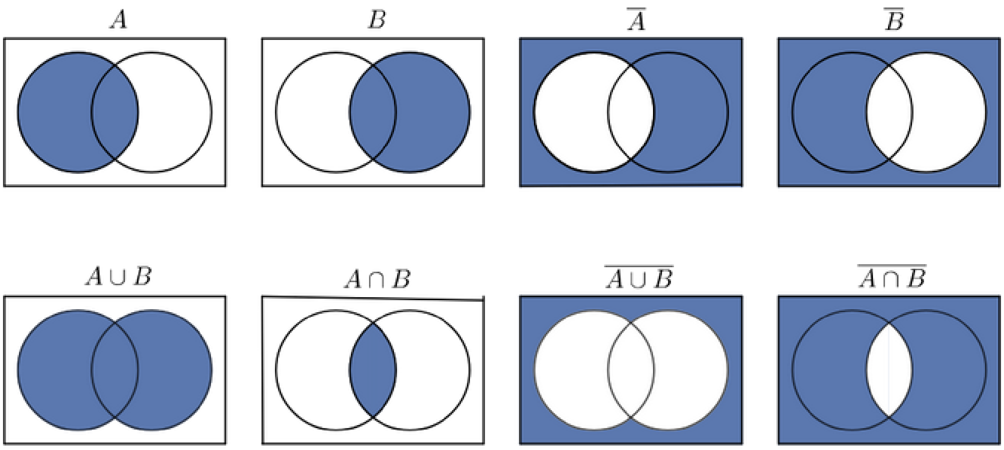
Flerdimensionell analys
Formelblad och anteckningar LP1 2025

Lucas Månsson

1 Kapitel 1: Grundläggande begrepp

1.1 Mängder och tallinjen $\mathbb{R}$

Snitt, union och differens:



$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B$$

Absolutbelopp:

$$|ab| = |a||b|, \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

1.2 Planet $\mathbb{R}^2$ och rummet $\mathbb{R}^3$

Avståndsformel.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mängder i planet och rummet

Omgivning: Med en omgivning av punkten (a, b) i planet menar vi alla punkter i en cirkelskiva kring denna. Detta kan uttryckas:

$$|(x, y) - (a, b)| < d$$

Notera att den stränga olikheten ovan innebär att punkterna på själva cirkeln inte ingår i omgivningen.

Öppen och sluten mängd.

1.3 Begrepp och metoder från linjär algebra

Vektorer

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$
$$u - v = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$
$$\lambda u = \lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$
$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Skalärprodukt och vektorprodukt

Skalärprodukt:

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$
$$u \cdot v = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Ortogonal projektion

En ortogonal projektion kan beräknas med projektionsformeln.

Linjer

Vi kan beskriva en linje i planet om vi känner till en punkt P på linjen och en riktningsvektor v som anger dess riktning.

Om $P = (x_0, y_0)$ och $v = (v_1, v_2)$ så blir linjens ekvation i parameterform:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Normalvektor: Varje linje i planet kan beskrivas på normalform:

$$ax + by + c = 0$$

Om vi plockar ut koefficienterna framför x och y och bildar vektorn $n = (a, b)$ blir n vinkelrät mot linjen.

Givet en punkt $P = (x_0, y_0)$ och normalvektor $n = (a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Plan

Med hjälp av en punkt och två icke-parallella riktningsvektorer kan man få ett plan på parameterform i rummet.

Matriser och determinanter

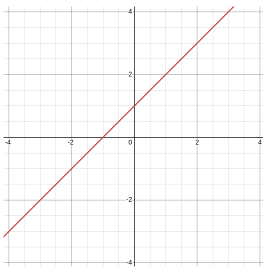
1.4 Rummet $\mathbb{R}^n$

2 Kapitel 2: Analytisk geometri

2.1 Geometri i $\mathbb{R}^2$

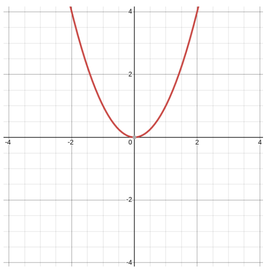
Sammanfattning av första- och andragradskurvor:

Rät linje:



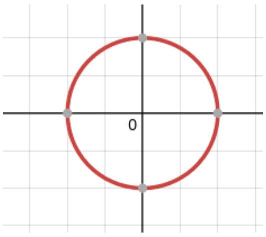
$$ax + by + c = 0$$

Parabel:



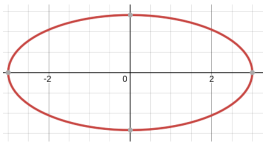
$$y = ax^2$$

Cirkel:



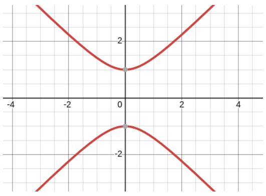
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ellips



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{asymptoter: } y = \pm\frac{b}{a}x$$

För en hyperbel med höger-vänster öppen:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

2.2 Geometri i $\mathbb{R}^3$

3 Kapitel 3: Funktioner

3.1 Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion är av typen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dvs. en funktion av n variabler där varje funktionsvärde är reellt.

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En funktion f av två variabler består av en definitionsmängd $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ och en avbildningsregel:

$$(x, y) \in D_f \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Nivåkurvor och nivåytor

En nivåkurva består av samtliga punkter i xy-planet som ger samma funktionsvärde. Låt f vara en funktion av två variabler, och C, en konstant. Mängden i xy - planet som ges av ekvationen:

$$f(x, y) = C$$

kallas en **nivåkurva** till f. Konstanten C motsvarar således "höjden över xy-planet".