Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Professora: Rosiane Soares Cesar

1ª Lista de Exercícios - Álgebra

(1) Prove que

(a) Se a e b são números ímpares, então ab é número ímpar

(b) Se a e b são números reais, então $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(c) Se a e b são números reais diferentes então $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$

(d) Se a e b são números racionais, então $a + b$ é um número racional.

(2) Decida, justificando, se as afirmações abaixas são verdadeiras ou falsas, justificando suas afirmações.

(a) Se m é um número natural ímpar então $\sqrt{\frac{m-1}{2}}$ é um número inteiro.

(b) Para todo par de números racionais r e s, com $r < s$, existe um número racional x tal que $r < x < s$.

(c) Para todo real x, vale que $x^2 \geq x$.

(d) Para todo $\alpha \geq 0,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 2x + \alpha = 0$.

(e) Se x é um número real tal que $0 < x < 1$ então $x^2 - 1 < 5x + 6$

(f) Seja $x \in \mathbb{R}$. Então $x^2 - 3x + 2 = 0$ se e somente se $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$

(3) Prove usando indução finita que:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, e $r \neq 1$

(c) $1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) $n^3 + 2n$ é um múltiplo de 3, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(e) $4^n - 1$ é um múltiplo de 3, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(f) $2^n \geq 2n + 1$, $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

GABARITO Questão 2:

(a) F

(b) V

(c) F

(d) F

(e) V

(f) V