Flerdimensionell analys
Formelblad och anteckningar LP1 2025

Lucas Månsson

1 Kapitel 1: Grundläggande begrepp

1.1 Mängder och tallinjen $\mathbb{R}$

Snitt, union och differens:

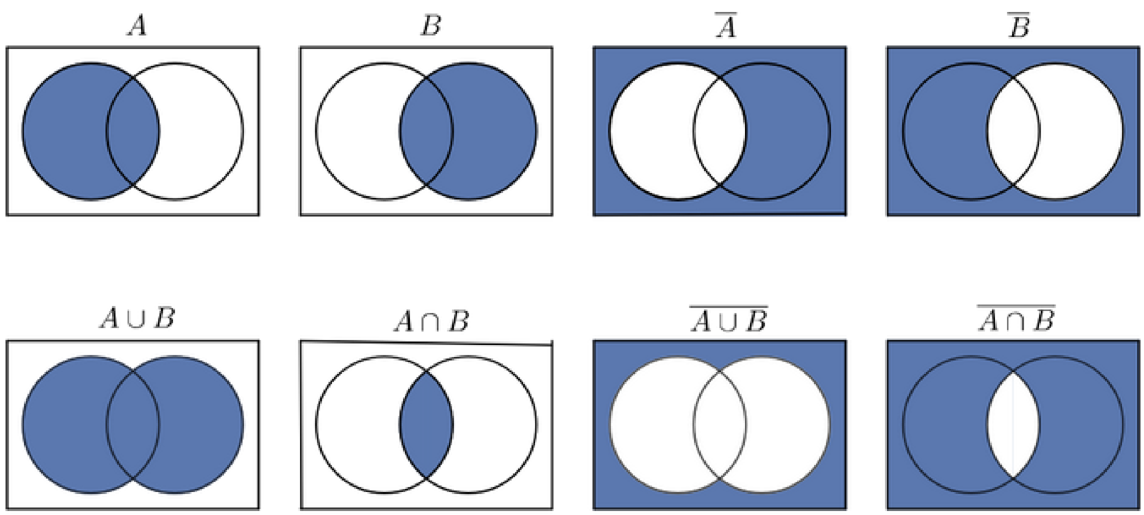

Figure 1:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B$$

Absolutbelopp:

$$|ab| = |a||b|, \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

1.2 Planet $\mathbb{R}^2$ och rummet $\mathbb{R}^3$

Avståndsformel.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mängder i planet och rummet

Omgivning: Med en omgivning av punkten (a, b) i planet menar vi alla punkter i en cirkelskiva kring denna. Detta kan uttryckas:

$$|(x, y) - (a, b)| < d$$

Notera att den stränga olikheten ovan innebär att punkterna på själva cirkeln inte ingår i omgivningen.

Öppen och sluten mängd.

1.3 Begrepp och metoder från linjär algebra

Vektorer

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$
$$u - v = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$
$$\lambda u = \lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$
$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Skalärprodukt och vektorprodukt

Skalärprodukt:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$
$$u \cdot v = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Ortogonal projektion

En ortogonal projektion kan beräknas med projektionsformeln.

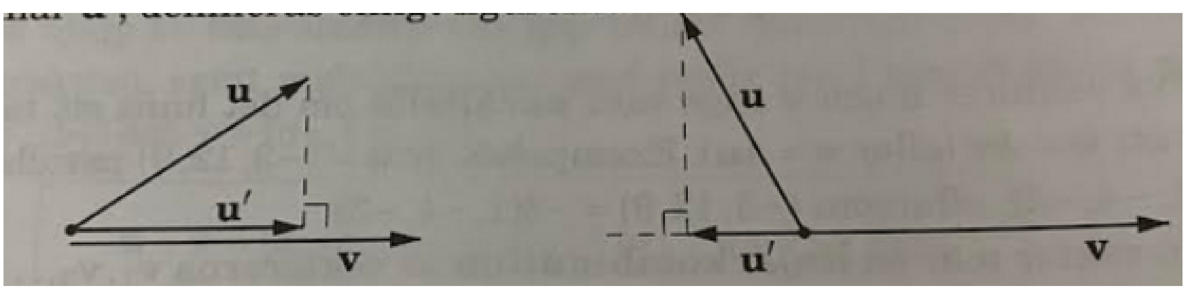

Figure 2:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

Linjer

Vi kan beskriva en linje i planet om vi känner till en punkt P på linjen och en riktningsvektor v som anger dess riktning.

Om $P = (x_0, y_0)$ och $v = (v_1, v_2)$ så blir linjens ekvation i parameterform:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Normalvektor: Varje linje i planet kan beskrivas på normalform:

$$ax + by + c = 0$$

Om vi plockar ut koefficienterna framför x och y och bildar vektorn $n = (a, b)$ blir n vinkelrät mot linjen.

Givet en punkt $P = (x_0, y_0)$ och normalvektor $n = (a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Plan

Med hjälp av en punkt och två icke-parallella riktningsvektorer kan man få ett plan på parameterform i rummet.

Matriser och determinanter

1.4 Rummet $\mathbb{R}^n$

2 Kapitel 2: Analytisk geometri

2.1 Geometri i $\mathbb{R}^2$

Sammanfattning av första- och andragradskurvor:

Rät linje:

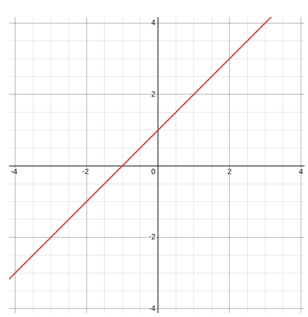

Figure 3:

$$ax + by + c = 0$$

Parabel:

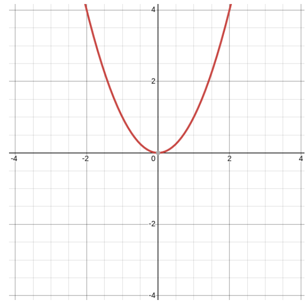

Figure 4:

$$y = ax^2$$

Cirkel:

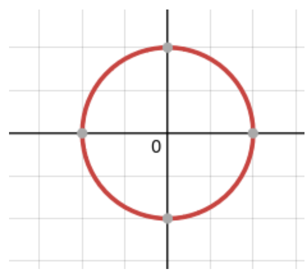

Figure 5:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellips

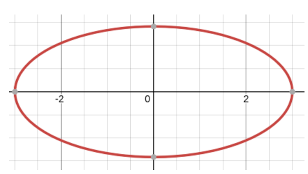

Figure 6:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

Hyperbel

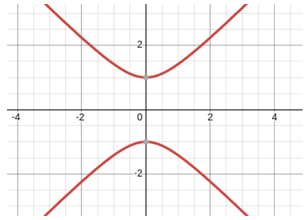

Figure 7:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

För en hyperbel med höger-vänster öppen:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

2.2 Geometri i $\mathbb{R}^3$

Sammanfattning av första- och andragradskurvor

Plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

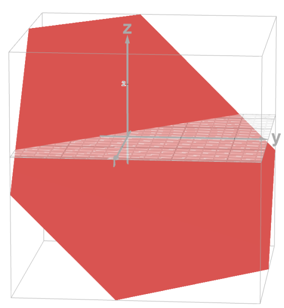

Figure 8:

Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

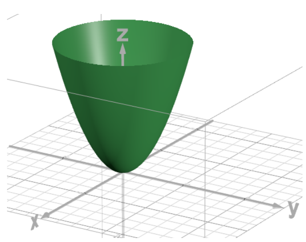

Figure 9:

Kon

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

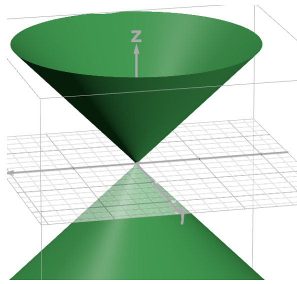

Figure 10:

Sfär

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

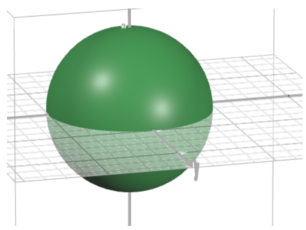

Figure 11:

Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

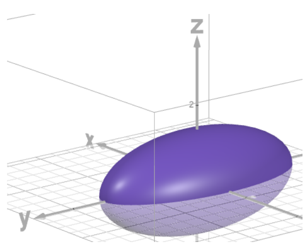

Figure 12:

Hyperbolisk paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

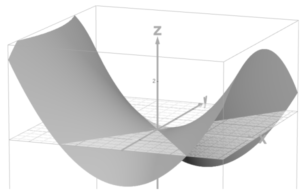

Figure 13:

Hyperboloid (enmantlad)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

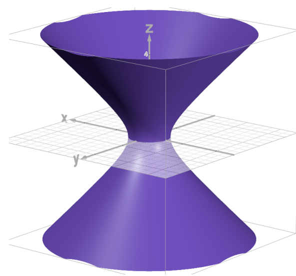

Figure 14:

Hyperboloid (tvåmantlad)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

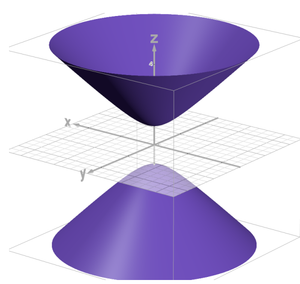

Figure 15:

2.3 Polära och rympolära koordinater

Polära koordinater

En punkt P i planet med rätvinkliga koordinater (x, y), kan också beskrivas med avståndet r från origo tillsammans med vinkel φ mot positiva x-axeln. P har då polära koordinaterna (r, φ).

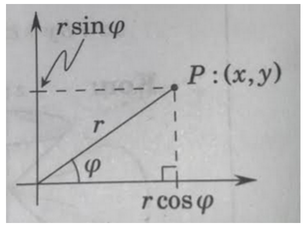

Figure 16:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

I de fall vi har annan medelpunkt än origo, ex. (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\varphi, \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

Om vi vill beskriva en ellipsskiva, snarare än bara en ellips:

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\sin\varphi, \\ y = y_0 + ar\sin\varphi \end{cases}$$

Cylindriska och rymdpolära koordinater

Cylindriska koordinater:

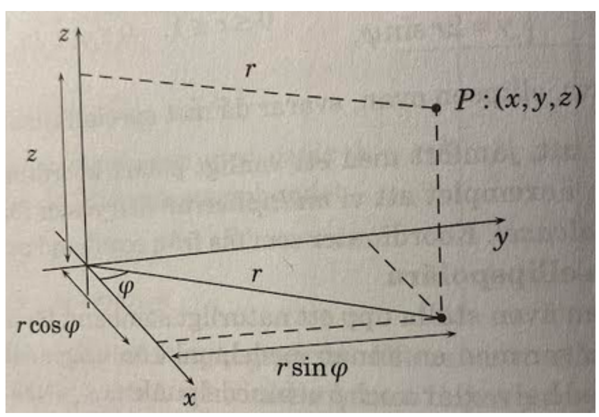

Figure 17:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

En annan koordinat än z kan vara oförändrad.

Rymdpolära koordinater:

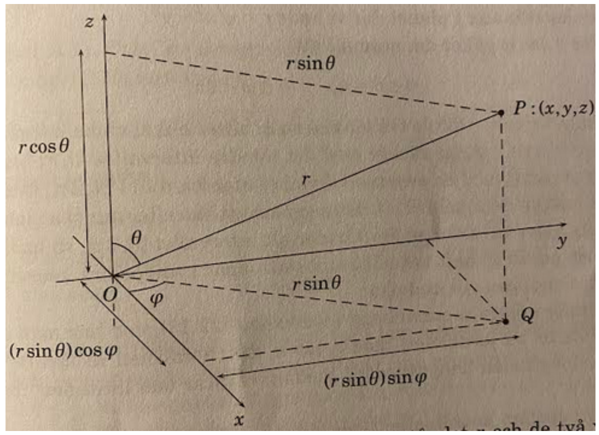

Figure 18:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

3 Kapitel 3: Funktioner

3.1 Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion är av typen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dvs. en funktion av n variabler där varje funktionsvärde är reellt.

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En funktion f av två variabler består av en definitionsmängd $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ och en avbildningsregel:

$$(x, y) \in D_f \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Nivåkurvor och nivåytor

En nivåkurva består av samtliga punkter i xy-planet som ger samma funktionsvärde. Låt f vara en funktion av två variabler, och C, en konstant. Mängden i xy - planet som ges av ekvationen:

$$f(x, y) = C$$

kallas en **nivåkurva** till f. Konstanten C motsvarar således "höjden över xy-planet".

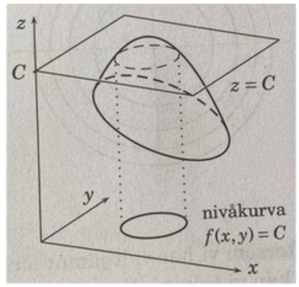

Figure 19:

3.2 Vektorvärda funktioner

En funktion av typen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, där $p \geq 2$, kallas **vektorvärd**. eftersom funktionsvärdena då är vektorer.

Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (kurvor)

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (ytor)

$$\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (koordinatbyten)

(fyll i senare)

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (vektorfält)

(fyll i senare)

3.3 Sammansättning av funktioner

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

3.4 Gränsvärden och kontinuitet

Definition av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

Vi säger att $f(x, y)$ har gränsvärdet A då $(x, y) \to (a, b)$, och skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A,$$

Beräkning av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

I envariabelfallet finns det endast två sätt att närma sig en punkt. Med två variabler finns det oändligt många.Ett sätt att hantera är att uttrycka punkterna i polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Tillvägagångssätt:

- Gör en kvalificerad gissning av vad gränsvärdet bör vara
- Bilda absolutbeloppet $|f(x, y) - A|$, byt till polära koordinater, och försök att göra $|f(x, y) - A|$ oberoende av φ genom en lämplig uppskattning uppåt.
- Visa att denna uppskattning går mot 0 då $r \to 0$.

Beräkning av gränsvärden då $|(x, y)| \to \infty$

(Fyll i vid behov)

Gränsvärden för allmänna funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

(Fyll i vid behov)

Kontinuitet

Låt funktionen f vara en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är definerad i punkten (a, b). Om det gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

är f kontinuerlig i (a, b). Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den slutna begränsade (dvs. kompakta) mängden D i plaet. Då antar funktionen både ett största och minsta värde i D.

Satsen om mellanliggande värden: Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på en bågvis sammanhängande mängd D i planet. Om (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är punkter i D sådana att $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$, så antar funktionen samtliga värden mellan $f(a_1, b_1)$ och $f(a_2, b_2)$.

4 Differentialkalkyl

4.1 Partiella derivator

Definition

Antag att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en omgivning av punkten (a, b). Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{h}$$

existerar (ändligt), så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på x i (a, b). Själva gränsvärdet kallas den partiella derivatan av f med avseende på x i punkten (a, b), och betecknas $f'_x(a, b)$

Geometrisk tolkning

Att sätta y konstant lika med b innebär att geometriskt att vi skär funktionsytan $z = f(x, y)$ med planet $y = b$. Skärningen blir en kurva. Kurvan kan ses som funktionen $z = g(x)$.

Beräkning

$$f'_{x_j}(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_n, ..., a_j + h, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

Tangentplan

Ett tangentplan ges av:

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

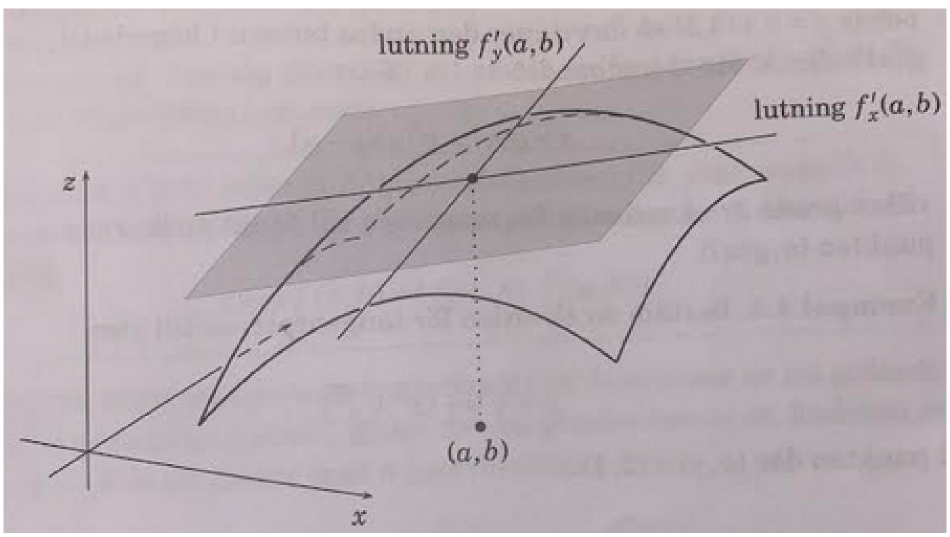

Figure 20: Illustration av ett tangentplan

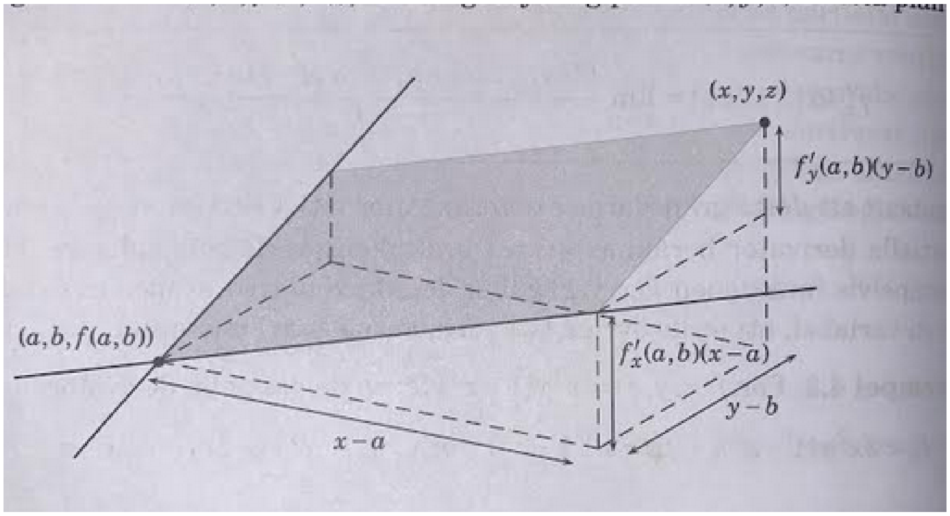

Figure 21: Illustration av ett tangentplans ekvation

Gradient

Antag att funktionen $f(x, y)$ är partiellt deriverbar i punkten (a, b). Vi definierar gradienten av f i (a, b) som vektorn

$$f(a, b) = (f'_x(a, b), f'_y(a, b)).$$

Riktningsderivata

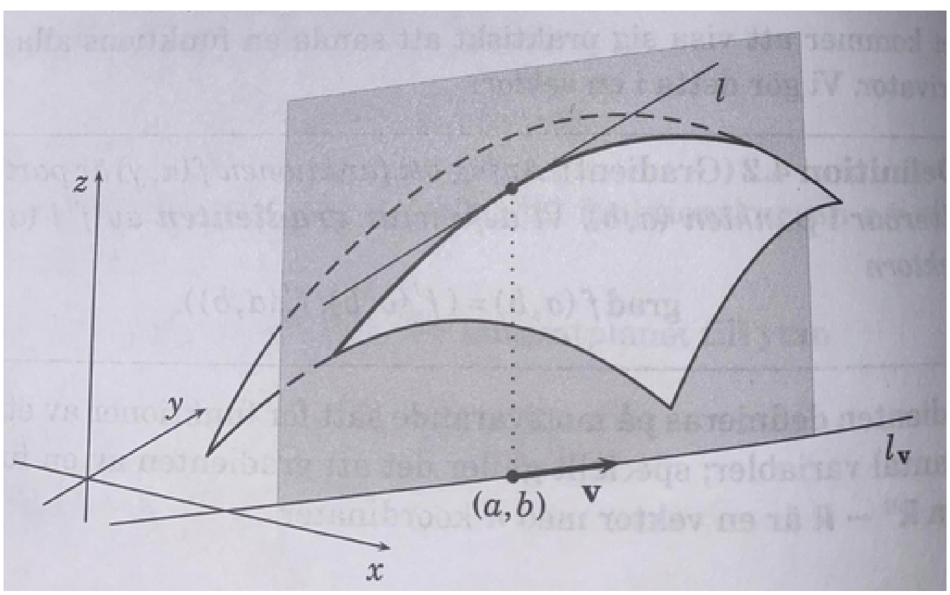

Figure 22: Riktningsderivata?

$$l_{\mathbf{v}}(x, y) = (a, b) + t(v_1, v_2) = (a + tv_1, b + tv_2)$$

Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten (a, b) och att $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en vektor med längd 1. Vi definierar riktningsderivatan av f i punkten (a, b)

i rikningen $\mathbf{v}$, enligt

$$f'_v(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar (ändligt).

4.2 Differentierbarhet

Defintion: Antag att funktionen f är defininerad i en omgivning av punkten (a,b). Vi säger att f är differentierbar i punkten (a,b) om det finns tal A och B sådana att:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bh + \sqrt{h^2+k^2}p(h,k),$$

för någon funktion p sådan att $p(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

Sats 1: Antag att funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i punkten (a,b). Då är f partiellt deriverbar i (a,b), och det gäller att:

$$f'_x(a,b) = A$$

och

$$f'_y(a,b) = B$$

där A och B är talen i definitionen.

Sats 2: Om funktionen f är differentierbar i punkten (a,b) så är f också kontinuerlig i (a,b).t

4.3 Kedjeregeln (fyll ut?)

Antag att g_1 och g_2 är deriverbara i punkten x, och att $f(u,v)$ är differentierbar i punkten $(g_1(x), g_2(x))$. Då är den sammansatta funktionen $h(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), g_2(x))$ deriverbar i x med derivatan

$$h'(x) = f'_u(g(x)) * g'_1(x) + f'_v(g(x)) * g'_2(x)$$

4.4 Mer om gradient och riktningsderivata

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar på det öppna området D, och att D är bågvis sammanhängande. Om det gäller att grad $f(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \in D$ så är f konstant på D.

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar i punkten (a,b) och att $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en vektor med längd 1. Då ges riktningsderivatan av f i punkten (a,b), i riktningen $\mathbf{v}$, av skalärprodukten

$$f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \mathrm{grad} f(a,b) * \mathbf{v}$$

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar i punkten (a,b). Tillväxthastigheten för f i (a,b) varierar mellan $-|\mathrm{grad} f(a,b)|$ och $|\mathrm{grad} f(a,b)|$. Alltså:

$$-|\text{grad}f(a,b)| \leq f'_v(a,b) \leq |\text{grad}f(a,b)|$$

Sats: Antag att funktionen f är kontinuerligt partiellt deriverbar i punkten (a, b) och att grad$f(a,b) \neq 0$. Om Υ är nivåkurvan till f genom punkten (a,b) så gäller det att grad$f(a,b)$ är ortogonal mot Υ i (a,b).

Sats: Antag att funktionen f är kontinuerligt partiellt deriverbar i punkten (a,b,c), och att grad$f(a,b,c) \neq 0$. Om Γ är nivåyan till f genom punkten (a,b,c) så gäller det att grad$f(a,b,c)$ är ortogonal mot Γi(a, b, c).

4.5 Differentialer och feluppskattning (fyll ut)

Fyll ut.

4.6 Högre derivator

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

4.7 Kort om partiella differentialekvationer (fyll ut?)

En differentialekvation i envariabelanalys är en ekvation som innehåller en funktioner, dess derivator, samt funktionsvariabeln. Om vi har en ekvation med en funktion av flera variabler och dess partiella derivator, är det en partiell differentialekvation.

5 Lokala undersökiningar och optimering

5.1 Taylorutveckling

Taylors formel: Antag att funktionen $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator till och med ordning 3 i en omgivning av punkten a. Då gäller det, för alla punker $(x,y) = (a+h, b+k)$ i denna omgivning att:

$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$
$\frac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)h^2, 2f''_{xy}(a,b)hk, f''_{yy}(a,b)k^2) + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}B(h,k)$ där $B(h,k)$ är begränsad då (h,k) är litet.

5.2 Lokala extrempunkter

Defintion. En punkt $(a,b) \in D_f$ kallas en **lokal maximipunkt** till funktionen f, och vi säger att f har ett **lokalt maximum** i (a,b) om

$$f(a,b) \leq f(x,y) \text{ för alla } (x,y) \in D_f \text{ nära } (a,b).$$

Sats. Antag att (a,b) är en lokal extrempunkt till funktionen f, och att f är partiellt deriverbar i (a,b). Då är grad$f(a,b) = 0$, dvs. alla partiella derivator är lika med noll i (a,b).

Tillräckliga villkor

Ett tillräckligt villkor garanterar att den stationära punkt vi studerar är en lokal extrempunkt.

Vi kommer också se en metod för att avgöra punktens karaktär, dvs. avgöra om den stationära punkten är maximipunkt, minimipunkt, eller ingetdeta

Kvadratiska formen f i punkten (a, b) betecknas $Q(h, k)$.

$$Q(h, k) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2$$

Definition. Vi säger att den kvadratiska formen $Q(h, k)$ är:

> **positivt definit** om $Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$.
>
> **negativt definit** om $Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$.
>
> **indefinit** om $Q(h, k)$ antar både positiva och negativa värden.

Om $Q(h, k) \geq 0$ men lika med noll för något $(h, k) \neq (0, 0)$ så säger vi att formen är **positivt semidefinit**, och om $Q(h, k) \leq 0$ men lika med noll för något $(h, k) \neq (0, 0)$ så säger vi att formen är **negativt semidefinit**,

Sats. Antag att (a, b) är en stationär punkt till f, och att $Q(h, k)$ är den kvadratiska formen av f i (a, b). Då gäller:

> om $Q(h, k)$ är positivt definit så har f ett lokal minimum i (a, b).
>
> om $Q(h, k)$ är negativt definit så har f ett lokal maximum i (a, b).
>
> om $Q(h, k)$ är indefinit så har f en sadelpunkt i (a, b).

I fallet då $Q(h, k)$ är semidefinit så kan vi inte dra någon slutsats om punktens karaktär.

5.3 Optimering

Kompakt område

Fyll i

Icke-kompakt område

Fyll i

5.4 Optimering med bivillkor

Sats. Antag att punkten (a, b) är en (lokal) extrempunkt till funktionen $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = C$. Antag vidare att (a, b) är en inre punkt till D_f och D_g. Då gäller det att grad$f(a, b)$ och grad$g(a, b)$ är parallella.

Sats. Antag att punkten (a, b, c) är en (lokal) extrempunkt till funktionen $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = C$. Antag vidare att (a, b, c) är en inre punkt till D_f och D_g. Då gäller det att grad$f(a, b, c)$ och grad$g(a, b, c)$ är parallella.

Sats. Antag att punkten $(a_1, ..., a_n)$ är en (lokal) extrempunkt till funktionen $f(x_1, ..., x_n)$ under bivillkoren:

$$g_1(x_1, ..., x_n) = C_1, g_2(x_1, ..., x_n) = C_2, g_m(x_1, ..., x_n) = C_m,$$

Antag vidare att $(a_1, ..., a_n$ är en inre punkt till D_f och $D_g i$. Då gäller det att:

$$\text{grad } f_1(a_1, ..., a_n), \text{grad } g_1(a_1, ..., a_n), \text{grad } g_m(a_1, ..., a_n)$$

är linjärt beroende.

6 Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

Övn. endast för Funktionalmatris, funktionaldeterminant, Implicita funktioner.

6.1 (Vektorvärda funktioner av en variabel)

6.2 (Vektorvärda funktioner av flera variabler)

6.3 Funktionalmatris och funktionaldeterminant

Definition av funktionalmatris

Låt $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_p)$ vara en funktion av variablerna $x_1, x_2, ..., x_n$. Vi definierar funktionalmatrisen **f'** av **f** enligt:

$$\mathbf{f}' = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Differential och linjärisering

$$f(a+h) - f(a) = \Delta f = f'(a) * h + R$$

Där restermen $R = p(h)h$ är relativt liten för små tillskott h.

Detta är samma för vektorvärda funktioner:

$$\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta f' * h + R}$$

Funktionaldeterminant

Låt $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ vara en funktion av variablerna $x_1, x_2, ..., x_n$, med funktionalmatris $\mathbf{f}'$. Vi definierar funktionaldeterminanten av $\mathbf{f}'$ som

$$\det \mathbf{f}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

6.4 Inversa och implicita funktionssatsen