P1 Matemática Discreta 2017.1
Turma MAT2

7/2/2018

Nome: .... Matrícula: ....

A prova é individual e sem consulta. Cada questão deve ser desenvolvida de maneira clara e objetiva, explicitando o raciocínio subjacente. O tempo de prova é de **90 minutos**, improrrogáveis. Boa prova!

Declaro que não utilizei recursos ilícitos na resolução desta prova:

....
(assinatura em concordância)

(4 pontos) 1. Decida se cada uma das afirmações a seguir é Verdadeira ou Falsa. Prove as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as que forem falsas.

(a) Se n é um natural ímpar, então $m = 3n + 1$ é ímpar.

(b) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$, então $A \subset B$.

(c) $n^2 + 41n + 41$ é primo para todo natural n.

(d) $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Solução:

(a) Falsa. O natural $n = 1$ é impar, porém $m = 3 \times 1 + 1 = 4$ é par.

(b) Falsa. Note que $A = \{-1, 1\}$ e $B = \phi$. Como existe $a = -1 \in A$ tal que $a = -1 \notin B$, temos que $A \not\subset B$.

(c) Falsa. Para $n = 41$ temos $41^2 + 41^2 + 41 = 41 \times 83$, que não é primo.

(d) Verdadeira. Defina $S_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n$, donde obtemos $1 + 3S_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n+1} = S_{n+1}$. Assim sendo, $S_n = \dfrac{S_{n+1} - S_n - 1}{2} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

■

(1 ponto) 2. Quantas soluções possui a equação

$$x + y + z = 36,$$

onde x, y e z são inteiros tais que $x \geq 1$, $y \geq 2$ e $z \geq 3$.

Solução:

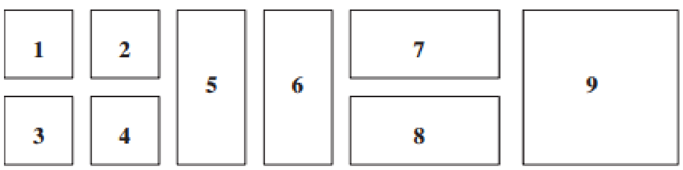
Podemos escrever $x = 1 + k$, $y = 2 + l$ e $z = 3 + m$, onde k, l e m são inteiros não negativos. Segue então que

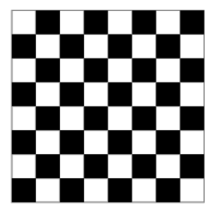
$$x + y + z = 36 \iff k + l + m = 30.$$

Essa última equação sabemos que tem $32!/(30!\,2!) = 496$ soluções.

$\blacksquare$

(1 ponto) 3. Num tabuleiro 2 x 2 há 9 retângulos formados por casas adjancentes, como ilustrado na figura esquerda. Quantos desses retângulos podem ser formados num tabuleiro de xadrez 8 x 8 (figura direita)?





Solução:

Note que cada possível retângulo corresponde a uma escolha de 2 linhas e 2 colunas entre as 9 linhas e 9 colunas que separam as casas num tabuleiro 8 x 8. Podemos escolher 2 linhas (e 2 colunas) entre as 9 disponíveis de $C_9^2 = 9!/(2!\,7!) = 36$ formas distintas.

Portanto, num tabuleiro de xadrez 8 x 8, existe a possibilidade de formarmos $36 \times 36 = 1296$ retângulos com casas adjacentes.

$\blacksquare$

(2 pontos) 4. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$1 \times x^0 + 2 \times x^1 + 3 \times x^2 + 4 \times x^3 + \cdots + n \times x^{n-1}, \; x \neq 1.$$

Sugestão: Perturbe a soma.

Solução:

Denote $S_n = 0 \times x^{-1} + 1 \times x^0 + 2 \times x^1 + 3 \times x^2 + \cdots + n \times x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\, x^{k-1}$.
Perturbando essa soma obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k\, x^{k-1} = S_n + (n+1)\, x^n &= 0 + \sum_{p=0}^{n} (p+1)\, x^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} p\, x^p + \sum_{p=0}^{n} x^p \\ &= x \left(\sum_{p=0}^{n} p\, x^{p-1} \right) + \sum_{p=0}^{n} x^p \\ &= x\, S_n + \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},\ x \neq 1. \end{aligned}$$

Concluímos que
$$S_n = \frac{(n+1)\, x^n}{(x-1)} - \frac{(x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2},\ x \neq 1.$$

■

(2 pontos) 5. Considere a sequência de números reais definida por a_n, onde

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n},\ n > 1.$$

Prove por indução que $a_n = 1/2$ para todo inteiro $n \geq 2$.

Solução:

Queremos provar a propriedade $P(n) : a_n = 1/2$ para todo inteiro $n \geq 2$.

O caso base para $n = 2$ é trivial, pois $a_2 = a_1/2 = 1/2$. Suponha então que $a_n = 1/2$ para algum $n > 2$. Por definição temos

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{n\,(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})/n + a_n}{n+1},$$

que equivale a

$$a_{n+1} = \frac{n\, a_n + a_n}{n+1} = \frac{(n+1)\, a_n}{n+1} = a_n.$$

Logo, $a_{n+1} = a_n = 1/2$.

Como a propriedade $P(n)$ implica em $P(n+1)$ e $P(2)$ é verdadeira, concluímos pelo princípio indutivo que $a_n = 1/2$ para todo inteiro $n \geq 2$.

■