Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Professora: Rosiane Soares Cesar

3ª Lista de Exercícios - Álgebra

(1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcule:

- (a) $f^{-1}(0)$
- (b) $f^{-1}(-7)$
- (c) $f^{-1}((0, +\infty))$
- (d) $f^{-1}([1, 2])$
- (e) $\mathrm{Im}(f)$

(2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x^2 - 2x - 3)(y^2 - 6y + 8)$. Calcule e represente geometricamente os conjuntos:

- (a) $f^{-1}(0)$
- (b) $f^{-1}((-\infty, 0))$

(3) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & se \;\; x \leq -1 \\ x^2, & se \;\; -1 < x \leq 1 \\ 4, & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

Considere as afirmações

- (i) f não é injetiva e $f^{-1}([3, 5]) = \{4\}$.
- (ii) f não é sobrejetiva e $f^{-1}([3, 5]) = f^{-1}([2, 6])$.
- (iii) f é injetiva e $f^{-1}([0, 4]) = [-2, \infty[$.

Então podemos afirmar que

- (a) Apenas as afirmações (i) e (ii) são falsas.
- (b) As afirmações (i) e (ii) são verdadeiras.
- (c) Apenas a afirmação (ii) é verdadeira.
- (d) Apenas a afirmação (iii) é verdadeira.
- (e) Todas as afirmações são falsas.

(4) Se $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e irracionais, considere as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se \;\; x \in \mathbb{I} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & se \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \;\; x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Determine o conjunto imagem da função composta $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(5) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 3$. Mostre que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$.

(6) Determine se as funções abaixo são injetivas, justificando suas afirmações:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x + 1$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2} + 1$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x - y^2$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$

(e) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$.

(7) Determine se as funções do exercício anterior são sobrejetivas, justificando suas afirmações.

(8) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Mostre que se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

(9) Seja uma função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:

(i) f não é identicamente nula.

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in (0, +\infty)$

Mostre que:

(a) $f(1) = 0$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, para todo $x \in (0, +\infty)$.

(c) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, para todos $x, y \in (0, +\infty)$.

(d) $f(x^r) = rf(x)$, para todo $r \in \mathbb{N}$ e todo $x \in (0, +\infty)$.

(10) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x < 0 \\ 0, & se \ \ x \geq 0 \end{cases}$ e $g : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$. Determine $f \circ g$.

(11) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3, & se \ \ x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & se \ \ x > 0 \end{cases}$$

Então:

(a) f é bijetiva e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.

(b) f é bijetiva e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.

(c) f é sobrejetiva e não injetiva.

(d) f é injetiva e não sobrejetiva.

(e) f é bijetiva e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

(12) Seja $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ uma função tal que o conjunto solução da equação $f(x) = x$ é $\{1, 2\}$. Em relação a função composta $f \circ f$ podemos afirmar que

(a) para todo x, $(f \circ f)(x) = x$
(b) para todo x, $(f \circ f)(x) = f(x)$
(c) $(f \circ f)(3) = 3$
(d) $(f \circ f)(3) = 2$
(e) $(f \circ f)(3) = 1$

(13) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & se \;\; x \leq 1 \\ x+1, & se \;\; x > 1 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = x + 3$$

Determine $(f \circ g)(x)$.

(14) Sabendo que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $f(x) = 3x - 4$ e $(f \circ g)(x) = x + 4$, determine $g(1)$.

(15) Determine a inversa das funções:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x + 1$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$
(c) $f : \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 1$.
(d) $f : \mathbb{R}_+ \to [2, +\infty)$, $f(x) = e^{3\sqrt{x}} + 1$

(16) Sejam $f : A \to B$ função e Y, Z subconjuntos de B. Mostre que se $Y \subset Z$, então $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$.

GABARITO

(1) (a) $\{1, 2\}$
(b) $\emptyset$
(c) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
(d) $\left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right]$
(e) $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

(2) (a) $\{(-1, y)\,;\, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(3, y)\,;\, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 4)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 3), y \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), y \in (2, 4)\}$

(3) (c)

(4) $Im\,(f \circ g) = \{0\}$

(5) Demonstração

(6) São injetivas: (a), (d), (e)

(7) São sobrejetivas: (a), (c), (d)

(8) Demonstração

(9) Demonstração

(10) $f \circ g : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$; $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & se\, x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty) \\ 1, & se\, x \in (-1, 2) \end{cases}$

(11) (b)

(12) (b)

(13) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(g(x)) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 9, & se\, x \leq -2 \\ x + 4, & se\, x > -2 \end{cases}$

(14) 3

(15) (a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{7}$

(b) $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f^{-1}(x, y) = (-x + y, 2x - y)$

(c) $f^{-1} : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x + 1}$

(d) $f^{-1} : [2, +\infty) \to \mathbb{R}_+;\ f^{-1}(x) = \left(\frac{\ln(x-1)}{3}\right)^2$

(16) demonstração