Capítulo 7

INTEGRAIS

7.1 Integrais sobre Trajetórias

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização da curva C de classe C^1, tal que $\gamma\big([a,b]\big) \subset A$ e:

$$f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua.

Definição 7.1. A integral de f ao **longo de** C é denotada e definida por:

$$\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Observação 7.1. Esta integral é a generalização natural do comprimento de arco para curvas. De fato, por exemplo em $\mathbb{R}^3$, se $f(x,y,z) = 1$ para todo (x,y,z), a integral de linha é o comprimento de arco da curva C.

$$\int_C 1 = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Proposição 7.1. A definição de integral é valida se γ é C^1 por partes ou $f \circ \gamma$ é contínua por partes.

Prova: De fato, subdividamos o intervalo original num número finito de subintervalos fechados tal que $f(\gamma)\,\|\gamma'\|$ é uma função contínua em cada subintervalo. Consideremos $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$ a partição tal que γ_i é a restrição de γ ao subintervalo $I_i = [t_i, t_{i+1}]$.

■

Proposição 7.2. Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e C uma curva. Se $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ e cada $C_i = \gamma_i(I_i)$ é classe C^1, $1 \leq i \leq n$. Então:

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f + \ldots\ldots + \int_{C_n} f.$$

Prova: Exercício. ∎

Exemplo 7.1.

[1] Calcule $\displaystyle\int_\gamma f$ se $\gamma(t) = (t, 3\,t, 2\,t)$ tal que $t \in [1,3]$ e $f(x,y,z) = y\,z$.

Como $f(\gamma(t)) = f(t, 3\,t, 2\,t) = 6\,t^2$, $\gamma'(t) = (1,3,2)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{14}$, logo:

$$\int_\gamma f = 6\sqrt{14}\int_1^3 t^2\,dt = 52\sqrt{14}.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_\gamma f$ se $\gamma(t) = (1,2,t^2)$ tal que $t \in [0,1]$ e $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$.

Como $f(\gamma(t)) = f(1,2,t^2) = e^t$, $\gamma'(t) = (0,0,2\,t)$ e $\|\gamma'(t)\| = 2\,t$; logo:

$$\int_\gamma f = 2\int_0^1 t\,e^t\,dt = 2.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_\gamma f$, onde γ é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t), a\,t)$ tal que $t \in [0, 4\,\pi]$, $(a > 0)$ e $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z-a^2}$.

Como $f(\gamma(t)) = f(a\,cos(t), a\,sen(t), a\,t) = e^{at}$, $\gamma'(t) = (-a\,sen(t), a\,cos(t), a)$ e $\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2}$; logo:

$$\int_\gamma f = a\sqrt{2}\int_0^{4\pi} e^{at}\,dt = \sqrt{2}\,(e^{4a\pi} - 1).$$

Se consideramos a hélice como um arame e f como densidade de massa; então, a massa total do arame é $\sqrt{2}\,(e^{4a\pi} - 1)$.

7.1.1 Aplicação

Sejam C uma curva plana parametrizada por γ, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f \circ \gamma$ é contínua e $f(x,y) \geq 0$, para todo (x,y).

A integral de f ao longo de γ representa a área da "cerca"de base C e altura $\big(f \circ \gamma\big)(t)$, em cada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

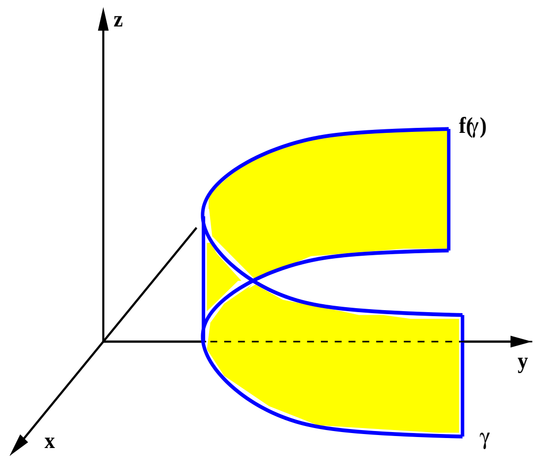

Figura 7.1: "Cerca"de base C

Exemplo 7.2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f$ se $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ tal que $t \in [0,1]$ e $f(x,y) = 1 + x^3 - y^2$.

Como $f(\gamma(t)) = f(t^2, t^3) = 1$, $\gamma'(t) = (2\,t, 3\,t^2)$ e $\|\gamma'(t)\| = t\,\sqrt{4 + 9\,t^2}$, logo:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 t\,\sqrt{4 + 9\,t^2}\,dt = \frac{1}{18}\int_4^{13} \sqrt{u}\,du = \frac{13\,\sqrt{13} - 8}{27}.$$

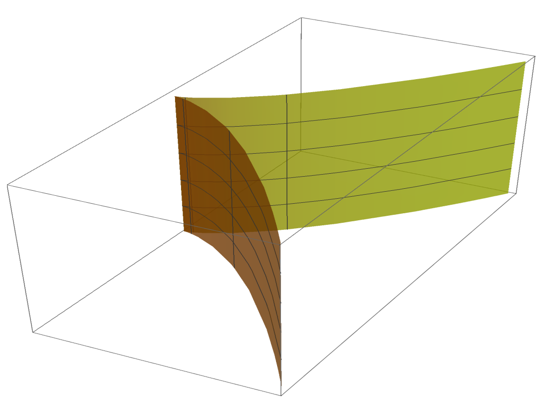

Figura 7.2: Exemplo [1]

7.2 Integrais de Linha de Campos de Vetores

Em Física, o trabalho realizado por uma força constante F para deslocar uma partícula ao longo de um segmento de reta entre os pontos A e B é definido como o produto da força pelo deslocamento na direção da força. Denotando por $W(F)$ o trabalho realizado, temos:

$$W(F) = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

Suponhamos que a trajetória de uma partícula seja o traço da curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 (não necessariamente um segmento de reta) e F um campo de vetores contínuo. Consideremos a seguinte partição de ordem n de $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

e construamos a poligonal de vértices $\gamma_i = \gamma(t_i)$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots..n$.

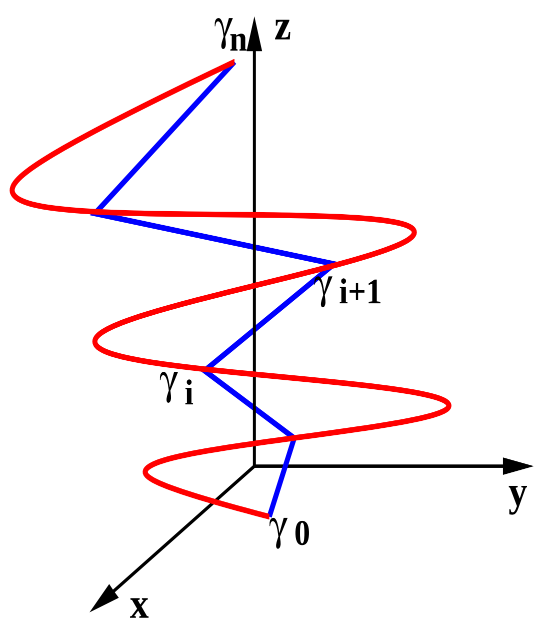

Figura 7.3:

Se n é grande ($n \to +\infty$), a poligonal aproxima-se da curva $C = \gamma(I)$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é pequeno e o deslocamento da partícula de γ_i até γ_{i+1} é aproximado pelo vetor:

$$\vec{v_i} = \gamma_{i+1} - \gamma_i.$$

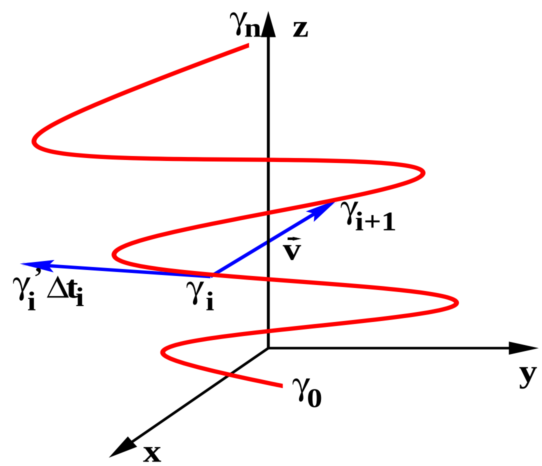

Figura 7.4:

Para n grande, da definição de vetor tangente:

$$\vec{v_i} \cong \gamma_i^{'}\,\Delta t_i.$$

Por outro lado, $F(\gamma(t))$ é quase constante no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e:

$$F(\gamma_i)\cdot\vec{v_i} \cong F(\gamma_i)\cdot\gamma_i^{'}\,\Delta t_i.$$

A soma de Riemann:

$$W_n(F) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma_i)\cdot\gamma_i^{'}\,\Delta t_i$$

é uma boa aproximação do trabalho total realizado pela força F para deslocar a partícula; então, é natural definir o trabalho realizado por F para deslocar a partícula ao longo de C de $\gamma(a) = A$ até $\gamma(b) = B$ por:

$$W(F) = \lim_{|\Delta t_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\gamma_i)\;\cdot\;\gamma_i^{'}\,\Delta t_i,$$

que é a integral de Riemann da função contínua $(F\circ\gamma)(t)$ no intervalo $[a, b]$; então:

$$W(F) = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt,$$

se o limite existe. É possível provar que se o limite existe, independe da escolha da partição e da parametrização.

7.3 Definição da Integrais de Linha

Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores contínuo e $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização da curva C, de classe C^1, tal que $\gamma\big([a, b]\big) \subset A$ e:

$$F \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

seja uma função contínua.

Definição 7.2. A **integral de linha do campo de vetores** F **ao longo da curva** C é denotada e definida por:

$$\int_C F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

onde $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^n$ dos vetores $F(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$.

Observação 7.1.

1. A definição é valida se $F \circ \gamma$ é contínua por partes.

2. A integral de linha de F ao longo de C poder ser calculada como uma integral de trajetória para uma f apropriada. De fato, seja $\vec{\mathbf{T}}(t)$ o vetor tangente unitário a $\gamma(t)$, que suporemos não nulo para todo t; então:

$$f(\gamma(t)) = F(\gamma(t)) \cdot \vec{\mathbf{T}}(t) = F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|},$$

   que é a componente de F tangente à curva, ou equivalentemente, a componente de F é a projeção de F sobre o vetor tangente unitário à curva; logo:

$$\int_C F = \int_a^b \big(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|}\big)\, \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

7.4 Notações

É comum usar as seguintes notações:

7.4.1 No Espaço

Sejam F_1, F_2 e F_3 as componentes do campo F e a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de classe C^1; então:

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F_1(\gamma(t))\, \frac{dx}{dt} + F_2(\gamma(t))\, \frac{dy}{dt} + F_3\, (\gamma(t))\frac{dz}{dt};$$

logo, escrevemos:

$$\int_C F = \int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b F_1(t)\, dx + F_2(t)\, dy + F_3(t)\, dz$$

7.4.2 No Plano

De forma análoga, escrevemos:

$$\int_C F = \int_C F_1\, dx + F_2\, dy$$

7.4.3 Curvas Fechadas

Se $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de uma curva fechada, é comum denotar a integral de linha de um campo F ao longo de γ como:

$$\oint_C F$$

Observação 7.2. Em Eletromagnetismo, $\displaystyle\oint_C F$ é chamada de circulação do campo F ao longo da curva C.

Exemplo 7.3.

[1] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde $F(x,y) = (x^2, x\,y)$ e C é a curva definida por $x = y^2$, que liga os pontos $(1,-1)$ e $(1,1)$.

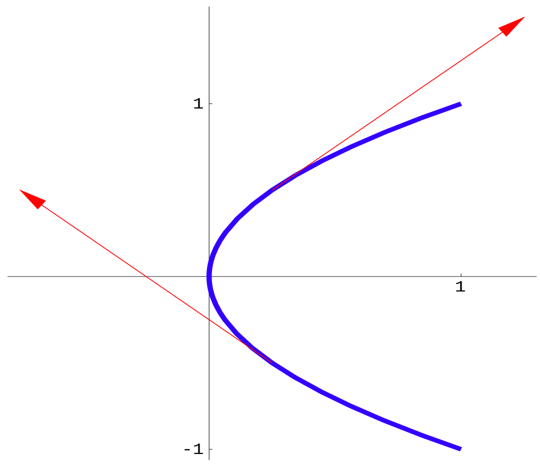

Figura 7.5: Exemplo [1]

Primeiramente, parametrizamos a parábola C por $\gamma(t) = (t^2, t)$, $-1 \le t \le 1$; logo:

$$\gamma'(t) = (2\,t, 1).$$

O campo é $F(x,y) = (x^2, x\,y)$.

Podemos resolver o exercício de duas formas, totalmente equivalentes:

1. Seguindo a definição.

   (a) $F(\gamma(t)) = F(t^2, t) = (t^4, t^3)$.

   (b) $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t^2, t) \cdot \gamma'(t) = (t^4, t^3) \cdot (2\,t, 1) = 2\,t^5 + t^3$.

   (c) Finalmente:

$$\int_C F = \int_{-1}^{1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \big[2\,t^5 + t^3\big]\,dt = 0.$$

2. Se escrevemos:

$$\int_C F = \int_C x^2\,dx + x\,y\,dy.$$

(a) Seja $F = (F_1, F_2)$, onde $F_1(x, y) = x^2$ e $F_2(x, y) = x\,y$, então:

$$\int_C F = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \int_C x^2\,dx + x\,y\,dy.$$

(b) A parametrização da parábola C é $\gamma(t) = (t^2, t)$, $-1 \le t \le 1$; logo:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 2\,t\,dt \\ dy = dt, \end{cases}$$

então:

$$\begin{cases} F_1\,dx = x^2\,dx = t^4\,(2\,t\,dt) = 2\,t^5\,dt \\ F_2\,dy = x\,y\,dy = t^3\,dt, \end{cases}$$

logo:

$$\int_C F = \int_C x^2\,dx + x\,y\,dy = \int_{-1}^{1} (2\,t^5 + t^3)\,dt = 0.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_C F$ se C é um arco de círculo de raio 1, do ponto $(1, 0)$ até $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$.

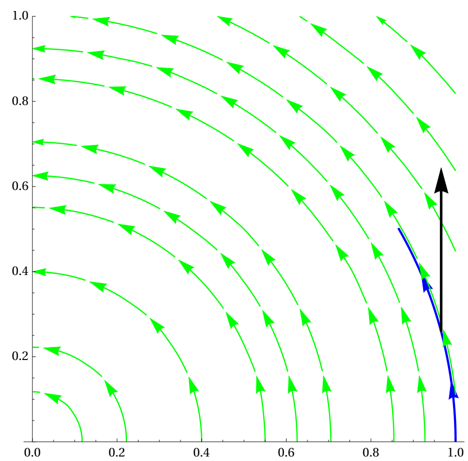

Figura 7.6: A curva, o campo e o vetor tangente

Análogamente, ao exercício anterior. Parametrizemos o segmento de círculo:

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sen(t), \end{cases}$$

para determinar o domínio, resolvemos os sistemas:

$$\begin{cases} cos(t) = 1 \\ sen(t) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} cos(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ sen(t) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{6}.$$

O vetor tangente é $\gamma'(t) = (-sen(t), cos(t))$ e campo é: $F(x,y) = \big(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\big)$

1. Seguindo a definição de integral de linha.

    (a) $F(\gamma(t)) = F(cos(t), sen(t)) = (-sen(t), cos(t))$.

    (b) $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-sen(t), cos(t)) \cdot (-sen(t), cos(t)) = 1$.

    (c) Finalmente:

$$\int_C F = \int_0^{\pi/6} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}.$$

2. Se escrevemos:

$$\int_C F = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \int_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

(a) A parametrização do círculo de raio 1, é $\gamma(t) = (cos(t), sen(t)$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{6}$; logo:

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sen(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -sen(t)\,dt \\ dy = cos(t)\,dt \end{cases}$$

(b) Como $F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ e $F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, logo:

$$\begin{cases} F_1\,dx = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx = sen^2(t)\,dt \\ \\ F_2\,dy = \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy = cos^2(t)\,dt. \end{cases}$$

(c) Finalmente:

$$\int_C F = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \int_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_C cos(z)\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz$, se C é dada por:

$$\gamma(t) = (1, t, e^t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Observe que:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = e^t. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = \,dt \\ dz = e^t\,dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} cos(z)\,dx & = 0 \\ e^x\,dy & = e\,dt \\ e^y\,dz & = e^t\,e^t\,dt, \end{cases}$$

Logo:

$$\int_C cos(z)\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz = \int_0^2 0\,dt + \int_0^2 e\,dt + \int_0^2 e^t\,(e^t\,dt)$$

$$= \int_0^2 \big[e + e^{2\,t}\big]dt = 2\,e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}.$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_C sen(z)\,dx + cos(z)\,dy - \sqrt[3]{x\,y}\,dz$, onde C é a curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t), t), \quad 0 \le t \le \frac{7\,\pi}{2}.$$

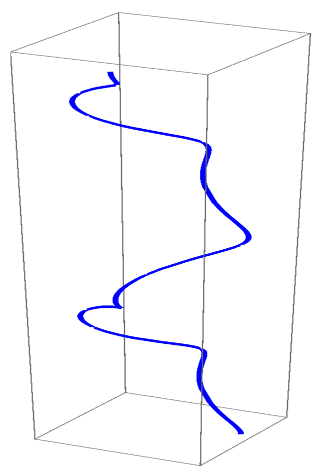

Figura 7.7: γ do exemplo [4]

Observe que, o vetor tangente é:

$$\gamma'(t) = (-3\,sen(t)\,cos^2(t), 3\,cos(t)\,sen^2(t), 1)$$

e o campo é $F(x,y,z) = (sen(z), cos(z), -\sqrt[3]{x\,y})$, logo:

$$F(\gamma(t)) = F(cos^3(t), sen^3(t), t) = (sen(t), cos(t), -sen(t)\,cos(t)).$$

Por outro lado: $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -cos(t)\,sen(t)$, então:

$$\int_C sen(z)\,dx + cos(z)\,dy - \sqrt[3]{x\,y}\,dz = -\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \big[cos(t)\,sen(t)\big]\,dt = -\frac{1}{2}.$$

[5] Calcule $\displaystyle\int_C x^2\,dx + x\,y\,dy + dz$, se C é dada por $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$, $0 \le t \le 1$.

Observe que:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = \ dt \\ dy = 2\,t\,dt \\ dz = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\,dx & = t^2\,dt \\ x\,y\,dy & = t^3\,(2\,t\,dt) \\ dz & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C x^2\,dx + x\,y\,dy + dz &= \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,(2\,t\,dt) + \int_0^1 0\,dz \\ &= \int_0^1 \left[t^2 + 2\,t^4\right] dt = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

7.5 Integrais de Linha e Reparametrizações

Seja C uma curva com parametrização $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de classe C^1 da curva C. Então, existe:

$$h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

bijectiva de classe C^1, tal que:

$$\beta = \gamma \circ h$$

Onde, h pode ser crescente, $h(c) = a$ e $h(d) = b$ ou h pode ser decrescente, $h(d) = a$ e $h(c) = b$.

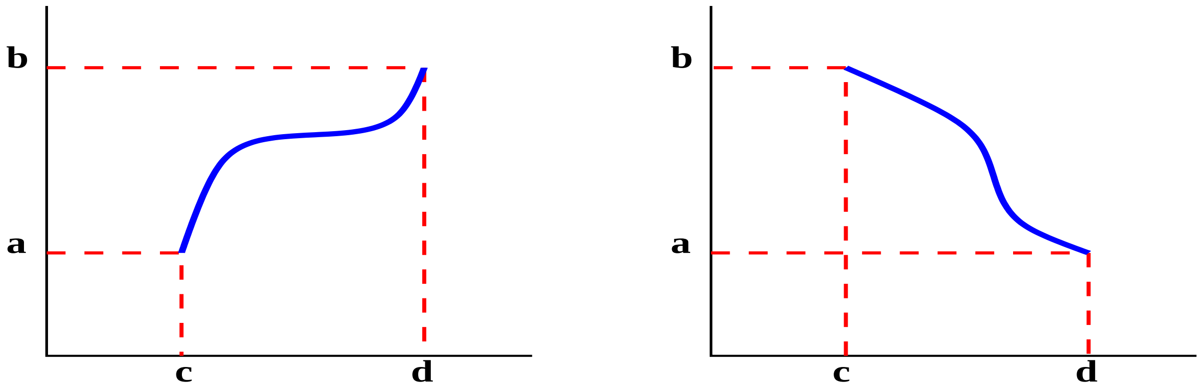

Figura 7.8: h crescente e decrescente, respectivamente

Definição 7.3.

1. Se h é crescente, então dizemos que β **preserva a orientação**.

2. Se h é decrescente, então dizemos que β **inverte a orientação**.

Observação 7.2.

1. Uma reparametrização preserva orientação, se uma partícula que percorre uma trajetória com a parametrização γ, move-se na mesma direção que a partícula que percorre a trajetória com a parametrização β.

2. Uma reparametrização inverte orientação, se uma partícula que percorre uma trajetória com a parametrização γ, move-se na direção contrária à da partícula que percorre a trajetória com a parametrização β.

Definição 7.4. Sejam $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização diferenciável da curva C ligando o ponto $\gamma(a)$ ao ponto $\gamma(b)$ e $h : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ tal que:

$$h(t) = a + b - t;$$

denotamos e definamos a curva C^- pela parametrização $\gamma^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Observação 7.3.

1. A função h é de classe C^k, $k \geq 0$ e é decrescente, pois $h(a) = b$ e $h(b) = a$.

2. C^- é a curva que liga $\gamma(b)$ a $\gamma(a)$.

3. $\gamma^- = \gamma \circ h$ inverte orientação.

4. γ e γ^- têm o mesmo traço, mas são percorridas em sentidos opostos.

5. Denotamos por C^+ e γ^+, quando a reparametrização preserva a orientação.

No plano:

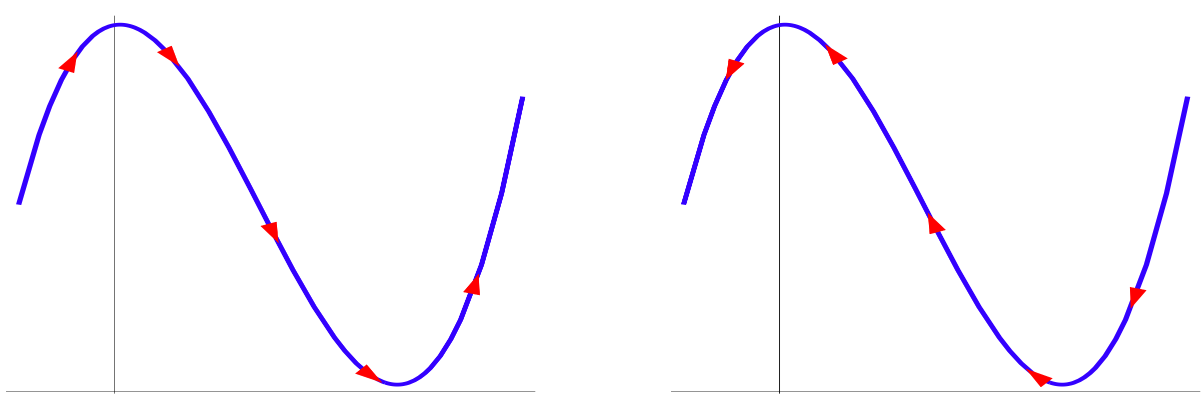

Figura 7.9: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente

No espaço:

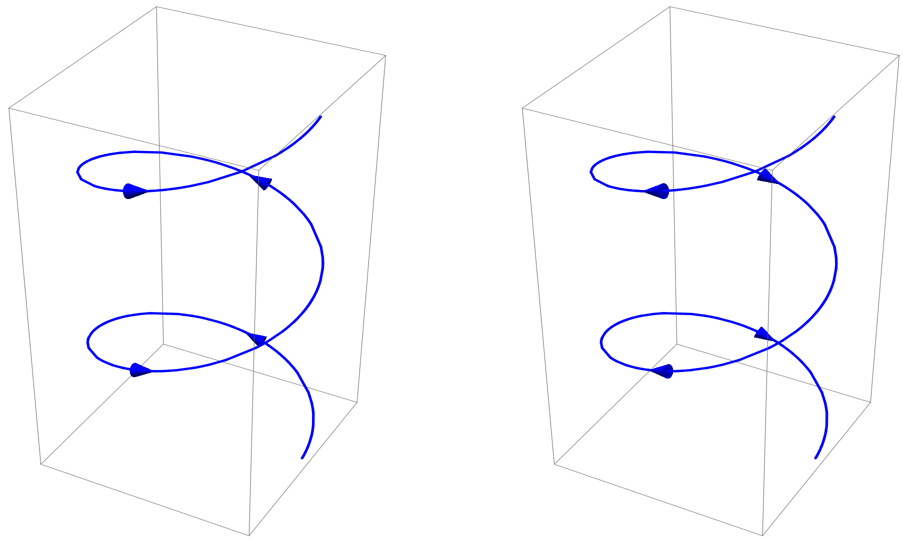

Figura 7.10: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente

Exemplo 7.4.

[1] Seja C o segmento de reta ligando a origem e o ponto $(1,1)$; então C pode ser parametrizado por:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad \gamma(t) = (t,t).$$

Fazendo $h(t) = 1 - t$ é uma função de classe C^k, $k \geq 0$, decrescente em $[0,1]$, então:

$$\gamma^-(t) = \gamma(h(t)) = \gamma(1-t) = (1-t, 1-t), \quad t \in [0,1].$$

Note que $\gamma^-(0) = (1,1)$ e $\gamma^-(1) = (0,0)$ e:

$$\gamma^- : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $\gamma^-([0,1]) = \gamma([0,1])$.

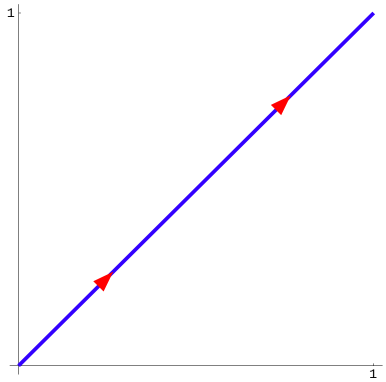

Figura 7.11: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente

[2] Seja C o círculo unitário; então C pode ser parametrizado por:

$$\gamma(t) = (cos(t), sen(t)), \quad t \in [0, 2\,\pi].$$

Seja $h : [0, 2\,\pi] \longrightarrow: [0, 2\,\pi]$ definida por $h(t) = 2\,\pi - t$, logo $h(0) = 2\,\pi$ e $h(2\,\pi) = 0$. A função h é de classe C^k, $k \geq 0$, decrescente, então:

$$\gamma^-(t) = \gamma(h(t)) = \gamma(2\,\pi - t, 2\,\pi - t) = (cos(2\,\pi - t), sen(2\,\pi - t)) = (cos(t), -sen(t)).$$

Note que os tangente tem direção opostas. De fato:

$$\gamma'(t) = (-sen(t), cos(t)) \quad \text{e} \quad \gamma^{-\prime}(t) = (-sen(t), -cos(t)).$$

Note que $\gamma^-([0, 2\,\pi]) = \gamma([0, 2\,\pi])$.

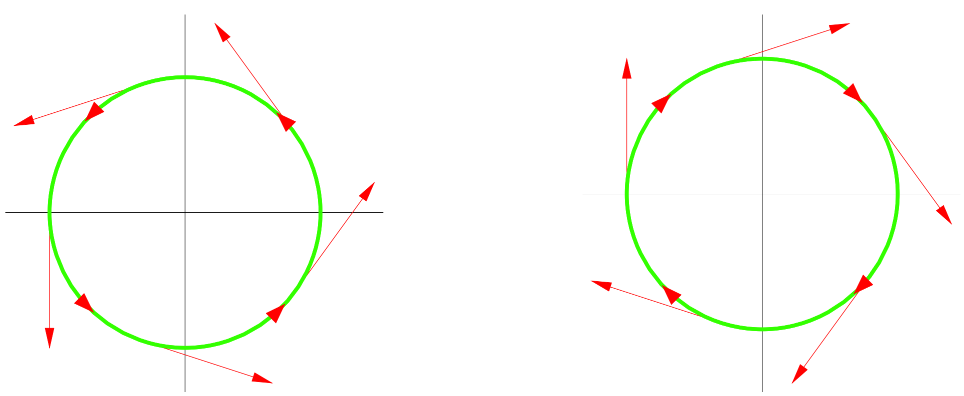

Figura 7.12: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente

Definição 7.5. A escolha de um sentido para o vetor tangente a uma curva é chamada **orientação** da curva.

Observação 7.3.

1. Logo, toda curva diferenciável tem duas possíveis orientações.

2. Seja C uma curva diferenciável parametrizada por $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Podemos definir o campo (contínuo) tangente unitário, por:

$$T(p) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|},$$

onde $\gamma(t_0) = p$, $t_0 \in (a, b)$ e tal que $\lim\limits_{t_0 \to a^+} T(p)$ e $\lim\limits_{t_0 \to b^-} T(p)$ existem.

3. No caso de uma curva fechada, estes limites devem ser iguais.

4. $-T$ também é uma orientação de C; por continuidade, temos que uma curva possui duas orientações possíveis.

5. As mudanças de orientação são refletidas na integral de linha.

Teorema 7.1. Sejam F um campo de vetores, C uma curva de classe C^1 com parametrização γ tal que $F \circ \gamma$ é contínua e β uma reparametrização de C.

1. Se β é uma reparametrização que preserva orientação e $\beta(I) = L$, então:

$$\int_C F = \int_L F$$

2. Se β é uma reparametrização que inverte orientação e $\beta(I) = L$, então:

$$\int_C F = -\int_L F$$

Em particular:

$$\int_C F = -\int_{C^-} F$$

Prova: Por hipotese, existe h tal que $\gamma = \sigma \circ h$; então $\gamma'(t) = \sigma'(h(t)) \cdot h'(t)$. Logo:

$$\int_C F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t)) h'(t)\, dt;$$

fazendo a mudança de variáveis $s = h(t)$, temos:

$$\int_C F = \int_{h(a)}^{h(b)} (F(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s))\, ds.$$

Dependendo de h preservar ou inverter a orientação, provamos o teorema.

■

Observação 7.4. Logo, a integral de linha depende do campo e da parametrização da curva.

Proposição 7.3.

1. **Linearidade:** Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, F, G campos de vetores contínuos e C uma curva de classe C^1; então:

$$\int_C a\,F + b\,G = a\int_C F + b\int_C G$$

2. **Aditividade:** Se C admite uma decomposição em n curvas C_i tais que, cada C_i é de classe C^1, $i = 1....n$ e $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ então:

$$\int_C F = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + \ldots\ldots + \int_{C_n} F.$$

Prova: Segue da definição de integral de linha. ■

Observação 7.5. A seguir, um **teorema fundamental das integrais de linha**.

Teorema 7.2. Seja F um campo conservativo com potencial f, de classe C^1 e C uma curva de classe C^1 que liga os pontos P e Q; então:

$$\int_C F = f(Q) - f(P)$$

Prova: Seja γ uma parametrização de classe C^1 de C tal que $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$ e $H(t) = f(\gamma(t))$; pela regra da cadeia, $H'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Utilizando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_C F = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b H'(t)\, dt = H(b) - H(a) = f(Q) - f(P).$$

■

Observação 7.6. A integral dos campos conservativos não depende da curva que liga os pontos P e Q, somente depende dos pontos P e Q.

Em particular:

Corolário 7.1. Seja F um campo conservativo com potencial f, de classe C^1 e C uma curva fechada de classe C^1, então:

$$\oint_C F = 0$$

■

Observação 7.7. Os resultados anteriores, continuam válidos se as curvas são de classe C^1, por parte.

Exemplo 7.5.

[1] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde F é o campo de quadrado inverso:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,(x, y, z)$$

e C é parametrizada por: $\gamma(t) = \big(\dfrac{t^4}{4}, sen^3\big(\pi\, t\big), t^2 - 3\, t + 2\big)$, tal que $t \in [1, 2]$.

Sabemos que F é um campo conservativo com potencial:

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

por outro lado $P = \gamma(1) = \big(\dfrac{1}{4}, 0, 0\big)$ e $Q = \gamma(2) = (4, 0, 0)$; logo:

$$\int_C F = f(4, 0, 0) - f\big(\frac{1}{4}, 0, 0\big) = \frac{15}{4}.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde $F(x, y) = (x^2, x\, y)$ e C a curva formada pelo arco de parábola $y = x^2$ tal que $0 \leq x \leq 1$ e pelo segmento de reta que liga $(1, 1)$ e $(0, 0)$.

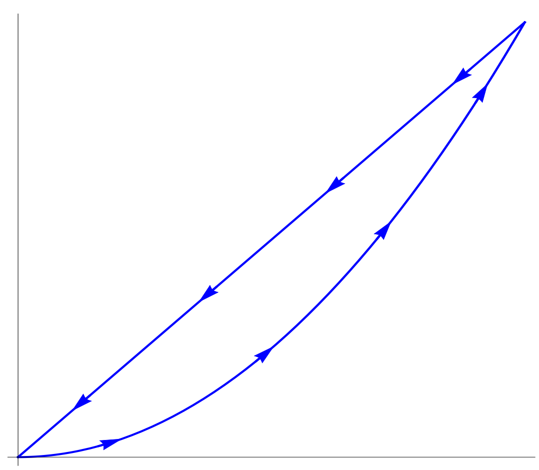

Figura 7.13: Exemplo [2]

A curva C admite uma decomposição em 2 curvas C_1 e C_2, cada de classe C^1. Isto é, $C = C_1 \cup C_2$, com parametrizações dadas por:

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (1 - t, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

respectivamente, então:

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F$$

ou, equivalentemente:

$$\int_C F = \int_{C_1} F - \int_{C_2^-} F,$$

onde C_2^- é parametrizada por:

$$\gamma_2^-(t) = (t, t), \quad 0 \le t \le 1$$

Logo:

$$\begin{cases} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = (t^2, t^3) \cdot (1, 2\,t) = t^2 + 2\,t^4 \\ F(\gamma_2^-(t)) \cdot (\gamma_2^-)'(t) = (t^2, t^2) \cdot (1, 1) = 2\,t^2, \end{cases}$$

então:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F - \int_{C_2^-} F &= \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,dt - \int_0^1 F(\gamma_2^-(t)) \cdot (\gamma_2^-)'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left[t^2 + 2\,t^4\right] dt - \int_0^1 2\,t^2\,dt \\ &= \int_0^1 \left[2\,t^4 - t^2\right] dt = \frac{1}{15}, \end{aligned}$$

logo:

$$\int_C F = \int_{C_1} F - \int_{C_2^-} F = \frac{1}{15}.$$

[3] Calcule: $\displaystyle\int_C F$, onde C é a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$ e F o campo radial de quadrado inverso, para $k = -1$.

A interseção das superfícies é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4. \end{cases}$$

A superfície $x^2 + y^2 = 1$ é um cilindro circular reto; logo a interseção do cilindro com o plano $z = 4$ é um círculo de raio 1, que pode ser parametrizado por

$$\gamma(t) = (cos(t), sen(t), 4), \quad t \in [0, 2\,\pi].$$

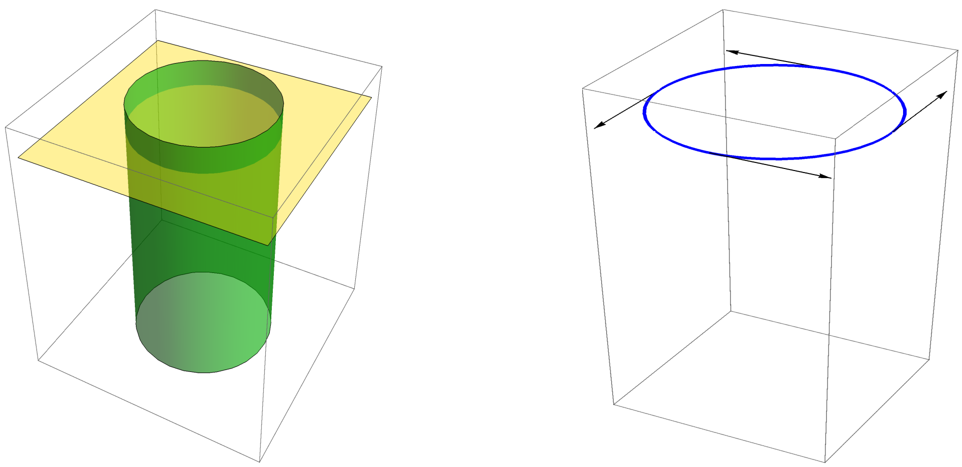

Figura 7.14: Exemplo [3]

Como F é conservativo e C é uma curva fechada; então:

$$\oint_C F = 0.$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde $F(x,y) = (x\,y, x^2)$ e C é a seguinte curva:

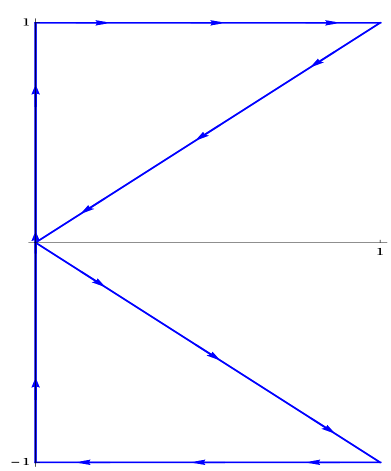

Figura 7.15: Exemplo [4]

Parametrizamos a curva por 5 segmentos de reta:

1. $\gamma_1^+(t) = (0, 2\,t - 1),\ , t \in [0,1]$. Logo, $(\gamma_1^+)'(t) = (0,2)$.

2. $\gamma_2^+(t) = (t, 1),\ , t \in [0,1]$. Logo, $(\gamma_2^+)'(t) = (1,0)$.

3. $\gamma_3^+(t) = (1 - t, 1 - t),\ , t \in [0,1]$. Logo, $(\gamma_3^+)'(t) = (-1,-1)$.

4. $\gamma_4^+(t) = (t, -t),\ , t \in [0,1]$. Logo, $(\gamma_4^+)'(t) = (1,-1)$.

5. $\gamma_5^+(t) = (1 - t, -1),\ , t \in [0,1]$. Logo, $(\gamma_5^+)'(t) = (-1,0)$.

Por outro lado:

1. $F(\gamma_1^+(t)) = F(0, 2\,t - 1) = (0,0)$. Então, $F(\gamma_1^+(t)) \cdot (\gamma_1^+)'(t) = 0$.

2. $F(\gamma_2^+(t)) = F(t, 1) = (t, t^2)$. Então, $F(\gamma_2^+(t)) \cdot (\gamma_2^+)'(t) = t$.

3. $F(\gamma_3^+(t)) = F(1-t, 1-t) = ((1-t)^2, (1-t)^2)$. Então, $F(\gamma_3^+(t)) \cdot (\gamma_3^+)'(t) = -2\,(1-t)^2$.

4. $F(\gamma_4^+(t)) = F(t, -t) = (-t^2, t^2)$. Então, $F(\gamma_4^+(t)) \cdot (\gamma_4^+)'(t) = -2\,t^2$.

5. $F(\gamma_5^+(t)) = F(1 - t, -1) = (t - 1, (1 - t)^2)$. Então, $F(\gamma_5^+(t)) \cdot (\gamma_5^+)'(t) = 1 - t$.

Finalmente:

$$\int_C F = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F + \int_{C_3^+} F + \int_{C_4^+} F + \int_{C_5^+} F,$$

donde obtemos:

$$\begin{aligned}\int_C F &= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 t\,dt - 2\int_0^1 (1-t)^2\,dt - 2\int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1-t)\,dt \\ &= \int_0^1 \big[4\,t - 4\,t^2 - 1\big]\,dt = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

[5] Determine o trabalho realizado pela força $F(x,y) = \big(\dfrac{1}{x+2}, \dfrac{1}{y+3}\big)$ para deslocar uma partícula ao longo da trajetória C dada por:

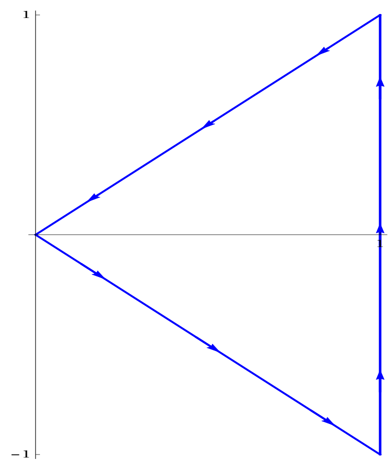

Figura 7.16: Exemplo [5]

Devemos calcular:

$$\int_C F = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F + \int_{C_3^+}.$$

C_1 é o segmento de reta ligando $(0,0)$ e $(1,-1)$, parametrizado por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t, \quad t \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = -dt. \end{cases}$$

Então:

$$\int_{C_1^+} F = \int_0^1 \left[\frac{1}{t+2} - \frac{1}{3-t}\right] dt = 0.$$

C_2 é o segmento de reta ligando $(1,-1)$ e $(1,1)$, parametrizado por:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\,t - 1, \quad t \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 2\,dt. \end{cases}$$

Então:

$$\int_{C_2^+} F = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = ln(2).$$

C_3 é o segmento de reta ligando $(1,1)$ e $(0,0)$; consideremos C_3^- que liga $(0,0)$ e $(1,1)$ e é parametrizado por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt. \end{cases}$$

Assim:

$$\int_{C_3} F = -\int_{C_3^-} F = -\int_0^1 \left[\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3}\right] dt = -ln(2).$$

Então: $\displaystyle\int_C F = ln(2) - ln(2) = 0.$

Por outro lado, o campo F é conservativo, com potencial :

$$f(x,y) = ln(x+2) + ln(y+2) + c,$$

como C é uma curva fechada de classe C^1 por partes, tenemos que:

$$\oint_C F = 0.$$

[6] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde C e formada pelos segmentos de retas C_1, C_2 e C_3 que ligam os pontos $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$; $(1,0,0)$ a $(1,1,0)$ e $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$, respectivamente e $F(x,y,z) = (x^2 + y, -y\,z, x\,z^2)$.

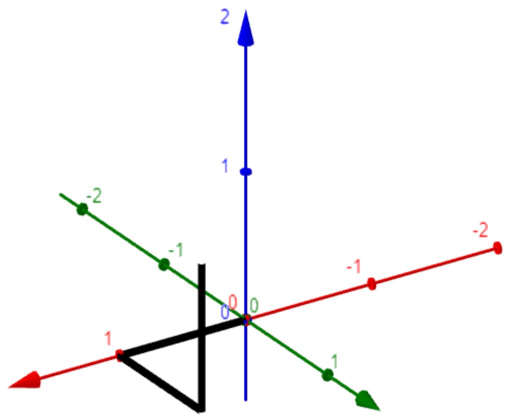

Figura 7.17: Exemplo [6]

Parametrizamos a curva:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

por $\gamma,\ \beta,\ \eta\ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde:

$$\gamma(t) = (t,0,0), \quad \beta(t) = (1,t,0) \quad \text{e} \quad \eta(t) = (1,1,t).$$

Por outro lado:

$$\begin{array}{rlll} C_1: & \gamma'(t) = (1,0,0) & \text{e} & F(\gamma(t)) = (t^2,0,0) \Longrightarrow \gamma'(t)\cdot F(\gamma(t)) = t^2 \\ C_2: & \beta'(t) = (0,1,0) & \text{e} & F(\beta(t)) = (1+t,0,0) \Longrightarrow \beta'(t)\cdot F(\beta(t)) = 0 \\ C_3: & \eta'(t) = (0,0,1) & \text{e} & F(\eta(t)) = (2,-t,t^2) \Longrightarrow \eta'(t)\cdot F(\eta(t)) = t^2; \end{array}$$

então:

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + \int_{C_3} F = \int_{C_1} F = 2\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

[7] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e C é a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 - 2\,y = 0$ e $z = y$.

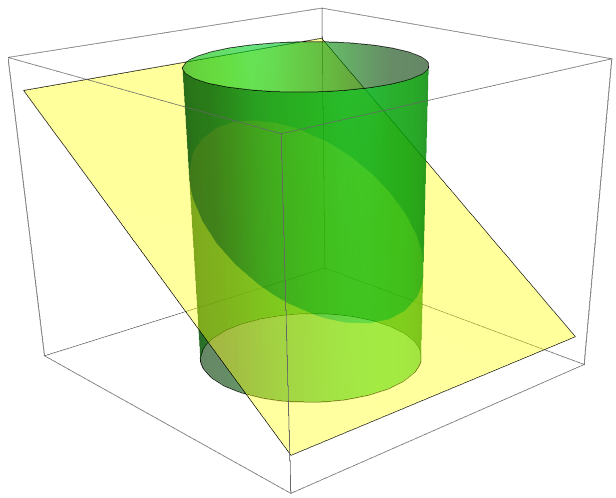

Figura 7.18: Exemplo [7]

A superfície definida por $x^2 + y^2 - 2\,y = 0$ é um cilindro circular reto de raio igual a 1; de fato:

$$x^2 + y^2 - 2\,y = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

e $z - y = 0$ é um plano passando pela origem. A interseção é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\,y = 0 \\ y = z, \end{cases}$$

donde obtemos a curva fechada $x^2 + (z-1)^2 = 1$.

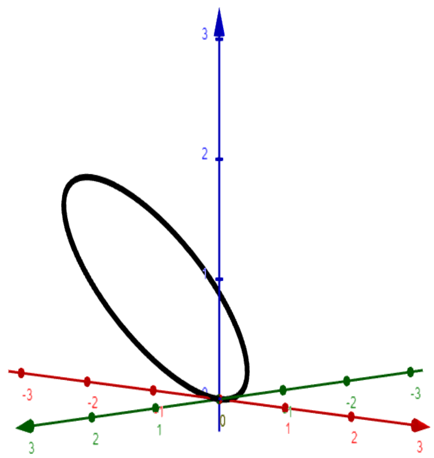

Figura 7.19: Exemplo [7], a curva C

O campo F é conservativo, com potencial:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2);$$

logo:

$$\oint_C F = 0.$$

[8] Calcule $\int_C [y^2 + z^2]\, dx + [x^2 + z^2]\, dy + [x^2 + y^2]\, dz$, onde C é determinada pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 2\,z$ e $x + y - z + 1 = 0$.

Note que $rot\, F \neq \vec{0}$, logo o campo F não é conservativo. A curva C é parametrizada por γ, determinada interseção de $x^2 + y^2 = 2\,z$ e $x + y - z + 1 = 0$:

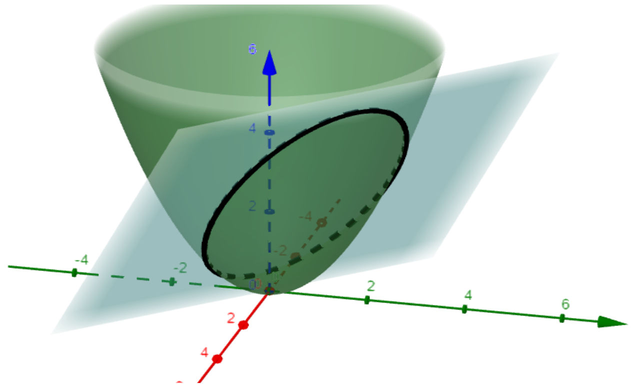

Figura 7.20: As superfícies do exemplo [8]

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2\,z \\ x + y - z + 1 = 0, \quad \Longrightarrow z = x + y + 1, \end{cases}$$

então: $x^2 + y^2 = 2\,x + 2\,y + 2$, logo:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Assim, temos a parametrização de C:

$$\begin{cases} x = 2\,cos(t) + 1 \\ y = 2\,sen(t) + 1 \\ z = 2\,cos(t) + 2\,sen(t) + 3, \quad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

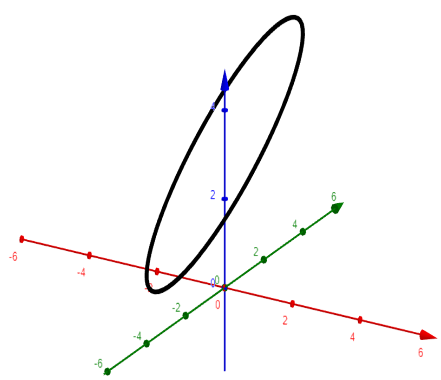

Figura 7.21: Exemplo [8], a curva C

Logo, o vetor tangente é:

$$\gamma'(t) = (-2\,sen(t), 2\,cos(t), 2\,cos(t) - 2\,sen(t))$$

e:

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) = 2\,[20\,cos(2\,t) + 21\,cos(t) + 21\,sen(t) + 3\,cos(3\,t) + 3\,sen(3\,t)].$$

Logo:

$$\int_C F = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))\,dt = 0.$$

7.6 Exercícios

1. Calcule $\displaystyle\int_C f$, onde:

   (a) $f(x,y) = 2\,x\,y^2$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A = (2,0)$ a $B = (0,2)$.

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e C é a reta que liga os pontos $A = (2,0)$ a $B = (0,2)$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A = (2,0)$ a $B = (-1, \sqrt{3})$.

   (e) $f(x,y,z) = e^z$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (1, 2, t^2)$, no intervalo $[0,1]$.

   (f) $f(x,y,z) = x + y$ e C é a curva obtida pela interseção de $z = x^2 + y^2$, $z \le 2$ e $x = y$, $0 \le y$.

   (g) $f(x,y) = |x| + |y|$ e C é a reta que liga os pontos $A = (-2,0)$ a $B = (2,2)$.

   (h) $f(x,y) = |x| + |y|$ e C é a reta que liga os pontos $A = (2,2)$ a $B = (2,0)$.

2. Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde:

   (a) $F(x,y) = (y + 3\,x, 2\,y - x)$ e C é a elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário.

   (b) $F(x,y) = (x\,y, -y)$ e C é formado pela reta que ligando $A = (-3,-3)$ a $B = (-1,1)$ e pelo arco da parábola $y = x^2$ de B a $C = (2,4)$.

   (c) $F(x,y) = (y, -x)$ e C é a astróide.

   (d) $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e C é o círculo centrado na origem, percorrida no sentido anti-horário.

   (e) $F(x,y,z) = (x, y, x\,z - y)$ e C é o segmento de reta ligando $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$.

   (f) $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e C é a curva obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o plano $y = 1$, percorrida no sentido anti-horário.

3. Calcule $\displaystyle\int_C y\,dx + x^2\,dy$, onde C é a curva parametrizada por:

   (a) $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $t \in [0, 2\,\pi]$

   (b) O quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

   (c) O quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força dado:

   (a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2\,x\,y)$ ao mover uma partícula ao longo da fronteira da região limitada por $[0,a] \times [0,a]$, $(a > 0)$.

   (b) $F(x,y,z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice:
   $$\gamma(t) = (2\,cos(t), 2\,sen(t), 2\,t)$$
   do ponto $(2,0,0)$ ao ponto $(2,0,4\,\pi)$.

   (c) $F(x,y,z) = (y, z, x)$ para deslocar uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ do ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(2,4,8)$.

   (d) $F(x,y) = \dfrac{4\,P(x,y)}{\|P(x,y)\|^3}$, onde P é o vetor posição, para deslocar uma partícula ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, do ponto $(-1,0)$ ao ponto $(1,0)$.

5. Verifique que $\displaystyle\int_C F$ é independente do caminho, achando seu potencial, em caso afirmativo:

   (a) $F(x,y) = (3\,x^2\,y, x^3 + 4\,y^3)$

   (b) $F(x,y) = (2\,x\,sen(y) + 4\,e^x, cos(y))$

   (c) $F(x,y) = (-2\,y^3\,sen(x), 6\,y^2\,cos(x) + 5)$

   (d) $F(x,y,z) = (y + z, x + z, x + y)$

   (e) $F(x,y,z) = (y\,sec^2(x) - z\,e^x, tg(x), -e^x)$

   (f) $F(x,y,z) = (2\,x\,z + y^2, 2\,x\,y + 3\,y^2, e^z + x^2))$

6. Determine as constantes para que as integrais sejam independentes do caminho:

   (a) $\displaystyle\int_C (y^2 - x\,y)\,dx + k\,(x^2 - 4\,x\,y)\,dy.$

   (b) $\displaystyle\int_C (a\,z^2 - y^2\,sen(x))\,dx + b\,y\,cos(x)\,dy + x\,z\,dz.$

7. Seja $F(x,y) = (x^2\,y, y^2)$ e a curva C formada pela reunião dos segmentos de reta C_1, C_2, C_3 e C_4, como na figura:

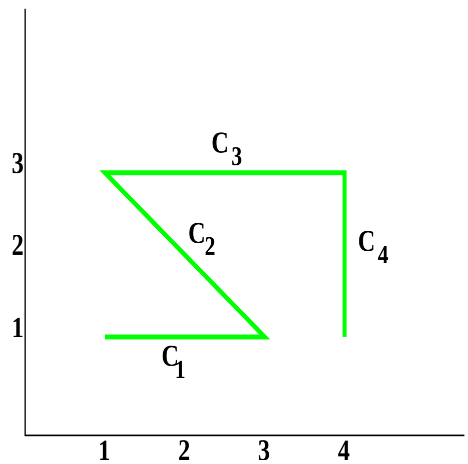

Figura 7.22:

   (a) Parametrize a curva.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_C F.$