P2 Matemática Discreta 2017.1
Turma MAT2

21/3/2018

Nome: .... Matrícula: ....

A prova é individual e sem consulta. Cada questão deve ser desenvolvida de maneira clara e objetiva, explicitando o raciocínio subjacente. O tempo de prova é de **90 minutos**, improrrogáveis. Boa prova!

Declaro que não utilizei recursos ilícitos na resolução desta prova:

....
(assinatura em concordância)

(4 pontos) 1. Decida se cada uma das afirmações a seguir é Verdadeira ou Falsa. Apresente uma justificativa (demonstração ou contra-exemplo) para cada caso.

(a) $1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots + (n+1)\,x^n + \cdots = x/(1-x)^2,\ x \neq 1$

(b) O coeficiente de z^3 em $(z+1)^{10}$ é 720.

(c) Se $y_n = 2^n - 1$, então $y_{n+2} = y_{n+1} - y_n$.

(d) Se $a_n = n\,5^n$, então $a_{n+1} = 5a_n + 5^{n+1}$.

Solução:

(a) Falsa. O lado esquerdo da igualdade, $1+2\,x+3\,x^2+\cdots+(n+1)\,x^n+\cdots$, é obtido da diferenciação da função geradora $1 + x + x^2 + \cdots + n\,x^n + \cdots = 1/(1-x)$, que é igual à $1/(1-x)^2 \neq x/(1-x)^2,\ x \neq 1$.

(b) Falsa. Como $(z+1)^{10} = \sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} z^p$, o coeficiente de x^3 é $\binom{10}{3} = 120$.

(c) Falsa. Seja $y_n = 2^n - 1$.

Então $y_{n+1} - y_n = (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = 2^n \neq 2^{n+2} - 1 = y_{n+2}$.

(d) Verdadeira. Seja $a_n = n\,5^n$.

Então $5a_n + 5^{n+1} = 5\,n\,5^n + 5^{n+1} = (n+1)\,5^{n+1} = a_{n+1}$.

■

(2 pontos) 2. Numa turma de *Matemática Discreta* com 55 alunos matriculados, 30 assistiram a todas as aulas, 40 fizeram a primeira prova e 30 fizeram a segunda prova. Dos que fizeram a primeira prova, somente metade asssitiu a todas as aulas. E esse número é ainda menor na segunda prova, onde apenas 8 dos presentes compareceram a todas as aulas. Os que fizeram as duas provas são 27. Ninguém que compareceu a todas as aulas fez as duas provas. Os alunos que nunca compareceram às aulas não fizeram as provas.

Quantos alunos nunca compareceram à classe de *Matemática Discreta* ?

Solução:

Considere $\Omega = \{$alunos matriculados em Matemática Discreta$\}$ conjunto universo. Esse conjunto pode ser escrito como a união disjunta entre o conjunto dos alunos presentes a pelo menos uma aula P e o conjuntos dos alunos faltosos a todas as aulas F, i.e., $\Omega = P \cup F$, onde $P \cap F = \phi$.

Defina agora os seguintes subconjuntos de Ω:

$$A = \{\text{alunos de } \Omega \text{ que assistiram a todas as aulas}\}\,,$$

$$P_1 = \{\text{alunos de } \Omega \text{ que fizeram a primeira prova}\}\,,$$
$$P_2 = \{\text{alunos de } \Omega \text{ que fizeram a segunda prova}\}\,.$$

Note que $P = A \cup P_1 \cup P_2$, pois os alunos faltosos a todas as aulas não fizeram as provas. Então, pelo princípio da inclusão-exclusão temos que

$$\begin{aligned}
\#P = \#\left(A \cup P_1 \cup P_2\right) &= \#A + \#P_1 + \#P_2 \\
&\quad - \#(A \cap P_1) - \#(A \cap P_2) - \#(P_1 \cap P_2) \\
&\quad + \#(A \cap P_1 \cap P_2) \\
&= 30 + 40 + 30 - 20 - 8 - 27 + 0 \\
&= 45
\end{aligned}$$

Logo, $\#F = \#\Omega - \#P = 55 - 45 = 10$ alunos nunca compareceram à classe de *Matemática Discreta* .

■

(2 pontos) 3. Fred, o tricolor, deseja comprar 5 bermudas novas numa loja extremamente chique. Para evitar que ele compre todas as bermudas da mesma cor, sua esposa Luciana impôs algumas restrições. Ele pode comprar, no máximo, 3 bermudas verdes, 2 vermelhas, sendo as demais brancas. De quantas maneiras Fred pode comprar essas bermudas?

Solução:

A função geradora das soluções desse problema de contagem é definida por

$$\begin{aligned}
P(x) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+\cdots) \\
&= \frac{(1-x^4)}{(1-x)}\,\frac{(1-x^3)}{(1-x)}\,\frac{1}{(1-x)} \\
&= (1-x^4)\,(1-x^3)\,(1-x)^{-3} \\
&= (1-x^4)\,(1-x^3)\,(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+\cdots) \\
&= (1-x^3-x^4+x^7)\,(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+\cdots) \\
&= 1+3x+6x^2+9x^3+11x^4+12x^5+\cdots
\end{aligned}$$

Logo, Fred tem 12 opções de compra para as 5 bermudas.

■

4. Considere a recorrência

$$x_{n+1} = \pi\, x_n + f_n.$$

(1 ponto) (a) Encontre a solução geral da recorrência homogênea associada.

(1 ponto) (b) Encontre a solução geral da recorrência para $f_n = -\pi + 1$ e $x_0 = 1$.

Solução:

(a) A recorrência homogênea associada é $h_{n+1} = \pi\, h_n$, cuja solução geral é da forma $h_n = c\,\pi^n$, onde c é uma constante real arbitrária.

(b) Queremos encontrar uma solução para

$$x_{n+1} = \pi\, x_n + \pi - 1, \;\; x_0 = 1.$$

Essa recorrência é linear não-homogênea, sendo sua solução da forma

$$x_n = h_n + p_n,$$

onde p_n uma solução particular e h_n a solução da homogênea obtida acima. Vamos propor uma solução particular constante, i.e., $p_n = K$.

Assim sendo, $K = \pi\, K - \pi + 1$, donde $K = 1$. Segue que $x_n = c\,\pi^n + 1$.

Substituindo o valor inicial x_0 em $x_n = c\,\pi^n + 1$, obtemos que $c = 0$, donde concluímos que a solução geral é $x_n = 1$ para todo natural n.

■

(2 pontos) 5. Determine o termo independente de x no desenvolvimento do binômio

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^5.$$

Solução:

Tal binômio se escreve como

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^5 = \sum_{p=0}^{5} \binom{5}{p} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^p \left(x^2\right)^{5-p} = \sum_{p=0}^{5} \binom{5}{p} (-1)^p \, x^{10-5p}.$$

Para o termo independente de x devemos ter $10 - 5p = 0$, i.e. $p = 2$. Logo, o número procurado é $\binom{5}{2}(-1)^2 = 10$.

■