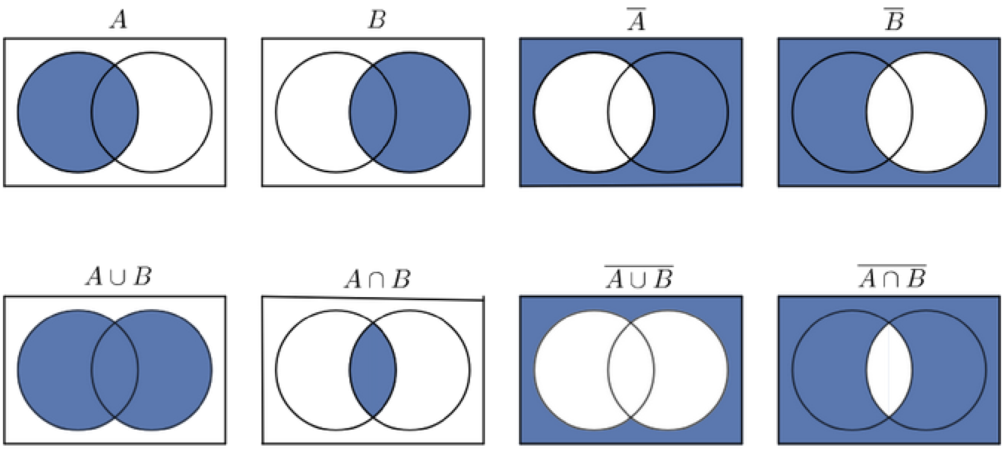
Flerdimensionell analys
Formelblad och anteckningar LP1 2025

Lucas Månsson

1 Kapitel 1: Grundläggande begrepp

1.1 Mängder och tallinjen $\mathbb{R}$

Snitt, union och differens:



$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B$$

Absolutbelopp:

$$|ab| = |a||b|, \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

1.2 Planet $\mathbb{R}^2$ och rummet $\mathbb{R}^3$

Avståndsformel.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mängder i planet och rummet

Omgivning: Med en omgivning av punkten (a, b) i planet menar vi alla punkter i en cirkelskiva kring denna. Detta kan uttryckas:

$$|(x, y) - (a, b)| < d$$

Notera att den stränga olikheten ovan innebär att punkterna på själva cirkeln inte ingår i omgivningen.

Öppen och sluten mängd.

1.3 Begrepp och metoder från linjär algebra

Vektorer

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$
$$u - v = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$
$$\lambda u = \lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$
$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

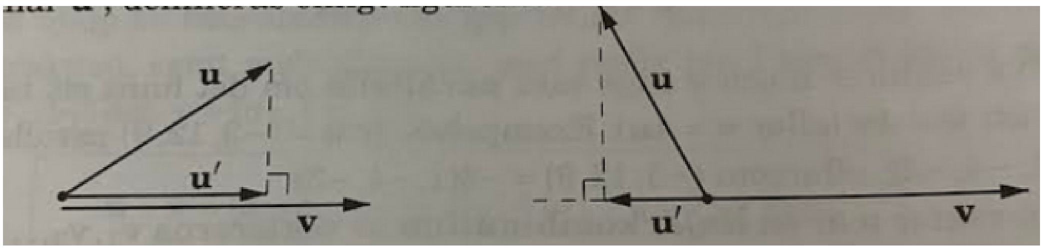
Skalärprodukt och vektorprodukt

Skalärprodukt:

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$
$$u \cdot v = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Ortogonal projektion

En ortogonal projektion kan beräknas med projektionsformeln.



$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

Linjer

Vi kan beskriva en linje i planet om vi känner till en punkt P på linjen och en riktningsvektor v som anger dess riktning.

Om $P = (x_0, y_0)$ och $v = (v_1, v_2)$ så blir linjens ekvation i parameterform:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Normalvektor: Varje linje i planet kan beskrivas på normalform:

$$ax + by + c = 0$$

Om vi plockar ut koefficienterna framför x och y och bildar vektorn $n = (a, b)$ blir n vinkelrät mot linjen.

Givet en punkt $P = (x_0, y_0)$ och normalvektor $n = (a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Plan

Med hjälp av en punkt och två icke-parallella riktningsvektorer kan man få ett plan på parameterform i rummet.

Matriser och determinanter

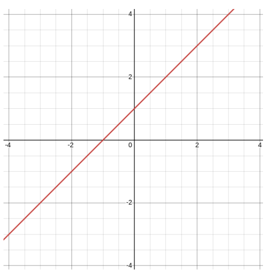
1.4 Rummet $\mathbb{R}^n$

2 Kapitel 2: Analytisk geometri

2.1 Geometri i $\mathbb{R}^2$

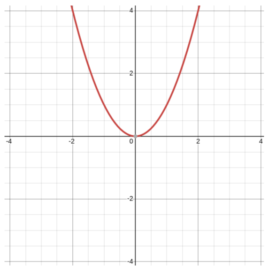
Sammanfattning av första- och andragradskurvor:

Rät linje:



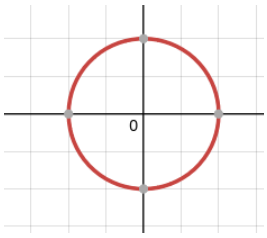
$$ax + by + c = 0$$

Parabel:



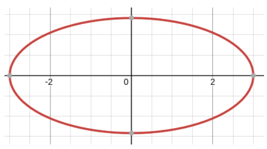
$$y = ax^2$$

Cirkel:



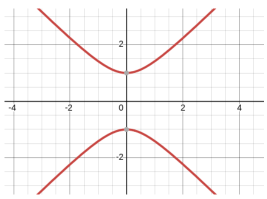
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellips



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

För en hyperbel med höger-vänster öppen:

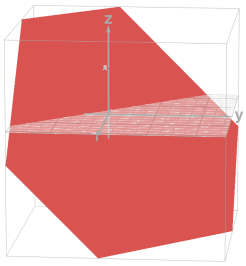
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

2.2 Geometri i $\mathbb{R}^3$

Sammanfattning av första- och andragradskurvor

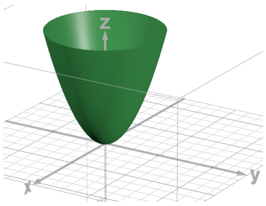
Plan

$$ax + by + cz + d = 0$$



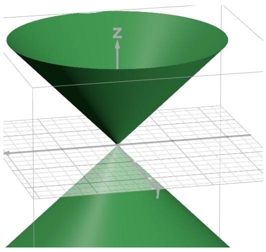
Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



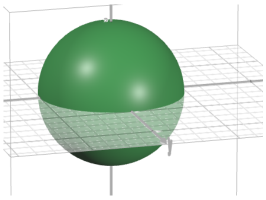
Kon

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



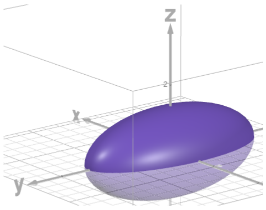
Sfär

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



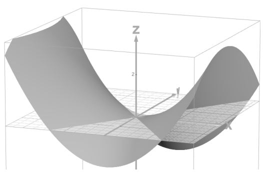
Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



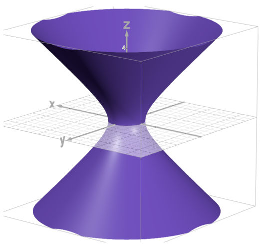
Hyperbolisk paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



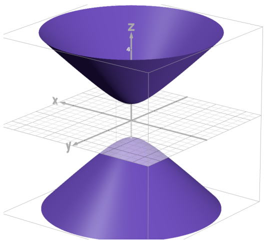
Hyperboloid (enmantlad)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hyperboloid (tvåmantlad)

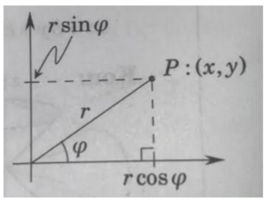
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



2.3 Polära och rympolära koordinater

Polära koordinater

En punkt P i planet med rätvinkliga koordinater (x, y), kan också beskrivas med avståndet r från origo tillsammans med vinkel φ mot positiva x-axeln. P har då polära koordinaterna (r, φ).



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

I de fall vi har annan medelpunkt än origo, ex. (x_0, y_0):

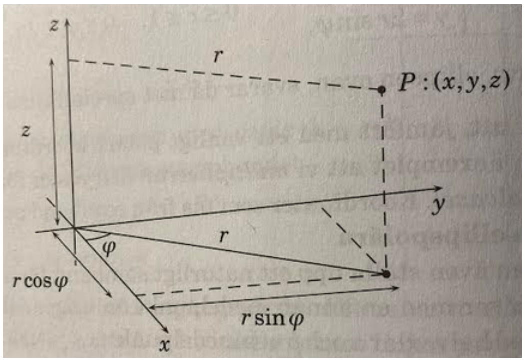
$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\varphi, \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

Om vi vill beskriva en ellipsskiva, snarare än bara en ellips:

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\sin\varphi, \\ y = y_0 + ar\sin\varphi \end{cases}$$

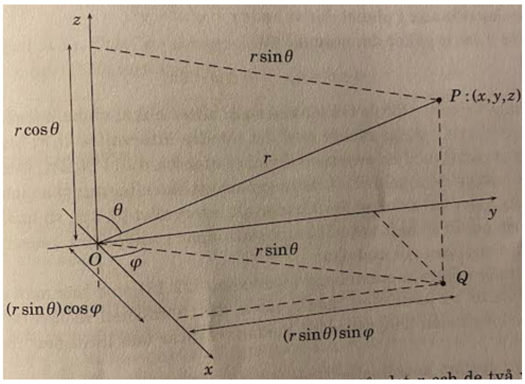
Cylindriska och rymdpolära koordinater

Cylindriska koordinater:



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

En annan koordinat än z kan vara oförändrad.
Rymdpolära koordinater:



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

3 Kapitel 3: Funktioner

3.1 Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion är av typen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dvs. en funktion av n variabler där varje funktionsvärde är reellt.

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En funktion f av två variabler består av en definitionsmängd $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ och en avbildningsregel:

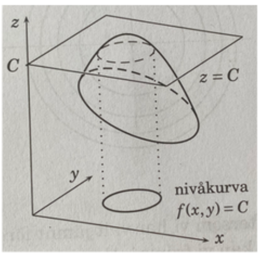
$$(x, y) \in D_f \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Nivåkurvor och nivåytor

En nivåkurva består av samtliga punkter i xy-planet som ger samma funktionsvärde. Låt f vara en funktion av två variabler, och C, en konstant. Mängden i xy - planet som ges av ekvationen:

$$f(x, y) = C$$

kallas en **nivåkurva** till f. Konstanten C motsvarar således "höjden över xy-planet".



3.2 Vektorvärda funktioner

En funktion av typen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, där $p \geq 2$, kallas **vektorvärd**. eftersom funktionsvärdena då är vektorer.

Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (kurvor)

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (ytor)

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (koordinatbyten)

(fyll i senare)

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (vektorfält)

(fyll i senare)

3.3 Sammansättning av funktioner

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

3.4 Gränsvärden och kontinuitet

Definition av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

Vi säger att $f(x, y)$ har gränsvärdet A då $(x, y) \to (a, b)$, och skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A,$$

Beräkning av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

I envariabelfallet finns det endast två sätt att närma sig en punkt. Med två variabler finns det oändligt många.Ett sätt att hantera är att uttrycka punkterna i polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Tillvägagångssätt:

- Gör en kvalificerad gissning av vad gränsvärdet bör vara
- Bilda absolutbeloppet $|f(x, y) - A|$, byt till polära koordinater, och försök att göra $|f(x, y) - A|$ oberoende av φ genom en lämplig uppskattning uppåt.
- Visa att denna uppskattning går mot 0 då $r \to 0$.

Beräkning av gränsvärden då $|(x,y)| \to \infty$

(Fyll i vid behov)

Gränsvärden för allmänna funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

(Fyll i vid behov)

Kontinuitet

Låt funktionen f vara en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är definerad i punkten (a,b). Om det gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

är f kontinuerlig i (a,b). Antag att den reellvärda funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den slutna begränsade (dvs. kompakta) mängden D i plaet. Då antar funktionen både ett största och minsta värde i D.

Satsen o mellanliggande värden: Antag att den reellvärda funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på en bågvis sammanhängande mängd D i planet. Om (a_1,b_1) och (a_2,b_2) är punkter i D sådana att $f(a_1,b_1) \neq f(a_2,b_2)$, så antar funktionen samtliga värden mellan $f(a_1,b_1)$ och $f(a_2,b_2)$.