GA na reta e no plano

Prof. Fernando Carneiro

Rio de Janeiro, Janeiro de 2017

Contents

1 Introdução **2**

2 Coordenadas na reta **2**

3 Coordenadas no plano **4**

4 Vetores no plano **5**

5 Soma de vetores **10**

6 Multiplicação por um escalar **11**

7 Critério de paralelismo **13**

8 Produto escalar **14**

9 Ângulo entre vetores **14**

10 Projeção de um vetor **17**

11 Equação da reta no plano **19**

12 Posição relativa, ângulo e distância entre duas retas **21**

13 Retas paralelas **23**

14 Parábola: definição, elementos e caso mais simples **24**

15 Elipse: definição, elementos e caso mais simples **25**

16 Hipérbole: definição, elementos e caso mais simples **28**

17 Equação geral do segundo grau **30**

18 Mudança de coordenadas **31**

19 Critério geral e caso $B = 0$ **34**

20 $B \neq 0$ **36**

21 Invariantes da equação do segundo grau 40

22 Técnica alternativa para o caso $\Delta = 0$**. 42**

23 O centro e a equação reduzida no caso $\Delta \neq 0$ **46**

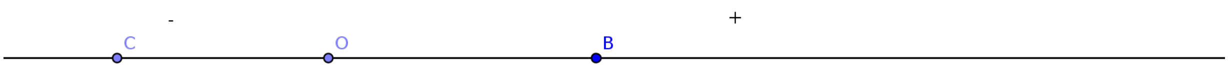
24 Problemas 50

1 Introdução

Veremos nesta apostila os primeiros resultados de Geometria analítica, primeiro na reta, depois no plano.

2 Coordenadas na reta

Primeiro, vamos atribuir coordenadas aos pontos de uma reta. Dada uma reta r podemos fixar um ponto O, que será chamado de origem. Fixado o ponto O, a reta se subdivide em duas semi-retas; uma delas chamamos de semi-reta positiva, a outra de semi-reta negativa.

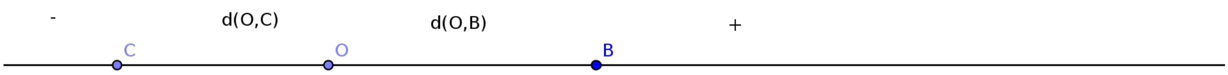


A partir disso, podemos atribuir um número real a cada ponto da reta r:

i. o ponto O tem coordenada 0;

ii. o valor absoluto da coordenada do ponto A em r é $d(A, O)$;

iii. o sinal da coordenada de A em r é o sinal da semi-reta à qual o ponto A pertence.



Dado um número real d_0, há dois pontos na reta que distam d_0 do ponto O, e necessariamente um deles está na semi-reta positiva, e terá coordenada d_0, e o outro está na semi-reta negativa, e terá coordenada $-d_0$. Além disso, dados dois pontos X e Y na reta r, de coordenadas x e y respectivamente, a distância entre eles é

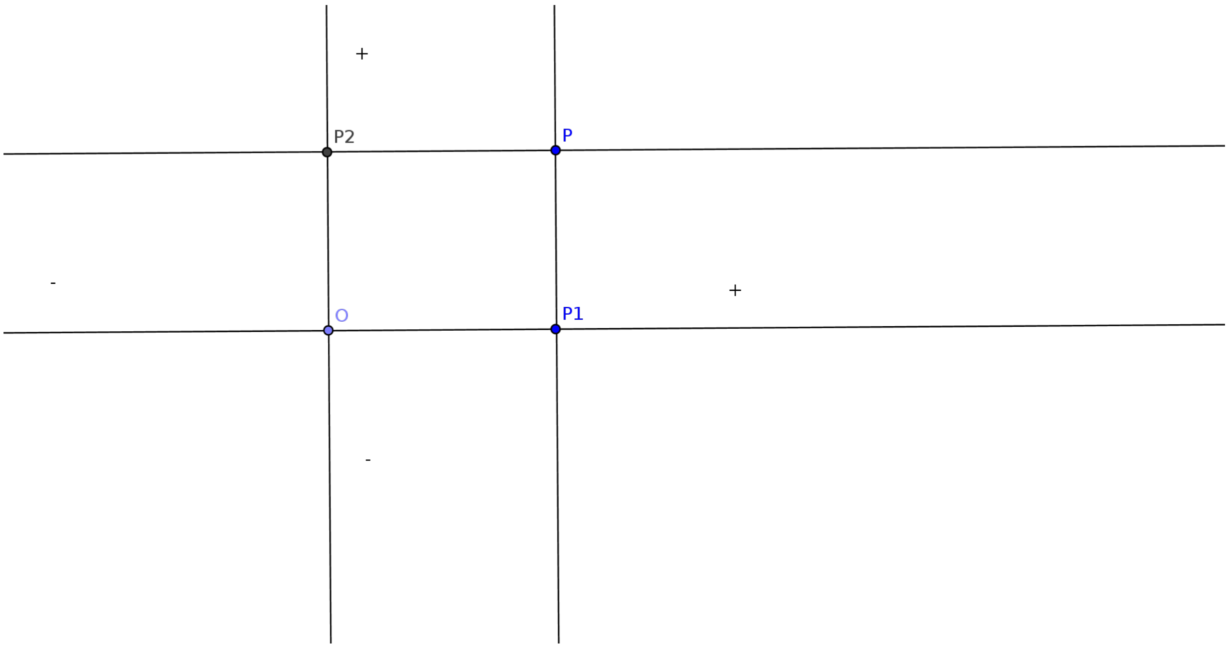
$$d(X, Y) = |x - y|.$$

Outra fórmula que será importante para nós nesse curso é a do ponto médio. Dados dois pontos X e Y na reta r, de coordenadas x e y respectivamente, o ponto médio M do segmento XY tem coordenada m tal que:

$$m = \frac{x + y}{2}.$$

3 Coordenadas no plano

Primeiro vamos atribuir aos pontos do plano coordenadas, isto é, atribuiremos números reais aos pontos do plano. Para isso, devemos primeiro escolher duas retas ortogonais no plano. O ponto de interseção entre as duas é o ponto O. Transformamos essas duas retas em dois eixos, escolhendo como origem dos dois eixos o ponto de interseção O.



Dado o ponto P no plano, ele terá um par de coordenadas, um par ordenado de números reais, (x, y), que atribuímos a P do seguinte modo:

i. Traçamos a reta r_1 paralela ao segundo eixo que passa por P, e chamamos a interseção de r_1 com o primeiro eixo de P_1;

ii. traçamos a reta r_2 paralela ao primeiro eixo que passa por P, e chamamos a interseção de r_2 com o segundo eixo de P_2;

iii. a primeira coordenada de P é a coordenada de P_1 no primeiro eixo, a segunda coordenada de P é a coordenada de P_2 no segundo eixo.

Agora, sejam os pontos do plano P e Q, cujas coordenadas são, respectivamente, (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q). Então, a distância entre os dois pontos é

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

O ponto médio M do segmento PQ tem coordenadas

$$M = (\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}) = \frac{P+Q}{2}.$$

4 Vetores no plano

Um importante instrumento para estudarmos relações e propriedades de objetos no plano são os vetores. Para definirmos o que é um vetor precisamos estudar os segmentos orientados. Dados dois pontos distintos A e B no plano temos um segmento de reta que liga os dois pontos, o segmento de reta AB. Ele pertence a uma reta, r_{AB}, a única que contém os pontos A e B. Do segmento podemos dizer que

i. ele tem dois extremos: A e B;

ii. que ele tem uma direção: a da reta r_{AB};

iii. que ele tem um comprimento: $d(A,B)$.

Para cada segmento AB podemos definir uma orientação, isto é, escolher um sentido no qual o segmento é percorrido, ou de A para B, ou de B para A, chamados respectivamente de $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$. Do segmento orientado $\overline{AB}$ podemos dizer que

i. ele tem um extremo inicial: A;

ii. ele tem um extremo final: B;

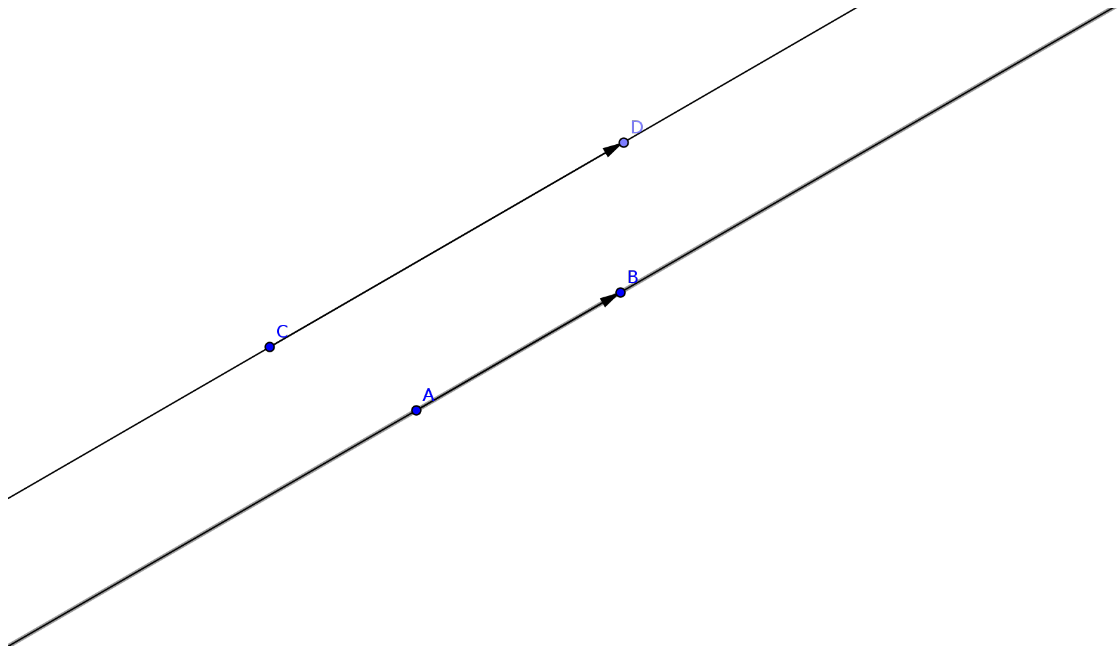
iii. ele tem uma direção: a da reta r_{AB};

iv. ele tem um comprimento: $d(A,B)$;

v. ele tem um sentido: de A para B.

Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, podemos comparar as quatro primeiras informações: se há extremos comuns, se têm a mesma direção, isto é, se estão em retas paralelas, e se têm mesmo comprimento, ou qual a razão entre os comprimentos de ambos. Porém, ainda não temos como comparar os sentidos. Ou melhor, podemos comparar os sentidos de $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$: um tem o sentido oposto ao do outro. Devemos estender essa comparação a outros casos.

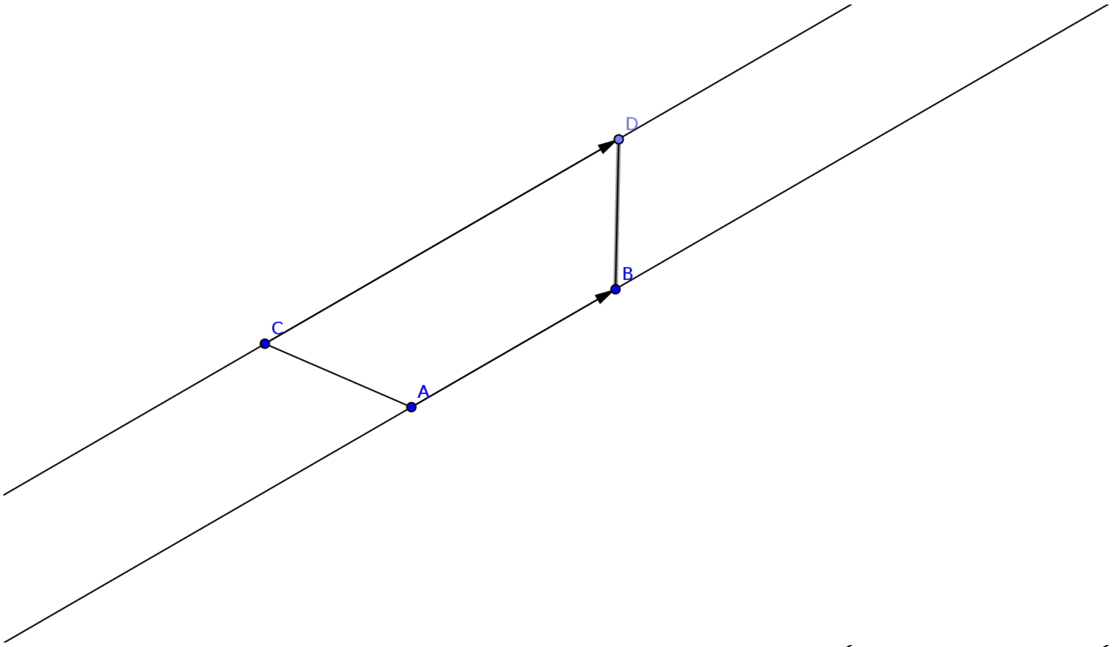
Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção, isto é, se estão em retas paralelas, veremos que há como comparar os sentidos dos dois segmentos orientados.

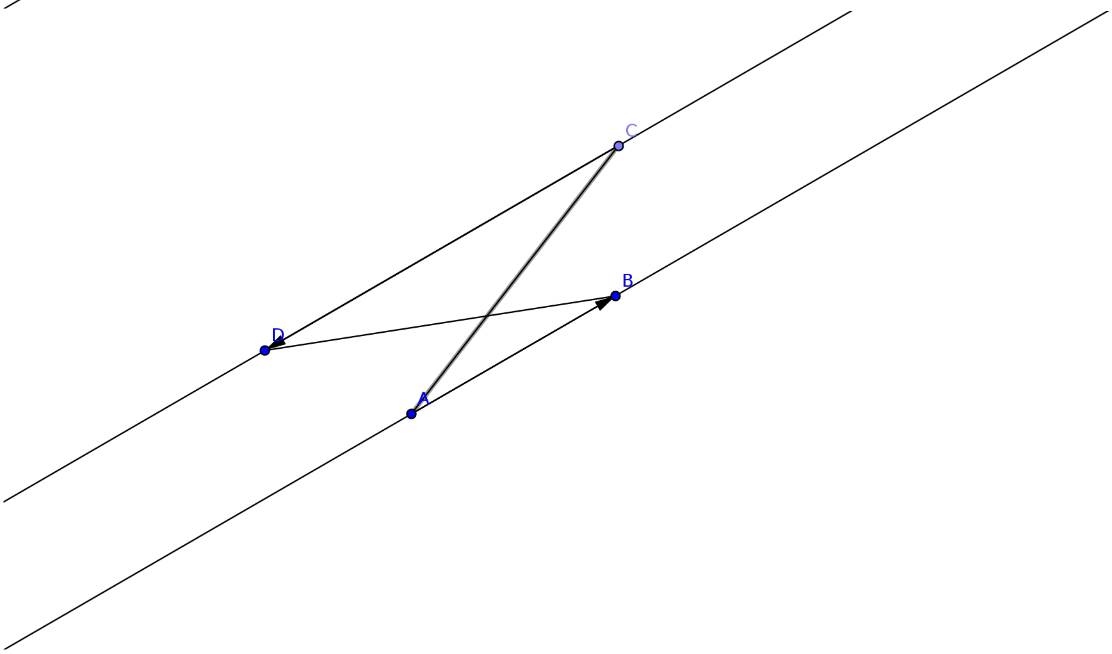


Se estão como na figura acima, intuímos que têm o mesmo sentido. Se comparamos os sentidos de $\overline{BA}$ e de $\overline{CD}$ intuímos que esses dois têm sentidos opostos. A regra explícita é a seguinte:

i. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo sentido se o segmento que une os extremos iniciais dos dois segmentos, AC, não cruza o segmento que une os extremos finais, BD;

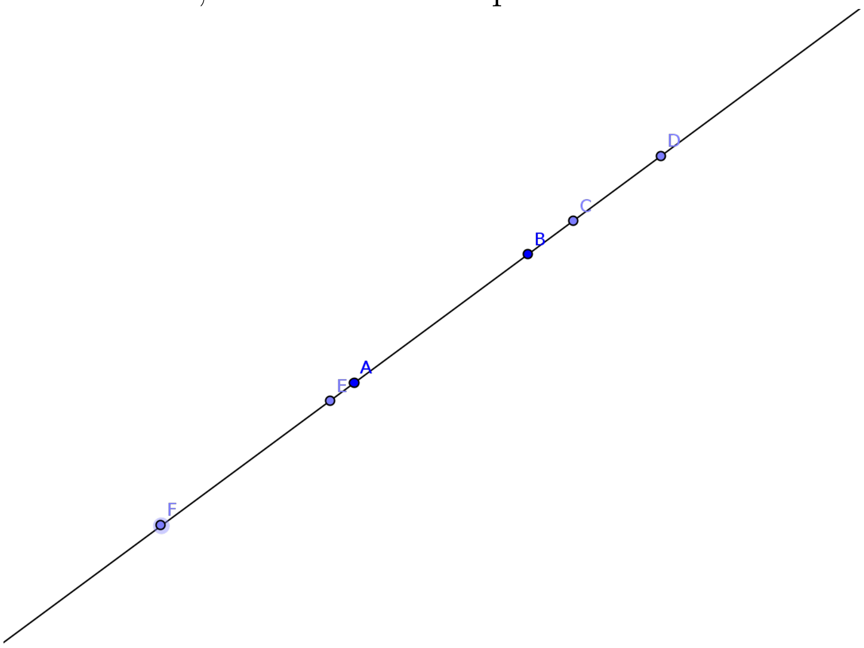
ii. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm sentidos opostos se o segmento que une os extremos iniciais dos dois segmentos, AC, cruza o segmento que une os extremos finais, BD.





As figuras acima valem se os segmentos estão em retas paralelas distintas. Se estão na mesma reta, é mais fácil a comparação. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo sentido se a reta é percorrida no mesmo sentido ao seguirmos os sentidos dos dois segmentos para além de seus extremos.

Caso contrário, os sentidos são opostos.



Na figura acima $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo sentido, $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ têm sentidos opostos.

Agora, segmentos orientados equipolentes são aqueles que

i. têm o mesmo comprimento;

ii. têm a mesma direção;

iii. têm o mesmo sentido.

Há um critério para saber se dois segmentos orientados são equipolentes a partir das coordenadas de seus extremos. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos orientados no plano. Eles são equipolentes, se e somente se os pontos médios dos segmentos que unem o extremo inicial de um ao extremo final do outro são o mesmo ponto. Se os segmentos estão na mesma reta, é fácil demonstrar. Se estão em retas distintas, equivale a formarem um paralelogramo, e paralelogramos são os únicos quadriláteros cujos pontos médios das diagonais coincidem. Logo,

$$\overline{AB} \text{ equipolente a } \overline{CD} \Leftrightarrow \frac{A+D}{2} = \frac{B+C}{2}.$$

Se colocamos os extremos do segmento orientado $\overline{AB}$ num lado da igualdade e os extremos do $\overline{CD}$ no outro lado da igualdade, temos

$$\frac{A+D}{2} = \frac{B+C}{2} \Leftrightarrow B - A = D - C.$$

Logo, dois segmentos orientados são equipolentes se e somente se a diferença entre as coordenadas dos extremos assumem os mesmos valores.

Definimos um vetor como um conjunto de segmentos equipolentes. Além disso, dado um segmento $\overline{AB}$, o vetor $\vec{AB}$ é o conjunto dos segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$.

$$\vec{AB} = \{\overline{CD} \subset \text{ plano } : \overline{CD} \text{ equipolente a } \overline{AB}\}$$

Devemos observar que valem as seguintes propriedades

i. Reflexiva: $\overline{AB}$ equipolente a $\overline{AB}$;

ii. Simétrica: $\overline{CD}$ equipolente a $\overline{AB}$ implica $\overline{AB}$ equipolente a $\overline{CD}$;

iii. Transitiva: se $\overline{AB}$ equipolente a $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ equipolente a $\overline{EF}$ então $\overline{AB}$ equipolente a $\overline{EF}$.

A um dado vetor atribuímos como suas coordenadas o par dado pela diferença das coordenadas dos extremos finais e iniciais dos segmentos orientados que pertencem ao vetor. Isto é,

$$\vec{v} = (x_v, y_v) \text{ quando, dado } \overline{AB} \in \vec{v} \text{ temos } x_v = x_B - x_A, y_v = y_B - y_A.$$

Há duas observações importantes a fazer:

i. Dado um vetor $\vec{v}$ e um ponto qualquer do plano, A, existe um segmento orientado cujo extremo inicial é o ponto A e que pertence a $\vec{v}$; em coordenadas, é o segmento $\overline{AB}$, onde as coordenadas de B são as somas das coordenadas de A e $\vec{v}$;

ii. Dado um vetor $\vec{v}$ existe um ponto P do plano cujas coordenadas são as coordenadas do vetor $\vec{v}$; se consideramos o segmento orientado $\overline{OP}$, esse segmento pertence ao vetor $\vec{v}$; ou seja, o segmento orientado que parte da origem do plano e termina em P pertence a $\vec{v}$.

Daqui por diante, quando um segmento orientado $\overline{AB}$ pertence a $\vec{v}$ diremos que $\overline{AB}$ representa $\vec{v}$.

Exemplo 4.1. Dados os pontos $A(-1, 1)$ e $B(2, 5)$, então o vetor que o segmento orientado $\overline{AB}$ representa que vetor? E qual representante desse vetor começa no ponto $C(-2, -1)$?

Representa

$$\vec{v} = B - A = (2 - (-1), 5 - 1) = (3, 4).$$

O módulo desse vetor é

$$|\vec{v}| = d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

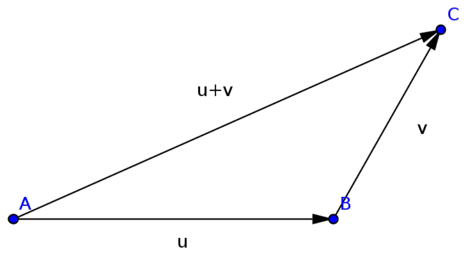
O representante de $\vec{v}$ que começa no ponto $C(-2, -1)$ é o segmento orientado $\overline{CD}$ tal que

$$D - C(-2, -1) = (3, 4) \Rightarrow D = (3, 4) + (-2, -1) = (1, 3).$$

5 Soma de vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a operação de soma devolve um terceiro vetor chamado $\vec{u} + \vec{v}$ cujas coordenadas são as somas das coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v).$$



A primeira observação é que se $\vec{u} = \vec{AB}$ e se $\vec{v} = \vec{BC}$ então

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \vec{AC}.$$

As outras propriedades da soma de vetores decorrem naturalmente das propriedades de soma de números reais:

i. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

ii. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

iii. Elemento neutro: Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;

iv. Inverso aditivo: Para todo vetor $\vec{u}$ existe $\vec{-u}$ tal que $\vec{u} + (\vec{-u}) = \vec{0}$.

Exemplo 5.1. Dados $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3)$, qual é a soma?

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (-2, 3) = (-1, 5).$$

6 Multiplicação por um escalar

Dados um número real m e um vetor $\vec{u}$, definimos o vetor $m\vec{u}$ como sendo o vetor de coordenadas (mx_u, my_u).

Podemos mostrar, a partir de representantes de $\vec{u}$ e $m\vec{u}$ que partem do mesmo ponto A, $\vec{u} = \vec{AB}$ e $m\vec{u} = \vec{AC}$ as seguintes propriedades:

i. A, B e C estão na mesma reta e, portanto, $\vec{u}$ e $m\vec{u}$ têm a mesma direção;

ii. $|m\vec{u}| = |m||\vec{u}$;

iii. se $m < 0$ então $\vec{u}$ e $m\vec{u}$ têm sentidos opostos, se $m > 0$ eles têm mesmo sentido, e se $m = 0$ então $m\vec{u} = \vec{0}$.

As propriedades acima decorrem das seguintes observações:

$$C = (1 - m)A + mB;$$
$$d(A, C) = |m|d(A, B)$$
$$d(B, C) = |m - 1|d(A, B);$$

$$m < 0 \Rightarrow d(B, C) = d(A, B) + d(A, C);$$
$$0 < m < 1 \Rightarrow d(A, B) = d(A, C) + d(B, C);$$
$$m > 1 \Rightarrow d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Outras propriedades da multiplicação por um escalar são:

i. se $m = 0$, $m\vec{u} = \vec{0}$;

ii. se $m = 1$, $m\vec{u} = \vec{u}$;

iii. se $m = -1$, $m\vec{u} = \vec{-u}$;

iv. $m(\vec{u} + \vec{v}) = (m\vec{u}) + (m\vec{v})$;

v. $(m + n)\vec{u} = (m\vec{u}) + (n\vec{u})$;

vi. $m(n\vec{u}) = (mn)\vec{u}$;

Não somente a multiplicação por um escalar leva um vetor $\vec{u}$ em com a mesma direção, como, inversamente, dois vetores com mesma direção são múltiplos um do outro, já que podemos, nesse caso, comparar os sentidos, o que define o sinal da multiplicidade, e comparar os módulos, o que define o valor absoluto da multiplicidade.

Uma operação importante que podemos fazer a partir da multiplicação por um escalar é achar o versor de um vetor. O versor do vetor $\vec{u}$ é o vetor tal que

i. tem a mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$,

ii. tem módulo 1.

A partir dessas duas características acima temos como achar uma fórmula para o versor

$$\text{Versor de } \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}.$$

É fácil ver que o vetor dado pela fórmula satisfaz as condições acima.

7 Critério de paralelismo

A multiplicação por um escalar nos dá um critério para saber se dois vetores são paralelos a partir da comparação de suas coordenadas. Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o critério é:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \vec{v} = m\vec{u} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, x_v = mx_u, y_v = my_u.$$

Exemplo 7.1. Os vetores $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (-2, -6)$ são paralelos pois $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Exemplo 7.2. Os vetores $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (2, -6)$ não são paralelos pois suas coordenadas não são proporcionais.

8 Produto escalar

O produto escalar é uma operação tal que dados dois vetores o resultado é um número real que depende desses dois vetores. Mais especificamente, se $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v.$$

As propriedades básicas do produto escalar são:

i. Comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

ii. $(m\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$;

iii. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$;

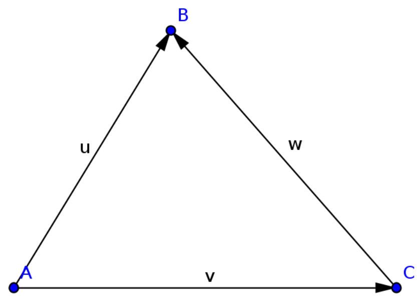
iv. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |u|^2$.

Exemplo 8.1. Calcule o produto escalar entre $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (3, -2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3) \cdot (3, -2) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 3 - 6 = -3.$$

9 Ângulo entre vetores

A principal aplicação do produto vetorial é o cálculo de ângulos. Ela deriva da relação do produto escalar com o cosseno entre vetores, que pode ser demonstrada utilizando-se a lei dos cossenos:



Pela figura acima temos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$. Se queremos saber o cosseno do ângulo θ, que está entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, devemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo da figura:

$$
\begin{gathered}
|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta, \\
|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta, \\
(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta, \\
|\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta, \\
-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta,
\end{gathered}
$$

Portanto, o ângulo entre dois vetores é

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

O ângulo entre dois vetores tem sempre valor entre 0^o e 180^o, e entre esses valores temos as seguintes possibilidades para o sinal do cosseno:

i. se $\theta = 90^o$ então $\cos\theta = 0$;

ii. se $0^o \leq \theta < 90^o$ então $\cos\theta > 0$;

iii. se $90^o < \theta \leq 180^o$ então $\cos\theta < 0$.

Para o caso de vetores temos:

i. se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então o ângulo entre os dois é 90^o;

ii. se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ então o ângulo entre os dois está entre 0^o e 90^o;

iii. se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ então o ângulo entre os dois está entre 90^o e 180^o.

Isso implica o seguinte critério de ortogonalidade:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ ortogonais } \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Em duas coordenadas, isso se torna:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ ortogonais } \Leftrightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0.$$

Se temos um vetor $\vec{u} = (x_u, y_u)$ há uma operação natural para encontrarmos um vetor ortogonal $\vec{u}^{\perp}$:

$$\vec{u}^{\perp} = (-y_u, x_u) \text{ é ortogonal a } \vec{u}.$$

Outra operação interessante é encontrar, dados dois vetores, aquele que divide o ângulo entre eles ao meio, ou seja, o vetor que funciona como bissetor do ângulo. Como a diagonal de um losango divide os ângulos internos do losango ao meio, então podemos somar os versores para obter o bissetor do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\text{Bissetor do ângulo entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v} = \text{versor de } \vec{u} + \text{versor de } \vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} + \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}.$$

Exemplo 9.1. Calcule o ângulo entre $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (3, -2)$. O produto escalar entre $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (3, -2)$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3) \cdot (3, -2) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 3 - 6 = -3.$$

Portanto, o ângulo entre eles é

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{1^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{130}} = \frac{-3\sqrt{130}}{130}.$$

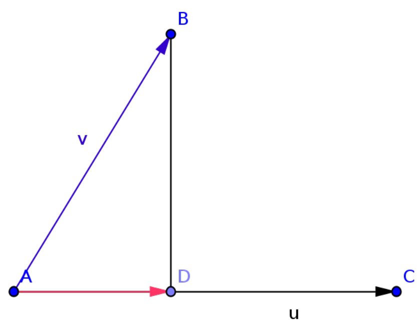
Exemplo 9.2. Calcule o ângulo entre $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (3, -1)$. O produto escalar entre $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (3, -1)$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3) \cdot (3, -1) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Portanto, o ângulo entre eles é $arccos 0 = 90^o$.

10 Projeção de um vetor

Vamos definir a projeção de um vetor $\vec{v} = (x_v, y_v)$ na direção de $\vec{u} = (x_u, x_v)$:



A projeção do vetor azul $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ é o vetor vermelho, $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, e ela tem, pela figura, duas propriedades:

i. $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$;

ii. $\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$;

Essas duas propriedades implicam:

i. existem um número real m tal que $proj_{\vec{u}}\vec{v} = m\vec{u}$;

ii. $(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$;

o que, por sua vez, implica

$$(\vec{v} - m\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow m = (\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}) \Rightarrow proj_{\vec{u}}\vec{v} = (\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}})\vec{u}.$$

Exemplo 10.1. A projeção de $\vec{v} = (4, 2)$ na direção de $\vec{u} = (1, 1)$ é

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = (\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}})\vec{u} = (\frac{4+2}{1+1})(1, 1) = 3(1, 1) = (3, 3).$$

Exemplo 10.2. Seja $\vec{v} = (a, b)$ e os vetores $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. Então as projeções são

$$proj_{\vec{i}}\vec{v} = (\frac{a+0}{1})(1, 0) = (a, 0),$$
$$proj_{\vec{j}}\vec{v} = (\frac{0+b}{1})(0, 1) = (0, b).$$

Exemplo 10.3. Como achar a altura do triângulo dado por $A(1, 0)$, $B(4, 4)$, $C(5, 3)$, que parte do vértice A? Se ela parte de A, a base relativa a essa altura é BC. Logo, se projetamos AB na direção de BC, temos a altura desejada se fazemos $\vec{AB}$ menos a projeção.

$$proj_{\vec{BC}}\vec{AB} = (\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{\vec{BC} \cdot \vec{BC}})\vec{BC} = (\frac{(3, 4) \cdot (1, -1)}{(1, -1) \cdot (1, -1)})(1, -1) = \frac{-1}{2}(1, -1)$$
$$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow \vec{h} = \vec{AB} - proj_{\vec{BC}}\vec{AB} = (3, 4) - (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2}).$$

A altura é

$$|\vec{h}| = \frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

Como a base é $|\vec{BC}| = \sqrt{2}$, então

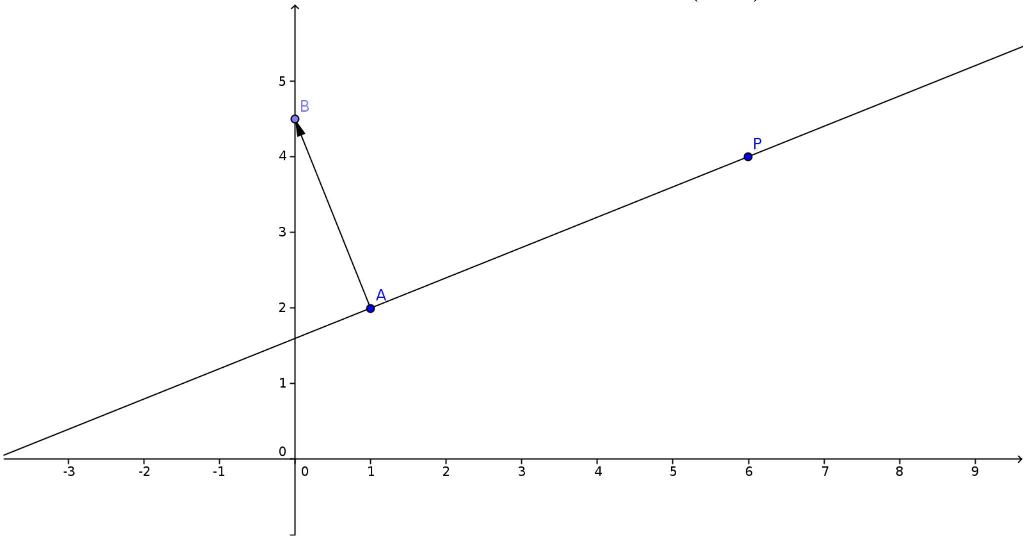
$$\text{Área } = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{7}{2}\sqrt{2} = \frac{7}{2}.$$

11 Equação da reta no plano

Dados o ponto $P(x, y)$ e $A(x_0, y_0)$ no plano e o vetor $\vec{n} = (a, b)$, a seguinte equação

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

determina uma reta no plano. Mais especificamente, determina a reta que passa pelo ponto A e tem vetor normal $\vec{n} = (a, b)$.



Isso acontece porque no plano cada direção tem somente uma direção ortogonal. No caso de vetores, isso significa que cada vetor $\vec{n} = (a, b)$ tem um representante ortogonal, o vetor $\vec{v} = (-b, a)$.

Desenvolvendo a equação temos

$$0 = \vec{AP} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - (ax_0 + by_0)$$

$$\Rightarrow 0 = ax + by - d, \text{ tal que } d := ax_0 + by_0,$$

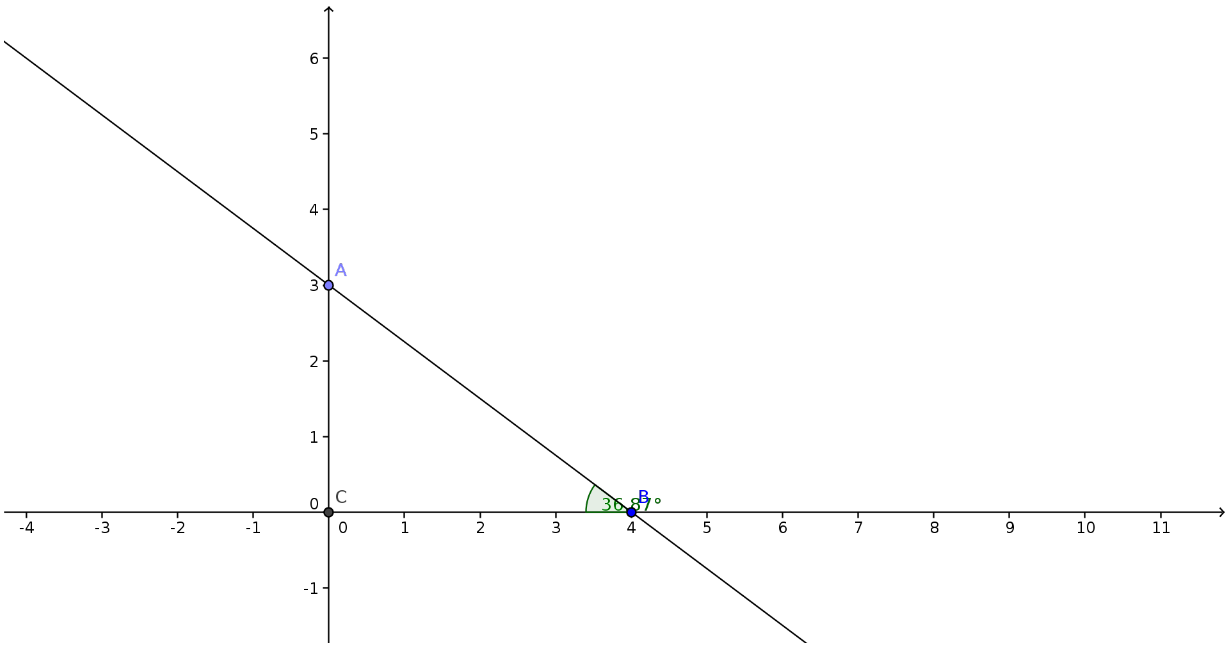
$$\text{ou } ax + by = d.$$

Vamos definir a inclinação da reta

$$ax + by = d$$

como a tangente de um dos ângulos que a reta faz com o eixo Ox:

$$\tan\theta = \frac{a}{b}.$$



Na figura acima temos a reta

$$3x + 4y = 12,$$

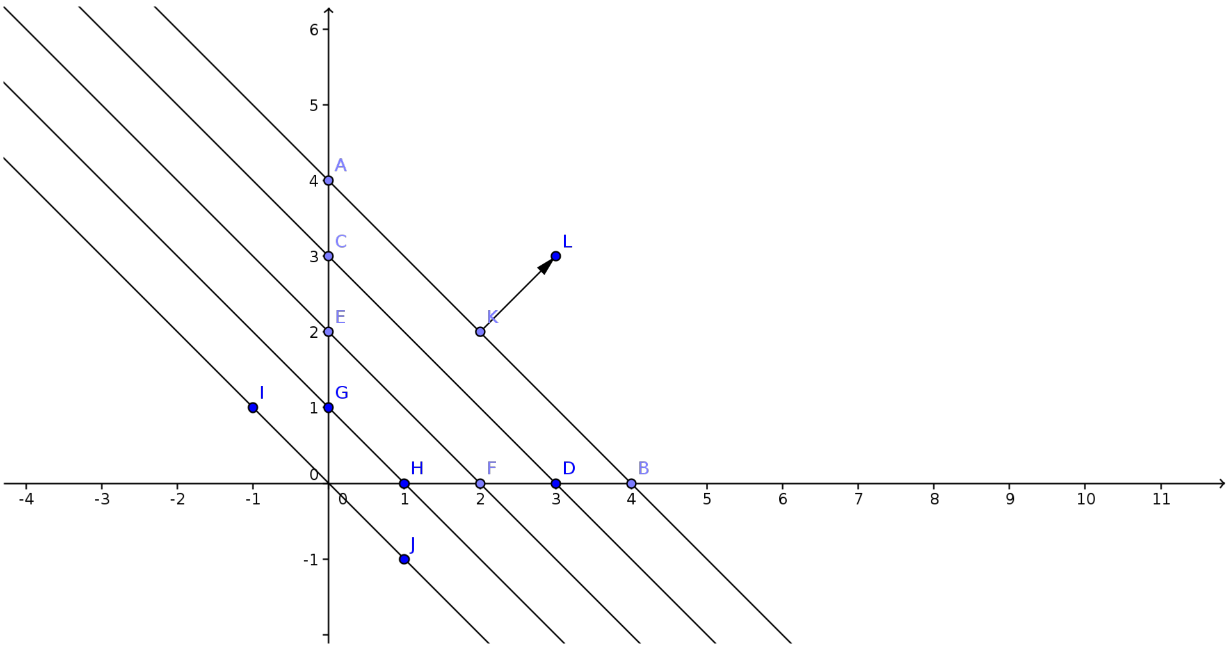
de inclinação $\frac{3}{4}$.

Para o próximo tópico, devemos saber além de retas, de semi-planos. Um semi-plano, como diz o nome, é metade do plano. Para dividir o plano em duas metades, precisamos de uma reta. Portanto, a cada semi-plano associamos uma reta. Ela divide o plano bidimensional em dois semi-planos, Se a reta tem equação geral

$$ax + by = d$$

os semi-planos são

$$ax + by \leq d \text{ e } ax + by \geq d.$$



Na figura acima temos a reta que define o semi-plano

$$x + y \leq 4.$$

O vetor normal é o vetor $(1, 1)$ e seguindo o sentido do vetor normal vamos da reta

$$x + y = 0$$

até a reta

$$x + y = 4$$

e assim por diante.

12 Posição relativa, ângulo e distância entre duas retas

Dadas duas retas

$$r_1 : ax + by = d, r_2 : a'x + b'y = d'$$

o ângulo entre r_1 e r_2 é o menor ângulo formado pelas duas retas. Isto implica que o ângulo está entre 0^o e 90^o. Dados os vetores

$$n_1 = (a, b), n_2 = (a', b')$$

normais a r_1 e r_2 respectivamente, se α é o ângulo entre n_1 e n_2, o menor ângulo entre as retas será α ou $180^o - \alpha$, dependendo do sentido dos vetores normais escolhidos. Logo, como o cosseno do ângulo entre as retas é positivo e é o valor de cosseno de α e de $180^o - \alpha$ a menos de um sinal, vale a fórmula:

$$\cos\theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}.$$

Exemplo 12.1. Sejam as retas

$$r_1 : x + y = 1, r_2 : 4x - 3y = 2.$$

O ângulo entre elas é

$$\cos\theta = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Exemplo 12.2. Retas ortogonais têm vetores normais ortogonais:

$$r_3 : 2x + 2y = 5, r_4 : x - y = 3.$$

Podemos agora estudar a posição relativa entre duas retas no plano. São duas as posições possíveis: paralelas ou concorrentes. A posição relativa pode ser determinada de acordo com o ângulo entre duas retas, ou a interseção ou a distância.

Posição relativa	Paralelas distintas	Concorrentes
Ângulo	$= 0$	$\neq 0$
Interseção	$\emptyset$	1 ponto
Distância	$\neq 0$	$= 0$

Considerando os dois exemplos dessa seção, r_1 e r_2 são concorrentes, r_3 e r_4 também são concorrentes, e r_1 e r_3 são paralelas distintas.

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 e do ângulo entre r_3 e r_4 é diferente de 1 e, portanto, esses ângulos são diferentes de zero.

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_3 é 1 e portanto o ângulo entre elas é zero:

$$\cos\theta = \frac{|2+2|}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = 1.$$

Outra maneira de concluir que são paralelas é verificar se os vetores normais são paralelos - no caso dos exemplos são iguais, $(1,1)$ e $(2,2)$.

Agora descobriremos a interseção dos dois exemplos anteriores.

A interseção entre r_1 e r_2 é o ponto que satisfaz às duas equações:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 4x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=3, \\ 4x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow 7x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{7}, y=\frac{2}{7}.$$

A interseção entre r_3 e r_4 é o ponto que satisfaz às duas equações:

$$\begin{cases} 2x+2y=5, \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=5, \\ 2x-2y=6 \end{cases} \Rightarrow 4x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{4}, y=\frac{-1}{4}.$$

A interseção entre r_1 e r_3 é o ponto que satisfaz às duas equações:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=2, \\ 2x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow 5=6 \Rightarrow r_1 \cap r_3 = \emptyset.$$

A distância nos dois primeiros casos é zero porque as retas são concorrentes, i.e., têm um ponto em comum. No último, é dada pela fórmula:

$$d(s_1,s_2) = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

tal que

$$s_1 : ax+by=d_1, s_2 : ax+by=d_2.$$

No caso de r_1 e r_2 temos:

$$\begin{cases} r_1 : x+y=1, \\ r_3 : 2x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 : 2x+2y=2, \\ r_3 : 2x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow d(r_1,r_3) = \frac{|2-5|}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

13 Retas paralelas

Uma outra maneira de verificar que duas retas são paralelas é verificar, dadas as retas

$$\begin{cases} r_1 : a_1x + b_1y = d_1, \\ r_2 : a_2x + b_2y = d_2, \end{cases}$$

se os vetores normais (a_1, b_1) e (a_2, b_2) são paralelos. Há duas maneiras de se fazer isso no plano.

A primeira é verificar se (a_1, b_1) e (a_2, b_2) têm coordenadas proporcionais, e assim teremos três situações:

$$\begin{cases} \text{são a mesma reta se } a_1 = ma_2, b_1 = mb_2, d_1 = md_2, \text{ para algum } m, \\ \text{são paralelas distintas se } a_1 = ma_2, b_1 = mb_2, \text{ para algum } m, \text{ e } d_1 \neq md_2, \\ \text{são concorrentes se não existe } m \text{ tal que } a_1 = ma_2, b_1 = mb_2. \end{cases}$$

A segunda é verificar se (a_1, b_1) e $(b_2, -a_2)$ são ortogonais; o que, por sua vez, podemos expressar como:

$$(a_1, b_1) \cdot (b_2, -a_2) = 0 \Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0.$$

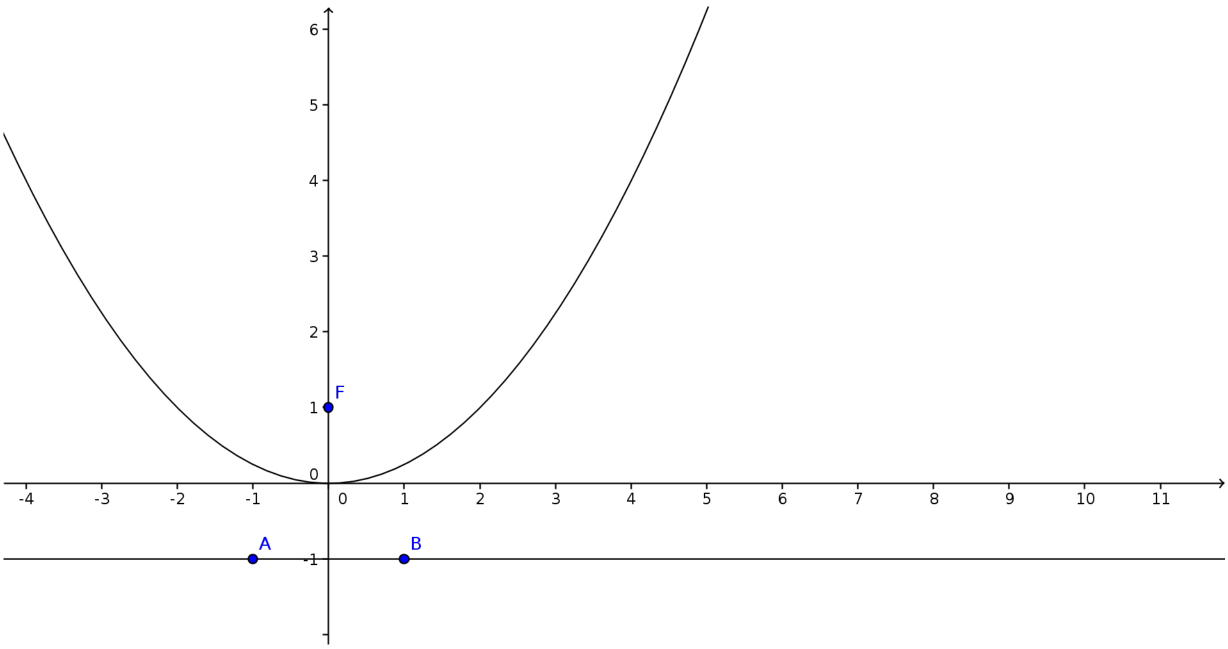
14 Parábola: definição, elementos e caso mais simples

Dado um ponto F no plano e uma reta r tais que F não pertence a r, a parábola cujo foco é o ponto F e cuja reta diretriz é r é o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

A reta focal associada à parábola é a reta que passa pelo foco F e é ortogonal à diretriz.

Um ponto que podemos determinar desde já que pertence à parábola é o vértice: seja V o ponto médio do segmento que está na reta focal que liga o foco F à diretriz; esse ponto V pertence à parábola pois $d(V, F) = d(V, r)$ trivialmente. O vértice é o único ponto da reta focal que pertence à parábola.



A parábola mais simples é dada pelo foco $F(0,p)$ e a reta diretriz $y = -p$, onde p é um número real. A equação que representa os pontos da parábola é

$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \Rightarrow 4py = x^2.$

Exemplo 14.1. Se o foco é $F(0,0)$ e $r : x+y = 2$, então a parábola definida por F e r é dada pelos pontos $P(x,y)$ tais que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(x^2+y^2) = (x+y-2)^2$$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$

15 Elipse: definição, elementos e caso mais simples

Dados dois pontos F_1 e F_2 e a constante real $2a$, a elipse definida por esses dados é o conjunto dos pontos P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Vamos chamar a distância entre os focos F_1 e F_2 de $2c$. Por desigualdade triangular,

$$2c \leq d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow c \leq a.$$

Definimos o valor b como sendo o número real positivo tal que

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

isto é, ele mede o tamanho do outro cateto do triângulo retângulo de hipotenusa a e cateto c. Um valor importante a ser calculado é chamado de excentricidade,

$$e := \frac{c}{a},$$

que, no caso da elipse, é um valor entre 0 e 1.

Além dos focos F_1 e F_2, a elipse tem vários elementos. O primeiro é a reta focal, e como o nome diz, é a reta que passa por F_1 e F_2 (podemos determiná-la se os focos são pontos distintos, o que vamos supor por enquanto). Outro elemento é o centro C, definido como o ponto médio do segmento cujos extremos são os dois focos. Temos dois vértices A_1 e A_2 na reta focal, isto é, dois pontos que pertencem à elipse, A_1 e A_2 à distância a do ponto C. Portanto,

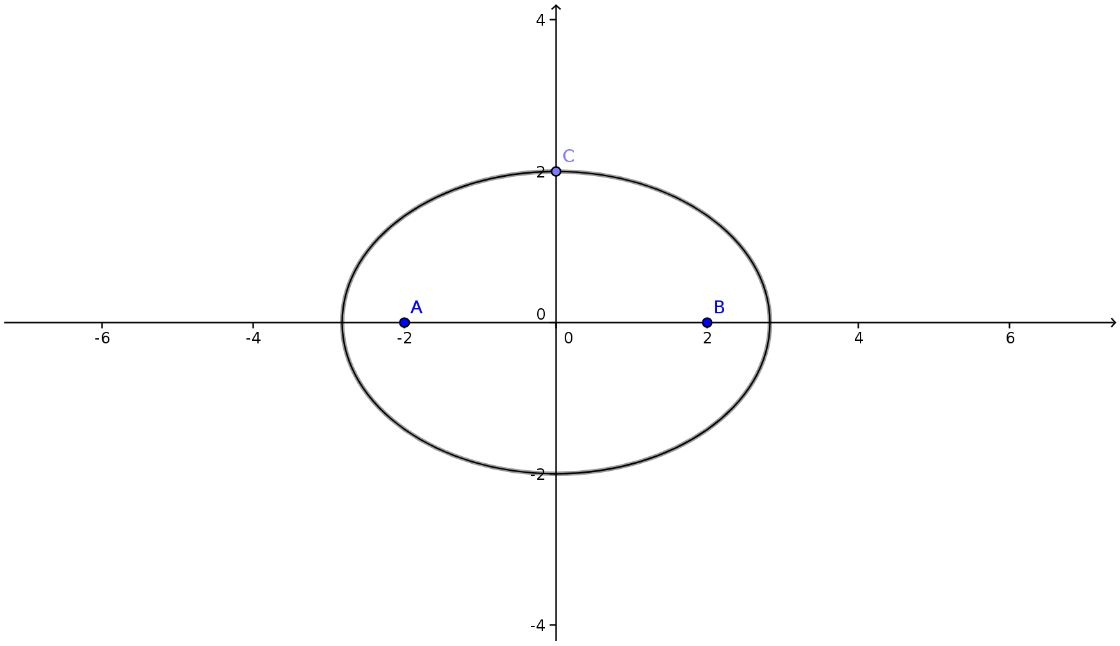
$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = (a - c) + (a + c) = 2a,$$

$$d(A_2, F_2) + d(A_2, F_1) = (a - c) + (a + c) = 2a,$$

o que implica que A_1 e A_2 pertencem à elipse. Temos a reta que passa por C e é ortogonal à reta focal. Nela também há dois vértices B_1 e B_2, é só escolher os pontos que estão à distância b de C.

$$d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$

$$d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$



A elipse mais simples é aquela cujos focos são $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, ou seja, os focos estão no eixo Ox e o ponto médio dos focos é a origem. Pela definição

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a \Rightarrow (x+c)^2+y^2=$$

$$4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Rightarrow 4cx-4a^2=$$

$$-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Exemplo 15.1. Se os focos são $F_1(-1,0)$ e $F_2(1,0)$ e se a constante é $2a=4$ então

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=-\sqrt{(x-1)^2+y^2}+4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=(x-1)^2+y^2+16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow 8\sqrt{(x-1)^2+y^2}=16-4x$$

$$\Rightarrow 4((x-1)^2+y^2)=16-8x+x^2 \Rightarrow 3x^2+4y^2-12=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

16 Hipérbole: definição, elementos e caso mais simples

Dados dois pontos F_1 e F_2 e a constante real $2a$, a hipérbole definida por esses dados é o conjunto dos pontos P tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Vamos chamar a distância entre os focos F_1 e F_2 de $2c$. Por desigualdade triangular,

$$2c \geq d(F_1, F_2) \geq |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow c \geq a.$$

Definimos o valor b como sendo o número real positivo tal que

$$b^2 + a^2 = c^2,$$

isto é, ele mede o tamanho do outro cateto do triângulo retângulo de hipotenusa c e cateto a. Um valor importante a ser calculado é chamado de excentricidade,

$$e := \frac{c}{a},$$

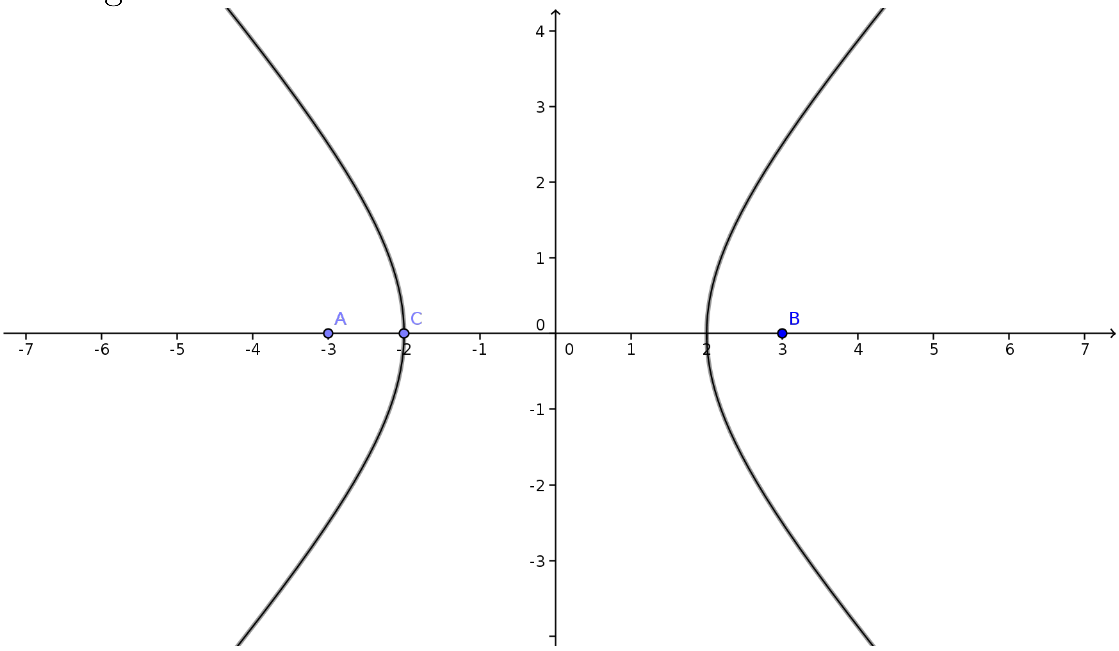
que, no caso da hipérbole, é um valor maior que 1.

Além dos focos F_1 e F_2, a hipérbole tem vários elementos. O primeiro é a reta focal, e como o nome diz, é a reta que passa por F_1 e F_2. Outro elemento é o centro C, definido como o ponto médio do segmento cujos extremos são os dois focos. Temos dois vértices A_1 e A_2 na reta focal, isto é, dois pontos que pertencem à hipérbole, A_1 e A_2 à distância a do ponto C. Portanto,

$$-d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = -(c - a) + (c + a) = 2a,$$

$$-d(A_2, F_2) + d(A_2, F_1) = -(c - a) + (c + a) = 2a,$$

o que implica que A_1 e A_2 pertencem à hipérbole. Temos a reta que passa por C e é ortogonal à reta focal. Nela também há dois pontos B_1 e B_2, à distância b de C. Nesse caso eles não estão na hipérbole, mas eles ajudam a definir as assíntotas, duas retas concorrentes que se cruzam no centro C e que tem as seguintes propriedades: a hipérbole não cruza as assíntotas mas se aproxima dessas duas retas à medida que os pontos da hipérbole estão longe dos focos.



A hipérbole mais simples é aquela cujos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, ou seja, os focos estão no eixo Ox e o ponto médio dos focos é a origem. Pela definição

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 =$$
$$4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow 4cx - 4a^2 =$$
$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

As assíntotas são as duas retas dadas pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Observe que um ponto não pode estar nas assíntotas e na hipérbole ao mesmo tempo, por esta definição. A última equação é a de duas retas pois

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow (\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ ou } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

Além disso, para pontos da hipérbole vale

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2},$$

e essa igualdade mostra que se x se torna um número muito grande, a razão $\frac{y}{x}$ se aproxima da razão das assíntotas $\pm\frac{b}{a}$.

Exemplo 16.1. Se os focos são $F_1(-1,0)$ e $F_2(1,0)$ e se a constante é $2a = 1$ então

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \pm 1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \pm 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2+1\pm 2\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow \pm 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$= -1+4x \Rightarrow 4((x-1)^2+y^2) = 1-8x+16x^2 \Rightarrow 12x^2-4y^2-3=0.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{4})} - \frac{y^2}{(\frac{3}{4})} = 1.$$

17 Equação geral do segundo grau

A equação do segundo grau é

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

tal que A, B, C, D, E, F são números reais. Os pontos que a satisfazem representam conjuntos do plano. Nessa seção estudamos que tipos de conjuntos podem ser dados pelos pontos que satisfazem a equação do segundo grau.

Casos mais simples:

1. Se $A, B, C = 0$ então $2Dx + 2Ey + F = 0$ é a equação de uma reta;
2. Se elevamos ao quadrado a equação de uma reta temos uma equação do segundo grau: $(ax+by-d)^2 = 0$ equivale a $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - 2adx - 2bdy + d^2 = 0$, e esta última é satisfeita pelos pontos de uma reta;

3. Se fazemos o produto das equações de duas retas temos uma equação do segundo grau: $0 = (x + y - 1)(x - y + 1)$ equivale a duas retas, $x + y = 1$ e $x - y = -1$ e equivale a $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$.

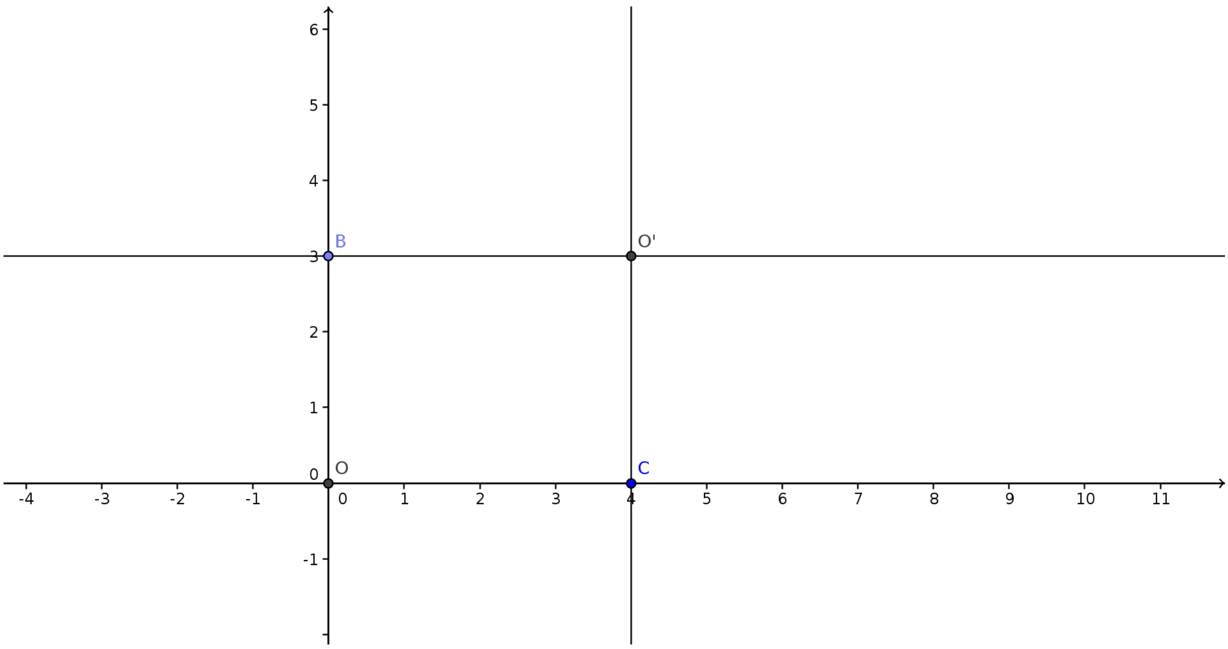
4. A equação $x^2+y^2-1 = 0$ representa um círculo; $x^2+y^2 = 0$ representa um ponto; a equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$ representa o conjunto vazio;

5. A equação $xy - 1 = 0$ tem gráfico fácil de ser construído mas não é nenhum dos casos acima: não é uma reta, duas retas, um ponto, conjunto vazio; isto mostra que precisamos de um estudo mais profundo da equação.

18 Mudança de coordenadas

Para estudarmos a equação do segundo grau no plano temos que primeiro estudar mudança de coordenadas, que será nosso instrumento para simplificar a equação, isto é, tornar $B = 0$ e depois $D, E = 0$. As duas mudanças de coordenadas que vamos utilizar são a translação e a rotação. Elas são movimentos rígidos no plano, não alteram distâncias e, portanto, não alteram o formato das cônicas e outras figuras em geral.

Primeiro veremos a translação. Como escolhemos, para dar coordenadas aos pontos, duas retas ortogonais r_1 e r_2 e definimos como origem O dos eixos dados pelas duas retas o ponto de interseção das duas, poderíamos ter escolhido outras duas retas ortogonais. Se escolhemos outras duas retas ortogonais, r_3 e r_4, paralelas a r_1 e r_2, temos dois eixos ortogonais, com as mesmas direções dos eixos anteriores, mas com uma origem diferente, O' em vez de O.



O ponto P do plano terá coordenadas (x, y) no primeiro sistema, (x', y') no segundo. A relação entre os dois pares de coordenadas será:

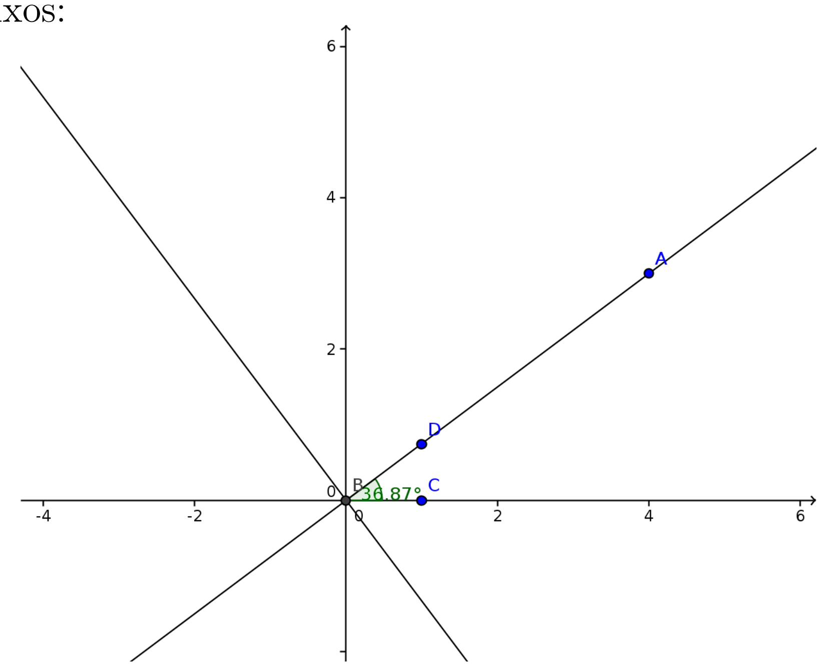
$$\vec{OP} = (x, y), \vec{O'P} = (x', y'), \vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{OO'}.$$
$$\Rightarrow (x', y') = (x, y) - (x_0, y_0),$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0, \end{cases}$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas de O' no sistema de coordenadas original (o que tem origem em O).

Na figura acima, $O' = (4, 3)$, logo, a mudança de coordenadas é:

$$\begin{cases} x' = x - 4, \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

Outra mudança de coordenadas é a rotação. Neste caso mantemos a origem dos eixos ortogonais no ponto O mas escolhemos outro par de retas ortogonais cuja interseção é a origem. Esse par vai formar um ângulo θ com o par original de retas ortogonais que definem os eixos Ox e Oy. A figura abaixo mostra a situação, isto é, a relação entre os dois pares de eixos:



No caso acima, uma das retas é

$$r_3 : 3x - 4y = 0,$$

e portanto a outra, ortogonal a r_3 passando pela origem é

$$r_4 : 4x + 3y = 0.$$

Primeiro, devemos orientar as duas retas, ou seja, escolher um sentido para cada uma delas. Depois disso devemos manter a unidade de medida, para não alterar figuras. A primeira coordenada, x', se está no eixo que forma ângulo θ com o eixo Ox, e portanto forma ângulo $90^o - \theta$ com o eixo Oy, é a dos pontos do tipo

$$r_3 : (4t, 3t), t \in \mathbb{R}.$$

Como uma unidade de parâmetro t nessa reta gera um deslocamento de 5 unidades, que é o módulo de $(3, 4)$, então

$$(x, y) = \frac{x'}{5}(4, 3) \text{ para os pontos de } r_3.$$

Analogamente

$$(x, y) = \frac{y'}{5}(-3, 4) \text{ para os pontos de } r_4.$$

Portanto, no caso geral

$$(x, y) = \frac{x'}{5}(4, 3) + \frac{y'}{5}(-3, 4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x' - 3y'}{5} \\ y = \dfrac{3x' + 4y'}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{4x + 3y}{5} \\ y' = \dfrac{-3x + 4y}{5}. \end{cases}$$

No caso geral, sendo os vetores diretores dos novos eixos $(cos\theta, sen\theta)$ e $(-sen\theta, cos\theta)$ temos

$$\begin{cases} x = cos\theta x' - sen\theta y', \\ y = sen\theta x' + cos\theta y'. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = cos\theta x + sen\theta y, \\ y' = -sen\theta x + cos\theta y. \end{cases}$$

19 Critério geral e caso $B = 0$

A equação do segundo grau é:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

tal que A, B, C, D, E, F são números reais. Ela se divide em duas partes:

- $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ é a parte quadrática;
- $2Dx + 2Ey + F$ é a parte linear.

Vamos dividir em dois casos, de acordo com o valor de B: se $B = 0$ e se $B \neq 0$. Cada um desses casos tentaremos modificar a equação, sem modificar geometricamente o conjunto, de modo que a equação tenha a forma da equação de uma parábola, hipérbole, elipse ou conjuntos de retas.

Vamos começar por um exemplo:

Exemplo 19.1.
$$x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 2 = 0.$$
Podemos usar o método de completar quadrados:
$$0 = x^2 + 2x + 2y^2 + 8y + 2 = (x+1)^2 - 1 + 2((y+2)^2 - 4) + 2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + 2(y+2)^2 = 7 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{7} + \frac{(y+2)^2}{(\frac{7}{2})} = 1.$$
Temos nesse caso uma elipse com centro $(-1,-2)$ em vez da origem, e as mesmas dimensões da elipse
$$\frac{x'^2}{7} + \frac{y'^2}{(\frac{7}{2})} = 1,$$
ou seja $a^2 = 7, b^2 = \frac{7}{2}, c^2 = \frac{7}{2}$, mas com seus elementos básicos transladados pela mudança de coordenadas
$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$
Logo, se o centro e os vértices da elipse têm, respectivamente, as coordenadas $(0,0)$, $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, então, no sistema original, de coordenadas x e y, o centro e os vértices da elipse têm, respectivamente, as coordenadas $(0,0) + (x_0, y_0)$, $(\pm a, 0) + (x_0, y_0)$, $(0, \pm b) + (x_0, y_0)$. No caso do exemplo, como $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $a = \sqrt{7}$, $b = \frac{\sqrt{14}}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{14}}{2}$, então o centro da elipse do exemplo é $(-1,-2)$, e os vértices são $(-1,-2) + (\pm\sqrt{7}, 0)$ e $(-1,-2) + (0, \pm\frac{\sqrt{14}}{2})$.

Resumindo o método, se a equação do segundo grau tem a forma
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
então, podemos completar os quadrados:
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = A(x + \frac{D}{A})^2 + C(y + \frac{E}{C})^2 + F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} = 0,$$

e chegamos a uma equação da forma

$$Ax'^2 + Cy'^2 + F' = 0,$$

a partir da mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{D}{A}, \\ y' = y + \dfrac{E}{C}. \end{cases}$$

No caso da parábola, acontece algo um pouco diferente. Vejamos um exemplo:

Exemplo 19.2.

$$x^2 + 4x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow (y-3) = -\frac{1}{2}(x+2)^2.$$

Portanto, no caso da equação do segundo grau com $B = 0$ e um dos dois termos, A ou C, igual a zero, temos que chegar, depois de completar quadrados, em

$$A(x + \frac{D}{A})^2 + 2Ey + F - \frac{D^2}{A} = 0 \text{ ou } C(y + \frac{E}{C})^2 + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0,$$

o que depende de partirmos de

$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ou $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, respectivamente.

20 $B \neq 0$

Quando $B \neq 0$, tentaremos simplificar a equação, como fizemos no caso anterior. Mas, como o caso anterior, $B = 0$, é um caso simples, vamos transformar o caso $B \neq 0$ no caso $B = 0$, encontrando a equação de uma cônica com o mesmo formato, mas em lugar diferente do espaço - nesse caso, será o mesmo conjunto inicial de pontos, só que rotacionado (depois de sofrer uma rotação).

O método é o seguinte: definimos a rotação

$$\begin{cases} x = cx' - sy', \\ y = sx' + cy', \\ c = cos\theta, s = sen\theta \end{cases}$$

de modo que a parte quadrática se torne de $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ em $A'x'^2 + C'y'^2$. Substituindo na parte quadrática:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 = A(cx'-sy')^2+2B(cx'-sy')(sx'+cy')+C(sx'+cy')^2 =$$

$$(Ac^2+2Bcs+Cs^2)x'^2+2(-Acs+B(c^2-s^2)+Ccs)x'y'+(As^2-2Bcs+Cc^2)y'^2.$$

Logo, devemos ter

$$-Acs + B(c^2 - s^2) + Ccs = 0,$$

o que implica

$$\frac{2cs}{c^2 - s^2} = \frac{2B}{C - A}.$$

Mas, o lado esquerdo da igualdade anterior é $\frac{sen2\theta}{cos2\theta} = tg2\theta$. Logo, devemos fazer uma rotação de $arctg\frac{2B}{C-A}$. Um fato digno de nota é que

$$A' + C' = (Ac^2 + 2Bcs + Cs^2) + (As^2 - 2Bcs + Cc^2) = A + C.$$

Fica como exercício verificar que

$$A'C' = AC - B^2.$$

Depois de transformar a parte quadrática, aplicamos a mudança de variáveis à parte linear:

$$2Dx+2Ey+F = 2D(cx'-sy')+2E(sx'+cy')+F = 2(Dc+Es)x'+2(Ec-Ds)y'+F.$$

No caso $A = C$ temos que o termo que multiplica $x'y'$ é $B(c^2 - s^2)$, e para que esse termo se anule basta que $c^2 = s^2$, isto é, $\theta = 45^o$. Logo, a parte quadrática vira

$$(A + B)x'^2 + (A - B)y'^2,$$

e a parte linear:

$$2Dx + 2Ey + F = D(\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y') + E(\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y') + F$$
$$= \sqrt{2}(D+E)x' + \sqrt{2}(E-D)y' + F.$$

Exemplo 20.1. Vejamos o exemplo

$$xy - 1 = 0.$$

A mudança é

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', \end{cases}$$

e a equação se torna

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') - 1 = 0,$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - 1 = 0,$$

que é a equação de uma hipérbole.

Se temos a equação do segundo grau

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

então A' e C' são raízes de

$$0 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2).$$

As raízes são

$$\lambda = \frac{1}{2}(A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}).$$

Vamos chamar essas raízes de A' e C'.

Exemplo 20.2. Outro caso:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + 5y + 1 = 0.$$

Temos

$$tg2\theta = \frac{2B}{A-C} = \frac{4}{-3} = \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} \Rightarrow 2tg^2\theta - 3tg\theta - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$tg\theta = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{9+16}) = 2 \text{ ou } -\frac{1}{2}.$$

Podemos escolher $tg\theta = -\frac{1}{2}$, pois o outro valor para o tangente nos dá em vez do vetor diretor de um dos eixos do novo sistema o do outro eixo. Para esse valor de tangente temos $cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Portanto a mudança de variáveis é

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{5}(2x'+y')^2 = \frac{1}{5}(4x'^2 + 4x'y' + y'^2), \\ 4xy = \frac{4}{5}(2x'+y')\cdot(-x'+2y') = \frac{4}{5}(-2x'^2 + 3x'y' + 2y'^2), \\ 4y^2 = \frac{4}{5}(-x'+2y')^2 = \frac{4}{5}(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2). \end{cases}$$

Logo, a parte quadrática vira

$$x^2 + 4xy + y^2 = 5y'^2.$$

A parte linear vira

$$5x+5y+1 = 5(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y') + 5(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y') + 1 = \sqrt{5}x' + 3\sqrt{5}y' + 1.$$

Logo, a cônica equivalente é

$$5y'^2 + \sqrt{5}x' + 3\sqrt{5}y' + 1 = 0.$$

É claramente uma parábola, e por isso a equação original é uma parábola.

21 Invariantes da equação do segundo grau

Dada a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

existem dois valores associados a ela que podemos calcular e que não variam pela mudança de coordenadas, Isso quer dizer que se a equação se reduz a

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0 \text{ ou } A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

depois de uma rotação e uma translação, os valores associados à segunda equação são os mesmos que os associados à primeira equação. Esses valores são:

Definimos $\Delta = AC - B^2$ e $\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$.

Portanto, se $\Delta \neq 0$, a equação original se reduz a

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$$

e

$$\Delta = AC - B^2 = A'C' \text{ e } \overline{\Delta} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{bmatrix} = A'C'F' = \Delta F'.$$

Daí temos os seguintes casos:

Primeiro caso: $\Delta > 0$.

- Se $\overline{\Delta} < 0$, então é uma elipse;
- caso particular: se $\overline{\Delta} < 0$ e $A = C$ e $B = 0$ então é um círculo,
- se $\overline{\Delta} = 0$, é um ponto;
- se $\overline{\Delta} > 0$, é o conjunto vazio.

Segundo caso: $\Delta < 0$.

- Se $\overline{\Delta} \neq 0$, então é uma hipérbole;
- se $\overline{\Delta} = 0$, é um par de retas concorrentes.

Se a equação original se reduz a

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

então $\Delta = 0$ e

$$\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 & D' \\ 0 & 0 & E' \\ D' & E' & F' \end{bmatrix} = -A'E'^2.$$

Se $\overline{\Delta} = 0$ nesse caso, então, como $A' \neq 0$, $E' = 0$ e a equação reduzida vira

$$A'x'^2 + 2D'x' + F' = 0,$$

o que não é a equação de uma parábola. Se $\overline{\Delta} \neq 0$ nesse caso, então $E' \neq 0$ e temos uma parábola.

Terceiro caso: $\Delta = 0$.

- Se $\overline{\Delta} \neq 0$, então é uma parábola;
- se $\overline{\Delta} = 0$ e $E^2 - CF = D^2 - AF > 0$, é um par de retas paralelas;
- se $\overline{\Delta} = 0$ e $E^2 - CF = D^2 - AF = 0$, é uma reta;
- se $\overline{\Delta} = 0$ e $E^2 - CF = D^2 - AF < 0$, é o conjunto vazio.

Quando temos $\Delta = 0$ estamos diante do seguinte exemplo:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0.$$

Este caso seria o da parábola, pois $\Delta = 0$ significa que $A'C' = 0$ e, portanto, o termo quadrático se reduz, por rotação, a $A'x'^2$ ou $C'y'^2$. Pelo método anterior, como $A = C$, a mudançã de variáveis é

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \end{cases}$$

o que implica

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2), \\ \qquad 2xy = (x'^2 - y'^2), \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2), \end{cases}$$

A mudança de coordenadas transforma a equação original em

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + 1 = 0,$$

$$2x'^2 + 4y' + 1 = 0,$$

22 Técnica alternativa para o caso $\Delta = 0$.

Se analisamos a seguinte equação de $\Delta = 0$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y + 1 = 0,$$

vemos que os três termos quadráticos $x^2 + 4xy + y^2$ são o quadrado de uma combinação linear de x e y:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2 = u^2, \text{ se defino } u := x + 2y.$$

Como $u = constante$ é uma reta no plano e $2x - y = constante$ são as retas ortogonais a $u = constante$, definimos $v = 2x - y$, e portanto $v = constante$ é uma reta ortogonal a $u = constante$ no plano.

Voltando à equação do exemplo, temos

$$u^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$u^2 - 2(2x - y) + 1 = u^2 + 2v + 1 = 0.$$

Logo,

$$v = -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2},$$

que é a equação de uma parábola. Logo, a curva representada pela equação do segundo grau é uma parábola.

Se fosse a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0,$$

então teríamos de novo $\Delta = 0$ e

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = u^2.$$

Neste caso $u = x + y$ e as retas ortogonais a $u = constante$ são do tipo $v = x - y = constante$. Voltando à equação teríamos

$$0 = u^2 + x + y + 2 = u^2 + u - 2 = (u - 1)(u + 2),$$

e portanto a equação é a reunião das retas

$$u = 1 \text{ e } u = -2 \Rightarrow$$

$$x + y - 1 = 0 \text{ ou } x + y + 2 = 0,$$

que são duas retas paralelas.

No caso acima, vamos supor que o termo independente é f:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y + f = 0 \Rightarrow$$
$$(x + y)^2 + (x + y) + f = 0 \Rightarrow$$
$$u^2 + u + f = 0.$$

Temos então uma equação do segundo grau na variável u e portanto

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4f^2}}{2}.$$

Logo, concluímos que podem ocorrer as seguintes situações:

$$(1-4f^2)>0 \Rightarrow u = \frac{-1+\sqrt{1-4f^2}}{2} \text{ ou } u = \frac{-1-\sqrt{1-4f^2}}{2},$$

e temos duas retas paralelas, ou

$$1-4f^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{-1}{2},$$

e temos uma reta somente $x+y=\frac{-1}{2}$, ou

$$1-4f^2<0 \Rightarrow \text{ não tem solução},$$

e neste caso a equação do segundo grau representa o conjunto é vazio.

No caso geral, temos que, se $\Delta = 0$ então a equação do segundo grau vira uma equação do tipo

$$u^2+au+bv+c=0.$$

A conclusão é que

1. se $b \neq 0$ então temos uma parábola,
2. se $b=0$ e a equação $u^2+au+c=0$ tem duas raízes reais distintas, então temos o caso de duas retas paralelas,
3. se $b=0$ e a equação $u^2+au+c=0$ tem somente uma raiz real, então temos o caso de uma reta,
4. se $b=0$ e a equação $u^2+au+c=0$ não tem soluções reais então temos o caso do conjunto vazio.

Veremos mais dois exemplos com $\Delta = 0$ e faremos a comparação entre as duas técnicas.

A equação do segundo grau

$$9x^2-24xy+16y^2-8x-6y+12=0$$

tem $\Delta = 9\cdot 16-12^2=0$ e se torna, se fazemos $u=3x-4y$ e $v=4x+3y$, na equação

$$u^2-2v+12=0 \Rightarrow v=\frac{1}{2}u^2+6,$$

que é uma parábola.

Pelo método anterior temos

$$tg2\theta = \frac{2B}{A-C} = \frac{-24}{-7} = \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} \Rightarrow 12tg^2\theta + 7tg\theta - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$tg\theta = \frac{1}{24}(-7 \pm \sqrt{49+576}) = \frac{3}{4} \text{ ou } -\frac{4}{3}.$$

Podemos escolher $tg\theta = \frac{3}{4}$, pois o outro valor para o tangente nos dá em vez do vetor diretor de um dos eixos do novo sistema o do outro eixo. Para esse valor de tangente temos $cos\theta = \frac{4}{5}$ e $sen\theta = \frac{3}{5}$. Portanto a mudança de variáveis é

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y'), \end{cases}$$

o que implica

$$\begin{cases} 9x^2 = \frac{9}{25}(16x'^2 - 24x'y' + 9y'^2), \\ -24xy = -\frac{24}{25}(12x'^2 + 7x'y' - 12y'^2), \\ 16y^2 = \frac{16}{25}(9x'^2 + 24x'y' + 16y'^2), \end{cases}$$

Daí, a parte quadrática

$$9x^2 - 24xy + 16y^2$$

vira

$$25y'^2$$

e a equação toda

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$$

vira

$$25y'^2 - 10x' + 12 = 0.$$

Se temos

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 6x + 8y + 1 = 0$$

Δ continua nulo, mas a equação vira

$$u^2 - 2u + 1 = 0,$$

que tem uma só raiz real 1. Portanto, temos

$$(u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow 3x - 4y = 1,$$

que é uma reta no plano xOy.

Pela mudança de coordenadas, que é a mesma do caso anterior, já que a parte quadrática não muda, temos que a parte linear

$$-6x + 8y + 1$$

vira

$$10y' + 1$$

e, portanto, a equação toda vira

$$25y'^2 + 10y' + 1 = 0.$$

O resultado é a equação de uma reta, já que

$$0 = 25y'^2 + 10y' + 1 = (5y' + 1)^2 \Rightarrow 5y' + 1 = 0 \Rightarrow -3x + 4y + 1 = 0,$$

que é a mesma reta dada pela técnica aplicada anteriormente.

23 O centro e a equação reduzida no caso $\Delta \neq 0$

Se temos a equação

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0$$

com $\Delta \neq 0$ podemos transformá-la na equação

$$A'x^2 + C'y'^2 + F' = 0.$$

Uma equação como a última acima é fácil de identificar: primeiro, calculamos A' e C', que são raízes de

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta;$$

depois, calculamos $\overline{\Delta}$, e F' será

$$F' = \frac{\overline{\Delta}}{\Delta}.$$

1. A' e C' com sinais diferentes e $F' \neq 0$: é uma hipérbole;
2. A' e C' com sinais diferentes e $F' = 0$: é um par de retas concorrentes;
3. A' e C' com mesmo sinal e $F' < 0$: é uma elipse;
4. A' e C' com mesmo sinal e $F' = 0$: é um ponto;
5. A' e C' com mesmo sinal e $F' > 0$: é o conjunto vazio.

Lembrando que $\Delta = AC - B^2$ e o determinante

$$\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$$

não mudam com as trasformações que fizemos. Portanto:

1. $\Delta < 0$ e $\overline{\Delta} \neq 0$: é uma hipérbole;
2. $\Delta < 0$ e $\overline{\Delta} = 0$: é um par de retas concorrentes;
3. $\Delta > 0$ $\overline{\Delta} < 0$: é uma elipse;
4. $\Delta > 0$ e $\overline{\Delta} = 0$: é um ponto;
5. $\Delta > 0$ e $\overline{\Delta} > 0$: é o conjunto vazio.

Exemplo 23.1. Seja

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 2y = 0.$$

Temos que

$$\Delta = 2 \cdot 5 - 2^2 = 6,$$

$$\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (2 - 5) = -3.$$

Temos que achar as raízes de

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } 6.$$

Logo, a equação se torna

$$6x'^2 + y'^2 - \frac{3}{6} = 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{(\frac{1}{12})} + \frac{y'^2}{(\frac{1}{2})} = 1.$$

Logo, é uma elipse. Mas ficamos sem saber o centro. Como achá-lo?

O centro $C(h, k)$ satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ah + Bk + D = 0, \\ Bh + Ck + E = 0, \end{cases}$$

que tem solução justamente porque $\Delta \neq 0$. Solucionado o sistema para o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2h + 2k + 1 = 0, \\ 2h + 5k + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow k = 0, h = -\frac{1}{2} \Rightarrow C(-\frac{1}{2}, 0).$$

Exemplo 23.2.

$$3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y - 6 = 0.$$

Neste caso $\Delta = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2 > 0$.

Para o exemplo acima o sistema seria:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0.$$

A solução do sistema é:

$$A' = 2 + \sqrt{2}, C' = 2 - \sqrt{2},$$

e a equação do segundo grau vira

$$(2 + \sqrt{2})u^2 + (2 - \sqrt{2})v^2 + \frac{\overline{\Delta}}{2} = 0.$$

$$\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = -21.$$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{2})x'^2+(2-\sqrt{2})y'^2-\frac{21}{2}=0 \Rightarrow \frac{x'^2}{(\frac{21}{4}(2-\sqrt{2}))}+\frac{y'^2}{(\frac{21}{4}(2+\sqrt{2}))}=1.$$

que é uma elipse de excentricidade

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{2}-2}.$$

Para achar o centro usamos o um sistema:

$$\begin{cases} 3h+k+1=0, \\ \ \ h+k+2=0. \end{cases}$$

A solução do sistema é

$$h=\frac{1}{2}, k=-\frac{5}{2}.$$

Portanto, temos uma elipse de centro $C(\frac{1}{2},-\frac{5}{2})$. A inclinação é θ tal que

$$tg2\theta=\frac{2B}{A-C}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow 2\theta=45^o \Rightarrow \theta=22,5^o.$$

Exemplo 23.3.

$$3x^2-8xy+3y^2-2x+6y+2=0.$$

Para esta equação

$$\Delta=9-4^2=-7<0, \overline{\Delta}=\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}=-20.$$

Primeiro calculamos A' e C', que são raízes de:

$$\lambda^2-6\lambda-7=0$$

que implica que

$$A'=7, C'=-1.$$

Logo, equivale à equação

$$7x'^2-y'^2+\frac{20}{7}=0 \Rightarrow -\frac{x'^2}{(\frac{20}{49})}+\frac{y'^2}{(\frac{20}{7})}=1,$$

que é a equação de uma hipérbole. A sua excentricidade é

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{(\frac{20}{7} + \frac{20}{49})}{(\frac{20}{7})} = \frac{8}{7} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

A inclinação é 45^o, já que $A = C$.

O sistema para achar o centro é:

$$\begin{cases} 3h - 4k - 1 = 0 \\ -4h + 3k + 3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$h = \frac{9}{7}, k = \frac{5}{7}.$$

Logo, o centro da hipérbole é $C(\frac{9}{7}, \frac{5}{7})$.

24 Problemas

1) Descreva as possíveis cônicas representadas pela equação $4xy + F = 0$ variando F.

Solução:

Neste caso

$$\Delta = 0 - 2^2 = -4 < 0 \text{ e}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} = -4F.$$

Portanto se $F \neq 0$ temos uma hipérbole. Se $F = 0$ temos duas retas concorrentes $x = 0$ e $y = 0$.

Uma maneira alternativa é usarmos o sistema

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

cujas soluções são $A' = 2, C' = -2$ e portanto equivale a

$$2u^2 - 2v^2 + F = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{\frac{2}{F}} - \frac{u^2}{\frac{2}{F}} = 1,$$

que é uma hipérbole se $F \neq 0$.

2) Quando temos que a equação

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

é um círculo?

Solução:

Mudar o centro de lugar não altera o círculo, então podemos supor que $D = 0$ e $E = 0$. Para transformar

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

em

$$A'u^2 + C'u^2 + F = 0$$

fazemos o sistema

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2}.$$

que para virar um círculo deve ter $A' = C'$ e $F < 0$.

$$A' = C' \Rightarrow \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)} = 0 \Rightarrow 4B^2 + (A - C)^2 = 0$$

$$\Rightarrow B = 0, A = C.$$

Logo, a resposta é: quando $A = C$ e $B = 0$.

3) Quando a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

é uma parábola? Quando é um par de retas paralelas?

Solução:

Neste caso temos $\Delta = 0$ e verificamos que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Fazemos $u := x + y$ e $v := x - y$, e teremos

$$0 = x^2+2xy+y^2+2dx+2ey+f = u^2+2dx+2ey+f = u^2+(d+e)u+(d-e)v+f.$$

Portanto, é parábola se o termo de v é diferente de zero, isto é, se $d \neq e$. Então será a parábola

$$v = \frac{1}{e-d}u^2 + \frac{(d+e)}{e-d}u + \frac{f}{e-d}.$$

Se $d = e$ temos

$$u^2 + 2du + f = 0,$$

e esta equação deve ter duas raízes reais distintas para que a equação original represente duas retas paralelas. Isto ocorre se

$$4d^2 - 4f > 0 \Rightarrow f < d^2.$$

References

[BC] Boulos, Camargo, Geometria Analítica, Prentice Hall.

[DFC] J. Delgado, K. Frensel, Lhaylla Crissaff, Geometria analítica, SBM.

[EL] Elon Lages Lima, Geometria Analítica e Álgebra Linear, IMPA.

[SW] Steinbruck, Winterle, Geometria Analítica, Pearson Makron Books.

[V] J. Venturi, Cônicas e quádricas, Editoria Unificado.

[W] Winterle, Vetores e Geometria Analítica, Pearson Makron Books.