Capítulo 8

TEOREMA DE GREEN

8.1 Introdução

Nesta seção apresentaremos uma versão simplificada de um dos teoremas clássicos da Análise Vetorial, o teorema de Green.

Lembremos de alguns conceitos apresentados no Capítulo 1.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$:

1. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito **ponto da fronteira ou do bordo de** A se, para todo disco aberto centrado em $\mathbf{x}$ intersecta A e $\mathbb{R}^n - A$.

2. Denotamos o **conjunto dos pontos da fronteira do conjunto** A **por** ∂A.

3. Um conjunto A é aberto se $A \cap \partial A = \phi$.

4. Um conjunto A é fechado se $\partial A \subset A$.

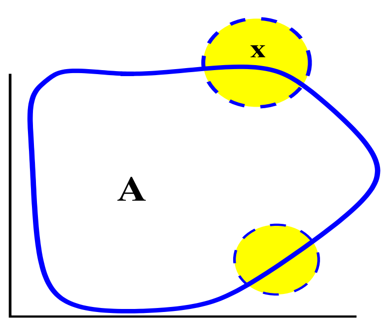

Figura 8.1: Bordo de Aem azul

Observação 8.1. Utilizaremos alguns argumentos intuitivos aceitavéis, que formulados rigorosamente fogem dos objetivos destas notas.

Definição 8.1. Uma região fechada e limitada $D \subset \mathbb{R}^2$ é dita **simples** se $\partial D = C$ é uma curva fechada simples.

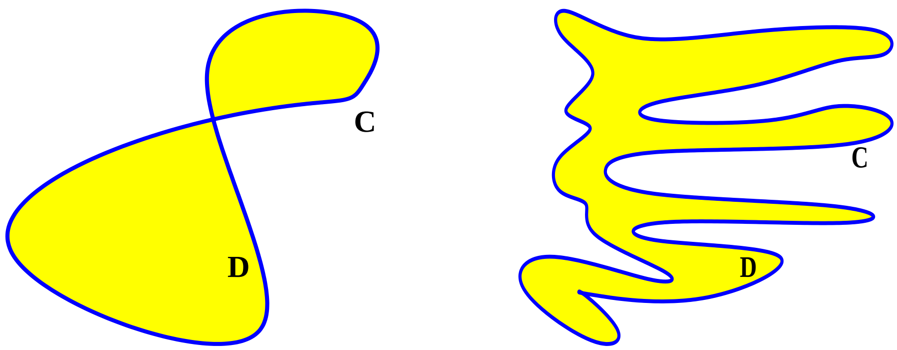

Figura 8.2: A região à esquerda não é simples; a da direita é simples

Notamos que, em geral, uma região simples pode ser bastante "complicada".

A seguir daremos a idéia intuitiva (imprecisa) de como orientar a curva ∂D

Definição 8.2. A curva $C = \partial D$ está **orientada positivamente** se é percorrida no sentido anti-horário. (D fica à esquerda, ao se percorrer $\partial D = C$).

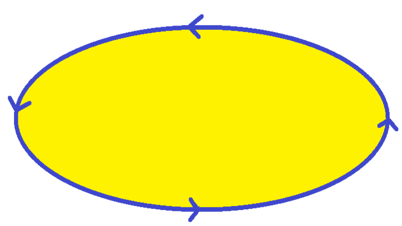

Figura 8.3: $C = \partial D$ orientada positivamente

$C = \partial D$ está **orientada negativamente** se é percorrida no sentido horário. (D fica à direita, ao se percorrer $\partial D = C$)

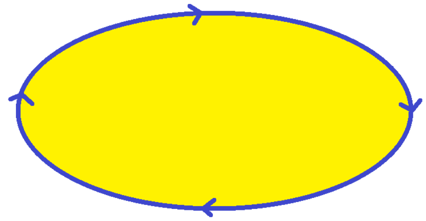

Figura 8.4: $C = \partial D$ orientada negativamente

8.2 Teorema de Green

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, D uma região simples, a curva $C = \partial D$, tal que $D \subset A$.

Teorema 8.1. (Green) Seja $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Se $C = \partial D$ tem uma parametrização de classe C^1 por partes e está orientada positivamente em relação a D, então:

$$\oint_{\partial D} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy$$

Prova: Veja o apêndice. ■

Observação 8.2. Nós provaremos no apêndice o teorema de Green, numa versão particular, para regiões chamadas elementares.

Corolário 8.1. Nas hipóteses do teorema de Green, se F é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$, então

$$\oint_{\partial D} F = 0$$

Prova: A prova segue diretamente do teorema de Green.

■

Observação 8.3. Lembrando que a área da região D é:

$$A(D) = \iint dx\,dy.$$

Corolário 8.2. Nas hipóteses do teorema de Green, a área da região D é dada por:

$$A(D) = \oint_{\partial D} x\,dy$$

ou

$$A(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx$$

ou

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

Prova: Basta considerar o campo $F(x,y) = (-y, x)$ e aplicar o teorema de Green para obter:

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

■

Exemplo 8.1.

[1] Utilizando o teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

1. $\displaystyle\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, onde γ é a curva formada pelas retas $x = 1$, $y = 0$ e a parábola $y = x^2$, orientadas no sentido positivo (anti-horário).

2. $\displaystyle\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy$, onde γ é a curva formada pelas retas $x = 2$, $y = 0$ e $2\,y - x = 0$, no sentido anti-horário.

Solução:

1. A curva γ é formada por 3 arcos de curvas de classe C^1, logo γ é uma curva de classe C^1 por partes, que orientada no sentido positivo (anti-horário).

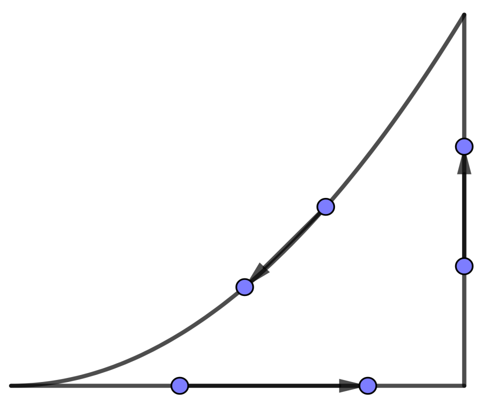

Figura 8.5: A curva.

Observe que $F(x,y) = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$ é um campo de classe C^1, para todo (x,y) tal que $x,\, y \geq 0$, $F_1(x,y) = \sqrt{y}$ e $F_2(x,y) = \sqrt{x}$, são as componentes do campo; logo:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right], \quad \forall\, x,\, y > 0;$$

então, estamos nas hipóteses do teorema de Green:

$$\oint_\gamma \sqrt{y}\, dx + \sqrt{x}\, dy = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right] dx\, dy,$$

onde D é a região:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

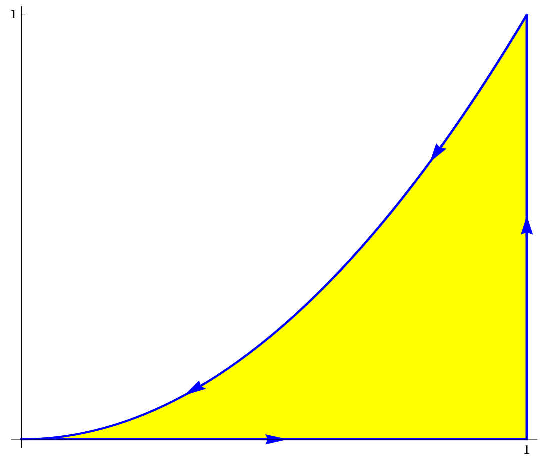

Figura 8.6: Exemplo [1]

$$\frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right] dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{x^2} [\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}]\,dy\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{y}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{y}\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [x^{\frac{3}{2}} - 2\,x]\,dx = -\frac{3}{10}.$$

Logo:

$$\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right] dx\,dy = -\frac{3}{10}$$

2. A curva γ é formada por 3 arcos de curvas de classe C^1, logo γ é uma curva de classe C^1 por partes, que orientada no sentido positivo (anti-horário).

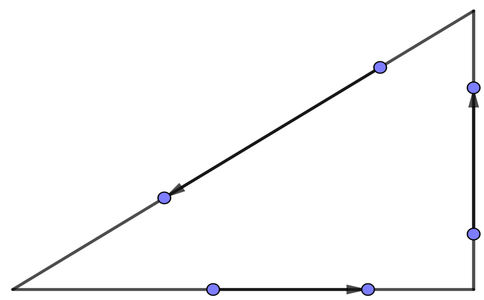

Figura 8.7: A curva

Observe que $F(x,y) = (y, x^2)$ é um campo de classe C^1, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F_1(x,y) = y$ e $F_2(x,y) = x^2$, são as componentes do campo; logo:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2\,x - 1 \quad \forall\,(x,y);$$

então, estamos nas hipóteses do teorema de Green:

$$\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy = \iint_D (2\,x - 1)\,dx\,dy,$$

onde D é a região:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}.$$

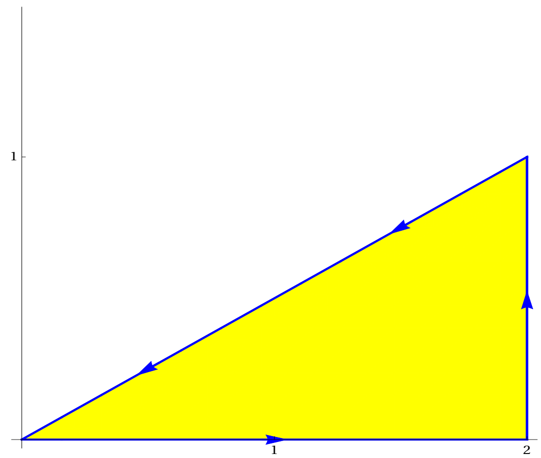

Figura 8.8:

Logo,

$$\oint_{\gamma} y\,dx + x^2\,dy = \iint_D [2\,x - 1]\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{x}{2}} [2\,x - 1]\,dy\right] dx = \int_0^2 [x^2 - \frac{x}{2}]\,dx = \frac{5}{3}.$$

[2] Calcule a área da região limitada por:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a,\ b \neq 0$.

2. $\gamma(t) = (a\,cos^3(t), a\,sen^3(t))$ tal que $a \neq 0$ e $0 \leq t \leq 2\,\pi$.

Solução:

1. A curva $\partial D = C$ é uma elipse, parametrizemos a elipse de modo que esteja orientada positivamente:

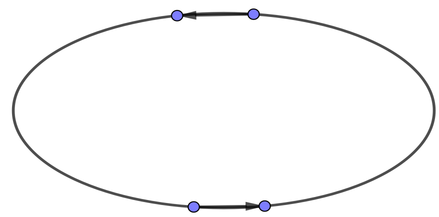

Figura 8.9: A elipse orientada

$$\begin{cases} x = a\,cos(t) \\ y = b\,sen(t), \quad t \in [0, 2\,\pi] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -a\,sen(t)\,dt \\ dy = b\,cos(t)\,dt. \end{cases}$$

Utilizando o corolário do teorema de Green:

$$A(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx = a\,b\int_0^{2\pi} sen^2(t)\,dt$$

$$= \frac{a\,b}{2}\int_0^{2\pi}[1 - sen(2\,t)]\,dt$$

$$= a\,b\,\pi\;\; u.a.$$

2. A curva $\partial D = C$ é parametrizanda de modo que esteja orientada positivamente por:

$$\begin{cases} x = a\,cos^3(t) \\ y = a\,sen^2(t), \quad t \in [0, 2\,\pi] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -3\,a\,sen(t)\,cos^2(t)\,dt \\ dy = 3\,a\,cos(t)\,sen^2(t)\,dt. \end{cases}$$

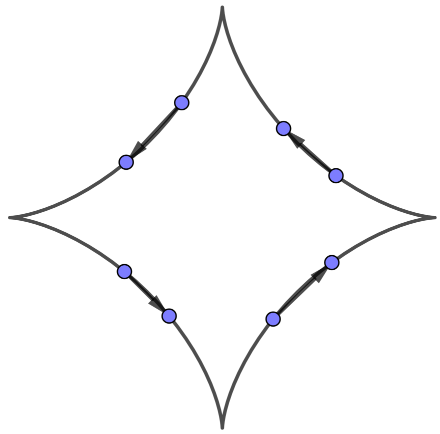

Figura 8.10: Curva do exemplo 2

Utilizando o corolário do teorema de Green:

$$A(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = 3\,a^2 \int_0^{2\pi} cos^4(t)\,sen^2(t)\,dt$$

$$= \frac{3\,a^2}{8} \int_0^{2\pi} [1 + cos(2\,t)]\,sen^2(2\,t)\,dt$$

$$= \frac{3\,a^2}{8}\ u.a.$$

[3] Calcule:

$$\int_{\gamma} e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y) + x)\,dy,$$

onde γ é o semi-círculo de raio 1 centrado na origem, no primeiro e segundo quadrantes.

O teorema de Green não pode ser aplicado, pois a curva não é fronteira de uma região fechada.

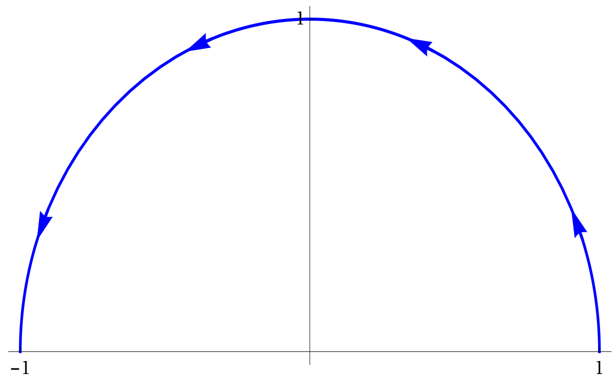

Figura 8.11: A curva γ

Para poder aplicar o teorema de Green, consideramos a curva $\beta = \gamma \cup \gamma_1$, onde γ_1 é o segmento de reta ligando $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

A curva β é diferenciável por partes e fechada, orientando β no sentido anti-hórario, como no seguinte desenho:

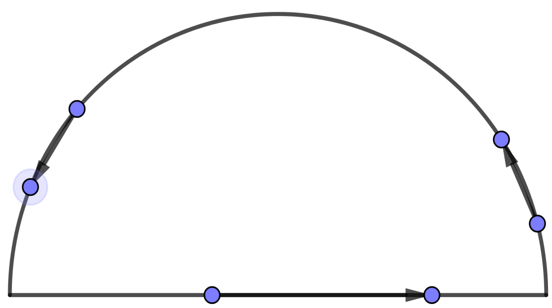

Figura 8.12: A curva β

1. Seja a região D é tal que $\partial D = \beta$. Aplicamos o teorema de Green, a regiâo D tal que $\beta = \partial D$. O campo:

$$F(x, y) = (e^x\, sen(y),\, e^x\, cos(y) + x),$$

é de classe C^1, $F_1(x,y) = e^x\, sen(y)$ e $F_2(x,y) = e^x\, cos(y) + x$, são as componentes do campo; logo:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1, \quad \forall\ (x,y) \in D;$$

então, pelo teorema de Green:

$$\oint_\beta e^x\, sen(y)\, dx + (e^x\, cos(y) + x)\, dy = \iint_D dx\, dy = A(D) = \frac{\pi}{2},$$

pois $A(D) = \dfrac{\pi}{2}$ é a área do semi-círculo de raio 1.

2. Por outro lado:

$$\oint_\beta F = \int_\gamma F + \int_{\gamma_1} F;$$

logo,

$$\int_\gamma F = \int_\beta F - \int_{\gamma_1} F = \frac{\pi}{2} - \int_{\gamma_1} F.$$

3. Só falta calcular:

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_1} e^x\, sen(y)\, dx + (e^x\, cos(y) + x)\, dy,$$

onde γ_1 é o segmento de reta entre os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$. Uma parametrização de γ_1 é:

$$\begin{cases} x = 2\,t - 1 \\ y = 0, \quad t \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 2\,dt \\ dy = 0\,dt. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} e^x\, sen(y)\, dx + (e^x\, cos(y) + x)\, dy = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

Então:

$$\int_{\gamma} e^x\, sen(y)\, dx + (e^x\, cos(y) + x)\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

[4] Calcule:

$$\int_C [y\, e^{x\, y} + 2\, x\, y\, cos(x^2\, y)]\, dx + [x\, e^{x\, y} + x^2\, cos(x^2\, y)]\, dy,$$

onde C é a curva formada pelos arcos das seguintes curvas $y = x^3 - x$ e $y = x - x^3$, $-1 \le x \le 1$.

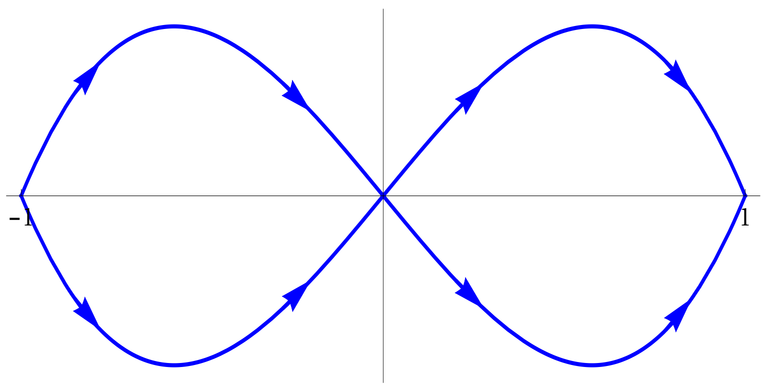

Figura 8.13: Exemplo [3]

1. $C = C_1 \cup C_2$ tal que $C_1 \cap C_2 = \{(0,0)\}$. As curvas C_1 e C_2 são fechada de classe C^1, por partes. Aplicaremos o Teorema de Green a cada curva.

2. F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $F_1 = y\, e^{x\, y} + 2\, x\, y\, cos(x^2\, y)$ e $F_2 = x\, e^{x\, y} + x^2\, cos(x^2\, y)$, então:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = e^{xy}\, [x\, y + 1] + 2\, x\, [cos(x^2\, y) - x^2\, sen(x^2\, y)] = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y), \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Logo, F é um campo conservativo; logo pelo teorema de Green:

$$\oint_C F = \oint_{C_1} F = \oint_{C_2} F = 0.$$

[5] Determine a área da região limitada pelas curvas $4\,x^2 + y^2 = 4$ e $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

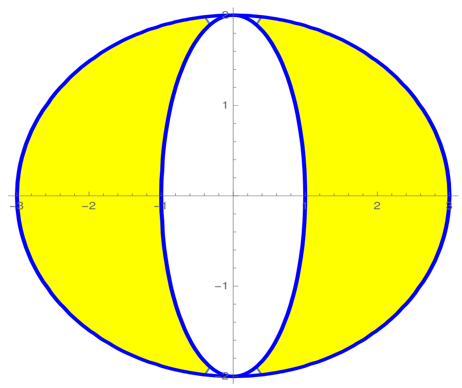

Figura 8.14: Exemplo [4]

Pela simetria da região, calculamos a área da região no primeiro quadrante e multiplicamos o resultado por 4.

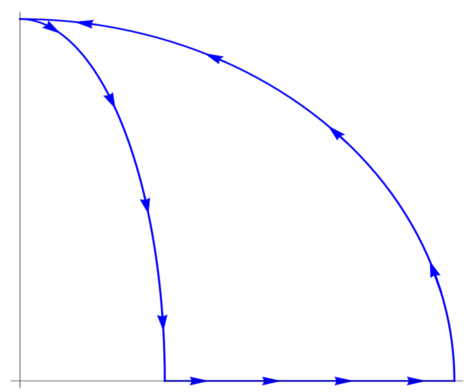

Figura 8.15: Exemplo [4]

A nova região é uma região fechada simples D tal que:

$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

onde γ_1 é o arco da elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$, γ_2 é o segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(3,0)$ e γ_3 é o arco da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$$A(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy.$$

Parametrizações:

1. $4\,x^2 + y^2 = 4$ é parametrizada por $\gamma_1^-(t) = (cos(t), 2\,sen(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. O segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(3,0)$ é parametrizado por $\gamma_2(t) = (t, 0)$, $t \in [1,3]$.

3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ é parametrizada por $\gamma_3^-(t) = (3\,cos(\frac{\pi}{2} - t), 2\,sen(\frac{\pi}{2} - t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Então:

1. $\displaystyle\int_{\gamma_1} x\,dy = \int_{\gamma_1^-} x\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,cos^2(t)\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(2\,t) + 1)\,dt = -\frac{\pi}{2}$

2. $\displaystyle\int_{\gamma_2} x\,dy = 0.$

3. $\displaystyle\int_{\gamma_3} x\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -6\,sen^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 3\,cos(2\,t))\,dt = \frac{3\,\pi}{2}.$

4. Logo, a área total é

$$A(D) = 4\,\pi\,u.a.$$

[6] Se C é um círculo centrado na origem e de raio 1, calcule

$$\oint_C -\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$$

Sejam $F_1 = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ e $F_2 = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ as componentes do campo, então:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y).$$

Então, pelo teorema de Green:

$$\oint_C -\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0.$$

Por outro lado, parametrizando o círculo por $x = cos(t)$, $y = sen(t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$, temos que:

$$\oint_C -\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi.$$

O Teorema de Green está errado?

Não, a região D tal que $C = \partial D$ do exemplo, contém ao origem e o campo de vetores não é de classe C^1 na origem. Logo, o teorema de Green não pode ser aplicado no exemplo, logo:

$$\oint_C -\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi.$$

8.3 Extensão do Teorema de Green

O teorema de Green ainda é válido para regiões mais gerais de que as estudadas no parágrafo anterior.

Teorema 8.2. Seja D uma região fechada e limitada no plano tal que:

$$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup C_n.$$

Cada curva da fronteira de D é orientada de forma que D tenha orientação positiva. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto tal que $D \subset U$ e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Então:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i^+} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

$\blacksquare$

Observação 8.4.

1. Isto é:

$$\int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F + \ldots + \int_{C_n^+} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

2. Por exemplo, a seguinte região D é tal que $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup C_3^- \cup C_4^-$

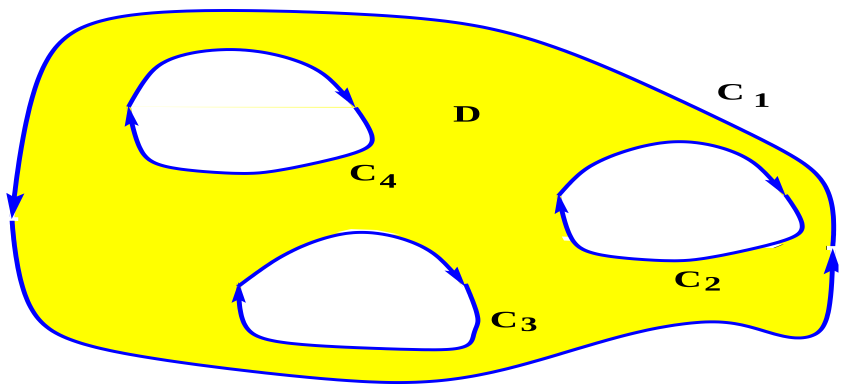

Figura 8.16:

Consideremos a seguinte região D:

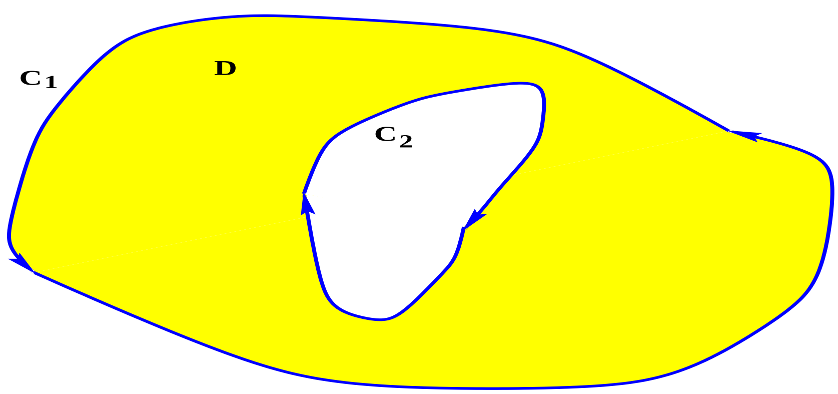

Figura 8.17:

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-$. Subdividamos a região D em 4 subregiões $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$:

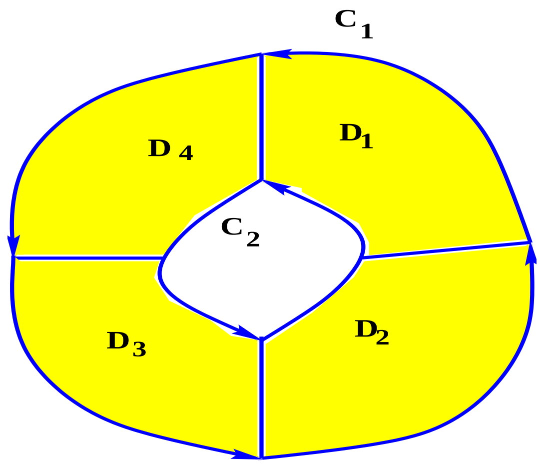

Figura 8.18: O espaço H

i) Seja D_1 tal que $\partial D_1^+ = C_{11}^+ \cup L_4^+ \cup C_{21}^- \cup L_1^+$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_1.

ii) Seja D_2 tal que $\partial D_2^+ = C_{12}^+ \cup L_2^+ \cup C_{22}^- \cup L_1^-$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_2.

iii) Seja D_3 tal que $\partial D_3^+ = C_{13}^+ \cup L_2^- \cup C_{23}^- \cup L_3^+$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_3.

iv) Seja D_4 tal que $\partial D_4^+ = C_{14}^+ \cup L_3^- \cup C_{24}^- \cup L_4^-$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_4.

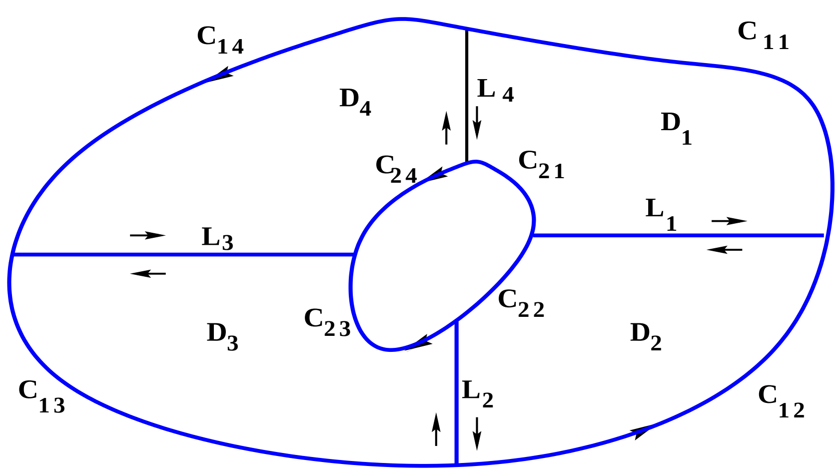

Figura 8.19:

i) Aplicando o teorema de Green em D_1:

$$\iint_{D_1} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_{\partial D_1^+} F = \int_{C_{11}^+} F + \int_{L_4^+} F + \int_{C_{21}^-} F + \int_{L_1^+} F.$$

ii) Aplicando o teorema de Green em D_2:

$$\iint_{D_2} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_{\partial D_2^+} F = \int_{C_{12}^+} F + \int_{L_2^+} F + \int_{C_{22}^-} F + \int_{L_1^-} F.$$

iii) Aplicando o teorema de Green em D_3:

$$\iint_{D_3} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_{\partial D_3^+} F = \int_{C_{13}^+} F + \int_{L_2^-} F + \int_{C_{23}^-} F + \int_{L_3^+} F.$$

iv) Aplicando o teorema de Green em D_4:

$$\iint_{D_4} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_{\partial D_4^+} F = \int_{C_{14}^+} F + \int_{L_3^-} F + \int_{C_{24}^-} F + \int_{L_4^-} F.$$

Então, de i), ii), iii) e iv):

$$\sum_{i=1}^{4} \iint_{D_i} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^-} F.$$

Exemplo 8.2.

[1] Seja D a região limitada pela curva $x^2 + y^2 = 9$ externa ao retângulo de vértices $(1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ e $(1,1)$, orientada positivamente. Calcule:

$$\int_{\partial D^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy.$$

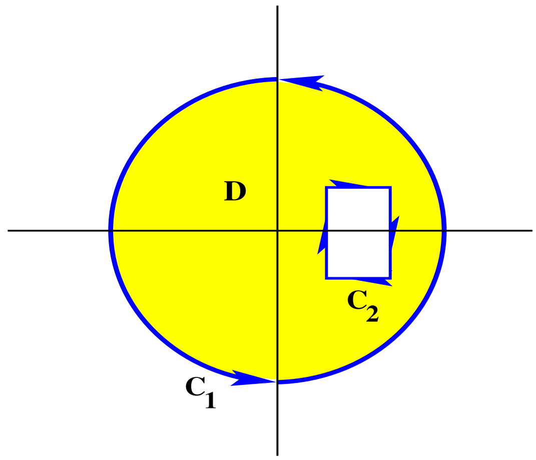

Figura 8.20: Exemplo [1]

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-$; então:

$$\int_{\partial D^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy = \int_{C_1^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy - \int_{C_2^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy.$$

Seja $F_1(x,y) = 2\,x - y^3$ e $F_2(x,y) = -x\,y$ as componentes do campo, então:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 3\,y^2 - y.$$

1. Seja D_1 a região limitada pela curva $x^2 + y^2 = 9$, logo $\partial D_1^+ = C_1^+$. Aplicando o teorema de Green a D_1, utilizando coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\,cos(t) \\ y = r\,sen(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

   Então :

$$\int_{C_1^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy = \iint_{D_1} [3\,y^2 - y]\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 [3\,r^2\,sen^2(t) - r\,sen(t)]\,r\,dr\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[\frac{243}{4}\,sen^2(t) - 9\,sen(t)\big]\,dt = \frac{243\,\pi}{4}.$$

2. Seja D_2 a região limitada pelo retângulo, logo $\partial D_2^+ = C_2^+$. Aplicando o teorema de Green a D_2:

$$\int_{C_2^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy = \iint_{D_2} [3\,y^2 - y]\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_1^2 [3\,y^2 - y]\,dx\right] dy = 2.$$

De 1. e 2. temos que:

$$\int_{\partial D^+} [2\,x - y^3]\,dx - x\,y\,dy = \frac{243\,\pi}{4} - 2.$$

[2] Calcule $\oint_C F$, onde

$$F(x,y) = \big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2\,x\big)$$

e C é a curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ no sentido anti-hórario.

Não podemos aplicar o teorema de Green, pois F não é definido na origem. Seja D a região limitada pela curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, externa ao círculo de raio 1, centrado na origem:

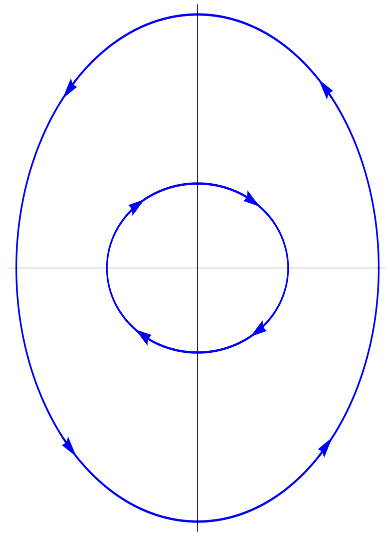

Figura 8.21: Exemplo [2]

$$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-.$$

Sejam $F_1(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ e $F_2(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + 2\,x$ os componentes do campo; então, aplicando o teorema anterior:

$$\int_{C_1^+} F + \int_{C_2^-} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \iint_D 2\,dx\,dy = 2\,A(D) = 10\,\pi.$$

Logo:

$$\int_{C_1^+} F = 10\,\pi - \int_{C_2^-} F = 10\,\pi + \int_{C_2^+} F.$$

Usando a parametrização usual do círculo:

$$\int_{C_2^+} F = \int_0^{2\pi} [sen^2(t) + 3\,cos^2(t)]\,dt = \int_0^{2\pi} [1 + 2\,cos^2(t)]\,dt = 4\,\pi;$$

então:

$$\int_{C_1^+} F = (10+4)\,\pi = 14\,\pi.$$

8.4 Caracterização dos Campos Conservativos no Plano

Neste parágrafo apresentamos a caracterização completa dos campos conservativos no plano.

Definição 8.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto.

1. A é dito um **domínio poligonal** se para todo $x,\, y \in A$ existe uma poligonal ligando x e y em A.

2. A é dito **simplesmente conexa** se, para toda curva fechada $C \subset A$, a região limitada por C está contida em A.

Intuitivamente, A é simplesmente conexo quando não tem "buracos". A seguinte região D tal que $\partial D = C_1 \cup C_2$, não é simplesmente conexa.

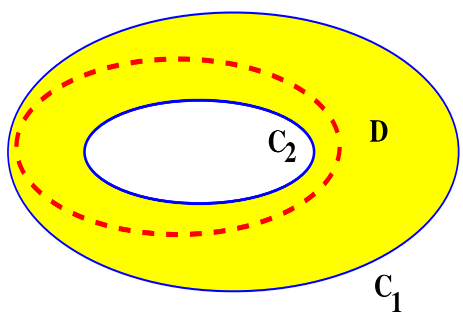

Figura 8.22:

Teorema 8.3. Seja F um campo de vetores de classe C^1, definido num domínio poligonal, simplesmente conexo, aberto A. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\displaystyle\oint_C F = 0$, onde $C \subset A$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes, arbitrária.

2. A integral de linha de F do ponto P_1 até o ponto P_2, denotada por: $\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} F$, é independente das curvas de classe C^1 por partes que ligam P_1 e P_2.

3. F é conservativo.

4. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in A$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2). Sejam C_1 e C_2 duas curvas ligando P_1 e P_2 em A.

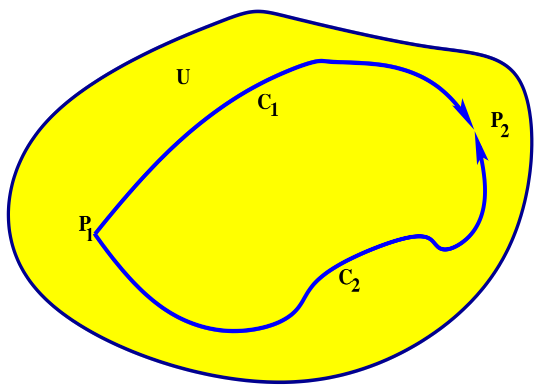

Figura 8.23:

Seja C tal que $C^+ = C_1^- \cup C_2^+$; então:

$$0 = \oint_C F = \int_{C_1^-} F + \int_{C_2^+} F;$$

logo, $\displaystyle\int_{C_1^+} F = \int_{C_2^+} F$, quaisquer que sejam as curvas C_1 e C_2 ligando P_1 e P_2 em A.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sejam (x_0, y_0) e $(x,y) \in A$. Definamos a função f em A, do seguinte modo:

Consideremos o caminho poligonal ligando (x_0, y_0) e (x,y):

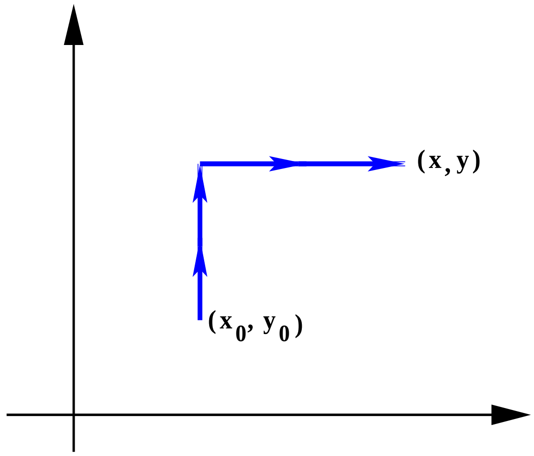

Figura 8.24:

Parametrizando estos caminhos: $\gamma_1(t) = (x_0, t)$, $y_0 \le t \le y$ e $\gamma_2(t) = (t, y_0)$, $x_0 \le t \le x$; definamos f por:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt.$$

Esta função é bem definida, pois independe da curva que liga os pontos (x_0, y_0) e $(x, y) \in A$. E segue diretamente da definição que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Como $\nabla f(x,y) = F(x,y)$, segue que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y),$$

para todo $(x, y) \in A$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Segue do teorema de Green. De fato, podemos aplicar o teorema de Green pois se A é simplesmente conexo, a região D limitada por qualquer curva fechada C está contida em A.

$\blacksquare$

Exemplo 8.3.

[1] Calcule $\oint_C F$, onde $F(x,y) = \big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big)$ se:

1. C é qualquer curva fechada simples, bordo de uma região que não contem a origem.

2. C é qualquer curva fechada simples, bordo de uma região que contem a origem.

Solução:

1. Seja C^+ como no desenho:

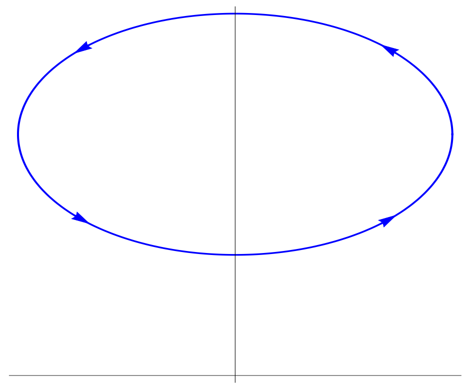

Figura 8.25:

F é um campo conservativo em D tal que $\partial D = C$. Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{C^+} F = 0.$$

2. Seja D uma região que contem a origem tal que $\partial D = C$ e C_1 um círculo ao redor da origem (de raio suficientemente pequeno), como no desenho:

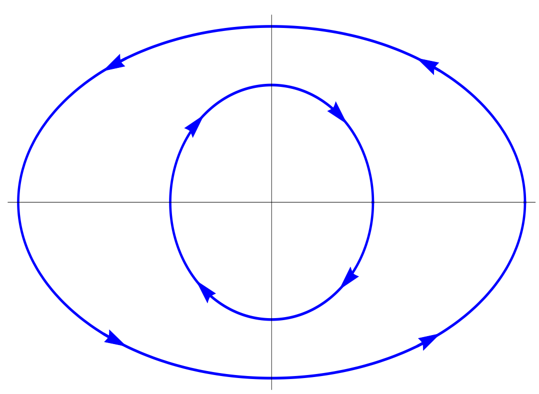

Figura 8.26:

Denotemos por D_1 a região obtida de D tal que $\partial D_1 = C_1^- \cup C^+$. Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D_1^+} F = 0.$$

Denotemos por D_2 a região obtida de D tal que $\partial D_2 = C_1^+$; calculando diretamente,

$$\oint_{\partial D_2^+} F = \oint_{C_1^+} F = 2\,\pi.$$

Como $D = D_1 \cup D_2$, temos:

$$\oint_{C} F = 2\,\pi.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde:

$$F(x,y) = (3\,x^2\,y + 2\,y^2, x^3 + 4\,x\,y + 1)$$

e a curva C é parametrizada por $\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$, $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

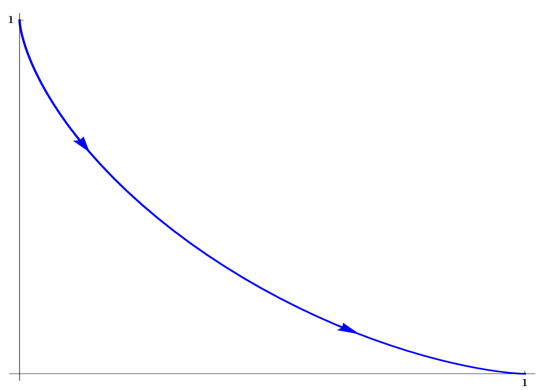

Figura 8.27:

Note que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3\,x^2 + 4\,y, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, F é conservativo com potencial:

$$f(x,y) = x^3\,y + 2\,y^2\,x + y;$$

então, a integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva: $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

$$\int_C F = f(0,1) - f(1,0) = 1 - 0 = 1.$$

[3] Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo de vetores no plano tal que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Considere a região dada pelo seguinte desenho, de modo que F não seja definido nas regiões A e B. Se:

$$\int_{C_1} F = 12 \quad \text{e} \quad \int_{C_2} F = 15,$$

calcule $\displaystyle\int_{C_3} F$.

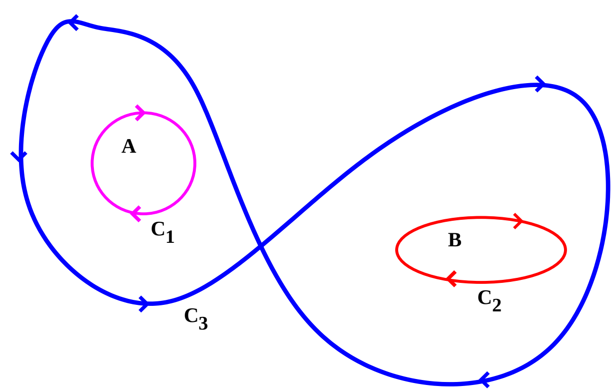

Figura 8.28: Região do exemplo [3]

Separemos a região delimitada pelas curvas do seguinte modo:

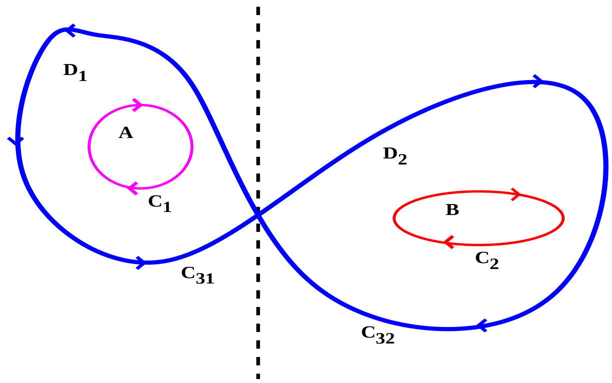

Figura 8.29:

1. Seja D_1 tal que $\partial D_1^+ = C_{31}^+ \cup C_1^-$, então:

$$\int_{\partial D_1^+} F = \int_{C_{31}^+} F - \int_{C_1^+} F.$$

Aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\partial D_1^+} F = \iint_{D_1} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy = 0,$$

logo:

$$\int_{C_{31}^+} F = \int_{C_1}^{+} F = 12.$$

2. Seja D_2 tal que $\partial D_2^+ = C_{32}^+ \cup C_2^-$, então:

$$\int_{\partial D_2^+} F = \int_{C_{32}^+} F - \int_{C_2^+} F.$$

Aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\partial D_2^+} F = \iint_{D_2} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy = 0,$$

logo:

$$\int_{C_{32}^{+}} F = \int_{C_{2}^{+}} F = 15.$$

3. Como $C_3^+ = C_{31}^+ \cup C_{32}^-$, temos:

$$\int_{C_3^+} F = \int_{C_{31}^+} F - \int_{C_{32}^+} F = 12 - 15 = -3.$$

8.5 Exercícios

1. Calcule $\oint_C 4\,y\,dx + 7\,x\,dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(2,2)$, no sentido anti-horário:

    (a) diretamante.

    (b) utilizando o teorema de Green.

2. Calcule as seguintes integrais utilizando o teorema de Green:

    (a) $\oint_C \frac{e^y}{x}\,dx + (e^y\,ln(x) + 2\,x)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

    (b) $\oint_C (cos(x) - 5\,y)\,dx + (4\,x - y^{-1})\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $y + x^2 - 9 = 0$ e $y - 5 = 0$.

    (c) $\oint_C (x - y)\,dx - x^2\,dy$, onde C é a fronteira da região $[0,2] \times [0,2]$.

    (d) $\oint_C (e^x - 3\,y)\,dx + (e^y + 6\,x)\,dy$, onde C é a elipse $x^2 + 4\,y^2 = 4$.

    (e) $\oint_C (x + y)\,dx + (y - x)\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 - 2\,a\,x = 0$.

    (f) $\oint_C (x + y)\,dx + (y + x^2)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

    (g) $\oint_C arctg(x)\,dx + 3\,x\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelo retângulo de vértices $(1,0)$, $(2,3)$, $(0,1)$ e $(3,2)$.

    (h) $\oint_C x\,y\,dx + (y + x)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x^2 + y^2 = 1$.

(i) $\oint_C (y + ln(\sqrt{x} + x^2))\,dx + (x^2 + tg(y^3))\,dy$, onde C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

3. Utilizando os corolários do teorema de Green, calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:

   (a) $y = x^2$ e $y^2 = x$

   (b) $y = 4\,x^2$ e $y = 16\,x$

   (c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,\ b > 0)$

   (d) $y^2 = x^3$ e $y = x$

4. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região nas hipóteses do teorema de Green. Utilizando o teorema, verifique que as coordenadas do centróide de D são dadas por:

$$\overline{x} = \frac{1}{2\,A} \oint_C x^2\,dy \qquad\qquad \overline{y} = -\frac{1}{2\,A} \oint_C y^2\,dx,$$

   onde $A = A(D)$.

   (a) Ache o centróide do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

   (b) Ache o centróide da região definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que $y \geq 0$.

5. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, nos seguintes casos:

   (a) A origem das coordenadas está fora da curva fechada C.

   (b) A curva fechada C encerra a origem das coordenadas.

6. Seja $I = \displaystyle\int_C x^3\,dy - y^3\,dx$, onde C é formada pelos lados do triângulo de vértices $(-2,0)$, $(4,\sqrt{3})$ e $(1,\sqrt{3})$ e seja $J = \displaystyle\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$, onde R é a região limitada por C. Verifique que $I = 3\,J$.

7. Calcule m de modo que:

$$\int_C \frac{x\,r^m}{y}\,dx - \frac{x^2\,r^m}{y^2}\,dy$$

   com $x^2 + y^2 = r^2$, independa da curva C, fronteira de uma região simplesmente conexa. Escolha uma curva C nas condições do problema e calcule a integral ao longo de C.

8. Verifique que $\displaystyle\oint_C y^2\,dx + (2\,x\,y - 3)\,dy = 0$, sendo C a elipse $x^2 + 4\,y^2 = 4$. Calcule a integral ao longo do arco dessa elipse, situado no primeiro quadrante.

9. Calcule $\displaystyle\int_C \left(x^2\,y\,cos(x) - 2\,x\,y\,sen(x) - y^2\,e^x\right) dx + \left(x^2\,sen(x) - 2\,y\,e^x\right) dy$, onde C é a hipociclóide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

10. Ache a área da região limitada pela hipociclóide do item anterior, utilizando o teorema de Green.

11. Seja C uma curva simples e fechada que limita uma região de área A. Verifique que se $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$, então:

$$\oint_C (a_1\,x + a_2\,y + a_3)\,dx + (b_1\,x + b_2\,y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)\,A.$$

12. Sob que condições, no item anterior, a integral ao longo de C é zero?