GA - Retas no espaço euclidiano tridimensional

Prof. Fernando Carneiro, IME-UERJ

Rio de Janeiro, Março de 2014

Conteúdo

1 O que é reta

Do ponto de vista da geometria analítica, ao usar vetores para estudar objetos como retas e planos, dados um ponto A e um vetor $\vec{u}$, uma reta é o conjunto de pontos que alcançamos partindo do ponto A e percorrendo um múltiplo do vetor $\vec{u}$. Este vetor $\vec{u}$ será chamado de vetor diretor da reta.

Oberve que o vetor diretor não é único, poderíamos percorrer a reta usando qualquer vetor múltiplo de $\vec{u}$ e teríamos a mesma reta.

Dados dois pontos A e B diferentes, existe portanto uma reta que contém esses dois pontos. Para chegar de A a B basta percorrer o vetor $\vec{AB}$. Portanto a reta que contém A e B é a que passa por A e tem vetor diretor $\vec{AB}$.

2 Equação paramétrica de uma reta

Se para uma reta r qualquer conhecemos um ponto $A(x_0, y_0, z_0) \in r$ e o vetor diretor da reta r, $\vec{u} = (a, b, c)$ então para todo t número real:

$$B(x, y, z) \in r \Leftrightarrow B = A + t\vec{u} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Portanto a equação da reta r na forma paramétrica é:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Se, ao contrário, partimos da equação da reta na forma paramétrica a maneira de recuperar o vetor diretor é olhar os valores que multiplicam o parâmetro t, pois eles são as coordenadas do vetor diretor.

2.1 Exemplos

Exemplo 2.1. Dado o ponto $A(1, 0, 2)$ e o vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$ a forma paramétrica da reta r que passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ é:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Exemplo 2.2. O vetor diretor da reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

é $\vec{u} = (3, -1, 1)$, já que 3 multiplica o parâmetro na equação que envolve a primeira coordenada, -1 multiplica o parâmetro na equação que envolve a segunda coordenada, 1 multiplica o parâmetro na equação que envolve a terceira coordenada.

3 Equação simétrica de uma reta

Dada uma reta r que passa por $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $\vec{u} = (a, b, c)$, jà sabemos que a equação na forma paramétrica é:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t notando o seguinte:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a} \\ t = \dfrac{y - y_0}{b} \\ t = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

Igualando as três linhas acima, temos então a equação da reta r na forma simétrica:

$$r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Note que é necessário que as coordenadas do vetor diretor da reta sejam todas não-nulas.

Agora, se partimos da equação na forma simétrica, a maneira de recuperar o vetor diretor da reta r é através dos denominadores das frações que aparecem na forma simétrica da equação de r.

3.1 Exemplos

Exemplo 3.1. A equação na forma simétrica da reta que passa por $A(1, 0, -1)$ e tem vetor diretor $\vec{u} = (2, 3, 4)$ é

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{4}.$$

Exemplo 3.2. O vetor diretor da reta

$$r : \frac{x + 1}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 1}{-4}$$

é $\vec{u} = (3, 2, -4)$. Os pontos $B(1, 3, 5)$ e $C(5, 2, -9)$ pertecem à reta r? Para B temos

$$\frac{x+1}{3} = \frac{2}{3}, \frac{y+2}{2} = \frac{5}{2}, \frac{z+1}{-4} = \frac{-3}{2},$$

e estes números não são iguais, logo $B \notin r$. Para C temos

$$\frac{x+1}{3} = \frac{6}{3} = 2, \frac{y+2}{2} = \frac{4}{2} = 2, \frac{z+1}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2,$$

e estes números são iguais, logo $C \in r$.

4 Equação reduzida de uma reta

A forma reduzida da equação da reta é também uma maneira de eliminar o parâmetro t da equação da reta, de forma que tenhamos somente as relações entre as coordenadas dos pontos pertencentes à reta.

Na forma reduzida usamos uma das coordenadas no espaço - x, y ou z - como parâmetro. Se a equação da reta r na forma paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

e se a primeira coordenada do vetor diretor é diferente de zero, isto é, $a \neq 0$, então

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a} \\ y = y_0 + b\left(\dfrac{x - x_0}{a}\right) \\ z = z_0 + c\left(\dfrac{x - x_0}{a}\right) \end{cases}$$

Portanto os pontos da reta são definidos pela equação

$$r : \begin{cases} y = y_0 + b\left(\dfrac{x - x_0}{a}\right) \\ z = z_0 + c\left(\dfrac{x - x_0}{a}\right) \end{cases}$$

ou

$$r : \begin{cases} y = \left(y_0 - \dfrac{bx_0}{a}\right) + \dfrac{b}{a}x \\ z = \left(z_0 - \dfrac{cx_0}{a}\right) + \dfrac{c}{a}x \end{cases}$$

Portanto a forma reduzida da equação de uma reta cujo vetor diretor tem primeira coordenada não-nula é

$$r : \begin{cases} y = m + nx \\ z = p + qx \end{cases}$$

Esta forma acima é chamada de forma reduzida da equação da reta com relação à primeira coordenada. A maneira de recuperar o vetor diretor a partir da equação reduzida c.r.a.p.c é notar que para $x = 0$ temos $A(0, m, p) \in r$ e para $x = 1$ temos $B(1, m + n, p + q) \in r$. Portando, A e B pertencem a r e o vetor

$$\vec{AB} = B - A = (1, n, q)$$

é vetor diretor da reta.

Se a segunda coordenada do vetor diretor é não-nula, então a forma reduzida da equação da reta com relação à segunda coordenada é

$$r : \begin{cases} x = m + ny \\ z = p + qy \end{cases}$$

A maneira de recuperar o vetor diretor a partir da equação reduzida c.r.a.s.c é notar que para $y = 0$ temos $A(m, 0, p) \in r$ e para $y = 1$ temos $B(m + n, 1, p + q) \in r$. Portando, A e B pertencem a r e o vetor

$$\vec{AB} = B - A = (n, 1, q)$$

é vetor diretor da reta.

Se a terceira coordenada do vetor diretor é não-nula, então a forma reduzida da equação da reta com relação à terceira coordenada é

$$r : \begin{cases} x = m + nz \\ y = p + qz \end{cases}$$

A maneira de recuperar o vetor diretor a partir da equação reduzida c.r.a.t.c é notar que para $z = 0$ temos $A(m, p, 0) \in r$ e para $z = 1$ temos $B(m + n, p + q, 1) \in r$. Portando, A e B pertencem a r e o vetor

$$\vec{AB} = B - A = (n, q, 1)$$

é vetor diretor da reta.

4.1 Exemplos

Exemplo 4.1. A equação na forma reduzida c.r.a.p.c. da reta que passa pelo ponto $A(1, 0, 2)$ e tem vetor diretor $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ pode ser obtida a partir da forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$$

que implica que

$$r : \begin{cases} t = 1 - x, \\ y = 2(1 - x), \\ z = 2 + 3(1 - x), \end{cases}$$

e portanto

$$r : \begin{cases} y = 2 - 2x, \\ z = 5 - 3x. \end{cases}$$

O ponto $B(2, 3, 4)$ pertence à reta? Para saber precisamos somente substituir x pelo valor da primeira coordenada de B na equação da reta na forma reduzida

$$r : \begin{cases} y = 2 - 2x = 2 - 4 = -2 \neq 3, \\ z = 5 - 3x = 5 - 12 = -7 \neq 4. \end{cases}$$

Portanto, $B \notin r$.

Exemplo 4.2. Para recuperar o vetor diretor da reta

$$r : \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ z = 4 - y. \end{cases}$$

primeiro notamos que a equação é reduzida c.r.a.s.c., e portanto podemos escolher o vetor com segunda coordenada 1 e primeira coordenada -2, pois este número multiplica o parâmetro y na equação de x e terceira coordenada -1 pois este número multiplica o parâmetro y na equação de z. Logo, o vetor diretor é $\vec{u} = (-2, 1, -1)$.

5 Relações entre duas retas

Falaremos agora da posição relativa entre duas retas no espaço tridimensional. Mais especificamente, se temos as equações de duas retas, queremos ser capazes de dizer a posição relativa de uma em relação à outra.

A posição relativa sempre envolve as três relações seguintes:

1. ângulo,

2. distância,

3. interseção.

No caso de duas reta r_1 e r_2 temos três posições relativas:

1. paralelas, formando ângulo de 0^o,

2. concorrentes, formando ângulo diferente de 0^o e com um ponto de interseção,

3. reversas, formando ângulo diferente de 0^o e com interseção o conjunto vazio - sem interseção.

6 Ângulo entre duas retas

Se temos as retas r_1 e r_2 então o ângulo entre as duas retas é o menor ângulo entre vetores diretores de r_1 e r_2. Logo, o ângulo está entre 0^o e

90^o. Também se r_1 e r_2 têm $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores diretores, o ângulo θ entre as duas retas é aquele cujo cosseno satisfaz a seguinte fórmula:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Exemplo 6.1. Se temos as retas

$$r_1 : \begin{cases} y = -2x + 2, \\ z = 2x - 3, \end{cases} r_2 : \begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = -4t + 4, \\ z = 5t + 1, \end{cases}$$

os vetores diretores são

$$\vec{u} = (1, -2, 2), \vec{v} = (-3, -4, 5)$$

e portanto o ângulo entre elas é

$$\cos\theta = \frac{|(1, -2, 2) \cdot (-3, -4, 5)|}{\sqrt{1 + 4 + 4}\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{|-3 + 8 + 10|}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6.1 Paralelismo entre duas retas

Se r_1 e r_2 são retas paralelas então o ângulo entre elas é 0^o. Mas há uma maneira melhor de testar o paralelismo. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são respectivamente os vetores diretores de r_1 e r_2 então as retas são paralelas se

1. ou $\vec{u} \parallel \vec{v}$,
2. ou $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$,
3. ou $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Se as coordenadas dos dois vetores são $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (a', b', c')$ e $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Exemplo 6.2.

$$r_1 : \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z}{4}, r_2 : \begin{cases} y = 2x + 3, \\ z = 2x + 4. \end{cases}$$

Neste caso o vetor diretor de r_1 é $\vec{v}_1 = (2, 4, 4)$ e o de r_2 é $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$ e ambos têm coordenadas proporcionais:

$$\frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}.$$

6.2 Retas ortogonais

Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais se o ângulo entre elas é de 90^o. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os vetores diretores de r_1 e r_2 então são ortogonais se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemplo 6.3. Sejam as retas r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1, \\ z = t - 1, \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -2t + 3, \\ z = 2t + 2, \end{cases}$$

Seus respectivos vetores diretores são, portanto

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, -2, 2)$$

e como o produto escalar entre eles é zero

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1, 2, 1) \cdot (2, -2, 2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

então as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

7 Interseção entre duas retas

Se conhecemos as equações das retas r_1 e r_2 conseguimos achar a interseção entre as duas: são os pontos cujas coordenadas satisfazem as equações de ambas as retas.

A interseção pode ser de três tipos:

1. uma reta, no caso em que as duas retas são iguais;

2. um ponto;

3. o conjunto vazio, quando não se intersectam.

Exemplo 7.1. No primeiro exemplo temos

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{4}, r_2 : \begin{cases} y = 2x + 1, \\ z = 2x - 2. \end{cases}$$

A interseção entre r_1 e r_2 consiste nos pontos cujas coordenadas satisfazem as equações de ambas as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{(2x+1)+1}{-1} \Rightarrow x-1 = 2(-2x-2) \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{(2x-2)}{4} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 0 = 0.$$

Logo, as retas são concorrentes e o ponto de interseção é

$$P = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{16}{5}).$$

Exemplo 7.2.

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}, r_2 : \begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t+1, \\ z = 3t-1. \end{cases}$$

Para acharmos a interseção neste caso substituímos as equações de r_2 nas de r_1:

$$\frac{(2t+1)-1}{2} = \frac{(t+1)+1}{1} = \frac{3t-1}{2} \Rightarrow t = t+2 = \frac{3t-1}{2} \Rightarrow 0 = 2,$$

o que é uma contradição, logo as retas não têm interseção.

8 Posição relativa entre duas retas

A posição relativa entre duas retas pode ser uma das três opções a seguir:

1. paralelas, quando têm a mesma direção, caso do exemplo **??**;
2. concorrentes, quando não têm a mesma direção e a interseção é um ponto, caso do exemplo **??**;
3. reversas, quando não têm a mesma direção e a interseção é vazia, ou seja, quando não têm a mesma direção e não se intersectam, caso do exemplo **??**.

9 Retas coplanares

Duas retas r_1 e r_2 podem ser coplanares, isto é, existe um plano no espaço tridimensional que as contém, ou não-coplanares:

1. são coplanares se forem concorrentes ou paralelas;
2. são não-coplanares se forem reversas.

Se r_1 passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ e r_2 passa por B e tem vetor diretor $\vec{v}$ então o seguinte critério de coplanaridade vale:

1. se
$$(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$
então são coplanares;
2. se
$$(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$$
então são não-coplanares ou reversas;

Exemplo 9.1. Se voltamos ao exemplo **??** temos $\vec{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$, o ponto $A(1, -1, 0)$ pertence a r_1 e $B(0, 1, -2)$ pertence a r_2. Logo

$$(\vec{AB}, \vec{v}_1.\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -1(-2-8)-2(4-4)-2(4+1) = 10-10 = 0.$$

Logo as retas são coplanares. Já sabíamos disso porque eram concorrentes.

Exemplo 9.2. Se voltamos ao exemplo **??** temos $\vec{v}_1 = (2, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 3)$, o ponto $A(1, -1, 0)$ pertence a r_1 e $B(1, 1, -1)$ pertence a r_2. Logo

$$(\vec{AB}, \vec{v}_1.\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 0(3-2) - 2(6-4) - 1(2-2) = -4 \neq 0.$$

Logo, as retas não são coplanares. Já sabíamos disso porque eram reversas.

9.1 Reta ortogonal e concorrente a outra reta

Dada uma reta r que passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ e dado um ponto B que não pertence à reta r existe somente uma reta que passa por B, é ortogonal a r e é também concorrente a r.

Se sabemos que B passa por essa reta ortogonal e concorrente a r, então falta somente saber o vetor diretor desta reta, que chamamos de $\vec{v}$.

Uma maneira de achar é pegar um ponto C que pertence a r e é diferente de A: poderia ser $C = A + \vec{u}$; e achar o vetor altura do triângulo ABC relativo ao vértice B:

$$\vec{v} = \vec{AB} - proj_{\vec{AC}}(\vec{AB}) = \vec{AB} - proj_{\vec{u}}(\vec{AB}).$$

Ou poderíamos notar que o vetor diretor da reta ortogonal e concorrente a r é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{AB} \times \vec{u}$. Logo, ele deve ser:

$$\vec{v} = \vec{u} \times (\vec{AB} \times \vec{u}).$$

As duas maneiras são válidas pela seguinte razão:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w},$$

e portanto, se $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{w} = \vec{u}$ temos

$$\vec{u} \times (\vec{AB} \times \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{AB} - (\vec{u} \cdot \vec{AB})\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{AB} - (\frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\vec{u} \cdot \vec{u}})\vec{u}) =$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{AB} - proj_{\vec{u}}\vec{AB}).$$

Logo, ambas as fórmulas nos devolvem vetores múltiplos um do outro, ou seja, com a mesma direção.

Exemplo 9.3. Escreva na forma paramétrica a equação da reta r_2 que passa por B(0,0,4) e é ortogonal a

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

Neste caso temos

$$\vec{AB} = B - A = (0, 0, 4) - (-1, 1, 3) = (1, -1, 1), \vec{u} = (1, 1, 2),$$

e portanto

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (-3, -1, 2),$$

$$\vec{u} \times (\vec{AB} \times \vec{u}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (4, -8, 2).$$

Logo, a equação de r_2 na forma paramétrica é:

$$r_2 : \begin{cases} x = 4t, \\ y = -8t, \\ z = 2t + 4. \end{cases}$$

Poderíamos encontrar o vetor diretor de r_2 usando o método que envolve a projeção:

$$\vec{v} = \vec{AB} - proj_{\vec{u}}(\vec{AB}) = (1, -1, 1) - (\frac{(1, -1, 1) \cdot (1, 1, 2)}{(1, 1, 2) \cdot (1, 1, 2)})(1, 1, 2) =$$

$$= (1, -1, 1) - \frac{2}{6}(1, 1, 2) = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}(4, -8, 2).$$

10 Produto misto, distância e posição relativa

Definição 10.1. A distância entre duas retas é a menor distância entre um ponto pertencente a uma e outro ponto pertencente à outra.

Com esta definição podemos dizer que

1. se as retas são concorrentes a distância é zero;
2. se as retas são reversas a distância é diferente de zero;

3. se as retas são paralelas e iguais a distância é zero;
4. se as retas são paralelas distintas a distância é diferente de zero.

Podemos dividir o cálculo da distância em dois casos: retas paralelas e retas não-paralelas.

10.1 Distância entre retas paralelas

Se r_1 passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ e r_2 passa por B e tem vetor diretor $\vec{v}$, as duas são paralelas se e só se $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$. Podemos separar os dois vetores $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ e construir o paralelogramo gerado por eles. É fácil ver que a distância entre r_1 e r_2 é a altura desse paralelogramo relativa à base dada por $\vec{u}$. Logo,

$$d(r_1, r_2) = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Poderíamos usar também o vetor diretor de r_2, pois ele é múltiplo de $\vec{u}$:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Observação 10.2. Note que a fórmula vale para o caso de retas paralelas iguais pois o produto vetorial vira o vetor nulo, já que se A e B pertencem a r_1 então $\vec{AB}$ é múltiplo de $\vec{u}$, e a distância é zero.

10.2 Distância entre retas não-paralelas

Se r_1 passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ e r_2 passa por B e tem vetor diretor $\vec{v}$ e se as retas são não-paralelas então os representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que começam no ponto A geram um paralelogramo. Podemos usar o vetor $\vec{AB}$ para gerar um paralelepípedo gerado por $\vec{AB}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, caso o ponto B não esteja no plano que contém o paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A distância entre as duas retas será a altura do paralelepípedo relativa à base gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo:

$$d(r_1, r_2) = \frac{\text{Volume}}{\text{Área da base}} = \frac{|(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

Observação 10.3. Note que a fórmula vale para o caso de retas concorrentes já que a distância é zero e o produto misto idem.

10.3 Esquema

Se r_1 passa por A e tem vetor diretor $\vec{u}$ e r_2 passa por B e tem vetor diretor $\vec{v}$ podemos montar o seguinte esquema para analisar a distância e a posição relativa:

1. Primeiro calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$;
2. se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ então as retas são paralelas e a distância é
$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$
3. se $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ então as retas são não-paralelas e a distância é
$$\frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$
4. se a distância do item anterior for zero, então são concorrentes;
5. se a distância for diferente de zero, então são reversas.

Colocando os dois métodos em uma tabela só fica:

Posição	Teste	Interseção	Distância
Reversas	$\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \neq 0$	$\emptyset$	$\frac{\lvert\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\rvert}{\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert}$
Paralelas	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$	$\emptyset$ ou uma reta	$\frac{\lvert\vec{AB} \times \vec{u}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$
Concorrentes	$\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ e $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$	um ponto	nula

Esse quadro indica a relação entre posição relativa e produto misto, ou melhor, entre posição relativa e o critério de coplanaridade que depende do produto misto. É só nos lembrarmos que o produto escalar da tabela é o seguinte produto misto

$$\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}).$$

Exemplo 10.4. Já calculamos no exemplo **??** o produto misto que aparece na fórmula da distância das retas do exemplo **??**. É zero, logo, a distância é zero.

Exemplo 10.5. Já calculamos no exemplo **??** o produto misto que aparece na fórmula da distância das retas do exemplo **??**:

$$(\vec{AB}, \vec{v}_1.\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -4.$$

Falta calcular

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = i(3-2) - j(6-4) + k(2-2) = (1, -2, 0).$$

Logo, a distância é:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|(\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Exemplo 10.6. No exemplo **??** a fórmula da distância é diferente:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|},$$

e no caso do exemplo exemplo **??** temos $\vec{u} = (2, 4, 4)$ e $\vec{AB} = B - A = (0, 3, 4) - (-1, 1, 0) = (1, 2, 4)$. Logo,

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = i(8-16) - j(4-8) + k(4-4) = (-8, 4, 0).$$

Logo, a distância é:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{64+16}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{4\sqrt{5}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

11 Relações entre um ponto e uma reta

A posição relativa sempre envolve as três relações seguintes:

1. ângulo,
2. distância,
3. interseção.

No caso de um pontos A e uma reta r temos somente uma relação:

1. A pertence a r, e a distância entre um e outro é nula,
2. A não pertence a r, e a distância entre A e B é diferente de zero.

11.1 Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e $r : P = B + t\vec{u}$ é

$$d(A, B) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} A \in r \Rightarrow d(A, r) = 0, \\ A \notin r \Rightarrow d(A, r) \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo 11.1. Se $A(0, 0, 0)$ e

$$r : \begin{cases} y = 2x + 1, \\ z = -2x + 3, \end{cases}$$

então

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = (-8, 3, -1)$$

$$\Rightarrow d(A, r) = \frac{\sqrt{64 + 9 + 1}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{74}}{3}.$$

Se temos a mesma reta acima e $C(1,3,1)$ então

$$\vec{CB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow d(C,r) = 0 \Rightarrow C \in r.$$

Logo, C pertence a r. Se procuramos saber se é verdade, verificamos

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \\ z = -2x + 3 = 3 - 2 \cdot 1 = 1, \end{cases} \Rightarrow (1,3,1) \in r.$$

Planos no espaço euclidiano tridimensional

Prof. Fernando Carneiro, IME-UERJ

Rio de Janeiro, Março de 2014

Conteúdo

1 Como obter um plano

1.1 $A \in \pi$, $\vec{u}, \vec{v}$ vetores diretores de π:

Sabemos a equação de um plano π quando sabemos um ponto que pertence a ele, $A \in \pi$ e conhecemos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que não são paralelos e que geram, a partir de A, os outros pontos do plano π. Isto é:

$$P \in \pi \Leftrightarrow \vec{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Logo, temos

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Se, em coordenadas, $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a', b', c')$, $\vec{v} = (a'', b'', c'')$, então $P(x, y, z) \in \pi$ se e somente se:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a', b', c') + s(a'', b'', c'') \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (x_0 + a't + a''s, y_0 + b't + b''s, z_0 + c't + c''s).$$

Daí temos a **forma paramétrica da equação do plano**:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + a't + a''s, \\ y = y_0 + b't + b''s, \\ z = z_0 + c't + c''s \end{cases}.}$$

Exemplo 1.1. Se temos $A(0,-1,1)$ e $\vec{u}=(1,-2,2)$, $\vec{v}=(1,0,1)$, primeiro notamos que os dois vetores não são paralelos, e por isso eles geram um plano a partir do ponto A, cuja equação na forma paramétrica é:

$$\pi : \begin{cases} x = -t + s, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 1 + 2t + s \end{cases}.$$

1.2 $A \in \pi$, $\vec{n}$ ortogonal a π:

No caso anterior temos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ gerando π, a partir do ponto A:

$$\vec{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Isto equivale à coplanaridade dos três vetores $\vec{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Pelo critério de coplanaridade, temos que o produto misto abaixo é nulo:

$$(\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Mas

$$0 = (\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = \vec{AP} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}),$$

o que implica que se definimos $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v}$, então basta conhecer um ponto A no plano e um vetor $\vec{n}$ ortogonal ao plano para conhecermos todos os outros pontos P do plano π. Eles satisfazem a equação:

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0.$$

Se, em coordenadas, $P(x,y,z)$, $A(x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{n}=(a,b,c)$, então:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a,b,c) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \\ &= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0). \end{aligned}$$

Se definimos $d := -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, temos a **equação geral do plano**:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0.}$$

Exemplo 1.2. No exemplo do caso anterior temos $A(0, -1, 1)$, $\vec{u} = (1, -2, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calculamos o vetor normal de π:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-2, 1, 2).$$

Então a equação geral deste plano é:

$$0 = -2x + y + 2z + d,$$

e como $A \in \pi$, calculamos d:

$$0 = -2 \cdot 0 + (-1) + 2 \cdot 1 + d \Rightarrow d = -1 \Rightarrow \pi : 0 = -2z + y + 2z - 1.$$

1.3 $A, B \in \pi$, $\vec{u}$ vetor diretor de π:

Se A e B pertencem ao plano π e o vetor $\vec{u}$ não é paralelo ao vetor $\vec{AB}$ podemos gerar um plano a partir da reta que liga A e B através de múltiplos do vetor $\vec{u}$. Isto é:

$$\vec{CP} = t\vec{u} \text{ para algum ponto } C \text{ na reta que liga os pontos } A \text{ e } B.$$

Como C está na reta que liga A a B,

$$\vec{AC} = s\vec{AB} \Rightarrow \vec{AP} = t\vec{u} + s\vec{AB}.$$

Então caímos no primeiro caso. Neste terceiro caso $\vec{u}$ e $\vec{AB}$ servem como vetores diretores do plano π e o vetor normal neste caso é

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB}.$$

Exemplo 1.3. Se $A(0, 1, 0)$ e $B(-1, 2, 3)$ pertencem ao plano π e $\vec{u} = (2, -1, 4)$ é vetor diretor de π, temos $\vec{AB} = (-1, 1, 3)$ também vetor diretor de π e não-paralelo a $\vec{u}$. Portanto, na forma paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -t + 2s, \\ y = 1 + t - s, . \\ z = 3t + 4s \end{cases}$$

Para escrever na forma geral, calculamos o vetor normal:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = (7, 10, -1) \Rightarrow$$

$$\pi : 7x + 10y - z + d = 0.$$

$$A(0, 1, 0) \in \pi \Rightarrow 10 + d = 0 \Rightarrow d = -10 \Rightarrow$$

$$\pi : 7x + 10y - z - 10 = 0.$$

Podemos testar o ponto $B(-1, 2, 3)$:

$$7 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 - 3 - 10 = -7 + 20 - 3 - 10 = 0.$$

1.4 $A, B, C \in \pi$:

Se temos três pontos não-colineares no espaço, eles definem um plano. Cada ponto P deste plano pode ser obtido a partir de A usando combinações lineares dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$:

$$\vec{AP} = t\vec{AB} + s\vec{AC}.$$

Então, caímos no primeiro caso, sendo que os vetores diretores são dados por $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

Para reduzir este caso ao segundo, usamos o produto misto

$$(\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}),$$

que deve ser nulo se $P \in \pi$. Logo, o vetor normal é o seguinte:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}.$$

Para conseguirmos a equação geral diretamente dos três pontos devemos calcular o produto misto, dado que $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ e $P(x, y, z)$:

$$0 = (\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) & (z - z_0) \\ (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) & (z_1 - z_0) \\ (x_2 - x_0) & (y_2 - y_0) & (z_2 - z_0) \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.4. Se $A(1,0,0)$, $B(0,-2,0)$ e $C(0,0,4)$ pertencem a π:

$$0 = \begin{bmatrix} (x-1) & y & z \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (x-1)\cdot(-8) + y\cdot 4 + z\cdot(-2)$$
$$\Rightarrow -8x + 4y - 2z + 8 = 0.$$

Este exemplo acima é um caso particular do caso $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ e $C(0,0,c) \in \pi$, cuja equação geral é:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Se $a = 1$, $b = -2$ e $c = 4$ então

$$\pi : x - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - 1 = 0 \text{ ou, se multiplico por -8: } -8x + 4y - 2z + 8 = 0.$$

1.5 $A \in \pi$, $r \subset \pi$:

Se conhecemos uma reta $r : P = A + t\vec{u}$ e um ponto B fora da reta r, temos um único plano que contém esta reta e o ponto B. Os pontos do plano são obtidos da seguinte forma:

$$P = C + s\vec{AB}, \text{ para algum ponto } C \in r.$$

Como

$$C = A + t\vec{u}, \text{ para algum número real } t,$$

concluímos que

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{AB}.$$

Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ são então vetores diretores do plano π. O vetor normal é portanto:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB}.$$

Exemplo 1.5. Se temos a reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ e $B(2,0,3)$, então para vetores diretores do plano π que contém r e B temos o vetor diretor da reta $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e o vetor $\vec{AB} = B - A = (2, 0, 3) - (1, 0, -1) = (1, 0, 4)$, $A \in r$. Portanto o vetor normal é:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (4, -9, -1).$$

Logo a equação do plano é

$$\pi : 4x - 9y - z + d = 0,$$

$$A \in \pi \Rightarrow 4 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -5 \Rightarrow \pi : 4x - 9y - z - 5 = 0.$$

$$B \in \pi : 4 \cdot 2 - 3 - 5 = 8 - 8 = 0.$$

1.6 $r_1, r_2 \subset \pi$ retas paralelas:

Duas retas paralelas e distintas geram um plano. Se $\vec{u}$ é vetor diretor de r_1 e r_2 - elas compartilham o vetor diretor porque são paralelas - e se $A \in r_1$ e $B \in r_2$, cada ponto P do plano gerado é obtido da seguinte maneira:

$$P = C + s\vec{AB}, \text{ onde C é algum ponto da reta } r_1$$

e portanto

$$P = (A + t\vec{u}) + s\vec{AB} = A + t\vec{u} + s\vec{AB}.$$

Observe que se $s = 1$ temos a reta r_2:

$$P = A + t\vec{u} + \vec{AB} = (A + \vec{AB}) + t\vec{u} = B + t\vec{u}.$$

Os vetores diretores do plano π são $\vec{AB}$ e $\vec{u}$ neste caso, o que nos leva ao primeiro caso: um ponto A e dois vetores diretores. O vetor normal é, portanto:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB}.$$

Exemplo 1.6. Se $r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{4}$ e $r_2 : y = 3x + 1, z = 2x + 2$ temos duas retas paralelas distintas, tais que $\vec{u} = (1, 3, 2)$ é vetor diretor de ambas.

Se procuramos um ponto de um e outro da outra temos $A(1,0,-1) \in r_1$ e $B(0,1,2) \in r_2$. Portanto dois vetores diretores são:

$$\vec{AB} = (-1,1,3), \vec{u} = (1,3,2).$$

Na forma paramétrica o plano formado por estas retas é:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = t + 3s \\ z = -1 + 3t + 2s \end{cases} .$$

Para a equação geral precisamos do vetor normal:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (-7,5,-4)$$

$$\Rightarrow \pi : -7x + 5y - 4z + d = 0,$$

$$A \in \pi \Rightarrow -7 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \pi : -7x + 5y - 4z + 3 = 0.$$

$$B \in \pi : -7 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 = 5 - 8 + 3 = 0.$$

1.7 $r_1, r_2 \subset \pi$ retas concorrentes:

Duas retas concorrentes $r_1 : P = A + t\vec{u}$ e $r_2 : Q = B + s\vec{v}$ geram um plano. Um ponto X pertence ao plano π se

$$X = C + s\vec{v}, C \text{ é algum ponto da reta } r_1.$$

Como $C = A + t\vec{u}$, temos

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Os vetores diretores de r_1 e de r_2, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente são vetores diretores do plano π. O vetor normal é:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Exemplo 1.7. Se $r_1 : y = 3x + 1, z = 2x + 2$, e $r_2 : y = 2x + 3, z = 3x$, podemos verificar que são concorrentes. Seus vetores diretores são $\vec{u} = (1, 3, 2)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e o ponto da primeira reta $A(0, 1, 2)$ pertence ao plano π assim como o ponto da segunda reta $B(0, 3, 0)$ pertence ao plano. Na forma paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = t + s, \\ y = 1 + 3t + 2s, . \\ z = 2 + 2t + 3s \end{cases}$$

O vetor normal é:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (5, -1, -1).$$

Portanto a equação geral do plano é:

$$5x - y - z + d = 0,$$

$$A \in \pi : -3 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \pi : 5x - y - z + 3 = 0.$$

1.8 $r \subset \pi$, $\vec{u}$ vetor diretor de π

Se temos uma reta r contida no plano π, e $\vec{u}$ vetor diretor de π com direção diferente da direção da reta r, ambos geram um plano da seguinte forma: dado um ponto P qualquer da reta r chegamos a um ponto Q de π qualquer fazendo

$$Q = P + s\vec{u} \text{ ou } \vec{PQ} = s\vec{u}.$$

Este caso é igual ao caso anterior. Se $\vec{v}$ for vetor diretor de r e se A pertence a r então os pontos do plano são dados pela equação

$$Q = A + s\vec{u} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

O vetor normal a π é

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Exemplo 1.8. Se sabemos que $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ está contida no plano π e que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ é vetor diretor de π, o vetor normal a π é:

$$(2,3,2) \times (1,2,2) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = i(6-4) - j(4-2) + k(4-3) = (2, -2, 1).$$

Logo, a equação geral de π é

$$2x - 2y + z + d = 0,$$

sendo que

$$A(1, 0, -1) \in \pi \Rightarrow 2 - 0 + (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -1.$$

Logo, a equação geral de π é

$$2x - 2y + z - 1 = 0,$$

2 Plano x plano

Falaremos agora da posição relativa entre dois planos no espaço tridimensional. Mais especificamente, se temos a equação geral dos dois planos, queremos ser capazes de dizer a posição relativa de um em relação ao outro.

A posição relativa sempre envolve as três relações seguintes:

1. ângulo,
2. distância,
3. interseção.

No caso de dois planos π_1 e π_2 temos duas posições relativas:

1. paralelos, formando ângulo de 0^o,
2. concorrentes, formando ângulo diferente de 0^o.

2.1 Ângulo entre dois planos

O ângulo entre π_1 e π_2 é o menor ângulo entre um vetor normal a π_1 e um vetor normal a π_2. Portanto, se $\vec{n}_1$ é o vetor normal a π_1 e se $\vec{n}_2$ é o vetor normal a π_2, podemos pegar o menor dos dois ângulos: o ângulo entre $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ ou $-\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Logo, será um ângulo entre 0^o e 90^o, isto é, de cosseno positivo. Logo, vale a fórmula:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

onde θ é o ângulo entre π_1 e π_2 e $\vec{n}_1$ é vetor normal a π_1 e $\vec{n}_2$ é vetor normal a π_2.

2.2 Planos paralelos

Neste caso:

1. o ângulo entre π_1 e π_2 é de 0^o: $\vec{n_1} \parallel \vec{n}_2$;
2. se $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ então $\vec{n} = (a, b, c)$ é vetor normal a π_1 e a π_2, e portanto a equação geral de π_2 pode ser escrita como $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$;
3. a distância entre π_1 e π_2 é:
$$\frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$
4. a interseção é vazia e são planos distintos se $d_2 \neq d_1$;
5. são o mesmo plano se $d_2 = d_1$.

Exemplo

Se temos os planos $\pi_1 : x - 2y + 2z + 3 = 0$ e $\pi_2 : -2x + 4y - 4z + 1 = 0$, a distância entre os dois é de quantas unidades? Primeiro notamos que $\vec{n}_1 = (1, -2, 2)$ e $\vec{n}_2 = (-2, 4, -4) = -2\vec{n}_1$ e portanto os planos são paralelos. Podemos escrever π_2 com os mesmos coeficientes que multiplicam as incognitas de π_1:

$$\pi_2 : -2x+4y-4z+1 = -2\cdot(x-2y+2z-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \pi_2 : x-2y+2z-\frac{1}{2} = 0.$$

Logo, a distância entre os planos é

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|3-(-\frac{1}{2})|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{2\cdot 3} = \frac{7}{6}.$$

Poderíamos ter escolhido um ponto de π_2 e aplicar a fórmula da distância ao plano π_1:

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow \pi_2 : -2\cdot 0 + 4\cdot 0 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4} \Rightarrow (0, 0, \frac{1}{4}) \in \pi_2,$$

$$d((0, 0, \frac{1}{4}), \pi_1) = \frac{|0 - 2\cdot 0 + 2\cdot \frac{1}{4} + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{6}.$$

2.3 Planos concorrentes

Neste caso:

1. o ângulo entre π_1 e π_2 é diferente de 0^o: $\vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \vec{0}$;
2. a distância entre π_1 e π_2 é zero pois há pontos em comum;
3. a interseção é uma reta e
$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$
é o vetor diretor da reta interseção;

Exemplo
Se temos os planos

$$\pi_1 : x - y + z - 1 = 0, \pi_2 : 2x + y - z + 1 = 0$$

podemos calcular a posição relativa entre eles, através do cálculo do ângulo

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|(1,-1,1)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+1+1}} = 0,$$

logo o ângulo entre eles é 90^o e concluímos que são concorrentes. Por isso a interseção entre eles é uma reta cujo vetor diretor é

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (0,3,3).$$

Para sabermos a equação da reta falta um ponto por onde ela passa. Encontramos o ponto resolvendo o sistema escolhendo um valor para z. Se escolhemos $z = 1$ o sistema nos dá $x = 0$ e $y = 0$. Portanto a reta interseção na forma paramétrica tem a seguinte equação

$$r : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Outra maneira é resolver o sistema

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - z + 1 = 0, \end{cases}$$

cuja solução é

$$r : \begin{cases} x = 0, \\ z = y + 1, \end{cases}$$

que corresponde à forma reduzida em relação à segunda coordenada. Por esta forma reduzida o vetor diretor de r é $(0,1,1)$, que é múltiplo de $(0,3,3)$.

3 Plano x reta

Falaremos agora da posição relativa entre uma reta e um plano no espaço tridimensional. Mais especificamente, se temos a equação de uma reta e a equação de um plano, queremos ser capazes de dizer a posição relativa de um em relação ao outro.

A posição relativa sempre envolve as três relações seguintes:

1. ângulo,
2. distância,
3. interseção.

No caso de uma reta r e um plano π temos duas posições relativas:

1. paralelos, formando ângulo de 0^o,
2. concorrentes, formando ângulo diferente de 0^o.

3.1 Ângulo entre reta e plano

Se a reta passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{u}$, isto é, se a reta é dada pelos pontos $r : P = A + t\vec{u}$ e se o plano π tem vetor normal $\vec{n}$, então o ângulo θ entre r e π é dado pela fórmula:

$$\sin\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Isto ocorre porque o ângulo entre a reta e o plano somado ao ângulo entre a direção normal ao plano (direção de $\vec{n}$) e a direção da reta r (direção de $\vec{u}$) dá um ângulo de 90^o.

Exemplo:
Se $r : y = 2x - 1, z = -2x + 1$ e $\pi : -4x + 7y - 4z + 1 = 0$ então

$$\vec{u} = (1, 2, -2), \vec{n} = (-4, 7, -4),$$

e portanto o ângulo entre eles é

$$\sin\theta = \frac{|(1,2,-2)\cdot(-4,7,-4)|}{3\cdot 9} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{2}{3}.$$

3.2 Reta paralela a um plano

Neste caso, se a reta passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{u}$, isto é, se a reta é dada pelos pontos $r : P = A + t\vec{u}$ e se o plano π tem vetor normal $\vec{n}$, então:

1. o ângulo é igual 0^o: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$;
2. a interseção é vazia ou a própria reta;
3. a distância é igual a $d(B, \pi)$, sendo B qualquer ponto que pertence à reta r.

3.3 Reta concorrente a um plano

Neste caso, se a reta passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{u}$, isto é, se a reta é dada pelos pontos $r : P = A + t\vec{u}$ e se o plano π tem vetor normal $\vec{n}$, então:

1. o ângulo é diferente de 0^o: $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$;
2. a interseção é um ponto;
3. a distância é igual a zero porque há ponto em comum, a interseção é não-nula.

3.4 Casos particulares

3.4.1 Reta contida em um plano

Um caso particular da reta paralela a um plano é o da reta contida em um plano. Para saber se uma reta r está contida em um plano π, precisamos verificar:

1. se a reta r é paralela ao plano π: se $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, sendo $\vec{u}$ vetor diretor de r e $\vec{n}$ vetor normal de π;
2. se algum ponto A que pertence a r pertence a π, isto é, se as coordenadas de A satisfazem a equação geral do plano π;
3. se A pertence a π então a reta r toda está contida em π e neste caso a interseção entre r e π é a própria reta r; se A não pertence a π então a interseção entre r e π é vazia.

Exemplo:

3.4.2 Reta ortogonal a um plano

A reta $r : P = A + t\vec{u}$ e o plano $\pi : \vec{BQ} \cdot \vec{n} = 0$ são ortogonais se o ângulo entre eles é de 90^o, isto é, quando

$$\vec{u} \parallel \vec{n} \text{ ou } \vec{u} \text{ é múltiplo de } \vec{n}.$$

Se $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{n} = (a', b', c')$ podemos testar fazendo

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ se } a' \neq 0, b' \neq 0, c' \neq 0,$$

$$\text{ou verificamos se } \vec{u} \times \vec{n} = 0.$$

Exemplo:

A reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ e o plano $\pi : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$ são ortogonais, pois $(2, 3, -2)$ são coordenadas do vetor diretor de r e do vetor normal a π, então

$$\vec{u} = \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow r \perp \pi.$$

3.5 Exercícios

1) Escreva na forma paramétrica a equação da reta r ortogonal a π : $x - y + z - 1 = 0$ que passa por $A(0, 2, -1)$.

Solução:

Podemos tomar o vetor normal a π, $\vec{n} = (1, -1, 1)$ como o vetor diretor de r:

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

4 Relações entre um plano e um ponto

A posição relativa sempre envolve as três relações seguintes:

1. ângulo,
2. distância,
3. interseção.

No caso de um pontos A e um plano π temos somente uma relação:

1. A pertence a π, e a distância entre um e outro é nula,
2. A não pertence a π, e a distância entre A e B é diferente de zero.

4.1 Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é

$$d(A, B) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} A \in \pi \Rightarrow d(A, \pi) = 0, \\ A \notin \pi \Rightarrow d(A, \pi) \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo

Se temos $A(0,1,0)$ e $\pi : x + 2y + 2z + 1 = 0$ então

$$d(A,\pi) = \frac{|2+1|}{\sqrt{1+4+4}} = 1.$$