Otimização Combinatória – parte 2

Professora: Luiza Maria Oliveira da Silva

Modelo geral de PL

O modelo geral da PL pode ser escrito como:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0$$

a_{ij}, b_i e c_j são chamados **parâmetros** do modelo e particularmente são chamados de

c_j – coeficientes da função objetivo

b_i – constantes do lado direito

a_{ij} – coeficientes das restrições

Variações do modelo geral

a) A função objetivo pode ser de minimização:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

b) Algumas restrições podem ser do tipo ≥:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \text{ para alguns valores de i}$$

c) Algumas restrições podem ter sinal =:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \text{ para alguns valores de i}$$

d) Algumas variáveis de decisão podem assumir qualquer valor entre -∞ e ∞, e são chamadas de **irrestritas em sinal**.

Hipóteses da PL

Todas as hipóteses de PL encontram-se, na realidade, implícitas na formulação do modelo geral.

1 – Proporcionalidade – a contribuição de cada variável de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições, seja diretamente proporcional ao valor da variável.

2 – Aditividade – toda função em um modelo de PL é a soma das contribuições individuais de cada uma das variáveis.

3 – Divisibilidade – as variáveis de decisão em um modelo de PL podem assumir quaisquer valores, inclusive não inteiros, que satisfaçam as restrições do modelo e de não negatividade. Logo, essas variáveis não são restritas apenas a valores inteiros.

4 – Certeza – assume-se que o valor atribuído a cada parâmetro do modelo de PL como uma constante conhecida.

Método Simplex

O método Simplex combina conceitos de álgebra matricial com um conjunto de regras básicas que conduzem à identificação dos problemas de PL. A lógica de método também se baseia em buscar a solução ótima do problema na interseção de duas ou mais retas ou planos.
O processo utilizado consiste em uma sistemática específica resolução de equações simultâneas.

Definições:

Considere um sistema com m equações e n variáveis (m < n), define-se como solução básica do sistema, uma solução do sistema com (n – m) variáveis nulas. Essa solução, no contexto de um problema de PL, será denominada **solução básica viável** se atender às exigências de não negatividade. Pode-se falar então no conceito de vértice da região viável do problema de PL, como sendo qualquer solução básica viável. As (n – m) variáveis necessariamente nulas de uma solução básica são denominadas **variáveis não básicas** e as restantes são as **variáveis básicas** (casualmente alguma variável básica pode ser nula).

Exemplo:

Seja o sistema abaixo:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2$$

Temos m = 2 e n = 5.

Cada solução básica terá 5 – 2 = 3 variáveis iguais a zero, por exemplo, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, e 5 – 3 = 2 variáveis obtidas da resolução do sistema, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Se modificarmos as variáveis iguais a zero, teremos novas soluções básicas. O número de soluções básicas que podem ser obtidas é dado por

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Uma solução de um sistema com m equações e n variáveis é denominada **solução não básica** se ela apresentar um número menor do que (n – m) variáveis nulas. Uma solução não básica, geometricamente, corresponde a um ponto interior da região viável, ou a algum ponto da fronteira que não seja o vértice. O conjunto formado pelas variáveis básicas é denominado **base**.

Variáveis de folga são as variáveis que são acrescentadas às inequações para transformá-las em equações. Denominaremos as variáveis de folga de F_i, onde i é o índice da variável ($F_i \geq 0$, $\forall i$).

Dois **vértices** são **adjacentes** se eles pertencem a uma mesma aresta.

O algoritmo Simplex tem por objetivo gerar uma sequência de vértices da região viável com a exigência de que para cada novo vértice obtido, o valor da função objetivo não deve piorar, isto é, diminuir no caso de maximização e aumentar no caso de minimização. Consequentemente, dois princípios básicos devem ser estabelecidos para orientar o desenvolvimento do algoritmo:

- Princípio da viabilidade: sua aplicação a uma solução básica viável (vértice) gere necessariamente outra solução básica viável.
- Princípio da otimalidade: a cada iteração realizada, o resultado obtido não deve conduzir a uma solução pior do que a anterior.

Exemplo 1: Resolva o exemplo 4 pelo método simplex.

$\max Z = 3x1 + 5x2$

Sujeito a:

$x1 \leq 4$

$2x2 \leq 12$

$3x1 + 2x2 \leq 18$

$x1 \geq 0 \ \ e \ x2 \geq 0$

- Acrescentar as variáveis de folga: Os modelos com restrições do tipo $\leq$ e com termos da direita não negativos têm uma solução básica formada pelas variáveis de folga.

- Cálculo da nova solução básica:

a) **Variável que entra na base**: entra na base a variável com coeficiente negativo de maior valor absoluto, no caso de maximização.

b) **Variável que sai**: sai a variável que primeiro se anula com a entrada da variável escolhida no item anterior. A variável que sai pode ser descoberta dividindo-se os termos da direita das restrições pelos coeficientes positivos da variável que entra. O menor valor indica que a variável básica dessa linha é a que primeiro se anula e sairá da base.

c) **Elemento pivô**: a coluna da variável que entra e a linha da variável que sai identificam em elemento comum chamado **pivô**.
A linha da variável que sai é chamada **linha pivô**.

d) Calcular a nova solução.