

graduação 28/Abr/2017

O MEF em problemas Potenciais

J. Leonel M. Fernandes

(Prof. Associado)

Mecânica Computacional

Departamento de Engenharia Mecânica

IST – Instituto Superior Técnico

SUMÁRIO

- *O MEF em Problemas Potenciais*
- Introdução
- **Condução de calor em sólidos**
- Formulação Clássica
- Formulação Fraca simétrica
- Método E.F. de Galerkin
- Cálculo do fluxo em pontos interiores
- Nota sobre a *analogia térmica*
- **Escoamento potencial incompressível de fluidos**
- Escoamento usando o *potencial de velocidade*

SUMÁRIO / 2

- Escoamento potencial usando a *função de corrente*
- Cálculo das velocidades
- ***Torção de barras prismáticas (teoria de Prandtl)***
- Um exemplo 2D
- Elementos triangulares
- O Elemento *triangular de 3 nós*
- Elementos rectangulares
- O Elemento *rectangular de 4 nós*
- Notas adicionais sobre o elemento rectangular
- Bibliografia

Introdução

- Neste capítulo estudamos problemas em domínios 2D onde a incógnita $u(x,y)$ é escalar e a equação diferencial às derivadas parciais é de segunda ordem, tomando a forma:

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) + bu = f,$$

onde k , b e f são funções contínuas de (x,y) e são dadas. Esta equação diferencial descreve vários problemas físicos distintos em outras tantas aplicações.

Introdução / 2

- Com este tipo de equações podemos tratar problemas de difusão de massa em meios porosos, condução de calor em sólidos, escoamento potencial de fluidos, deflexão de membranas elásticas, torção de barras prismáticas, condução eléctrica, campo electrostático, campo magnético, campo electromagnético, vibrações acústicas e ondas (análise modal).
- Nos programas comerciais de E.F. é habitual haver um elemento **térmico** que permite tratar, **por analogia**, todos estes problemas !

Introdução / 3

- A equação diferencial resulta da aplicação de um princípio de balanço ou conservação: massa, energia, quantidade de movimento, etc. No caso da **condução de calor** em sólidos, é válido o princípio da conservação da energia.
- O comportamento do material é descrito por uma relação constitutiva, como por exemplo, a **lei de Fourier** para a condução de calor em sólidos: relaciona o vector fluxo de calor com simétrico do gradiente de temperatura através da **condutividade térmica** do material.

Relação constitutiva: lei de Fourier

- Define-se fluxo de calor como a potência calorífica por unidade de área que atravessa uma seção com uma certa orientação – é um **vector** !
- A **lei de Fourier** para a condução de calor em sólidos relaciona o vector fluxo de calor com simétrico do gradiente de temperatura através da **condutividade térmica** k do material:

$$\sigma(x, y) = -k \nabla u$$

- Admite-se que o material é homogéneo e isotrópico.

Vector fluxo no interior e na fronteira

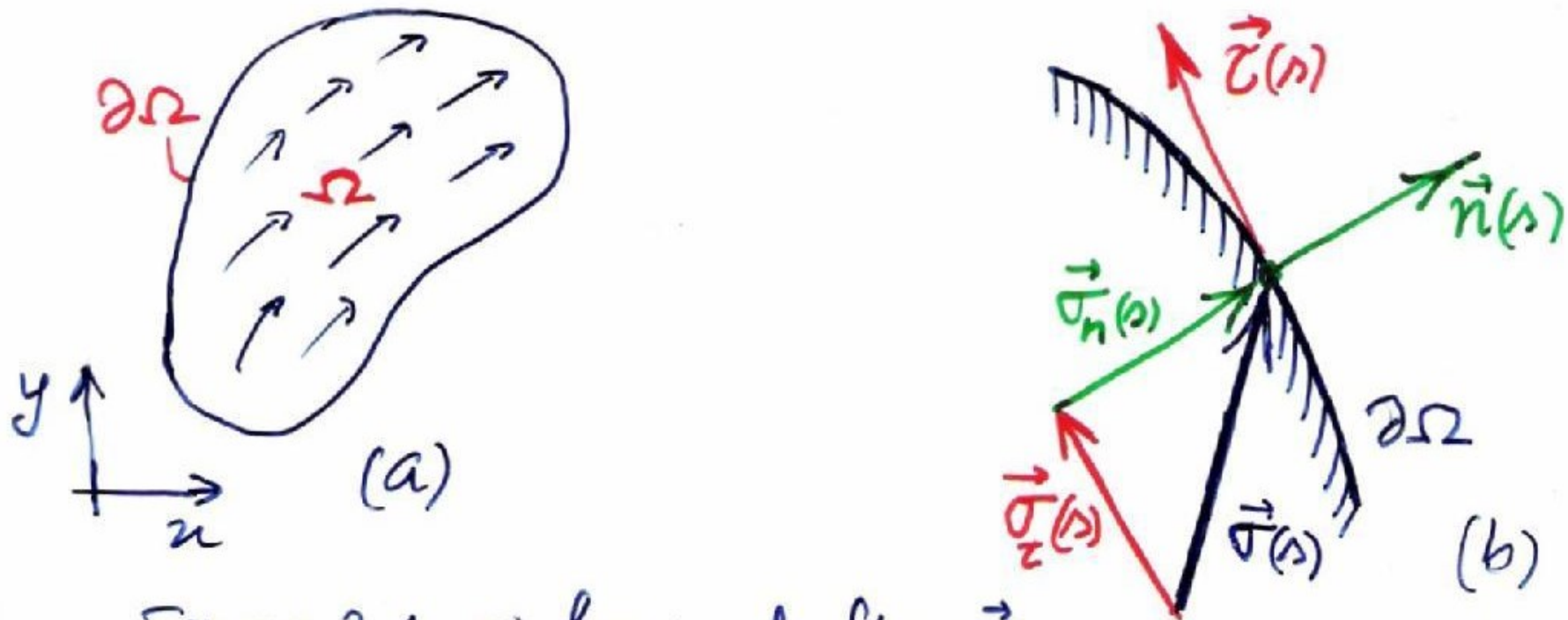


Figura 2.1 a) Campo do fluxo $\vec{\sigma}$
b) Decomposição do fluxo $\vec{\sigma}$ num ponto da fronteira nas componentes normal e tangencial

Teorema da Divergência

- O fluxo total que sai do domínio Ω através da sua fronteira $\partial\Omega$ é, portanto

$$\Sigma = \int_{\partial\Omega} \sigma_n ds = \int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\sigma} dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\sigma} dx dy$$

- Em que se recorreu à definição de divergência. A expressão

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\sigma} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma_n ds$$

- Traduz o célebre teorema da divergência de Gauss-Green-Ostrogradski, cuja validade se estende a três (e mais) dimensões.

Balanço de Energia

- O princípio de balanço (de energia, etc.) consiste na afirmação de que o fluxo da quantidade de u através da fronteira $\partial\omega$ de um subdomínio ω arbitrário, deve ser igual à produção de u no interior do subdomínio ω .
- Seja então f a função que determina a densidade das fontes distribuídas no domínio Ω . Em face do princípio de conservação, devemos ter, para ω arbitrário

$$\int_{\partial\omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega} f \, dx \, dy.$$

Equação Diferencial/2

- Podemos ainda considerar no balanço uma perda de calor para o exterior por convecção o que se traduz numa dependência linear (bu) com a temperatura $u(x,y)$.
- Introduzindo a relação constitutiva (*Lei de Fourier*) e simplificando um pouco a notação, chegamos à equação diferencial linear de segunda ordem

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) + bu = f,$$

- Esta equação é válida em todos os pontos em que os dados k , b , ou f são regulares.

Equação Diferencial/3

- Também podemos estudar os casos em que os dados são irregulares (há um salto) como por exemplo, quando temos **vários materiais** em presença.
- Como casos particulares importantes temos a equação de Laplace (*escoamento potencial*) e a equação de Poisson (*teoria da membrana e da torção de Prandtl*).

Condições de fronteira essenciais

- Condições de fronteira essenciais. O valor de u (temperatura) numa parte da fronteira, $\partial\Omega_1$, é especificado.
- Trata-se de uma condição de fronteira do tipo de Dirichlet.
- Em $\partial\Omega_1$, a condição de fronteira escreve-se simplesmente

$$u(s) = \hat{u}(s), \quad \forall s \in \partial\Omega_1$$

- em que \hat{u} é dado.

Condições de fronteira naturais

- Condições de fronteira naturais. Em $\partial\Omega_2$, a outra parte da fronteira, as condições de fronteira podem assumir duas formas. Uma, mais simples, é a do fluxo normal especificado (Neumann),

$$\sigma_n(s) = -k \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\sigma}(s), \quad \forall s \in \partial\Omega_2.$$

- A outra é do tipo (Robin)

$$\sigma_n(s) = -k \frac{\partial u}{\partial n} = p(s) [\underline{u}(s) - \hat{u}(s)], \quad \forall s \in \partial\Omega_2.$$

- onde $p(s)$ é um coeficiente de convecção para o meio fluido exterior.

Formulação Clássica 2D

- O problema de v.f. consiste em, com estes dados, determinar a função $u=u(x,y)$ que satisfaça:
- 1. A equação diferencial

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) + bu = f \quad \text{em } \Omega.$$

- 2. A condição de fronteira essencial $u = \hat{u} \quad \text{em } \partial\Omega_1$
- 3. As condições de fronteira naturais

$$\left. \begin{array}{l} -\kappa \nabla u \cdot \vec{n} = \hat{\sigma} \\ \text{ou} \\ -\kappa \nabla u \cdot \vec{n} = p(u - \hat{u}) \end{array} \right\} \quad \text{em } \partial\Omega_2$$

Formulação Fraca Simétrica

- Determinar a função $u(x,y)$ contínua em Ω , tal que $u = \hat{u}$ em $\partial\Omega_1$, que verifique

$$\int_{\Omega} (\kappa \nabla u \cdot \nabla v + b u v) d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} p u v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \gamma v ds$$

em que $\gamma = p \hat{u}$.

- Para todas as funções $v(x,y)$ contínuas em Ω e $v = 0$ em $\partial\Omega_1$.

Continuidade das funções admissíveis

- Quanto à regularidade das funções admissíveis a formulação fraca mostra que os integrais são bem calculados se a função v (e u também) for de quadrado integrável e se $\nabla v \cdot \nabla v$ também for integrável. Estes requisitos dão

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla v + v^2) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v^2 \right] d\Omega < \infty$$

- Ou seja, a exigência de ter derivadas parciais de quadrado integrável obriga a que v seja *contínua*.

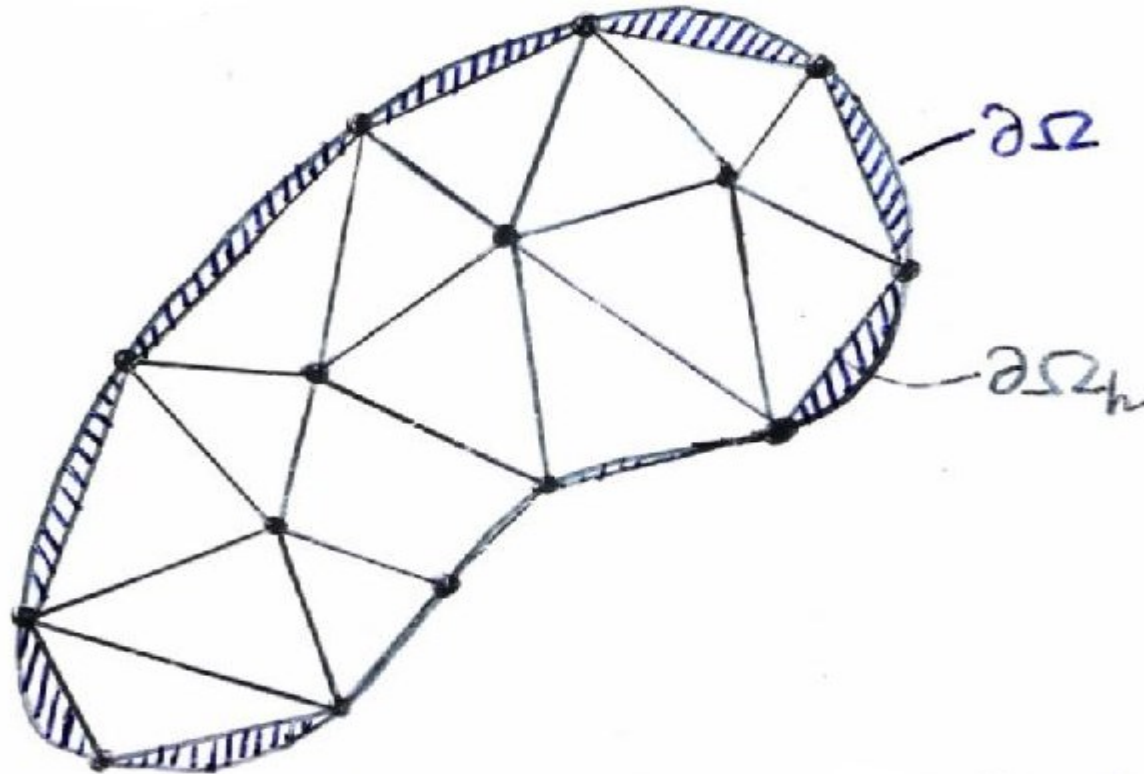
Aproximações por elementos finitos 2D

- O problema variacional consiste em encontrar a função $u(x,y)$ contínua em Ω , com $u = \hat{u}$ em $\partial\Omega_1$, tal que

$$\int_{\Omega} \left[k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b u v \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} p u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} r v d\Omega, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \text{ e } v=0 \text{ em } \partial\Omega_1$$

- A obtenção de uma solução aproximada do problema segue a metodologia apresentada para resolver problemas unidimensionais.

Representação aproximada da fronteira



- Figura 2.7 Discretização por elementos finitos de um domínio Ω

Método de Galerkin

- As funções de teste $v_h \in H^h$ escrevem-se agora na forma

$$v_h(x, y) = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j(x, y)$$

- A solução aproximada que pretendemos obter é dada por

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x, y)$$

- As condições de fronteira de Dirichlet (essenciais) em $\partial\Omega$, costumam ser substituídas pelas suas *interpoladas* nos *nós*.

Formulação fraca discretizada

$$\int_{\Omega_h} \left[\kappa \left(\frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) + b u_h v_h \right] + \int_{\partial\Omega_{2h}} \phi u_h v_h \, ds =$$
$$= \int_{\Omega_h} f v_h \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}} \tau v_h \, ds.$$

- Substituindo u_h e v_h , pelas expressões anteriores chegamos ao sistema de equações lineares

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} u_j = F_i, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

Matriz de rigidez e vector de cargas

- A matriz de rigidez **global** K é dada por

$$K_{ij} = \int_{\Omega_h} [k \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + b \phi_i \phi_j] + \int_{\partial \Omega_{2h}} p \phi_i \phi_j d\Omega$$

- E o vector de cargas **F global** é dado por

$$F_i = \int_{\Omega_h} f \phi_i d\Omega + \int_{\partial \Omega_{2h}} \gamma \phi_i d\Omega.$$

- Modificando o sistema para acomodar as condições de fronteira de Dirichlet (**essenciais**) e resolvendo-o em seguida, ficamos com os valores nodais u_j que definem a solução aproximada.

Interpolação das condições essenciais

- Em vez de \hat{u} , tomamos as aproximações

$$\hat{u}_h(x) = \sum_{j=1}^N \hat{u}_j \phi_j(x, y)$$

- E assim só temos de especificar \hat{u}_j nos nós de Ω_h .
- Então, o problema variacional consiste em determinar a função u_h , contínua em Ω_h , tal que $u_j = \hat{u}_j$ para todos os nós de Ω_h e que satisfaça, para qualquer v_h , contínua em Ω_h e $v_h = 0$ em $\partial\Omega_h$, a relação (formulação fraca discretizada):

Cálculo do fluxo em pontos interiores

- Resolvendo o sistema de equações final para os *deslocamentos* (*temperaturas*) nodais u_j , ficamos com a solução aproximada.
- A *temperatura* num ponto interior de um elemento pode ser obtida por interpolação usando-se as funções forma.

$$u_h^e(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^{Ne} \psi_i^e(x, y) u_i$$

- Os *fluxos* nos pontos interiores dos elementos são calculados por *derivação* deste campo.

Cálculo do fluxo em pontos interiores/2

- Os *fluxos* nos pontos interiores dos elementos podem ser obtidos por *derivação* das funções de forma:

$$\sigma_h^e(\mathbf{x}, y) = -k \nabla u_h^e(\mathbf{x}, y) = -k \sum_{i=1}^{Ne} u_i \nabla \psi_i^e(x, y)$$

- Como o *erro nas derivadas é menor* no interior dos elementos, é *recomendado* que os fluxos sejam calculados, ou no *centróide*, ou nos *pontos de integração* dos elementos – *sugestão: evitar calcular nos nós !*

Cálculo do fluxo em pontos interiores/3

- Os *fluxos nos nós* são descontínuos – os elementos adjacentes a um mesmo nó dão valores diferentes – há um *salto* ou *descontinuidade*. E os erros no fluxo são maiores nos nós !
- Para se calcular *os fluxos nos nós* (os códigos comerciais permitem fazê-lo), é preciso usar-se uma média ponderada dos valores de todos os elementos adjacentes a esses nós – é um procedimento mais complicado que, no entanto, permite *recuperar* alguma precisão.

Problemas de condução de calor e...+

- Até aqui ilustramos a aplicação do M.E.F. a problemas de *condução de calor* em sólidos
- A formulação apresentada enquadra os “*elementos térmicos*” encontrados em programas comerciais como o ANSYS e/ou o NX
- No entanto, explorando a *analogia* das equações diferenciais e condições de fronteira de *outros* problemas físicos com as da condução de calor, podemos aplicar os tais códigos e elementos a problemas de membrana, de torção e de escoamento potencial, entre outros !

Escoamento usando potencial de velocidade

- Se usarmos o potencial de velocidade para descrever um escoamento temos

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- Por outro lado o escoamento verifica a equação da (conservação da massa) continuidade:

$$\text{div } \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Escoamento usando potencial de velocidade/ 2

- Substituindo para o potencial, obtemos:

$$\text{div } \vec{U} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Temos então de resolver uma *equação de Laplace* para o *potencial de velocidade* sujeita a condições de fronteira mistas.
- As condições de fronteira podem ser 1) essenciais (Dirichlet): o potencial de velocidade é imposto; ou 2) naturais (Neumann): é especificada a velocidade normal, ou seja, o fluxo normal do potencial noutra parte da fronteira.

Condições de fronteira usando o potencial de velocidade / 3

- Exemplos: 1) Um perfil de velocidade uniforme à entrada corresponde a uma condição de Neumann na seção de entrada.
- 2) Uma parede sólida é impermeável, ou seja, tem uma velocidade nula na direção normal à parede (condição de Neumann).
- 3) Na seção de saída podemos impor um valor de potencial constante (condição essencial, do tipo de Dirichlet), nulo por exemplo, que serve como valor de referência para o potencial – corresponde a dizer que a velocidade tangencial é nula.

Escoamento potencial usando a função de corrente

- Recordando que o escoamento é irrotacional, temos

$$\text{rot } \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

- Por outro lado, considerando o caudal elementar entre linhas de corrente, podemos escrever:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Escoamento usando a função de corrente/2

- Substituindo para a função de corrente, obtemos:

$$\text{rot } \vec{U} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

- Temos então de resolver uma *equação de Laplace* para a *função de corrente* sujeita a condições de fronteira mistas.
- As condições de fronteira podem ser 1) essenciais (Dirichlet): o valor da função de corrente é imposto; ou 2) naturais (Neumann): é especificado o fluxo normal da função de corrente, que é uma *velocidade tangencial*.

Condições de fronteira usando a função de corrente/ 3

- Exemplos: 1) Um perfil de velocidade uniforme à entrada corresponde a uma distribuição linear em y da função de corrente na seção de entrada (condição de Dirichlet).
- 2) Uma parede sólida é impermeável, ou seja, tem um mesmo valor da função de corrente (condição de Dirichlet).
- 3) Na seção de saída podemos impor um valor de fluxo normal nulo = velocidade tangencial nula (condição natural, do tipo de Neumann).

Cálculo da velocidade no interior

- O vector velocidade pode ser calculado à custa do gradiente da função de corrente num ponto interior dum elemento por derivação das funções de forma
- O erro nas derivadas é **menor** no interior dos elementos, pelo que é **recomendado** que o gradiente seja calculado, ou no **centróide**, ou nos **pontos de integração** dos elementos – **sugestão**: evitar calcular nos nós (na versão Matlab) !
- Após o cálculo do gradiente, o vector de velocidade obtém-se rodando o vector gradiente de 90 graus no **sentido horário**.

Cálculo da velocidade no interior/ 2

- Esta operação (rotação a 90 graus) faz-se simplesmente usando-se a definição de velocidade dada anteriormente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- É este o campo de velocidade que deve ser representado num diagrama de setas (*help quiver*)

Torção de barras prismáticas

- A torção de barras prismáticas pode estudar-se usando (analogia da membrana) a função de tensão de Prandtl:

$$-\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = 2 \quad em \quad \Omega$$

- No contorno da barra é imposta uma condição de fronteira essencial homogénea:

$$\Psi(s) = 0 \quad em \quad \partial\Omega$$

- Trata-se de uma equação de Poisson sujeita a uma condição de fronteira do tipo de Dirichlet.

Torção de barras prismáticas/ 2

- As *tensões de corte* em qualquer ponto da secção da barra podem ser calculadas através de

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

- O *momento torsor* aplicado, M , está relacionado com o ângulo de torção por unidade de comprimento, θ , através da *rigidez torsional* (M/θ)

$$M = 2G\theta \int_{\Omega} \Psi(x, y) dx dy.$$

Um exemplo (2D)

- Vamos considerar o seguinte problema de Poisson a fim de ilustrar os aspectos acabados de tratar:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{em } \Omega \\ u &= 0 && \text{em } \Gamma_{41} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{em } \Gamma_{12}, \Gamma_{25}, \Gamma_{67} \text{ e } \Gamma_{74} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= \gamma && \text{em } \Gamma_{56} \end{aligned} \right\}$$

- em que Ω é o domínio representado na figura seguinte.

Figura 2.15(a) do exemplo

- $\Gamma_{41}, \Gamma_{12}, \dots$ são segmentos da fronteira $\partial\Omega$. Neste exemplo, $\partial\Omega_1 = \Gamma_{41}$ e $\partial\Omega_2$ consiste nos segmentos $\Gamma_{12}, \Gamma_{25}, \Gamma_{56}$ e Γ_{74} .

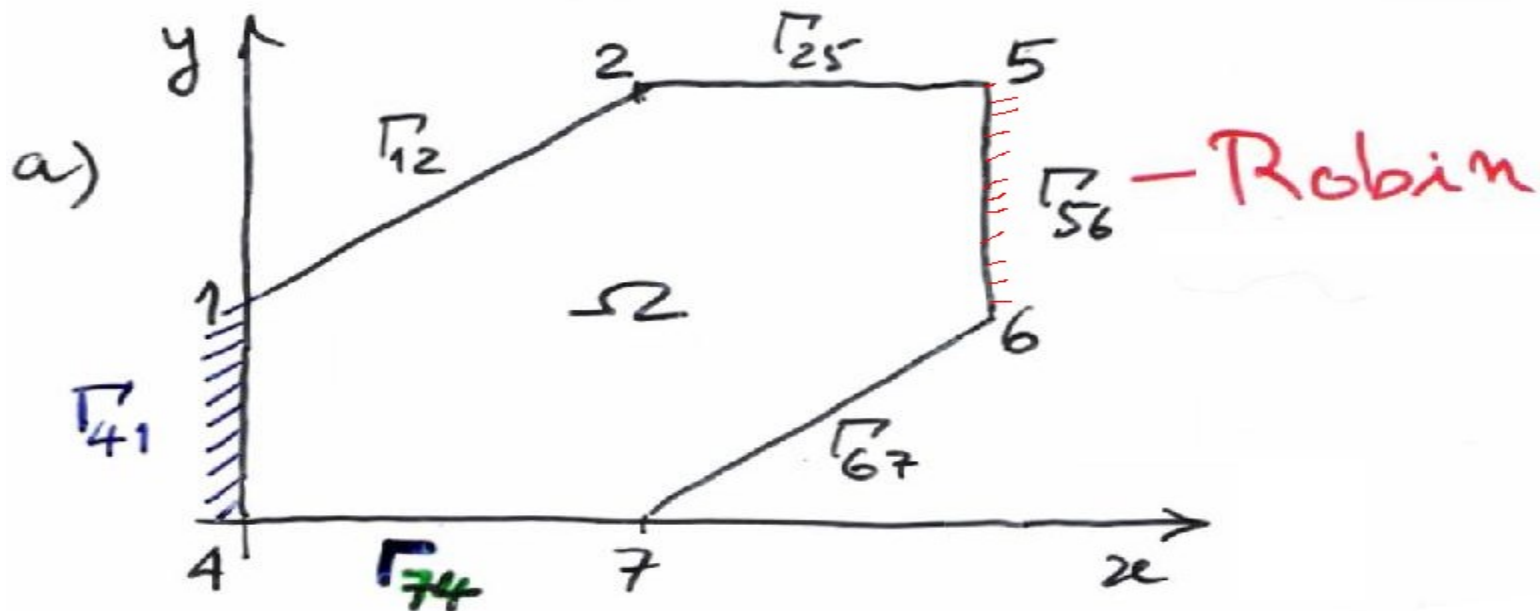
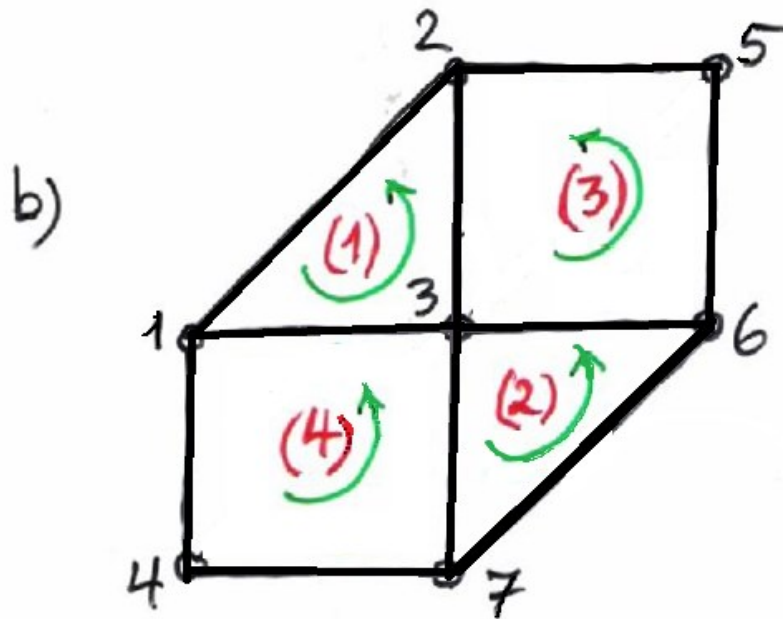


Figura 2.15(b) do exemplo

- Discretização por elementos finitos



CONECTIVIDADE

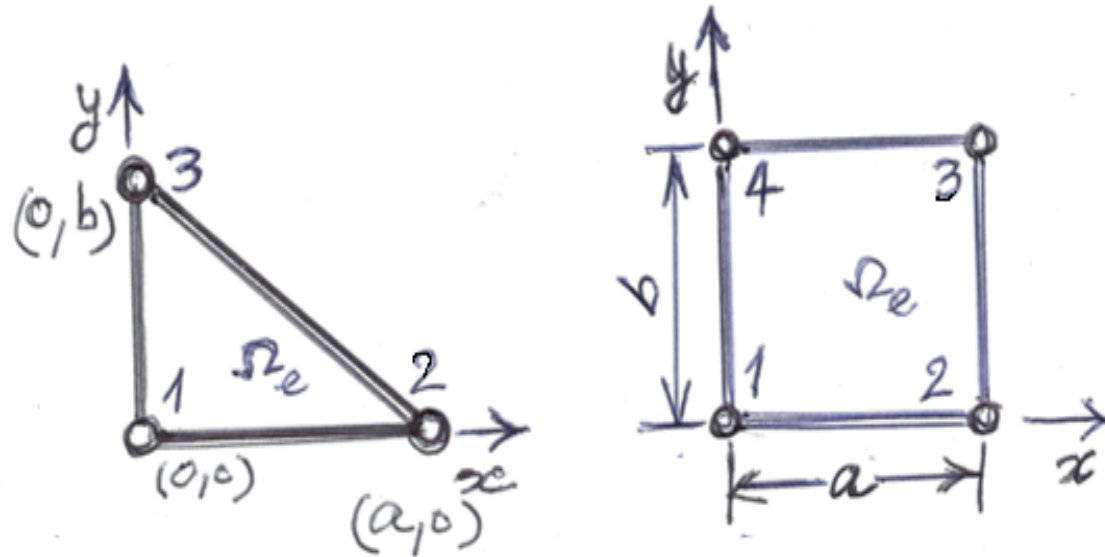
Elemento	Nó'1	Nó'2	Nó'3	Nó'4
1	1	3	2	
2	7	6	3	
3	3	6	5	2
4	4	7	3	1

- Podemos ter retângulos e triângulos na malha.

Malha de Elementos Finitos 2D

- A malha de elementos finitos pode ter triângulos, quadriláteros, ou ambos. Para garantir a continuidade, é necessário que dois elementos adjacentes (vizinhos) tenham o mesmo tipo de interpolação sobre o lado comum.
- Os elementos não devem ser distorcidos. O triângulo *ótimo* é o equilátero. Se o triângulo for rectângulo, então a razão $a/b \approx 1$. Nestes triângulos e nos quadriláteros, a *razão de aspecto*, a/b ou b/a , deve ser controlada, não devendo ser superior a, *digamos*, 3:1.

Elementos Finitos 2D para problemas potenciais

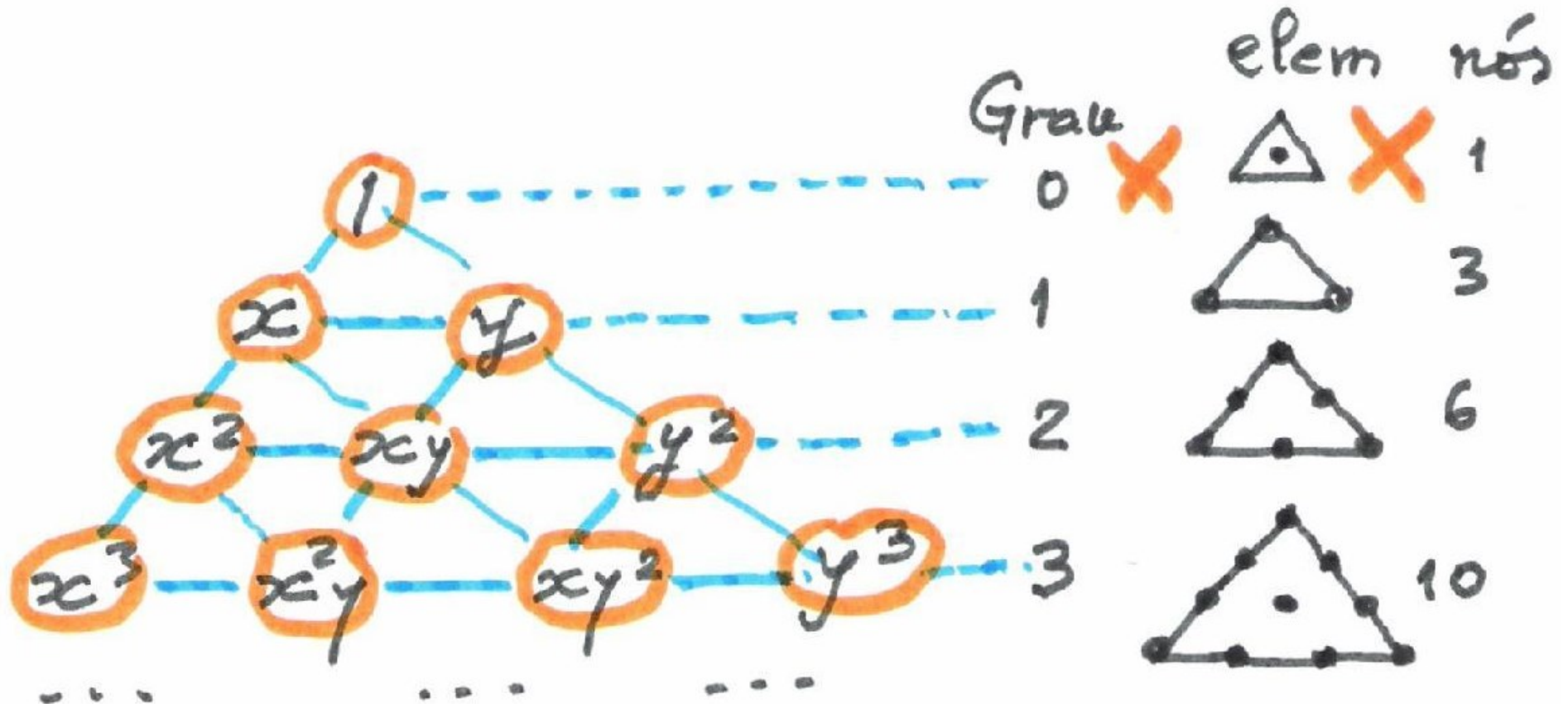


- Figura 1: Elementos com um grau de liberdade em cada nó: a) Triangulos Lineares de 3 nós; b) Elementos rectangulares de 4 nós

Triângulos de várias ordens (geral)

- É de esperar que, quanto maior for o grau dos polinómios usados (nas funções de forma) para construir aproximações num elemento, v_h^e , maior seja a precisão obtida, pelo que, podemos pensar em usar elementos cujas funções de forma contenham polinómios do segundo grau, terceiro grau, etc. Os termos de um polinómio completo de grau k podem ser dispostos no (*famoso*) triângulo de Pascal. Um polinómio completo de grau k contém $(k+1)(k+2)/2$ termos e, portanto, um igual número de coeficientes.

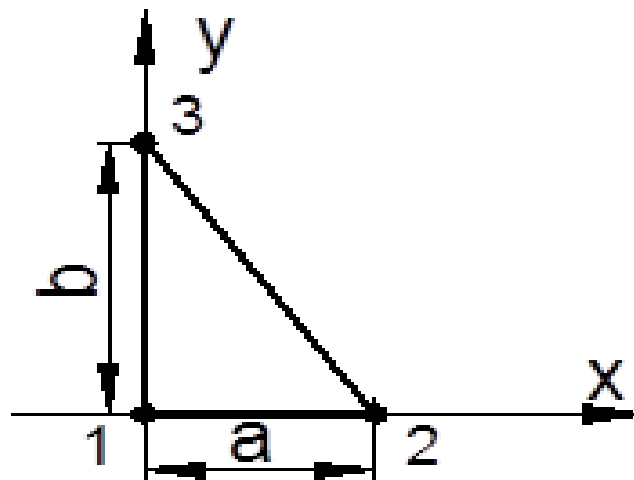
Triângulo de Pascal (elem. triangulares)



- Triângulo de Pascal e elementos tri. associados

O Triângulo de 3 nós

- Exercício 1: a) *Deduzir as funções de forma do triângulo de três nós ilustrado na figura.*
- *b) Obter as derivadas parciais das funções de forma*



O Triângulo de 3 nós/ 2

- Resposta ao Exercício 1:

$$\begin{aligned}\psi_1^e(x, y) &= 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \\ \psi_2^e(x, y) &= \frac{x}{a} \\ \psi_3^e(x, y) &= \frac{y}{b}\end{aligned}$$

- Derivadas parciais das funções de forma*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1^e(x, y)}{\partial x} &= -\frac{1}{a} \\ \frac{\partial \psi_2^e(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{a} \\ \frac{\partial \psi_3^e(x, y)}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

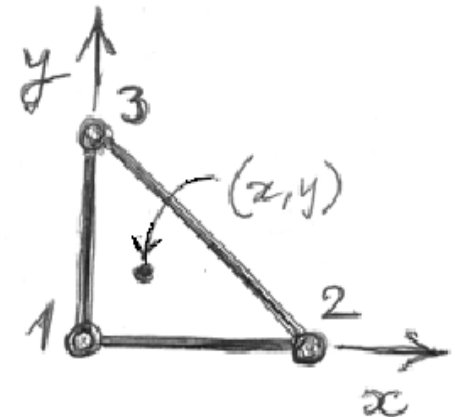
$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1^e(x, y)}{\partial y} &= -\frac{1}{b} \\ \frac{\partial \psi_2^e(x, y)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_3^e(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{b}\end{aligned}$$

O Triângulo de 3 nós/ 3

- Aproximação de um qualquer campo *escalar* num ponto (x,y) interior ao elemento

$$u_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \psi_i^e(x, y) u_i$$

$$v_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \psi_i^e(x, y) v_i$$

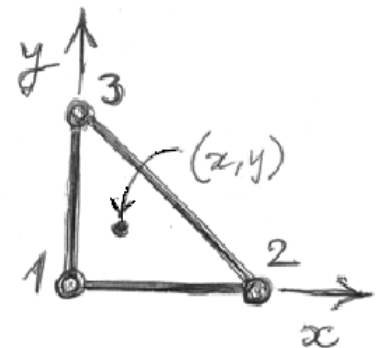


- Tanto u como v são campos *escalares*
- Por outro lado, o vector de *deslocamentos* nodais, Δ , tem a dimensão (3x1)

O Triângulo de 3 nós/ 4

- Aproximação dos *deslocamentos* num ponto (x,y) interior ao elemento na forma matricial $\mathbf{u} = \Psi \Delta$

$$u_h^e(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1^e(x, y) & \psi_2^e(x, y) & \psi_3^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$



- Aproximação das derivadas num ponto interior

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_h^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Triângulo de 3 nós / 5

- Aproximação das derivadas parciais (*constantes*) num ponto (x,y) interior ao elemento $\mathbf{Du}=\mathbf{B}\Delta$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_h^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$(2 \times 1) = (2 \times 3) \cdot (3 \times 1)$$

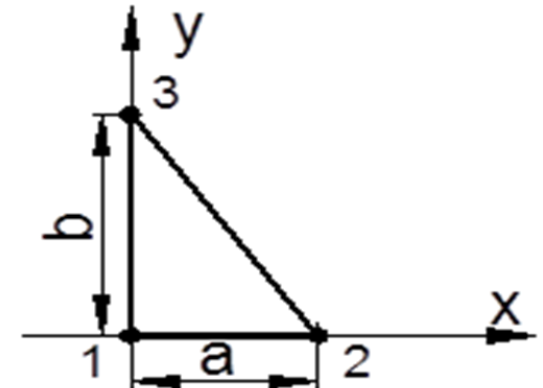
- Vamos combinar esta definição com a descrição matricial anterior

Matriz de Rigidez do Triângulo de 3 nós/ 6

- A matriz de rigidez (3x3) obtém-se a partir de

$$[K^e] = \int_{\Omega} k [B]^T [B] dx dy = k A_e [B]^T [B] = k \frac{ab}{2} [B]^T [B]$$

$$(3 \times 3) = (3 \times 2) \cdot (2 \times 3)$$



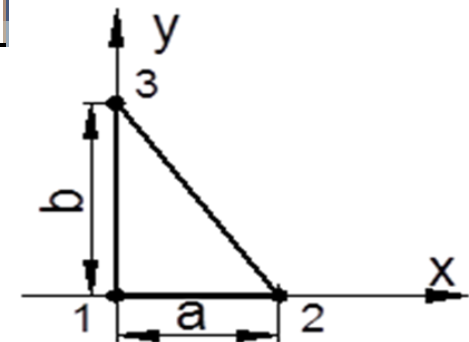
- Aqui $A_e = ab/2$ é a área do triângulo
- k é a condutividade térmica do material

Matriz de Rigidez do Triângulo de 3 nós/ 7

- A *matriz de rigidez* (3x3) final vem dada por

$$[K^e] = k \frac{ab}{2} [B]^T [B] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -\frac{b}{a} & -\frac{a}{b} \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

- k é a *condutividade térmica* do material
- a e b são os *catetos* do triângulo



Elementos Rectangulares

- Se quisermos construir elementos rectangulares, podemos começar por observar que o elemento de grau $k=0$, constante, não nos interessa porque não garante a continuidade requerida.
- O elemento seguinte, terá um nó em cada vértice para permitir uma interpolação linear sobre os lados do rectângulo. Isto perfaz um total de 4 nós e precisamos de 4 termos. Como o rectângulo é o “produto cartesiano” de dois segmentos de recta, podemos tentar o conjunto de termos gerado pelo produto tensorial de $[1 \ x]$ por $[1 \ y]$.

Rectângulo de 4 nós

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ x & xy \end{bmatrix}$$

- Nestas condições, podemos escrever

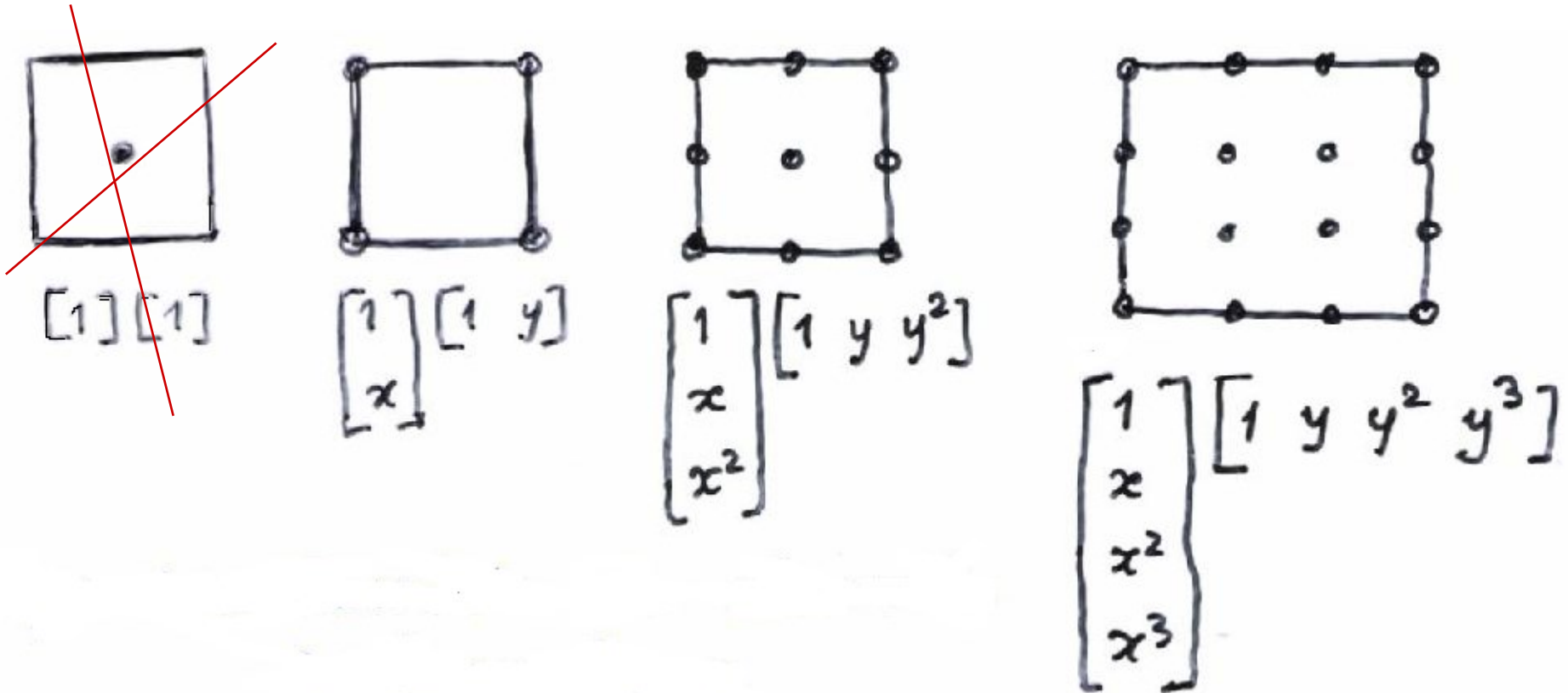
$$v_h^e(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y$$

- Estes 4 parâmetros podem ser expressos em função dos valores nodais v_1 , v_2 , v_3 e v_4 nos vértices do rectângulo, seguindo um caminho idêntico ao empregue para o triângulo.
- Ao longo de linhas $y=\text{const.}$, v_h^e varia linearmente com x e ao longo de linhas $x=\text{constante}$, v_h^e varia linearmente com y .

Rectângulo de 4 nós/ 2

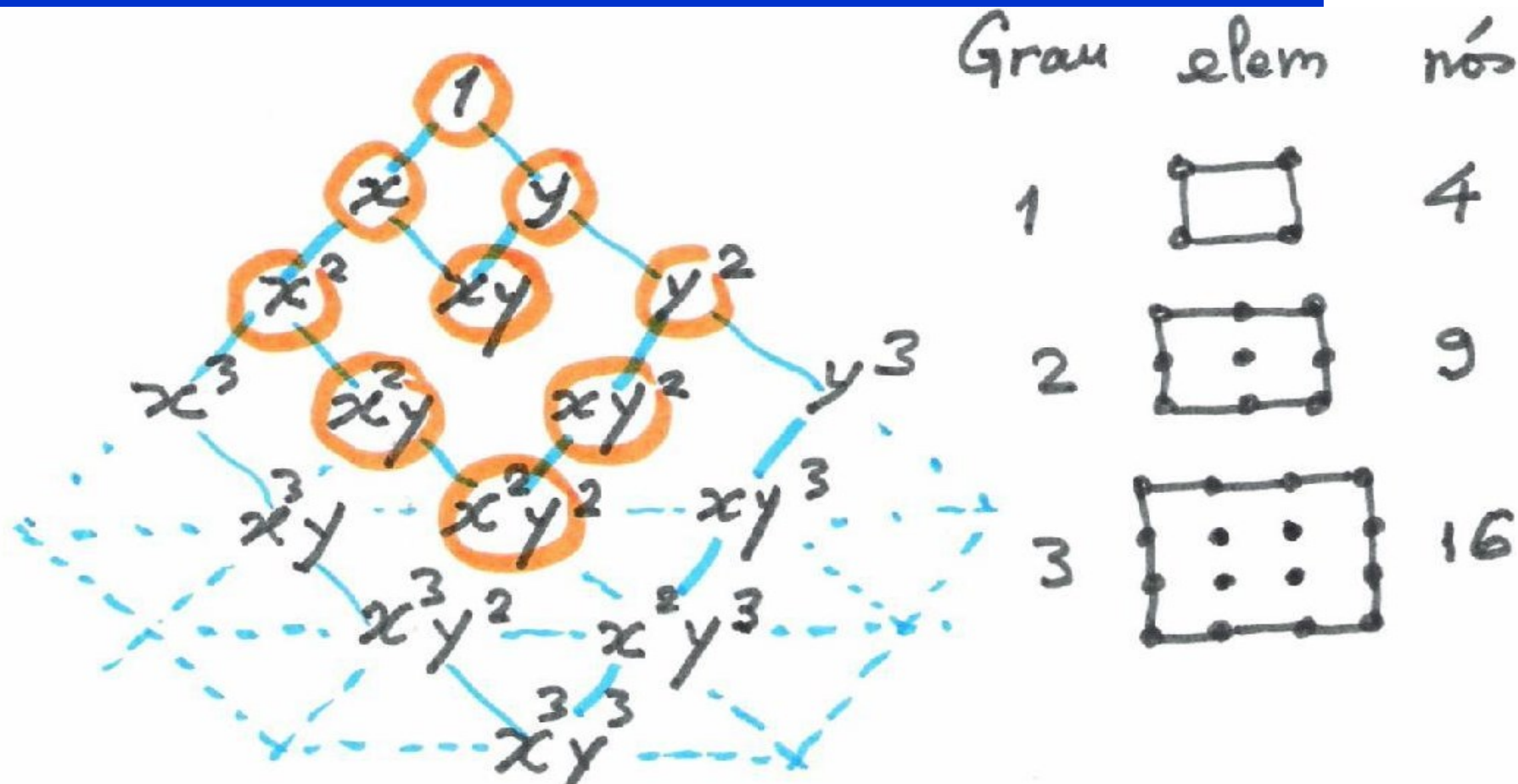
- Portanto, a interpolação é linear sobre os lados do rectângulo e depende unicamente dos nós adjacentes a esse lado. Deste modo, as funções de base geradas por estes rectângulos são contínuas.
- Note-se, no entanto, que o termo xy é do *segundo* grau (mas faltam os outros dois) e o polinómio é *incompleto*. Portanto, o elemento não é quadrático e, por isso, chama-se bi-linear.
- De modo semelhante, podemos ter elementos bi-quadráticos, bi-cúbicos, etc.

Família de elementos rectangulares



- Figura 2.12 Família de elementos rectangulares

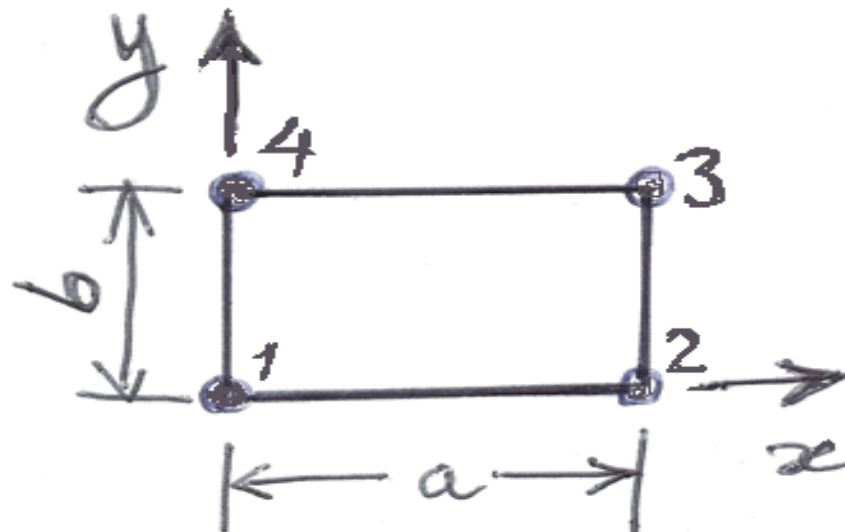
Triângulo de Pascal para elementos rectangulares *Lagrangeanos*



- Triângulo de Pascal e elementos rect. associados

O Elemento rectangular de 4 nós

- Exercício 2: a) *Deduzir as funções de forma do elemento rectangular de quatro nós ilustrado na figura; b) Obter as derivadas parciais das funções de forma.*



Elemento rectangular de 4 nós/ 2

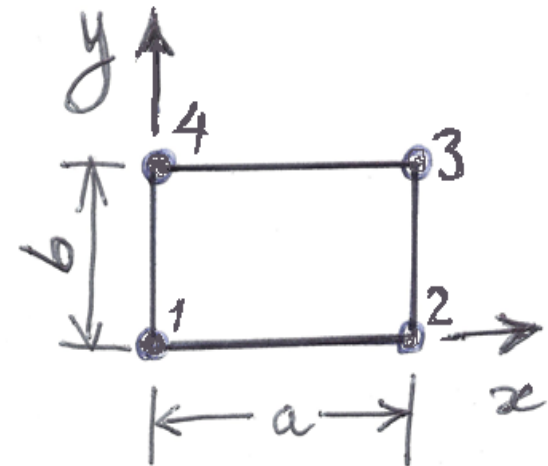
- a) *Funções de forma do elemento rectangular*

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right)$$

$$\psi_2^e = \frac{\bar{x}}{a} \left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right)$$

$$\psi_3^e = \frac{\bar{x}}{a} \frac{\bar{y}}{b}$$

$$\psi_4^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \frac{\bar{y}}{b}$$

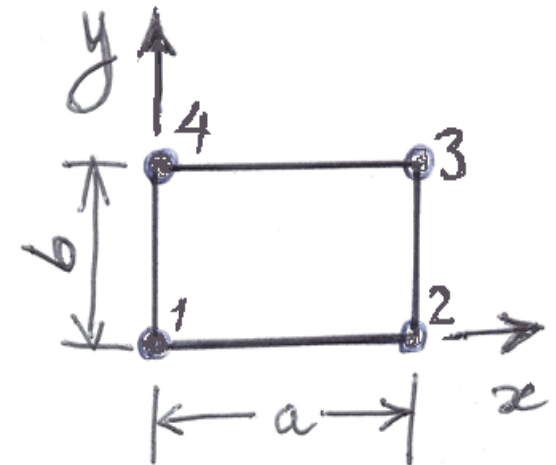


- O elemento tem 4 funções de forma bi-lineares

Elemento rectangular de 4 nós/ 3

- b) Derivadas parciais das funções de forma do elemento rectangular de 4 nós*

$$B^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_3^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_4^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_4^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & -\frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & -\frac{x}{ab} \\ \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} \\ -\frac{y}{ab} & \frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix}$$

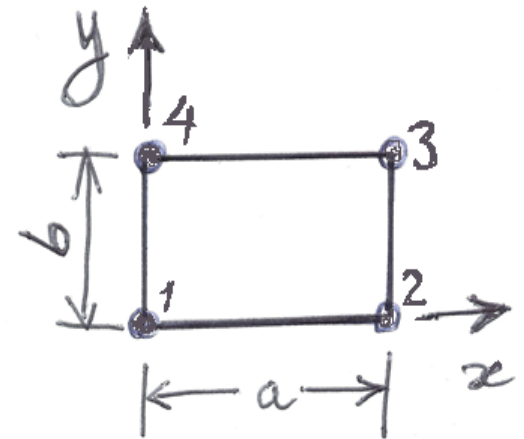


- As derivadas parciais das funções de forma do elemento rectangular **não são constantes !***

Elemento rectangular de 4 nós/ 4

- O vector de deslocamentos nodais, Δ , tem a dimensão (4x1). A matriz Ψ da interpolação dos deslocamentos tem agora a dimensão (1x4)

$$u_h^e(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1^e(x, y) & \psi_2^e(x, y) & \psi_3^e(x, y) & \psi_4^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

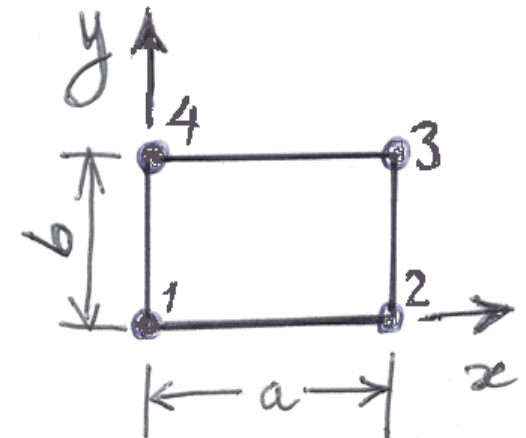


- A matriz B das derivadas parciais tem agora a dimensão (2x4)...

Elemento rectangular de 4 nós/ 5

- A matriz **B** das derivadas parciais tem agora a dimensão (2x4)...

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_h^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial x} & \frac{\partial \psi_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial y} & \frac{\partial \psi_4^e}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

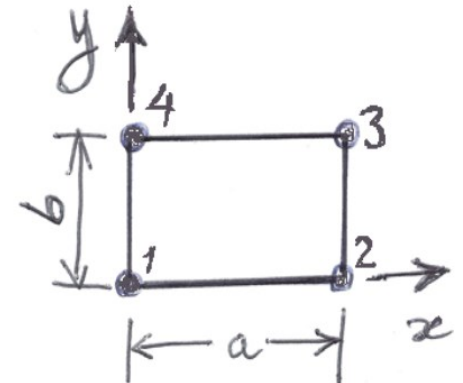


$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_h^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & \frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & \frac{y}{ab} & -\frac{y}{ab} \\ -\frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) & -\frac{x}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Elemento rectangular de 4 nós / 6

- A matriz de rigidez do elemento rectangular de 4 nós tem a dimensão (4x4)

$$[K^e] = k \int_0^b \int_0^a [B]^T [B] dx dy$$



- A integração no elemento rectangular tanto pode ser feita *analiticamente*, ver detalhes *p. ex.* em Reddy(2005), como *numericamente* (regras de Gauss 2x2 – regra de produto – 2 pontos em cada direção x e y), obtendo-se também *neste caso (com 4 pontos)*, o resultado exacto !

Elemento rectangular de 4 nós / 7

- A matriz de rigidez do elemento rectangular vem

$$[K^e] = \frac{k}{3} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} & -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} \\ \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} & -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} \\ \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} & -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

- k é a *condutividade térmica* do material
- a e b são as *dimensões* do rectângulo

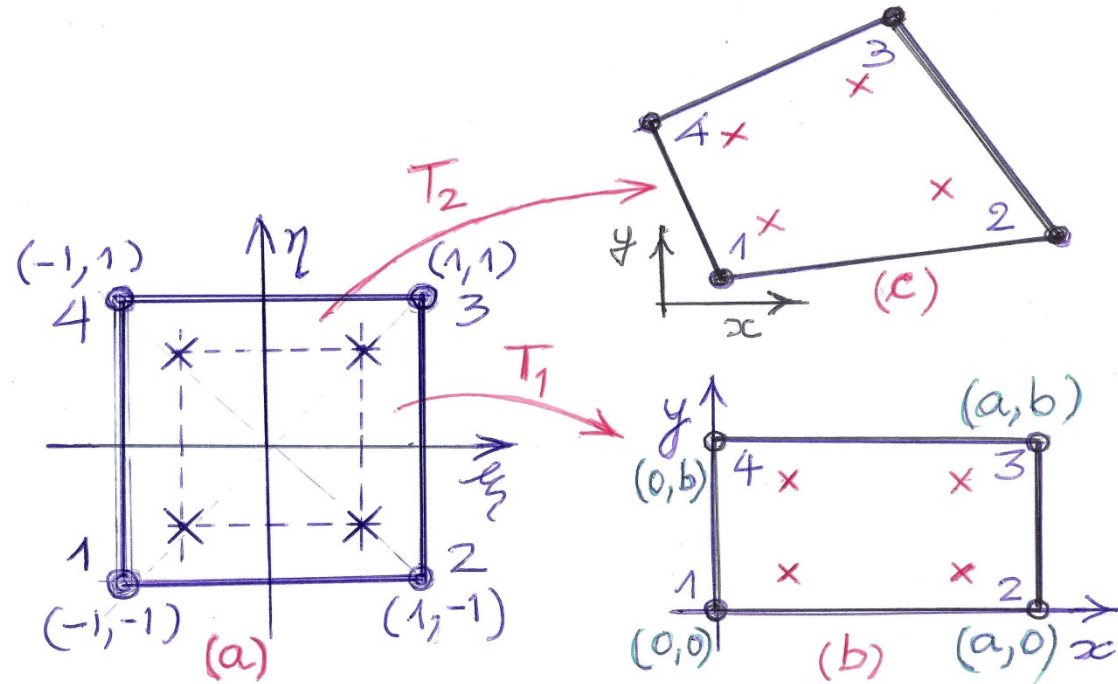
Integração Numérica nos quadriláteros

- A integração *numérica* nos quadriláteros faz-se usando-se a transformação de coordenadas dada por

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \psi_i^e(x, y) x_i \\ y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \psi_i^e(x, y) y_i \end{cases}$$

- que permite obter o quadrilátero a partir de um quadrado *padrão*, ou *elemento de referência*.
- A razão de áreas elementares em cada ponto é dada pelo *Jacobiano*, que é o determinante da matriz Jacobiana, a matriz das derivadas parciais

Integração Numérica nos *quads* / 2



- Figura – Transformação de coordenadas a partir de um (a) quadrado *standard* para um (b) rectângulo ou (c) um outro quadrilátero, isoparamétrico, por exemplo

Integração Numérica nos *quads* / 3

- Um integral de área típico num quadrilátero

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) dx dy$$

- Transforma-se em

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

- Nos quadriláteros do MEF é habitual usar-se (*pela sua simplicidade*) regras de produto geradas à custa da integração de Gauss-Legendre 1D em cada direcção.

Integração Numérica 1D (recordar...)

- Integração 1D de Gauss-Legendre (recorde-se)

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^p g(\xi_i) w_i$$

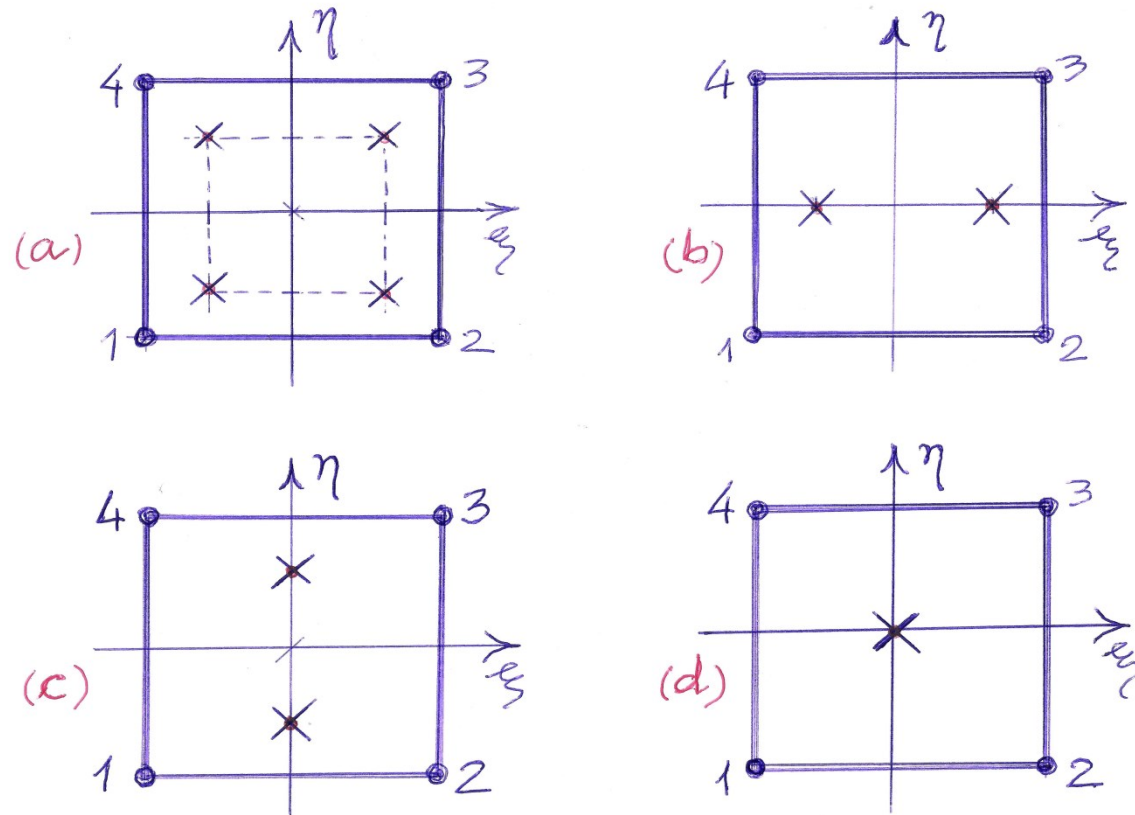
- Regra 1D de um ponto, grau 1: $\xi_1 = 0$, $w_1 = 2$. Trata-se do ponto central no intervalo $[-1, 1]$. O peso é igual ao comprimento do intervalo.
- Regra 1D de dois pontos, grau 3: $\xi_1 = \sqrt{1/3}$, $w_1 = 1$ e $\xi_2 = -\sqrt{1/3}$, $w_2 = 1$. Os 2 pontos estão dispostos simetricamente no intervalo $[-1, 1]$. A soma dos pesos é igual ao comprimento do intervalo.

Integração Numérica nos *quads* / 4

- Integração 2D de Gauss-Legendre à custa de regras 1D (produto) em cada direcção: especificamos o número (p) de pontos pretendidos na variável ξ e (q) na variável η
- Note-se que os pesos na regra 2D de $p \times q$ pontos são obtidos pelo produto dos pesos a 1D

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q g(\xi_i, \eta_k) w_i w_k$$

Integração Numérica nos *quads* / 5



- Figura – Algumas regras de produto para integração 2D no quadrado *standard* : (a) 2x2 ; (b) 2x1 ; (c) 1x2 ; (d) 1x1.

Bibliografia

- J. N. Reddy (2005), *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A., and Byron, T. D. (1995). *The Finite Element Method for Engineers*, Third ed., Wiley Interscience.
- Akin, J. E. (1994) *Finite Elements for Analysis and Design*, Academic Press.
- Chandrupatla, T. R. & Belegundu, A. D. (2011), *Introduction to Finite Elements in Engineering*, 4th Edition, Prentice-Hall.