Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Professora: Rosiane Soares Cesar

3ª Lista de Exercícios - Álgebra Linear

1) Verifique se os seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$

   (a) $W = \{(x, y, 3) \in \mathbb{R}^3 / \, x, y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, y = 2x\}$
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x \geq 0\}$
   (d) $W = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) \, / \, a + b + c = 0\}$

2) Verifique se a solução do sistema

$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \end{cases}$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3) Considere os vetores $u = (1, -3, 2)$ e $v = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Escreva $w = (1, 7, -4)$ como combinação linear de u e v.
   (b) Escreva $w = (2, -5, 4)$ como combinação linear de u e v.
   (c) Encontre k de modo que $w = (1, k, 5)$ seja combinação linear de u e v.
   (d) Encontre uma condição para a, b e c de modo que $w = (a, b, c)$ seja uma combinação linear de u e v.

4) Mostre que os vetores $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 7)$ e $(-1, 1, 1)$ não geram $\mathbb{R}^3$. Depois, determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por esses vetores.

5) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$W = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$$

   (a) O vetor $(2, 3, -3, 6)$ pertence a W?
   (b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a W?

6) Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD:

   (a) $\{(1, 0, 0), (1, 3, 5), (3, 2, 5)\}$
   (b) $\{(1, 2, -1), (0, 0, 1), (1, -2, 3), (3, 0, 1)\}$
   (c) $\{x^2 + 2, -x + 3, 2\}$
   (d) $\{(1, 2), (3, 5), (2, 1)\}$

7) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por $W = \{(x, y, z) \, / \, x + y + z = 0\}$. Encontre uma base e determine a dimensão de W.

8) Escreva $p(x) = x^2 + x - 1$ como combinação linear de $q(x) = x^2 - 2x$ e $r(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}$.

9) Encontre uma base e a dimensão do espaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1, -4, -2, 1)$, $(1, -3, -1, 2)$, $(3, -8, -2, 7)$

10) Suponha que U e V são subsepaços de V tais que $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ e $\dim V = 7$. Encontre as possíveis dimensões de $U \cap W$

11) Encontre o vetor coordenada da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ com respeito a base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

12) Seja $v = (1, 2, 3)$ e $\beta = \{(1, 0, 3), (-1, 7, 5), (2, -1, 6)\}$, Determine $v]_\beta$

13) Determine em cada caso os subsepaços $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$, determinando em cada caso se $\mathbb{R}^3$ é soma direta de W_1 e W_2

(a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x - 2y + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + 3y = 0\}$

(b) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x = y\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y + z = 0\}$

14) Seja $\alpha = \{(-1, 1, 1), (0, 2, 3), (0, 0, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $v]_\alpha = (-2, 0, 3)$. Determine v.

15) Dadas as bases do $\mathbb{R}^3$, $\alpha = \{(-1, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ e $\beta = \{(0, 0, 1), (0, -2, 1), (1, 0, -1)\}$

(a) Determine $[I]^\alpha_\beta$

(b) Seja $v]_\alpha = (-1, 2, 3)$. Calcule $v]_\beta$

16) Considere $\alpha = \{(-3, 0, 3), (-3, 2, -1), (1, 6, -1)\}$ e $\beta = \{(-6, 6, 0), (-2, -6, 4), (-2, -3, 7)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) Ache a matriz mudança de base de β para α

(b) Se $v_\beta = (1, 1, , 0)$, determine $v]_\alpha$.

17) Considere $\alpha = \{x^2 + x + 1, 2x + 3, 2x - 1\}$ e $\beta = \{x^2 + x, x^2 - x, 1\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$. Determine as matrizes de mudança de base.

Respostas

1. (a) W não é subsepaço vetorial

   (b) W é subsepaço vetorial

   (c) W não é subsepaço vetorial

   (d) W é subsepaço vetorial

2. Não

3. (a) $w = -3u + 2v$.

   (b) Não é possível escrever w como combinação linear de u e v.

   (c) $k = -8$

   (d) $-a + 3b + 5c = 0$

4. $\{(x,y,y)\in\mathbb{R}^3/\,x+2y-z=0\}$

5. (a) pertence

   (b) não pertence

6. LI: (a), (c); LD: (b), (d)

7. Base: $\{(1,0,-1),(0,-1,-1)\}$. Dimensão de $W=2$

8. $p(x)=-\frac{1}{2}q(x)+\frac{3}{4}r(x)$.

9. base: $\{(1,-4,-2,1),(0,1,1,1)\}$; dimensão de $W=2$

10. $\dim U\cap W=4,3$ *ou* 2

11. $A]_\beta=(-7,11,-21,30)$.

12. $v]_\beta=(5,0,-2)$

13. (a) $W_1\cap W_2=\{(-3y,y,5y)\,/\,y\in\mathbb{R}\}$; $W_1+W_2=\mathbb{R}^3$; não é soma direta.

    (b) $W_1\cap W_2=\{(y,y,-2y)\,/\,y\in\mathbb{R}\}$ $W_1+W_2=\mathbb{R}^3$; não é soma direta.

14. $(2,-2,-5)$

15. (a) $[I]_\beta^\alpha=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

    (b) $v]_\beta=(6,-1,1)$

16. (a) $[I]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{17}{9}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$

    (b) $v]_\alpha=\left(\frac{14}{9},1,-\frac{1}{3}\right)$

17. $[I]_\beta^\alpha=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$ e $[I]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$