Capítulo 3

CURVAS PARAMETRIZADAS

3.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos as curvas parametrizadas, no plano e no espaço. As curvas são uma grande fonte de aplicações. As curvas podem representar, trajetórias de partículas, órbitas de planetas, movimentos de corpos, entre outros fenômenos. O estudo local das curvas é parte da Geometria Diferencial, o estudo global, especialmente das curvas planas é parte da Geometria Algébrica e da Teoria das Singularidades.

É intuitivo pensar que uma curva no plano ou espaço pode ser considerada como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca no plano ou no espaço durante um intervalo de tempo.

3.2 Parametrizações

Uma forma de estudar tais trajetórias consiste em determinar as coordenadas de um ponto da curva em função de um só parâmetro, como por exemplo, o tempo t. Podemos descrever tais curvas através de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. Esta descrição é chamada forma paramétrica da curva.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo ou uma reunião de intervalos.

Definição 3.1. Uma **curva parametrizada** γ em $\mathbb{R}^n$ é uma função que associa a cada número real $t \in I$ um único vetor $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ e é denotada por:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Observação 3.1. Note que $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ e as funções coordenadas de γ, são:

$$x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 3.2. A imagem $C = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dita **trajetória ou traço da curva** γ e é definida como o lugar geométrico de todos os pontos $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ tais que $t \in I$.

Observação 3.2.

1. Deve-se ter cuidado para não confundir a curva parametrizada, que é uma função com o seu traço, que é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

2. Se C é uma curva parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, então as equações:

$$\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t) \\ z = & z(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

constituem a representação paramétrica de γ. t é dito parâmetro da curva.

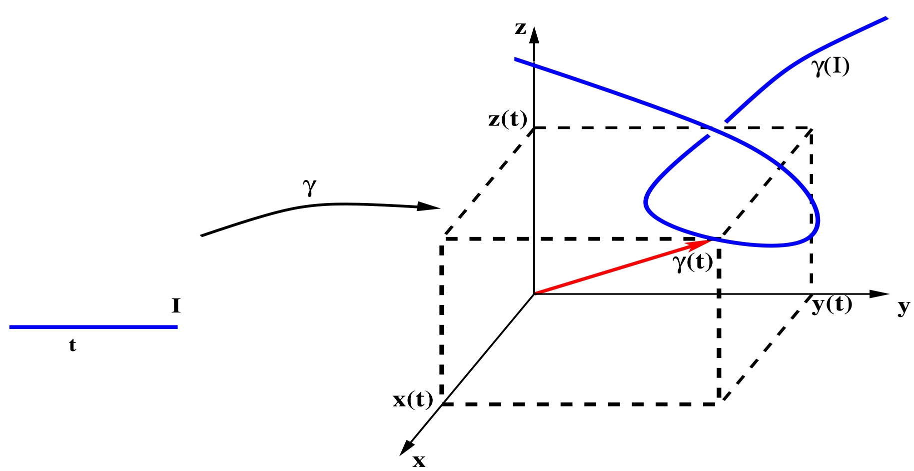


Figura 3.1: Curva parametrizada

3. Analogamente se a curva está definida em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

3.3 Exemplos

[1] A circunferência C de raio $a > 0$, centrada na origem tem a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,cos(t) \\ y(t) = & a\,sen(t),\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

De fato, se $P = (x, y) \in C$ e t é o ângulo que o segmento de reta que liga a origem e P forma com o eixo dos x:

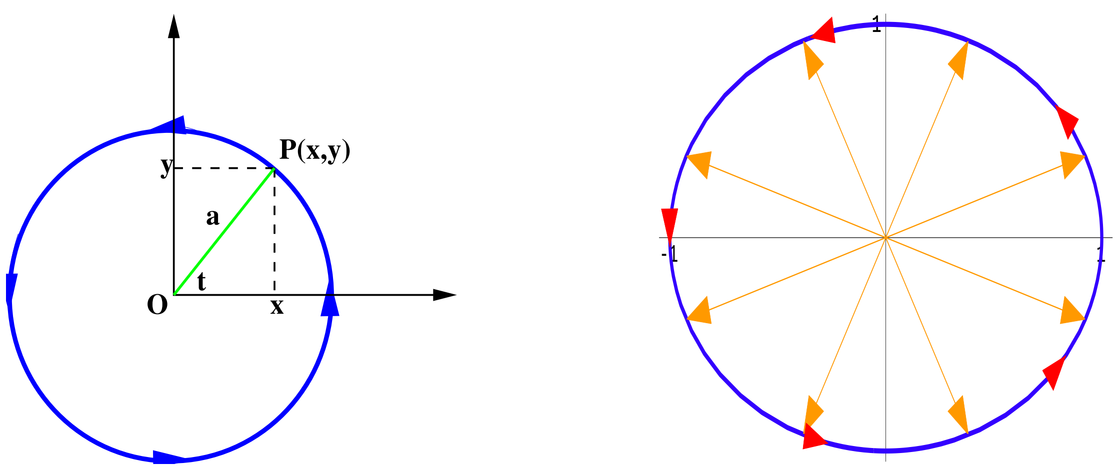


Figura 3.2: A seta indica o sentido da parametrização

Sabemos da trigonometria que:

$$sen(t) = \frac{y}{a} \quad \text{e} \quad cos(t) = \frac{x}{a};$$

logo, como:

$$x = a\,cos(t) \quad \text{e} \quad y = a\,sen(t) \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Note que $\|\gamma(t)\| = a$ é constante para todo $t \in [0, 2\pi]$ e $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$.

[2] Seja C a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\,cos(t) \\ y(t) = e^{-t}\,sen(t),\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O vetor posição tem comprimento variável $\|\gamma(t)\| = e^{-t}$; logo:

$$\lim_{t \to +\infty} \|\gamma(t)\| = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to -\infty} \|\gamma(t)\| = +\infty.$$

A curva não "fecha"como no exemplo anterior, pois:

$$\gamma(0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad \gamma(2\pi) = e^{-2\pi}(1, 0).$$

Esta curva é uma espiral.

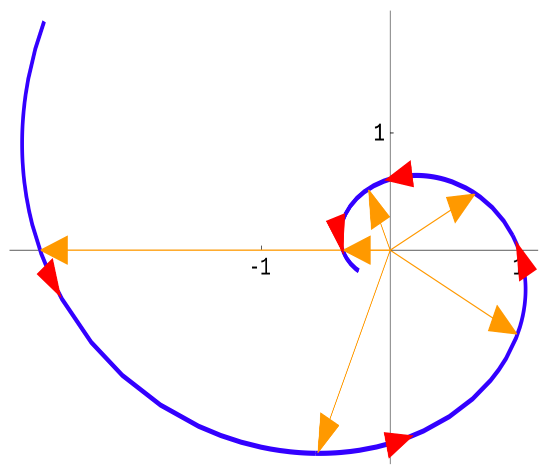


Figura 3.3: Exemplo [2]

Observação 3.3. Inicialmente, para esboçar a trajetória das curvas pode-se fazer uma tabela com entrada t e saídas x e y, que são marcadas no plano para determinar aproximadamente o esboço.

[3] A parametrização da reta, em $\mathbb{R}^3$, que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ é:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\,v_1 \\ y(t) = & y_0 + t\,v_2 \\ z(t) = & z_0 + t\,v_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

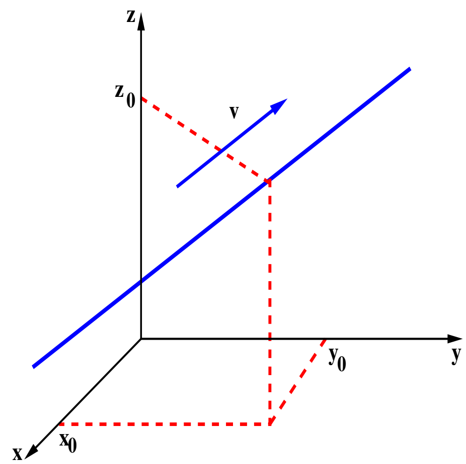


Figura 3.4: Reta na direção $\vec{\mathbf{v}}$

Analogamente, a parametrização da reta em $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e na direção de $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ é:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\,v_1 \\ y(t) = & y_0 + t\,v_2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[4] Seja $y = f(x)$ uma função real; fazendo $x = t$ podemos escrever o gráfico de f na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & f(t), \quad t \in Dom(f). \end{cases}$$

Logo, todos os gráficos conhecidos de funções do cálculo de uma variável podem ser escritos na forma paramétrica.
Por exemplo, a família de curvas $y = e^{bx}\,cos(a\,x)$, $a,\ b \in \mathbb{R}$ é parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = e^{bt}\,cos(a\,t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

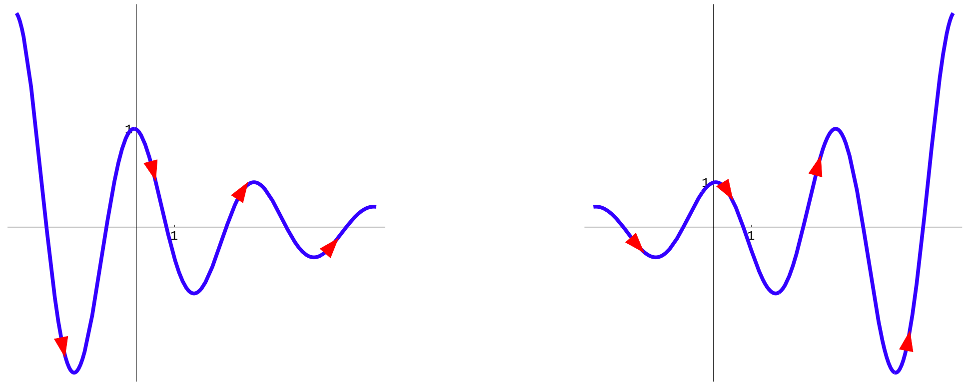


Figura 3.5: Desenhos para $b < 0$ e $b > 0$, respectivamente

3.4 Parametrização das Cônicas

Uma das mais importante classe de curvas planas são as cônicas, nos próximos parágrafos apresentamos suas parametrizações.

As cônicas (ou seções cônicas), são curvas planas obtidas pela interseção de um cone circular reto com um plano. As curvas obtidas são ditas cônicas não degeneradas e recebem o nome de círculos, parábolas, elipses e hipérboles.

Definição 3.3. Sejam F um ponto e L uma reta, no plano, tais que $F \notin L$. Chama-se **cônica** o seguinte subconjunto do plano:

$$C = \{P \,/\, d(P, F) = e \cdot d(P, L)\},$$

onde $e > 0$.

Observação 3.4. Equivalentemente:

Uma cônica é formada pelos pontos P (**lugar geométrico**), do plano que satisfazem:

$$d(P, F) = e \cdot d(P, L).$$

O ponto F é dito **foco**, a reta L é dita **diretriz** e o número e é dito **excentricidade** da cônica.

Definição 3.4. Dada uma cônica C:

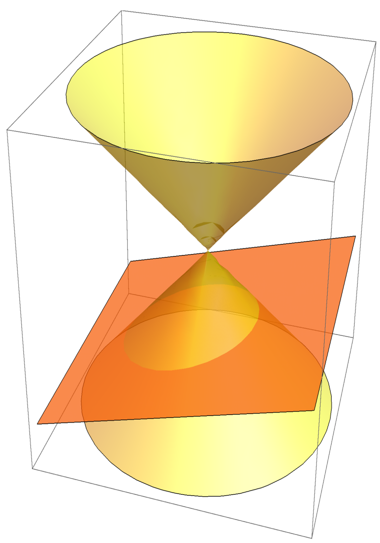
1. Se $e = 1$, a cônica é chamada **parábola**.

2. Se $e < 1$, a cônica é chamada **elipse**.

3. Se $e > 1$, a cônica é chamada **hipérbole**.

Observação 3.5. A continuação, estudaremos a elipse mais detalhadamente, os detalhes das outras cônicas, ficam de exercício a leitores interessados .

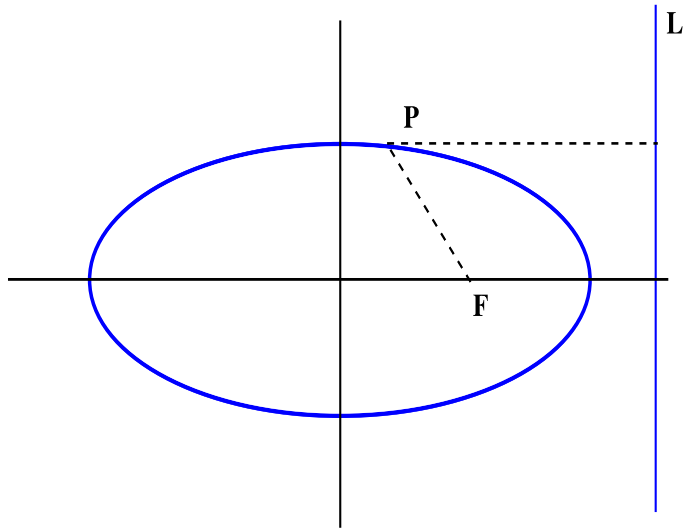
3.5 Elipse



Por simplicidade, suponhamos que o foco está sobre o eixo dos x. Isto é, o foco é $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta vertical $x = d$ tal que $p \neq d$.

Pela definição, o ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse se, e somente se:

$$\begin{aligned} d(P, F) = e \cdot d(P, L) &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \cdot \sqrt{(x-d)^2} \\ &\iff x^2 - 2\,p\,x + p^2 + y^2 = e^2 \cdot (x^2 - 2\,d\,x + d^2) \\ &\iff (1 - e^2)\,x^2 + 2\,(e^2\,d - p)\,x + y^2 = e^2\,d^2 - p^2. \end{aligned}$$



Se escolhemos $p = e^2\,d$, obtemos:

$$(1-e^2)\,x^2 + y^2 = e^2\,d^2\,(1-e^2) \Longleftrightarrow \frac{x^2}{e^2\,d^2} + \frac{y^2}{e^2\,d^2\,(1-e^2)} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = e\,d$ e $b = e\,d\,\sqrt{1-e^2}$. Note que $p = a\,e$ e $d = \dfrac{a}{e}$, por outro lado:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \Longrightarrow e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

A equação da elipse com foco $F = (a\,e, 0)$, diretriz $x = \dfrac{a}{e}$ e excentricidade $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ e aequação da elipse centrada na origem é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a,\, b \neq 0$$

Considere os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ tal que $b < a$. Seja $P = (x, y)$ um ponto na elipse:

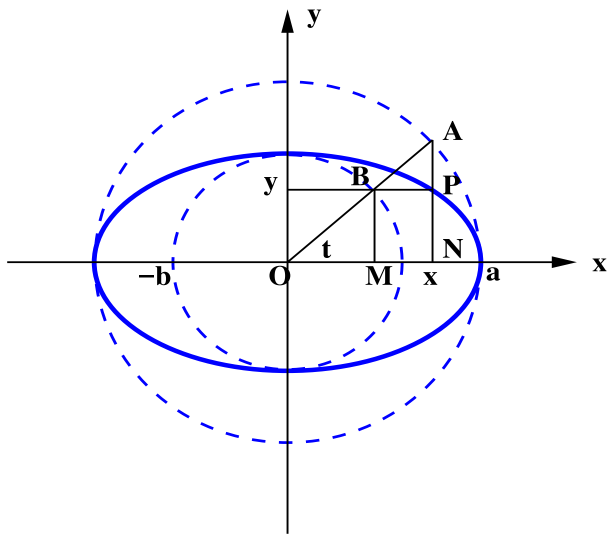


Figura 3.6: Construção da elipse

Do triângulo ONA temos $x = a\,cos(t)$ e do triângulo OMB temos $y = b\,sen(t)$; logo:

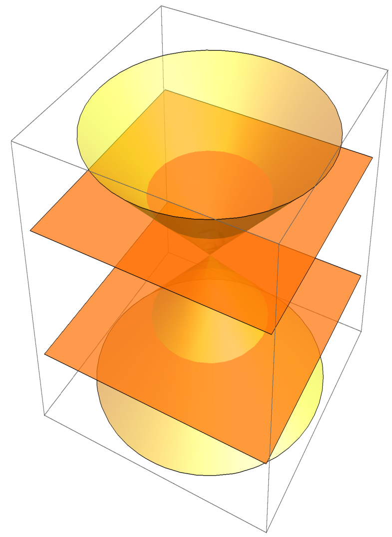
$$\begin{cases} x(t) &= a\,cos(t) \\ y(t) &= b\,sen(t), \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da elipse centrada no ponto (h, k) são:

$$\begin{cases} x(t) &= a\,cos(t) + h \\ y(t) &= b\,sen(t) + k, \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

3.5.1 O círculo

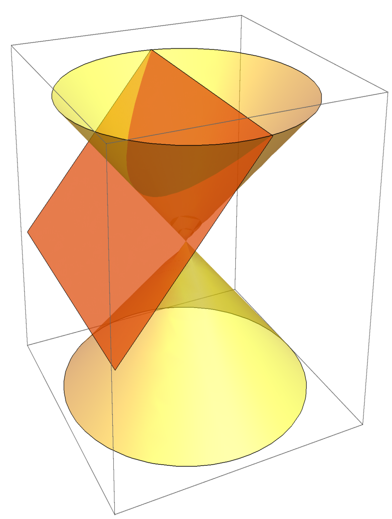
Caso especial de elipse:



Se $a = b$, temos as equações paramétricas da circunferência de raio a centrada no ponto (h, k):

$$\begin{cases} x(t) &= a\,cos(t) + h \\ y(t) &= a\,sen(t) + k, \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

3.6 Parábola



A equação da parábola de vértice $(0,0)$, foco $(a,0)$ e diretriz paralela ao eixo dos y é:

$$y^2 = 4\,a\,x.$$

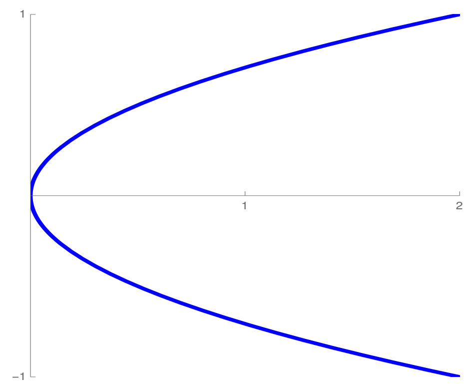


Figura 3.7: A parábola

Por translação, a parábola com vértice $(-a, 0)$, foco $(0, 0)$ e diretriz paralela ao eixo dos y tem como equação $y^2 = 4\,a\,(x + a)$.

Fazendo $y = 2\,a\,t$, temos, $x = a\,t^2$ e as equações paramétricas da parábola $y^2 = 4\,a\,x$ são:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,t^2 \\ y(t) & = 2\,a\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da parábola $y^2 = 4\,a\,(x + a)$ são:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,(t^2 - 1) \\ y(t) & = 2\,a\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

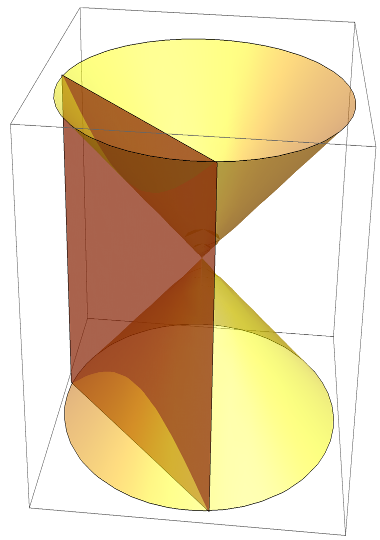
De forma análoga, a parábola $x^2 = 4\,a\,y$ e a transladada $x^2 = 4\,a\,(y + a)$, tem equações paramétricas, respectivas:

$$\begin{cases} x(t) = 2\,a\,t \\ y(t) = a\,t^2 \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} x(t) = 2\,a\,t \\ y(t) = a\,(t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.7 Hipérbole



A equação da hipérbole centrada em $(0,0)$ e assíntotas $x = \pm y$ é:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

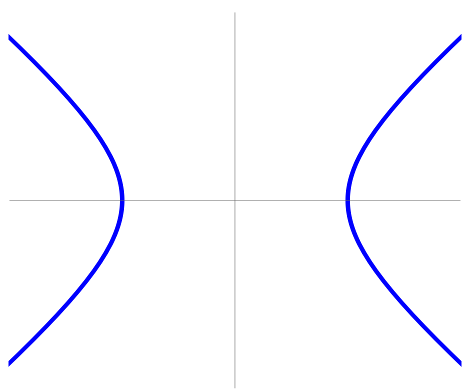


Figura 3.8: A hipérbole

Utilizaremos as funções hiperbólicas, estudadas em Cálculo I.

Fazendo $x = cosh(t)$ e $y = senh(t)$, temos que $x^2 - y^2 = 1$; como $cosh(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos as equações paramétricas do ramo da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ situado no semiplano $x > 0$:

$$\begin{cases} x(t) = cosh(t) \\ y(t) = senh(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

O ramo situado no semiplano $x < 0$ tem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = -cosh(t) \\ y(t) = senh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A hipérbole centrada em $(0,0)$ e assíntotas $b\,x = \pm a\,y$ tem equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a,\, b \neq 0.$$

Fazendo $x = a\,u$ e $y = b\,v$ temos que $u^2 - v^2 = 1$; logo, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = \pm a\,cosh(t) \\ y(t) = b\,senh(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da hipérbole centrada em (h,k) são:

$$\begin{cases} x(t) = \pm a\,cosh(t) + h \\ y(t) = b\,senh(t) + k, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 3.1.

[1] Determine as equações paramétricas de: $y - x^2 + 1 = 0$.

A equação representa uma parábola; então, fazendo $x = t$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = t^2 - 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

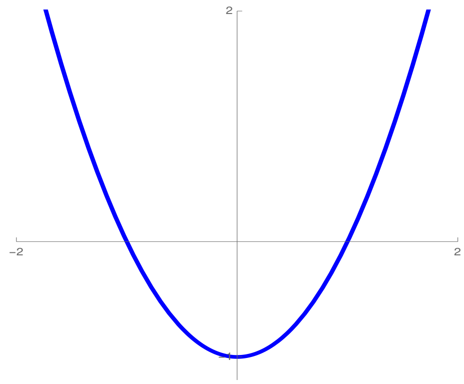


Figura 3.9: A parábola do exemplo [1]

[2] Determine as equações paramétricas de: $x^2 + y^2 - 6\,x - 4\,y + 4 = 0$.

Completando os quadrados, temos:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9,$$

que é um circunferência de raio 3 centrada no ponto $(3,2)$. Logo as equações são:

$$\begin{cases} x(t) & = 3\,cos(t) + 3 \\ y(t) & = 3\,sen(t) + 2, \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

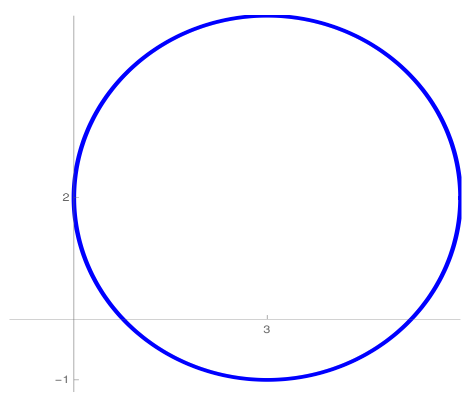


Figura 3.10: A circunferência do exemplo [2]

[3] Determine as equações paramétricas de: $9\,x^2 + 18\,x + 4\,y^2 - 8\,y = 23$.

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

que é uma elipse centrada em $(-1, 1)$, com $a = 2$ e $b = 3$:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\,cos(t) - 1 \\ y(t) &= 3\,sen(t) + 1, \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

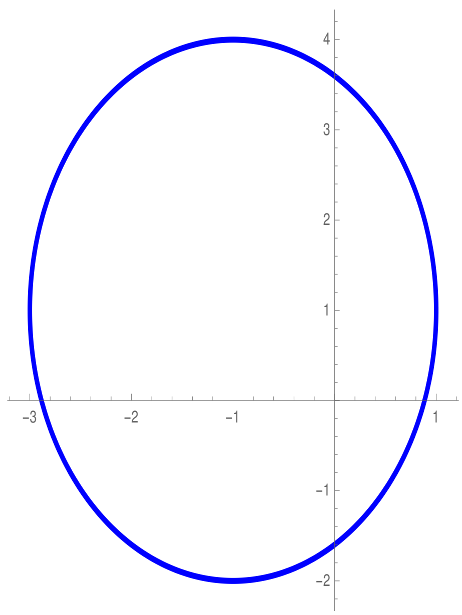


Figura 3.11: A elipse do exemplo [3]

[4] Determine as equações paramétricas de: $x^2 - 2\,x - y^2 = 0$.

Completando os quadrados, temos que:

$$x^2 - 2\,x - y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 1$$

que é uma hipérbole centrada em $(1, 0)$:

$$\begin{cases} x(t) &= \pm cosh(t) + 1 \\ y(t) &= senh(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

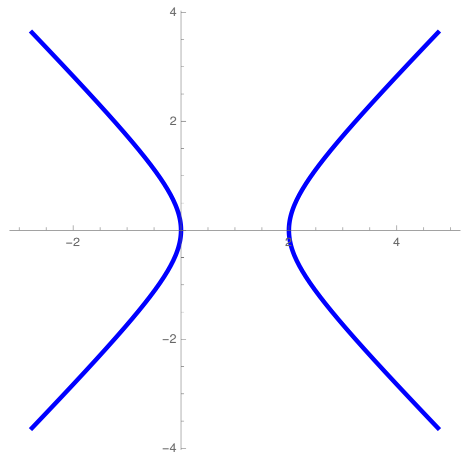


Figura 3.12: A elipse do exemplo [3]

3.8 Curvas no Espaço

Primeiramente, alguns comentérios gerais sobre as curvas espacias.

1. O esboço de curvas no $\mathbb{R}^3$ é bastante mais complicado que no caso do plano.

2. Na verdade duas quantidades importantes, a torção e a curvatura, que determinam completamente a curva, a menos de movimentos rígidos, somente serão estudadas em Geometria Diferencial.

3. Notamos que, muitas vezes nem as projeções da curva nos planos coordenados ajuda no esboço.

4. Devido a isto, nesta notas, não insistiremos no desenho das curvas e sim nas parametrizações.

Exemplo 3.2.

[1] Considere a curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Esta curva é chamada cúbica torcida (twisted cubic).

Não é difícil ver que sua projeção no plano $x\,z$ é a curva cúbica plana $z = x^3$.

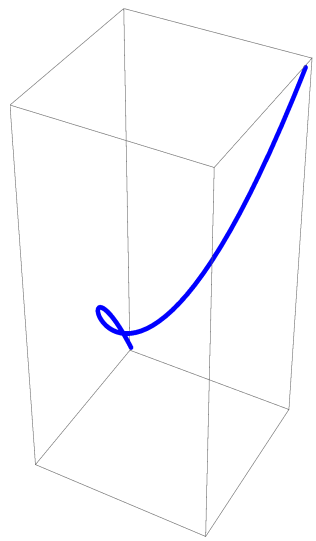


Figura 3.13: A curva do exemplo [1]

Note que a curva não possui nehum tipo de simetria.

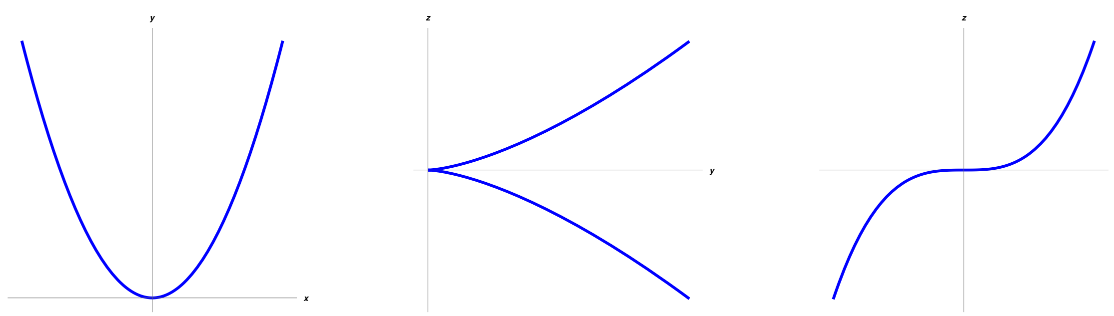


Figura 3.14: As projeções da curva nos planos coordenados

[2] Considere a curva:

$$\gamma(t) = (\cos(t)\,(2 + \mathrm{sen}(2\,t)), \mathrm{sen}(t)\,(2 + \mathrm{sen}(2\,t)), t + \cos(2\,t))$$

tal que $t \in [0, 6\,\pi]$.

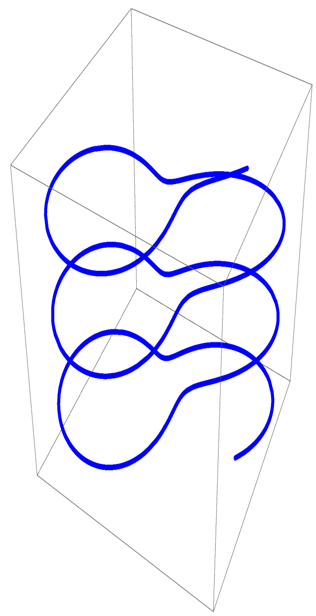


Figura 3.15: A curva do exemplo [2]

Esta curva também não possui nehum tipo de simetria.

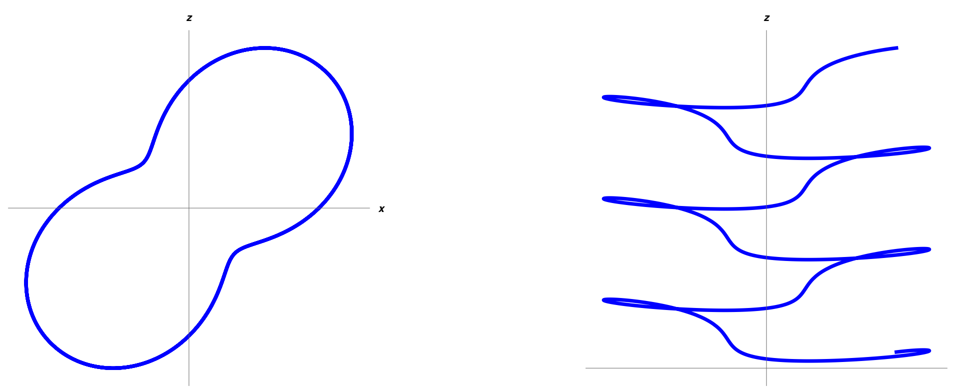


Figura 3.16: Projeções da curva nos planos coordenados

[3] A curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = ((2+\cos(1.5\,t))\,\cos(t), (2+\cos(1.5\,t))\,\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(1.5\,t))$$

tal que $t \in [0, 4\,\pi]$ é chamada nó de 3 laços (trefoil knot).

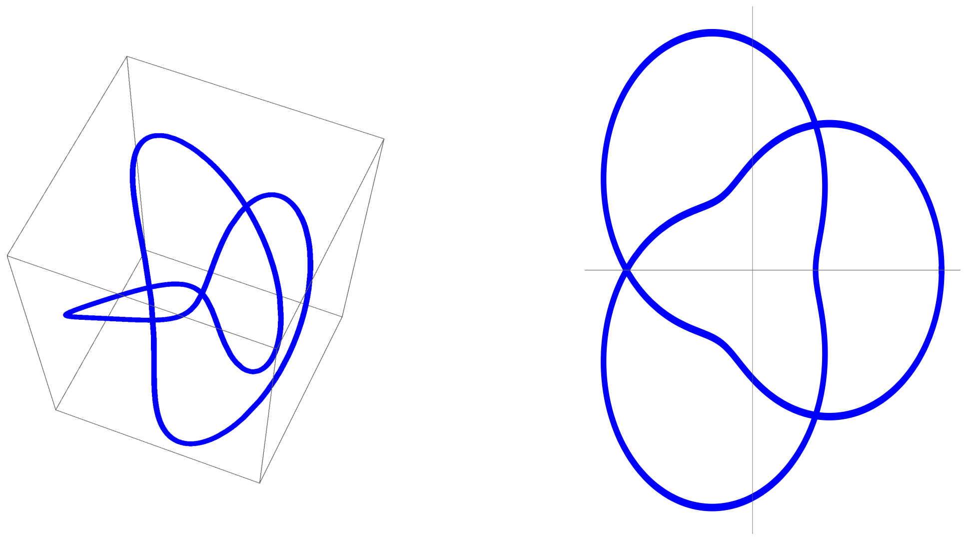


Figura 3.17: A curva do exemplo [3] e a projeção no plano $x\,y$

[4] A curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = ((4 + \operatorname{sen}(n\,t))\ \cos(t), (4 + \operatorname{sen}(n\,t)\ \operatorname{sen}(t), \cos(n\,t))$$

tal que $t \in [0, 2\,\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$ é chamada espiral toroidal.

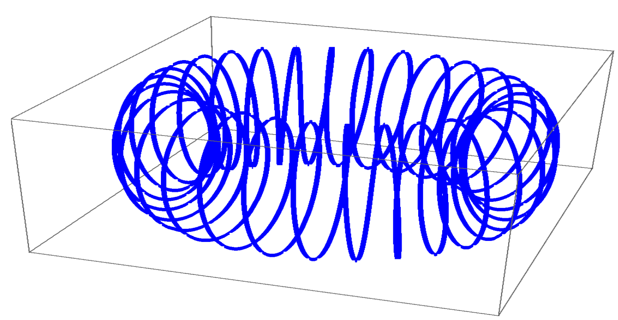


Figura 3.18: A curva do exemplo [4], para $n = 30$

[5] Seja a curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = (2\,t\,\cos(t), 2\,t\,\operatorname{sen}(t), 4\,t)$$

tal que $t \in \mathbb{R}$.

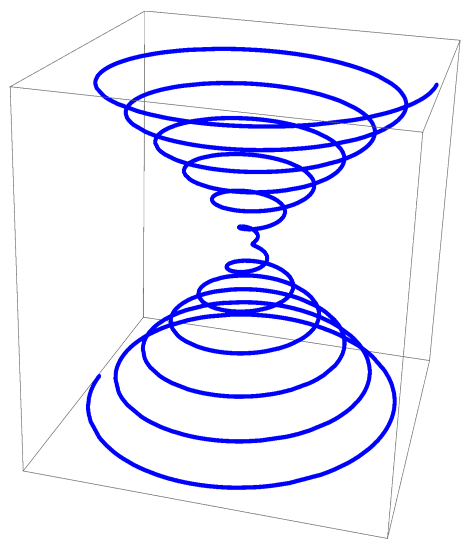


Figura 3.19: A curva do exemplo [5]

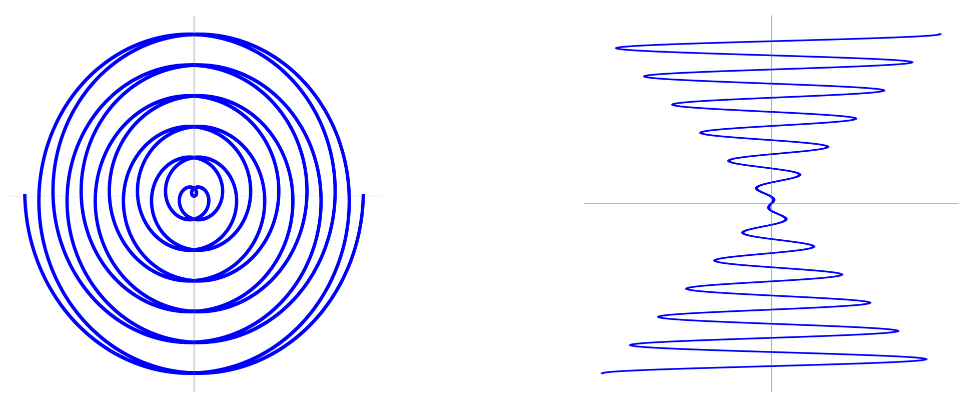


Figura 3.20: Projeções da curva nos planos coordenados

3.9 Hélice Circular Reta

Possívelmente a hélice circular é uma das mais importantes e conhecidas das curvas espaciais. No parágrafo seguinte faremos uma breve apresentação sobre esta curva.

A hélice circular é utilizada como modelo de objetos, cuja projeção (sombra) no plano $x\,y$ seja um círculo.

Definição 3.5. A hélice circular reta é o lugar geométrico descrito por um ponto que se move sobre um cilindro circular reto de raio a, de modo que a distância por ele percorrida, paralelamente ao eixo do cilindro, é diretamente proporcional ao ângulo segundo o qual gira em torno do referido eixo.

As equações paramétricas da hélice circular reta são:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,cos(t) \\ y(t) = & a\,sen(t) \\ z(t) = & b\,t, \quad t,\, b,\, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Não é difícil ver, que a hélice está situada sobre o cilindro de raio a:

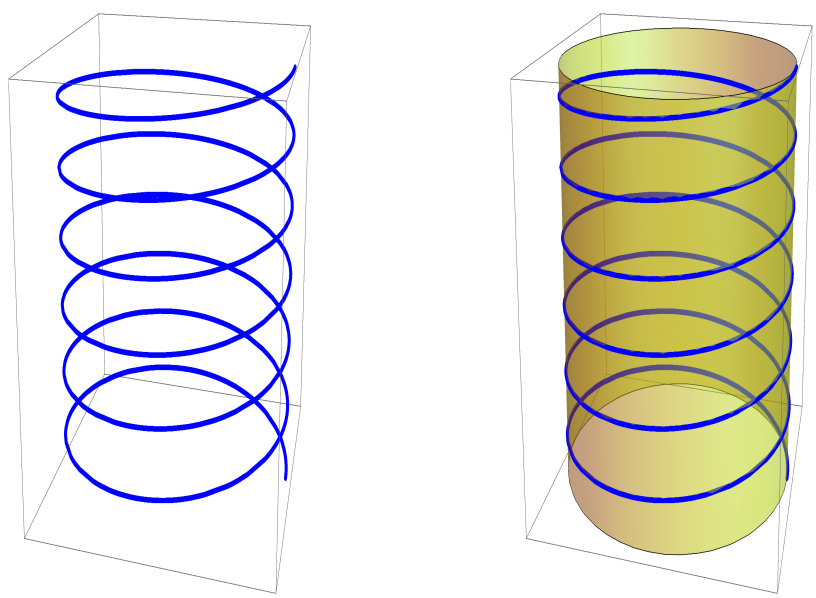


Figura 3.21: A hélice circular reta

Observação 3.6.

1. Se $b > 0$ a forma da hélice lembra um parafuso de rosca à direita;

2. Se $b < 0$ a forma da hélice lembra um parafuso à esquerda.

Exemplo 3.3.

[1] A polarização de uma onda de luz é determinada pela curva descrita pelo movimento da extremidade do vetor "elétrico"; se o movimento é ao longo de uma hélice circular reta a luz é dita circularmente polarizada.

[2] No ano de 1953 os cientistas J. Watson e F. Crick descobriram que a estrutura da molécula de DNA (ácido desoxirribonucléico) é de duas hélices circulares paralelas interligadas:

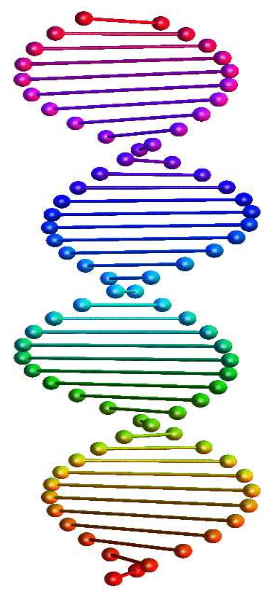


Figura 3.22: A hélice dupla do DNA

3.10 Observações Gerais

A seguir uma importante observação geral sobre curvas parametizadas.

Observação 3.7. Uma curva C pode ter várias representações paramétricas.

De fato, consideremos a circunferência centrada na origem de raio 1 e as seguintes representações:

$$\begin{cases} x_1(t) = cos(t) \\ y_1(t) = sen(t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} x_2(t) = cos(2\,t) \\ y_2(t) = sen(2\,t), \qquad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Em ambos os casos temos:

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Como funções, são diferentes, pois têm domínios diferentes, mas tem a mesma imagem ou traço C em $\mathbb{R}^2$.

Observação 3.8. Mais adiante veremos a relação entre as diferentes parametrizações de uma curva.

Definição 3.6. Se C é uma curva em $\mathbb{R}^3$ que está contida num plano é chamada **curva plana.**

3.11 Eliminação do Parâmetro

A equação cartesiana de uma curva que se apresenta na forma paramétrica é obtida pela eliminação do parâmetro t. Não existe um método geral para tal eliminação. O processo utilizado num problema depende, essencialmente, da forma das equações. A seguir, examinaremos alguns destes problemas.

Exemplo 3.4.

[1] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = \dfrac{t^2}{4} \\ \\ (2) \quad y = t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De (2) temos $t = y - 1$. Substituindo em (1), obtemos:

$$(y - 1)^2 = 4x,$$

que é uma parábola, de vértice $(0, 1)$.

[2] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = sen(t) \\ (2) \quad y = 2\,cos(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Multiplicando (1) por 2, temos $2x = 2\,sen(t)$; elevando ao quadrado esta última equação e somando ao quadrado de (2), temos:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que é uma elipse centrada na origem, cujo comprimento do semi-eixo maior é 2 e do semi-eixo menor é 1.

[3] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = \dfrac{1}{2+t} \\ \\ (2) \quad y = \dfrac{t}{2+t}, \quad t \neq -2. \end{cases}$$

Dividindo (2) por (1), temos: $y = t\,x$. Usando (1): $2\,x + y = 1$, que é uma reta.

[4] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 2 + 3\,tg(t) \\ \\ (2) \quad y = 1 + 4\,sec(t), \quad t \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

De (1) e (2), temos: $tg(t) = \dfrac{x-2}{3}$ e $sec(t) = \dfrac{y-1}{4}$. Como $1 + tg^2(t) = sec^2(t)$:

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1,$$

que é uma hipérbole centrada em $(2, 1)$.

[5] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 2\,tg(t) \\ \\ (2) \quad y = 2\,cos^2(t), \quad t \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Como $x^2 = 4\,tg^2(t) = 4\,(sec^2(t) - 1)$ e de (2) $cos^2(t) = \dfrac{y}{2}$, temos:

$$y\,x^2 = 4\,(2 - y).$$

[6] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = sen^2(t) \\ \\ (2) \quad y = tg^2(t)\,sen^2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como $y^2 = sen^4(t)\,(sec^2(t) - 1)^2$ e de (1) $cos^2(t) = 1 - x$, temos:

$$y^2\,(x - 1)^2 = x^4.$$

3.12 Exercícios

1. Determine o domínio das seguintes curvas parametrizads:

   (a) $\alpha(t) = (cos(3\,t), sen(4\,t))$

   (b) $\alpha(t) = (t^3, \sqrt{t})$

   (c) $\alpha(t) = (\sqrt{2-t}, \sqrt{t+2})$

   (d) $\alpha(t) = (t, t^2, ln(t))$

   (e) $\alpha(t) = (cosh(t), senh(t))$

   (f) $\alpha(t) = (arcsen(t), \sqrt{1-t}, t^2)$

   (g) $\alpha(t) = (\frac{1}{t^2-1}, \frac{1}{t^2+1}, \frac{1}{t})$

2. Obtenha uma parametrização das seguintes curvas, determinando I:

   (a) $y = 2x + 7$

   (b) $y - x + 2 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 = 16$

   (d) $y = tg^2(x)$

   (e) $y = ln(x)$

   (f) $9\,x^2 + 4\,y^2 = 36$

   (g) A reta ligando $(1,1)$ e $(4,3)$

   (h) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

   (i) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

   (j) $x^2 + y = 1$

   (k) $4\,x^2 - 9\,y^2 = 36$

   (l) $x^2 + y^2 - y = 0$

3. Seja $\gamma(t) = (a\,tg(t), a\,\sqrt{1 - tg^2(t)})$, $a > 0$:

   (a) Determine o domínio de γ.

   (b) Verifique se γ é uma paramerização do círculo $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

4. Verifique qua as hipérboles:

$$\begin{cases} x\,y = c^2, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

podem ser parametrizadas por:

$$\begin{cases} x = c\,t \\ y = \dfrac{c}{t}, \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = a\,sec(t) \\ y = b\,tg(t), \;\; t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases}$$

respectivamente.

5. Verifique que a curva $x^2\,y = 4\,a\,(2\,a - y)$, $a > 0$, pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x &= 2\,a\,tg(t) \\ y &= 2\,a\,cos^2(t), \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6. Verifique que a curva $x^4 = a^2\,(x^2 - y^2)$, $a > 0$, pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x &= 2\,a\,tg(t) \\ y &= 2\,a\,cos^2(t), \quad \pi \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

7. Esboçe o traço das seguintes curvas, fazendo uma tabela com uma quantidade razoável de entradas:

   (a) $x = t^2,\; y = t$, $t \in \mathbb{R}$

   (b) $x = |t|,\; y = |t - 0.5|$, $t \in [-1, 1]$

   (c) $x = 3\,cos(t),\; y = sen(t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$

   (d) $x = sec(t),\; y = tg(t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$

   (e) $x = sen(t),\; y = cos(2t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$

   (f) $x(t) = sen(3t),\; y(t) = cos(3t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$

(g) $x(t) = t + \dfrac{1}{t},\ y(t) = t - \dfrac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

(h) $x(t) = e^t + e^{-t},\ y(t) = 2senh(t)$, $t \in \mathbb{R}$

(i) $x(t) = sen(t),\ y(t) = cos(2t),\ z(t) = t^2$, $t \in [-2\,\pi, 2\,\pi]$

(j) $x(t) = t^2,\ y(t) = t^3,\ z(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$

(k) $x(t) = t,\ y(t) = cos(t),\ z(t) = sen(t)$, $t \in [-2\,\pi, 2\,\pi]$

8. Elimine o parâmetro de:

(a) $x(t) = a(1 - t),\ y(t) = b\,t$

(b) $x(t) = a\,sec(t),\ y(t) = a\,tg(t)$

(c) $x(t) = 2\,tg(t),\ y(t) = 3\,cotg(t)$

(d) $x(t) = 2t + 2,\ y(t) = 2t^2 + 4t$

(e) $x(t) = 2(1 + cos(t)),\ y(t) = 2\,sen(t)$

(f) $x(t) = sen^4(t),\ y(t) = cos^4(t)$

(g) $x(t) = \dfrac{2\,a\,t}{1 + t^2},\ y(t) = a\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

(h) $x(t) = 2\,sen(t) - 3\,cos(t),\ y(t) = 4\,sen(t) + 2\,cos(t)$

(i) $x(t) = a\,sen(t),\ y(t) = b\,tg(t)$

(j) $x(t) = sen(\dfrac{t}{2}),\ y(t) = cos(t)$