UNIVERSIDADE DO ESTADO DE RIO DE JANEIRO

LISTA DE EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA (Grupos)

1. Verifique que dados a, b e c são elementos de um grupo G valem:
   (a) Cancelamento à direita: se $a * c = b * c$, então $a = b$.
   (b) Cancelamento à esquerda: se $c * a = c * b$, então $a = b$.
   (c) $(a^{-1})^{-1} = a$,
   (d) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

2. Se p é um número primo, então $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{[0]\}$ com a operação multiplicação $[a]*[b] = [a.b]$ é um grupo abeliano. Se n não é primo então $\mathbb{Z}_n - \{[0]\}$ com a operação multiplicação é um grupo?

3. Em geral se $n \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}_n$ com a operação multiplicação $[a] * [b] = [a.b]$, podemos definir $\mathbb{Z}_n^* = \{[r] \in \mathbb{Z}_n |$ existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $[r] * [s] = 1\}$.
   (a) Verifique que o conjunto
   $$\{r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}| \text{ existe } s \in \mathbb{Z} \text{ tal que } [r] * [s] = 1\},$$
   é igual a $\{r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}|\ mdc(r, n) = 1\}$
   (b) $(\mathbb{Z}_n^*, *)$ é um grupo com $\phi(n)$ elementos, onde $\phi(n) = \#\{r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}|\ mdc(r, n) = 1\}$

4. Seja G um grupo tal que $g^2 = e$ para todo G. Verifique que G é abeliano.

5. Sejam G um grupo, H_1 e H_2 subgrupos de G. Verifique que $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G.

6. Ache todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}_4, +)$.