

Flerdimensionell analys

Formelblad och anteckningar LP1 2025

Lucas Månsson

1 Kapitel 1: Grundläggande begrepp

1.1 Mängder och tallinjen \mathbb{R}

Snitt, union och differens:

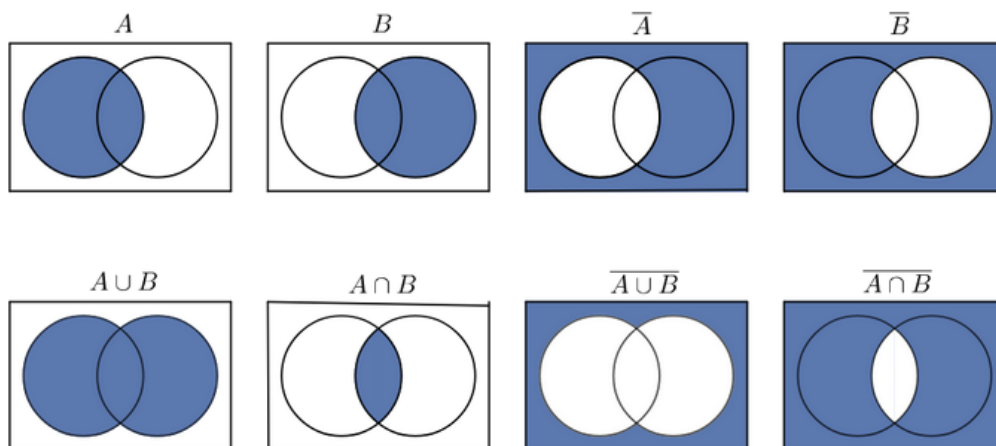


Figure 1:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B$$

Absolutbelopp:

$$|ab| = |a||b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

1.2 Planet \mathbb{R}^2 och rummet \mathbb{R}^3

Avståndsformel.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mängder i planet och rummet

Omgivning: Med en omgivning av punkten (a, b) i planet menar vi alla punkter i en cirkelskiva kring denna. Detta kan uttryckas:

$$|(x, y) - (a, b)| < d$$

Notera att den stränga olikheten ovan innebär att punkterna på själva cirkeln inte ingår i omgivningen.

Öppen och sluten mängd.

1.3 Begrepp och metoder från linjär algebra

Vektorer

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$u - v = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

$$\lambda u = \lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Skalarprodukt och vektorprodukt

Skalarprodukt:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$

$$u \cdot v = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Ortogonal projektion

En ortogonal projektion kan beräknas med projektionsformeln.

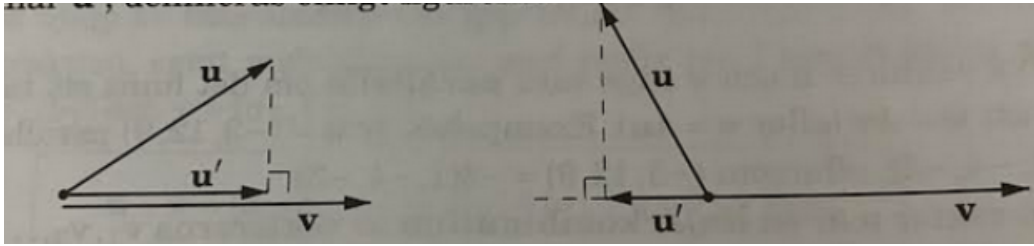


Figure 2:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

Linjer

Vi kan beskriva en linje i planet om vi känner till en punkt P på linjen och en riktningsvektor v som anger dess riktning.

Om $P = (x_0, y_0)$ och $v = (v_1, v_2)$ så blir linjens ekvation i parameterform:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Normalvektor: Varje linje i planet kan beskrivas på normalform:

$$ax + by + c = 0$$

Om vi plockar ut koefficienterna framför x och y och bildar vektorn $n = (a, b)$ blir n vinkelrät mot linjen.

Givet en punkt $P = (x_0, y_0)$ och normalvektor $n = (a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Plan

Med hjälp av en punkt och två icke-parallella riktningsvektorer kan man få ett plan på parameterform i rummet.

Matriser och determinanter

1.4 Rummet \mathbb{R}^n

2 Kapitel 2: Analytisk geometri

2.1 Geometri i \mathbb{R}^2

Sammanfattning av första- och andragradskurvor:

Rät linje:

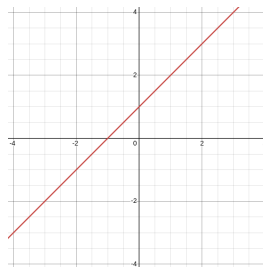


Figure 3:

$$ax + by + c = 0$$

Parabel:

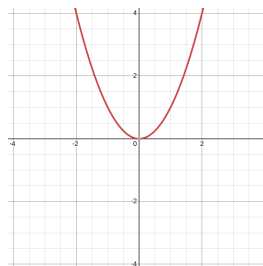


Figure 4:

$$y = ax^2$$

Cirkel:

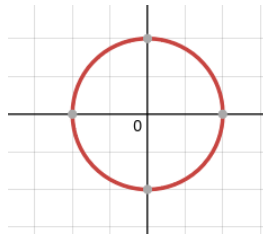


Figure 5:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellips

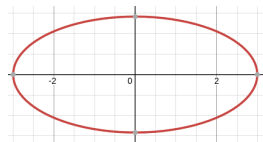


Figure 6:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm \frac{b}{a}x$$

Hyperbel

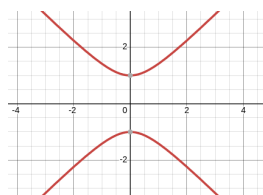


Figure 7:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm \frac{b}{a}x$$

För en hyperbel med höger-vänster öppen:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

2.2 Geometri i \mathbb{R}^3

Sammanfattning av första- och andragskurvor

Plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

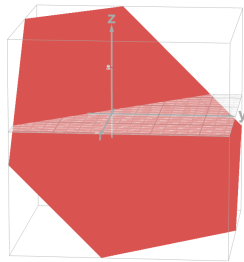


Figure 8:

Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

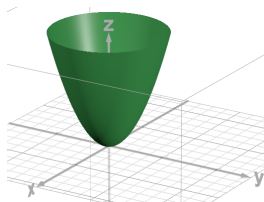


Figure 9:

Kon

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

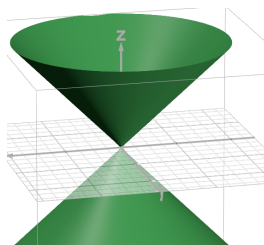


Figure 10:

Sfär

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

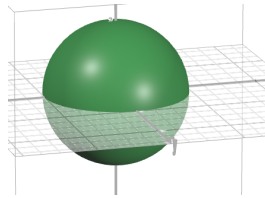


Figure 11:

Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

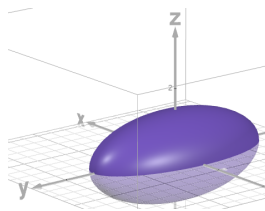


Figure 12:

Hyperbolisk paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

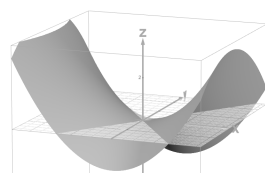


Figure 13:

Hyperboloid (enmantlad)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

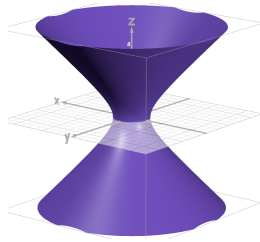


Figure 14:

Hyperboloid (tvåmantlad)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

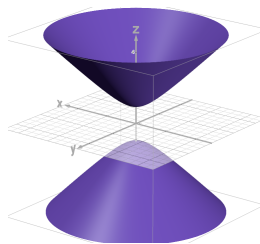


Figure 15:

2.3 Polära och rympolära koordinater

Polära koordinater

En punkt P i planet med rätvinkliga koordinater (x, y) , kan också beskrivas med avståndet r från origo tillsammans med vinkel φ mot positiva x-axeln. P har då polära koordinaterna (r, φ) .

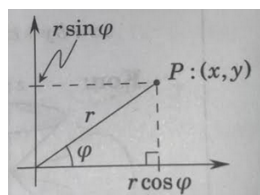


Figure 16:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

I de fall vi har annan medelpunkt än origo, ex. (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin \varphi, \\ y = y_0 + r \sin \varphi \end{cases}$$

Om vi vill beskriva en ellipsskiva, snarare än bara en ellips:

$$\begin{cases} x = x_0 + ar \sin \varphi, \\ y = y_0 + ar \sin \varphi \end{cases}$$

Cylindriska och rymdpolära koordinater

Cylindriska koordinater:

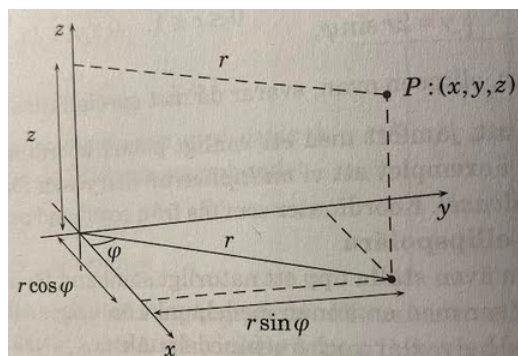


Figure 17:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{cases}$$

En annan koordinat än z kan vara oförändrad.

Rymdpolära koordinater:

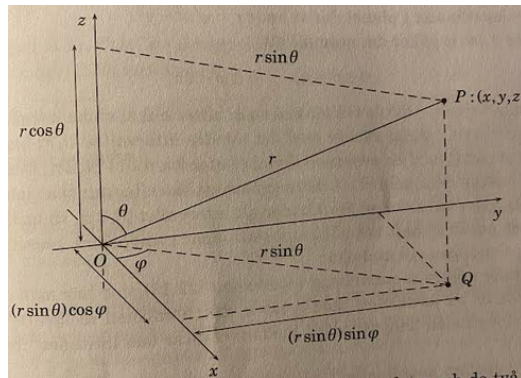


Figure 18:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

3 Kapitel 3: Funktioner

3.1 Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion är av typen

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dvs. en funktion av n variabler där varje funktionsvärde är reellt.

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

En funktion f av två variabler består av en definitionsmängd $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ och en avbildningsregel:

$$(x, y) \in D_f \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Nivåkurvor och nivååtor

En nivåkurva består av samtliga punkter i xy -planet som ger samma funktionsvärde. Låt f vara en funktion av två variabler, och C , en konstant. Mängden i xy -planet som ges av ekvationen:

$$f(x, y) = C$$

kallas en **nivåkurva** till f . Konstanten C motsvarar således "höjden över xy -planet".

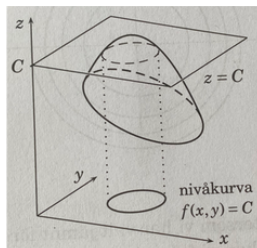


Figure 19:

3.2 Vektorvärda funktioner

En funktion av typen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $p \geq 2$, kallas **vektorvärd**. eftersom funktionsvärdena då är vektorer.

Funktioner av typen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (kurvor)

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ytor)

$$\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (koordinatbyten)

(fyll i senare)

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (vektorfält)

(fyll i senare)

3.3 Sammansättning av funktioner

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

3.4 Gränsvärden och kontinuitet

Definition av gränsvärden då $(x, y) \rightarrow (a, b)$

Vi säger att $f(x, y)$ har gränsvärdet A då $(x, y) \rightarrow (a, b)$, och skriver

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A,$$

Beräkning av gränsvärden då $(x, y) \rightarrow (a, b)$

I envariabelfallet finns det endast två sätt att närma sig en punkt. Med två variabler finns det oändligt många. Ett sätt att hantera är att uttrycka punkterna i polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Tillvägagångssätt:

- Gör en kvalificerad gissning av vad gränsvärdet bör vara
- Bilda absolutbeloppet $|f(x, y) - A|$, byt till polära koordinater, och försök att göra $|f(x, y) - A|$ oberoende av φ genom en lämplig uppskattning uppåt.
- Visa att denna uppskattning går mot 0 då $r \rightarrow 0$.

Beräkning av gränsvärden då $|(x, y)| \rightarrow \infty$

(Fyll i vid behov)

Gränsvärden för allmänna funktioner $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

(Fyll i vid behov)

Kontinuitet

Låt funktionen f vara en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som är definerad i punkten (a, b) . Om det gäller att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

är f kontinuerlig i (a, b) . Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den slutna begränsade (dvs. kompakta) mängden D i planet. Då antar funktionen både ett största och minsta värde i D .

Satsen om mellanliggande värden: Antag att den reellvärda funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på en bågvis sammanhängande mängd D i planet. Om (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är punkter i D sådana att $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$, så antar funktionen samtliga värden mellan $f(a_1, b_1)$ och $f(a_2, b_2)$.

4 Differentialkalkyl

4.1 Partiella derivator

Definition

Antag att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en omgivning av punkten (a, b) . Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

existerar (ändligt), så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på x i (a, b) . Själva gränsvärdet kallas den partiella derivatan av f med avseende på x i punkten (a, b) , och betecknas $f'_x(a, b)$

Geometrisk tolkning

Att sätta y konstant lika med b innebär att geometriskt att vi skär funktionssytan $z = f(x, y)$ med planet $y = b$. Skärningen blir en kurva. Kurvan kan ses som funktionen $z = g(x)$.

Beräkning

$$f'_{x_j}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Tangentplan

Ett tangentplan ges av:

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

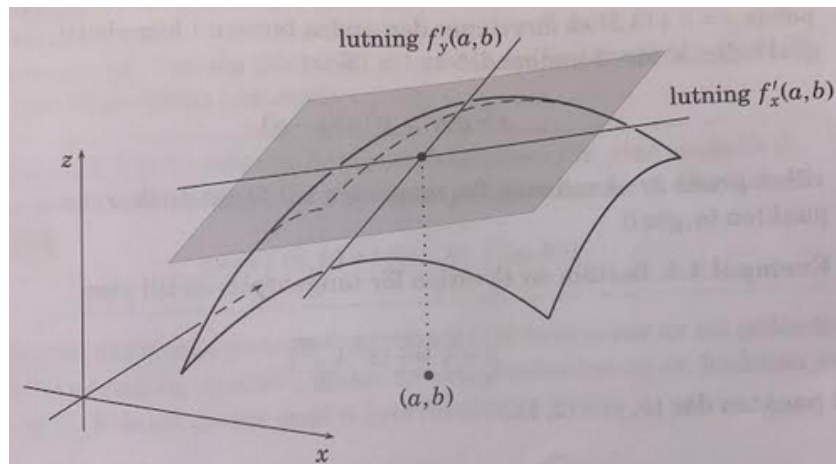


Figure 20: Illustration av ett tangentplan

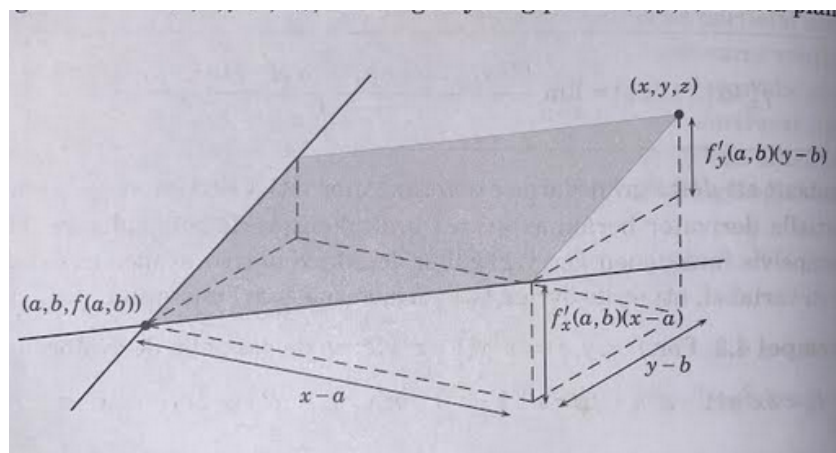


Figure 21: Illustration av ett tangentplans ekvation

Gradient

Antag att funktionen $f(x, y)$ är partiellt deriverbar i punkten (a, b) . Vi definierar gradienten av f i (a, b) som vektorn

$$\nabla f(a, b) = (f'_x(a, b), f'_y(a, b)).$$

Riktningsderivata

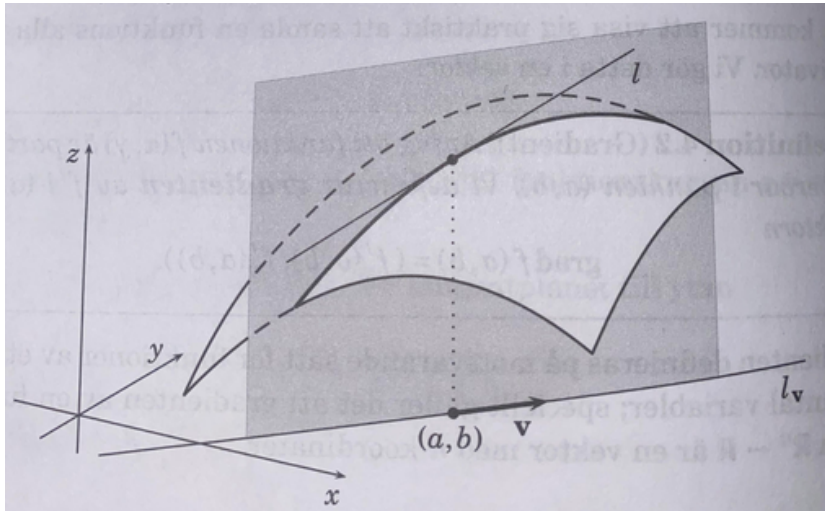


Figure 22: Riktningsderivata?

$$l_{\mathbf{v}}(x, y) = (a, b) + t(v_1, v_2) = (a + tv_1, b + tv_2)$$

Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten (a, b) och att $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en vektor med längd 1. Vi definierar riktningsderivatan av f i punkten (a, b) i rikningen \mathbf{v} , enligt

$$f'_v(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar (ändligt).