Flerdimensionell analys
Formelblad och anteckningar LP1 2025

Lucas Månsson

1 Kapitel 1: Grundläggande begrepp

1.1 Mängder och tallinjen $\mathbb{R}$

Snitt, union och differens:

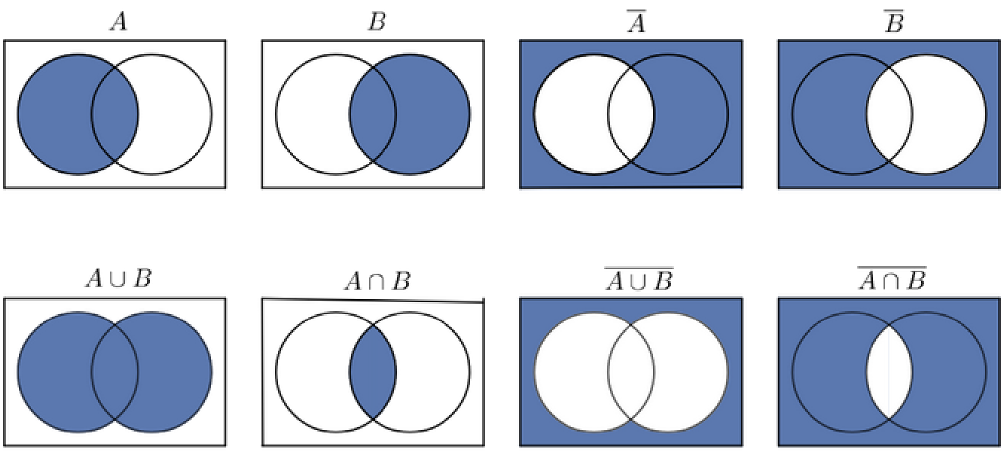

Figure 1:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B$$

Absolutbelopp:

$$|ab| = |a||b|, \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

1.2 Planet $\mathbb{R}^2$ och rummet $\mathbb{R}^3$

Avståndsformel.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mängder i planet och rummet

Omgivning: Med en omgivning av punkten (a, b) i planet menar vi alla punkter i en cirkelskiva kring denna. Detta kan uttryckas:

$$|(x, y) - (a, b)| < d$$

Notera att den stränga olikheten ovan innebär att punkterna på själva cirkeln inte ingår i omgivningen.

Öppen och sluten mängd.

1.3 Begrepp och metoder från linjär algebra

Vektorer

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

$$u - v = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$

$$\lambda u = \lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Skalärprodukt och vektorprodukt

Skalärprodukt:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$

$$u \cdot v = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Ortogonal projektion

En ortogonal projektion kan beräknas med projektionsformeln.

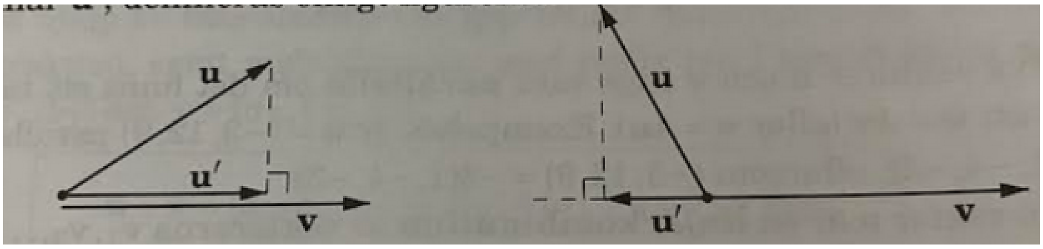

Figure 2:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

Linjer

Vi kan beskriva en linje i planet om vi känner till en punkt P på linjen och en riktningsvektor v som anger dess riktning.

Om $P = (x_0, y_0)$ och $v = (v_1, v_2)$ så blir linjens ekvation i parameterform:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Normalvektor: Varje linje i planet kan beskrivas på normalform:

$$ax + by + c = 0$$

Om vi plockar ut koefficienterna framför x och y och bildar vektorn $n = (a, b)$ blir n vinkelrät mot linjen.

Givet en punkt $P = (x_0, y_0)$ och normalvektor $n = (a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Plan

Med hjälp av en punkt och två icke-parallella riktningsvektorer kan man få ett plan på parameterform i rummet.

Matriser och determinanter

1.4 Rummet $\mathbb{R}^n$

2 Kapitel 2: Analytisk geometri

2.1 Geometri i $\mathbb{R}^2$

Sammanfattning av första- och andragradskurvor:

Rät linje:

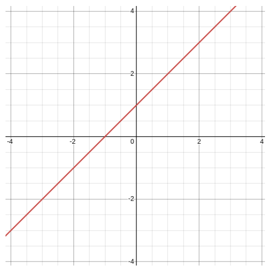

Figure 3:

$$ax + by + c = 0$$

Parabel:

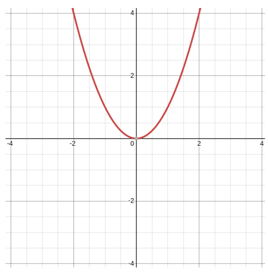

Figure 4:

$$y = ax^2$$

Cirkel:

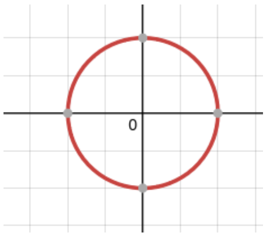

Figure 5:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellips

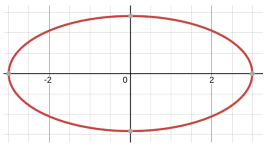

Figure 6:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

Hyperbel

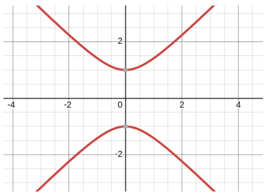

Figure 7:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

För en hyperbel med höger-vänster öppen:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

2.2 Geometri i $\mathbb{R}^3$

Sammanfattning av första- och andragradskurvor

Plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

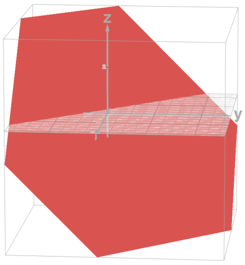

Figure 8:

Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

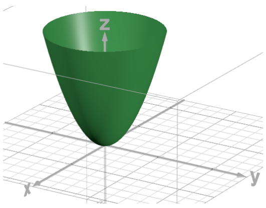

Figure 9:

Kon

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

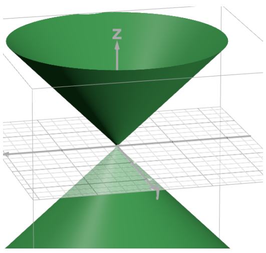

Figure 10:

Sfär

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

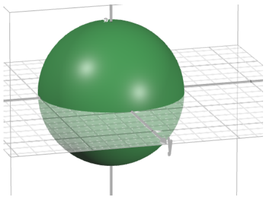

Figure 11:

Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

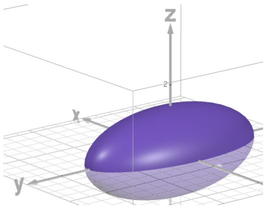

Figure 12:

Hyperbolisk paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

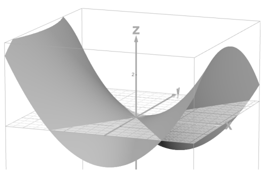

Figure 13:

Hyperboloid (enmantlad)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

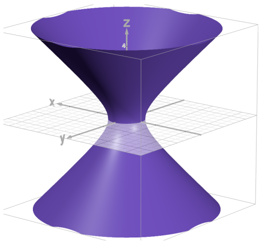

Figure 14:

Hyperboloid (tvåmantlad)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

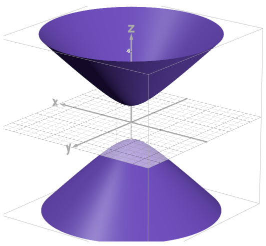

Figure 15:

2.3 Polära och rympolära koordinater

Polära koordinater

En punkt P i planet med rätvinkliga koordinater (x, y), kan också beskrivas med avståndet r från origo tillsammans med vinkel φ mot positiva x-axeln. P har då polära koordinaterna (r, φ).

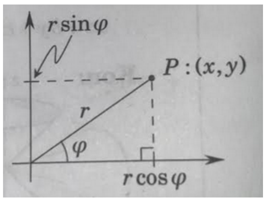

Figure 16:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

I de fall vi har annan medelpunkt än origo, ex. (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\varphi, \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

Om vi vill beskriva en ellipsskiva, snarare än bara en ellips:

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\sin\varphi, \\ y = y_0 + ar\sin\varphi \end{cases}$$

Cylindriska och rymdpolära koordinater

Cylindriska koordinater:

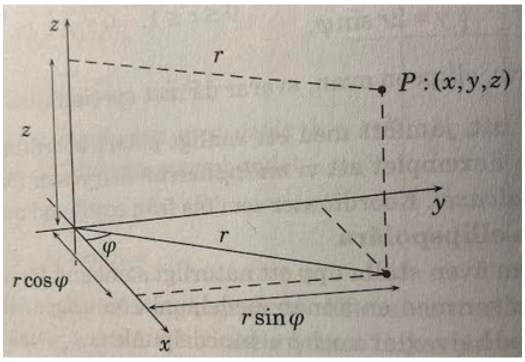

Figure 17:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

En annan koordinat än z kan vara oförändrad.

Rymdpolära koordinater:

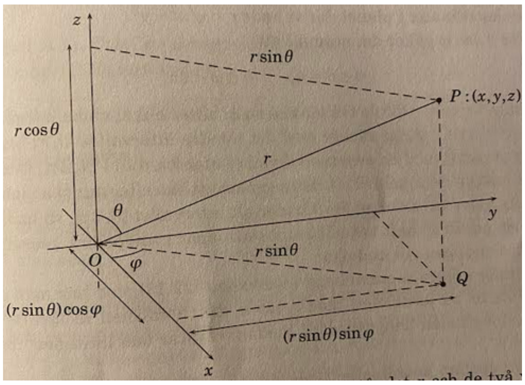

Figure 18:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

3 Kapitel 3: Funktioner

3.1 Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion är av typen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dvs. en funktion av n variabler där varje funktionsvärde är reellt.

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En funktion f av två variabler består av en definitionsmängd $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ och en avbildningsregel:

$$(x, y) \in D_f \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Nivåkurvor och nivåytor

En nivåkurva består av samtliga punkter i xy-planet som ger samma funktionsvärde. Låt f vara en funktion av två variabler, och C, en konstant. Mängden i xy - planet som ges av ekvationen:

$$f(x, y) = C$$

kallas en **nivåkurva** till f. Konstanten C motsvarar således “höjden över xy-planet”.

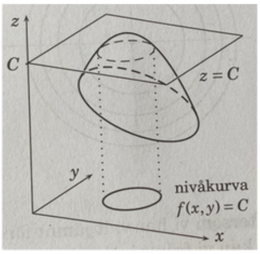

Figure 19:

3.2 Vektorvärda funktioner

En funktion av typen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, där $p \geq 2$, kallas **vektorvärd**. eftersom funktionsvärdena då är vektorer.

Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (kurvor)

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (ytor)

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (koordinatbyten)

(fyll i senare)

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (vektorfält)

(fyll i senare)

3.3 Sammansättning av funktioner

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

3.4 Gränsvärden och kontinuitet

Definition av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

Vi säger att $f(x, y)$ har gränsvärdet A då $(x, y) \to (a, b)$, och skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A,$$

Beräkning av gränsvärden då $(x, y) \to (a, b)$

I envariabelfallet finns det endast två sätt att närma sig en punkt. Med två variabler finns det oändligt många.Ett sätt att hantera är att uttrycka punkterna i polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Tillvägagångssätt:

- Gör en kvalificerad gissning av vad gränsvärdet bör vara
- Bilda absolutbeloppet $|f(x, y) - A|$, byt till polära koordinater, och försök att göra $|f(x, y) - A|$ oberoende av φ genom en lämplig uppskattning uppåt.
- Visa att denna uppskattning går mot 0 då $r \to 0$.

Beräkning av gränsvärden då $|(x, y)| \to \infty$

(Fyll i vid behov)

Gränsvärden för allmänna funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

(Fyll i vid behov)

Kontinuitet

Låt funktionen f vara en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är definerad i punkten (a, b). Om det gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

är f kontinuerlig i (a, b). Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den slutna begränsade (dvs. kompakta) mängden D i plaet. Då antar funktionen både ett största och minsta värde i D.

Satsen om mellanliggande värden: Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på en bågvis sammanhängande mängd D i planet. Om (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är punkter i D sådana att $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$, så antar funktionen samtliga värden mellan $f(a_1, b_1)$ och $f(a_2, b_2)$.

4 Differentialkalkyl

4.1 Partiella derivator

Definition

Antag att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en omgivning av punkten (a, b). Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{h}$$

existerar (ändligt), så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på x i (a, b). Själva gränsvärdet kallas den partiella derivatan av f med avseende på x i punkten (a, b), och betecknas $f'_x(a, b)$

Geometrisk tolkning

Att sätta y konstant lika med b innebär att geometriskt att vi skär funktionsytan $z = f(x, y)$ med planet $y = b$. Skärningen blir en kurva. Kurvan kan ses som funktionen $z = g(x)$.

Beräkning

$$f'_{x_j}(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_n, ..., a_j + h, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

Tangentplan

Ett tangentplan ges av:

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

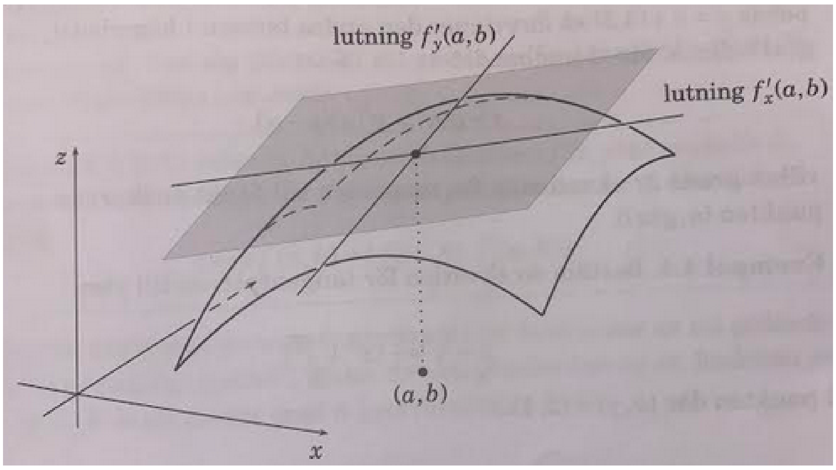

Figure 20: Illustration av ett tangentplan

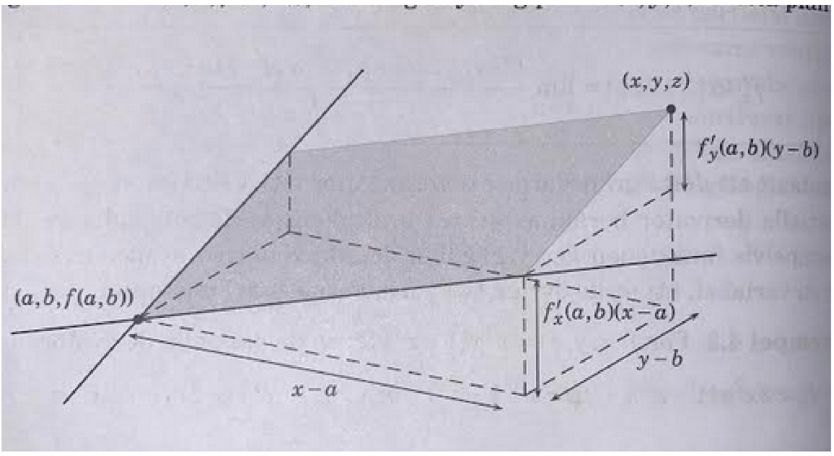

Figure 21: Illustration av ett tangentplans ekvation

Gradient

Antag att funktionen $f(x,y)$ är partiellt deriverbar i punkten (a,b). Vi definierar gradienten av f i (a,b) som vektorn

$$f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b)).$$

Riktningsderivata

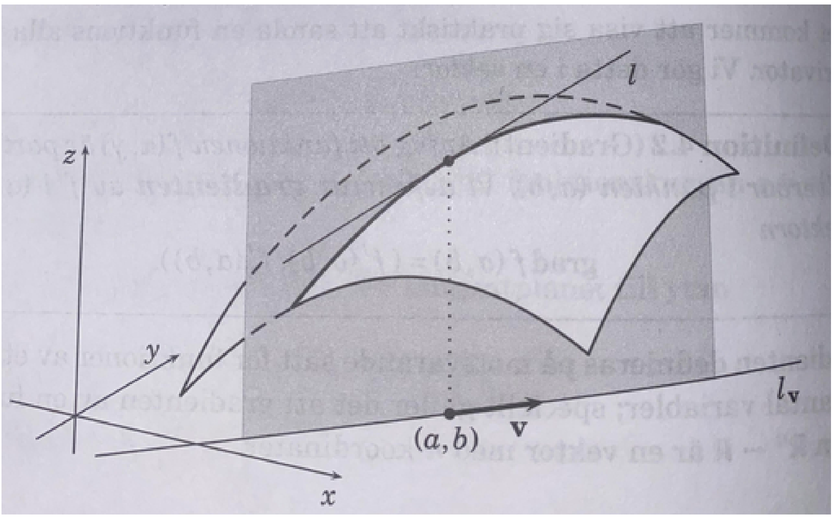

Figure 22: Riktningsderivata?

$$l_{\mathbf{v}}(x, y) = (a, b) + t(v_1, v_2) = (a + tv_1, b + tv_2)$$

Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten (a, b) och att $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en vektor med längd 1. Vi definierar riktningsderivatan av f i punkten (a, b) i rikningen $\mathbf{v}$, enligt

$$f'_v(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar (ändligt).

4.2 Differentierbarhet

Defintion: Antag att funktionen f är defininerіad i en omgivning av punkten (a, b). Vi säger att f är differentierbar i punkten (a, b) om det finns tal A och B sådana att:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2}p(h, k),$$

för någon funktion p sådan att $p(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$.

Sats 1: Antag att funktionen $f(x, y)$ är differentierbar i punkten (a, b). Då är f partiellt deriverbar i (a, b), och det gäller att:

$$f'_x(a, b) = A$$

och

$$f'_y(a,b) = B$$

där A och B är talen i definitionen.

Sats 2: Om funktionen f är differentierbar i punkten (a,b) så är f också kontinuerlig i (a,b).t

4.3 Kedjeregeln (fyll ut?)

Antag att g_1 och g_2 är deriverbara i punkten x, och att $f(u,v)$ är differentierbar i punkten $(g_1(x), g_2(x))$. Då är den sammansatta funktionen $h(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), g_2(x))$ deriverbar i x med derivatan

$$h'(x) = f'_u(g(x)) * g'_1(x) + f'_v(g(x)) * g'_2(x)$$

4.4 Mer om gradient och riktningsderivata

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar på det öppna området D, och att D är bågvis sammanhängande. Om det gäller att grad $f(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \in D$ så är f konstant på D.

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar i punkten (a,b) och att $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en vektor med längd 1. Då ges riktningsderivatan av f i punkten (a,b), i riktningen $\mathbf{v}$, av skalärprodukten

$$f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \text{grad} f(a,b) * \mathbf{v}$$

Sats: Antag att funktionen f är differentierbar i punkten (a,b). Tillväxthastigheten för f i (a,b) varierar mellan $-|\text{grad} f(a,b)|$ och $|\text{grad} f(a,b)|$. Alltså:

$$-|\text{grad} f(a,b)| \leq f'_v(a,b) \leq |\text{grad} f(a,b)|$$

Sats: Antag att funktionen f är kontinuerligt partiellt deriverbar i punkten (a,b) och att $\text{grad} f(a,b) \neq 0$. Om Υ är nivåkurvan till f genom punkten (a,b) så gäller det att $\text{grad} f(a,b)$ är ortogonal mot Υ i (a,b).

Sats: Antag att funktionen f är kontinuerligt partiellt deriverbar i punkten (a,b,c), och att $\text{grad} f(a,b,c) \neq 0$. Om Γ är nivåyan till f genom punkten (a,b,c) så gäller det att $\text{grad} f(a,b,c)$ är ortogonal mot Γi(a, b, c).

4.5 Differentialer och feluppskattning