Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Professora: Rosiane Soares Cesar

4ª Lista de Exercícios - Álgebra Linear

(1) Verifique se as aplicações abaixo são transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (xy, x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, x)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y + z, 2x - 3y + 4z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)$.

(e) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

(f) $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + b, -a, c + 1)$

(g) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = bx^2 + (a + c)x$.

(2) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1, 2) = (2, 3)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$ (note que $\{(1, 2), (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$). Determine:

(a) Calcule $T(-1, 1)$.

(b) Determine uma fórmula para T, isto é, $T(x, y)$.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$

Encontre uma base e a dimensão de:

(a) $\operatorname{Im} F$.

(b) $\operatorname{Nuc} F$.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, t) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

Encontre uma base e a dimensão de:

(a) $\operatorname{Im} F$.

(b) $\operatorname{Nuc} F$.

(5) Seja T a transformação linear associada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Determine $\dim \operatorname{Nuc} T$

(b) Determine $\dim \operatorname{Im} T$

(c) T é injetora? E sobrejetora?

(6) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + 2y, y, x + z)$. Mostre que T é um isomorfismo e indique sua inversa.

(7) Sejam $\{(3, 1), (1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(3, 1) = (2, -4)$ e $T(1, 1) = (0, 2)$.

  (a) Determine uma fórmula para T

  (b) Encontre $T(7, 4)$.

(8) Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z)$$

é um isomorfismo linear e determine T^{-1}.

(9) Considere as transformações lineares $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $F(x, y, z) = (y, x + z)$, $G(x, y, z) = (2z, x - y)$, $H(x, y) = (y, 2x)$. Determine:

  (a) $H \circ F$.

  (b) $H \circ G$.

  (c) $H^2 = H \circ H$.

(10) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 4x + 2y + 3z)$

  (a) Considerando α e β as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente, determine $[T]^\alpha_\beta$.

  (b) Considerando $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, determine $[T]^\alpha_\beta$

(11) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x + y, y, x + y)$. Encontre

  (a) A matriz de T com respeito as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

  (b) A matriz de T com relação as bases $\alpha = \{(1, -2), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 3).\}$

(12) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$. Determine

  (a) $[T]^\alpha_\beta$, onde $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 2), (3, 5)\}$.

  (b) $T(v)]_\beta$, onde $v = (1, 1, 0)$

(13) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 2, 3), (0, -1, 1), (0, 0, 2)\}$. Determine $T(v)]_\beta$ sabendo que as coordenadas de v em relação a base canônica do $\mathbb{R}^2$ são $(-1, 2)$.

(14) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F), justificando suas afirmações.

( ) Se a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva então $\dim \operatorname{Nuc} T = m - n$.

( ) Se $\operatorname{Nuc} T$ é gerado por três vetores, então a imagem do operador $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tem dimensão 2.

( ) Não existe transformação linear injetora de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$.

( ) O núcleo de toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3

RESPOSTAS

(1) (a) T não é linear
  (b) T é linear
  (c) T é linear
  (d) T não é linear
  (e) T é linear
  (f) T não é linear
  (g) T é linear

(2) (a) $T(-1,1) = (1,9)$
  (b) $T(x,y) = (y, -5x + 4y)$

(3) (a) $\dim \operatorname{Im} F = 2$.
  (b) $\dim \operatorname{Nuc} F = 2$.

(4) (a) $\dim \operatorname{Im} F = 2$.
  (b) $\dim \operatorname{Nuc} F = 1$.

(5) (a) $\dim \operatorname{Nuc} T = 1$
  (b) $\dim \operatorname{Im} T = 2$
  (c) Nem injetora nem sobrejetora.

(6) $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T^{-1}(x,y,z) = (x - 2y, y, -x + 2y + z)$

(7) (a) $T(x,y) = (x - y, 5y - 3x)$
  (b) $T(7,4) = (3,-1)$

(8) $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T^{-1}(x,y,z) = (-8x - y + 5z, 5x + y - 3z, -2x + z)$

(9) (a) $H \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(H \circ F)(x,y,z) = (x + z, 2y)$
  (b) $H \circ G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $H \circ G(x,y,z) = (x - y, 4z)$
  (c) $H^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h^2(x,y) = (2x, 2y)$

(10) (a) $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
  (b) $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 6 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(11) (a) $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

(12) (a) $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $T\,(v)]_{\beta} = (-7, 3)$

(13) $T\,(v)]_{\beta} = (0, 1, 4)$

(14) V - F - V - F