Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Professora: Rosiane Soares Cesar

5ª Lista de Exercícios - Álgebra

(1) O produto de dois números inteiros positivos que não são primos entre si é igual a 825. Qual é o mdc entre esses números?

(2) Determine se existem inteiros positivos x, y e z que satisfaçam a equação $2^x \cdot 3^4 \cdot 26^y = 39^z$.

(3) O número 683 é primo? Justifique.

(4) Seja $k > 1$ um inteiro. Mostre que os números $k! + 2$, $k! + 3$, $\ldots$, $k! + k$ são todos compostos. Conclua que por maior que seja m sempre existem m inteiros números compostos consecutivos.

(5) Seja $n > 0$ um número inteiro positivo composto e p um fator primo positivo de n. Sabe-se que:

(a) $p \geq \sqrt{n}$

(b) $p - 4$ divide o mdc $(6n + 7, 3n + 2)$ Determine todos os possíveis valores de n

(6) Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
Dica: faça a prova por absurdo, supondo que $a = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, com mdc $(a, b) = 1$ (fração irredutível).

(7) Determine o número de divisores positivos de:

(a) 13860.

(b) 43960.

(8) Deternmine os divisores positivos de:

(a) 140

(b) 756

(9) Dados números inteiros positivos k, l, m, t, u e v, considere $a = 2^k 3^l 5^m$ e $b = 2^t 3^u 5^v$. Determine as possibilidades para a e b, sabendo-se que mdc $(a, b) = 60$, a tem exatamente 18 divisores positivos e b exatamente 12 divisores positivos.

(10) Determine, justificando, quais das relações abaixo são relações de equivalência:

(a) Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim x_2$ se e só se $f(x_1) = f(x_2)$.

(b) Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y$ se e só se $x - y \in \{-1, 0, 1\}$.

(11) Considere o conjunto $A = \left\{m + n\sqrt{2},\ m, n \in \mathbb{Z}\right\}$, munido da seguinte relação:

$$\text{para } x, y \in A,\ x \sim y \text{ se e somente se } x - y \in \mathbb{Z}$$

Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência e calcule $\overline{2 - \sqrt{2}}$.

(12) Para cada par de inteiros a, n abaixo ache um número inteiro b tal que $b \equiv a \pmod{n}$, e $0 \leq b < n$.

   (a) $a = 2351$ e $n = 2$.
   (b) $a = -50121$ e $n = 13$.
   (c) $a = 321670$ e $n = 14$.

(13) Determine os números naturais n, $n \geq 2$, para quais $\overline{3} \cdot \overline{2}^4 - \overline{13}$ é $\overline{0}$ em $\mathbb{Z}_n$.

(14) Prove que se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ então:

   (a) $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
   (b) $ac \equiv bd \pmod{n}$. (Dica: use que $0 = cb - cb$)
   (c) $ar \equiv br \pmod{n}$, $r \in \mathbb{Z}$.

Gabarito

(1) 5
(2) Não
(3) Demonstração
(4) Demonstração
(5) $n \in \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 20, 25\}$
(6) Demonstração
(7) (a) 72
    (b) 32
(8) (a) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 7, 14, 28, 35, 70, 140\}$
    (b) $\{1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 7, 14, 28, 21, 42, 84, 63, 126, 252, 189, 378, 756\}$
(9) $a = 300, b = 60$ ou $a = 180, b = 60$
(10) Apenas (a) é uma relação de equivalência.
(11) $\overline{2 - \sqrt{2}} = \{m - \sqrt{2},\, m \in \mathbb{Z}\}$
(12) (a) 1
    (b) 7
    (c) 6
(13) $n \in \{5, 7, 35\}$
(14) Demonstração.