Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Professora: Rosiane Soares Cesar

1ª Lista de Exercícios - Álgebra Linear

1) Construa as matrizes:

(a) $A = [a_{ij}]_{4\times 2}$, $a_{ij} = i - 3j$.

(b) $B = [b_{ij}]_{3\times 5}$, $b_{ij} = i^2 - j$.

2) Encontre x, y, z, w tais que

$$\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) $A - 4B$

(b) AC

(c) BC

(d) AD

(e) BD

(f) C^tD

(g) A^t

(h) A^tB

(i) D^tC

4) Calcule as inversas de cada uma das matrizes a seguir (se existirem):

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5) Verique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas afirmações

(a) Sejam $A_{m\times r}$ e $B_{r\times n}$ matrizes tais que $AB = 0$. Então $A = 0$ ou $B = 0$, onde 0 representa a matriz nula.

(b) Toda matriz simétrica é normal.

(c) A soma de matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

(d) Toda matriz anti-simétrica é normal.

(e) Toda matriz ortogonal é normal.

(f) A soma de matrizes invertíveis é uma matriz invertível.

6) Seja A uma matriz real quadrada. Mostre que

(a) $A + A^t$ é uma matriz simétrica.

(b) $A - A^t$ é uma matriz anti-simétrica.

7) Determine valores de x, y e z de modo que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{81} & \sqrt[3]{27} \\ -3^x & 5 & \log_2 256 \\ z+1 & 2^y & 4 \end{bmatrix}$$

seja simétrica

8) Determine x, y e z para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

seja ortogonal.

9) Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é ortogonal

10) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

11) Supondo as matrizes quadradas A, B, C, D e X de mesma ordem e invertíveis, resolver as equações matriciais nas quais X é a variável.

(a) $C^{-1}BX = CA$

(b) $A^2X^tD = ADB^t$

(c) $AB^{-1}X = C^{-1}A$.

12) Coloque as matrizes abaixo na forma escalonada:

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 10 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -8 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

13) Coloque as matrizes na forma escalonada reduzida por linhas:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

14) Determine a inversa das matrizes abaixo:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

15) Usando escalonamento, calcule o determinante das matrizes abaixo:

$$a)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

16) Usando Laplace, calcule o determinante das matrizes a seguir:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

17) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que valores de x a matriz A é invertível?

18) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, com $\det A = 2$ e $\det B = -1$. Calcule $\det(A^t B^3 A^2 B^{-1})$.

19) Seja A uma matriz quadrada de ordem 6 e $A^4 = 2A$

(a) Mostre que $(\det A)^4 = 64 \det A$.

(b) Deduza que $\det A = 0$ ou 4.

20) Mostre que se A é uma matriz ortogonal, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$

Gabarito

1) (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

2) $x = 2, y = 1, z = 3, w = -1$

3) (a) $\begin{bmatrix} -15 & -1 & 14 \\ 4 & 11 & -8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -7 & -6 & 12 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} -4 & -5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

4) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ C^{-1} não possui inversa

5)

(a) F (b) V (c) V (d) V (e) V (f) F

6) Demonstração

7) $x = -4, y = 3, z = 2$

8) $x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

9) Demonstração

10) Demonstração

11) (a) $X = B^{-1}C^2A$
(b) $X = (D^{-1})^t BD^t (A^{-1})^t$
(c) $X = BA^{-1}C^{-1}A$

12) resposta individual

13) (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14) (a) $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15) (a) -55 (b) 24 (c) 5

16) (a) -92 (b) -131

17) $x \in \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$

18) 8

19) demonstração

20) demonstração