Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Álgebra Linear III
Professora: Rosiane Soares Cesar

5 ª Lista de Exercícios - Álgebra Linear

(1) Verifique que funções $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas abaixo são produtos internos:

(a) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 4xz$

(b) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz - 3yt$

(c) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 2xz + 3yt$

(d) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz + yt + 1$

(e) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = x^2 z + y^2 t$

(2) Calcule a norma de $(1, -5, 2)$ considerando

(a) O produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\langle (x, y, z), (w, r, t) \rangle = \dfrac{1}{2}xw + yr + 3zt$

(3) Considerando $v, w \in V$, calcule a distância entre v e w, onde

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = 3xa + yb + 2z$, $v = (1, -1, 2)$ e $w = (2, 1, 4)$

(b) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = tr\,(B^t A)$, $v = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $V = C\,[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R};\ \ f\ continua\}$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$, com $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x$.

(4) Mostre que $\left\| \dfrac{v}{\|v\|} \right\| = 1$, $\forall v \in V$.

(5) Sejam V espaço vetorial real com produto interno $\langle\, , \rangle$ e $u, v \in V$ tais que $\|v\| = 3$ e $\|u\| = 5$. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\langle v + ku, v - ku \rangle = 0$$

(6) Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle\, , \rangle$. Prove a seguinte generalização do Teorema de Pitágoras: dados $u, v \in V$ ortogonais, tem-se:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(7) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $u = (1, 3, -4) \in \mathbb{R}^3$. Determine $u^\perp$.

(8) Considere $\mathbb{R}^5$ com o produto interno usual. Seja W o subsepaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $(1, 2, 3, -1, 2)$ e $(2, 4, 7, 2, -1)$, Determine uma base para $W^\perp$.

(9) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno

$$\langle (x, y, z), (w, , t, r) \rangle = 2xw + 3yt + 4zr.$$

Dado o subespaço vetorial de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x - z = 0\}$, detemine $W^{\perp}$.

(10) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Ortonormalize a seguinte base do $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

(11) Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre uma base ortonormal para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 4), (1, 2, -4, -3)$$

(12) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno

$$\langle (x, y, z), (w, t, r) \rangle = xw + 2yt + 3zr$$

Utilize o processo de Gram - Schmidt para transformar a base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ numa base ortogonal.

RESPOSTAS

(1) Apenas (c) é produto interno

(2) (a) $\sqrt{30}$

(b) $\sqrt{\dfrac{75}{2}}$

(3) (a) $\sqrt{15}$

(b) $\sqrt{23}$

(c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

(4) demonstração

(5) $k = \dfrac{3}{5}$ ou $k = -\dfrac{3}{5}$.

(6) demonstração

(7) $u^{\perp} = \{(-3y + 4z, y, z)\, ; \, y, z \in \mathbb{R}\}$

(8) Múltiplas respostas. Por exemplo, $\{(2, -1, 0, 0, 0), (13, 0, -4, 1, 0), (-17, 0, 5, 0, 1)\}$

(9) $\{(-2z, 0, z)\, ; \, z \in \mathbb{R}\}$

(10) $\left\{ \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

(11) $\left\{ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(\dfrac{1}{5\sqrt{2}}, \dfrac{3}{5\sqrt{2}}, -\dfrac{6}{5\sqrt{2}}, \dfrac{2}{5\sqrt{2}} \right) \right\}$

(12) $\left\{ (1, 1, 1), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \right), \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3} \right), 0 \right\}$