Matemática Discreta
4 de julho de 2017
P2 — 2016.2

Nome do aluno: ____

Assinatura: ____

Matrícula: ____________________ Turma: CCOMP

Questão	Pontos	Nota
1	3	
2	2	
3	3	
4	2	
Total	10	

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES ABAIXO

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- A solução de cada questão deve ser desenvolvida de maneira clara e objetiva, explicitando o raciocínio subjacente através de um texto coerente. Em outras palavras, mais importante que encontrar a resposta correta é explicar como você chegou nessa resposta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Junto com a prova você está recebendo folhas de papel, para o desenvolvimento das soluções. Cada questão deve ser resolvida numa folha separada. Utilize o verso se necessário. Não escreva a solução de duas questões na mesma folha.
- O tempo de prova é de **100 minutos, improrrogáveis**.

(3 pontos) 1. Numa auto-escola com 30 alunos, 14 desejam tirar habilitação categoria B (carro), 5 querem a habilitação categoria C (caminhão) e 7 buscam habilitação tipo A (moto). Sabe-se que 3 alunos desejam conduzir carro e moto, 2 querem dirigir carro e caminhão, 2 buscam se habilitar para guiar caminhão e moto, e que 1 deseja se habilitar nas categorias A, B e C. Quantos alunos da auto-escola buscam treinamento nas demais categorias?

Solução:

Seja Ω o conjunto de todos os alunos da auto-escola, A o conjunto dos alunos da auto-escola que desejam habilitação tipo A, B o conjuntos dos que buscam habilitação tipo B e C o conjuntos dos que querem habilitação tipo C.

Pelo princípio da inclusão-exclusão temos que

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= \#A + \#B + \#C \\
&\quad - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
&\quad + \#(A \cap B \cap C) \\
&= 14 + 5 + 7 - 3 - 2 - 2 + 1 \\
&= 20
\end{aligned}$$

Sabemos então que a auto-escola tem $\#\Omega - \#(A \cup B \cup C) = 30 - 20 = 10$ alunos buscando treinamento nas demais categorias.

(2 pontos) 2. Derek vai a uma sorveteria chique e descobre que lá só se vende sorvete com cinco bolas, das quais, no máximo, duas são de chocolates e três de morango, sendo as demais de creme. De quantas maneiras Derek pode escolher seu sorvete?

Solução:

A função geradora das soluções desse problema de contagem é definida por

$$\begin{aligned}
P(x) &= (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
&= \frac{(1 - x^3)}{(1 - x)} \frac{(1 - x^4)}{(1 - x)} \frac{1}{(1 - x)} \\
&= (1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x)^{-3} \\
&= (1 - x^3)(1 - x^4)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \cdots) \\
&= 1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 12x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Logo, são 12 maneiras possíveis de se escolher os 5 sabores de sorvetes.

(3 pontos) 3. Encontre uma fórmula fechada para a recorrência

$$x_{n+1} - 3^n\, x_n = 0,\; x_0 = 1.$$

Solução:

Essa recorrência é da forma $x_{n+1} = a_n\, x_n$, donde temos que $x_n = x_0 \prod_{k=1}^{n-1} a_n$.

Segue então que

$$x_n = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^{n\,(n-1)/2}.$$

4. Considere a recorrência

$$x_{n+1} = 5x_n + f_n.$$

(1 ponto) (a) Determine o termo não homogêneo f_n de forma que $x_n = n5^n$ seja solução da recorrência acima.

(1 ponto) (b) Encontre a solução geral da recorrência determinada pelo item anterior.

Solução:

(a) Substituindo $x_n = n5^n$ na recorrência e manipulando a equação resultante descobrimos que $f_n = 5^{n+1}$.

(b) Queremos encontrar uma solução para

$$x_{n+1} = 5x_n + 5^{n+1}.$$

Essa recorrência é linear não-homogênea, sendo sua solução da forma

$$y_n = h_n + p_n,$$

onde p_n uma solução particular e h_n é a solução da equação homogênea associada, i.e,

$$h_{n+1} = 5h_n.$$

Temos então que $h_n = c\,5^n$, onde c é uma constante real arbitrária, e $p_n = n5^n$, pela informação dada no enunciado.

Assim sendo, a solução geral da recorrência é

$$x_n = (c + n)\,5^n.$$