

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE RIO DE JANEIRO

PRIMEIRA PROVA DE ÁLGEBRA – 18 de outubro de 2015

NOME DO ALUNO :

TURMA :

INSTRUÇÕES

1. Preencha o cabeçalho acima.
2. A prova deve ser feita sem consulta a apontamentos, cadernos, livros ou colegas.

DURAÇÃO DA PROVA: 1 hora e 30 minutos

B O A P R O V A

1. (valor 2.5 pontos) Prove quando é verdadeira e dê um contra-exemplo quando falsa.

- (a) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.
- (b) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.
- (c) $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.

2. (valor 2.5 pontos) Para cada uma das seguintes funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são bijeções?

- (a) $f(x) = 2x$,
- (b) $f(x) = x^3$,
- (c) $f(x) = \frac{x+4}{3}$.

3. (valor 2.5 pontos) Em \mathbb{Z} se define a relação

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b,$$

Prove que:

- (a) R é de equivalência.
 - (b) A classe de 5.
4. (valor 2.5 pontos) Construção de \mathbb{Z} com os naturais \mathbb{N} . Seja $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e definimos a seguinte relação

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

- (a) Prove que R é de equivalência.
- (b) X/\sim tem estrutura aditiva (+) e multiplicativa (.)

$$\begin{aligned} + : X/\sim \times X/\sim &\rightarrow X/\sim \\ ([a, b], [c, d]) &\mapsto [a + c, b + d] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : X/\sim \times X/\sim &\rightarrow X/\sim \\ ([a, b], [c, d]) &\mapsto [ac + bd, bc + ad] \end{aligned}$$

Prove que X/\sim tem estrutura de grupo aditivo + e tem estrutura multiplicativa, i.e.,

- i. $s + (t + v) = (s + t) + v, \quad \forall s, t, v \in X/\sim.$
 - ii. Existe $0 \in X/\sim$ tal que $0 + s = s + 0 = s \quad \forall s \in X/\sim.$
 - iii. $\forall s \in X/\sim$ existe $-s \in X/\sim$ tal que $s + (-s) = (-s) + s = 0.$
 - iv. $s.(t.v) = (s.t).v \quad \forall s, t, v \in X/\sim.$
 - v. Existe $1 \in X/\sim \setminus \{0\}$ tal que $1.s = s.1 = s, \quad \forall s \in X/\sim.$
- (c) Prove que existe uma função natural injetiva $j : \mathbb{N} \rightarrow X/\sim.$