

## Otimização Combinatória – parte 1

**Professora: Luiza Maria Oliveira da Silva**

### Exemplo 1:

Uma empresa produz dois produtos em uma de suas fábricas. Na fabricação dos dois produtos, três insumos são críticos em termos de restringir o número de unidades dos dois produtos que podem ser produzidos: as quantidades de matéria prima (tipos A e B) disponíveis e a mão de obra disponível para a produção dos dois produtos. Assim, o departamento de produção já sabe que, para o próximo mês, a fábrica terá disponível, para a fabricação dos dois produtos, 4.900 quilos da matéria prima A e 4.500 quilos da matéria prima B. Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida consome 70 quilos da matéria prima A e 90 quilos da matéria prima B. Por sua vez, cada unidade do produto tipo II para ser produzida consome 70 quilos da matéria prima A e 50 quilos da matéria prima B. Como a produção dos dois produtos utiliza processos diferentes, a mão de obra é especializada e diferente para cada tipo de produto, ou seja, não se pode utilizar a mão de obra disponível para a fabricação de um dos produtos para produzir outro. Assim, para a produção do produto tipo I a empresa terá disponível, no próximo mês, 80 homens/hora. Já para o produto tipo II terá 180 homens/hora. Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida utiliza 2 homens/hora enquanto que cada unidade do produto tipo II utiliza 3 homens/hora. Reduzindo do preço unitário de venda todos os custos, chega-se a conclusão de que cada unidade do produto tipo I dá um lucro de \$20 e cada unidade do produto tipo II dá um lucro de \$60.

Dada a grande procura, estima-se que todas as unidades a serem produzidas, dos dois produtos, poderão ser vendidas.

O objetivo da empresa é obter o maior lucro possível com a produção e venda das unidades dos produtos tipo I e II.

Queremos resolver esse problema como um modelo de PL. Mas antes de fazer isso é necessário conhecer o problema. Qual é o problema dessa empresa? O problema é que eles não sabem quantas unidades de cada tipo de produto (I e II) devem ser produzidas, de maneira que o lucro seja o maior possível.

Para construir um modelo de PL temos que começar identificando o que se deseja saber ou conhecer no problema. A isso se dá o nome de **variável de decisão**.

Temos que identificar o objetivo que se deseja alcançar e traduzi-lo por uma função matemática linear contendo as variáveis de decisão. A função que está sendo maximizada (minimizada) é chamada **função objetivo**.

### Exemplo 2:

Certa empresa fabrica dois produtos P1 e P2. O lucro unitário do produto P1 é de 1.000 unidades monetárias e o lucro unitário do produto P2 é de 1.800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P2. O

tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P1 e 30 unidades anuais para P2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construa o modelo de PL para esse caso.

Exemplo 3:

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com menor custo possível? Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 2,5 unidades monetárias.

Exemplo 4:

A Windsor Glass CO. fabrica produtos de vidro de alta qualidade, entre os quais janelas e portas de vidro. A empresa possui três fábricas industriais. As esquadrias de alumínio e ferragens são feitas na fábrica1, as esquadrias de madeira são produzidas na fábrica2 e, finalmente, a fábrica3 produz o vidro e monta os produtos.

Em consequência da queda nos lucros, a direção decidiu modernizar a linha de produtos da empresa. Produtos não rentáveis estão sendo descontinuados, liberando capacidade produtiva para o lançamento de dois novos produtos com grande potencial de vendas.

Produto1: uma porta de vidro de 2,5m com esquadria de alumínio.

Produto2: uma janela duplamente adornada com esquadria de madeira de 1,20m x 1,80m.

O produto1 requer parte da capacidade produtiva das fábricas 1 e 3, mas nenhuma da fábrica 2. O produto2 precisa apenas das fábricas 2 e 3. A divisão de marketing concluiu que a empresa deveria vender tanto quanto fosse possível produzir nessas fábricas. Entretanto, pelo fato de ambos os produtos competirem pela mesma capacidade produtiva na fábrica 3, não está claro qual mix dos dois produtos seria mais lucrativo semanalmente.

A tabela a seguir sintetiza os dados reunidos.

Fábrica	Tempo de produção por lote (em horas)		Tempo de produção disponível por semana (em horas)
	Produto		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro por lote (20 unidades)	R\$ 3.000	R\$ 5.000	

### Exemplo 5:

Uma liga especial constituída de ferro, carvão, silício e níquel pode ser obtida usando a mistura desses minerais puros além de 2 tipos de materiais recuperados:

➤ Material recuperado 1 – MR1 – composição:

Ferro – 60%                                  custo por kg: \$0,20

Carvão – 20%

Silício – 20%

➤ Material recuperado 2 – MR2 – composição:

Ferro – 70%                                  custo por kg: \$0,25

Carvão – 20%

Silício – 5%

Níquel – 5%

A liga deve ter a seguinte composição final:

Matéria-prima	% mínima	% máxima
Ferro	60	65
Carvão	15	20
Silício	15	20
Níquel	5	8

Os custos dos materiais puros são (por kg): ferro: \$ 0,30; carvão: \$ 0,20; silício: \$ 0,28; níquel: \$ 0,50. Qual deverá ser a composição da mistura em termos dos materiais disponíveis, com menor custo por kg? Construa o modelo de decisão.

### Terminologia para solução de modelos

Costumamos a ver o termo solução com o significado de resposta final para um problema, porém, a convenção em PL e suas extensões é bem diferente. Aqui, qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) é chamada de **solução**, independentemente de ela ser desejável ou até mesmo ser uma opção admissível. Diferentes tipos de solução são então identificados usando-se um adjetivo apropriado.

**Solução viável** – é aquela para a qual todas as restrições são satisfeitas.

**Solução inviável** – é aquela para a qual pelo menos uma das restrições é violada.

**Região de soluções viáveis** – é o conjunto de todas as soluções viáveis.

Dado que existem soluções viáveis, o objetivo da PL é encontrar a melhor solução viável conforme medida pelo valor da função objetivo no modelo.

Uma **solução ótima** é uma solução viável que tem o valor mais favorável da função objetivo. O valor mais favorável é o maior valor se a função objetivo tiver de ser maximizada, ao passo que será o menor valor caso ela deva ser minimizada.

Qualquer problema que tenha **soluções ótimas múltiplas** apresentará um número infinito de soluções, cada uma com o mesmo valor ótimo da função objetivo.

Outra possibilidade é que o problema não tenha nenhuma solução ótima. Isso acontece apenas se (1) ela não tiver nenhuma solução viável ou (2) as restrições não impedirem que se aumente indefinidamente o valor da função objetivo na direção favorável. O último caso é conhecido como tendo uma função objetivo ilimitada.

A solução ótima é sempre um dos vértices da região de soluções viáveis a não ser quando temos múltiplas (infinitas) soluções ótimas, pois nesse caso, as soluções ótimas são todos os pontos pertencentes a um dos lados da região de soluções viáveis.