Capítulo 5

CURVAS PLANAS CLÁSSICAS

Diferentes fenômenos ocorrem naturalmente nas curvas planas e são de interesse em Topologia, Teoria das Catástrofes, Geometria Algébrica , Computação Gráfica e diversas área da Engenharia, como no desing de estradas.
Neste capítulo apresentamos algumas novas curvas e suas parametrizações e outras curvas, construídas a partir de uma curva dada; estas curvas são cumumente chamadas de clássicas.

Utilizaremos as definições e as notações de **[VM]**.

5.1 Parábola semi-cúbica

É o lugar geométrico determinado pela equação:

$$27\,a\,y^2 = 4\,x^3, \quad a \neq 0.$$

Fazendo $y = \dfrac{2\,t\,x}{3}$, obtemos:

$$27\,a\,y^2 - 4\,x^3 = -4\,x^2\,(x - 3\,a\,t^2) = 0,$$

se $x \neq 0$, temos $x - 3\,a\,t^2 = 0$, logo temos a parametrização:

$$\begin{cases} x(t) & = 3\,a\,t^2 \\ y(t) & = 2\,a\,t^3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A parábola semi-cúbica, possui uma única interseção com os eixos na origem e é simétrica em relação ao eixo dos x.

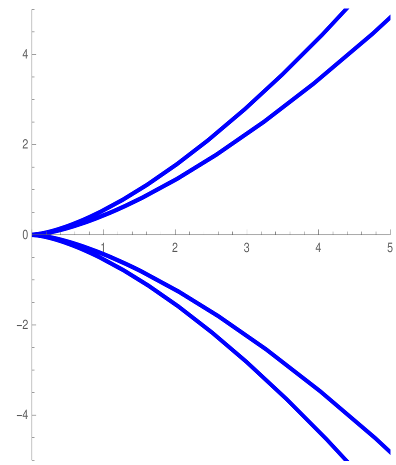

Figura 5.1: Desenhos para $a = 0.5$ e $a = 0.8$

5.2 Folium de Descartes

É o lugar geométrico determinado pela equação:

$$3\,y^2\,(a-x) = x^2\,(x+3\,a), \quad a \neq 0.$$

Fazendo $y = t\,x$ obtemos:

$$3\,y^2\,(a-x) - x^2\,(x+3\,a) = -x^2\left[x\,(3\,t^2+1) - 3\,a\,t^2 + 3\,a\right] = 0$$

se $x \neq 0$, temos $x\,(3\,t^2+1) - 3\,a\,t^2 + 3\,a = 0$, logo temos a parametrização:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3\,a\,(t^2-1)}{3\,t^2+1} \\ \\ y(t) &= \dfrac{3\,a\,t\,(t^2-1)}{3\,t^2+1}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O folium de Descartes tem um laço e possui uma única interseção com os eixos na origem.

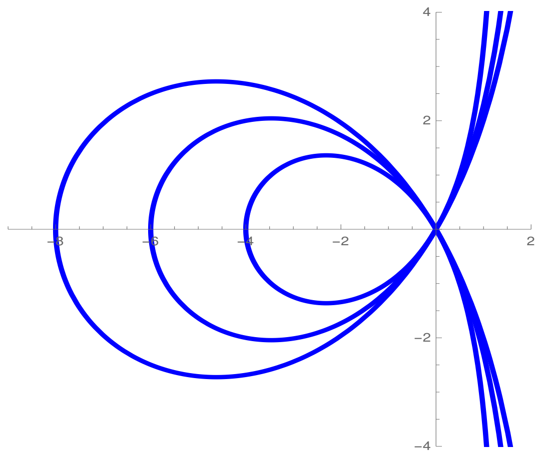

Figura 5.2: Desenhos para $a = 2$, $a = 3$ e $a = 4$

5.3 Lemmiscata de Bernoulli

É o lugar geométrico determinado pela equação:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2), \quad a \neq 0.$$

Fazendo $y = x\,sen(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= x^4 + 2\,x^2\,y^2 + y^4 = x^4 + 2\,x^4\ \mathrm{sen}^2(t) + x^4\ \mathrm{sen}^4(t) \\ x^2 - y^2 &= x^2 - x^2\ \mathrm{sen}^2(t); \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - a^2\,(x^2 - y^2) &= x^2 + 2\,x^2\ \mathrm{sen}^2(t) + x^2\ \mathrm{sen}^4(t) - a^2 + a^2\ \mathrm{sen}^2(t) \\ &= x^2\,(1 + sen^2(t))^2 - a^2\,cos^2(t) = 0, \end{aligned}$$

então:

$$x = \frac{a\,cos(t)}{1 + sen^2(t)}.$$

Finalmente, temos a parametrização::

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{a\,cos(t)}{1+sen^2(t)} \\ \\ y(t) &= \dfrac{a\,cos(t)\,sen(t)}{1+sen^2(t)}, \quad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

A lemmiscata de Bernoulli tem dois laços e possui interseções com os eixos na origem e nos pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

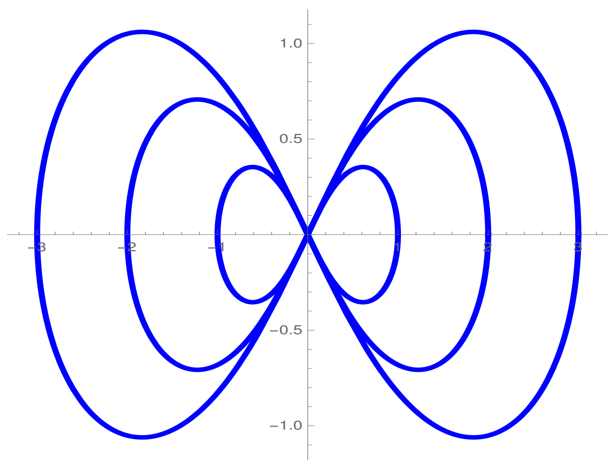

Figura 5.3: Desenhos para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$

5.4 Astróide

É o lugar geométrico determinado pela equação:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}, \quad a \neq 0.$$

Não é difícil obter:

$$\begin{cases} x(t) &= a\,cos^3(t) \\ y(t) &= a\,sin^3(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A astróide possui interseções com os eixos no pontos $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -a)$ e $(0, a)$. É simétrica em relação à origem.

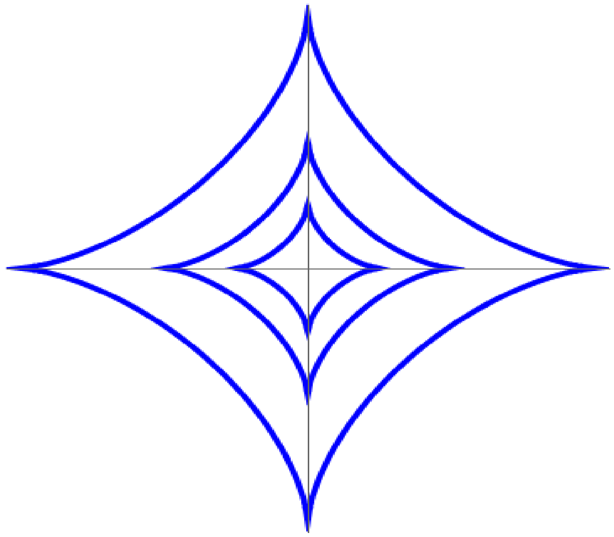

Figura 5.4: Desenhos para $a > 0$

5.5 Limaçon de Pascal

É o lugar geométrico determinado pela equação em coordenadas polares:

$$r = b + a\,cos(t), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad a,\ b \in \mathbb{R},\ b > 0.$$

então $r^2 = b\,r + a\,r\,cos(t)$,;utilizando que $r^2 = x^2 + y^2$ e $x = r\,cos(t)$, obtemos:

$$(x^2 + y^2 - a\,x)^2 = b^2\,(x^2 + y^2).$$

Não é difícil obter:

$$\begin{cases} x(t) & = (b + a\,cos(t))\,cos(t) \\ y(t) & = (b + a\,cos(t))\,sen(t), \quad t \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

A limaçon de Pascal, possui possíveis interseções com os eixos, no pontos $(0, 0)$ e/ou $(\pm\sqrt{b}, 0)$ e/ou $(0, a \pm \sqrt{b})$. É simétrica em relação ao eixo dos x.

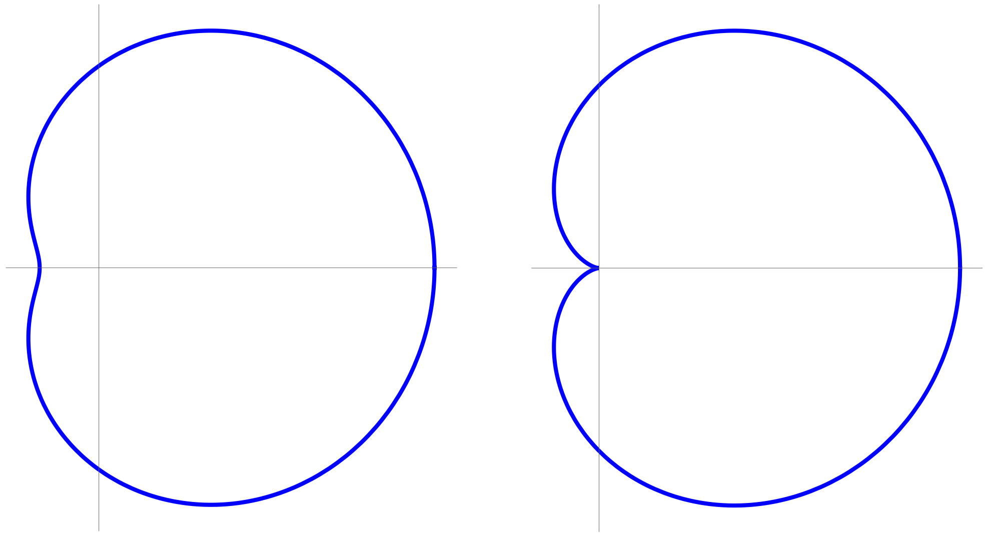

Figura 5.5: Desenhos para $a = 0.5$ e $b = 1$; $a = 1$ e $b = 1$, respectivamente

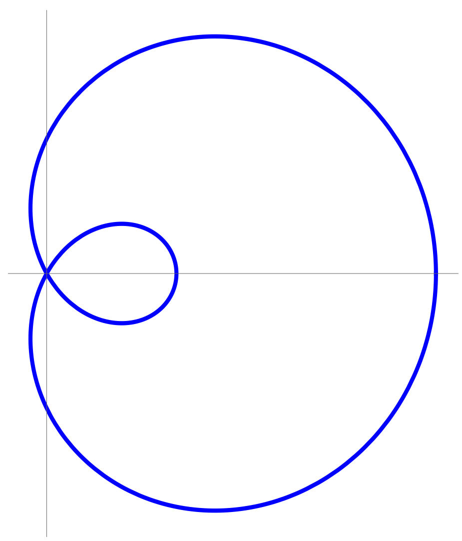

Figura 5.6: Desenhos para $a = 2$ e $b = 1$

5.6 Espiral de Euler

É o lugar geométrico determinado pela parametrização:

$$\begin{cases} x(t) = \pm a \displaystyle\int_0^t \frac{sen(u)}{\sqrt{u}}\, du \\ \\ y(t) = \pm a \displaystyle\int_0^t \frac{cos(u)}{\sqrt{u}}\, du, \quad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

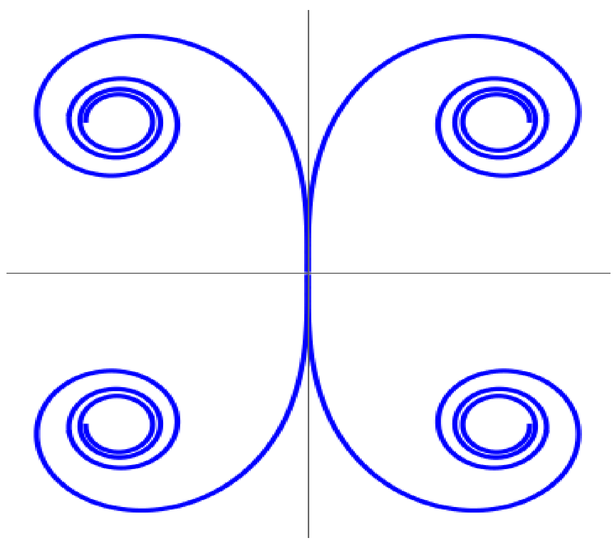

Figura 5.7: Desenhos para $a = 1$ e $a = -1$

5.7 Espiral Logarítmico

É o lugar geométrico determinado pela parametrização:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a\, e^{a\,t}}{a^2+1}\, \big[a\, cos(t) + sen(t)\big] \\ \\ y(t) = \dfrac{a\, e^{a\,t}}{a^2+1}\, \big[a\, sen(t) - cos(t)\big], \quad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

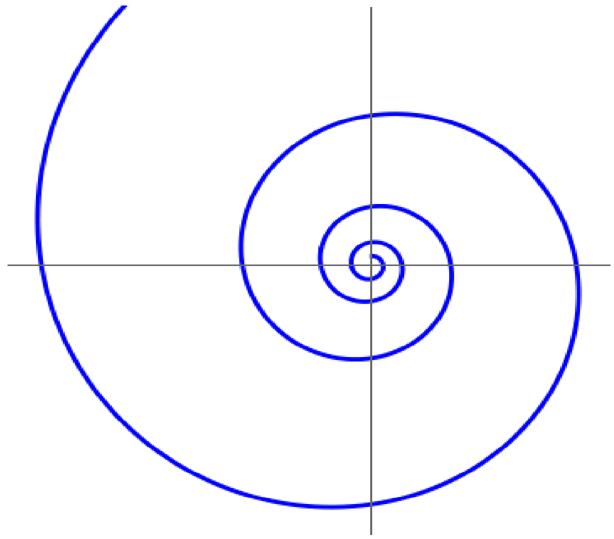

Figura 5.8: Desenhos para $a = -0.1$

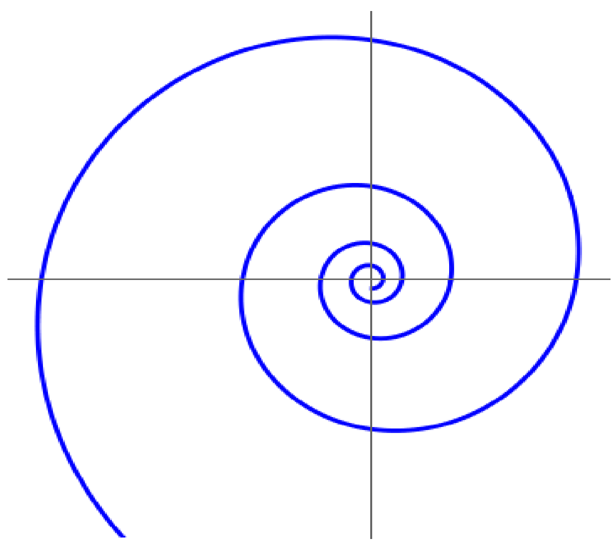

Figura 5.9: Desenhos para $a = 0.1$

5.8 Curvas Offset

A curva paralela ou offset de uma curva dada é o lugar geométrico dos pontos que (localmante) estão uma distância fixada da curva; equivalentemente, a curva cujas tangentes são paralelas às tangentes da curva dada, nos pontos com normal comum.

Sejam $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma curva de classe C^1, $\vec{\mathbf{n}}$ vector normal unitário e $d \in \mathbb{R}$. A curva offset ou paralela à distância d de γ é denotada e definida por:

$$\gamma_d(t) = \gamma(t) + d\,\vec{\mathbf{n}}.$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então $\gamma_d(t) = (X(t), Y(t))$ tal que:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{d\,y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \\ \\ Y(t) = y(t) + \dfrac{d\,x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \end{cases}$$

Exemplo 5.1.

[1] Seja a parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{cases} X(t) = t - d\,\dfrac{2\,t}{\sqrt{1 + 4\,t^2}} \\ \\ Y(t) = t^2 + \dfrac{d}{\sqrt{1 + 4\,t^2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

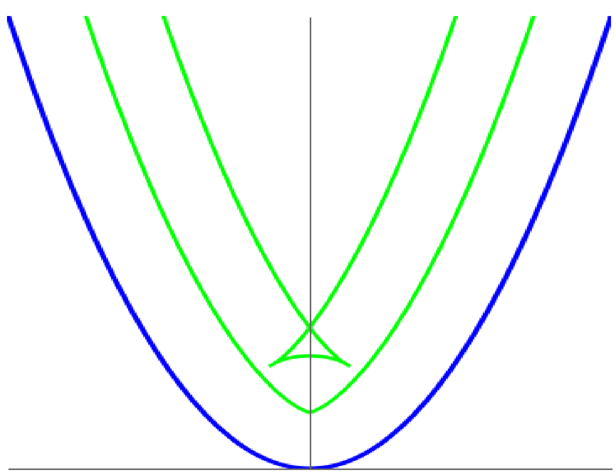

Figura 5.10: A parábola e algumas offset

[2] Seja a elipse $\gamma(t) = (4\,cos(t), sen(t))$, $t \in [0, 2\,\pi]$, então:

$$\begin{cases} X(t) = 4\,cos(t) - d\,\dfrac{cos(t)}{\sqrt{cos^2(t) + 16\,sen^2(t)}} \\ \\ Y(t) = sen(t) - d\,\dfrac{4\,sen(t)}{\sqrt{cos^2(t) + 16\,sen^2(t)}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

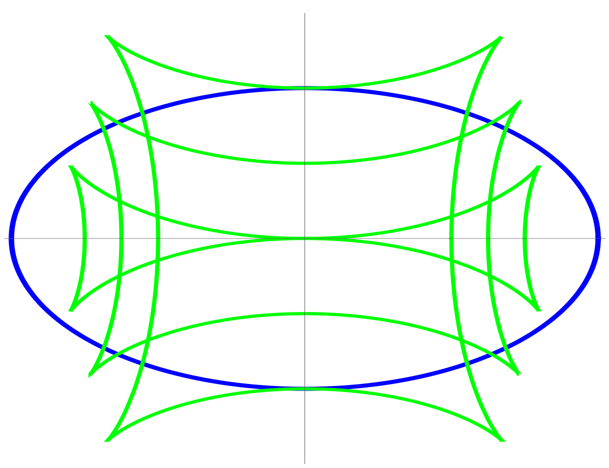

Figura 5.11: A elipse e algumas offset

[3] Seja a curva $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{cases} X(t) = t - d\,\dfrac{3\,t^2}{\sqrt{1 + 9\,t^4}} \\ \\ Y(t) = t^3 - \dfrac{d}{\sqrt{1 + 9\,t^4}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

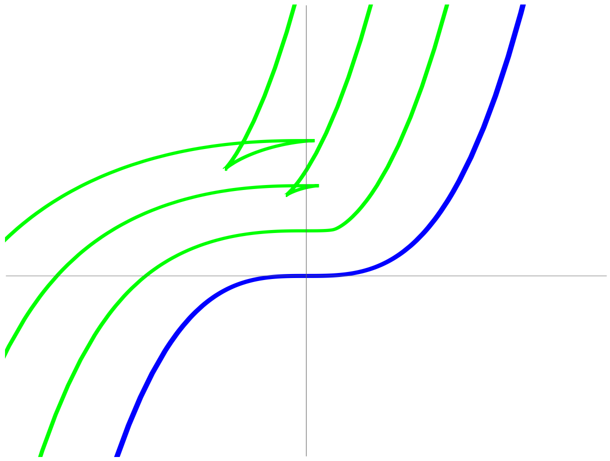

Figura 5.12: A curva e algumas offset

5.9 Parametrização das Roletas

Definição 5.1. Uma roleta (roulette) é o lugar geométrico determinado por um ponto fixo P associado a uma curva C_1 que rola, sem deslizar, ao longo de outra curva fixa C_2.

A seguir exemplos mais importantes de roletas.

5.10 Ciclóide

É a roleta onde C_2 é uma reta, C_1 é um círculo e P pertence à circunferência C_1. Considere a reta como o eixo coordenado OX, C_1 um círculo de raio a centrado no ponto A; C_1 começa a rolar a partir da origem e P é o ponto fixo em C_1. Sejam E e B os pés das perpendiculares passando por $P = (x(t), y(t))$ e A em relação a OX, respectivamente. Veja o desenho:

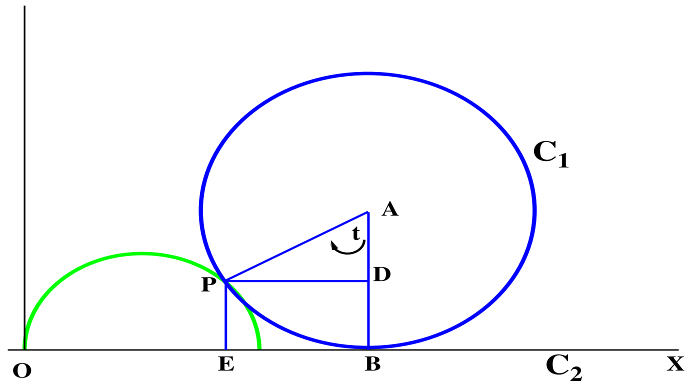

Figura 5.13: Construção da ciclóide

Seja $t = \angle DAP$, no sentido indicado; PD é perpendicular a BA; como C_1 rola sem deslizar de O a B, temos:

$$\overline{OB} = \text{arco}\, PB = a\, t,$$

$$x(t) = \overline{OE} = \overline{OB} - \overline{EB} = a\, t - \overline{PD}$$

e

$$y(t) = \overline{EP} = \overline{BD} = \;= \overline{BA} - \overline{DA}.$$

Então, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = & a\, t - a\, sen(t) \\ y(t) = & a - a\, cos(t) \qquad t \in [0, 2\, n\, \pi],\; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

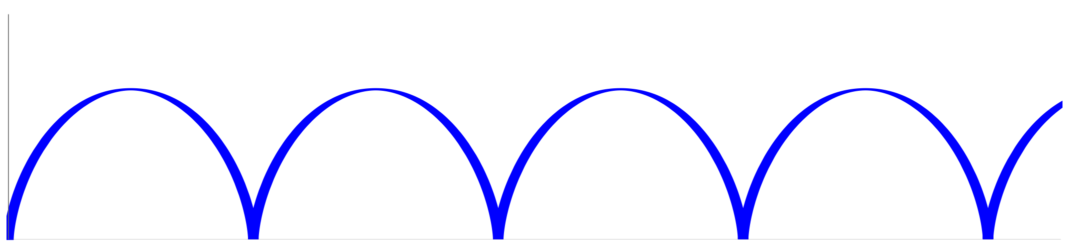

Figura 5.14: A ciclóide

Observação 5.1. As seguintes curvas, além de sua beleza, são utilizadas em Engenharia, no desing de ferramentas e engrenagens.

5.11 Epitrocóide

É a roleta descrita por um ponto P que fica a uma distância fixa do centro de um círculo C_1 de raio b, que rola sem deslizar, no exterior de outro círculo C_2, fixo.

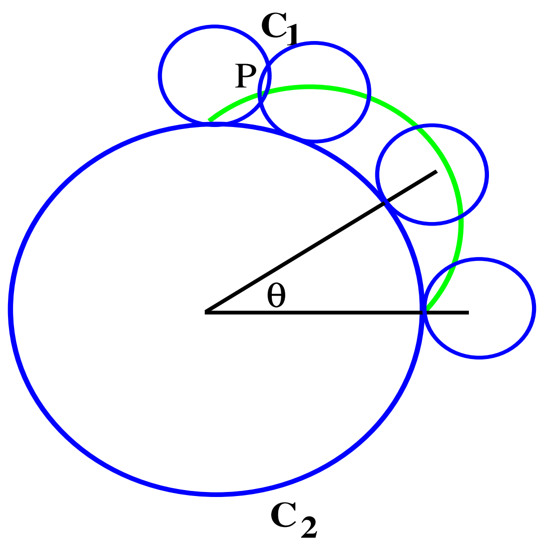

Figura 5.15: A epitrocóide

A parametrização da epitrocóide é:

$$\begin{cases} x(t) & = m\,cos(t) - h\,cos(\frac{m\,t}{b}) \\ y(t) & = m\,sen(t) - h\,sen(\frac{m\,t}{b}), \qquad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

A curva possui $\frac{m}{b} - 1$ auto-interseções se $\frac{m}{b} \in \mathbb{Z}$.

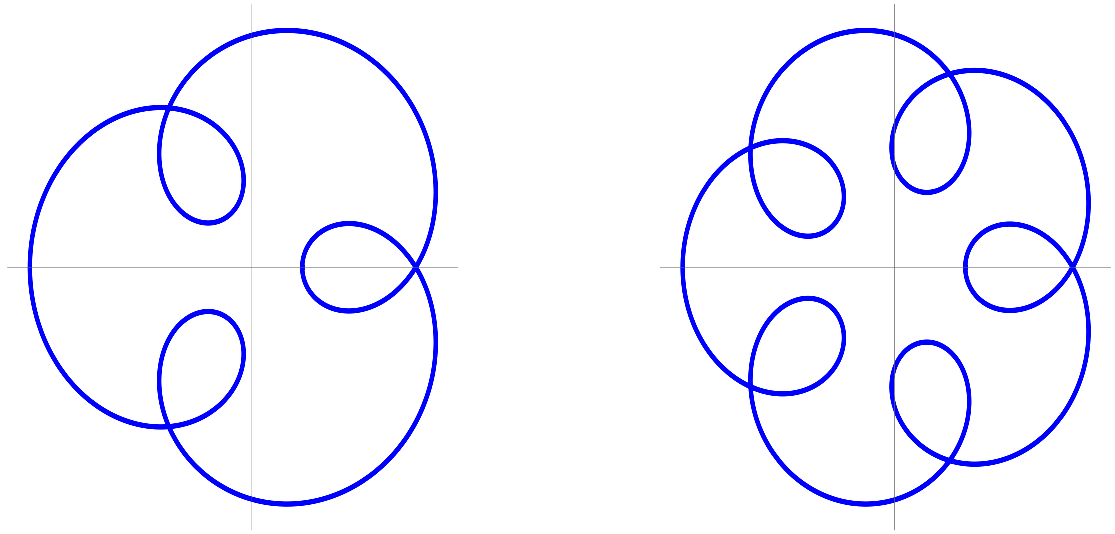

Figura 5.16: Desenhos para $b = 2$, $h = 5$ e $m = 8$; $b = 2$, $h = 6$ e $m = 12$, respectivamente

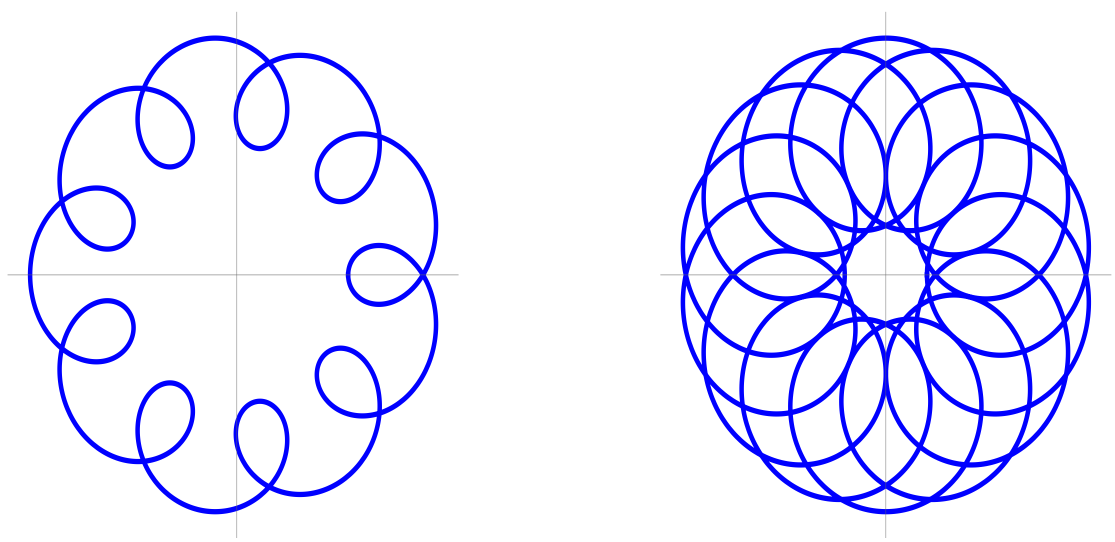

Figura 5.17: Desenhos para $b = 2$, $h = 6$ e $m = 20$; $b = 2$, $h = 20$ e $m = 30$, respectivamente

5.12 Hipotrocóide

É a roleta descrita por um ponto P que fica a uma distância fixa do centro de um círculo C_1 de raio b, que rola sem deslizar, no interior de outro círculo C_2, fixo.

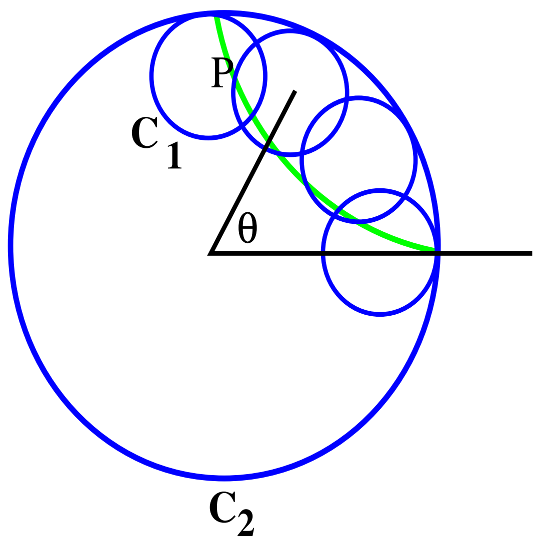

Figura 5.18: Construção da hipotrocóide

As equações paramétricas da hipotrocóide são:

$$\begin{cases} x(t) &= n\,cos(t) + h\,cos\big(\dfrac{n\,t}{b}\big) \\ y(t) &= n\,sen(t) - h\,sen\big(\dfrac{n\,t}{b}\big), \qquad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

1. Se $h = b$, a curva é chamada hipociclóide.
2. Se $h = 2\,b$ é uma elipse.
3. Existem $\dfrac{n}{b} + 1$ auto-interseções se $\dfrac{n}{b} \in \mathbb{Z}$.
4. A curva tem simetria em relação ao eixo dos y se o inteiro $\dfrac{n}{b}$ é ímpar.

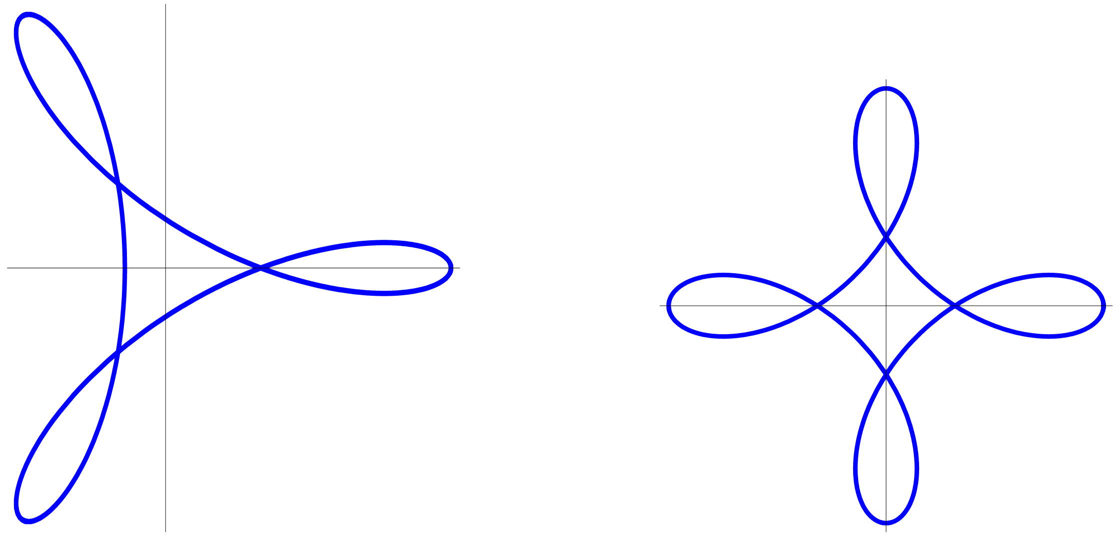

Figura 5.19: Desenhos para $b = 2$, $h = 3$ e $n = 4$; $b = 2$, $h = 4$ e $n = 6$, respectivamente

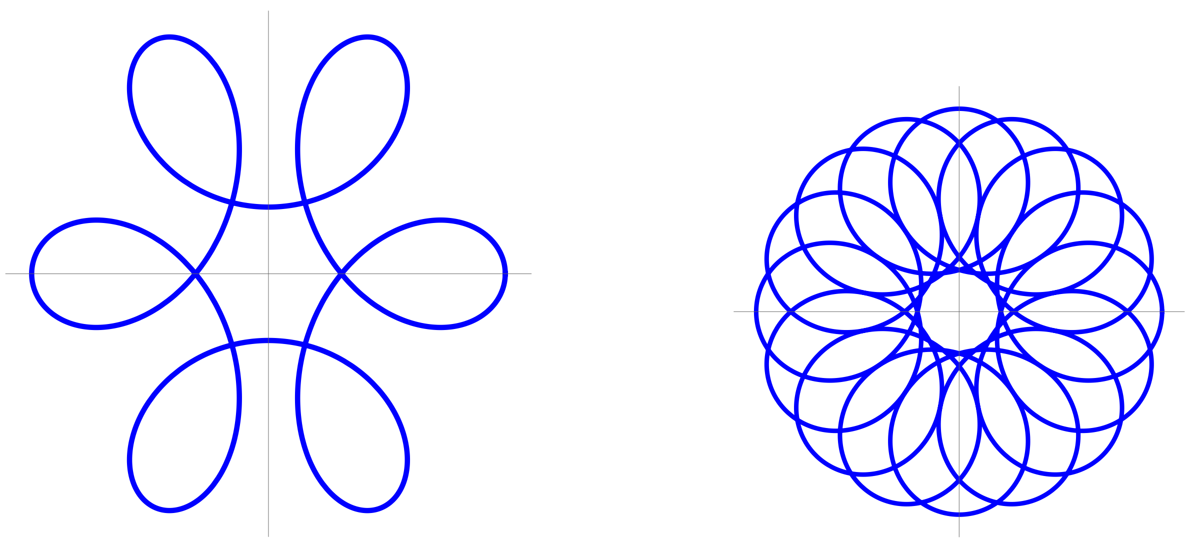

Figura 5.20: Desenhos para $b = 2$, $h = 6$ e $n = 10$; $b = 2$, $h = 20$ e $n = 30$, respectivamente

5.13 Exercícios

1. Seja γ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$ de classe C^2, definimos e denotamos a curvatura (com sinal) de γ por:

$$k(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left[x'^2(t) + y'^2(t)\right]^{3/2}}.$$

   Determine a curvatura das seguintes curvas de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

   (b) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

   (c) $\gamma(t) = (e^t\, sen(t), e^t\, cos(t))$.

   (d) $\gamma(t) = (2\, sen(t), 3\, cos(t))$.

   (e) $\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t))$.

2. Esboçe os gráficos das curvaturas das curvas do item anterior, que pode dizer das curvas a partir do gráfico da curvatura?

3. Determine a curvatura com sinal de:

   (a) Folium de Descartes.

   (b) Lemniscata de Bernoulli.

   (c) Limação de Pascal.

4. Sejam γ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$ de classe C^2 e γ_d a curva offset de γ a distâcia d de γ. Se a curvatura com sinal de γ é $k = k(t)$. Determine a curvatura com sinal de γ_d.

5. Seja γ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^3$ de classe C^2, definimos e denotamos a curvatura de γ por:

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

   Determine a curvatura das seguintes curvas de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\gamma(t) = (t^2, t^3, t)$.

(b) $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$.

(c) $\gamma(t) = (sen(t), cos(t), e^t)$.

6. É possível deducir da fórmula de curvatura em $\mathbb{R}^2$ a partir da fórmula de curvatura em $\mathbb{R}^3$?

7. Nas equações da epitrocóide: Se $h = b$ a curva é chamada **epiciclóide**.

   (a) Obtenha uma parametrização para esta curva.

   (b) Esboce o traço desta curva para $m = 16$ e $b = 2$.

   (c) Verifique que os laços degeneram a $\dfrac{m}{b} - 1$ cúspides se $\dfrac{m}{b} \in \mathbb{Z}$.

   Se $a = 2\,b$, a epitrocóide é chamada **nefróide**.

   (d) Obtenha uma parametrização para esta curva.

   (e) Esboce o traço desta curva para $a = 2$.

   (f) Determine o vetor tangente a esta curva e verifique se é regular.

   Se $a = b$ a epitrocóide é chamada de **limaçon**.

   (g) Obtenha uma parametrização para esta curva.

   (h) Esboce o traço desta curva para $a = 3$, $h = 8$ e $m = 6$.

   (i) Determine os pontos múltiplos desta curva.