Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Professora: Rosiane Soares Cesar

4ª Lista de Exercícios - Álgebra I

(1) Determine:

(a) $\overline{37}^{-1}$ em $\mathbb{Z}_{125}$.

(b) $\overline{11}^{-1}$ em $\mathbb{Z}_{263}$.

(c) $\overline{35}^{-1}$ em $\mathbb{Z}_{144}$.

(d) $\overline{n-1}^{-1}$ em $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$.

(2) Determine $\phi\,(4620)$, $\phi\,(30^4)$, $\phi\,(6^{23} \cdot 8^2)$.

(3) Construa a tabela de multiplicação de $U\,(12)$.

(4) Determine a ordem de $\overline{12}$ em $U\,(25)$ e a ordem de $\overline{4}$ em $U\,(255)$

(5) Seja a função $f : \mathbb{Z}_{96} \to \mathbb{Z}_{96}$ definida por $f\,(\overline{m}) = \overline{35m}$, para todo $\overline{m}$. Mostre que f é uma bijeção. Também encontre $\overline{m} \in \mathbb{Z}_{96}$ tal que $f\,(\overline{m}) = \overline{30}$

(6) O objetivo desta questão é mostrar que nenhum número da forma $4n+3$, $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros.

(a) Mostre que o quadrado de qualquer inteiro só pode ser congruente a 0 ou 1 módulo 4.

(b) Use (1) para mostrar que se x e y são inteiros então $x^2 + y^2$ só pode ser congruente a 0, 1 ou 2 módulo 4.

(c) Use (2) para mostrar que um inteiro da forma $4n+3$ não pode ser escrito como a soma de dois quadrados inteiros.

(7) Calcule o resto da divisão de a por n nos casos abaixo:

(a) $a = 4^{200}$ e $n = 7$.

(b) $a = 7^{1001}$ e $n = 13$.

(c) $a = 2^{45632}$ e $n = 15$.

(d) $a = 6^{54632}$ e $n = 25$.

(e) $a = 5^{7^{101}}$ e $n = 8$

(8) Calcule os dois últimos algorismos do número $7^{7^{1000}}$

(9) Decida, justificando, se $-a^p + a$ é múltiplo inteiro de p para todo primo positivo p e todo número inteiro a.

(10) Resolva as congruências lineares $ax \equiv b\,(\operatorname{mod} n)$ abaixo e descreva o conjunto solução em termos de classes $\operatorname{mod} n$.

(a) $18x \equiv 24\,(\operatorname{mod} 25)$

(b) $36x \equiv 63 \pmod{225}$
(c) $3x + 2 \equiv 0 \pmod{4}$
(d) $2x - 1 \equiv 7 \pmod{15}$
(e) $6x \equiv 25 \pmod{32}$

(11) Encontre, justificando, a quantidade de números naturais n, $10000 < n < 20000$, tais que $6n$ dividido por 105 deixa resto 96.

(12) Seja $j : \mathbb{Z}_{64} \to \mathbb{Z}_{64}$ definida por $f(\overline{m}) = \overline{12m}$, para todo $\overline{m} \in \mathbb{Z}_{64}$. Determine o conjunto

$$f^{-1}\left(\left\{\overline{20}, \overline{24}, \overline{44}\right\}\right)$$

(13) Mostre que a equação $x^{13} + 12x + 13y^6 = 1$ não admite soluções inteiras. (sugestão: reduza módulo 13 e use Teorema de Fermat.

(14) Mostre, usando o teorema de Fermat, que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

(15) Mostre que $19^{8n} - 1$ é divisível por 17, $\forall n \in \mathbb{N}$.

GABARITO

(1) (a) $\overline{98}$ (b) $\overline{24}$ (c) $\overline{101}$ (d) $\overline{n-1}$

(2) 960, 216000, $2^{29}.3^{22}$, respectivamente.

(3) Cálculos

(4) 20 e 4, respectivamente.

(5) $f\left(\overline{42}\right) = \overline{30}$

(6) Demonstração

(7) (a) 2 (b) 11 (c) 1 (d) 11 (e) 5

(8) 07

(9) demonstração

(10) (a) $S = \overline{18}$
(b) $S = \overline{8} \cup \overline{33} \cup \overline{58} \cup \overline{83} \cup \overline{108} \cup \overline{133} \cup \overline{158} \cup \overline{183} \cup \overline{208}$
(c) $S = \overline{2}$
(d) $S = \overline{4}$
(e) $S = \emptyset$

(11) 286

(12) $\left\{\overline{15}, \overline{31}, \overline{47}, \overline{63}, \overline{2}, \overline{18}, \overline{34}, \overline{50}, \overline{9}, \overline{25}, \overline{41}, \overline{57}\right\}$.

(13) Demonstração

(14) Demonstração

(15) Demonstração