AULA DE EXERCÍCIOS

0.1 Parametrizações

Determine uma parametrização de:

1. $x^2 + y = 1$.

2. $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$.

Soluções

1. Parametrizemos a curva $x^2 + y = 1$.

   (a) Primeiramente, observamos que a equação só apresenta uma potência quadrática na variável x.

   (b) Logo, $y = 1 - x^2$, fazendo $x = t$, temos que $y = 1 - x^2 = 1 - t^2$.

   (c) A parametrização é:

   $$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Que é uma parábola.

2. Parametrizemos a curva $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$.

   (a) Primeiramente, observamos que a equação apresenta potências quadráticas nas variáveis x e y e sinal positivos nas variáveis quadráticas.

   (b) Também apresenta coeficientes nas variáveis quadráticas.

   (c) Logo, dividindo por 36, embos os lados da equação, obtemos:

   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

   (d) Fazendo $x = 3\,cos(t)$ e $y = 2\,sen(t)$, temos:

   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = cos^2(t) + sen^2(t) = 1.$$

   (e) Logo, a parametrização é:

   $$\begin{cases} x = 3\,cos(t) \\ y = 2\,sen(t), \quad 0 \leq t \leq 2\,\pi. \end{cases}$$

   Que é uma elipse.

0.2 Eliminação do Parâmetro

Elimine o parâmetro de:

1. $\begin{cases} x = 3\,tg(t) \\ y = 2\,cotg(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2\,(1 + cos(t)) \\ y = 2\,sen(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Soluções

1. Eleminemos o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 3\,tg(t) \\ (2) \quad y = 2\,cotg(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Nos casos que a equação apresente funções trigonométricas, devemos utilizar identidades trigonométricas.

   (b) De (1) temos $x = 3\,tg(t) = \dfrac{3}{cotg(t)}$.

   (c) Substituindo de (2), obtemos:

$$x = \frac{3}{cotg(t)} = \frac{6}{y}.$$

   (d) Logo, temos $x\,y = 6$, que é uma hiperbóle.

2. Eliminemos o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 2\,(1 + cos(t)) \\ (2) \quad y = 2\,sen(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Nos casos que a equação apresente funções trigonométricas, devemos utilizar identidades trigonométricas.

   (b) De (1) temos $x^2 = 4\,(1 + cos(t))^2$, logo:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 + 8\,cos(t) + 4\,cos^2(t) \\ &= 4 + 8\,cos(t) + 4\,(1 - sen^2(t)) \\ &= 8(1 + cos(t)) - 4\,sen^2(t) \\ &= 4\,x - 4\,sen^2(t) \end{aligned}$$

(c) Substituindo de (2), obtemos:

$$x^2 = 4\,x - y^2.$$

(d) Que é círculo de raio 4. De fato completando os quadrados, temos:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

0.3 Comprimento de Arco

1. Calcule o comprimento de arcos da curva $\gamma(t) = (t, h(t))$, $3 \leq t \leq 8$, onde:

$$h(t) = \int_1^t \sqrt{x^3 + x^2 - 1}\, dx.$$

2. Calcule o comprimento de arcos da curva determinada pela interseção de $x + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Soluções

1. Seja $\gamma(t) = (t, h(t))$, $3 \leq t \leq 8$.

   (a) O vetor tangente da curva é: $\gamma'(t) = (1, h'(t))$.

   (b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $h'(t) = \sqrt{t^3 + t^2 - 1}$, então:

$$L = \int_3^8 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_3^8 \sqrt{1 + h'^2(t)}\, dt = \int_3^8 \sqrt{t^3 + t^2}\, dt = \int_3^8 t\,\sqrt{t+1}\, dt.$$

   (c) Fazendo $u = t + 1$ e $du = dx$, logo:

$$L = \int_3^8 t\,\sqrt{t+1}\, dt = \int_4^9 \left[\sqrt{u^3} - \sqrt{u}\,\right] du = \frac{1076}{15}\, u.c.$$

2. A curva é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = -x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\,x^2 + y^2 = 1 \\ z = -x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, \quad a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ z = -x. \end{cases}$$

   Parametrizando a elipse:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, cos(t) \\ y = sen(t) \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\, cos(t), \quad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases} \Longrightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\, sen(t) \\ y' = cos(t) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, sen(t), \quad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

Logo, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1}$ e:

$$L = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi.$$

0.4 Reparâmetrização

1. Seja o espiral parametrizado por: $\gamma(t) = (e^t\, cos(t), e^t\, sen(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Ache um valor do paramêtro s tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo s.

2. Seja a hélice parametrizado por: $\gamma(t) = (a\, cos(t), a\, sen(t), b\, t)$, $t \in \mathbb{R}$. . Ache um valor do paramêtro s tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo s.

Soluções

1. Seja o espiral parametrizado por:

$$\gamma(t) = (e^t\, cos(t), e^t\, sen(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

então:

(a) O vetor tangente, é:

$$\gamma'(t) = (e^t\,(cos(t) - sen(t)), e^t\,(cos(t) + sen(t))).$$

Logo:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{e^{2t}\,(cos(t) - sen(t))^2 + e^{2t}\,(cos(t) + sen(t)))^2} = \sqrt{2}\, e^t.$$

(b) Calculemos o comprimento de arco da espiral no intervalo $[0, t]$:

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}\,(e^t - 1).$$

(c) Fazendo $s = \sqrt{2}\,(e^t - 1)$, temos que $e^t = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1$, logo a função inversa:

$$h(s) = ln\big(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\big) \quad \text{e} \quad \text{consideramos} \quad \beta(s) = (\gamma \circ h)(s),$$

(d) Logo, h é de classe C^1, $h'(s) = \dfrac{1}{s+\sqrt{2}}$ e $e^{h(s)} = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1 = \dfrac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(e) Então:

$$\beta(s) = \gamma(h(s)) = e^{h(s)}\,(cos\big(h(s)\big), sen\big(h(s)\big)) = \big(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\big)\,(cos\big(h(s)\big), sen\big(h(s)\big))$$

e:

$$\beta'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(cos(h(s)) - sen(h(s)), cos(h(s)) + sen(h(s))),$$

temos que: $\|\beta'(s)\| = 1$, para todo s.

(f) E β é uma reparametrização de γ.

2. Seja a hélice parametrizado por:

$$\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t), b\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

então:

(a) O vetor tangente:

$$\gamma'(t) = (-a\,sen(t)), a\,cos(t), b) \quad \text{e} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

(b) Calculemos o comprimento de arco da hélice no intervalo $[0, t]$:

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

(c) Fazendo $s = \sqrt{a^2+b^2}\,t$, temos que $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, logo a função inversa:

$$h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \text{consideramos} \quad \beta(s) = (\gamma \circ h)(s),$$

(d) Então, $h'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e:

$$\beta(s) = \gamma(h(s)) = \gamma\big(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\big) = (a\,cos(h(s)), a\,sen(h(s)), \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}),$$

logo:

$$\beta'(s) = (-\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\big)\,sen(h(s)), \big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\big)\,cos(h(s)), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}),$$

temos que: $\|\beta'(s)\| = 1$.

(e) E β é uma reparametrização de γ.

0.5 Reta Tangente

1. Determine a reta tangente e a reta normal a $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), 1-2\,sen(t))$, no ponto $(-1,0,1)$.

2. Determine a reta tangente a $\gamma(t) = (t^3+4\,t, 6\,t^2)$ que seja paralela a reta $r(t) = \big(-\dfrac{7\,t}{2}, 6\,t-10\big)$.

Soluções

1. Determine a reta tangente e normal a $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), 1-2\,sen(t))$, no ponto $(-1,0,1)$.

(a) Primeiramente, determinamos o valor de t_0; Isto é:

$$\gamma(t_0) = (-1,0,1) \Longrightarrow (cos(t_0), sen(t_0), 1-2\,sen(t_0)) = (-1,0,1).$$

(b) Isto é:

$$\begin{cases} cos(t_0) = -1 \\ sen(t_0) = 0 \\ 1-2\,sen(t_0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow t_0 = \pi$$

(c) Determinemos $\gamma'(t_0)$, logo:

$$\gamma'(t)\big|_{t=\pi} = (-sen(t), cos(t), -2\,cos(t))\big|_{t=\pi} = (0,-1,2).$$

(d) A equação da reta tangente a γ em t_0 é: $\gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0)$, logo:

$$(-1,0,1) + t\,(0,-1,2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -t \\ z = 1+2\,t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(e) Determinemos $\gamma''(\pi)$:

$$\gamma''(t)\Big|_{t=\pi} = (-cos(t), -sen(t), 2\,sen(t))\Big|_{t=\pi} = (1, 0, 0).$$

(f) Logo, $\gamma'(\pi)$ e $\gamma''(\pi)$ são ortogonais, logo a equação da reta normal em t_0 é $\gamma(t_0) + t\,\gamma''(t_0)$:

$$(-1, 0, 1) + t\,(1, 0, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = 1, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Determine a reta tangente a $\gamma(t) = (t^3 + 4\,t, 6\,t^2)$ que seja paralela a reta $\rho(t) = \big(-\frac{7\,t}{2}, 6\,t - 10\big)$.

(a) Escrevamos:

$$\begin{cases} x = t^3 + 4\,t \\ y = 6\,t^2. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{7\,t}{2} \\ y = 6\,t - 10, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente a γ é:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{12\,t}{3\,t^2 + 4}.$$

(c) Analogamente, o coeficiente angular de ρ é:

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{12}{7}.$$

(d) As retas são paralelas se, e somente se $m_1 = m_2$, logo:

$$\frac{12\,t}{3\,t^2 + 4} = -\frac{12}{7} \Longleftrightarrow 3\,t^2 + 7\,t + 4 = 0, \quad t \neq 0.$$

(e) Logo, temos os pontos $t_1 = -1$ e $t_2 = -\frac{4}{3}$.

(f) Então $\gamma(-1) = (-5, 6)$ e $\gamma(-\frac{4}{3}) = (-\frac{208}{27}, \frac{32}{3})$.

(g) O vetor tangente é $\gamma'(t) = (3\,t^2 + 4, 12\,t)$.

(h) Então $\gamma'(-1) = (7, -12)$ e $\gamma'(-\frac{4}{3}) = (\frac{28}{3}, -16)$

(i) As retas tangentes nos pontos $\gamma(-1)$ e $\gamma(-\dfrac{4}{3})$, são:

$$\begin{cases} x &= -5 + 7\,t \\ y &= 6 - 12\,t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= -\dfrac{208}{27} + \dfrac{28}{3}\,t \\ \\ y &= \dfrac{32}{3} - 16\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

0.6 Campos de Vetores

1. Verifique se o campo de vetores $F(x,y) = (y\,e^{xy}, x\,e^{xy})$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é conservativo, no caso afirmativo, determine seu potencial.

2. Determine o valor das constantes a, b e c tais que o campo de vetores:

$$F(x,y,z) = (x + 2\,y + a\,z, b\,x - 3\,y - z, 4\,x + c\,y + 2\,z), \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

seja conservativo e determine seu potencial.

Soluções

1. Seja o campo $F(x,y) = (y\,e^{xy}, x\,e^{xy})$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sejam $F_1 = y\,e^{xy}$ e $F_2 = x\,e^{xy}$, as componentes de F, que são funções de classe C^k, $k > 0$.

(a) Calculamos $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = e^{xy} + x\,y\,e^{xy} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + x\,y\,e^{xy}, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

então:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

logo, e o campo F é conservativo. Segue o algoritmo.

(b) Primeiro, devemos calcular:

$$\int F_1\,dx = \int y\,e^{xy}\,dx = e^{xy}.$$

Agora calculamos:

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx = \int [e^{xy} + x\,y\,e^{xy}]\,dx = x\,e^{xy}, \quad y \neq 0,$$

logo:

$$F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx = x\, e^{xy} - x\, e^{xy} = 0,$$

e:

$$\int \left[F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx \right] dy = c_1,$$

então, o potencial é:

$$f(x, y) = \int F_1\, dx + \int \left[F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx \right] dy + c.$$

Logo:

$$f(x, y) = e^{xy} + c.$$

2. Calculando $rotF$ e fazemos $rotF = \vec{0}$, seja:

   (a) $F_1 = x + 2\,y + a\,z$,
   $F_2 = b\,x - 3\,y - z$ e
   $F_3 = 4\,x + c\,y + 2\,z$, temos que:

   $$rot\ F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (c + 1, a - 4, b - 2),$$

   $rotF = \vec{0}$, logo obtemos $a = 4$, $b = 2$ e $c = -1$.

   Então F é conservativo.

   (b) Segue o algoritmo.

   Seja $F_1 = x + 2\,y + 4\,z$, $F_2 = 2\,x - 3\,y - z$ e $F_3 = 4\,x - y + 2\,z$. Devemos calcular:

   (c) $M = \displaystyle\int F_1\, dx = \int \left[x + 2\,y + 4\,z\right] dx = \frac{x^2}{2} + 2\,x\,y + 4\,x\,z$ e;

   $$M(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2\,x\,y + 4\,x\,z.$$

   (d) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2\,x$, então $F_2 - \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2\,x - 3\,y - z - 2\,x = -3\,y - z$:

   $$N = \int \left[F_2 - \frac{\partial M}{\partial y} \right] dy = -\int \left[3\,y + z\right] dy = -\frac{3\,y^2}{2} - y\,z,$$

e:

$$N(x,y,z) = -\frac{3\,y^2}{2} - y\,z.$$

(e) $P = M + N = \dfrac{x^2}{2} + 2\,x\,y + 4\,x\,z - \dfrac{3\,y^2}{2} - y\,z$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 4\,x - y$: e $F_3 - \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2\,z$, logo:

$$L = \int \left[F_3 - \frac{\partial P}{\partial z}\right] [\,dz = \int 2\,z\,dx = z^2,$$

e:

$$L(x,y,z) = z^2.$$

(f) O potencial do campo é:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3\,y^2}{2} + z^2 + 2\,x\,y + 4\,x\,z - y\,z + c.$$

0.7 Integrais de Linha

1. Calcule $\displaystyle\int_C [y^3 + 1]\,dx + [3\,x\,y^2 + 1]\,dy$, onde C é a curva determinada por:

   (a) $x^2 + y^2 = 2\,x$ tal que $y \geq 0$, no sentido anti-horário.

   (b) $x^2 + y^2 = 2\,x$, no sentido anti-horário.

2. Calcule $\displaystyle\int_C z\,dy$, onde C é a curva determinada pela interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2\,y$, no primeiro octante e que liga os pontos $(0,0,2)$ a $(0,2,0)$.

0.8 Soluções

1. Completando os quadrados, temos a equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$, que representa um círculo de raio 1, centrado em $(1,0)$. Vejamos se o campo é conservativo.

   Seja $F_1 = y^3 + 1$ e $F_2 = 3\,x\,y^2 + 1$, então:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 3\,y^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   F é conservativo, devemos calcular:

$$f(x,y) = \int F_1\,dx + \int \left[F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\right] dy.$$

Logo, $\displaystyle\int F_1\,dx = \int [y^3+1]\,dx = x\,y^3 + x$ e:

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx = 3\,x\,y^2,$$

e:

$$f(x,y) = \int F_1\,dx + \int \left[F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\right] dy = x\,y^3 + x + \int [3\,x\,y^2 + 1 - 3\,x\,y^2]\,dy.$$

Então, o potencial do campo é:

$$f(x,y) = x\,y^3 + x + y + c.$$

(a) A condição $y \geq 0$, implica um semi-círculo, logo consideramos o arco entre $P=(2,0)$ a $Q=(0,0)$ (sentido anti-horário), e:

$$\int_C [y^2+1]\,dx + [3\,x\,y^2+1]\,dy = f(0,0) - f(2,0) = -2.$$

(b) Temos uma curva fechada, logo:

$$\oint_C [y^2+1]\,dx + [3\,x\,y^2+1]\,dy = 0.$$

2. A curva C é determinada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x^2+y^2 = 2\,y, \quad x,\ y,\ z \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow z^2 + 2\,y = 4 \Longrightarrow z = \sqrt{4-2\,y}.$$

Assim,a curva é dada por (completando os quadrados):

$$\begin{cases} (1) \quad x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (2) \quad z = \sqrt{4-2\,y} \end{cases}$$

então temos as parametrizações:

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sen(t) + 1 \\ z = \sqrt{2}\,\sqrt{1-sen(t)} \end{cases} \Longrightarrow \qquad z\,dy = \sqrt{2}\,\sqrt{1-sen(t)}\,cos(t)\,dt$$

Como estamos no primeiro octante e C liga os pontos $(0,0,2)$ a $(0,2,0)$, temos que $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$. De fato:

$$\begin{cases} cos(t) = 0 \\ sen(t) + 1 = 0 \\ \sqrt{2}\,\sqrt{1 - sen(t)} = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} cos(t) = 0 \\ sen(t) + 1 = 2 \\ \sqrt{2}\,\sqrt{1 - sen(t)} = 0; \end{cases}$$

as soluções são $t_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ e $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, respectivamente. Logo:

$$\int_C z\,dy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - sen(t)}\,cos(t)\,dt = \frac{8}{3}.$$

0.9 Teorema de Green

[1] Calcule: $\oint_C [e^x - x^2\,y]\,dx + 3\,x^2\,y\,dy$, onde $C = C_1 \cup C_2$, uma curva orientada positivamente, tal que são definidas por $y = x^2$ e $x = y^2$, respectivamente.

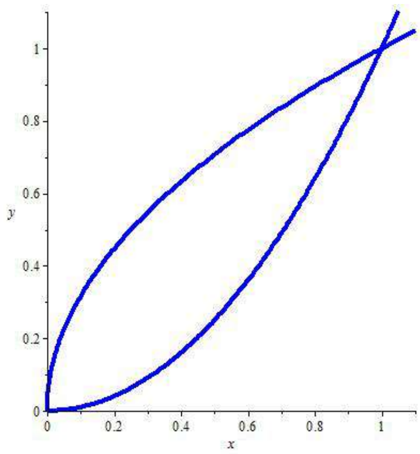

Figure 1:

Solução

O campo de vetores F é de classe C^1, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e C de classe C^1, por partes.

Sejam $F_1 = e^x - x^2\,y$ e $F_2 = 3\,x^2\,y$ as componentes do campo, calculemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6\,x\,y \Longrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 6\,x\,y + x^2.$$

Estamos nas hipóteses do Teorema de Green:

$$\oint_C [e^x - x^2\,y]\,dx + 3\,x^2\,y\,dy = \iint_D [6\,x\,y + x^2]\,dx\,dy,$$

onde, $D = \{(x, y)\,/\,0 \le x \le 1,\; x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$, logo:

$$\iint_D [6\,x\,y + x^2]\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} [6\,x\,y + x^2]\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 [3\,x^2 + x^{5/2} - 3\,x^5 - x^4]\,dx = \frac{41}{70}.$$

[2] Seja C uma a curva parametrizada por $\gamma(t) = (t^3, t^4)$, $0 \leq t \leq 1$. Calcule:

$$\int_C \big[2\,cos(2\,x) - e^{-x}\,[cos(x\,y) + y\,sen(x\,y)]\big]\,dx - x\,e^{-x}\,sen(x\,y)\,dy$$

Solução

Sejam $F_1 = 2\,cos(2\,x) - e^{-x}\,[cos(x\,y) + y\,sen(x\,y)]$ e $F_2 = -x\,e^{-x}\,sen(x\,y)$ as componentes do campo que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Observe que não podemos aplicar o Teorema d Green, pois a curva não é fechada. De fato: $\gamma(0) = (0,0)$ $\gamma(1) = (1,1)$.

Por outro lado:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

logo, $F = (F_1, F_2)$ é um campo conservativo com potencial:

$$f(x,y) = e^{-x}\,cos(x\,y) + sen(x\,y) + c.$$

As hipóteses do Teorema de Caracterização dos Campos Conservativos do Plano são satisfeitas; logo, a integral não depende da curva e sim do ponto inicias e do ponto final.

Sejam, $A = \gamma(0) = (0,0)$ e $B = \gamma(1) = (1,1)$, então:

$$\int_C F = \int_A^B F = f(1,1) - f(0,0) = \frac{cos(1)}{e} + sen(1) - 1.$$