Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Análise Matemática

Lista de Exercícios - Sequências

Professor João Caminada

24 de fevereiro de 2021

1. Determine o termo geral da sequência

   1.1. $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$

   1.2. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

   1.3. $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots$

2. Determine se a sequência é convergente ou divergente, calculando seu limite no caso convergente.

   2.1. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

   2.2. $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

   2.3. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$

   2.4. $a_n = (4 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$

   2.5. $c_k = \frac{\sqrt{k}+1}{k-1}$, $k \geq 2$

   2.6. $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

   2.7. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   2.8. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

   2.9. $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

   2.10. $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

   2.11. $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$

   2.12. $b_n = \operatorname{sen}(n\pi)$; $c_n = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$

   2.13. $a_n = \frac{2n+\operatorname{sen} n}{5n+1}$

   2.14. $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$

   2.15. $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

   2.16. $a_n = \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$

   2.17. $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$

   2.18. $a_n = (\frac{n+2}{n+1})^n$

   2.19. $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

   2.20. $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$

   2.21. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

   2.22. $a_n = n - n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

   2.23. $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

   2.24. $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, onde $0 < a < b$

   2.25. $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n})$

   2.26. $a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$

   2.27. $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$

   2.28. $a_n = \sqrt[n]{n}$

   2.29. $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   2.30. $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}$, $a > 0$

   2.31. $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$

2.32. $a_n = (\frac{n-1}{n})^n$

2.33. $a_n = (\frac{n+1}{n})^{n^2}$

2.34. $a_n = (\frac{n+1}{n})^{\sqrt{n}}$

2.35. $a_n = (\frac{3n+5}{5n+1})^n$

2.36. $a_n = (\frac{3n+5}{5n+1})^n(\frac{5}{3})^n$

2.37. $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$

3. Siga os passos abaixo para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

   (a) Mostre que
   $$\log\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}\right)$$

   (b) Mostre que
   $$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \int_0^1 \log x\; dx = -1$$
   [Dica: Soma de Riemann!]

   (c) Mostre que
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

   (d) Mostre que
   $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty.$$

4. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Se forem verdadeiras demonstre, se forem falsas dê um contra-exemplo:

   (a) Se $a_n \to a$, então $|a_n| \to |a|$.

   (b) Se $|a_n| \to |a|$, então $a_n \to a$.

   (c) Se $|a_n| \to 0$, então $a_n \to 0$.

   (d) Se $a_n \to 0$, então $a_n \cdot b_n \to 0$.

   (e) Se $a_n \cdot b_n \to 0$, então $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$.

   (f) Se $c \cdot a_n$ converge e $c \neq 0$, então a_n converge.

   (g) Se $a_n + b_n$ converge, então a_n converge e b_n converge.

   (h) Se $\lim_{x\to\infty} f(x)$ não existe, então $a_n = f(n)$ não converge.

   (i) Se a_n é uma sequência crescente limitada superiormente, então a_n é limitada.

   (j) Se a_n é uma sequência decrescente limitada inferiormente, então a_n é limitada.

5. Considere a sequência definida recursivamente por
   $$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}\; n = 2, 3, 4, \dots\ .$$

   (a) Mostre que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

   (b) Mostre que a sequência é convergente.

   (c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. Considere a sequência definida recursivamente por
   $$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\; n = 2, 3, 4, \dots\ .$$

   (a) Mostre que a sequência é crescente e limitada superiormente por 3.

   (b) Mostre que a sequência é convergente.

   (c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

7. Considere a sequência definida recursivamente por

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \; n = 2, 3, 4, \dots \,.$$

   (a) Mostre que a sequência é crescente e limitada superiormente por 3.
   (b) Mostre que a sequência é convergente.
   (c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

8. Considere a sequência definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \; n = 2, 3, 4, \dots \,.$$

   (a) Mostre que a sequência é decrescente e limitada inferiormente por 0.
   (b) Mostre que a sequência é convergente.
   (c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

9. Estude a convergência da sequência

$$a_n = \frac{n^2}{n!}.$$

   Generalize para a sequência

$$a_n = \frac{n^k}{n!},$$

   com $k \in \mathbb{N}$.

10. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n},$$

   onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.

   (a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.
   (b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
   (c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Interprete este resultado.
   (d) Agora assuma que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, então, $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que se $a < b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$. Interprete este resultado.
   (e) O que ocorre se $p_0 = b - a$.