Capítulo 1

GEOMETRIA ANALÍTICA E CONJUNTOS ESPECIAIS

Neste capítulo estabeleceremos os conceitos básicos para o estudo do Cálculo em várias variáveis. Não pretendemos fazer um estudo detalhado de vetores ou de Geometria Analítica, mas recomendamos aos leitores, consultar a bibliografia como complemento necessário deste capítulo.

1.1 Espaços Euclidianos

O espaço euclidiano n-dimensional ($n \in \mathbb{N}$) é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}.$$

1. Se $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta coordenada.

2. Se $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ é o plano coordenado.

3. Se $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ é o espaço coordenado tridimensional.

1.2 O Espaço Euclidiano Tridimensional

O espaço euclidiano tridimensional é definido pelo conjunto:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/\, x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, os elementos de $\mathbb{R}^3$ são ternos ordenados.

Observação 1.1. Dados $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) \iff x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{e} \quad z = z_1.$$

Em $\mathbb{R}^3$ podem ser definidas duas operações.

Definição 1.1. Dados (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$, definimos:

1. **Adição de elementos de $\mathbb{R}^3$:**

$$(x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1).$$

2. **Multiplicação de elementos de $\mathbb{R}^3$ por escalares de $\mathbb{R}$:**

$$\beta\,(x, y, z) = (\beta\,x, \beta\,y, \beta\,z).$$

Estas duas operações satisfazem às seguintes propriedades:

Proposição 1.1. Dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ elementos de $\mathbb{R}^3$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$; então:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
4. $\alpha\,(\beta\,\mathbf{x}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{x}$
5. $\beta\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \beta\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}$
6. $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{x}$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot 1 = \mathbf{x}$
8. Existe o elemento: $-\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = 0$.
9. Se $\mathbf{x} = (x, y, z)$, então $-\mathbf{x} = (-x, -y, -z)$

Observação 1.2.

1. Analogamente, estas operações podem ser definidas em $\mathbb{R}^2$.

2. Em geral, um conjunto onde são definidas as operações de adição e multiplicação por um número real (escalar), como na definição anterior, satisfazendo às propriedades anteriores é chamado **espaço vetorial sobre** $\mathbb{R}$ e seus elementos são chamados vetores.

3. Logo, $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial (de dimensão 3) sobre $\mathbb{R}$.

4. De forma análoga, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial (de dimensão 2) sobre $\mathbb{R}$.

1.3 Sistema de Coordenadas Ortogonais no Espaço

Escolhamos três retas mutuamente perpendiculares e denotemos por $\vec{0}$ o ponto de interseção das retas, chamado origem.

Estas retas, ditas eixos coordenados, são designadas como o eixo dos x, eixo dos y e eixo dos z, respectivamente.

Os eixos dos x e dos y formam um plano horizontal e o eixo dos z é ortogonal a este plano. Os planos que contem os eixos coordenados, chamados planos coordenados, são: plano xy se contem os eixos dos x e dos y; plano xz se contem os eixos dos x e dos z e plano yz se contem os eixos dos y e dos z.

Os planos coordenados dividem o espaço em oito partes chamadas octantes. Um terno ordenado de números reais (x, y, z) está associado a um único ponto P do sistema de coordenadas.

A distância do ponto P ao plano yz é a coordenada x de P, a distância do ponto P ao plano xz é a coordenada y de P e a distância do ponto P ao plano xy é a coordenada z de P.

Estas três coordenadas são as coordenadas retangulares do ponto P e determinam uma correspondência um a um entre ternos ordenados e pontos do sistema de coordenadas.

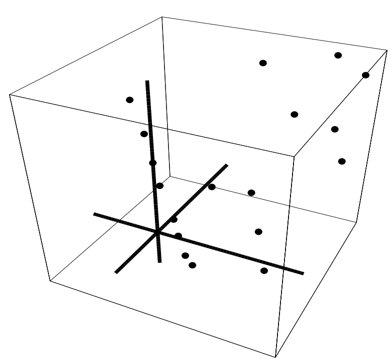
Ao vetor $\vec{0}$ está associado o terno $(0, 0, 0)$.

Observação 1.1.

1. Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são denominados pontos ou vetores, com o seguinte cuidado: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor que tem a origem em $(0, 0, 0)$ e extremidade em (x, y, z).

2. (x, y, z) e é também chamado **vetor posição** de (x, y, z).

3. Para ter uma melhor distinção denotaremos os vetores de forma diferente da dos pontos. Por exemplo $\vec{0} = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo.



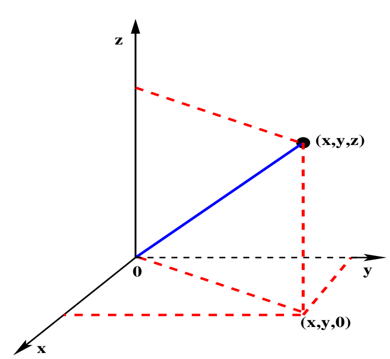


Figura 1.1:

Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ determinado por $\overrightarrow{P_1P_2}$ é:

$$\vec{\mathbf{v}} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

O vetor $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor posição do ponto P.

Exemplo 1.1.

[1] Se $P_1 = (3, 2, 1)$ e $P_2 = (-2, 1, -5)$, determine $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Da definição:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 1, -5) - (3, 2, 1) = (-5, -1, -6).$$

[2] Se $P_1 = (\sqrt{2}, 1, \pi)$ e $P_2 = (2, 1, 2\,\pi)$, determine $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Da definição:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, 2\,\pi) - (\sqrt{2}, 1, \pi) = (2 - \sqrt{2}, 0, \pi).$$

Definição 1.2. Um conjunto de vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ...,$\vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$ são **linearmente independentes (l.i.)**, se qualquer combinação:

$$c_1\,\vec{v_1} + c_2\,\vec{v_2} + \ldots + c_k\,\vec{v_k} = 0, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Caso contrário, são ditos **linearmente dependentes (l.d.)**.

Proposição 1.2.

1. Qualquer conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{0} \in V$, então V é l.d.

2. Se V é um conjunto de vetores l.i, então todo $W \subset V$ é um conjunto de vetores l.i.

3. Se $k > n$, conjunto de vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ...,$\vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$ são l.d.

Prova: Imediata.

■

1.4 Produto Interno ou Escalar

O produto escalar é uma função linear:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad n = 2,\, 3 \\ (u, v) &\longrightarrow u \cdot v \end{aligned}$$

Definição 1.3. Sejam $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. O produto escalar ou interno de $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$, denotado por $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ (ou $< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >$) é definido por:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3$$

Analogamente se define o produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.3. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$, então:

1. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \geq 0$

2. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ se e somente se, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$.

3. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

4. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{0} = 0$.

5. $(\beta\, \vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\beta\, \vec{\mathbf{v}}) = \beta\, (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.

6. $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.

Prova: As provas seguem diretamente da definição.

■

Definição 1.4. O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é **ortogonal** a $\vec{\mathbf{w}}$ se e somente se

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0$$

Observação 1.3.

1. O vetor $\vec{0}$ é o único vetor ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^3$.
2. Se $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{\mathbf{w}} = (x, y)$, então os vetores $(-y, x)$ e $(y, -x)$ são ortogonais a $\vec{\mathbf{w}}$. medskip
3. É comum a seguinte notação para produto escalar:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} =< \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} >$$

1.5 Norma Euclidiana de um Vetor

Definição 1.5. Seja $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. **A norma euclidiana** de $\vec{\mathbf{v}}$ é denotada por $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ e definida por:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

2. O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é dito **unitário se** $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 1$.

Analogamente se define a norma de vetores em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.4.

1. Se $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{0}$ não é unitário, então o vetor definido por:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|},$$

é unitário e tem a mesma direção de $\vec{\mathbf{w}}$.

2. Se θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, então:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{u}}\| \, cos(\theta).$$

Prova:

1. A propriedade 1, pode ser provada diretamente da definição.

2. A segunda, aplicamos a lei dos co-senos ao triângulo da figura, temos:

$$\|\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta).$$

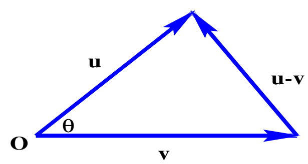


Figura 1.2:

$\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}$; temos:

$$\big(\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}\big)\cdot\big(\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}\big) = \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta);$$

logo,

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta);$$

então,

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta).$$

■

Corolário 1.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Para todo $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ em $\mathbb{R}^n$, temos:

$$|\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\|\ \|\vec{\mathbf{v}}\|.$$

A igualdade é válida se, e somente se $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são l.i. ou um dos vetores é o vetor nulo.
Prova Exercício.

■

Observação 1.4.

1. Três vetores de $\mathbb{R}^3$ tem um destaque especial, a saber:

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0), \quad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1).$$

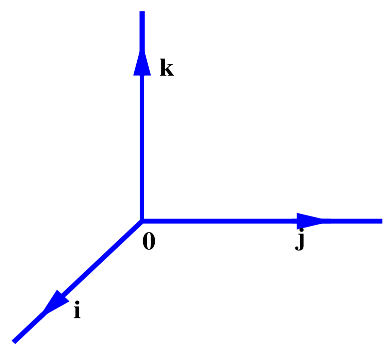


Figura 1.3: Os vetores $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$.

2. Os vetores $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ são unitários e mutuamente ortogonais.

3. O conjunto $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ é dito a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Para todo $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\vec{\mathbf{i}} + v_2\,\vec{\mathbf{j}} + v_3\,\vec{\mathbf{k}}.$$

4. Logo, $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3.

5. Analogamente para $\mathbb{R}^2$, temos que os vetores $\vec{\mathbf{i}} = (1,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1)$ são unitários e mutuamente ortogonais.

6. O conjunto $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Para todo $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\vec{\mathbf{i}} + v_2\,\vec{\mathbf{j}}.$$

7. Logo, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 2.

1.6 Ângulos Diretores e Co-senos Diretores

Os ângulos diretores de um vetor não nulo $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ são os ângulos α, β e γ, no intervalo $[0, \pi]$ que $\vec{\mathbf{v}}$ forma com os eixos coordenados.

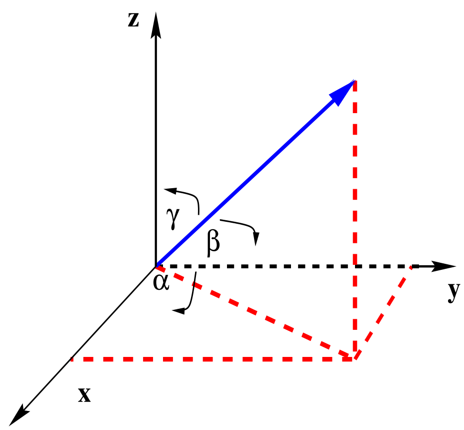


Figura 1.4:

Os co-senos desses ângulos diretores, $cos(\alpha)$, $cos(\beta)$ e $cos(\gamma)$ são chamados co-senos diretores do vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Pelas propriedades do produto escalar, temos:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{i}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{i}}\|} = \frac{v_1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$cos(\beta) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{j}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{j}}\|} = \frac{v_2}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$cos(\gamma) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{k}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{k}}\|} = \frac{v_3}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ fica univocamente determinado conhecendo seu comprimento e seus ângulos diretores. De fato:

$$v_1 = \|\vec{\mathbf{v}}\| \, cos(\alpha), \quad v_2 = \|\vec{\mathbf{v}}\| \, cos(\beta) \quad \text{e} \quad v_3 = \|\vec{\mathbf{v}}\| \, cos(\gamma).$$

Note que:

$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1.$$

Exemplo 1.1.

[1] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-2, 1, 3)$. Determine $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ e os vetores unitários nas direções de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, respectivamente.

Primeiramente calculamos $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = -2 + 2 + 9 = 9$. Agora devemos determinar:

$$\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} \quad \text{e} \quad \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}.$$

$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ e $\|\vec{\mathbf{w}}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$; logo:

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\Big),$$

são os vetores unitários nas direções de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, respectivamente.

[2] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (x, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (x, x, -5)$. Determine o valor de x para que $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ sejam ortogonais.

Da definição $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ são ortogonais se $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$; então, $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = x^2 - 2\,x - 15 = 0$, equação que tem soluções $x = 5$ e $x = -3$; logo: $\vec{\mathbf{v}} = (5, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (5, 5, -5)$ são ortogonais e $\vec{\mathbf{v}} = (-3, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (-3, -3, -5)$ são ortogonais.

[3] Sejam $P_1 = (3, -2, -1)$, $P_2 = (1, 4, 1)$, $P_3 = (0, 0, 1)$ e $P_4 = (-1, 1, -1)$. Determine o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_3P_4}$.

Sejam $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-3, 4+2, 1+1) = (-2, 6, 2)$ e $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{P_3P_4} = (-1, 1, -2)$. O ângulo formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é:

$$cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{w}}\|} = \sqrt{\frac{2}{33}}.$$

[4] Calcule os co-senos diretores de $\vec{\mathbf{u}} = (-2, 1, 2)$.

Como $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 3$, $cos(\alpha) = -\dfrac{2}{3}$, $cos(\beta) = \dfrac{1}{3}$ e $cos(\gamma) = \dfrac{2}{3}$.

1.6.1 Trabalho

Suponha que uma força constante $\vec{F}$ move uma partícula de um ponto P até um ponto Q. O trabalho realizado pela partícula é dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Se a unidade de comprimento é dada em metros e a força é dada em Newtons, o trabalho é dado em Joules (J).

Exemplo 1.2. Uma força dada por $\vec{F} = (1,2,3)$ move uma partícula do ponto $(1,1,1)$ ao ponto $(4,2,3)$; logo:

$$W = (1,2,3)\cdot(3,1,2) = 3+2+6 = 11\ J.$$

1.7 Produto Vetorial

Definição 1.6. Dados $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, denotado por $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ é definido por:

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}},$$

onde $\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ é um determinante de 2×2.

Observação 1.5.

1. Logo, da definição segue:

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \big[v_2\,w_3 - v_3\,w_2\big]\,\vec{\mathbf{i}} + \big[v_3\,w_1 - v_1\,w_3\big]\,\vec{\mathbf{j}} + \big[v_1\,w_2 - v_2\,w_1\big]\,\vec{\mathbf{k}}.$$

2. O produto vetorial é uma função linear:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Proposição 1.5. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então:

1. $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$.

2. $\vec{0} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{0} = \vec{0}$.

3. $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

4. $\vec{\mathbf{v}} \times (\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$.

5. $\beta\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \times \beta\,\vec{\mathbf{w}} = \beta\,(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$.

6. $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{w}}\|\,sen(\theta)$, onde θ é o ângulo formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.

7. Os vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são paralelos se e somente se $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.

8. O vetor $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ é ortogonal aos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.

9. A área do paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|$.

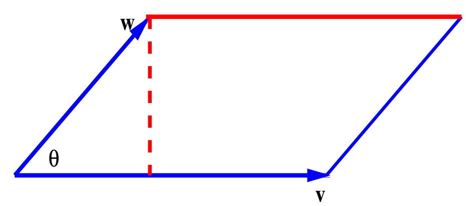


Figura 1.5:

10. **Identidade de Lagrange:** $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\,\|\vec{\mathbf{w}}\|^2 - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})^2$.

11.
$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

12. O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é dado por
$$V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})|.$$

Prova: As provas seguem diretamente das definições. De fato, vejamos por exemplo:

7. Se $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$ o ângulo formado pelos vetores é zero ou π; logo, os vetores são paralelos.

9. A base do paralelogramo é $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ e sua altura é $\|\vec{\mathbf{w}}\|\,sen(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.

10. $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 \, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 \, sen^2(\theta) = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 \, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 \, (1 - cos^2(\theta)) = |\vec{\mathbf{v}}\|^2 \, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})^2$.

12. A área da base é $A = \|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|$; seja θ o ângulo formado por $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$; logo, a altura do paralelepípedo é $h = \|\vec{\mathbf{u}}\| \, |cos(\theta)|$; então:

$$V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})|.$$

■

Exemplo 1.3.

[1] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (-3, -2, 2)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 1, 2)$. Calcule $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{v}}$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{u}}$.

Da definição e das propriedades temos:

$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (-6, 4, -5)$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{v}} = (2, -27, -24)$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = (-13, -18, 2)$.

[2] Calcule $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ e $(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}) \times (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}})$.

Da definição temos: $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = (0, 0, 1) = \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}} = (0, -1, 0) = -\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = (1, 0, 0) = \vec{\mathbf{i}}$ e $(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}) \times (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}) = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}$.

[3] Calcule a área do triângulo determinado por $P = (2, 2, 0)$, $Q = (-1, 0, 2)$ e $R = (0, 4, 3)$.

A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PR}$; logo:

$$A = \frac{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|}{2} = \frac{\|(-10, 5, -10)\|}{2} = \frac{15}{2}.$$

[4] Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{\mathbf{u}} = (2, -3, 4)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, -1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3, -1, 2)$.

Como $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (3, -5, -7)$, temos $V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})| = |-7| = 7$.

[5] Determine o valor de k tal que $\vec{\mathbf{u}} = (2, -1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, -3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3, k, 5)$ sejam coplanares.

Se $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são coplanares, então, $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = \vec{0}$; caso contrário, determinariam um paralelepípedo e, portanto, os vetores não poderiam ser coplanares.

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (10 + 3\,k, -14, k - 6);$$

logo, $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = 7\,k + 28$; resolvendo $7\,k + 28 = 0$, temos $k = -4$.

1.7.1 Torque

Se uma força $\vec{F}$ age num ponto de um corpo rígido, de vetor posição $\vec{r}$, então essa força tende a girar o corpo em torno de um eixo que passa pela origem do vetor posição e é perpendicular ao plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$. O vetor torque (relativo à origem) é dado por;

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

O torque fornece uma medida do efeito de um corpo rígido ao rodar em torno de um eixo. A direção de $\vec{\tau}$ indica o eixo de rotação.

Exemplo 1.4.

[1] Uma força $\vec{F} = (2,5,8)$ age num ponto de um corpo rígido, de coordenadas $(1,1,2)$. Calcule o torque.

Da definição $\vec{r} = (1,1,2)$; logo, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (1,1,2) \times (2,5,8) = (-2,-4,3)$. A direção de $(-2,-4,3)$ indica o eixo de rotação.

[2] Um parafuso é apertado aplicando uma força de $300\,N$ com uma chave de $0.45\,m$ de comprimento fazendo um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$ como na figura. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

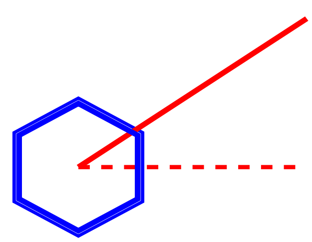


Figura 1.6:

Comos $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \|\vec{r}\|\,\|\vec{F}\|\,sen(\alpha)$; temos que $\|\vec{r}\| = 0.45$, $\|\vec{F}\| = 300$ e $sen\big(\dfrac{\pi}{4}\big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, temos, $\|\vec{\tau}\| = 67.5\,\sqrt{2}\,J$.

1.8 Distância em $\mathbb{R}^3$

Definição 1.7. Sejam $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pontos do $\mathbb{R}^3$.

1. A distância entre P_1 e P_2 é denotada e definida por:

$$d_0(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

2. Em particular, se $P = (x, y, z)$:

$$d_0(\mathbf{0}, P) = \|\overrightarrow{0P}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Proposição 1.6. Sejam P_1, P_2 e P_3 pontos do $\mathbb{R}^3$, então:

1. $d_0(P_1, P_2) > 0$

2. $d_0(P_1, P_2) = 0 \Longleftrightarrow P_1 = P_2$

3. $d_0(P_1, P_2) = d_0(P_2, P_1)$,

4. **Desiguladade triangular:**

$$d_0(P_1, P_3) \leq d_0(P_1, P_2) + d_0(P_2, P_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \|\overrightarrow{P_1P_3}\| \leq \|\overrightarrow{P_1P_2}\| + \|\overrightarrow{P_2P_3}\|.$$

Prova: Segue diretamente da definição.

■

1.9 Retas

Sejam $P = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto e $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor em $\mathbb{R}^3$. A reta que passa pelo ponto P e tem direção $\vec{\mathbf{v}}$ é dada, parametricamente, por:

$$P(t) = P + t\,\vec{\mathbf{v}}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Em coordenadas:

$$\begin{cases} x(t) = & x_1 + t\,v_1 \\ y(t) = & y_1 + t\,v_2 \\ z(t) = & z_1 + t\,v_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, vamos obter a equação da reta que passa por P_1 e P_2.

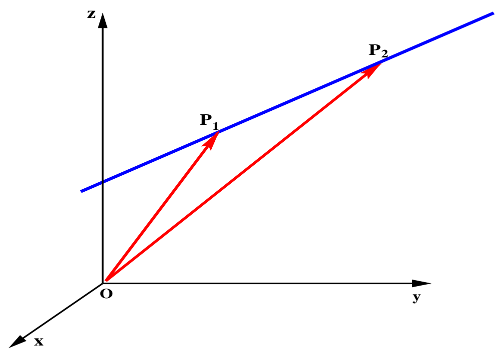


Figura 1.7: A reta que passa por P_1 e P_2.

A direção da reta é dada por $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$; logo, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t\,(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplo 1.5.

[1] Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e tem a direção do vetor $(2, 1, 3)$. Ache outro ponto da reta.

Sejam $P = (1, -1, 1)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1, 3)$; logo,

$$\begin{cases} x(t) = & 1 + 2\,t \\ y(t) = & -1 + t \\ z(t) = & 1 + 3\,t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. Fazendo, por exemplo, $t = 1$ na equação da reta, temos que $(3, 0, 4)$ é um ponto da reta.

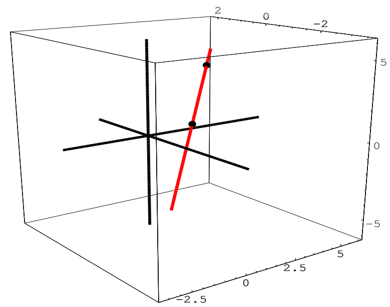


Figura 1.8: A reta do exemplo [1].

[2] Determine a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-2, -1, 3)$ e $P_2 = (3, 2, 7)$. A direção da reta é $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2} = (5, 3, 4)$; logo a equação é:

$$\begin{cases} x(t) = & -2 + 5\,t \\ y(t) = & -1 + 3\,t \\ z(t) = & 3 + 4\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

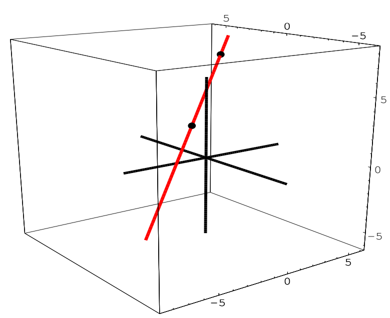


Figura 1.9: A reta do exemplo [2].

1.9.1 Paralelismo e Perpendicularismo

Sejam $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$ retas de direções $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$, respectivamente; então:

1. $\mathbf{l}_1$ é paralela a $\mathbf{l}_2$ se, e somente se, $\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{0}$.

2. $\mathbf{l}_1$ é perpendicular a $\mathbf{l}_2$ se, e somente se, $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = 0$.

A prova segue diretamente das definições.

■

Exemplo 1.6.

[1] As retas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -3 + 6\,t \\ z = 1 + 4\,t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -3\,t \\ z = -5 - 2\,t \end{cases}$$

são paralelalas. De fato, $\vec{\mathbf{v}}_1 = (2, 6, 4)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (-1, -3, -2)$ e $\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{0}$.

[2] As retas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -3 + 6\,t \\ z = 1 + 4\,t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + t \\ z = -5 - t \end{cases}$$

são perpendiculares. De fato, $\vec{\mathbf{v}}_1 = (2, 6, 4)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (-1, 1, -1)$ e $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = 0$.

[3] As retas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -2 + 3\,t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 5\,t \\ y = 3 + 2\,t \\ z = -3 + 3\,t \end{cases}$$

não são paralelas nem perpendiculares e não se intersectam. Tais retas são ditas reversas.

1.9.2 Forma Simétrica da Equação da Reta

Eliminando o parâmetro t na equação da reta, obtemos a forma simétrica da equação da reta:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}.$$

sendo os $v_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq 3)$.

Se, por exemplo, $v_1 = 0$, obtemos:

$$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3};$$

os outros casos são análogos.

1.10 Planos

Definição 1.8. Sejam o vetor $\vec{\mathbf{n}} \neq \vec{0}$ e o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, fixado. O conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

é chamado plano passando por P_0 e tendo normal $\vec{\mathbf{n}}$.

Em particular, se $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$, o plano passando por P_0 e de normal $\vec{\mathbf{n}}$, tem a equação em coordenadas:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$

Exemplo 1.7.

[1] Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e é normal ao vetor $(-1, 2, 3)$.

Sejam $P_0 = (1, -1, 1)$ e $\vec{\mathbf{n}} = (-1, 2, 3)$; então:

$$-1\,(x - 1) + 2\,(y + 1) + 3\,(z - 1) = -x + 2\,y + 3\,z.$$

A equação é $-x + 2\,y + 3\,z = 0$.

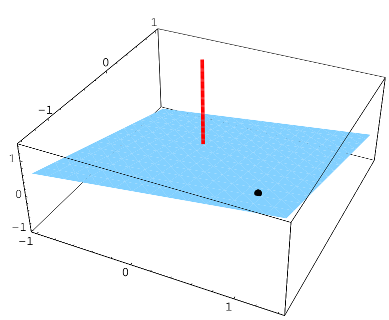


Figura 1.10: Exemplo [1].

[2] Ache a equação do plano que passa pelo ponto $(1,-1,-1)$ e é normal ao vetor $(3,2,-3)$.

Sejam $P_0 = (1,-1,-1)$ e $\vec{\mathbf{n}} = (3,2,-3)$; então: $3\,(x-1)+2\,(y+1)-3\,(z+1) = 3\,x+2\,y-3\,z-4$. A equação é $3\,x+2\,y-3\,z=4$.

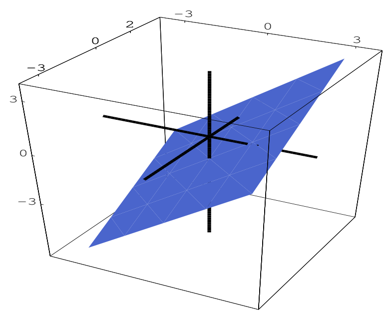


Figura 1.11: Exemplo [2].

Observação 1.6. Considerando a equação do primeiro grau nas variáveis x, y e z:

$$a\,x+b\,y+c\,z+d=0,$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$ não são todas nulas, o subconjunto do $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, a\,x+b\,y+c\,z+d=0\}$$

é o plano com vetor normal $\vec{\mathbf{n}} = (a,b,c)$.

Por simplicidade usaremos a expressão plano $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ em lugar de, o plano de equação $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$.

Exemplo 1.8. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,0,0)$ e $P_3 = (1,1,0)$.

Qualquer vetor normal ao plano deve ser ortogonal aos vetores $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{P_2P_3}$, que são paralelos ao plano.

Logo, o vetor normal ao plano é $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, donde $\vec{\mathbf{n}} = (1,1,0)$; logo, a equação do plano é:

$$x+y+d=0;$$

como $(2,0,0)$ pertence ao plano, temos: $d=-2$ e a equação é

$$x+y-2=0.$$

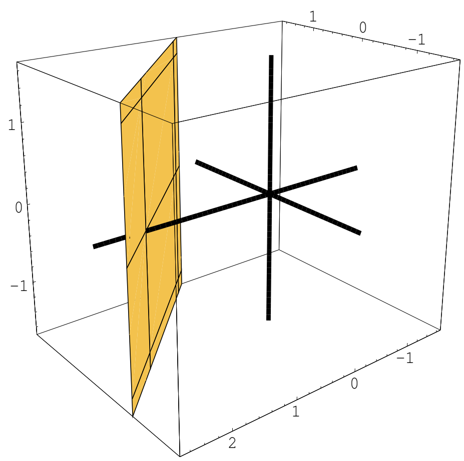


Figura 1.12:

1.11 Paralelismo e Perpendicularismo entre Planos

Definição 1.9.

1. Dois planos são paralelos se, e somente se, seus vetores normais, respectivamente $\vec{\mathbf{n}}_1$ e $\vec{\mathbf{n}}_2$, são paralelos, isto é:

$$\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2 = \vec{0}.$$

2. Dois planos são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais, respectivamente $\vec{\mathbf{n}}_1$ e $\vec{\mathbf{n}}_2$, são ortogonais, isto é:

$$\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 = 0.$$

Proposição 1.7. Os planos $a\,x+b\,y+c\,z=d$ e $a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z=d_1$ são:

1. paralelos, se existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $a=k\,a_1$, $b=k\,b_1$ e $c=k\,c_1$;

2. perpendiculares, se $a\,a_1 + b\,b_1 + c\,c_1 = 0$.

Prova: A prova segue das definições. ■

Exemplo 1.9. Determine a equação do plano paralelo ao plano $3\,x + y - 6\,z + 8 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (0, 0, 1)$.

O vetor normal ao plano é $\vec{\mathbf{n}} = (3, 1, -6)$; logo, a equação do plano é:

$$3\,x + y - 6\,z + d = 0;$$

como o ponto P pertence ao plano temos $-6 + d = 0$, logo, a equação do plano é

$$3\,x + y - 6\,z + 6 = 0.$$

Observação 1.2.

1. O plano: $a\,x + b\,y + d = 0$ é perpendicular ao plano xy.

2. O plano: $b\,y + c\,z + d = 0$ é perpendicular ao plano yz.

3. O plano: $a\,x + c\,z + d = 0$ é perpendicular ao plano xz.

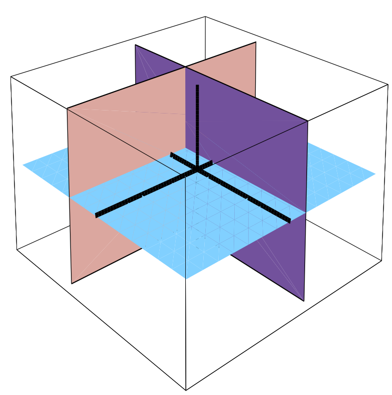


Figura 1.13: Planos coordenados.

1.12 Conjuntos Especiais

Lembremos que nos conceitos estudados no Cálculo de uma variável, os intervalos, fechados, abertos, tem um papel fundamental nas definições e teoremas sobre continuidade e diferenciabilidade.

A continuação apresentaremos alguns conceitos sobre certos tipos de conjuntos em várias variáveis, que tem um papel análogo aos intervalos em uma variável.

1.13 Bolas Abertas

Definição 1.10. Sejam $r > 0$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. A bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio r é denotada por $B(\mathbf{x}_0, r)$ e definida por:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

Observação 1.3.

1. Se $n = 2$; $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{x} = (x, y)$; logo: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ e:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

2. O conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é o "interior"de um círculo centrado em (x_0, y_0) e raio r, ou equivalentemente, o conjunto dos vetores no plano de origem em (x_0, y_0) e norma menor que r. Neste caso, o conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é chamado disco aberto de centro (x_0, y_0) e raio r.

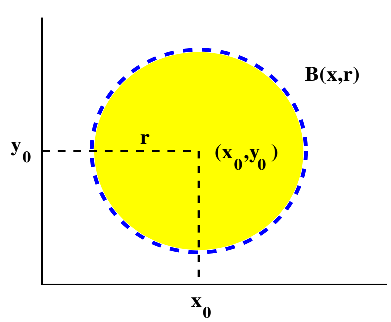


Figura 1.14: Disco aberto

3. Analogamente, se $n = 3$; $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

4. O conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é o "interior"de uma esfera "sólida"centrada em (x_0, y_0, z_0) e raio r, ou equivalentemente, o conjunto dos vetores no espaço de origem em (x_0, y_0, z_0) e norma menor que r.

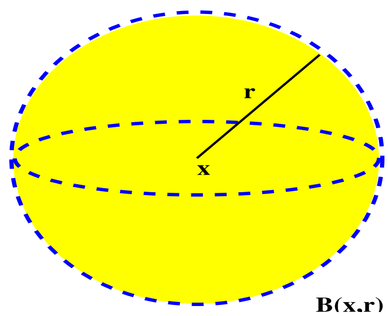


Figura 1.15: Bola aberta

5. Observe que em ambos os casos a desigualdade é estrita.

1.14 Conjuntos Abertos

Definição 1.11. $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto em $\mathbb{R}^n$ se para todo $\mathbf{x} \in A$, existe $B(\mathbf{x}, r)$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$.

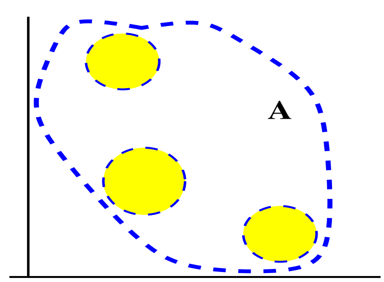


Figura 1.16: Conjunto aberto

Estes conjuntos são a generalização natural de intervalos abertos em $\mathbb{R}$. Por definição, o conjunto vazio e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.10.

[1] Pela definição, $\{\mathbf{x}\}$ não é aberto em $\mathbb{R}^n$, pois toda bola ou disco aberto de centro $\mathbf{x}$ não está contido em $\{\mathbf{x}\}$.

Em geral, os conjuntos do tipo $\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,x_n\,/\,x_i \in \mathbb{R}^n\}$ não são abertos.

[2] $\mathbb{R}$ "pensado"como a reta $\{(x,0)\,/\,x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ não é aberto no plano, pois qualquer disco aberto centrado em $(x,0)$ não está contido em $\mathbb{R}$.

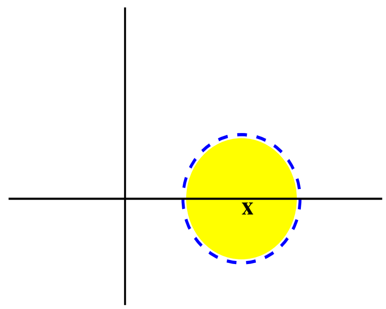


Figura 1.17: Exemplo [2]

[3] $A = (a,b) \times (c,d)$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

De fato, para todo $(x,y) \in A$, $a < x < b$ e $c < y < d$, denote por ε o menor número do conjunto $\{|x-a|,\, |x-b|,\, |y-c|, |y-d|\}$, onde $|\;|$ é a distância entre números reais. Então, por exemplo, considerando $r = \dfrac{\varepsilon}{6}$, temos, $B((x,y),r) \subset A$. Logo A é um conjunto aberto.

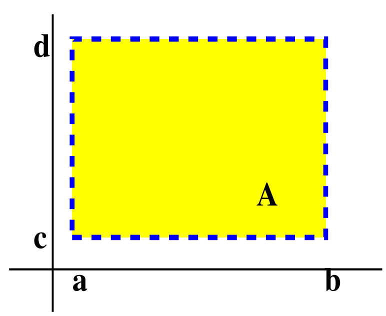


Figura 1.18: Exemplo [3]

[4] $A = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ não é aberto no espaço, pois qualquer bola aberta centrada em $(x,y,0)$ não está contida em $\mathbb{R}^2$.

Será útil dar um nome especial para um conjunto aberto que contenha um ponto dado x. A tal conjunto chamaremos de **vizinhança** do ponto x.

1.15 Conjunto Fronteira

Definição 1.12. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto da fronteira ou do bordo de A se toda vizinhança de $\mathbf{x}$ intersecta A e $\mathbb{R}^n - A$.

2. Denotamos o conjunto dos pontos da fronteira do conjunto A por ∂A. Um conjunto é aberto se $A \cap \partial A = \phi$.

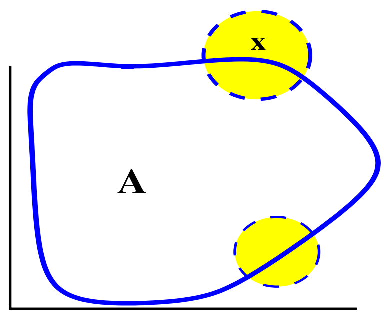


Figura 1.19: Bordo de A

Exemplo 1.11.

[1] Se $A = B(\mathbf{x}, r)$ então $\partial A = \{\mathbf{y}/d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\}$; logo o conjunto $C = \{\mathbf{y}/d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$ não é aberto.

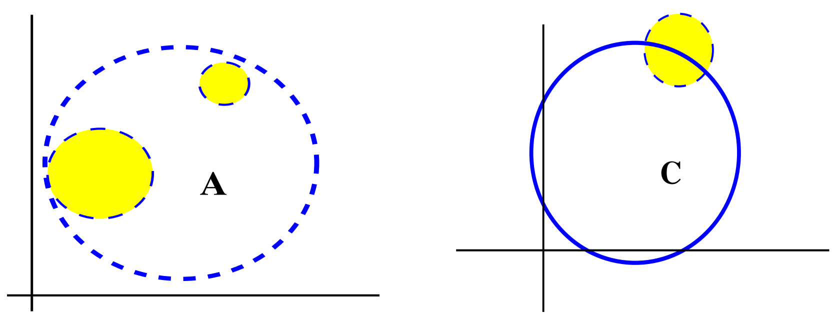


Figura 1.20: Exemplo [1]

[2] Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$; este conjunto corresponde ao primeiro e ao quarto quadrantes sem incluir a reta $x = 0$ e é aberto no plano; de fato, seja $(x, y) \in A$ e escolhamos $r = x > 0$; se $(x_1, y_1) \in B((x, y), r)$ temos:

$$|x - x_1| = \sqrt{(x - x_1)^2} \leq \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < r = x.$$

Logo $x_1 > 0$ e $B((x, y), r) \subset A$; note que $\partial A = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$.

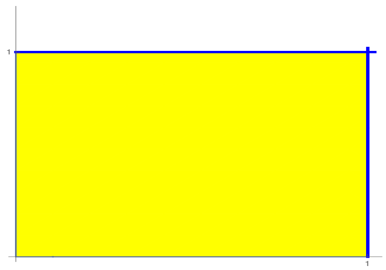


Figura 1.21: Exemplo [2]

1.16 Conjuntos Fechados

Definição 1.13. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado em $\mathbb{R}^n$ se $\partial A \subset A$.

Exemplo 1.12.

[1] $\mathbb{R}^n$ é também um conjunto fechado.

[2] $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 < r^2, \, r > 0\}$ não é fechado, pois sua fronteira é :

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2, \, r > 0\}.$$

Logo $\partial A \not\subset A$.

[3] O sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \, r > 0\}$ é fechado pois sua fronteira é:

$$\partial W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \, r > 0\}.$$

Logo $\partial W \subset W$. **Em geral, todos os sólidos são fechados.**

[4] $A = [a, b] \times [c, d]$ é um conjunto fechado, pois ∂A é o retângulo formado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$.

1.17 Exercícios

1. Determine $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$, se:

   (a) $P_1 = (1,2,1),\ P_2 = (-5,3,1)$

   (b) $P_1 = (-3,2,-1),\ P_2 = (15,2,6)$

   (c) $P_1 = (12,222,1),\ P_2 = (5,23,11)$

   (d) $P_1 = (4,24,18),\ P_2 = (-25,23,11)$

2. Determine $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ e os vetores unitários nas direções de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, se:

   (a) $\vec{\mathbf{v}} = (1,2,1),\ \vec{\mathbf{w}} = (-5,3,1)$

   (b) $\vec{\mathbf{v}} = (-3,2,-1),\ \vec{\mathbf{w}} = (1,2,-6)$

   (c) $\vec{\mathbf{v}} = (2,-2,2),\ \vec{\mathbf{w}} = (-2,2,1)$

   (d) $\vec{\mathbf{v}} = (4,1,8),\ \vec{\mathbf{w}} = (-2,-23,-1)$

3. Determine o valor k tal que os seguintes vetores sejam ortogonais:

   (a) $\vec{\mathbf{v}} = (3,-2\,k,4),\ \vec{\mathbf{w}} = (1,2,5)$

   (b) $\vec{\mathbf{v}} = (-1,1,k),\ \vec{\mathbf{w}} = (1,-1,1)$

   (c) $\vec{\mathbf{v}} = (-k,-1,-1),\ \vec{\mathbf{w}} = (3,0,1)$

   (d) $\vec{\mathbf{v}} = (k,1,k),\ \vec{\mathbf{w}} = (-2,k,-k)$

4. Determine $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, se:

   (a) $\vec{\mathbf{v}} = (-1,2,-1),\ \vec{\mathbf{w}} = (-5,3,1)$

   (b) $\vec{\mathbf{v}} = (-1,-2,-1),\ \vec{\mathbf{w}} = (1,-2,-6)$

   (c) $\vec{\mathbf{v}} = (2,-2,-2),\ \vec{\mathbf{w}} = (-1,2,1)$

   (d) $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,-8),\ \vec{\mathbf{w}} = (-2,-3,-1)$

5. Determine o valor de k tais que os seguintes vetores sejam coplanares:

   (a) $\vec{\mathbf{u}} = (1,2,-3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1,k,1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3,2,1)$

   (b) $\vec{\mathbf{u}} = (-1,k,2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (3,2,5)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-1,0,1)$

   (c) $\vec{\mathbf{u}} = (1,k,0)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1,2,1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (1,0,k)$

   (d) $\vec{\mathbf{u}} = (0,1,-1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (k,0,1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (1,1,2\,k)$

6. Determine a área do triângulo PQR, se:

   (a) $P = (1,-1,2)$, $Q = (0,3,-1)$, $R = (3,-4,1)$

   (b) $P = (-3,0,5)$, $Q = (2,-1,-3)$, $R = (4,1,-1)$

(c) $P = (4, 0, 0)$, $Q = (0, 5, 0)$, $R = (0, 0, 2)$

(d) $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (0, 2, -3)$, $R = (5, 0, 1)$

7. Determine o volume do paralelepípedo formado por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PT}$:

   (a) $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, -1, 2)$, $R = (0, 3, -1)$, $T = (3, -4, 1)$

   (b) $P = (2, 1, -1)$, $Q = (3, 0, 2)$, $R = (4, -2, 1)$, $T = (5, -3, 0)$

8. Determine $d(P_1P_2)$, se:

   (a) $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (-5, 3, 1)$

   (b) $P_1 = (-3, 2, -1)$, $P_2 = (15, 2, 6)$

   (c) $P_1 = (12, 222, 1)$, $P_2 = (5, 23, 11)$

   (d) $P_1 = (4, 24, 18)$, $P_2 = (-25, 23, 11)$

9. Verifique que para todo $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$; tem-se:

   (a) $|\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{w}}\|$

   (b) $\|\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$

   (c) $2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + 2\,\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2$

   (d) $\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| \, \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2$

   (e) $4\,\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2$

10. Determine a equação do plano passando pelos pontos P_1, P_2 e P_3, sendo:

    (a) $P_1 = (-3, 0, 2)$, $P_2 = (6, 1, 4)$, $P_3 = (-5, 1, 0)$

    (b) $P_1 = (2, 1, 4)$, $P_2 = (1, -1, 2)$, $P_3 = (4, -1, 1)$

    (c) $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$, $P_3 = (2, -1, -1)$

    (d) $P_1 = (1, -1, 1)$, $P_2 = (1, -1, -1)$, $P_3 = (3, -1, 1)$

11. Determine a equação do plano passando pelo ponto $P = (3, -1, 2)$, perpendicular à reta determinada por $P_1 = (2, 1, 4)$ e $P_2 = (-3, -1, 7)$. Ache a distância do ponto P ao plano.

12. Verifique que a interseção dos planos $x + y - 2\,z = 1$ e $x + 3\,y - x = 4$ é uma reta. Ache a distância do ponto $P = (1, 0, 1)$ a essa reta.

13. Determine a equação do plano paralelo ao plano $2\,x + 3\,y - 6\,z = 3$ e que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$.

14. Determine o plano perpendicular à reta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z + 1$ e que passa pelo ponto $P = (1, 3, -1)$.

15. Determine a equação do plano perpendicular aos planos $x + 2\,y - 7\,z = 0$ e $x - y - z = 5$ e que passa pela origem.

16. Determine a equação do plano ortogonal ao vetor $(2, 3, 6)$ e que passa pelo ponto $(1, 5, 3)$.