. Assim, é impossível obter uma solução básica formada pelas variáveis de folga, pois essas são apenas duas. Além disso, se F1 fosse considerada uma variável básica, F1 seria negativa, igual a -6. Nesse caso, isso se deve ao tipo da 2ª restrição ser $\geq$.

Um procedimento que resolve esse tipo de questão é chamado **método das duas fases**. A 1ª fase se resume na busca de um vértice qualquer da região viável. A 2ª fase é a geração de uma sequência de vértices adjacentes que, inicie com aquele obtido na 1ª fase e percorra os vértices, como foi descrito anteriormente, até que o PPL seja resolvido.

A 1ª fase do método é feita utilizando-se um outro PPL construído a partir das restrições do PPL original e de forma que satisfaça às seguintes condições:

- A solução ótima desse novo PPL deve fornecer uma solução básica viável inicial para o PPL original.

- As restrições desse novo PPL devem ser de tal tipo, que forneçam naturalmente uma solução básica viável inicial para o PPL da segunda fase.

Para que um sistema de equações satisfaça essa última condição é necessário que, em cada equação tenha uma variável que não seja variável nas demais equações, e que assuma um valor não negativo ao se anularem as demais variáveis.

O artifício utilizado para contornar essa exigência, com relação às duas primeiras restrições, é introduzir em cada uma dessas restrições uma variável adicional. Sejam a1 e a2 as variáveis introduzidas, respectivamente, na 1ª e na 2ª equações. As restrições para o novo PPL, que atendem às exigências acima, são:

$$3x1 + x2 \quad\quad + a1 \quad = 3$$

$$4x1 + 3x2 - F1 \quad\quad + a2 = 6$$

$$x1 + 2x2 \quad + F2 \quad\quad = 4$$

$$x1, x2, F1, F2, a1 \ e \ a2 \geq 0$$

Uma solução desse sistema só será solução do sistema original se os valores das novas variáveis forem a1 = a2 = 0.

A viabilidade de uma solução, isto é, a1 = a2 = 0, pode ser garantida quando a soma das variáveis a1 + a2 = 0. Assim, as duas condições acima podem ser satisfeitas no seguinte PPL:

$$\min Z_a = a1 + a2$$

Sujeito a:

$$3x1 + x2 \quad\quad + a1 \quad = 3$$

$$4x1 + 3x2 - F1 \quad\quad + a2 = 6$$

$$x1 + 2x2 \quad + F2 \quad\quad = 4$$

$$x1, x2, F1, F2, a1 \ e \ a2 \geq 0$$

Esse novo PPL fornecerá uma solução básica viável para o PPL original, se a solução ótima da 1ª fase for :

$Z_a = a1 + a2 = 0 \rightarrow a1 = a2 = 0$, pois a1 ≥ 0 e a2 ≥ 0.

Na 1ª fase, isto é, na resolução do PPL acima, deseja-se eliminar a1 e a2 tornando-as nulas. Isso é feito para que elas não entrem na 2ª fase, isto é, na solução do PPL original, uma vez que essas variáveis foram criadas somente para operacionalizar a busca de uma solução básica viável para o PPL original.

As variáveis a1 e a2 são chamadas de **variáveis artificiais**. Na prática, a variável artificial deve ser utilizada, em cada restrição que, inicialmente, no PPL original, a restrição for uma equação ou uma inequação do tipo ≥.