Plano de Aula Lógica

Obj 1: Definir a noção de raciocinio lógico e ver que sua validade pode ser provada algoritmicamente e matematicamente.

Obj 2: Comprender os métodos de demonstração.

Raciocínio.

Uma sentença da forma $H \to C$ é dita raciocinio onde $H(P_1, P_2, \dots, P_n)$ e $C(P_1, P_2, \dots, P_n) = C$ são fbf (que dependem das letras $P_1, P_2, \dots, P_n$)

O raciocinio é dito válido se a conclusão C for verdadeira sempre que a hipótese H for verdadeira, e escrevemos $H \Rightarrow C$ ou $H \vdash C$ (Note que o raciocinio é valido quando C for implicação lógica de H)

Exemplo (i) se $H = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)$ e $C = \alpha \to \gamma$ então o raciocinio $H \to C$ é válido. (Aqui as letras são $P_1 = \alpha$, $P_2 = \beta$ e $P_3 = \gamma$)

Prova (V = verdadeiro, F = falso)

Se $H = V$, então $(\alpha \to \beta) = V$ e $(\beta \to \gamma) = V$. Agora se $\underline{\alpha = V}$, então necessariamente $\beta = V$ (e analogamente $\gamma = V$). Assim $C = \alpha \to \gamma = V$.

Por outro lado se $\alpha = F$ então $C = \alpha \to \gamma = V$ $\square$

Observação; Note que embora C é implicação lógica de H ($H \Rightarrow C$) não é verdade que H é logicamente equivalente a C ($H \Leftrightarrow C$), já que C pode ser verdadeira sendo H falsa (Fazer $\alpha = F = \gamma$ e $\beta = V$ e verificar!)

A seguinte proposição mostra a relação entre Lógica (raciocinio válido), matemática (implicação logica $\Rightarrow$) e algoritmos (tautologia).

Proposição: Uma conclusão C é implicação logica de H se e somente se $H \to C$ é uma tautologia, Em particular o raciocinio $H \to C$ é válido se for tautológico.

Analogamente $H \Leftrightarrow C$ se e somente se $H \leftrightarrow C$ é uma tautologia.

Prova.

$\Rightarrow$) Como C é implicação logica de H, então C é verdadeira sempre que H for verdadeira, Logo a fbf $H \to C$ nunca podera ser falsa pois ela é falsa unicamente quando $H = V$ e $C = F$ o qual não acontece. neste caso.

$(\Leftarrow)$ Se $H \to C$ é tautologia, então nunca acontece que $H = V$ e $C = F$ simultaneamente (pois em tal caso $H \to C = F$). Logo, se $H = V$ então $C = V$. Isto é o raciocínio $H \to C$ é válido. A prova do resto da proposisão é um exercício.

Observasão: Note que pela proposisão, podemos provar algoritmicamente a válidade do raciocínio $H \to C$ do exemplo (i) (basta unicamente fazer a tabela da **verdade** de $[(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)] \to (\alpha \to \gamma)$ e ver que é uma tautología).

Fazer tabelas da verdade é algo computacionalmente trabalhoso (pois o número de linhas da tabela crece exponencialmente em relação ao número de letras proposicionais). Por tal motivo o bom uso do Teorema 1 (das regras de inferência) é importante

Teorema 1 (Regras de inferência) Seja V (resp F) uma tautologia (resp contradição) e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fbf.

1) $F \Rightarrow \alpha \Rightarrow V$
2) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$
3) $(\alpha \to \beta) \wedge \alpha \Rightarrow \beta$ (Modus Ponens)
4) $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ (Modus Tollens)
5) $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \Rightarrow \beta$ (Silogismo Disjuntivo)
6) $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Rightarrow (\alpha \to \gamma)$ (Silogismo hipotético)
7) $(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)$ (Dilema construtivo)

A prova do Teorema é um exercicio facil.

As regras de inferência são raciocinios válidos fundamentais, com os quais se prova a validade de raciocinios válidos mais dificeis.

O Silogismo Disjuntivo (SD) pode ser escrito como raciocinio assim:

$h_1: \alpha \vee \beta$
$h_2: \neg\alpha$
$\overline{T: \beta}$

Aqui h_i é a hipotese i-ésima e T é a tese ou conclusão.

O problema 4 da lista de argumentasão pode ser escrito como raciocínio à maneira do silogismo acima ficando assim:

$p \vee \neg r$ Aqui p = Logica é facil
$q \to \neg p$ q = geografia
r r = Artur gosta de Lógica.

(B) $p \wedge \neg q$

O raciocinio pode ser provado (ou alias validado) usando as regras de inferencia assim:

h_1: $p \vee \neg r$
h_2: $q \to \neg p$
h_3: r

$p \vee \neg r = \neg r \vee p$
$\neg(\neg p) = p$ } intuitivamente

C_1: p (SD h_1, h_3)
C_2: $\neg q$ (MT h_2, C_1)
(B): $p \wedge \neg q$ (conj C_1, C_2)

Os Teoremas a seguir mostram que a intuição aplicada acima pode ser tratata matematicamente

Teorema 2 (Estrutura de Álgebra booleana)
Sejam α, β, γ fbf e F e V uma contradição e tautologia respectivamente. Então

(B1) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$; $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (Associativa)
(B2) $\alpha \vee F \Leftrightarrow F$; $\alpha \wedge V \Leftrightarrow \alpha$ (Elemento Neutro)
(B3) $\alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow V$; $\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow F$ (Principios PETT e PNC)
(B4) $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$; $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$ (Comutativa)
(B5) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$; $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (distributiva)

Teorema 3 (Equivalencias Lógicas principais)

1) $\neg(\neg\alpha) \Leftrightarrow \alpha$; $\alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$ e $\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$ (propriedade booleana)
2) $(\alpha \to \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$ (Forma Disjuntiva do Condicional)
3) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ (Forma Conjuntiva do bicondicional)
4) $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$; $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ (Leis de De Morgan)
5) $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ (Fortalecimento da hipótese)
6) $\alpha \to \beta \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \to F$ (Redução ao Absurdo)
7) $\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\beta \to \neg\alpha$ (Contrapositiva)
8) $(\alpha \to \beta) \wedge [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \wedge \alpha \to \gamma$. (Principio de demonstração direta)

As provas dos teoremas se deixam como exercicio. Informamos que Teorema de Estrutura de Algebra booleana é poderoso. e completo, pois todas as equivalencias logicas podem ser provadas por meio dele se aceitamos como válidas a Forma disjuntiva do Condicional (FDC) e a Forma conjuntiva do bicondicional. Por exemplo, o princípio de demonstração direta pode ser provado assim:

$$(\alpha \to \beta) \wedge [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \underset{FDC}{\Longleftrightarrow} (\neg\alpha \vee \beta) \wedge [\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma] \underset{LDM}{\Longleftrightarrow} (\neg\alpha \vee \beta) \wedge [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma]$$

$$\underset{(B5)}{\Longleftrightarrow} (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee [(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \gamma]$$

$$\underset{(B5)}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \vee [(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \gamma] \underset{(B3)}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \vee F \vee [(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \gamma]$$

$$\underset{(B2)}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \vee [(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \gamma] \underset{(B5)}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \vee (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$$

$$\underset{(B1)}{\Longleftrightarrow} (\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$$

$$\underset{(PB)}{\Longleftrightarrow} (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma) \underset{(FDC)}{\Longleftrightarrow} (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \quad \square$$

Observe-se que na prova do item 8) do Teorema 3 apresentada acima usamos a propriedade booleana PB (que é o item 1) do mesmo Teorema) e as Leis de De Morgan LDM (item 4). Mas, ambas PB e LDM podem ser provadas usando unicamente o Teorema 2 (de Estrutura de Algebra booleana). e isso é um ótimo exercicio para os iniciantes. Alem disso, veja também que $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \Leftrightarrow \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$.

Métodos de Demonstração (Direta, Fortalecimento da hipótese e Redução ao Absurdo)

Vamos resolver o exercicio 1(r) da pagina 11 da Apostila de Lógica da professora C. Waga de três formas diferentes usando em cada uma delas os metodos de demonstração.

1) Verifique a validade do argumento apresentando demonstrações

(r) $\{\alpha \to \beta, \neg\gamma \to (\delta \to \varphi), \gamma \vee (\alpha \vee \delta), \neg\gamma\} \vdash \beta \vee \varphi$

Hipóteses $H = \alpha \to \beta \wedge (\neg\gamma \to (\delta \to \varphi)) \wedge (\gamma \vee (\alpha \vee \delta)) \wedge \neg\gamma$

Tese $T = \beta \vee \varphi$.

I) <u>Demonstração</u> <u>Direta</u>.

Devemos concluir a tese tal como se encontra à maneira como foi feito com o exercicio 4 da lista de argumentação. Devemos então provar $H \to \underbrace{(\beta \vee \varphi)}_{T}$.

$h_1: \alpha \to \beta$
$h_2: \neg\gamma \to (\delta \to \varphi)$
$h_3: \gamma \vee (\alpha \vee \delta)$
$h_4: \neg\gamma$

$C_1: \delta \to \varphi$ (MP h_2, h_4)
$C_2: \alpha \vee \delta$ (SD h_3, h_4)
$\mathbf{T}: \beta \vee \varphi$ (DC h_1, C_1, C_2)

II) Fortalecimento da hipotése.

Como $\beta \vee \varphi \underset{PB}{\Leftrightarrow} \neg(\neg\beta) \vee \varphi \underset{FDC}{\Leftrightarrow} \neg\beta \to \varphi$, então

$H \to T \Leftrightarrow H \to (\neg\beta \to \varphi) \underset{FH}{\Leftrightarrow} (H \wedge \neg\beta) \to \varphi$ (Usamos o Teorema 3 item 5!)

Então provar o raciocinio $H \to T$ é equivalente a provar o raciocinio $(H \wedge \neg\beta) \to \varphi$ sendo que nele temos

Hipotese Fortaleícida $\underbrace{H}_{\text{hipoteses antigas}} \wedge \underbrace{\neg\beta}_{\text{hipotese adicional}}$ (Pois temos $\neg\beta$ como hipotese adicional)

Tese nova ou conclusão $C = \varphi$. (a tese antiga era $T = \beta \vee \varphi$)

$h_1: \alpha \to \beta$
$h_2: \neg\gamma \to (\delta \to \varphi)$
$h_3: \gamma \vee (\alpha \vee \delta)$
$h_4: \neg\gamma$
$h_5: \neg\beta$

$\left.\begin{array}{l} C_1: \delta \to \varphi \\ C_2: \alpha \vee \delta \end{array}\right\}$ conclusões obtidas igual do que no método direto

$\left.\begin{array}{ll} C_3: \neg\alpha & (MT\ h_1, h_5) \\ C_4: \delta & (SD\ C_2, C_3) \\ C: \varphi & (MP.\ C_1, C_4) \end{array}\right\}$ Note que chegamos a nossa conclusão de maneira "mais simples" pois não usamos o "complicado" Dilema Construtivo.

III) Redução ao Absurdo

$H \to \overbrace{(\beta \vee \varphi)}^{T} \underset{RA}{\Leftrightarrow} H \wedge \neg(\beta \vee \varphi) \to F \underset{LDM}{\Leftrightarrow} H \wedge \neg\beta \wedge \neg\varphi \to F.$

Devemos provar então o raciocinio $H \wedge \neg\beta \wedge \neg\varphi \to F$ no qual ganhamos duas hipóteses ($\neg\beta$ e $\neg\varphi$) mas, nossa conclusão deve ser a contradição F.

Veja que concluimos de maneira muito parecida com o fortalecimento da hipotése, so que no Final usamos o Teorema 2, item (B 3).

$h_1: \alpha \to \beta$
$h_2: \neg\gamma \to (\delta \to \varphi)$
$h_3: \gamma \vee (\alpha \vee \delta)$
$h_4: \neg\gamma$
$\left.\begin{array}{l} h_5: \neg\beta \\ h_6: \neg\varphi \end{array}\right\}$ duas hipoteses adicionais

---

$C_1: \delta \to \varphi$
$C_2: \alpha \vee \delta$
$C_3: \neg\alpha$
$C_4: \delta$
$C_5: \neg\delta$ (MT h_6, C_1)
$C_6: \delta \wedge \neg\delta \Leftrightarrow F.$

Sugerimos fazer todos os exercícios da apostila.