Capítulo 9

APÊNDICE I: TEOREMA DE GREEN

9.1 Introdução

Provaremos uma versão particular do teorema de Green para regiões chamadas elementares. Para isto, consideraremos três tipos especiais de regiões do plano, que serão definidas a seguir.

9.1.1 Regiões de tipo I

D é uma região de tipo I se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

sendo $\phi_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) funções contínuas tais que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

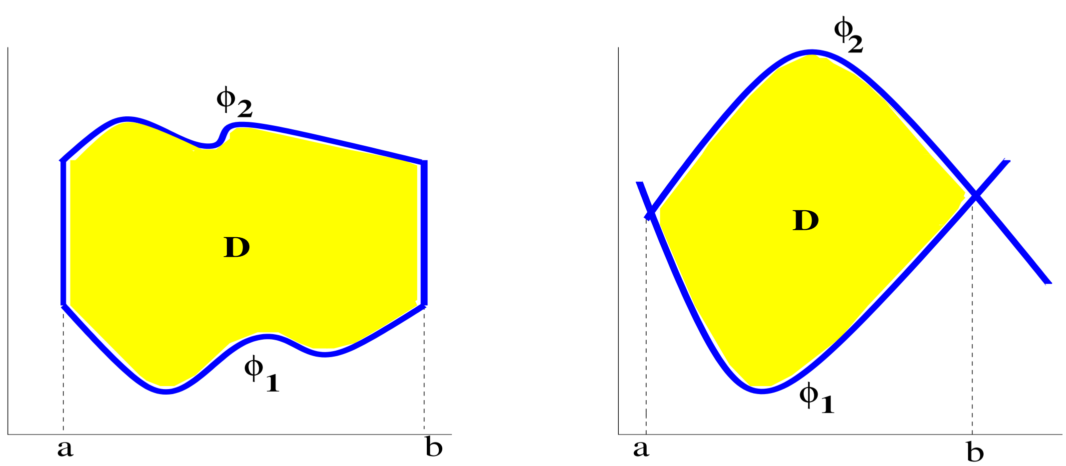

Figura 9.1: Regiões de tipo I

9.1.2 Regiões de tipo II

D é uma região de tipo II se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

sendo $\psi_i : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ funções contínuas tais que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$.

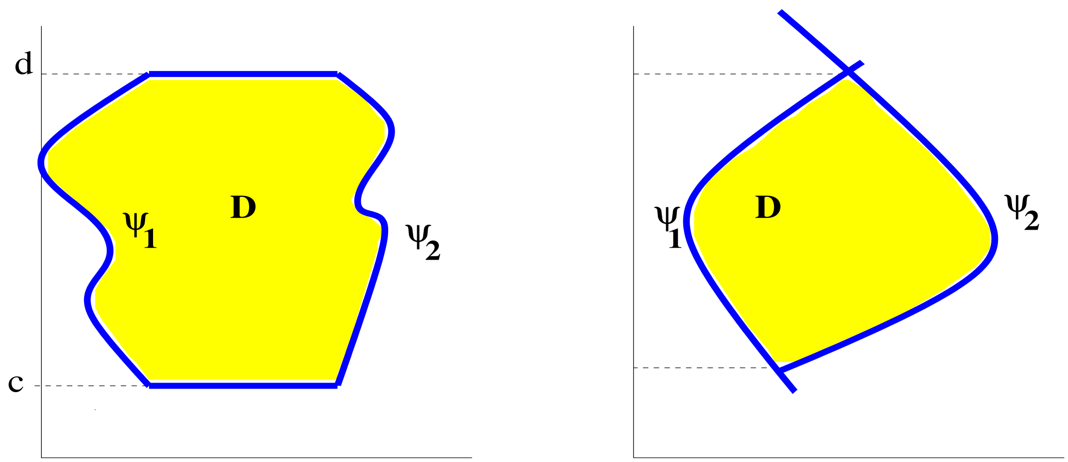

Figura 9.2: Regiões de tipo II

9.1.3 Regiões de tipo III

D é uma região de tipo III se pode ser descrita como região de tipo I ou de tipo II.

Qualquer destas regiões é chamada elementar. As regiões elementares são fechadas e limitadas. Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é chamada simples se $\partial D = C$ é uma curva fechada simples. As fronteiras das regiões elementares podem ser orientadas positivamente da seguinte forma:

Se D é uma região de tipo I:

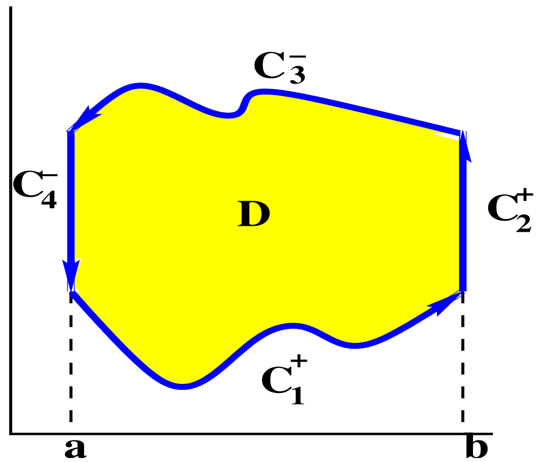

Figura 9.3: Regiões de tipo I

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$.

Se D é uma região de tipo II:

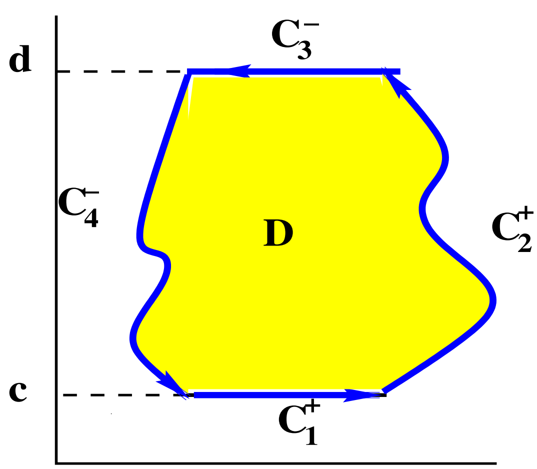

Figura 9.4: Regiões de tipo I

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$

9.2 Prova do Teorema de Green

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, D uma região simples, a curva $C = \partial D$, tal que $D \subset A$.

Teorema 9.1. (Green) Seja $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Se $C = \partial D$ tem uma parametrização de classe C^1 por partes e está orientada positivamente em relação a D, então:

$$\oint_{\partial D} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy$$

Prova : Escrevamos D como região de tipo I:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

sendo $\phi_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ 2)$ funções contínuas tais que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Seja C_1 a curva parametrizada por $\gamma_1(x) = (x, \phi_1(x))$, $a \leq x \leq b$ e C_3 a curva parametrizada por $\gamma_2(x) = (x, \phi_2(x))$, $a \leq x \leq b$. Provaremos que:

$$(1) \qquad \int_{\partial D} F_1\, dx = -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Pelo teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy\right] dx \\ &= \int_a^b \big(F_1(x, \phi_1(x)) - F_1(x, \phi_2(x))\big)\, dx \\ &= \int_{C_1} F_1 - \int_{C_3} F_1 = \int_{\partial D} F_1\, dx, \end{aligned}$$

pois $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$ e

$$\int_{C_2} F_1 + \int_{C_4} F_1 = 0;$$

onde C_2 é parametrizada por $\gamma_2(x) = (b, y)$, $\phi_1(b) \leq y \leq \phi_2(b)$ e C_4 é parametrizada por $\gamma_4(x) = (a, y)$, $\phi_1(a) \leq y \leq \phi_2(a)$.

De forma análoga, escrevendo D como região de tipo II, prova-se que:

$$(2) \qquad \int_{\partial D} F_2\, dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy.$$

O teorema segue de (1) e (2).