Capítulo 4

PROPRIEDADES DAS CURVAS

Neste capítulo apresentamos as propriedades mais importantes das curvas e alguns dos pontos especiais que ocorrem nas curvas. Aparte da continuidade e diferenciabilidade das curvas, a reparametrização e o comprimento do arco são conceitos fundamentais das curvas que estudaremos no capítulo.

4.1 Continuidade

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo ou uma reunião de intervalos.

Definição 4.1. A curva

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

onde $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ é **contínua** se suas funções coordenadas $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 4.1.

A curva parametrizada por:

[1] $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva contínua.

[2] $\gamma(t) = (t, [[t]])$, $t \in \mathbb{R}$, onde $[[t]]$ indica o inteiro maior que t, não é uma curva contínua.

[3] $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva contínua.

Definição 4.2. Uma curva γ tem um **ponto múltiplo** se γ não é injetiva em I, ou equivalentemente, se existem $t_1,\ t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ tais que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Observação 4.1. Os pontos múltiplo de uma curva também são dito des **autointerseção.**

Exemplo 4.2.

[1] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = & t^2 \\ y(t) = & t^3 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

é contínua e possui ponto múltiplo para $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$. De fato:

$$\gamma(1) = \gamma(-1) = (1, 0).$$

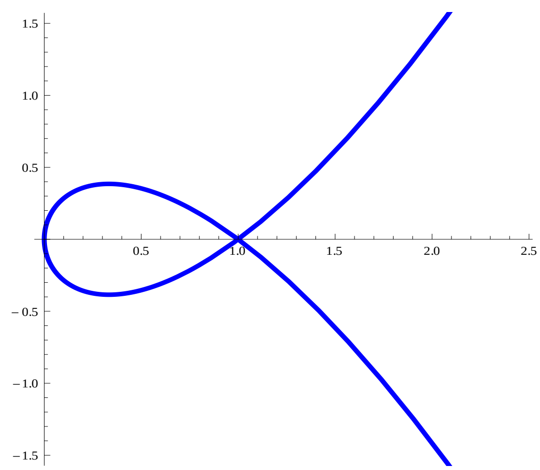

Figura 4.1: Curva do exemplo [1]

[2] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t) - \dfrac{cos(3\,t)}{2} \\ \\ y(t) = sen(t) - \dfrac{sen(3\,t)}{2}, \quad t \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

é contínua e possui 2 pontos múltiplos. De fato;

Para $t_1 = -\pi$ e $t_2 = \pi$:

$$\gamma(-\pi) = \gamma(\pi) = \big(-\frac{1}{2}, 0\big)$$

Analogamente, para $t_3 = -\frac{\pi}{6}$ e $t_4 = \frac{\pi}{6}$:

$$\gamma\big(-\frac{\pi}{6}\big) = \gamma\big(\frac{\pi}{6}\big) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}, 0\big).$$

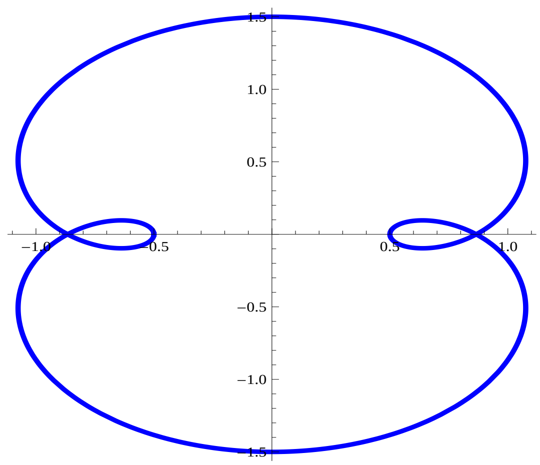

Figura 4.2: Curva do exemplo [2]

[3] Na curva $\gamma(t) = (cos(t), cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$, todos os pontos são múltiplos.

De fato:

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + 2\,k\,\pi), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

O traço desta curva é o segmento de reta $y = x$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Definição 4.3. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada.

1. $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados **ponto inicial e ponto final da curva,** respectivamente.

2. γ é uma **curva fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3. γ é uma **curva fechada simples** se não possui pontos múltiplos em $[a, b)$.

Exemplo 4.3.

[1] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t)\,(2\,cos(t) - 1) \\ y(t) = sen(t)\,(2\,cos(t) - 1), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

é uma curva fechada não simples, pois $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$.

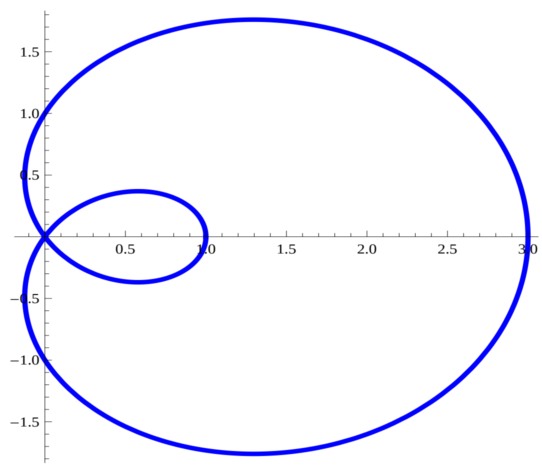

Figura 4.3: Curva do exemplo [2]

[2] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t) \\ y(t) = sen(t) \\ z(t) = cos(2t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

é uma curva fechada simples:

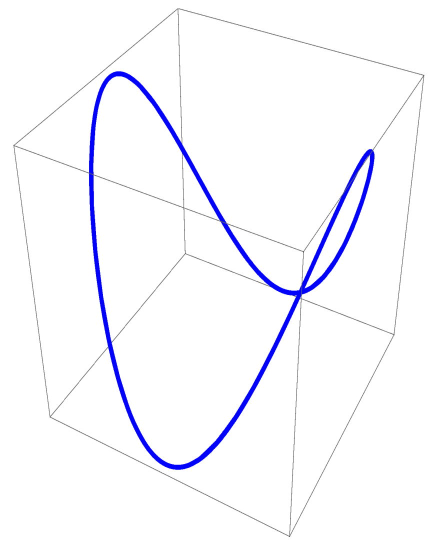

Figura 4.4: Curva do exemplo [2]

4.2 Diferenciabilidade

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos:

Definição 4.4. Seja C uma curva parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. A curva γ é **diferenciável** no ponto $t_0 \in I$ se suas funções coordenadas:

$$x_i : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

   são funções diferenciáveis em $t_0 \in I$.

2. A curva γ é **diferenciável** se é diferenciável em cada $t \in I$.

3. O **vetor velocidade** ou tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0)$ é :

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h},$$

   se o limite existe.

Observação 4.2.

1. Note que a definição de derivada é, formalmente igual ao estudado no Cálculo de uma Variável Real.

2. Para $n = 3$; se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, então $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é tal que:

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

$$y'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

$$z'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h},$$

se os limites existem.

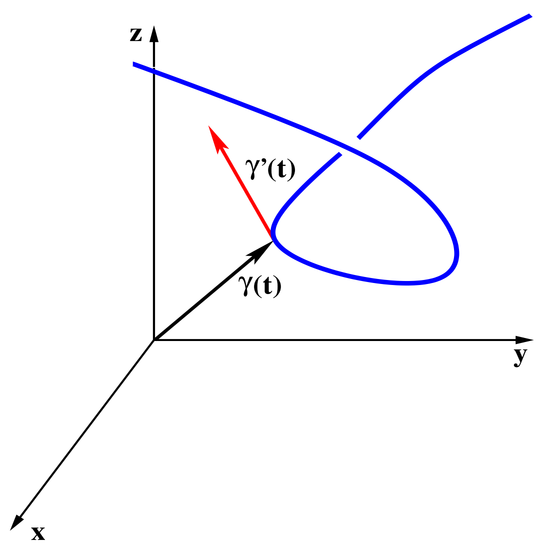

Figura 4.5:

3. Analogamente, para $n = 2$, se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e tal que:

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

$$y'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h},$$

se os limites existem.

4. Se $I = [a, b]$, é necessário que as derivadas laterais existam, isto é:

$$\gamma'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma(a + h) - \gamma(a)}{h}$$

e:

$$\gamma'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\gamma(b + h) - \gamma(b)}{h},$$

existam.

5. Em particular, se é uma curva fechada $\gamma'_+(a)$ e $\gamma'_-(b)$ devem existir e:

$$\gamma'_+(a) = \gamma'_-(b).$$

Definição 4.5. o número $\|\gamma'(t_0)\|$ é chamada a **velocidade escalar** da curva no ponto $\gamma(t_0)$.

Logo, se $\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t))$, então:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + ... + [x'_n(t)]^2}.$$

Exemplo 4.4.

[1] Seja a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo, $\gamma'(t) = (1, 2\,t)$ é o vetor velocidade de γ em cada ponto $\gamma(t)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\,t^2}$ é a velocidade em $\gamma(t)$.

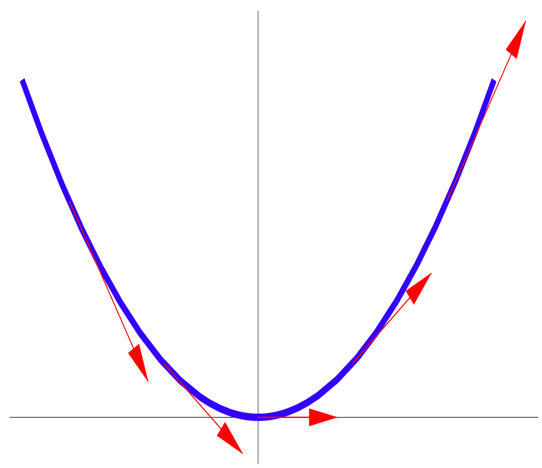

Figura 4.6: Exemplo [1]

[2] Seja a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t|, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observe que:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, 1) & \text{se} \quad t > 0 \\ (1, -1) & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Por outro lado, as derivadas laterais no ponto 0 existem, mas são diferentes; logo a curva não é diferenciável no ponto $t_0 = 0$.

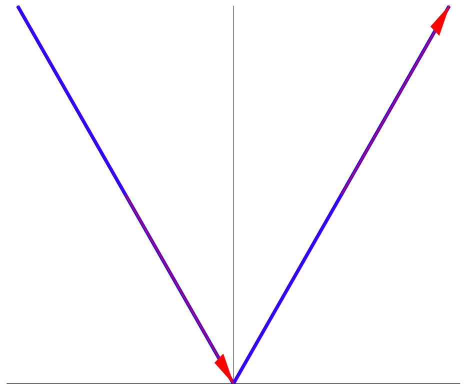

Figura 4.7: Exemplo [2]

[3] Sejam γ_1 e γ_2 parametrizações de C, definidas por:

$$\begin{cases} x_1(t) = cos(t) \\ y_1(t) = sen(t), \quad 0 \le t \le 2\,\pi, \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} x_2(t) = cos(2\,t) \\ y_2(t) = sen(2\,t), \quad 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Então $\|\gamma'_2(t)\| = 2\,\|\gamma'_1(t)\|$; logo, a velocidade de γ_2 é o dobro da de γ_1.

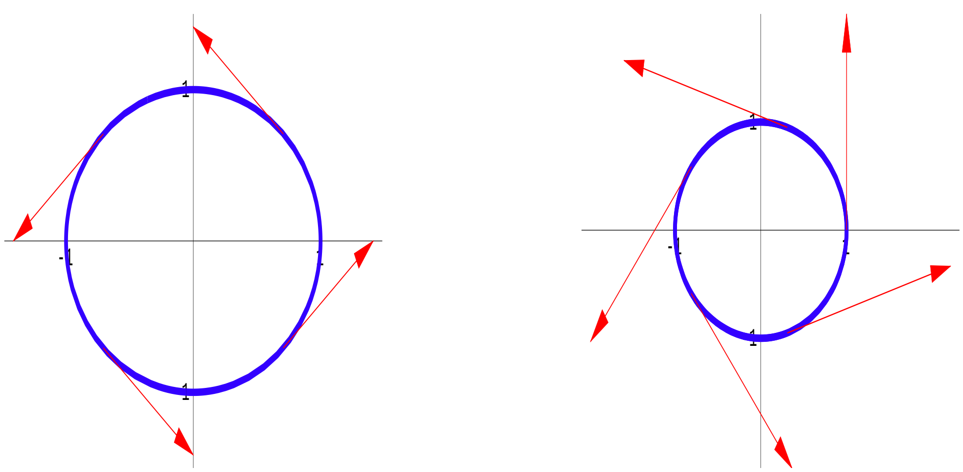

Figura 4.8: Exemplo [3]

Se aplicamos as diversas propriedades da derivada das funções de uma variável real às funções coordenadas de uma curva diferenciável, podemos obter as seguintes propriedades:

Proposição 4.1. Sejam $\gamma,\ \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curvas diferenciáveis, $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : I_1 \longrightarrow I$ funções reais diferenciáveis:

$$(1) \qquad (\gamma(t) + \beta(t))' = \gamma'(t) + \beta'(t)$$

$$(2) \qquad (r(t)\,\gamma(t))' = r'(t)\,\gamma(t) + r(t)\,\gamma'(t)$$

$$(3) \qquad (\gamma(t) \cdot \beta(t))' = \gamma'(t) \cdot \beta(t) + \gamma(t) \cdot \beta'(t)$$

$$(4) \qquad (\gamma(h(t))' = h'(t)\,\gamma'(h(t)),$$

onde $\cdot$ é o produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^n$. Em particular, se $\gamma(t) \neq \overrightarrow{0}$:

$$(5) \qquad \|\gamma(t)\|' = \frac{\gamma(t) \cdot \gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Prova: A prova segue diretamente das definições. (Exercício).

■

Corolário 4.1. Se $\gamma(t)$ tem comprimento constante se e somente se $\gamma'(t)$ é ortogonal ao vetor posição $\gamma(t)$, para todo $t \in I$.

Prova: Da propriedade (5). (Exercício).

■

Exemplo 4.5.

[1] Seja a curva C parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t^3), sen(t^3))$, $\|\gamma(t)\| = 1$ e o vetor velocidade é:

$$\gamma'(t) = 3\,t^2(-sen(t^3), cos(t^3));$$

logo, $\|\gamma'(t)\| = 3\,t^2$ e o vetor velocidade tem comprimento variável mas, $\gamma'(t)$ continua ortogonal a $\gamma(t)$.

[2] Seja a curva C parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t)\,sen(2\,t), cos(2\,t), sen(t)\,sen(2\,t))$ tal que $t \in [0, 2\,\pi]$; $\|\gamma(t)\| = 1$; o vetor tangente é:

$$\gamma'(t) = \big(2\,cos(t)\,cos(2\,t) - sen(t)\,sen(2\,t), -2\,sen(2\,t), 2\,cos(2\,t)\,sen(t) + cos(t)\,sen(2\,t)\big);$$

logo: $\|\gamma'(t)\|^2 = \dfrac{9 - cos(4\,t)}{2} = 5 - cos^2(2\,t)$, o vetor velocidade tem comprimento variável mas, continua ortogonal a $\gamma(t)$.

Observação 4.3. De forma análoga ao que ocorre com as funções de uma variável real, tem sentido perguntar se a curva $\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, diferenciável, etc.

Definição 4.6. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

1. Se γ' é contínua para todo t, então γ é dita curva de **classe $\mathbf{C^1}$**.

2. Se γ' é diferenciável, então $(\gamma')' = \gamma''$; $\gamma''(t)$ é chamado **vetor aceleração** da curva γ.

3. Uma curva C é de **classe $\mathbf{C^k}$**, se possui uma parametrização γ tal que existem γ', γ'', γ''', $\ldots \gamma^{(k)}$, e a k-ésima derivada $\gamma^{(k)}$ é contínua.

4. Se C é uma curva de classe C^k, para todo $k \geq 1$; C é dita de **classe $\mathbf{C^\infty}$**

Por exemplo, se consideramos $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de classe C^k, então:

$$x,\ y,\ z : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

são funções de classe C^k, $k \geq 1$, e:

$$\gamma^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), z^{(k)}(t)).$$

Observação 4.4. Como sempre γ^0 significa que γ é contínua.

Corolário 4.2. Se $\|\gamma'(t)\| = 1$, então:

$$\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0;$$

logo, $\gamma''(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$.

Prova: Segue da propriedade (5). (Exercício).

■

Exemplo 4.6.

[1] A curva parametrizada por $\gamma(t) = (e^t\, cos(t), e^t\, sen(t))$, $t \in \mathbb{R}$ é classe C^∞.

[2] A curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^5), & t \geq 0 \\ (t, -t^5), & t < 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é de classe C^4 e não de classe C^5.

[3] Seja a elipse parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = 2\, cos(2\,t) \\ y(t) = sen(2\,t)),\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determine o sentido do vetor velocidade, a aceleração e as velocidades máxima e mínima.

A elipse é uma curva classe C^∞. O vetor velocidade da elipse é:

$$\gamma'(t) = (-4\, sen(2\,t), 2\, cos(2\,t));$$

logo tem sentido anti-horário. Denotemos por:

$$f(t) = \|\gamma'(t)\| = 2\,\sqrt{3\, sen^2(2\,t) + 1}.$$

Do Cálculo I sabemos que $f(t)$ atinge o máximo se $sen(2\,t) = 1$, isto é, se $t = \dfrac{\pi}{4}$ e atinge o mínimo se $sen(2\,t) = 0$, ou seja, $t = 0$ e $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$f(\frac{\pi}{4}) = 4; \qquad \gamma(\frac{\pi}{4}) = (0, 1); \quad \gamma'(\frac{\pi}{4}) = (-4, 0)$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2; \qquad \gamma(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0); \quad \gamma'(\frac{\pi}{2}) = (0, -2)$$

$$f(0) = 2; \qquad \gamma(0) = (2, 0); \qquad \gamma'(0) = (0, 2);$$

$\gamma''(t) = -4\,\gamma(t)$; logo $\gamma''(t)$ aponta para o centro da elipse.

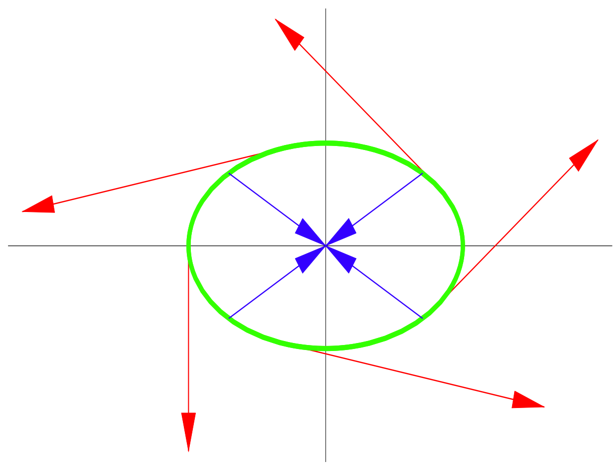

Figura 4.9: Exemplo [3]

Observação 4.5. É importante observar que a diferença do gráfico de uma função real, o traço de uma curva de classe C^1 pode ter quinas.

Exemplo 4.7.

Consideremos a curva C parametrizada por:

$$\gamma(t) = (a\,cos^3(t), a\,sen^3(t)), \quad a,\, t \in \mathbb{R}.$$

A curva $C = \gamma(\mathbb{R})$ é de classe C^∞, porém a curva apresenta quinas. A seguir, veja os desenhos de C, para diferentes $a > 0$:

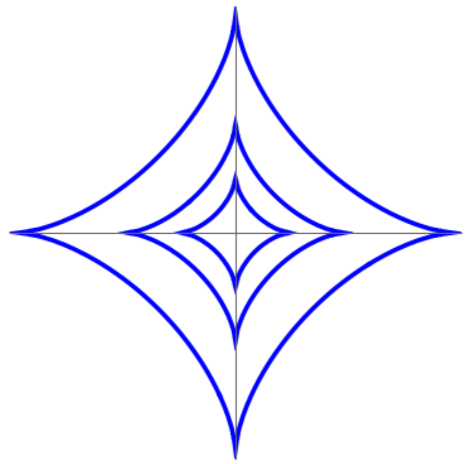

Figura 4.10: Curvas do exempo.

Por outro lado:

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

e o gráfico de γ, é:

$$G(\gamma) = \{(t, \gamma(t)) \,/ t \in \mathbb{R}\} = \{(t, cos^3(t), sen^3(t)) \,/ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

que é uma curva em $\mathbb{R}^3$, de classe C^∞.

4.3 Curvas Regulares

Definição 4.7. Seja C uma curva parametrizada por γ, então:

1. A curva γ é **regular em $\mathbf{t_0}$**, se $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

2. A curva γ é **regular**, se é regular para todo $t \in I$.

3. Se $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$, então t_0 é dito ponto **singular** de γ.

Observação 4.6. Equivalentemente, a curva C parametrizada por γ é regular em t_0 se, e somente se:

$$\|\gamma'(t_0)\| \neq 0.$$

Exemplo 4.8.

[1] Seja a curva parametrizada por $\gamma : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t))$. A curva γ não é regular. De fato:

$$\gamma'(t) = (1 - cos(t), sen(t)) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = \gamma'(2\,\pi) = \overrightarrow{0}.$$

Logo, a curva possui duas singularidades, uma em $t_0 = 0$ e outra em $t_0 = 2\,\pi$.

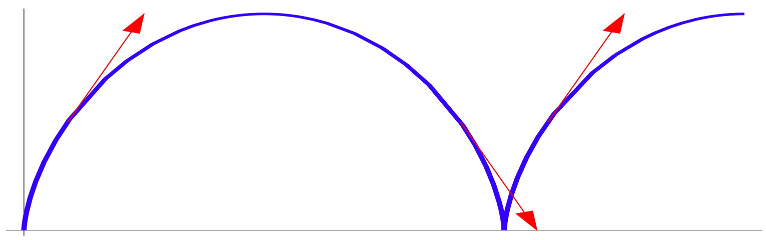

Figura 4.11: Exemplo [1]

[2] As cônicas são curvas regulares.

[3] Se $y = f(x)$ é uma função diferenciável, todas as curvas parametrizadas por:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t \in Dom(f)$$

são regulares.

[4] Seja a curva parametrizada por $\gamma(t) = \big(1 - cos(t), sen(t), 2\,sen(\frac{t}{2})\big)$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$; γ é uma curva regular e de classe C^1.

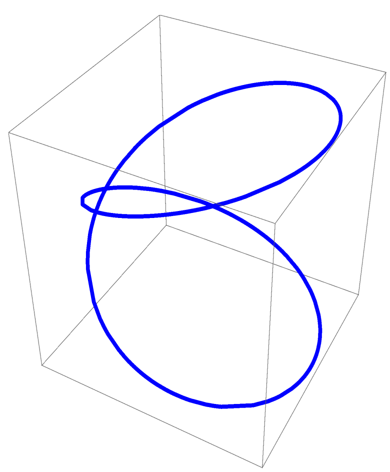

Figura 4.12: Exemplo [4]

$\gamma'(t) = (sen(t), cos(t), cos(\dfrac{t}{2}))$ é contínua e:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + cos^2(\frac{t}{2})} \neq 0$$

para todo $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

4.4 Reparametrizações

Neste parágrafo, estudaremos as mudanças que acontecem numa curva, quando mudamos seu paramêtro.

Denotemos por $I,\ I_1 \subset \mathbb{R}$ intervalos ou uma reunião de intervalos.

Definição 4.8. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada de classe C^k e $h : I_1 \longrightarrow I$ uma função de classe C^k, bijetiva tal que:

1. $h(I_1) = I$.

2. $h'(t) \neq 0$, para todo $t \in I_1$.

A curva $\beta : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\beta(t) = \big(\gamma \circ h\big)(t) = \gamma(h(t)), \quad \forall\ t \in I_1$$

é regular de classe C^k, e :

1. β é dita uma **reparametrização** de classe C^k de γ, ($k > 0$).

2. h é dita **mudança de parâmetro**.

Observação 4.7.

1. As curvas β e γ tem o mesmo traço.

2. A partir de agora só consideramos funções h, estritamente monótona e reparametrizações de classe C^k, ($k > 0$).

Proposição 4.2. Se β é uma reparametrização de γ, então:

$$\|\beta'(t)\| = |h'(t)|\,\|\gamma'(h(t))\|.$$

A velocidade escalar da curva γ é multiplicada pelo fator $|h'(t)|$.

Prova: Seja $\beta = \gamma \circ h$, segue diretamente de regra da cadeia:

$$\beta'(t) = h'(t)\,\gamma'(h(t)).$$

1. Se h é crescente, $h(c) = a$, $h(d) = b$ e:

$$\|\beta'(t)\| = h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|;$$

2. Analogamente, se h é decrescente, $h(c) = b$, $h(d) = a$, e:

$$\|\beta'(t)\| = -h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|.$$

■

Proposição 4.3. Toda curva C parametrizada por $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser reparametrizada com domínio no intervalo $[0, 1]$.

Prova: De fato, considere $h : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ definida por

$$h(t) = (b - a)\,t + a;$$

h satisfaz todas as propriedades da definição e $h'(t) = b - a$. Logo:

$$\beta(t) = \gamma((b - a)\,t + a), \quad t \in [0, 1]$$

e $\beta(0) = \gamma(a)$ e $\beta(1) = \gamma(b)$.

■

Exemplo 4.9.

[1] A circunferência centrada na origem, de raio a, parametrizada por γ, onde:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\,cos(t) \\ y_1(t) = a\,sen(t)), \quad 0 \le t \le 2\,\pi, \end{cases}$$

e consideremos β, definida por:

$$\begin{cases} x_2(t) = a\,cos(2\,t) \\ y_2(t) = a\,sen(2\,t)), \quad 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

β é uma reparametrização de γ.

De fato, consideramos $h : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2\,\pi]$ tal qur $h(t) = 2\,t$, função bijectiva de classe C^k, tal que:

$$\beta(t) = (\gamma \circ h)(t) = \gamma(2\,t) = (a\,cos(2\,t), a\,sen(2\,t)) \quad \text{e} \quad \|\beta'(t)\| = 2\,a = 2\,\|\gamma'(t)\|,$$

para todo $t \in [0, \pi]$; logo, β é uma reparametrização de γ.

[2] A circunferência centrada na origem, de raio a, parametrizada por γ, onde:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\,cos(t) \\ y_1(t) = a\,sen(t)), \quad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

Determine uma reparametrização β de γ tal que $\|\beta'(t)\| = 1$, para todo t.

Consideramos a função $h : [0, 2\,\pi\,a] \longrightarrow [0, 2\,\pi]$ tal que $h(t) = \dfrac{t}{a}$; h é de classe C^k, definamos:

$$\beta(t) = \big(\gamma \circ h)(t) = (a\,cos\big(\frac{t}{a}\big), a\,sen\big(\frac{t}{a}\big)) \quad \text{e} \quad \beta'(t) = \frac{1}{a}\,(-a\,sen\big(\frac{t}{a}\big), a\,cos\big(\frac{t}{a}\big)),$$

logo $\|\beta'(t)\| = 1$, para todo t.

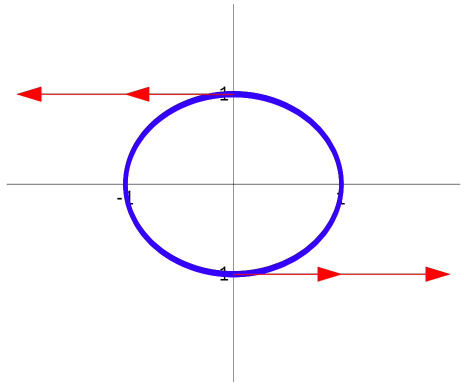

Figura 4.13: Exemplo [2]

4.5 Arcos

Definição 4.9. Um **arco da curva** C parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição da parametrização a um subconjunto próprio I_1 de I. É denotado e definido por:

$$\gamma_{arc} : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $\gamma_{arc}(t) = \gamma(t)$, $t \in I_1$.

Exemplo 4.10. Um arco da curva:

$$\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é $\gamma_{arc}(t) = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

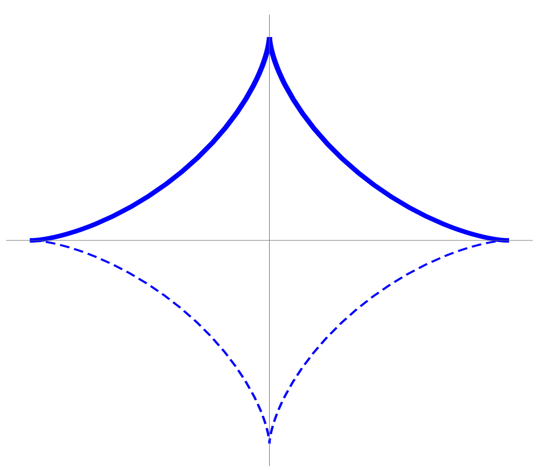

Figura 4.14: Curva e arco da curva, respectivamente

Observação 4.8. Uma curva regular parametrizada por γ, de classe C^1 pode ter pontos múltiplos. Mas, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.4. Seja curva regular parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Para todo $t_0 \in I$ existem um intervalo aberto $I_0 \subset I$ tal que $t_0 \in I_0$ e um arco de γ em I_0 sem pontos múltiplos.

Prova: De fato, como γ é regular, pelo menos uma das derivadas das funções coordenadas de γ é não nula em t_0, por exemplo, $x_i^{'}(t_0) \neq 0$. A função real $x_i^{'}(t)$ é contínua em $t = t_0$, pois γ é de classe C^1; logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x_i^{'}(t) \neq 0$ para todo $t \in I_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e $\gamma_{arc} : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva. Caso contrário, existiriam $t_1,\ t_2 \in I_0$, $t_1 \neq t_2$ com $\gamma_{arc}(t_1) = \gamma_{arc}(t_2)$; então $x_i(t_1) = x_i(t_2)$; pelo teorema do valor médio em $\mathbb{R}$, existe $\bar{t}$, $t_1 < \bar{t} < t_2$, tal que:

$$x_i^{'}(\bar{t}) = \frac{x_i(t_1) - x_i(t_2)}{t_1 - t_2} = 0,$$

o que é uma contradição.

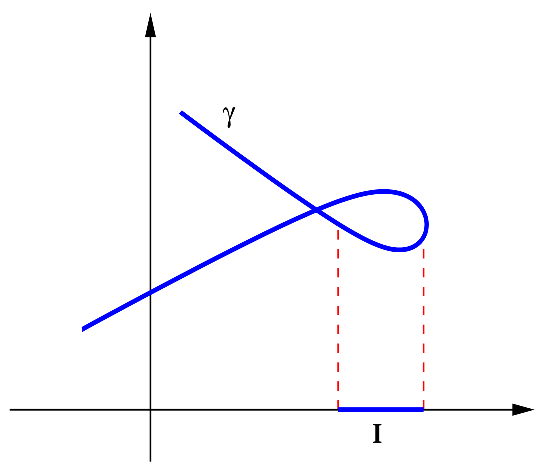

Figura 4.15:

■

Observação 4.9. Sejam $\gamma(t) = (x(t), y(t))\ t \in I$, curva regular de classe C^1 e I_0 como na proposição anterior. É possível provar que:

1. $x(I_0) = I_1 \subset I$ é um intervalo.

2. $x : I_0 \longrightarrow I_1$ é de classe C^1 e admite inversa $x^{-1} : I_1 \longrightarrow I_0$ também de classe C^1.

3. Podemos reparametrizar o arco de γ em I_1 da seguinte forma:

$$\beta(t) = \gamma(x^{-1}(t)) = (x^{-1}(x(t)), x^{-1}(y(t))) = (t, f(t)),$$

onde $f(t) = x^{-1}(y(t))$; logo $\beta(t)$ é o gráfico de $f(t)$.

4. A observação é uma aplicação direta do teorema da função inversa. Para mais detalhes veja a bibliografia.

Exemplo 4.11.

Seja $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $t \in [-2\,\pi, 2\,\pi]$; se $I_0 = (0, \pi)$ e $t_0 = \varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$; então, $I_1 = (-1, 1)$ e $x^{-1}(t) = arccos(t)$, logo :

$$\beta : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

é definida por $\beta(t) = (t, f(t))$, onde $f(t) = arccos(sen(t))$.

Definição 4.10. Seja uma curva parametrizada γ, de classe C^3. $\gamma(t_0)$ é **ponto de cúspide** de γ se $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$ e os vetores $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$ são linearmente independentes.

Exemplo 4.12.

[1] A curva parametrizada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ possui uma cúspide em $\gamma(0)$; de fato, $\gamma'(0) = \overrightarrow{0}$, $\gamma''(0) = (2, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 6)$.

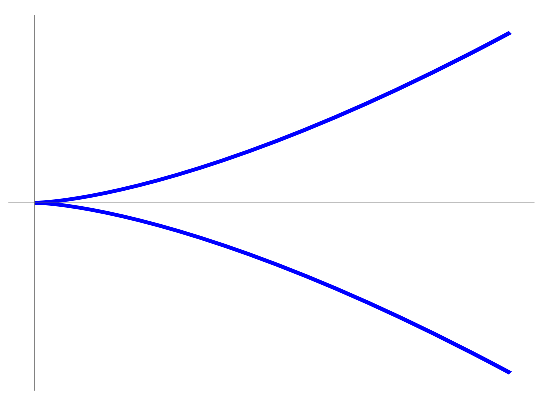

Figura 4.16: Exemplo [1]

[2] A curva parametrizada por $\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$, $t \in [0, 2\,\pi]$, possui 4 cúspides.

De fato, $cos^3(t) = \dfrac{1}{4}(cos(3t) + 3cos(t))$ e $sen^3(t) = -\dfrac{1}{4}(sen(3t) - 3sen(t))$, logo:

$$\gamma'(t) = \frac{3}{4}\,(-sen(3\,t) - sen(t), cos(t) - cos(3\,t))$$

$$\gamma''(t) = \frac{3}{4}\,(-cos(t) - 3\,cos(3t), 3\,sen(3t) - sen(t))$$

$$\gamma'''(t) = \frac{3}{4}\,(9\,sen(3t) + sen(t), -cos(t) + 9\,cos(3t)).$$

O sistema:

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} sen(3t) + sen(t) & = 0 \\ cos(t) - cos(3t) & = 0 \end{cases}$$

tem as seguintes soluções: $t = 0$, $t = \pi$ e $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$; para $t = 0$, $\gamma''(0) = (-4, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 8)$, ambos linearmente independentes. Analogamente os outros.

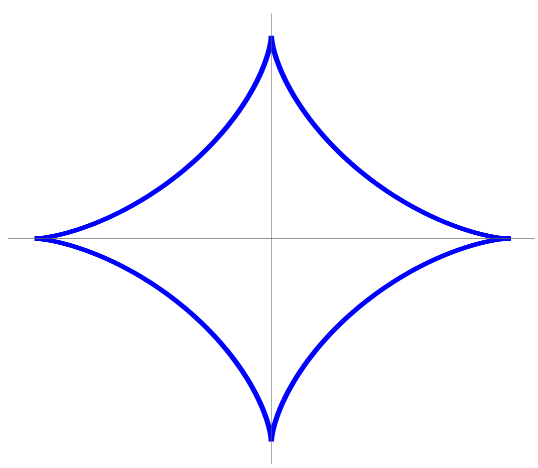

Figura 4.17: Exemplo [2]

[3] A curva definida por $\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$ possui infinitos pontos de cúspides ao longo do eixo dos x, em $t_0 = 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.6 Reta Tangente

Seja γ uma parametrização regular de uma curva em $\mathbb{R}^n$. O vetor $\gamma'(t)$ determina a reta tangente em cada ponto de γ.

Definição 4.11. Sejam $\gamma(t_0) = P$ e $\gamma'(t_0) = \vec{\mathbf{v}}$ o vetor tangente a γ em P. A reta que passa por P com direção $\vec{\mathbf{v}}$ é dita reta tangente em P de γ, e tem como equação:

$$r(t) = \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.10.

1. A reta tangente $r = r(t)$ é paralela ao vetor $\gamma'(t_0)$.

2. Se $n = 3$. Denotemos por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $x_0^{'} = x'(t_0)$, $y_0^{'} = y'(t_0)$ e $z_0^{'} = z'(t_0)$, então, as equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\,x'_0 \\ y(t) = & y_0 + t\,y'_0 \\ z(t) = & z_0 + t\,z'_0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

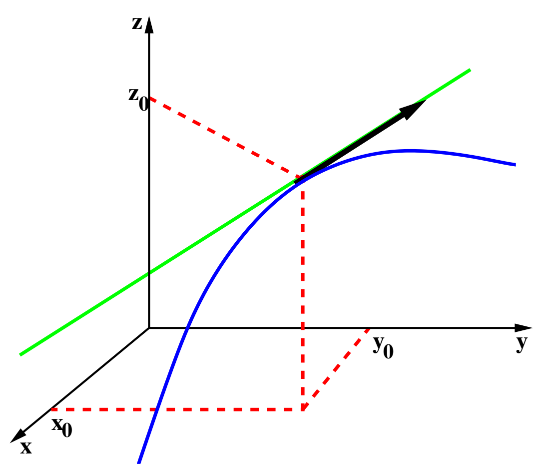

Figura 4.18: Reta tangente à curva

3. Analogamente para $n = 2$:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\,x'_0 \\ y(t) = & y_0 + t\,y'_0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplo 4.13.

[1] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva $z = 4 - x^2$ e $y = 2$ no ponto $(1, 2, 3)$.

Fazendo $x = t$, obtemos uma parametrização da curva:

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & 2 \\ z(t) = & 4 - t^2. \end{cases}$$

Como a curva $\gamma(t) = (t, 2, 4 - t^2)$ passa pelo ponto $(1, 2, 3)$, então o vetor tangente é $\gamma(t_0) = (t_0, 2, 4 - t_0^2) = (1, 2, 3)$, logo $t_0 = 1$.

Calculemos $\gamma'(t_0)$:

$$\gamma'(t)\big|_{t=1} = (1, 0, -2\,t)\big|_{t=1} = (1, 0, -2).$$

A equação da reta tangente é $\gamma(1) + t\,\gamma'(1)$, temos que as equaçãda reta tangente é:

$$\begin{cases} x(t) = & 1 + t \\ y(t) = & 2 \\ z(t) = & 3 - 2\,t. \end{cases}$$

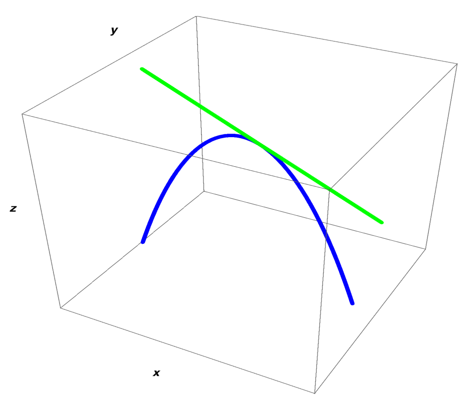

Figura 4.19: Exemplo [1]

[2] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva C parametrizada por:

$$\gamma(t) = (2\,cos(t), 2\,sen(t), 4\,t)$$

no ponto $(1, -\sqrt{3}, -\dfrac{4\pi}{3})$.

Determinamos t_0 resolvendo o sistema $\gamma(t_0) = (1, -\sqrt{3}, -\dfrac{4\pi}{3})$, equivalentemente:

$$\begin{cases} 1 & = x(t_0) = 2\,cos(t_0) \\ -\sqrt{3} & = y(t_0) = 2\,sen(t_0) \\ -\dfrac{4\pi}{3} & = z(t_0) = 4\,t_0 \end{cases}.$$

Logo $t_0 = -\dfrac{\pi}{3}$. Calculemos $\gamma'(t_0)$, logo:

$$\gamma'(t)\big|_{t=t_0} = (-2\,sen(t), 2\,cos(t), 4)\big|_{t=t_0} = (\sqrt{3}, 1, 4).$$

As equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x(t) = & 1 + \sqrt{3}\,t \\ y(t) = & -\sqrt{3} + t \\ z(t) = & -\dfrac{4\pi}{3} + 4\,t. \end{cases}$$

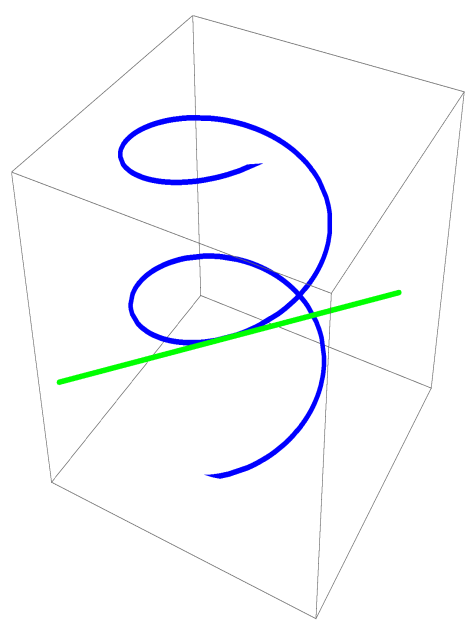

Figura 4.20: Exemplo [2]

Observação 4.11. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva plana. O vetor normal à curva γ é $\mathbf{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$ ou $-\mathbf{n}(t)$; logo, a reta normal à curva $\gamma(t)$ no ponto $\gamma(t_0)$ é $\gamma(t_0) + t\,\mathbf{n}(t_0)$, ou equivalentemente:

$$\begin{cases} x = & x(t_0) + t\,y'(t_0) \\ y = & y(t_0) - t\,x'(t_0). \end{cases}$$

Exemplo 4.14.

[1] Determine as equações paramétricas da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & 2\,cos(t) \\ y(t) = & 2\,sen(t), \end{cases}$$

no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Denotemos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, primeiramente obtemos o valor de t_0 tal que $x(t_0) = \sqrt{2}$ e $y(t_0) = \sqrt{2}$, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{2} = x(t_0) = & 2\,cos(t_0) \\ \sqrt{2} = y(t_0) = & 2\,sen(t_0), \end{cases}$$

o qual tem como solução $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Calculando o vetor tangente no ponto t_0:

$$\gamma'(t_0) = (-2, \mathrm{sen}(t_0), 2\,cos(t_0)) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Como $x'(t_0) = -\sqrt{2}$ e $y'(t_0) = \sqrt{2}$ o vetor normal é $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; logo as equações da reta tangente e da reta normal são:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{2} - t\,\sqrt{2} \\ y_1(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \\ y_2(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

respectivamente.

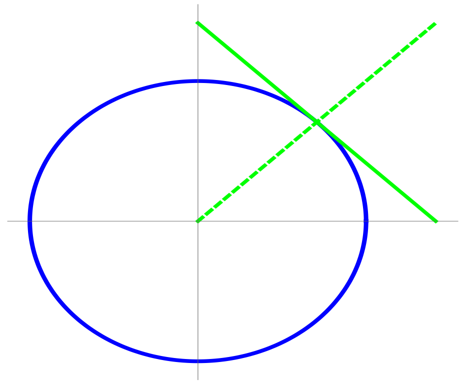

Figura 4.21: Exemplo [1]

[2] Determine as equações paramétricas da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & 2 - t^{-1} \\ y(t) = & 2\,t + t^{-1}, \end{cases}$$

em $t_0 = 1$.

$\gamma(1) = (1,3)$; o vetor tangente à curva é $\gamma'(t) = (t^{-2}, 2 - t^{-2})$, $\gamma'(1) = (1,1)$ e o vetor normal é $(-1,1)$. As equações da reta tangente e da reta normal são:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + t \\ y_1(t) = 3 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

respectivamente.

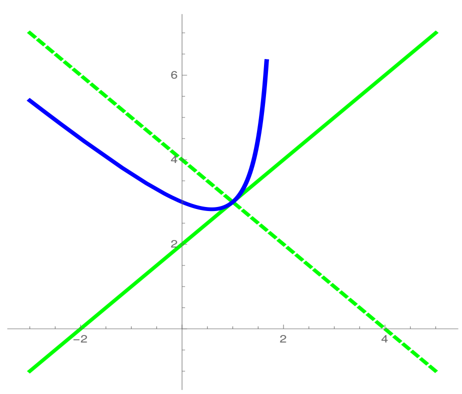

Figura 4.22: Exemplo [2]

[3] Determine a reta tangente e normal a $\gamma(t) = (t+2, 1+ln(t+1), e^t)$, no ponto $(2,1,1)$.

Primeiramente, determinamos o valor de t_0; Isto é:

$$\gamma(t_0) = (2,1,1) \Longrightarrow (t_0+2, 1+ln(t_0+1), e^{t_0}) = (2,1,1) \Longleftrightarrow t_0 = 0.$$

Determinemos $\gamma'(t_0)$, logo:

$$\gamma'(t)\big|_{t=0} = (1, \frac{1}{t+1}, e^t)\big|_{t=0} = (1,1,1).$$

A equação da reta tangente a γ em t_0 é: $\gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0)$, logo:

$$(2,1,1) + t\,(1,1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Determinemos $\gamma''(0)$:

$$\gamma''(t)\big|_{t=0} = (0, -\frac{1}{(t+1)^2}, e^t)\big|_{t=0} = (0,-1,1).$$

Logo, $\gamma'(0)$ e $\gamma''(0)$ são ortogonais, e a equação da reta normal em t_0 é:

$$(2,1,1) + t\,(0,-1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1-t \\ z = 1+t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proposição 4.5. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva em $\mathbb{R}^2$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

se as derivadas envolvidas existem.

Prova: Podemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ por eliminação do parâmetro. Mas é possível determiná-la, diretamante, pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt};$$

se as derivadas envolvidas existem.

∎

Corolário 4.3. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva em $\mathbb{R}^2$, então:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}},$$

se as derivadas envolvidas existem.

Prova: Basta fazer $\overline{y} = \dfrac{dy}{dx}$ e aplicar a proposição anterior.

■

Exemplo 4.15. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, se:

[1] $\begin{cases} x = & t^2 - 6 \\ y = & t^3 + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Derivando: $x'(t) = 2t$ e $y'(t) = 3t^2$; logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3\,t}{2}, \quad t \neq 0;$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,t}{2}t$ e $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{3}{2}$; então, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4\,t}$, se $t \neq 0$.

[2] $\begin{cases} x = & 4\,cos^3(t) \\ y = & 4\,sen^3(t), \quad t \in (0, 2\,\pi). \end{cases}$

Derivando: $x'(t) = -12\,cos^2(t)\,sen(t)$ e $y'(t) = 12\,sen^2(t)\,cos(t)$, logo: $\dfrac{dy}{dx} = -tg(t)$, se $t \neq \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -sec^2(t)$ e:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12}\,sec^4(t)\,cosec(t), \quad \text{se} \quad t \neq \frac{\pi}{2}.$$

Observação 4.12. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)$ uma curva parametrizada diferenciável, então o coeficiente angular da reta tangente no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ é:

$$m_0 = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0).$$

Logo, a equações cartesianas da reta tangente e da normal em (x_0, y_0), são:

$$y - y_0 = m_0\,(x - x_0) \quad \text{e} \quad y - y_0 = -\frac{1}{m_0}\,(x - x_0),$$

respectivamente, se as derivadas envolvidas existem.

Exemplo 4.16.

[1] Determine as equações da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & a\cos(t) \\ y(t) = & b\,sen(t), \end{cases}$$

$t \in [0, 2\,\pi]$, se $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Note que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0) = (\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{b\sqrt{2}}{2})$, logo:

$$m(t) = \frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos(t)}{a\,sen(t)} \Longrightarrow m_0 = m(t_0) = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{b}{a}.$$

As equações das retas tangente e normal no ponto (x_0, y_0) são:

$$b\,x + a\,y = \sqrt{2}\,a\,b \quad \text{e} \quad a\,x - b\,y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(a^2 - b^2),$$

respectivamente.

[2] Determine a equação da reta tangente a:

$$\begin{cases} x(t) = & ln(t^2 + 1) \\ \\ y(t) = & \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

que é paralela a reta $y - x = 2$.

Duas retas são paralelas, se e somente seus coeficientes angulares são iguais, logo:

$$m(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{t^2 + 1}, \quad t > 0 \Longrightarrow \frac{2}{t^2 + 1} = 1 \Longrightarrow t_0 = 1.$$

Então, $\gamma(1) = (ln(2), 0)$ e a equação da tangente no ponto (x_0, y_0):

$$y = x - ln(2).$$

Observação 4.13. Se C é uma curva plana parametrizada por γ que possui um ponto múltiplo para t_0 e t_1, isto não implica necessariamente que $\gamma'(t_0) = \gamma'(t_1)$ nem que estes vetores sejam paralelos. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.17. Determine as equações da retas tangente à curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

nos pontos $t = 1$ e $t = -1$.

Primeiramente observamos que $\gamma(1) = \gamma(-1) = (1, 0)$ e o vetor tangente é:

$$\gamma'(t) = (2\,t, 3\,t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\gamma'(1) = (2, 2)$ e $\gamma'(-1) = (-2, 2)$, então as equações das retas tangentes nos pontos $t = 1$ e $t = -1$ são:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\,t \\ y(t) = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x(t) = 1 - 2\,t \\ y(t) = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

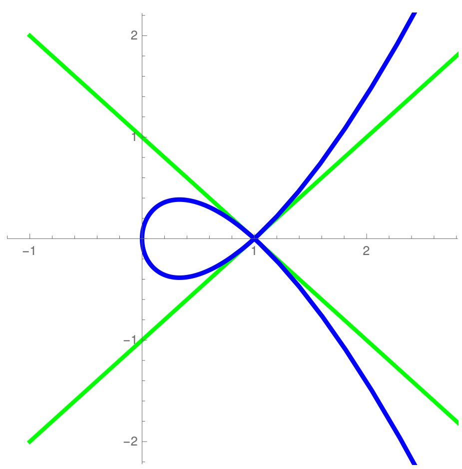

Figura 4.23:

4.7 Comprimento de Arco

Seja C uma curva de classe C^1, parametrizada por γ. Consideremos C como a trajetória de uma partícula com velocidade:

$$s(t) = \|\gamma'(t)\|,$$

ao longo de γ. Intuitivamente o comprimento de arco da curva quando $t \in [a, b]$ é a distância total percorrida pela partícula no intervalo de tempo $t \in [a, b]$, isto é:

$$\int_a^b s(t)\, dt.$$

A forma de justificar a definição de comprimento de arco de uma curva γ se baseia na aproximação por poligonais. De fato:

Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^1 e a seguinte partição de ordem n do intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Denotemos por:

$$P_0 = \gamma(t_0),\ \ P_1 = \gamma(t_1), \ldots, P_n = \gamma(t_n).$$

$[t_{i-1}, t_i]$ os subintervalos de $[a, b]$ determinados pela partição, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ o comprimento do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ o segmento de reta que liga P_{i-1} e P_i, para $i = 1, ..., n$:

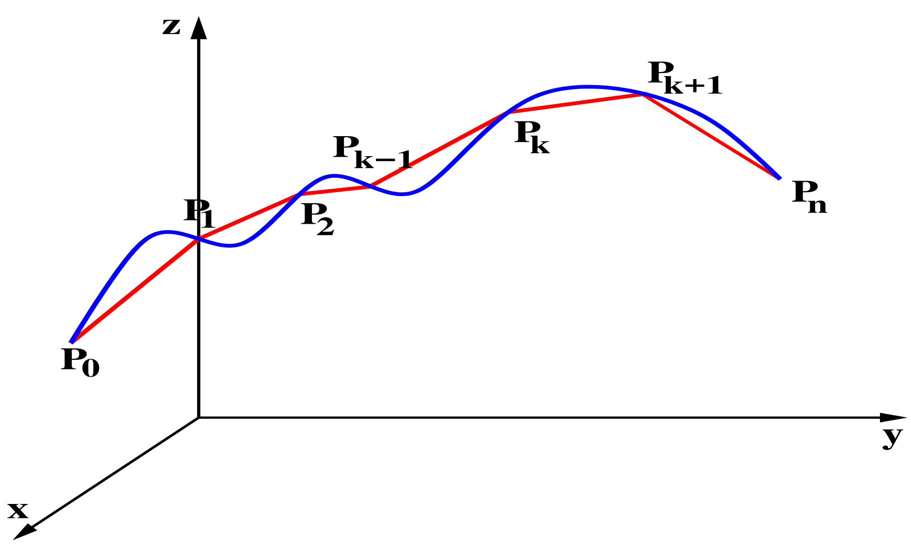

Figura 4.24: Partição da curva

O comprimento do segmento $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ é:

$$\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

O comprimento total da poligonal é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|.$$

Como $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções reais de classe C^1, pelo teorema do valor médio aplicado às funções x, y e z em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, existem $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ e $\bar{t}_3$ tais que:

$$\begin{cases} x(t_i) - x(t_{i-1}) & = x'(\bar{t}_1)\Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) & = y'(\bar{t}_2)\Delta t_i \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) & = z'(\bar{t}_3)\Delta t_i. \end{cases}$$

Logo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\bar{t}_1)]^2 + [y'(\bar{t}_2)]^2 + [z'(\bar{t}_3)]^2}\, \Delta t_i.$$

A rigor, a ultima expressão não é uma soma de Riemann, pois os $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ e $\bar{t}_3$ não são necessariamente iguais.

Utilizaremos agora o seguinte teorema sobre integração, que pode ser visto em o livro de Análise Real de Elon L. Lima.

Teorema 4.1. Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $t_0 < \dots\dots < t_n$ uma partição de $[a, b]$ e $\bar{t} \in [t_{i-1}, t_i]$; então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t})\, \Delta t_i,$$

onde existe a possibilidade de haver diferentes $\bar{t}$.

■

Aplicando o teorema a $f(t) = \sqrt{[x'(\bar{t}_1)]^2 + [y'(\bar{t}_2)]^2 + [z'(\bar{t}_3)]^2}$, obtemos:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \lim_{n \to +\infty} S_n,$$

isto para qualquer partição de $[a, b]$. Intuitivamente se $n \longrightarrow +\infty$ a poligonal aproxima-se da curva.

Definição 4.12. Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1. O comprimento de arco de γ entre a e b é denotado por $L(\gamma)$ e definido por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Exemplo 4.18.

[1] Seja $\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\, cos(t), a\, sen(t))$; logo, $\gamma'(t) = (-a\, sen(t), a\, cos(t))$ e $\|\gamma'(t)\| = a$, então:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\, a\, \pi\, u.c.$$

[2] Seja $\gamma : [0, 4\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\, cos(t), a\, sen(t))$; logo, $\gamma'(t) = (-a\, sen(t), a\, cos(t))$ e $\|\gamma'(t)\| = a$, então:

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} a\, dt = 4\, a\, \pi\, u.c,$$

pois a trajetória de γ percorre duas vezes o mesmo circunferência.

[3] Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right)$; logo $\gamma'(t) = (t, t^2)$, então, $\|\gamma'(t)\| = t\,\sqrt{t^2+1}$ e fazendo $u = t^2 + 1$:

$$L(\gamma) = \int_0^1 t\,\sqrt{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}\,(2\,\sqrt{2} - 1)\, u.c.$$

[4] Seja $\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), t)$, então, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ e

$$L(\gamma) = \int_0^{2\,\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\,\sqrt{2}\,\pi\, u.c.$$

Corolário 4.4. Como sabemos do Cálculo em uma variável. Se $\gamma(t) = (t, f(t))$ é de classe C^1, $a \le t \le b$, então:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt,$$

Prova: Segue da definição.

∎

Observação 4.14. A definição de comprimento de arco é ainda válida se $\|\gamma'(t)\|$ tem um número finito de descontinuidades em $[a,b]$ ou, de forma mais geral, se $\|\gamma'(t)\|$ é integrável sobre $[a,b]$.

Proposição 4.6. O comprimento de arco de uma curva é independente da parametrização. Isto é, se β é uma reparametrização de γ, então:

$$L(\beta) = L(\gamma).$$

Prova: Sejam $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ de classe C^1, crescente, isto é, $h(c) = a$ e $h(d) = b$. Considere a reparametrização $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\beta(t) = \gamma(h(t))$; logo:

$$\|\beta'(t)\| = |h'(t)|\,\|\gamma'(h(t))\| = h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|,$$

pois h é crescente, e:

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\|\,dt = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} \|\gamma'(h(t))\|\,h'(t)\,dt = \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,du = L(\gamma),$$

onde $u = h(t)$. O caso em que h é decrescente é análogo. O traço da curva não muda, o que muda é o tempo do percurso.

■

Exemplo 4.19.

[1] Seja $\beta : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (a\,cos(2\,t), a\,sen(2\,t))$ uma reparametrização do círculo de raio a: $\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t))$, $0 \le t \le 2\,\pi$, onde $h(t) = 2\,t$; logo:

$$L(\beta) = \int_0^{\pi} 2\,a\,dt = 2\,a\,\pi\,u.c.$$

[2] Seja $\beta : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (a\,cos(2t), a\,sen(2t))$; logo:

$$L(\beta) = \int_0^{2\,\pi} 2\,a\,dt = 4\,a\,\pi\,u.c.$$

Então, β não é uma reparametrização de γ, do exemplo [1].

4.8 Aplicações

Se uma partícula de massa m move-se ao longo de uma trajetória, a força total $\mathbf{F}$ que atua sobre a partícula em cada instante de tempo t é dada pela segunda lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m\,\tilde{\mathbf{a}},$$

onde $\tilde{\mathbf{a}}$ é o vetor aceleração da partícula. Em diversas situações, a força é dada pela posição da partícula ou, equivalentemente, pela trajetória $\gamma(t)$.

Um problema interessante é determinar a trajetória que descreve o movimento da partícula, conhecendo sua posição inicial e sua velocidade.

A) Determinaremos a equação da trajetória de um míssil disparado com velocidade inicial $\vec{\mathbf{v}}_0$ e ângulo de inclinação α.

Fazemos as seguintes simplificações: não consideraremos a resistência do ar, o míssil é disparado na origem e a força $\mathbf{F}$ de gravidade g é constante.

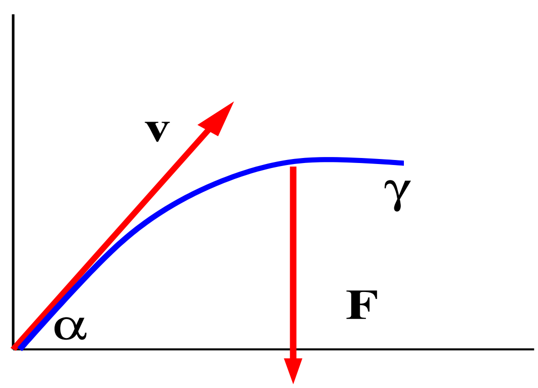

Figura 4.25:

Denotemos por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva e por $\vec{\mathbf{v}}_0 = (v_0 cos(\alpha), v_0 sen(\alpha))$ o vetor velocidade. Se m é a massa do míssil, então $\mathbf{F}(x,y) = (0, -mg)$; pela Lei de Newton, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é o vetor aceleração, logo $\gamma''(t) = (0, -g)$ e:

$$\begin{cases} x''(t) = & 0 \\ y''(t) = & -g. \end{cases}$$

Integrando ambas em relação a t, obtemos $x'(t) = c_1$ e $y'(t) = -gt + c_2$; c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$; observemos que $\vec{\mathbf{v}}_0 = (x'(0), y'(0))$ então:

$$\begin{cases} x'(t) = & v_0\,cos(\alpha) \\ y'(t) = & -g\,t + v_0\,sen(\alpha). \end{cases}$$

Integrando novamente em relação a t e tendo em vista que $\gamma(0) = (0,0)$:

$$\begin{cases} x(t) = & t\,v_0\,cos(\alpha) \\ y(t) = & t\,v_0\,sen(\alpha) - \dfrac{g\,t^2}{2}; \end{cases}$$

a trajetória é uma parábola.

B) Um planeta movendo-se ao redor do sol (considerado como a origem),

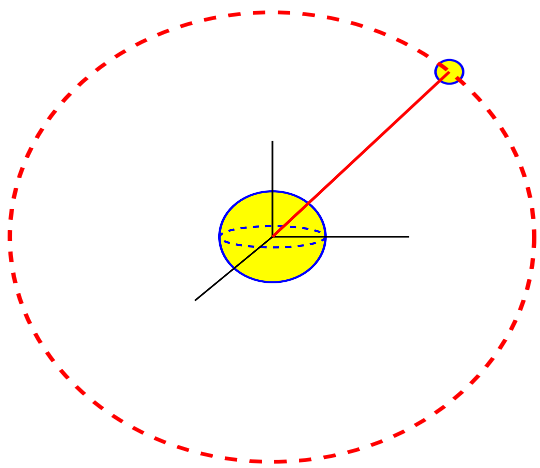

Figura 4.26:

satisfaz à lei gravitacional de Newton:

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = -\left[\frac{m\,G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\right]\gamma(t),$$

onde γ é a curva que descreve o movimento do planeta em cada instante t, M é a massa do sol, m é a massa do planeta e $G = 6.67\times 10^{-11}$ a constante gravitacional. Logo, temos que γ satisfaz à seguinte equação para todo t:

$$\gamma''(t) = -\left[\frac{G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\right]\gamma(t).$$

Nós não vamos resolver esta equação, mas tentaremos entendê-la no caso particular do movimento circular.

i) Suponhamos que γ descreve uma trajetória circular de raio r_0 e velocidade constante $v_0 = \|\gamma'(t)\|$. Escolhemos a seguinte parametrização da circunferência:

$$\begin{cases} x(t) = & v_0\, cos\left(\dfrac{v_0\, t}{r_0}\right) \\ \\ y(t) = & v_0\, sen\left(\dfrac{v_0\, t}{r_0}\right), \end{cases}$$

pois γ é uma curva plana e podemos supor que está no plano xy:

$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) = -\frac{v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t)$$

e a força $\mathbf{F}$ que atua é:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}(t) = -\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t);$$

logo, $\mathbf{a}(t)$ tem sentido oposto ao vetor posição $\gamma(t)$.

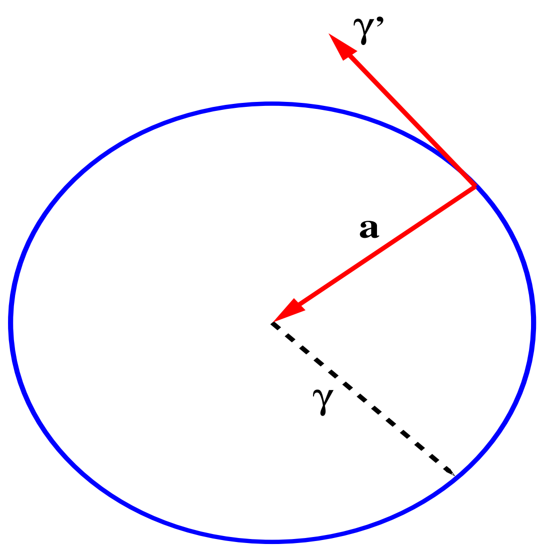

Figura 4.27:

$\mathbf{F}$ é chamada força centrípeta.

ii) Suponhamos que um satélite de massa m move-se com velocidade constante v_0 ao redor de um planeta de massa M em órbita circular γ de raio r_0. A força $\mathbf{F}$ é dada por:

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = -\frac{m\,G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t),$$

como o movimento é circular:

$$\mathbf{F} = -\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t),$$

$\|\gamma(t)\|^3 = r_0^3$; igualando as duas equações:

$$-\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t) = -\frac{m\,G\,M}{r_0^3}\,\gamma(t);$$

fazendo o produto escalar por $\gamma(t)$ em ambos os lados, obtemos: $v_0^2 = \dfrac{G\,M}{r_0}$. Se T é o período de uma revolução na órbita, então $v_0 = \dfrac{2\,\pi\,r_0}{T}$; logo:

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,r_0^3}{G\,M},$$

ou seja, o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio. Esta é a terceira lei de Kepler.

4.9 Exercícios

1. Determine o vetor tangente e o vetor normal de:

   (a) $x(t) = a(1-t),\ y(t) = b\,t$

   (b) $x(t) = a\,sec(t),\ y(t) = a\,tg(t)$

   (c) $x(t) = 2\,tg(t),\ y(t) = 3\,cotg(t)$

   (d) $x(t) = 2t + 2,\ y(t) = 2t^2 + 4t$

   (e) $x(t) = 2(1 + cos(t)),\ y(t) = 2\,sen(t)$

   (f) $x(t) = sen^4(t),\ y(t) = cos^4(t)$

   (g) $x(t) = \dfrac{2\,a\,t}{1+t^2},\ y(t) = a\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

   (h) $x(t) = 2\,sen(t) - 3\,cos(t),\ y(t) = 4\,sen(t) + 2\,cos(t)$

   (i) $x(t) = a\,sen(t),\ y(t) = b\,tg(t)$

   (j) $x(t) = sen(\frac{}{2}),\ y(t) = cos(t)$

   (k) $x(t) = sec(t),\ y(t) = tg(t)$

   (l) $x(t) = sen(t),\ y(t) = cos(2t)$

   (m) $x(t) = sen(3t),\ y(t) = cos(3t)$

   (n) $x(t) = t + \dfrac{1}{t},\ y(t) = t - \dfrac{1}{t}$

2. Determine as equações da reta tangente às seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ nos pontos $(1, \pm 1)$

   (b) $\gamma(t) = (2\,t + 2, 2\,t^2 + 4\,t)$ no ponto $(2, 6)$

   (c) $\gamma(t) = (2\,sen(t) - 3\,cos(t), 4\,sen(t) + 2\,cos(t))$ no ponto $(3, -2)$

   (d) $\gamma(t) = (t, 1 - t^2, 2)$ no ponto $(0, 1, 2)$

   (e) $\gamma(t) = (2\,t^3 - 1, 3 - 5\,t^2, 8\,t + 2)$ no ponto $(1, -2, 10)$

(f) $\beta(t) = (e^t, t\,e^t, t+4)$ no ponto $(1,0,4)$

(g) $\beta(t) = (cos(t), sen(t), 1 - 2\,sen(t))$ no ponto $(-1,0,1)$

(h) $\beta(t) = (t, t^2, t^3)$ no ponto $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\big)$

3. Verifique que se a curva parametrizada γ é tal que $\|\gamma(t)\| = c$, $\forall\, t$ e $c > 0$. Então o vetor tangente γ' é ortogonal a γ, $\forall\, t$.

4. Verifique que se γ é a parametrização de uma reta, então γ'' é paralelo a γ'. A recíproca é válida?

5. Determine o comprimento de arco das seguinte curvas:

(a) $x = |t|$, $y = |t - 0.5|$, $t \in [-1, 1]$

(b) $x(t) = 2\,(1 - sen(t))$, $y(t) = 2\,(1 - cos(t))$, $0 \le t \le \pi$.

(c) $x(t) = t\,cos(t)$, $y(t) = t\,sen(t)$, $0 \le t \le \pi$.

(d) $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + t$, $y(t) = \dfrac{t^2}{2} - t$, $0 \le t \le 1$.

(e) $x(t) = t$, $y(t) = ln(cos(t))$, $t \in [0, 1]$.

(f) $x(t) = e^{-t}\,cos(t)$, $y(t) = e^{-t}\,sen(t)$, do ponto $(1,0)$ até o ponto limite, quando $t \to +\infty$.

(g) $x(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{cos(u)\,du}{u^2}$, $y(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{sen(u)\,du}{u^2}$, do ponto $(0,0)$ até o ponto mais próximo que tenha tangente vertical.

6. A cúbica de **Tschirnhausen** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$27\,a\,y^2 = x^2(x + 9\,a);\ a \neq 0.$$

(a) Verifique que esta curva pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) &= 3\,a\,(t^2 - 3) \\ y(t) &= a\,t\,(t^2 - 3), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 1.5$ e $a = 3$.

(c) Verifique que a curva possui um ponto múltiplo na origem para $t = \pm\sqrt{3}$.

(d) Determine o vetor tangente e o vetor aceleração desta curva, em qualquer ponto.

7. A **serpentina de Newton** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$x^2\,y + a^2\,y - b^2\,x = 0;\ a,\ b \neq 0.$$

(a) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 2$, $a = 4$, $a = 6$ e $b = 6$.

(c) Verifique que a curva é regular.

8. A **trissectriz de Maclaurin** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$y^2\,(a - x) = x^2\,(x + 3\,a);\ a \neq 0.$$

(a) Verifique que esta curva pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{a\,(t^2-3)}{t^2+1} \\[2ex] y(t) &= \dfrac{a\,t\,(t^2-3)}{t^2+1}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 0.5$, $a = 1.5$ e $a = 2$.

(c) Verifique se a curva é regular e se possui pontos múltiplos.

9. Verifique que a curva parametrizada por $\gamma(t) = (sen(2\,t), 2\,sen^2(t), 2\,cos(t))$ está situada sobre uma esfera centrada na origem. Ache o comprimento do vetor velocidade e verifique que a projeção deste vetor no plano xy tem comprimento constante.

10. Seja γ uma curva de classe C^1 com ponto inicial $A = \gamma(a)$ e final $B = \gamma(b)$. Seja o segmento de reta $r(t) = A + t(B - A)$; $t \in [0, 1]$. Verifique que $L(r) \leq L(\gamma)$.

11. Verifique que se $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\gamma'(t) = 0$, para todo $t \in (a, b)$, então $\gamma(t)$ é um vetor constante no intervalo (a, b).

12. Seja C a curva definida pela equações $x = t^3$ e $y = t^6$, $t \in [-1, 1]$:

    (a) A curva é de classe C^1?

    (b) C é regular?

    (c) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

13. Seja:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \quad \text{se} \quad t > 0 \\ 0 \quad \text{se} \quad t = 0 \\ -t^2 \quad \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

e considere a curva definida por:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t^2, \ t \in [-1, 1] \end{cases}$$

    (a) A curva é de classe C^1?

    (b) C é regular?

    (c)) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

14. As equações paramétricas da trajetória de um cometa são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = 200\, cos(t) \\ y(t) = 10\, sen(t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

onde 200 e 10 são medidas em unidades astronômicas.

(a) Determine as equações paramétricas das retas tangente e normal no ponto $t = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Determine a equação cartesiana da trajetória, identificando a mesma.

(c) Determine o comprimento da trajetória.

15. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada definida por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

Determine os pontos da curvas nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4, 4, 3)$.

16. Uma partícula se move ao longo de uma curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t)),$$

$t \in [0, 2\,\pi]$. Determine os instantes t_1 e $t_2 \in [0, 2\,\pi]$, onde a velocidade escalar seja unitária.