



Matemática Discreta

Lista 2

Prof. Americo Barbosa da Cunha Junior

americo@ime.uerj.br

ATENÇÃO: A solução de cada questão deve ser desenvolvida de maneira clara e objetiva. Não basta fazer contas, o raciocínio deve ser explicado através de um texto coerente. Em outras palavras, mais importante que encontrar a resposta correta é explicar como você chegou nessa resposta.

Exercício 1

Expandir as seguintes somas:

1. $\sum_{i=1}^6 2i$

3. $\sum_{i=3}^7 5$

5. $\sum_{i=5}^{10} (3i + 2)$

2. $\sum_{i=0}^6 x^i$

4. $\sum_{j=2}^6 \frac{j(j-1)(j-2)}{6}$

6. $\sum_{i=3}^3 \frac{3i^2}{i+1}$

Exercício 2

Escreva as expressões que seguem, usando a notação somatório.

1. $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

3. $7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42$

2. $-1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36$

4. $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7}$

Exercício 3

Avalie a soma $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})$, onde $a_0 = 0$.

Exercício 4

Prove que:

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercício 5

Determine o valor da soma $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercício 6

Calcule a soma dos quadrados dos n primeiros números ímpares positivos.

Exercício 7

Calcule $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$.

Exercício 8

Expandir os seguintes produtos:

1. $\prod_{j=2}^n (3j+7)$

3. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

2. $\prod_{k=1}^4 (k^3 - 7k + 3)$

4. $\prod_{k=1}^3 6k^2$

Exercício 9

Desenvolva e simplifique as seguintes expressões:

1. $\frac{\prod_{j=0}^n (j+1)}{\sum_{k=1}^n k}$

2. $\frac{\prod_{j=1}^n j}{\prod_{i=p+1}^{n-1} i \cdot \prod_{k=1}^p k}$

Exercício 10

Escreva as expressões que seguem usando a notação produtória.

1. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$

3. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7}$

2. $p \times (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n)$

4. $x^2 \times x^4 \times x^6 \times x^8 \times x^{10}$

Exercício 11

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

$$1. \prod_{j=1}^5 j^3 = (5!)^3$$

$$3. \prod_{j=2}^7 3j = 3^6 \times 7!$$

$$2. \frac{\prod_{i=1}^n j}{\prod_{k=1}^p k} = \prod_{i=1}^{n-p} (p+i), n > p$$

$$4. \prod_{n=1}^4 \left(\sum_{k=1}^n k \right) = 180$$

Exercício 12

Determine o valor das expressões abaixo:

$$1. \prod_{j=1}^n x^i$$

$$3. \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2} \right)$$

$$5. \prod_{j=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1}}$$

$$2. \prod_{j=1}^n x^{i(i+1)}$$

$$4. \prod_{j=1}^n \frac{i}{i+1}$$

$$6. \prod_{j=1}^n x^{i^3}$$

Exercício 13

Simplifique e calcule o valor das expressões:

$$1. \prod_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 j(j+1) \right)$$

$$2. \prod_{j=1}^n x^{i(i+1)}$$

$$3. \frac{\prod_{k=1}^{n+1} k}{\left(\prod_{m=1}^j m \right) \cdot \left(\prod_{i=j-1}^{n-1} (n-i) \right)}$$

Exercício 14

Determine o valor de $\prod_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n k \right)$.

Exercícios do Capítulo 2 da Referência [1]:

- | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|
| • 1 | • 11 | • 19 | • 23 | • 28 | • 32 |
| • 3 | • 13 | • 20 | • 24 | • 29 | • 35 |
| • 4 | • 14 | • 21 | • 25 | • 30 | |
| • 5 | • 15 | • 22 | • 26 | • 31 | • 36 |

Gabarito da Lista 2

ATENÇÃO: As repostas e soluções apresentadas a seguir são para auxiliar na resolução desta lista, mas não estão isentas de possíveis erros de digitação ou mesmo de desenvolvimento. Use o gabarito com cautela, exercitando sempre o seu senso crítico. Se encontrar algum erro, por favor, reporte ao professor.

Resposta do Exercício 1

Expandindo as somas obtemos:

1. $2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6$

4. $\frac{2 \times 1 \times 0}{6} + \frac{3 \times 2 \times 1}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{6 \times 5 \times 4}{6}$

2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

5. $17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32$

3. 5×5

6. $\frac{27}{4}$

Resposta do Exercício 2

Contraindo as somas através da notação somatório obtemos:

• $\sum_{k=1}^5 (2k - 1)$

• $\sum_{n=1}^6 7n$

• $\sum_{k=1}^6 (-1)^k k^2$

• $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n(n+2)}$

Resposta do Exercício 3

Temos que $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n$.

Resposta do Exercício 4

1. Defina $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$ e mostre que $a_k - a_{k-1} = k$.

2. Defina $a_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ e mostre que $a_k - a_{k-1} = k(k+1)$.

Resposta do Exercício 5

Sabemos que $a_k - a_{k-1} = k(k+1)$ e que $k^2 = k(k+1) - k$.

Dessa forma concluímos que $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Resposta do Exercício 6

Temos que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Resposta do Exercício 7

Temos que $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$.

Resposta do Exercício 8

Desenvolvendo os produtos obtemos:

$$1. 13 \times 16 \times 19 \times 22 \times \cdots \times (3n + 7)$$

$$2. (-3) \times (-3) \times 9 \times 39$$

$$3. (1 + 1) \times (1 + \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{1}{8}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{n^2})$$

$$4. 6^3 \times 4 \times 9$$

Resposta do Exercício 9

Desenvolvendo e simplificando as expressões concluímos que:

$$1. \frac{\prod_{j=0}^n (j+1)}{\sum_{k=1}^n k} = 2(n-1)!$$

$$2. \frac{\prod_{j=1}^n j}{\prod_{i=p+1}^{n-1} i \cdot \prod_{k=1}^p k} = n$$

Resposta do Exercício 10

Contraindo os produtos através da notação produtório obtemos:

$$1. \prod_{j=1}^5 (2j-1)$$

$$3. \prod_{j=1}^6 \frac{j}{j+1}$$

$$2. \prod_{j=0}^n (p+j)$$

$$4. \prod_{j=1}^5 x^{2j}$$

Resposta do Exercício 11

As afirmações são:

1. Verdadeira

3. Verdadeira

2. Verdadeira

4. Verdadeira

Resposta do Exercício 12

Os valores são:

$$1. \prod_{j=1}^n x^j = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$4. \prod_{j=1}^n \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$2. \prod_{j=1}^n x^{i(i+1)} = x^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$5. \prod_{j=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1}} = \frac{x_n}{x_0}$$

$$3. \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$6. \prod_{j=1}^n x^{i^3} = x^{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Resposta do Exercício 13

Simplificando e calculando obtemos:

1. $\prod_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 j(j+1) \right) = (4 \times 5)^3$
2. $\prod_{j=1}^n x^{i(i+1)} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!}$
3. $\frac{\prod_{k=1}^{n+1} k}{\left(\prod_{m=1}^j m \right) \cdot \left(\prod_{i=j-1}^{n-1} (n-i) \right)} = \frac{(n+1)!}{j!(n-j+1)!}$

Resposta do Exercício 14

Temos que $\prod_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n k \right) = \frac{6! 5!}{2^5} = 2700$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 2 da Referência [1]:

Estão disponíveis no apêndice A de [1].

Créditos pelos Exercícios: Os exercícios 1 até 14 foram adaptados das listas do Prof. Augusto Cesar de Castro Barbosa (UERJ). Os demais exercícios indicados são da referência [1].

Referências

- [1] R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, **Matemática Concreta, Fundamentos para Ciência da Computação**, LTC, 2ª edição, 1995