Professora: Luiza Maria Oliveira da Silva

Dualidade

O termo dualidade refere-se ao fato de que cada modelo de PL consiste de duas formas. A primeira, ou original, é chamada de primal e a segunda forma do modelo é chamada de dual. Como seria esperado, as propriedades de uma das formas do modelo estão relacionadas com as propriedades da outra. Como resultado disso é possível, dada a solução ótima de uma das formas do modelo, encontrar a solução ótima da outra forma do modelo.

A solução do modelo dual fornece informações significativas sobre as questões econômicas existentes em qualquer modelo de PL.

As variáveis de decisão do problema dual são chamadas de diversas maneiras, dentre as quais preço-sombra e valor implícito.

Relação entre primal e dual

Modelo primal	**Modelo dual**
max com todas as restrições ≤ ou =	min com todas as restrições ≥ ou =
min com todas as restrições ≥ ou =	max com todas as restrições ≤ ou =
restrição	variável
variável	restrição
coeficiente da função objetivo	constantes do lado direito
constantes do lado direito	coeficiente da função objetivo
j-ésima coluna de coeficientes	j-ésima linha de coeficientes
j-ésima linha de coeficientes	j-ésima coluna de coeficientes
j-ésima variável ≥ 0	j-ésima restrição com sinal ≥ (min) ou ≤ (max)
j-ésima variável irrestrita em sinal	j-ésima restrição com sinal de =
j-ésima restrição com sinal ≥ ou ≤	j-ésima variável ≥ 0
j-ésima restrição com sinal de =	j-ésima variável irrestrita em sinal

Dado um par de problemas duais, então, quanto as possibilidades de solução, uma das afirmações abaixo é verdadeira:

1- Ambos possuem solução ótima e o valor ótimo dos dois problemas é o mesmo.

2 – Um problema tem solução ilimitada então o outro é inviável.

3 – Ambos são inviáveis.

O problema primal parte de uma solução viável do problema original e vai melhorando-a passo a passo, até que atinja o valor ótimo, enquanto o problema dual parte de uma solução inviável ao problema original e tenta, passo a passo, chegar a uma solução viável para o problema original, que é ótima.

Valor ótimo das variáveis

- O coeficiente da variável de decisão na função objetivo primal é o valor da variável de folga correspondente na solução dual.

coeficiente de x_i = valor de $F_{i(y)}$

- O coeficiente da variável de folga na função objetivo primal é o valor da variável de decisão correspondente na solução dual.

coeficiente de $F_{i(x)}$ = valor de y_i

Como o primal é dual do próprio dual, vale o raciocínio no sentido dual → primal.

coeficiente de y_i = valor de $F_{i(x)}$

coeficiente de $F_{i(y)}$ = valor de x_i

Propriedade das folgas complementares

Considere o par de problemas duais a seguir:

$$(P) \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i , \qquad i = 1,2, \dots , m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2, \dots , n$$

$$(D) \min Y = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j , \qquad j = 1,2, \dots , n$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1,2, \dots , m$$

Considere que foram encontradas, para o par de problemas duais, as soluções ótimas $(x_1^*, x_2^*, \dots , x_n^*)$ e $(y_1^*, y_2^*, \dots , y_m^*)$. Cada variável do primal (dual) está associada a uma restrição do dual (primal). A propriedade das folgas complementares pode ser escrita da seguinte forma:

Se uma variável qualquer da solução ótima, em um dos problemas, for não nula, então, no outro problema a restrição associada a essa variável está saturada, ou seja, possui folga zero.

Equivalentemente, se uma restrição qualquer não se encontra saturada em relação a uma solução ótima, em um dos problemas, então, no outro problema, a variável associada a essa restrição é nula.

Ou seja, em termos das equações fica:

$$x_j^* > 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} {y_i}^* a_{ij} = c_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} {y_i}^* a_{ij} > c_j \rightarrow x_j^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} {x_j}^* = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} {x_j}^* < b_i \rightarrow y_i^* = 0$$

Colocando nos problemas (P) e (D) as respectivas variáveis de folga, teremos:

$$(P') \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i , \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j, x_{n+i} \geq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$(D') \min Y = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - y_{m+j} = c_j , \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$y_i, y_{m+j} \geq 0, \ i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots,n$$

Assim, a restrição $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ está saturada se $x_{n+i} = 0$. Podemos reescrever a propriedade das folgas complementares da seguinte maneira:

$$x_j^* > 0 \rightarrow {y_{m+j}}^* = 0$$

$${y_{m+j}}^* > 0 \rightarrow x_j^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \rightarrow {x_{n+i}}^* = 0$$

$x_{n+i}{}^{*} > 0 \rightarrow y_i^* = 0$

Ainda é possível sintetizar mais a propriedade da seguinte maneira:

$x_j^* \cdot y_{m+j}{}^{*} = 0\ , j = 1{,}2, \dots , n$

$y_i^* \cdot x_{n+i}{}^{*} = 0\ , i = 1{,}2, \dots , m$