Matemática Discreta
17 de maio de 2017
P1 — 2016.2

Nome do aluno: ____

Assinatura: ____

Matrícula: ____________________ Turma: CCOMP

Questão	Pontos	Nota
1	2	
2	3	
3	3	
4	2	
Total	10	

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES ABAIXO

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- A solução de cada questão deve ser desenvolvida de maneira clara e objetiva, explicitando o raciocínio subjacente através de um texto coerente. Em outras palavras, mais importante que encontrar a resposta correta é explicar como você chegou nessa resposta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Junto com a prova você está recebendo folhas de papel, para o desenvolvimento das soluções. Cada questão deve ser resolvida numa folha separada. Utilize o verso se necessário. Não escreva a solução de duas questões na mesma folha.
- O tempo de prova é de **100 minutos, improrrogáveis**.

(2 pontos) 1. Quantas são as soluções da equação

$$x + y + z = 23,$$

onde x, y e z são inteiros ímpares positivos.

Solução:

Temos $x = 2\,k + 1$, $y = 2\,l + 1$ e $z = 2\,m + 1$, onde k, l e m são inteiros não negativos. Dessa forma temos que

$$x + y + z = 23 \Longleftrightarrow k + l + m = 10.$$

Essa última equação sabemos que tem $12!/(10!\,2!) = 66$ soluções.

(3 pontos) 2. Prove por indução que

$$\log_2 n < n,$$

para todo n inteiro positivo.

Dica: Faça uma mudança de base.

Solução:

Note inicialmente que $\log_2 n = \ln n / \ln 2$, de forma que a inequação se re-escreve como $\ln n < n\ \ln 2 \Longleftrightarrow n < 2^n$. Queremos então provar a seguinte propriedade:

$P(n):\ n + 1 < 2^{n+1}$ para todo n inteiro positivo.

O caso base para $n = 1$ é trivial, pois $1 < 2^1$. Suponha então que $n < 2^n$ para um certo $n \geq 2$. Multiplicando essa última inequação por 2 obtemos $2\,n < 2^{n+1}$. Se $n + 1 < 2\,n$, por transitividade podemos concluir que $n + 1 < 2^{n+1}$ e que $P(n)$ vale para todo n inteiro positivo.

Resta então provar:

$Q(n):\ n + 1 < 2\,n$ para $n \geq 2$.

O caso base $n = 2$ é verdade, pois $2 + 1 < 2 \times 2$. Suponha $n + 1 < 2\,n$ verdade para algum $n > 2$. Somando 1 a cada lado da inequação temos $(n + 1) + 1 < 2\,n + 1 < 2\,n + 2 = 2(n + 1)$, que prova a validade de $Q(n)$.

(3 pontos) 3. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n.$$

Sugestão: Perturbe a soma.

Solução:

Denote

$$S_n = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n,$$

i.e., $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\, 2^k$.

Perturbando essa soma obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k\, 2^k = S_n + (n+1)\, 2^{n+1} &= 0 \times 2^0 + \sum_{p=0}^{n} (p+1)\, 2^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n} p\, 2^{p+1} + \sum_{p=0}^{n} 2^{p+1} \\
&= 2\left(\sum_{p=0}^{n} p\, 2^p\right) + 2\left(\sum_{p=0}^{n} 2^p\right) \\
&= 2\, S_n + 2\,(2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

(2 pontos) 4. Determine os valores do inteiro n para os quais o binômio

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$$

possui um termo independente de x.

Solução:

Tal binômio se escreve como

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^p \left(2x^2\right)^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p\, 2^{n-p}\, x^{2n-5p}.$$

Para que um termo dessa expansão seja independente de x devemos ter $2n - 5p = 0$, i.e. $p = 2n/5$. Como p é um inteiro tal $0 \le p \le n$, concluímos que n deve ser um múltiplo não-negativo de 5.