

Grupo	93232	Daniel Nascimento Francisco
17	93511	João Carlos Carvalho de Freitas e Barros
	97173	António José de Oliveira Reis

MECÂNICA COMPUTACIONAL – Engenharia Mecânica e Aeroespacial

Trabalho Computacional – Ano lectivo 2022/2023

Enunciado 17

Este trabalho tem como objectivo avaliar a capacidade de implementar computacionalmente um programa de elementos finitos em Matlab, para a análise linear de problemas planos (escalares neste caso). Assim, pretende-se que seja construído um modelo de elementos finitos para um dado problema e que seja resolvido, quer pelo programa implementado, quer por software comercial de elementos finitos existente (NX, ANSYS, Abaqus, etc.). A malha base para esta análise deve ter entre 100 a 200 graus de liberdade.

O programa desenvolvido deve ler toda a informação referente à malha de elementos finitos através de um ficheiro de dados com uma formatação pré-definida (ver página da disciplina no fenix), e produzir um ficheiro com resultados que sejam relevantes. O programa desenvolvido deve permitir a aplicação correta das condições de fronteira deste enunciado. Além disso o programa deve poder utilizar, no mínimo, malhas de elementos finitos com os elementos indicados na ficha em anexo (OBRIGATÓRIO).

O código deve ser numérico e não deve usar cálculo simbólico.

Problema a resolver: Escoamento – Potencial de velocidade

Considere o escoamento potencial ilustrado na figura, sujeito ao caudal imposto à entrada e restantes condições de fronteira indicadas. Pretende-se determinar o potencial de velocidade do escoamento, o campo de velocidades do escoamento, a distribuição de isolinhas de pressão em todo o domínio (admita que a pressão à entrada é conhecida). Pretende-se saber quais os valores máximos e mínimos da velocidade e da pressão no escoamento e a respectiva localização.

Aspectos a considerar no seu relatório:

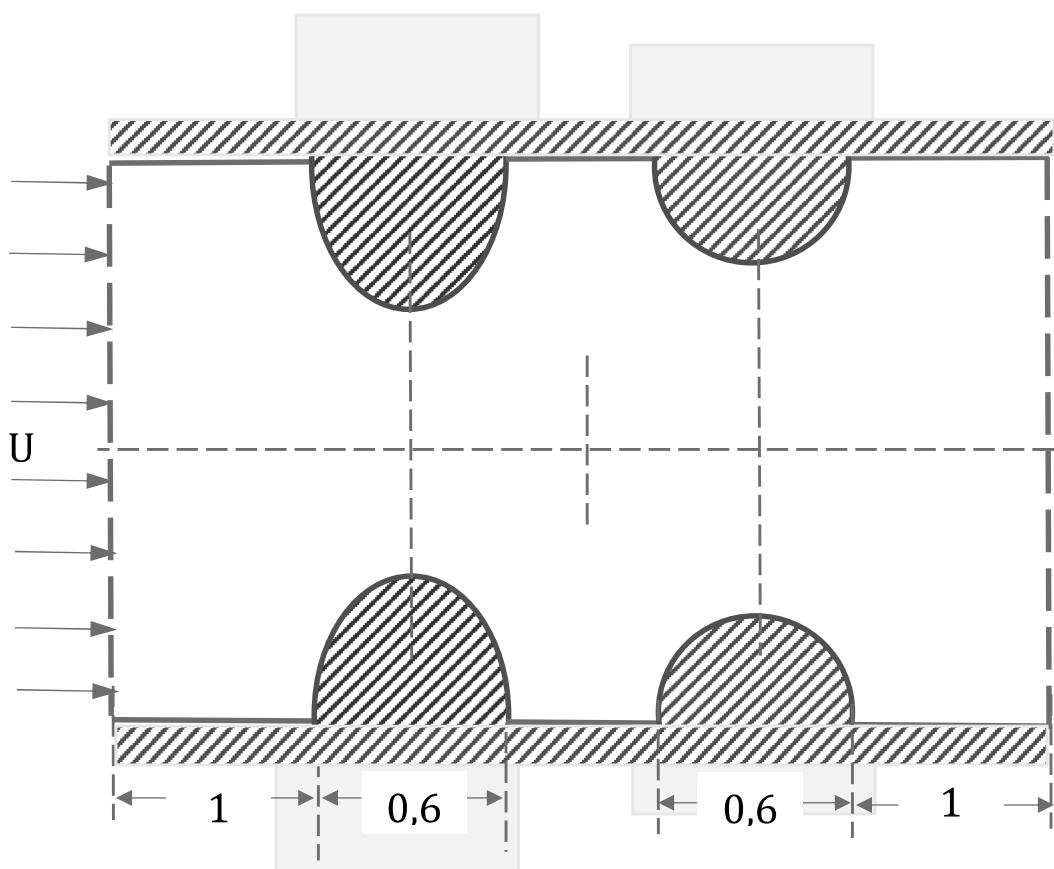
- Apresente a equação diferencial que rege o fenômeno físico que quer estudar e indique claramente as condições de fronteira empregues e todas as aproximações que fizer.
- Teste e valide o programa desenvolvido para um problema do mesmo tipo com uma geometria simples para o qual existe solução analítica. Neste caso simples, estude os resultados para o potencial de velocidade, o vector de velocidade e teste os diferentes tipos de condição de fronteira a usar no trabalho. Apresente a solução analítica e calcule os erros absolutos para o potencial de velocidade e para o vector de velocidade.
- Estabeleça a malha de elementos finitos base, resolva-a com o programa desenvolvido e com o software comercial. Compare as soluções de uma forma detalhada e crítica de modo a validar o código em Matlab face ao software comercial.
- Faça uma análise de convergência da solução, refinando uniformemente a malha inicial 4/5 vezes utilizando apenas o software comercial. Cada elemento deve ser subdividido em 4 para se passar para o nível de refinamento seguinte. Selecione um conjunto de pontos de interesse (5 a 10) que devem estar presentes em todas as malhas e investigue se há ou não convergência para o potencial de velocidade e para o vector de velocidade.
- Para a última malha obtida (refinada), analise detalhadamente os resultados obtidos. Compare o comportamento dos elementos testados.

- Represente graficamente o potencial de velocidade, o campo de velocidades e (opcional) a pressão em todo o domínio, identificando os aspectos que considerar relevantes.
- Obtenha a força resultante em cada uma das paredes do escoamento.

Elabore um relatório **ORIGINAL** a descrever o programa, o modelo construído, bem como uma análise dos resultados, para as diferentes opções de elementos escolhidos. Apresente o relatório de acordo com as normas disponibilizadas na página do fenix. Relatórios que não sigam as normas estipuladas não serão avaliados.

IMAGEM E DIMENSÕES

G-17 -Potencial de Velocidade



Análise com elementos finitos quadrangulares de 4 e 8 nós (Q4 e Q8)

Velocidade de entrada : 2,0 m/s

Secção de entrada, altura, $L_1=1,6\text{m}$.

2 Relevos elípticos $a/b=1/2$, eixo menor= 0,6 m

Diâmetro dos 2 Relevos circulares=0,6m

Comprimento total, $L_3 = 4,0\text{ m}$

Restantes medidas em m na figura

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Equação Diferencial do Fenômeno Físico	2
1.2	Condições de Fronteira	2
1.3	Forma dos Elementos Finitos	2
2	Implementação em <i>MATLAB</i>	3
2.1	Descrição do Programa e Respetivas Funcionalidades	3
	Estrutura do Programa	3
2.2	Geometria Simples com Solução Analítica	8
3	Implementação em Siemens NX	11
3.1	Procedimento	11
	Construção da Malha	11
	Simulação	12
3.2	Análise de convergência	12
	Análise de convergência para Potencial de Velocidade	12
	Análise de convergência para Velocidade	13
	Análise da performance das malhas	14
	Alternativa de Simulação	15
4	Resultados do Problema Proposto	16
4.1	Potencial de Velocidade, Campo de Velocidade e Pressão	16
4.2	Valores máximos e mínimos de velocidade e de pressão	17
4.3	Forças na Parede	18
5	Conclusões	19
6	Bibliography	19
7	Apêndice - Resultados	20
7.1	Solução Analítica - Geometria Simples	20
7.2	Resultados da Implementação em MATLAB - Geometria Simples	22
	Força na Parede	22
	TRI3	23
	TRI6	26
	QUAD4	29
	QUAD8	32
	QUAD9	35
7.3	Erro Absoluto - Geometria Simples	38
	Potencial de Velocidade	38
	Magnitude da Velocidade	40
	Pressão	42
7.4	Analise convergência - Implementação em Siemens NX	44
7.5	Resultados do Siemens NX - Geometria do Enunciado (Problema 17)	47
7.6	Resultados do MATLAB - Geometria do Enunciado (Problema 17)	48
	TRI3	48
	TRI6	50

QUAD4	52
QUAD8	54
QUAD9	56

1 Introdução

De forma a concretizar o principal objetivo deste trabalho, já descrito anteriormente, foi necessário implementar, computacionalmente, um programa de elementos finitos em MATLAB, e, de seguida, utilizá-lo para resolver um problema de escoamento potencial, procedendo-se posteriormente à análise dos resultados obtidos. No entanto, é importante, primeiramente, descrever precisamente o mecanismo de resolução que será usado, o Método dos Elementos Finitos.

Existem diversos problemas com interesse prático, nomeadamente, para a engenharia onde, devido a variadíssimas razões, como por exemplo condições de fronteira, não-linearidades e domínios complexos, se torna impossível ou de elevada complexidade obter soluções analíticas exatas. Fazendo assim, com que métodos numéricos que conseguem obter soluções aproximadas para estes mesmos problemas se tornem absolutamente fundamentais. O Método dos Elementos Finitos pode, então, ser definido como um método numérico capaz de resolver equações diferenciais que regem diversos fenómenos físicos que se pretendem estudar.

Tal como indica o nome, este método caracteriza-se pelas suas equações serem aproximações de vários domínios simplificados, designados por Elementos Finitos, sendo a junção destes vários elementos o domínio total que foi dividido e que se pretende analisar. Para cada um destes elementos finitos, a respetiva função é determinada por uma aproximação ou interpolação e analisada como um domínio independente. Obtem-se assim o sistema de equações algébricas das variáveis de interesse para cada elemento finito. E utilizando as conhecidas relações entre os vários elementos finitos, é possível combinar os vários sistemas e alcançar a solução aproximada para o domínio total, definida pela solução do sistema de equações obtido.

O resultado deste processo, tratando-se apenas de uma solução aproximada, poderá conter erros, nomeadamente: erros numéricos; erros de aproximação do domínio; erros de aproximação da solução. No entanto, se o domínio analisado for simples por exemplo, e todos os tipos de erro forem iguais a zero, este método devolverá a solução exata e não uma aproximação.

É ainda importante salientar que, na aproximação obtida na utilização deste método é impossível garantir a convergência de resultados para todos os pontos ou elementos, ou formulação forte. Sendo necessário recorrer a uma fraca, onde a convergência é garantida pontualmente em nós denominados.

1.1 Equação Diferencial do Fenômeno Físico

O problema que se pretende analisar, é o de um escoamento potencial, ilustrado e descrito anteriormente. Pretendendo-se determinar o potencial de velocidades, o campo de velocidades, a distribuição de isolinhas de pressão em todo o domínio, quais os valores máximos e mínimos de velocidade e de pressão e a sua respetiva localização. Considerou-se o fluido incompressível e irrotacional.

A equação diferencial que rege este fenômeno físico é a equação de Poisson:

$$-\nabla \times (k \nabla u) = f, em \Omega \quad (1)$$

Sendo Ω o domínio do elemento a ser estudado. No entanto, para um problema de potencial de velocidades como é o caso, a equação 1 pode ser apresentada como:

$$-\nabla \times (\rho \nabla \phi) = \sigma \quad (2)$$

Com ρ constante e $\sigma = 0$, então:

$$-\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (3)$$

1.2 Condições de Fronteira

Foram considerados dois tipos de condições de fronteira: Naturais ou de Neumann, com uma velocidade de entrada $v = 2m/s$ e $v = 0m/s$ na direção normal junto à fronteira superior e inferior do domínio, considerando-se as paredes impermeáveis ($\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$); e Essenciais ou de Dirichlet, onde o fluxo é igual a zero ($\phi = 0$), aplicada à secção de saída.

1.3 Forma dos Elementos Finitos

De modo a implementar o Método dos elementos finitos, é necessário fazer a discretização do domínio. Sendo importante salientar que as funções interpoladoras de cada elemento finito, vão depender, não só do número de nós do elemento, mas também da forma do mesmo. De modo a comparar o desempenho de várias malhas, inicialmente a implementação foi feita com elementos finitos triangulares lineares, mais simples, e de seguida com quadriláteros lineares e quadráticos, bem como triangulares quadráticos.

2 Implementação em *MATLAB*

2.1 Descrição do Programa e Respetivas Funcionalidades

O programa de elementos finitos desenvolvido em *MATLAB* é capaz de resolver qualquer problema escalar proveniente da equação de *Poisson*, $-\nabla \times (k \nabla u) = f$, com k constante. No caso do escoamento potencial a variável k é a massa volúmica, ρ , e tem de ser introduzida como sendo a primeira propriedade listada nos materiais do ficheiro de texto.

Condições de fronteira naturais suportadas: $k \frac{\partial u}{\partial n} + \beta (u - u_\infty) = q$ numa fronteira Γ_q , tal que β é constante também.

Condições de fronteira essenciais suportadas: $u = \hat{u}$ numa fronteira Γ_u .

Embora o enunciado atribuído não inclua a introdução de cargas pontuais em nós, ou cargas distribuídas em elementos, as mesmas são aceites e processadas.

Como foi exposto anteriormente, o processamento do programa é capaz de calcular o valor da variável primária de problemas de escoamento potencial, transferência de calor e até torção de barras prismáticas de outros enunciados, porém, o pós-processamento implementado suporta apenas o caso específico de escoamento potencial, com potencial de velocidade.

O Programa também é capaz de solucionar malhas compostas por elementos de diferentes materiais, bem como, malhas triangulares de 3 e 6 nós e quadrangulares de 4, 8 e 9 nós. As malhas de 9 nós não são fornecidas pelo *NX*, pelo que foi criado um script em *MATLAB* que lê a informação das malhas de elementos de *serendipity* quadráticos e acrescenta um nó no centroide de cada elemento transformando-os em elementos *lagrangeanos* quadráticos.

Estrutura do Programa

Pré-processamento:

- *A_Extrai_Dados_Escalar* – Função responsável por ler os ficheiros de texto fornecidos e formatados de acordo com as regras indicadas. Tem como *emphoutput*, diversas variáveis essenciais ao cálculo do problema.
- *A_Determina_Paredes_* – Estas funções determinam as fronteiras e as paredes da geometria fornecida, inclusive de geometrias com furos interiores. As paredes consistem em fronteiras sem potenciais ou fluxos, não nulos, aplicados.

Processamento:

- *B_Kg_Fg_escalar_* - Estas funções fazem a assemblagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas globais. Para tal utilizam as funções *B_Ke_escalar_* e *B_Fe_escalar_*, responsáveis pelo cálculo da matriz de rigidez e do vetor de cargas do elemento, respetivamente. No caso dos elementos TRI6, QUAD4, QUAD8 e QUAD9, o cálculo das matrizes e vetores elementares requer a realização de integração numérica, recorrendo às funções *B_BxBt_Psi_J* e *B_IntGauss_* para tal. O método de assemblagem implementado não coincide com o lecionado nas aulas, sendo mais eficiente quer em velocidade, quer em memória. Foi também

otimizado para problemas com cargas distribuídas nulas, $f = 0$. Malhas para as quais o método aplicado é vantajoso face ao lecionado:

- $f = 0$, malhas com número de elementos superior a cerca de 4000
- $f \neq 0$, malhas com número de elementos superior a cerca de 6000

Este método inicia-se com a construção de três vetores distintos, I , J e V , que armazenam as posições das linhas, colunas, e valor correspondente na matriz de rigidez global. Uma vez concluído o preenchimento destes três vetores, cria-se a matriz esparsa de rigidez global numa única operação. Seguidamente apagam-se da memória os três vetores referidos e define-se o vetor de cargas com todas as entradas nulas. Se houver cargas distribuídas, inicia-se um ciclo *for* cujo número de iterações é igual ao número de cargas distribuídas impostas. Desta forma poupa-se tempo de processamento na ausência de cargas distribuídas ou no caso destas não se aplicarem a todos os elementos. Por fim, é verificado se compensa, ou não, o armazenamento do vetor de cargas como uma matriz esparsa. Sempre que o vetor de cargas tem 3 ou mais entradas nulas do que não nulas, o formato esparso poupa, por cada entrada nula extra, 8 *bytes* de memória. No caso extremo de um vetor nulo, o formato esparso ocupa apenas 32 *bytes*, independentemente do número de graus de liberdade, sendo muitíssimo mais eficiente para malhas com elevado número de elementos. As funções *B_Kg_Fg_escalar_* estão totalmente comentadas para melhor compreensão das mesmas.

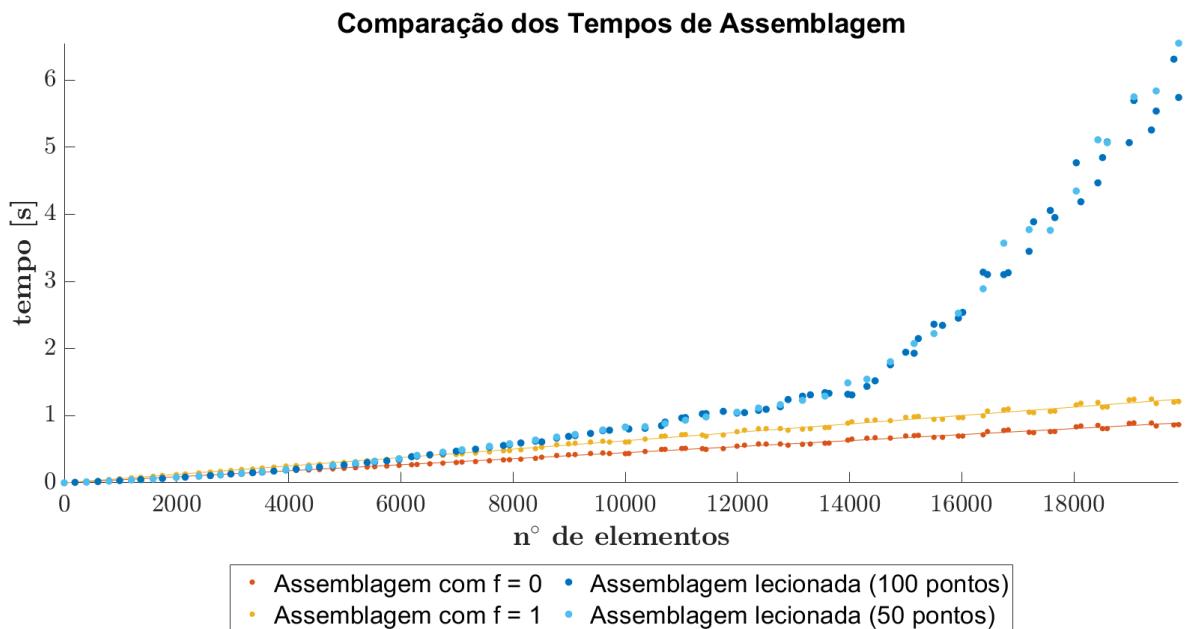


Figure 1: Tempo de Assemblagem

Os resultados do gráfico acima obtiveram-se com o auxílio da função:

Y_Test_Compportamento_Assemblagem

Esta função criou 100 malhas com um número de elementos compreendido entre cerca de 200 a 20000. Para cada malha realizou-se 100 assemblagens e mediu-se o

tempo médio de conclusão das mesmas. Por forma a garantir que a performance resultante do método lecionado não foi derivada de um processamento momentâneo mais lento por parte do computador utilizado, realizou-se o mesmo teste para 50 malhas incrementais entre os 400 e os 20000 elementos, por forma a confirmar a congruência dos resultados. Como se pode observar no gráfico, o método de assemblagem implementado, justifica-se para malhas constituídas por um elevado número de elementos. É também possível observar que a assemblagem é mais rápida para cargas distribuídas nulas. O comportamento da assemblagem apresentada é linear face ao número de elementos, sendo as retas interpoladas:

- $t = 4.4878 \cdot 10^{-5} \cdot N [s]$, para $f = 0$, N = número de elementos da malha; $R^2 = 0.9960$
- $t = 6.2653 \cdot 10^{-5} \cdot N [s]$, para $f = 1$, N = número de elementos da malha; $R^2 = 0.9960$

- *C_Fponto_CFs_naturais_mistas* - Esta função funciona para qualquer tipo de elemento. É aqui que se introduzem as condições de fronteira naturais, mistas e cargas pontuais no sistema de equações.
- *C_CFs_essenciais_SolPenalty* - Esta função funciona para qualquer tipo de elemento. As condições de fronteira essenciais são introduzidas pelo método da penalização, com um fator de 10^{10} . De seguida resolve-se o sistema de equações, obtendo-se a variável primária calculada em cada nó.

Pós-processamento - Específico para o problema proposto de Potencial de Velocidade:

- *D_PostProcess_Potencial_de_Velocidade* - Esta função funciona para qualquer tipo de elemento. A velocidade é calculada quer nos pontos de integração quer nos nós. A pressão foi calculada a partir da equação de Bernoulli, nos mesmos pontos que a velocidade. A pressão de referência na entrada do escoamento, p_0 , é definida no ficheiro de texto como sendo a segunda propriedade listada do material. A velocidade de referência, v_0 , é a correspondente à imposta na primeira condição de fronteira natural do ficheiro de texto. A fórmula implementada no cálculo da pressão foi:

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v^2) \quad (4)$$

A força nas paredes foi calculada integrando a pressão nas mesmas. Para tal utilizou-se a equação de Bernoulli referida acima, mas substituiu-se a velocidade pela respetiva derivada das funções de forma da fronteira e obteve-se a fórmula:

$$F = \left(p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 \right) h_e + \frac{\rho}{2} \int_0^{h_e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

- Solução para elementos lineares:

$$F = \left(p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 \right) h_e + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{h_e} \quad (6)$$

- Solução para elementos quadráticos:

$$F = \left(p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 \right) h_e + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{7\phi_1^3 - 32\phi_2^3 + 48\phi_1\phi_2^2 - 30\phi_1^2\phi_2 + 7\phi_3^3 + 9\phi_1\phi_3^2 - 30\phi_2\phi_3^2 + 9\phi_1^2\phi_3 - 36\phi_1\phi_2\phi_3 + 48\phi_2^2\phi_3}{3h_e(\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2)} \quad (7)$$

No caso dos elementos triangulares de três nós, TRI3, quer a velocidade, quer a pressão são constantes no elemento, pelo que a força pode ser calculada por $F = ph_e$. Comparando os resultados obtidos pelas diferentes malhas, concluiu-se que as fórmulas obtidas acima estavam corretas uma vez que os resultados das diferentes malhas são coerentes entre si. Note-se que o vetor força é automaticamente criado e colocado no centro das fronteiras dos elementos das paredes. A sua direção também é automaticamente definida como sendo normal à fronteira e a apontar para o exterior do escoamento.

Gráficos:

As funções cujo nome se inicia por $G_{}$ são as responsáveis pela construção dos gráficos/imagens. Todos os gráficos das isolinhas, bem como, os de cores da velocidade e da pressão, são criados recorrendo à função do *MATLAB*, *scatteredInterpolant*, função esta que recebe uma série de coordenadas e valores correspondentes, e de seguida executa uma interpolação linear para qualquer outra coordenada que se queira. No caso do potencial de velocidade introduzem-se na função, os valores calculados nos nós. Já na velocidade, e pressão, são introduzidos os valores calculados nos nós e nos pontos de integração. Nos nós, o fluxo não é constante, dependendo do elemento onde é calculado. Por esta razão, nas coordenadas dos nós são fornecidos múltiplos valores da velocidade/pressão, provenientes dos vários elementos adjacentes. A função *scatteredInterpolant* procede então, ao cálculo da média dos fluxos em cada nó, e utiliza esse valor na execução da interpolação linear. Por forma a visualizar os resultados provenientes da função referida, é necessário criar uma grelha contendo, apenas, as coordenadas da geometria da malha. Para tal, utiliza-se a função do *MATLAB*, *boundary*, para excluir os pontos exteriores à fronteira. O parâmetro *accuracy-fronteira* está afinado para malhas com cerca de 200 elementos e geometrias dos enunciados/caso simples.

Como correr o programa:

Na pasta *MATLAB_G17* encontram-se as funções *Menu_app* e *Menu_simple*. Estas funções permitem ao utilizador, operar o programa de forma simples e intuitiva. *Menu_app* consiste num menu *GUI* (*Graphical User Interface*), com o seguinte aspeto e funcionalidades:

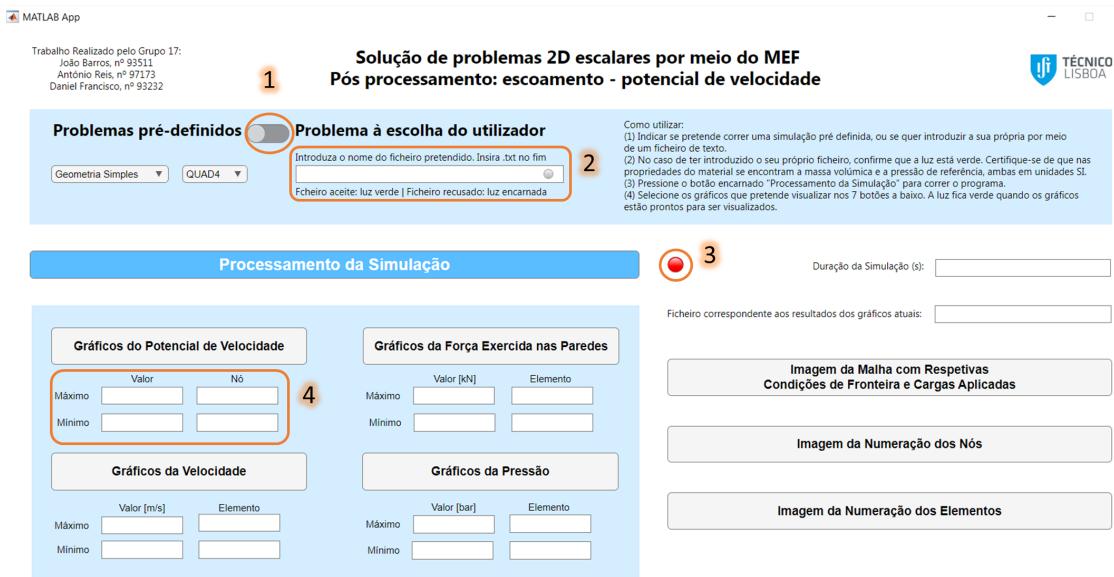


Figure 2: Menu GUI

1. Botão que permite escolher entre correr uma simulação cujo ficheiro de texto formatado já se encontra pré-definido no programa (Geometria Simples / Problema 17), ou correr uma simulação cujo ficheiro de texto é introduzido pelo utilizador na mesma pasta onde as funções do menu se encontram.
2. Caso se selecione a segunda opção, o utilizador deve escrever o nome do ficheiro de texto na caixa branca assinalada, incluindo o sufixo *.txt*. Caso o programa detete o ficheiro, a “luz” que se encontra no lado direito da caixa branca, fica com a cor verde, caso contrário, permanecerá vermelha.
3. Uma vez pressionado o botão azul, “Processamento da Simulação”, a “luz” assinalada fica verde, indicando que os gráficos estão prontos para ser construídos, bastando selecionar os botões dos mesmos para os visualizar.
4. Assim que a “luz” (3) fica verde, as caixas assinaladas indicarão os valores, máximos e mínimos, calculados pelo programa, nos pontos de integração/nós, e respetivos nós/elementos.

Menu_simple consiste num menu cuja interação com o utilizador, é efetuada diretamente a partir da *Command Window* do *MATLAB*. Basta abrir o *script* e correr o mesmo, para inicializar este menu.

2.2 Geometria Simples com Solução Analítica

Por forma a avaliar criticamente o desempenho do programa desenvolvido, foi decidido comparar os resultados do mesmo com a solução analítica de uma geometria cujas condições de fronteira fossem idênticas e cujos valores da velocidade/pressão não fossem constantes em todo o domínio. Para tal foi escolhido o caso de escoamento potencial em torno de um cilindro circular com raio, R , de 0.5 m. A velocidade do escoamento para $r \rightarrow \infty$, foi definida como sendo $v_0 = 2\frac{m}{s}$. Em todos os estudos apresentados neste relatório, quer o da geometria simples, quer o do problema do enunciado, a massa volúmica considerada foi de $1000\frac{kg}{m^3}$ (água), e a pressão de referência, 1 bar = 10^5 Pa.

A fórmula utilizada no cálculo do potencial de velocidade foi a seguinte:

$$\phi = -v_0 \cdot r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \cos(\theta) \quad (8)$$

As utilizadas para o cálculo das velocidades foram:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \cos(\theta) \quad (9)$$

$$v_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \sin(\theta) \quad (10)$$

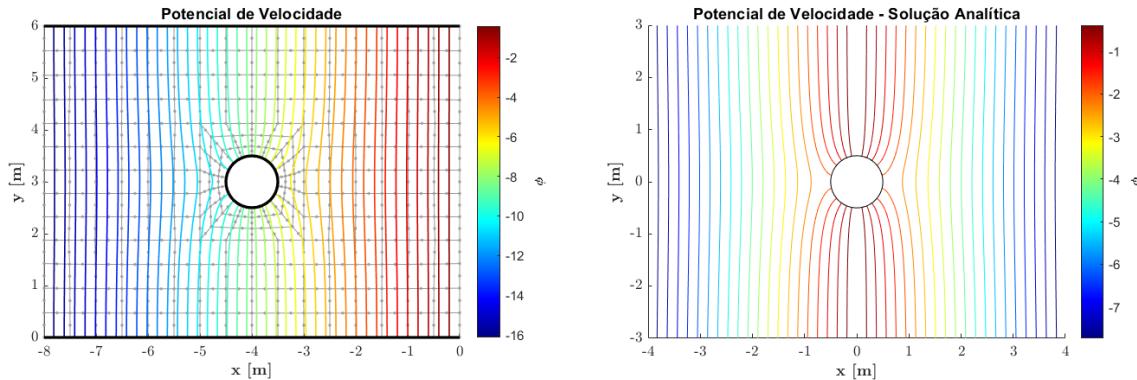
$$v_x = v_r \cdot \cos(\theta) - v_\theta \cdot \sin(\theta) \quad (11)$$

$$v_y = v_r \cdot \sin(\theta) + v_\theta \cdot \cos(\theta) \quad (12)$$

A pressão foi calculada a partir da fórmula seguinte:

$$p = \frac{1}{2} \rho \cdot v_0^2 \left(2 \frac{R^2}{r^2} \cdot \cos(\theta) - \frac{R^4}{r^4} \right) + p_0 \quad (13)$$

Todas as fórmulas consideradas apresentam valores constantes, quer da velocidade, quer da pressão para $r \rightarrow \infty$, pelo que os resultados obtidos pelo programa junto às paredes do escoamento, embora muito próximos, não são perfeitamente análogos. Tal se pode observar pelo facto de as isolinhas do potencial de velocidade não serem perpendiculares às paredes superior e inferior do escoamento, condição de fronteira esta, imposta no processamento efetuado no *MATLAB*. Uma forma de contornar este problema seria definir um cilindro de raio mais reduzido. Tal não foi efetuado uma vez que implicaria uma malha com maior número de elementos, por forma a captar corretamente a geometria do cilindro e, consequentemente, a obtenção de resultados fiáveis em torno do mesmo. Procurou-se, então, um balanço entre o tamanho do cilindro e a capacidade da malha de captar corretamente sua geometria com reduzido número de elementos. Apesar desta diferença em torno do cilindro, as expressões apresentadas descrevem muitíssimo bem o comportamento esperado pelo fluido, assumindo-se então que o programa deverá convergir para os valores da solução analítica nesta região.



(a) Implementação em MATLAB - QUAD8

(b) Solução Analítica

Figure 3: Isolinhas de Potencial de Velocidade

Na figura 3, pode-se constatar que, de facto, as isolinhas do potencial de velocidade calculado pela solução analítica, não são perpendiculares às fronteiras superior e inferior do escoamento, enquanto que as obtidas pelo programa para uma malha QUAD8, por exemplo, já são. Exposto isto, como seria de esperar, o erro absoluto máximo do potencial de velocidade, encontra-se próximo das fronteiras exteriores, em todas as malhas analisadas. Uma vez que a solução analítica apresentada se adequa melhor ao domínio próximo do cilindro central, foi calculado o erro absoluto máximo do potencial de velocidade na vizinhança definida por $x \in [-5.15, -2.85]$ e $y \in [1.85, 4.15]$, também (subdomínio).

Na tabela em baixo, de baixo, apresentam-se os erros absolutos máximos do potencial de velocidade, magnitude da velocidade e pressão, bem como os erros relativos, correspondentes aos erros absolutos, determinados.

Malha	Erro	Potencial de Velocidade	Potencial de Velocidade (Subdomínio)	Magnitude da Velocidade (m/s)	Pressão (bar)
QUAD4	Absoluto	0.161	0.049	0.882	0.00773
	Relativo (%)	1.993	1.818	2172.308	0.823
QUAD8	Absoluto	0.172	0.0652	0.153	0.00492
	Relativo (%)	2.126	2.393	4.976	0.516
QUAD9	Absoluto	0.172	0.0657	0.175	0.00613
	Relativo (%)	2.127	2.401	5.118	0.637
TRI3	Absoluto	0.190	0.115	1.013	0.0239
	Relativo (%)	1.859	6.031	2493.845	2.547
TRI6	Absoluto	0.417	0.131	0.405	0.0129
	Relativo (%)	5.139	4.790	11.826	1.349

A observação dos mapas a cores dos erros absolutos, anexo, aliada à interpretação dos resultados da tabela acima, permitem concluir que os cálculos efetuados pelo programa desenvolvido são fiáveis.

Em parte, os erros extrapolados advêm do facto da malha ser grosseira, o que se reflete de forma mais evidente nos resultados obtidos pela malha TRI3. Uma característica das malhas constituídas por elementos triangulares lineares, é de os fluxos calculados serem

constantes em todo o domínio do elemento, pelo que, em malhas pouco refinadas, estes elementos não são capazes de captar corretamente o comportamento dos fluxos em regiões de elevados gradientes dos mesmos. Os resultados são coerentes com esta observação uma vez que, o maior erro absoluto está associado a esta malha. Nas imagens da Pressão e Velocidade dos resultados do emphMATLAB no anexo, malhas TRI3, é possível visualizar este comportamento.

A segunda malha, da qual seria de esperar um mau cálculo dos fluxos, é a QUAD4, também linear, o que é suportado pelos resultados apresentados. Nas malhas quadrangulares lineares, o fluxo calculado no interior dos elementos já é aproximado linearmente, porém, nas fronteiras, é constante. Tal pode ser observado nas imagens da Pressão e Velocidade dos resultados do emphMATLAB no anexo, malhas QUAD4, onde as isolinhas da velocidade, aparecem contornar as fronteiras dos elementos.

Os erros relativos da velocidade, associados aos elementos lineares, são elevadíssimos uma vez que foram medidos num local onde a velocidade é muito reduzida e a má aproximação dos elementos indica uma velocidade mais elevada. Quanto aos elementos quadráticos infere-se que os quadrangulares, QUAD8 e QUAD9, são melhores, porém, parte dos erros obtidos nos elementos TRI6, resulta do método utilizado na integração numérica. A integração de Gauss, efetuada em triângulos de referência por meio de 7 pontos de integração, é propícia a maiores erros que a efetuada em domínios quadrangulares. Apesar disso, os erros resultantes dos elementos quadráticos, são significativamente inferiores no cálculo da velocidade e pressão.

Por fim é importante comparar os elementos QUAD8 com os QUAD9. Os erros obtidos em ambos são muito próximos, embora os QUAD8 apresentem menores erros nas fronteiras dos elementos, enquanto que, os QUAD9, têm melhores resultados no interior do elemento.

3 Implementação em Siemens NX

Devido às limitações do software Siemens NX, a simulação do problema de escoamento potencial, teve de ser feita por meio de uma análise de calor, visto que esta resuelve equações análogas à de escoamentos. A formulação forte de ambas difere apenas no significado físico das variáveis. Na análise de calor, a variável primária, trata-se da temperatura, enquanto que, no escoamento potencial estudado, se trata do potencial de velocidade. A variável secundária é, em ambas, uma taxa de variação em função do tempo, sendo na análise de calor, o fluxo térmico, e na análise de escoamentos, a velocidade do fluido. Além disso, a constante k na equação de Poisson ,refere-se à condutividade térmica do material em problemas de condução de calor e, em problemas de escoamento potencial, trata-se da massa volúmica do fluido.

Visto que este é homogéneo, consideramos $K = 1$. Por último as cargas distribuídas são nulas para o problema em questão.

Tendo em conta o descrito acima, a análise efetuada no NX, tem resultados análogos à efetuada no MATLAB, tal como se irá verificar.

3.1 Procedimento

Construção da Malha

1. Começou por se criar, no software comercial, uma peça com as dimensões indicadas no enunciado.
2. De seguida criou-se um ficheiro *fem* de modo a poder ser construída uma malha adequada. Para isso, dividiu-se a superfície em subsuperfícies, de modo que os relevos circulares e elípticos não tivessem grande impacto na qualidade da malha sendo, a deformação dos elementos adjacentes, reduzida. De modo a criar as subsuperfícies, foi utilizado o comando *split face*. Os comandos 2D *mapped mesh* e *mesh control* foram também utilizados, de modo a criar uma malha simétrica e sem elementos muito distorcidos tal como mostra a figura 4.

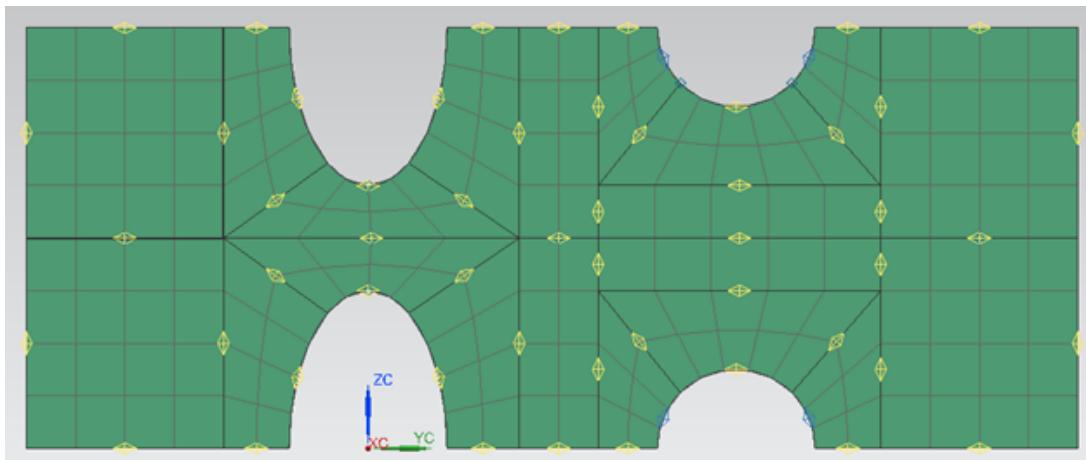


Figure 4: Construção da Malha

3. Para se poder realizar as simulações sem erros, atribuiu-se à peça um material isotrópico com uma condutividade $K = 1 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$, densidade $\rho = 1 \frac{kg}{m^3}$ e uma espessura

de 1 mm.

Simulação

Para a simulação foram aplicadas 2 condições de fronteira. Como dito anteriormente, foi utilizada uma simulação do tipo *thermal*, com um fluxo de calor análogo à velocidade de entrada, com o valor de $-2\frac{W}{m^2}$ colocado na aresta esquerda da nossa peça, e uma restrição térmica na aresta direita com o valor imposto de 0 °C. Para a realização da simulação, foi utilizado o comando *solve* e armazenamento dos dados em ficheiro *Excell*.

Foram utilizadas malhas de 4 e 8 nós (CPLSTN4 e CPLSTN8 respetivamente) sendo uma linear (4) e a outra quadrática (8).

3.2 Análise de convergência

Para a análise de convergência foram efetuados 4 refinamentos à malha base, com um tamanho inicial de $h_e = 200$ mm e 182 elementos. Este refinamento teve como objetivo dividir cada um dos elementos em quatro, dando origem a malhas com o quádruplo dos elementos em relação às anteriores.

Visto que o refinamento cumpriu com o objetivo, tendo tido um fator de multiplicação de elementos, de exatamente quatro, de uma malha para a seguinte, pode dizer-se que este foi excelente.

Para observar a evolução dos resultados de malha, para malha foram retirados sempre os valores dos mesmos 8 pontos de convergência, mostrados na figura (9).

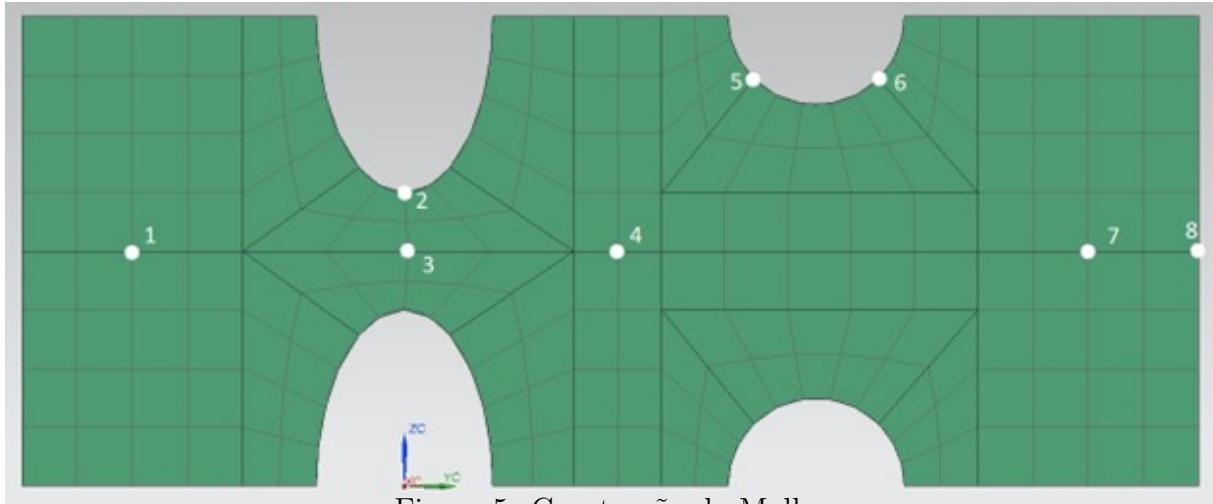
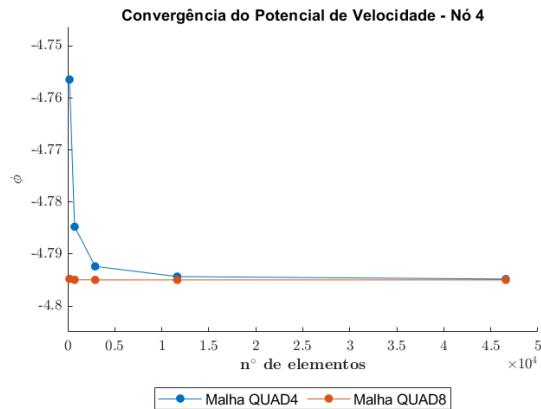


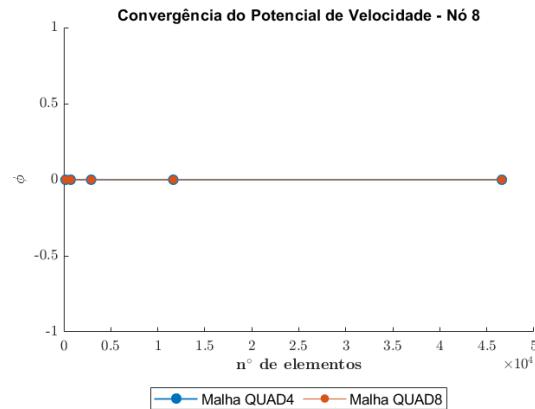
Figure 5: Construção da Malha

Análise de convergência para Potencial de Velocidade

A análise de convergência para Potencial de Velocidade foi realizada para malhas quadrangulares lineares e quadráticas. Os gráficos relativos aos nós 4 e 8 encontram-se representados na figura em baixo, estando as restantes em anexo.



(a) Potencial de Velocidade - Nô 4



(b) Potencial de Velocidade - Nô 8

Através da figura (a) (ou qualquer uma das figuras em anexo relativas ao Potencial de velocidade) verifica-se que a malha de elementos quadráticos apresenta uma convergência significativamente mais rápida, estando os valores de Potencial de Velocidade da malha base muito próximos dos valores da malha 5. Conclui-se, portanto, que elementos quadráticos apresentam resultados mais precisos para malhas mais grosseiras.

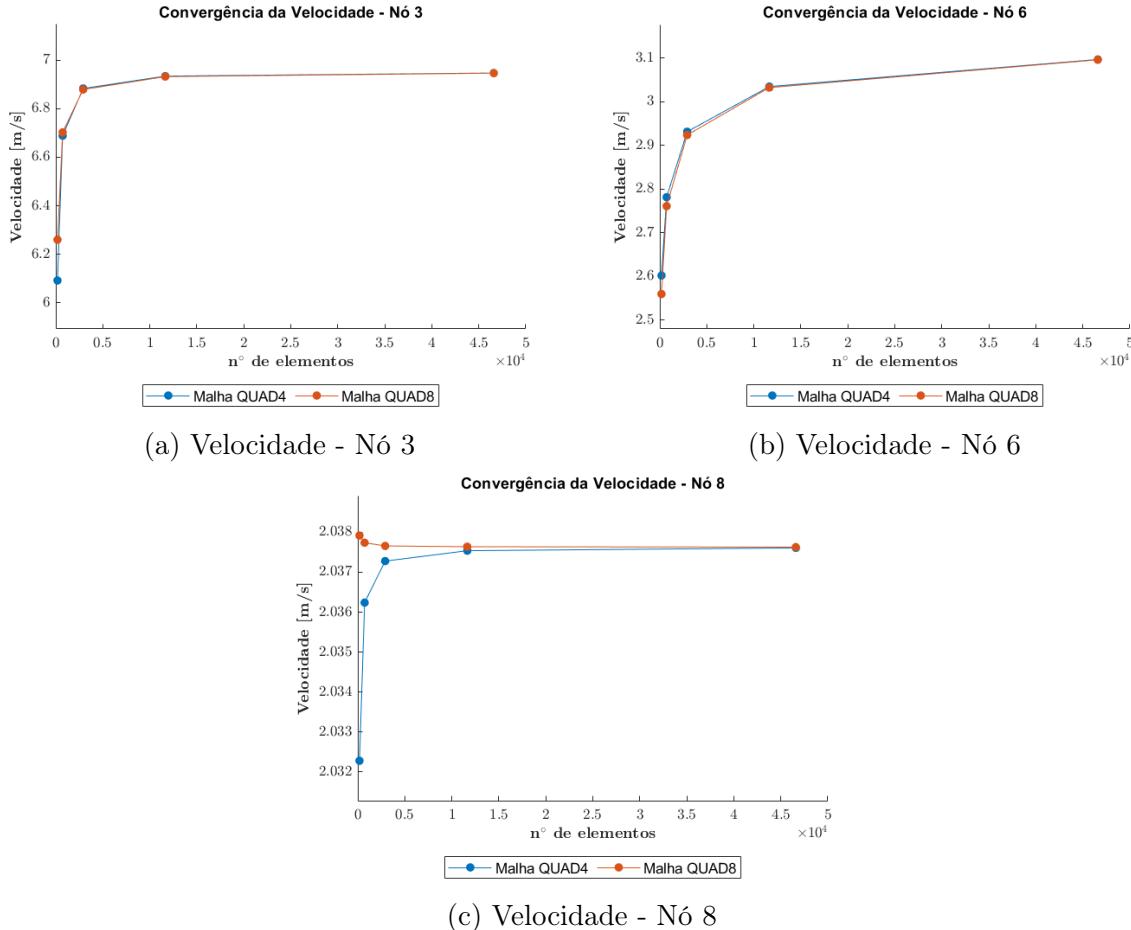
Ainda relativamente à figura (a), relativa ao nó 4, pode também concluir-se que não seria necessária uma sexta malha refinada nesta região, visto que a convergência de valores, tanto para a malha linear como quadrática, é razoável e suficiente. O mesmo se aplica para as restantes figuras, em anexo, relativas ao Potencial de Velocidade.

Por fim, quanto à figura (b), relativa ao nó 8, seria já de esperar um valor constante de 0, visto ter sido uma condição imposta na fronteira.

Análise de convergência para Velocidade

À semelhança da análise de convergência para Potencial de Velocidade, a análise de convergência para a Magnitude de Velocidade foi realizada para malhas quadrangulares lineares e quadráticas.

No entanto, enquanto o potencial de velocidade é calculado nos nós, a magnitude da velocidade é calculada nos elementos. Foi, portanto, feita uma média dos valores obtidos nos elementos que partilham cada um dos nós a ser estudado. Os gráficos relativos aos nós 3, 6, 8 encontram-se representados nas figuras (a), (b) e (c):



Através da figura (a), relativa ao nó 3, pode concluir-se que, tanto a malha quadrática como a linear, apresentam convergências semelhantes e suficientemente boas, para não ser necessário um maior refinamento nesta área da placa.

Assim como, para o Potencial de velocidade, pode chegar-se também à conclusão através da figura (c), relativa ao nó 8, que, para a Magnitude de Velocidade, a malha quadrática apresenta resultados mais precisos para malhas mais grosseiras. O mesmo se verifica para os restantes nós representados graficamente, em anexo, embora nem sempre de forma tão clara.

Por fim os valores representados na figura (b), relativa ao nó 6, mostram que não existe uma convergência clara para um determinado valor (assim como nas figuras relativas aos nós 2, 5 e 7, colocadas em anexo), concluindo-se assim que seria necessária uma malha com maior grau de refinamento nestas áreas, de modo a obter resultados mais precisos.

Análise da performance das malhas

Como foi possível comprovar, através de sucessivas comparações entre malhas lineares e quadráticas, que as segundas convergem mais rapidamente. Isto traduz-se em soluções mais precisas para malhas com elementos de maior dimensão, o que será útil para problemas em que se tenha que ter em conta o poder computacional necessário, inerente às simulações.

Alternativa de Simulação

Dada a simetria horizontal do problema em questão, concluímos que os resultados de velocidade e potencial de velocidade, serão também simétricos.

A tabela em baixo mostra os valores obtidos para os 8 pontos estudados, tanto para a malha completa, como para metade da mesma.

Pode concluir-se que os resultados obtidos para metade da malha, satisfazem suficientemente bem as condições impostas.

Esta simetria traz, portanto, uma clara vantagem a nível computacional, visto que se obtêm praticamente os mesmos resultados, apenas, com metade da peça (peça cortada pelo eixo de simetria), reduzindo-se assim, em metade, o tempo e esforço computacional.

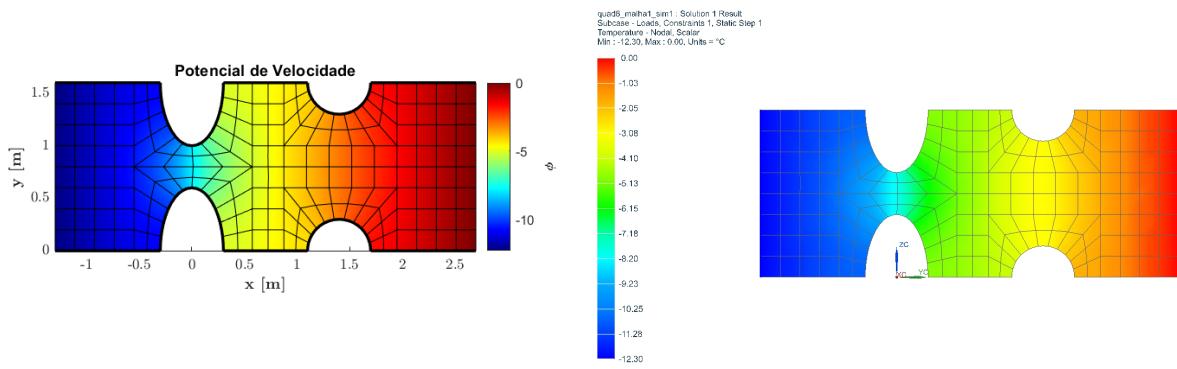
	Nó	1	2	3	4	5	6	7	8
Potencial	Metade	-11.259	-7.795	-7.7137	-4.75643	-3.88148	-2.06068	-0.76844	0
	Completa	-11,2585	-7,79449	-7.71369	-4.75643	-3.8815	-2.06068	-0.76844	0
Velocidade	Metade	2.17127	7.54478	6.09208	2.56558	2.53739	2.60162	2.07755	2.03228
	Completa	2,17124	7.54433	6.09149	2.5656	2.53685	2.60164	2.07755	2.03228

4 Resultados do Problema Proposto

Pode concluir-se que os resultados entre MATLAB e o software comercial NX são congruentes. O erro entre os valores máximos e mínimos não apresenta uma discrepância muito relevante.

É de salientar ainda que no software NX cada elemento possui valor constante do fluxo em todo o domínio. Já em MATLAB cada um dos elementos interpola os valores dos fluxos calculados nos diversos nós e pontos de integração resultando numa aproximação continua do fluxo em todo o domínio.

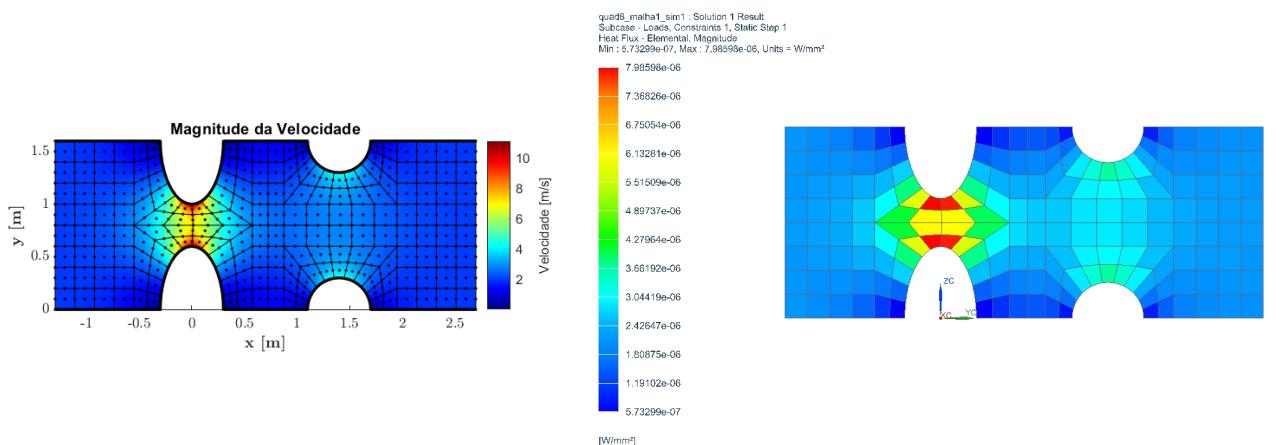
4.1 Potencial de Velocidade, Campo de Velocidade e Pressão



(a) Implementação em MATLAB - QUAD8

(b) Implementação em NX - QUAD8 Malha 1

Figure 7: Comparação MATLAB vs NX - Potencial de Velocidade



(a) Implementação em MATLAB - QUAD9

(b) Implementação em NX - QUAD8 Malha 1

Figure 8: Comparação MATLAB vs NX - Campo de Velocidade

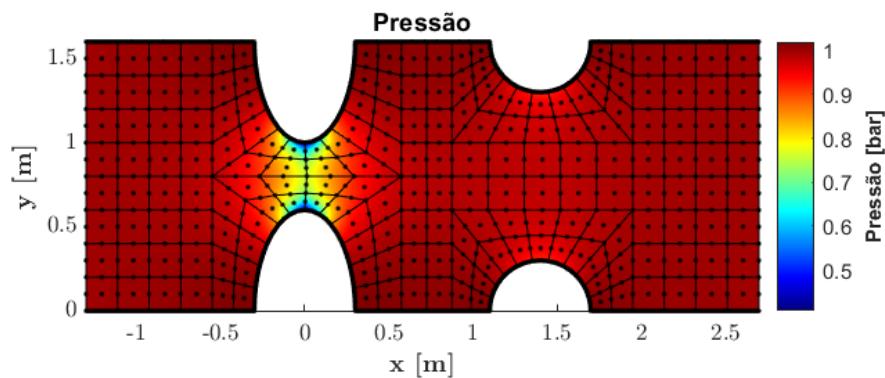


Figure 9: Evolução da Pressão

4.2 Valores máximos e mínimos de velocidade e de pressão

		Matlab				NX			
		QUAD4	QUAD8	TRI3	TRI16	QUAD4	QUAD8	TRI3	TRI16
Potencial	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	-12,076	-12,301	-11,844	-11,443	-12,080	-12,300	-11,844	-12,290
Magnitude da Velocidade (m/s)	Máximo	8,614	10,277	9,787	10,038	7,614	7,986	9,787	9,337
	Mínimo	0,559	0,141	0,606	0,081	0,584	0,573	0,607	0,383

		Erro Relativo (%)			
		QUAD4	QUAD8	TRI3	TRI16
Potencial	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,033	0,008	0,000	6,892
Magnitude da Velocidade	Máximo	13,134	28,688	0,000	7,508
	Mínimo	4,281	75,393	0,165	78,851

4.3 Forças na Parede

		Matlab				
		QUAD4	QUAD8	QUAD9	TRI3	TRI6
Pressão (bar)	Máximo	1,018	1,020	1,020	1,018	1,020
	Mínimo	0,649	0,492	0,486	0,541	0,516
Força Resultante na Parede de cima (kN)	Segundo x	-42,046	10,212	12,557	-1244,000	-74,803
	Segundo y	388000,000	-386300,000	386300,000	388400,000	389300,000
Força Resultante na Parede de baixo (kN)	Segundo x	-43,798	-10,737	-9,001	968,285	57,813
	Segundo y	-388000,000	-386300,000	-386300,000	-388600,000	-389300,000
Força Resultante Total (kN)	Segundo x	-85,844	-0,525	3,556	-275,639	-16,990
	Segundo y	-0,328	-0,432	-0,399	-179,879	12,101

Teoricamente, em escoamento potencial, a geometria em questão é caracterizada por ter forças resultantes nulas nas paredes. Assim sendo, esta análise das forças é um excelente índice da performance das malhas. Pode aferir-se, portanto, que as malhas QUAD4, TRI3 e TRI6 apresentam um desempenho consideravelmente inferior às malhas QUAD8 e QUAD9.

5 Conclusões

A precisão do método dos elementos finitos depende apenas do número de elementos constituintes de uma determinada malha, do tipo de elemento que a constitui e da qualidade da malha, isto é, a deformação de cada elemento. Verifica-se que à medida que uma malha é refinada, os resultados obtidos para o Potencial de Velocidade e para a Magnitude da Velocidade, convergem para um determinado valor, sendo este cada vez mais preciso e próximo da solução exata. Comparando os resultados obtidos entre os elementos QUAD8 e QUAD9, chegou-se à conclusão de que não se justifica utilizar elementos QUAD9, visto que os resultados obtidos são idênticos e custo computacional é maior comparativamente com os elementos QUAD8.

Conclui-se ainda com base nos resultados obtidos neste estudo, que os resultados dados pelos elementos quadráticos são mais fidedignos, visto terem erros absolutos mais reduzidos. Posto isto, é de salientar que caso seja necessário utilizar elementos lineares, deverão ser utilizados preferencialmente elementos quadrangulares, visto que os elementos TRI3 aproximam o fluxo no interior do elemento como sendo constante, não sendo capazes de captar regiões com gradiente de fluxo mais acentuado. Por outro lado elementos quadrangulares lineares fazem uma aproximação linear, e por isso, mais precisa.

A partir da análise de convergência aferiu-se que a malha não necessita do mesmo nível de refinamento em todo o domínio, uma vez que, há regiões que convergem mais rápido que outras, sendo desejável colocar mais elementos, de menor dimensão, nas regiões que apresentam convergências mais lentas, e elementos maiores nas restantes regiões, poupando-se no custo computacional. Outra técnica que permite reduzir o custo computacional é tirar partido de simetrias com eixos de simetrias, simulando apenas metade, ou um quarto do domínio, por exemplo.

Por fim, é importante referir que em programas deste tipo, é fulcral a eficiência computacional do código, tendo sido alcançado esse objetivo na implementação em emph>MATLAB.

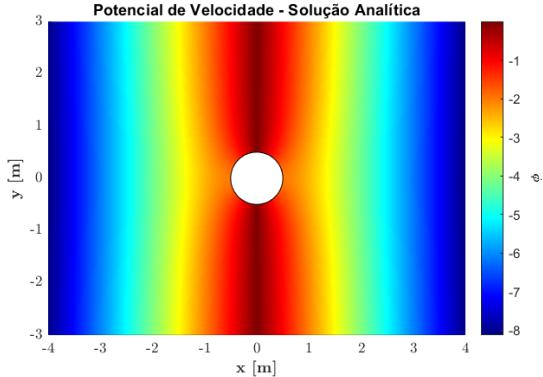
6 Bibliography

Reddy, J.N. *Introduction to the Finite Element Method*. 4th Edition. The McGraw-Hill Companies, 2018

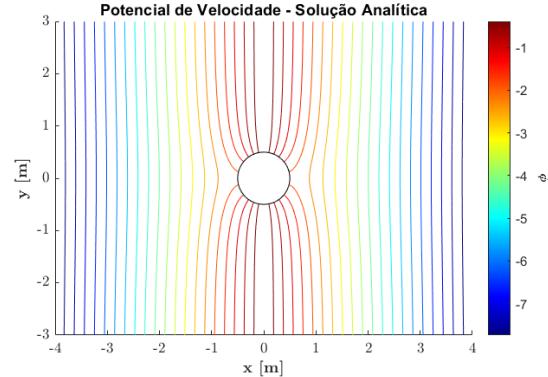
White, Frank M. *Mecânica dos Fluidos*. 6th Edition. The McGraw-Hill Companies, 2011

7 Apêndice - Resultados

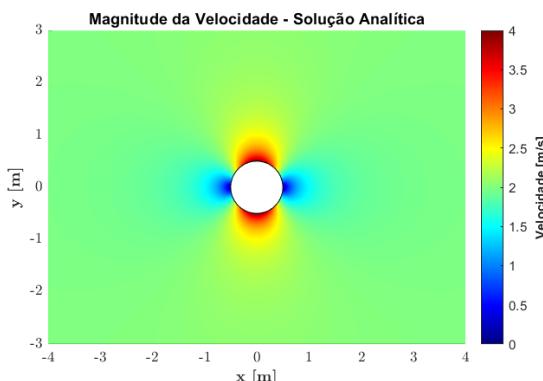
7.1 Solução Analítica - Geometria Simples



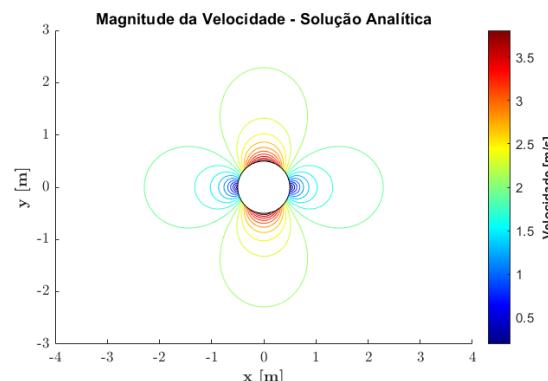
(a) Potencial de Velocidade



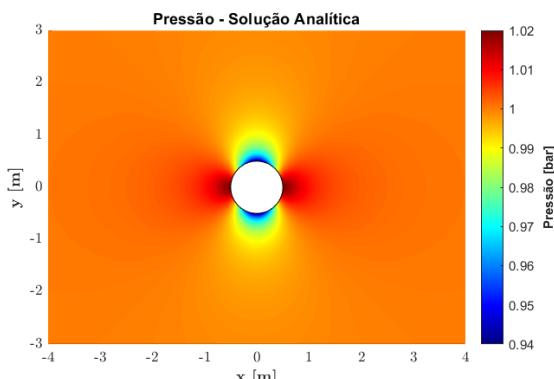
(b) Isolinhas de Potencial de Velocidade



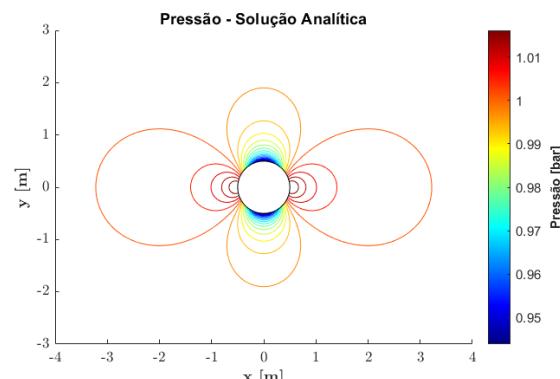
(c) Magnitude da Velocidade



(d) Isolinhas da Magnitude da Velocidade



(e) Pressão



(f) Isolinhas de Pressão

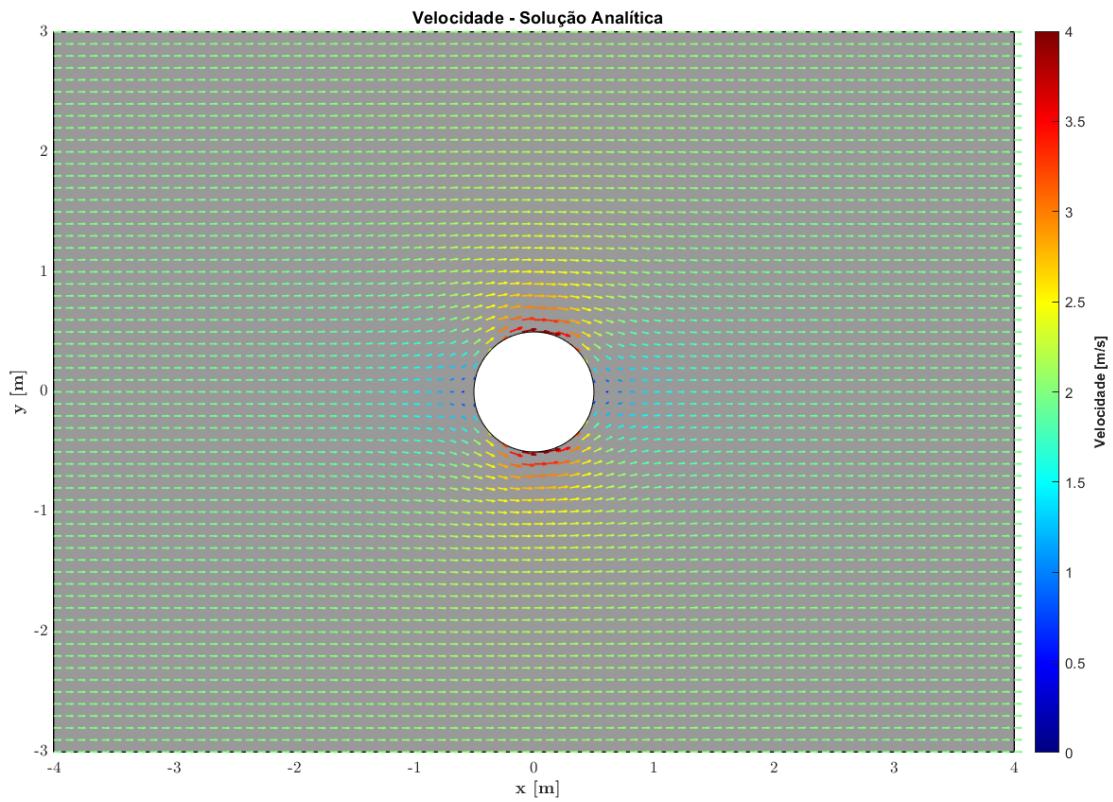


Figure 11: Vetor Velocidade

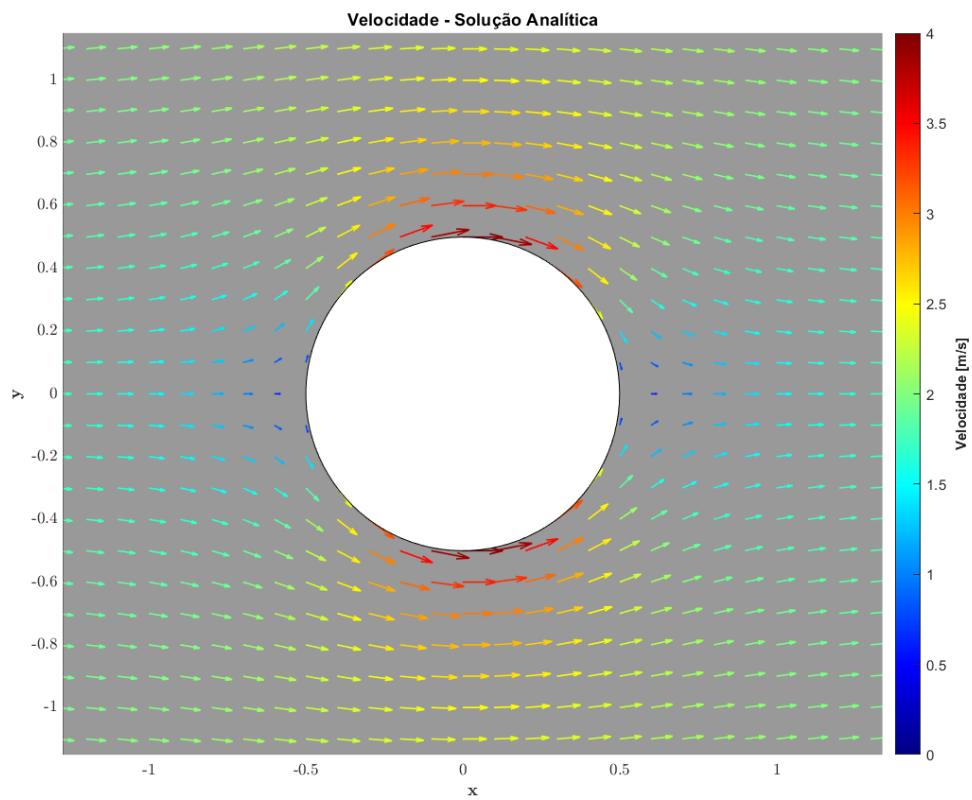


Figure 12: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

7.2 Resultados da Implementação em MATLAB - Geometria Simples

Força na Parede

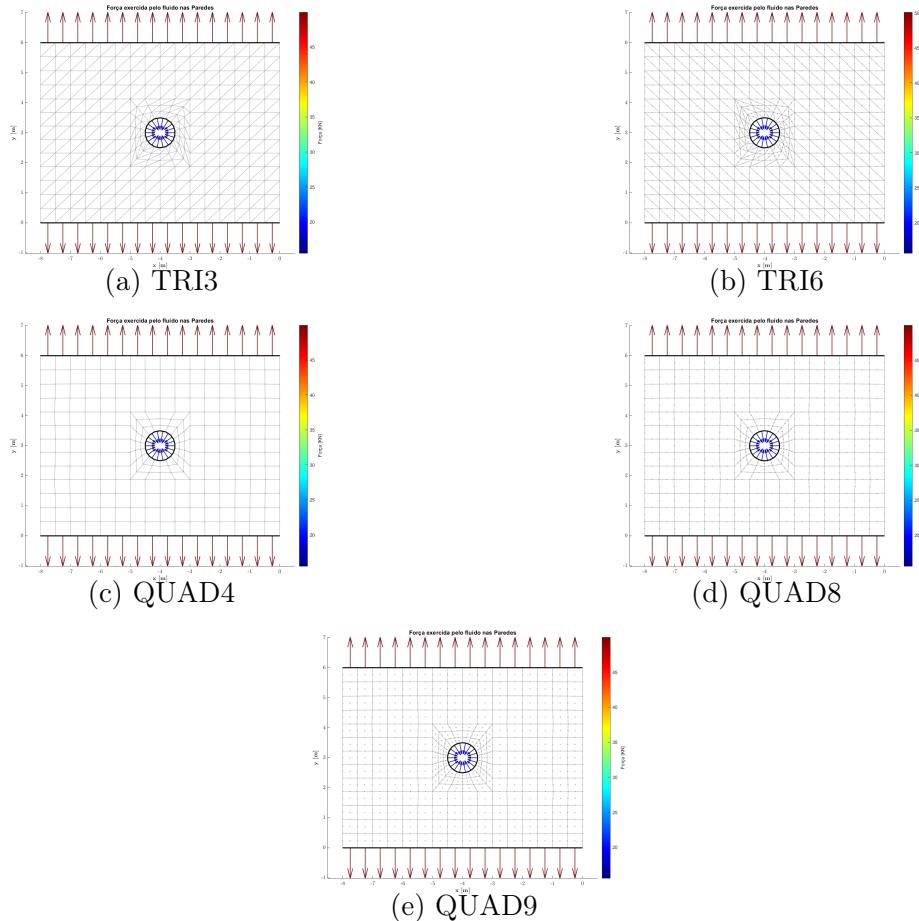
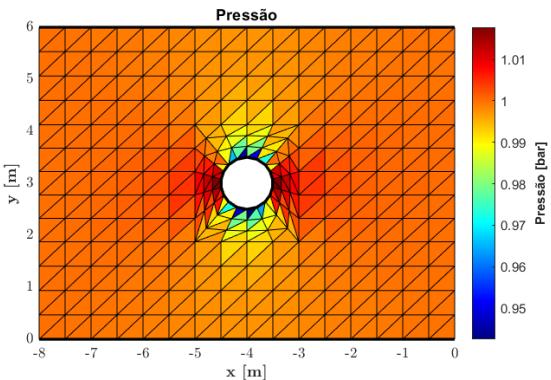
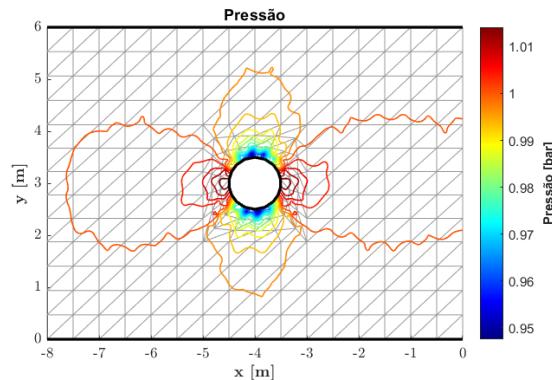


Figure 13: Força na Parede - Geometria Simples

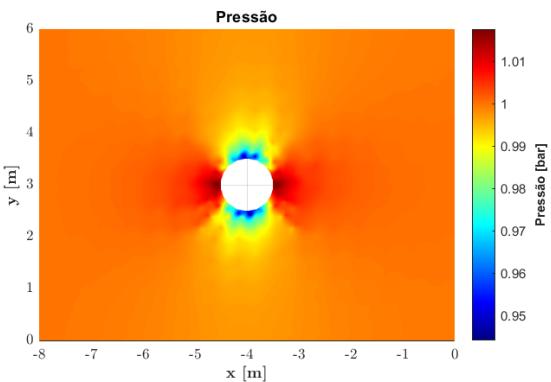
TRI3



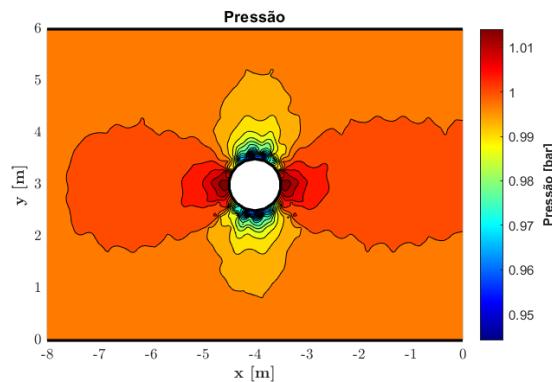
(a) Pressão



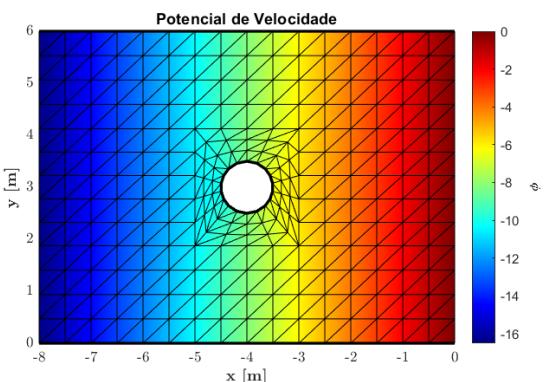
(b) Isolinhas de Pressão



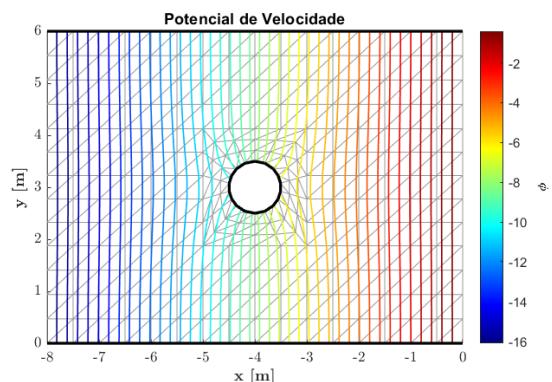
(c) Pressão sem Malha



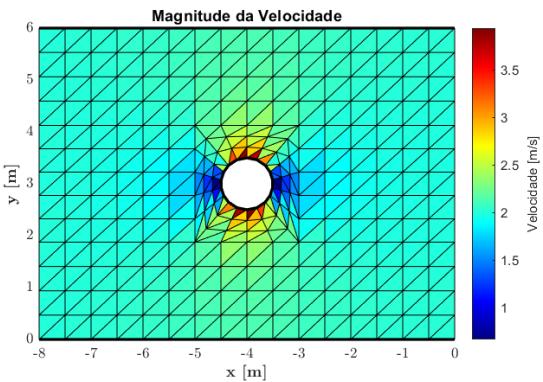
(d) Patamares de Pressão



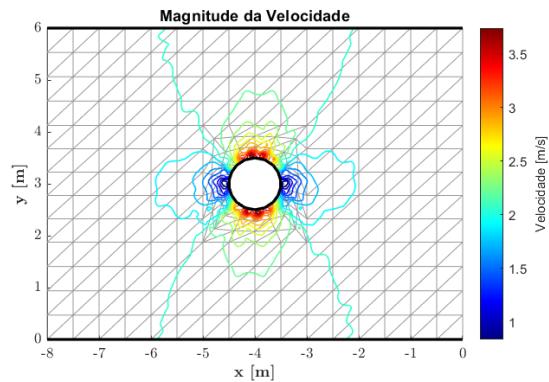
(e) Potencial de Velocidade



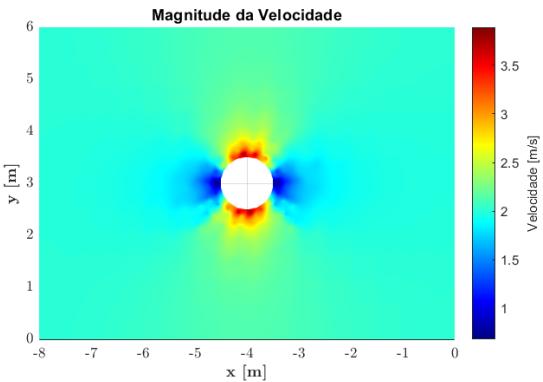
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



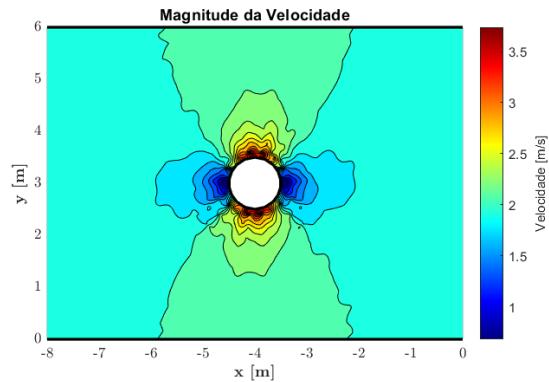
(g) Magnitude da Velocidade



(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Patamares de Magnitude de Velocidade

Figure 14: Resultados TRI3 - Geometria Simples

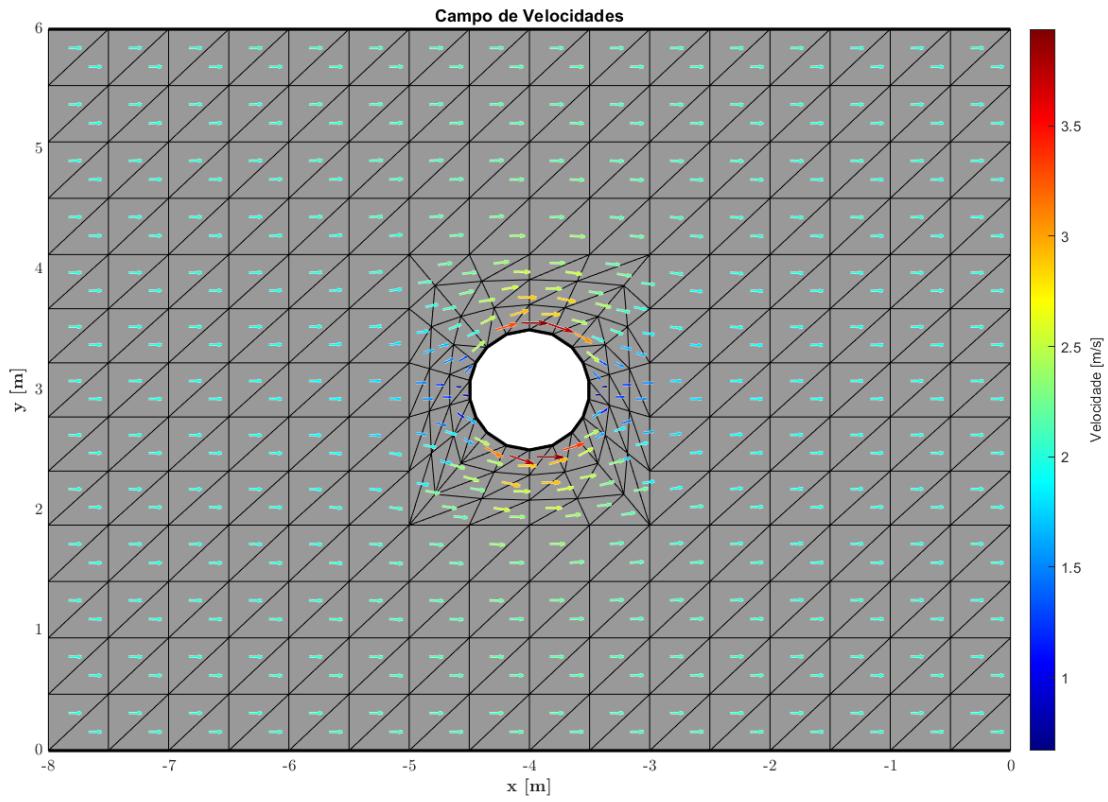


Figure 15: Vetor Velocidade

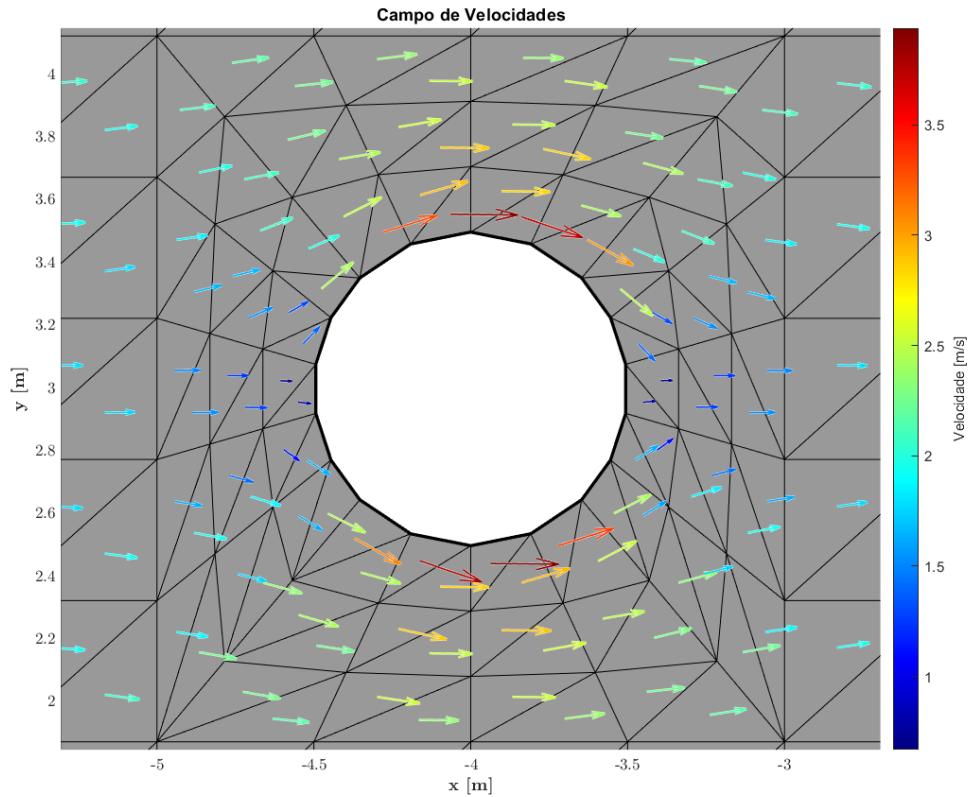
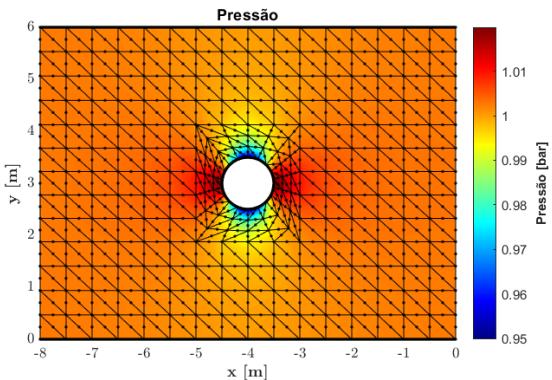
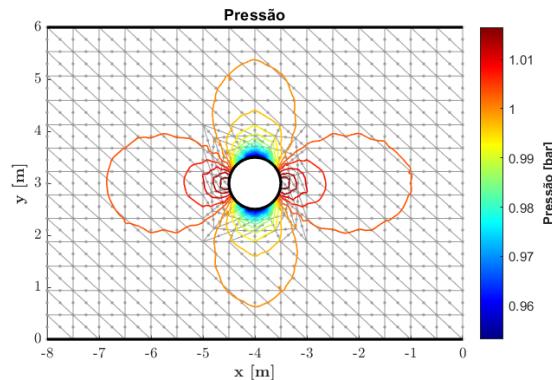


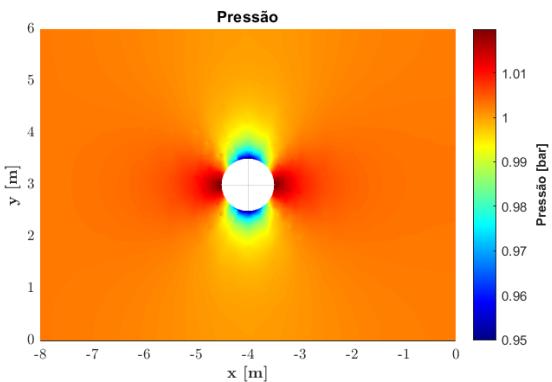
Figure 16: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

TRI6

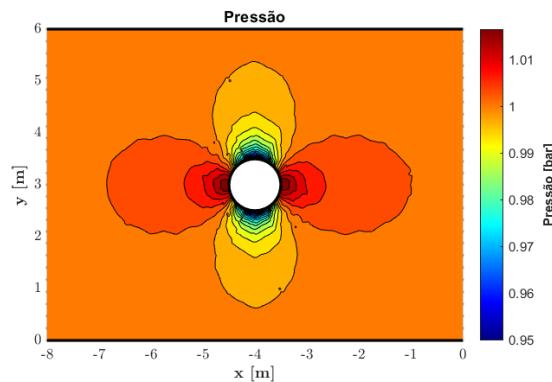
(a) Pressão



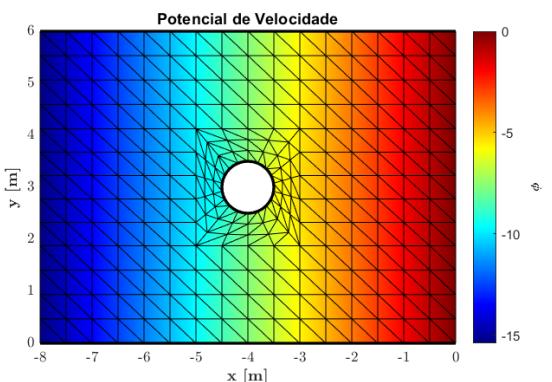
(b) Isolinhas de Pressão



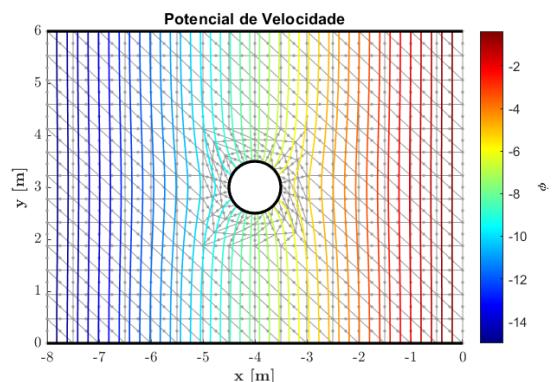
(c) Pressão sem Malha



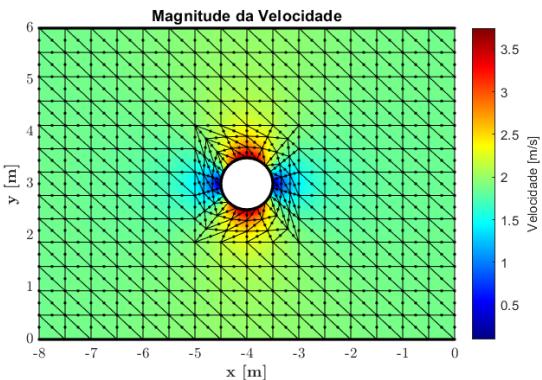
(d) Patamares de Pressão



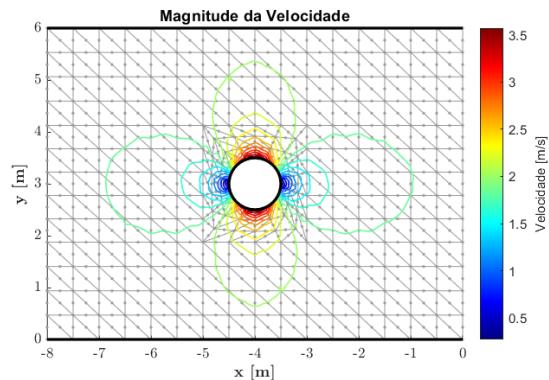
(e) Potencial de Velocidade



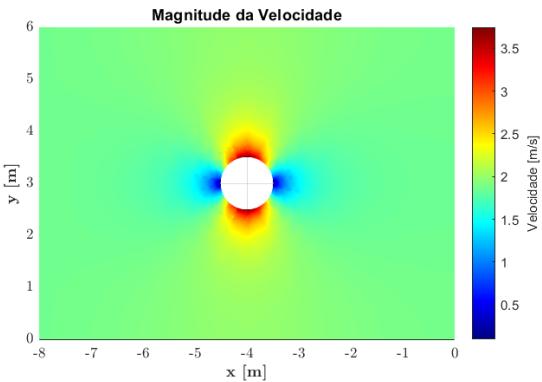
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



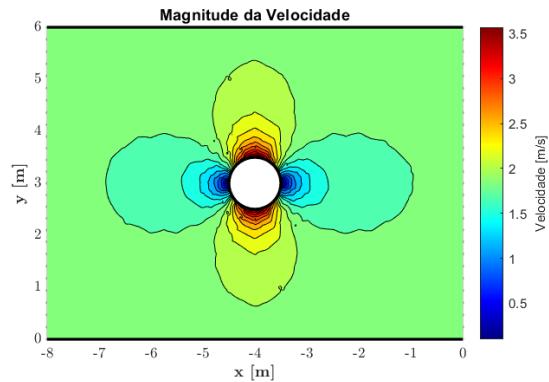
(g) Magnitude da Velocidade



(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Patamares de Magnitude de Velocidade

Figure 17: Resultados TRI6 - Geometria Simples

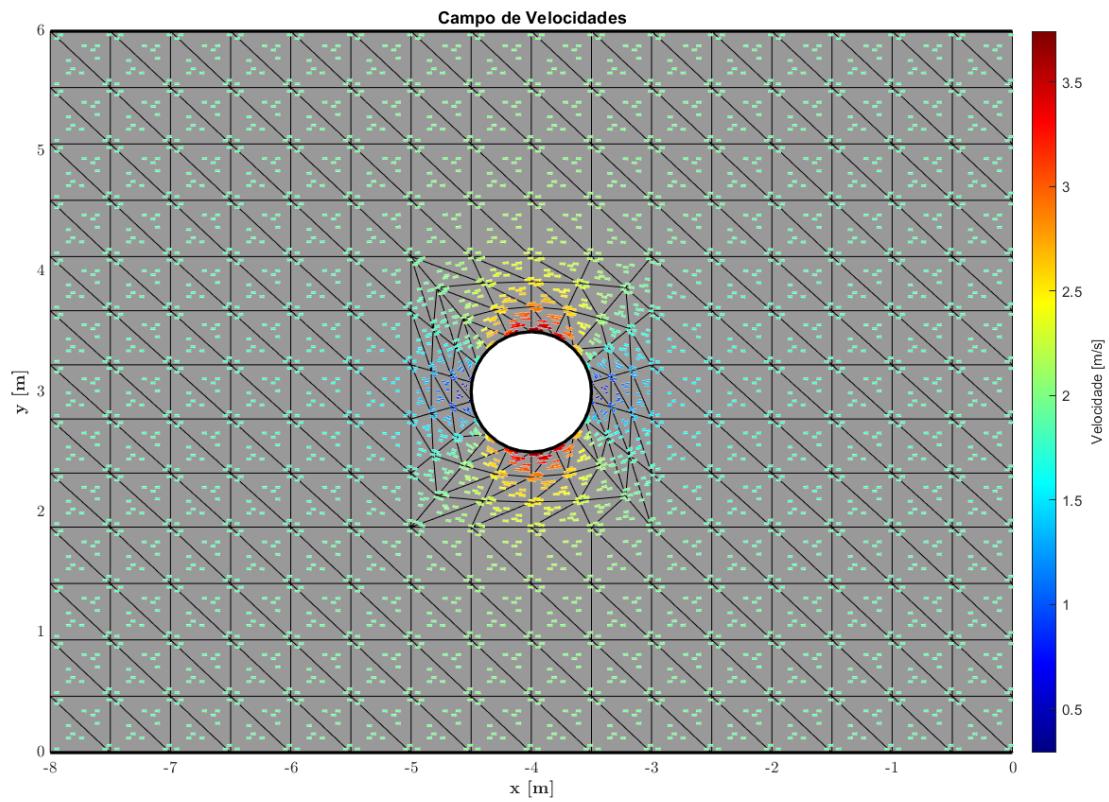


Figure 18: Vetor Velocidade

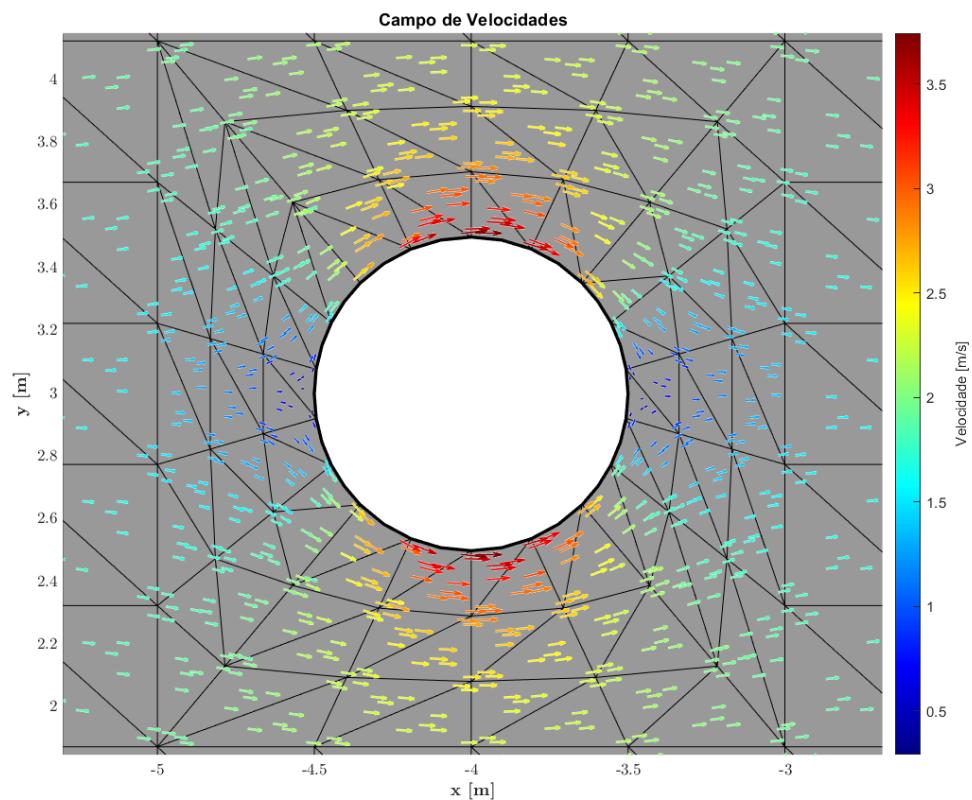
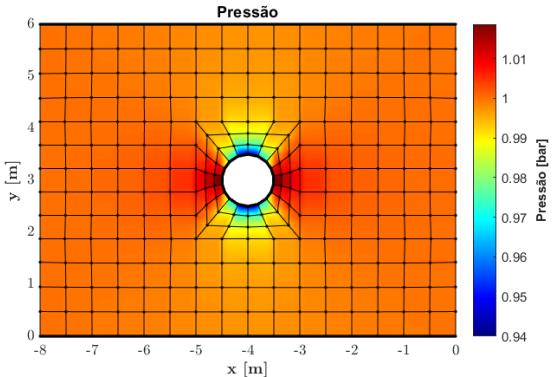
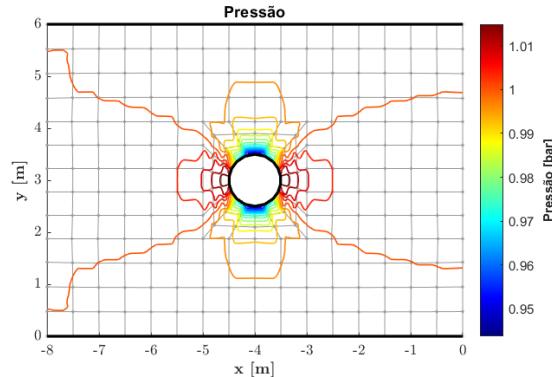


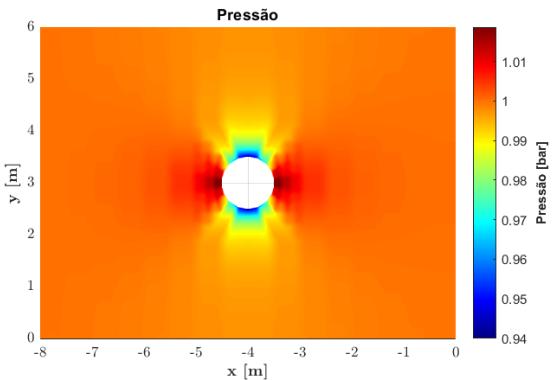
Figure 19: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

QUAD4

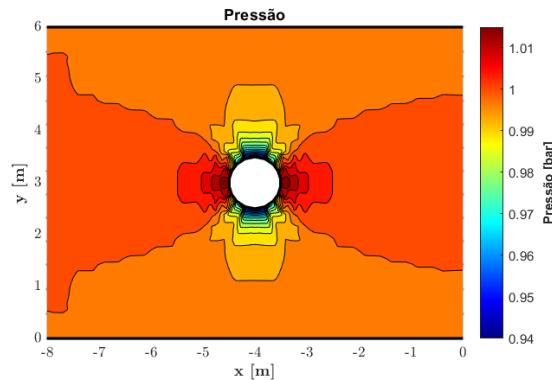
(a) Pressão



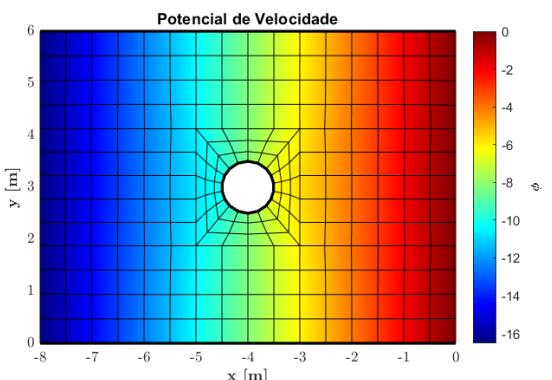
(b) Isolinhas de Pressão



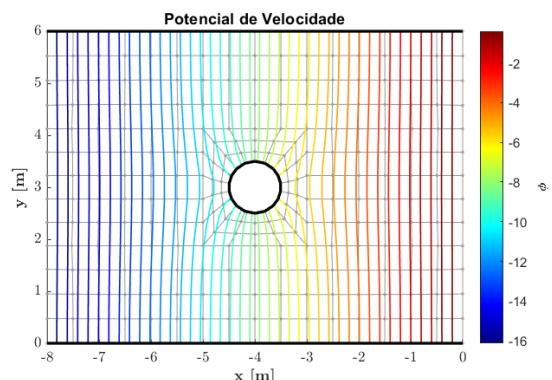
(c) Pressão sem Malha



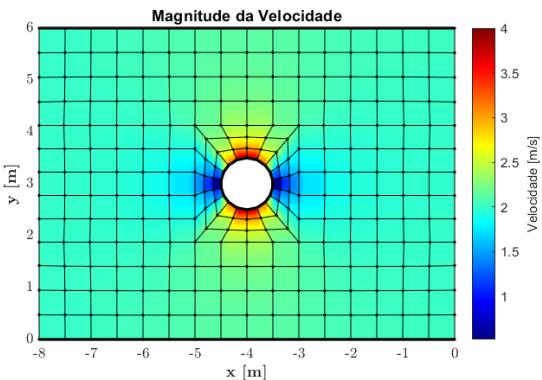
(d) Patamares de Pressão



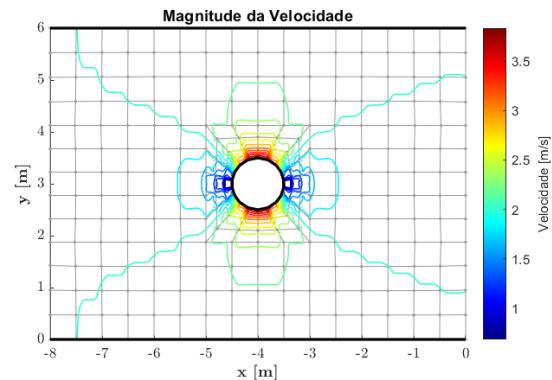
(e) Potencial de Velocidade



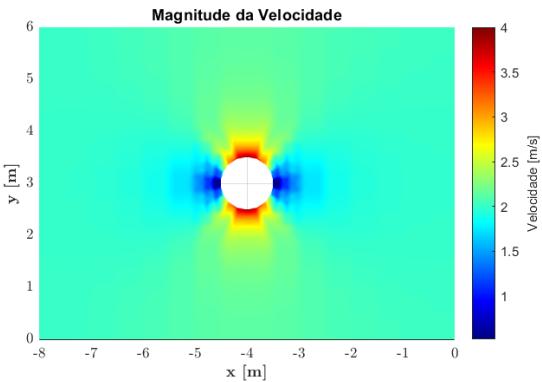
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



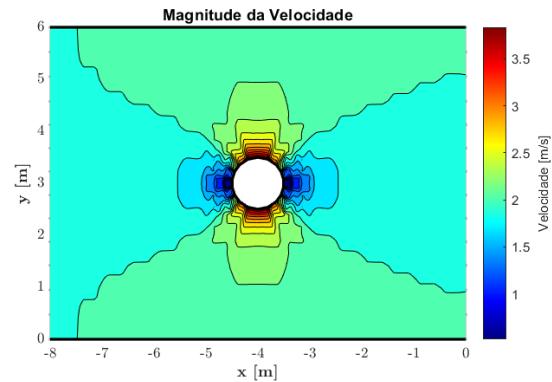
(g) Magnitude da Velocidade



(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Patamares de Magnitude de Velocidade

Figure 20: Resultados QUA4 - Geometria Simples

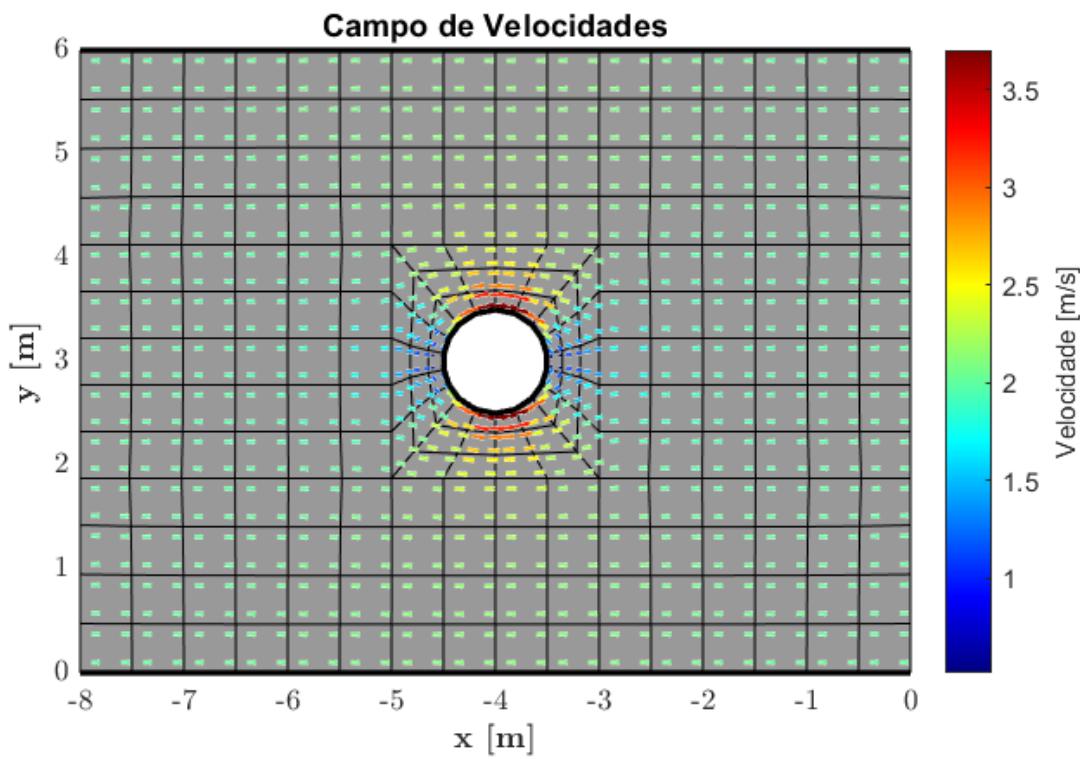


Figure 21: Vetor Velocidade

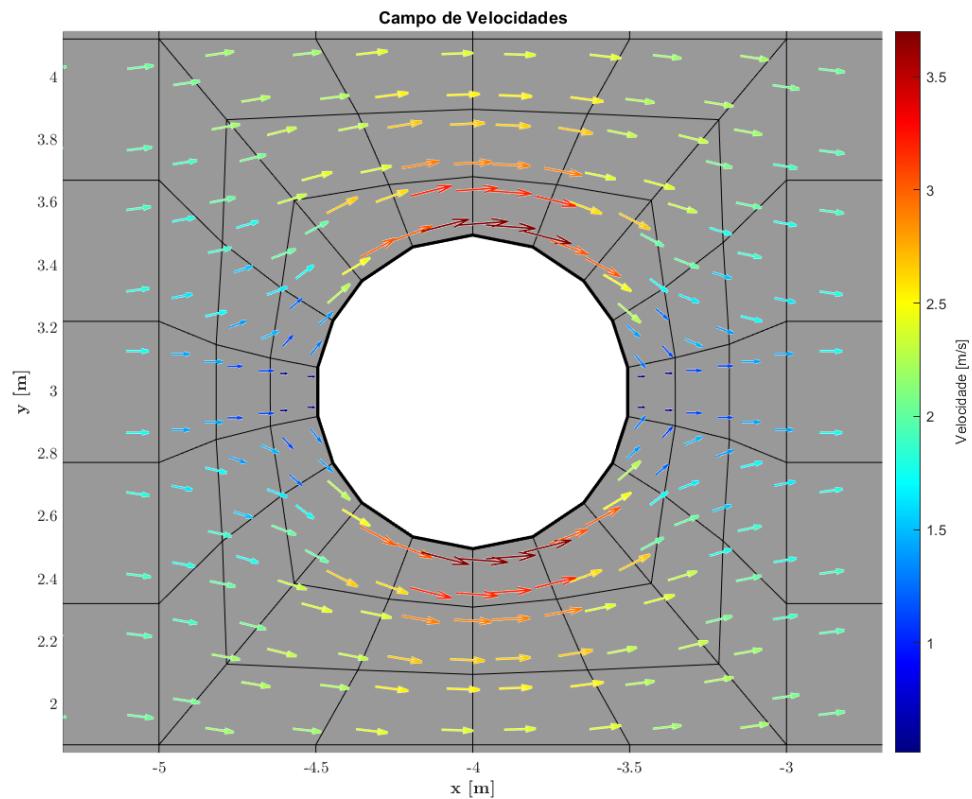
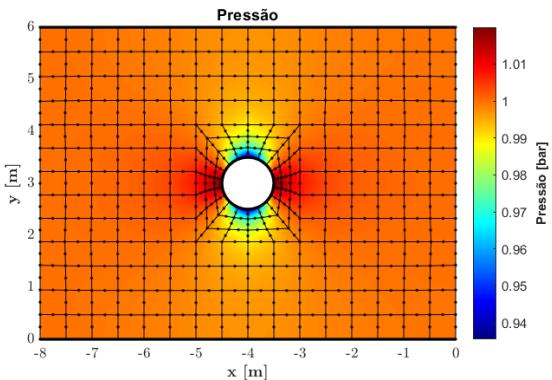
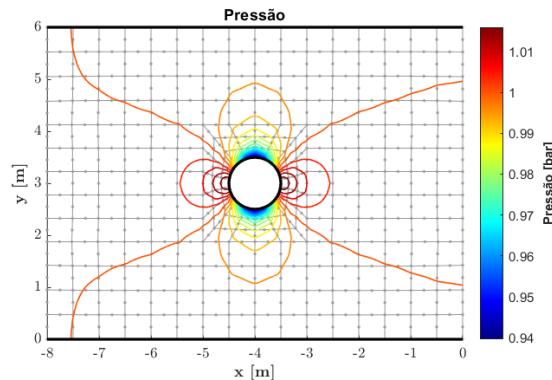


Figure 22: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

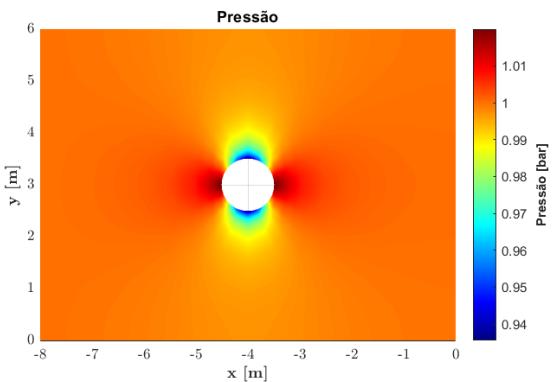
QUAD8



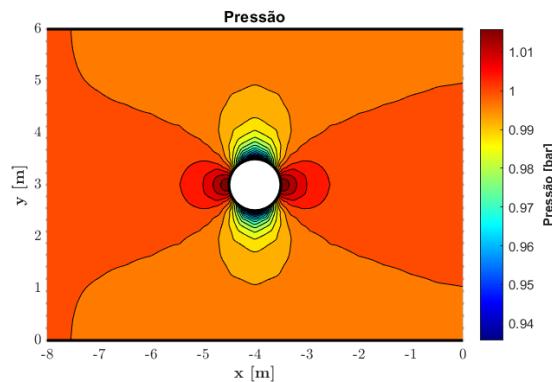
(a) Pressão



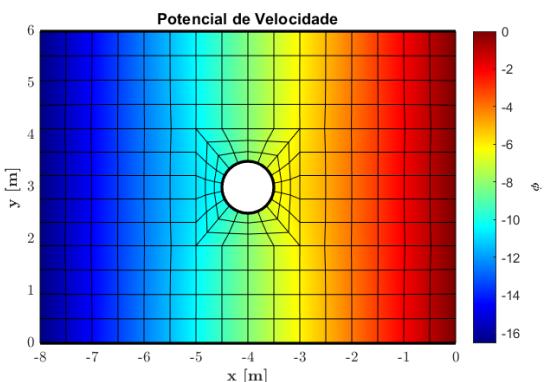
(b) Isolinhas de Pressão



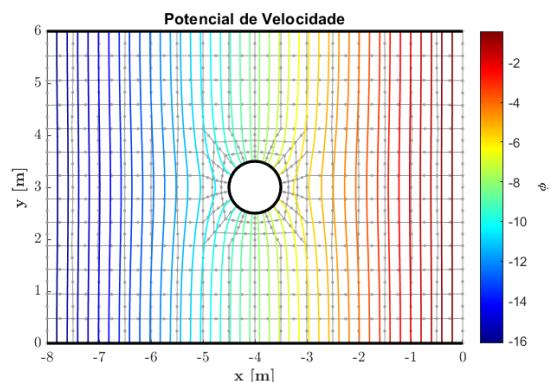
(c) Pressão sem Malha



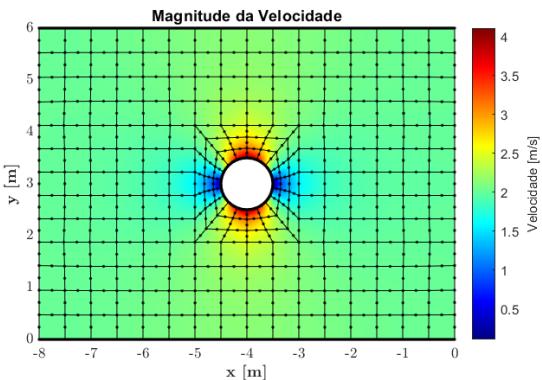
(d) Patamares de Pressão



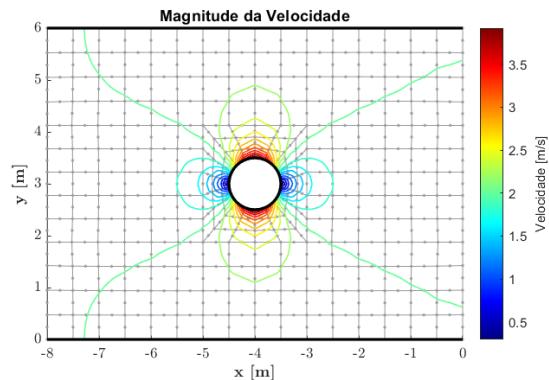
(e) Potencial de Velocidade



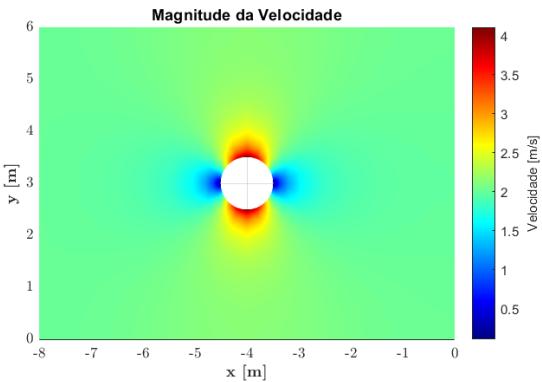
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



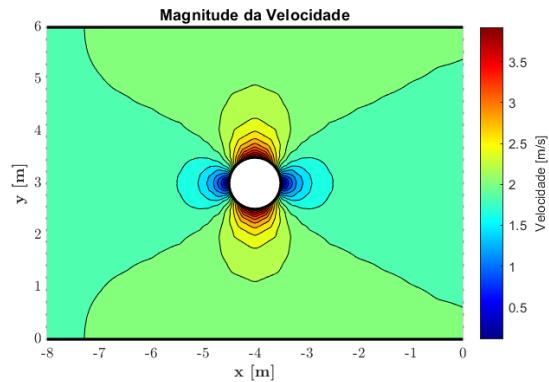
(g) Magnitude da Velocidade



(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Patamares de Magnitude de Velocidade

Figure 23: Resultados QUA8 - Geometria Simples

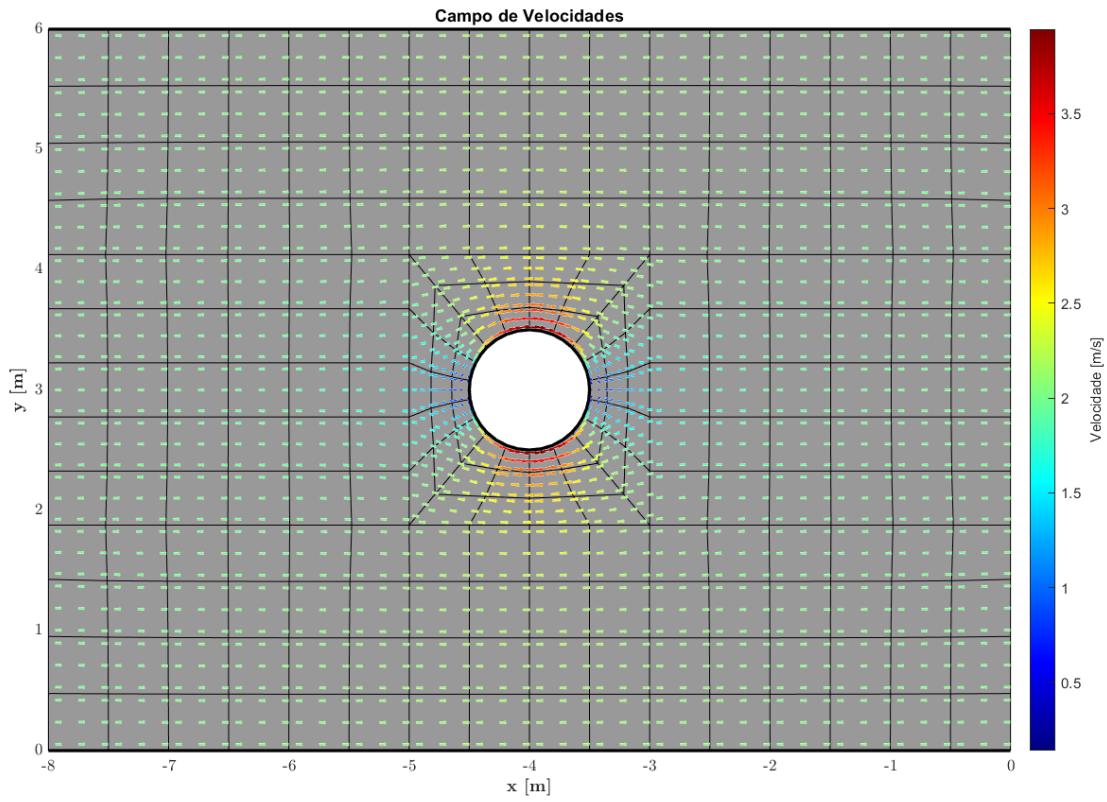


Figure 24: Vetor Velocidade

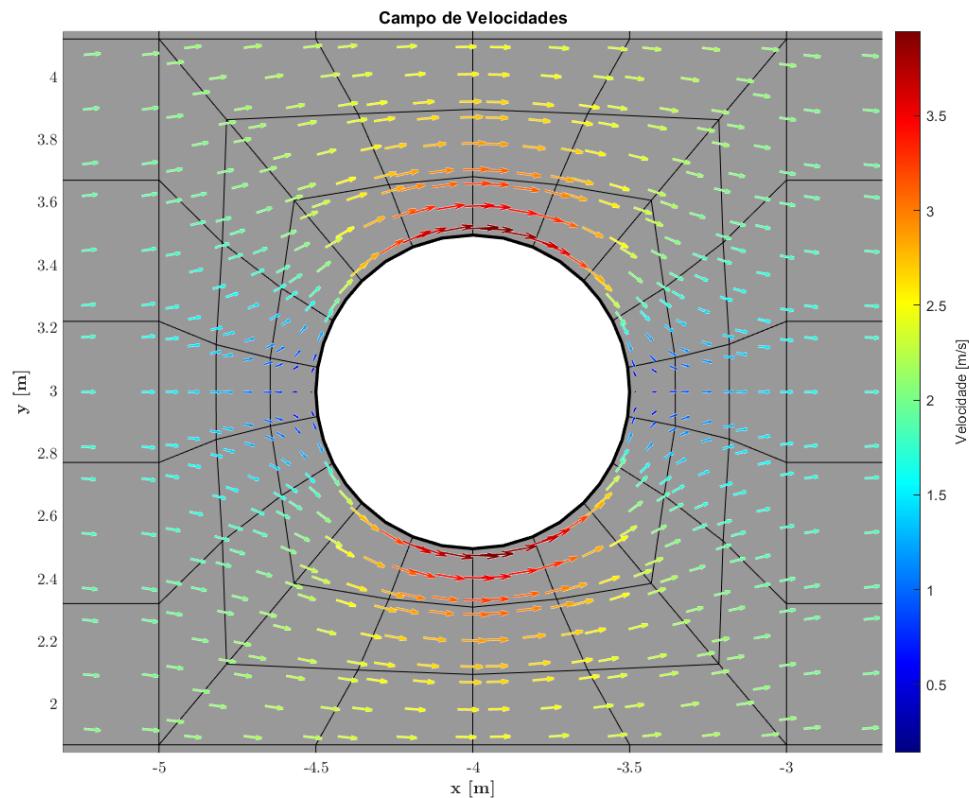
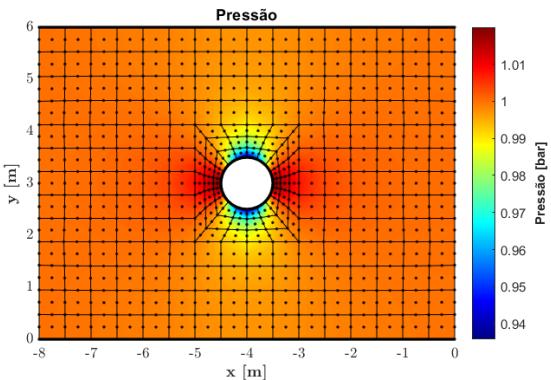
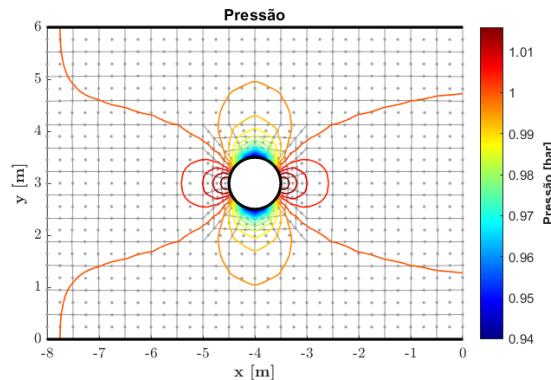


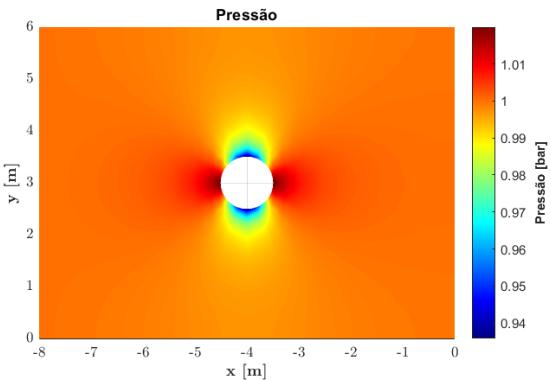
Figure 25: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

QUAD9

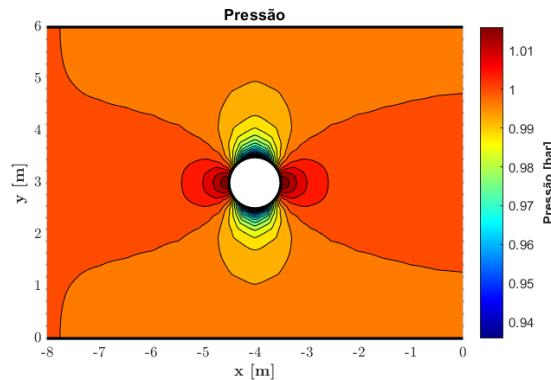
(a) Pressão



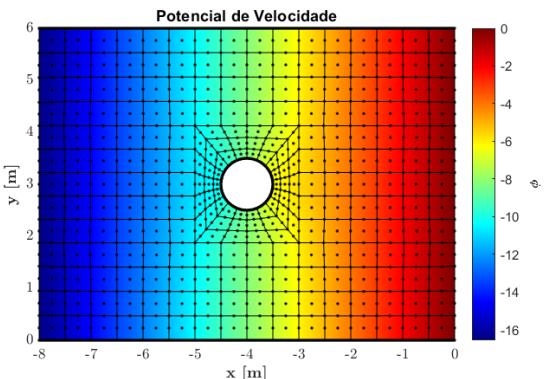
(b) Isolinhas de Pressão



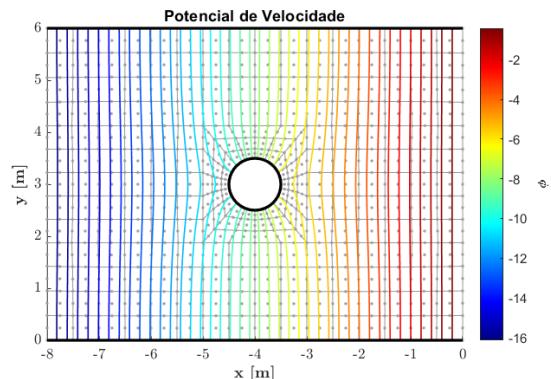
(c) Pressão sem Malha



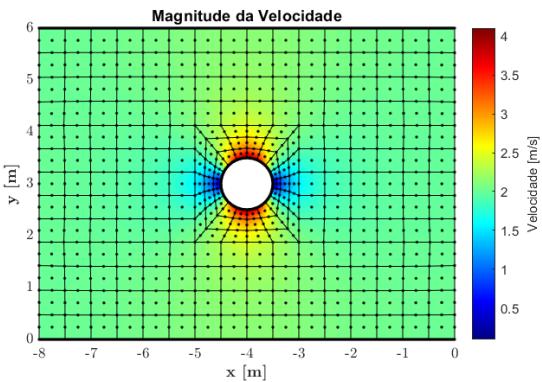
(d) Patamares de Pressão



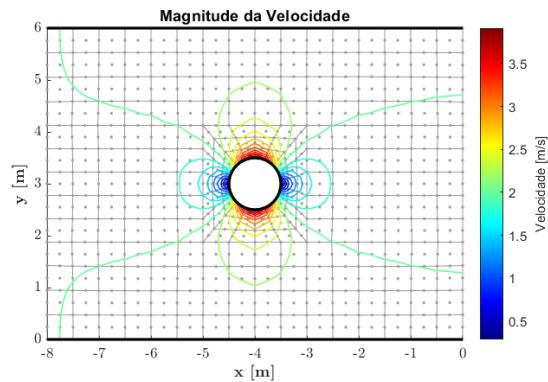
(e) Potencial de Velocidade



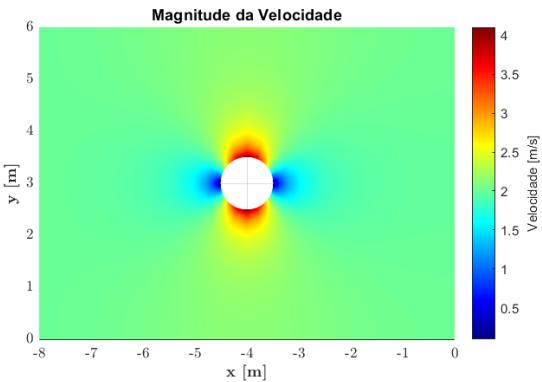
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



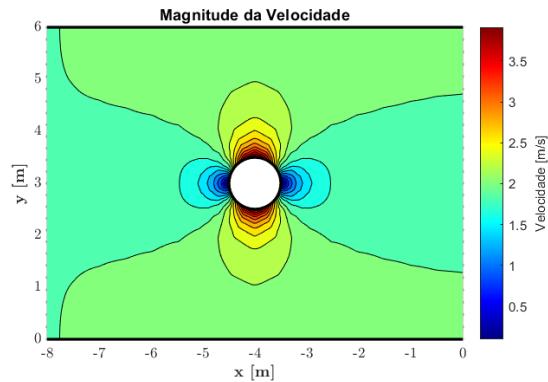
(g) Magnitude da Velocidade



(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Patamares de Magnitude de Velocidade

Figure 26: Resultados QUA9 - Geometria Simples

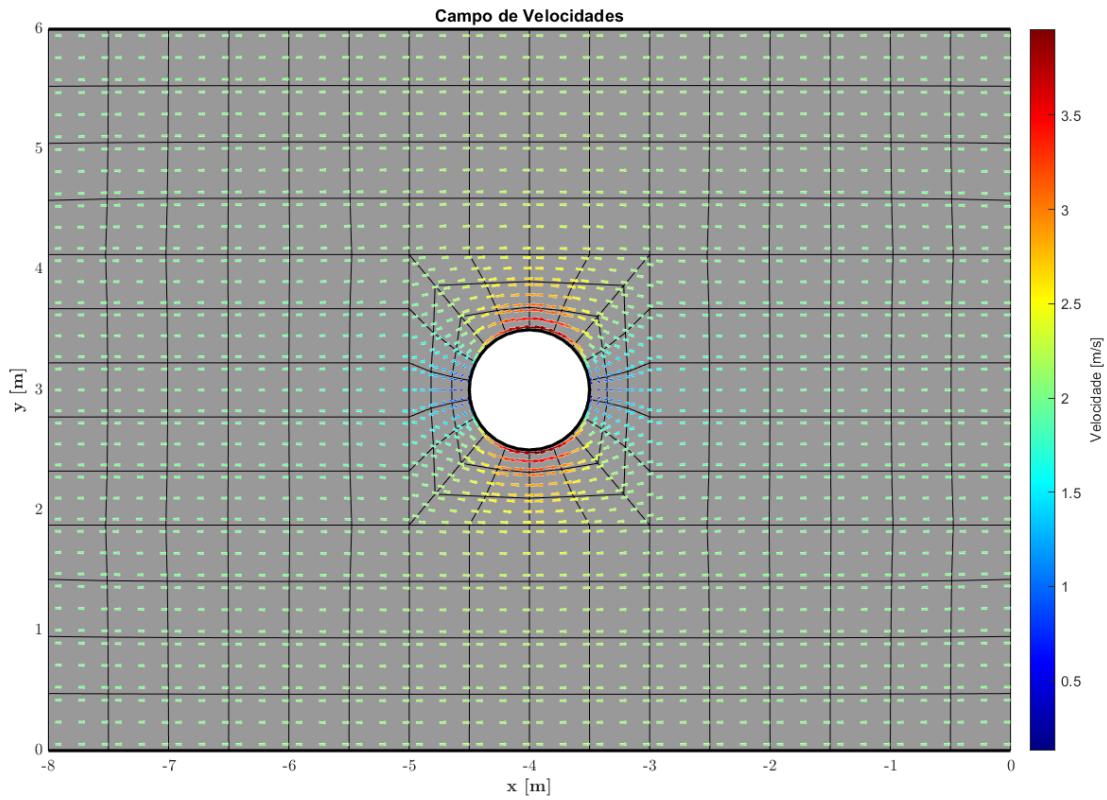


Figure 27: Vetor Velocidade

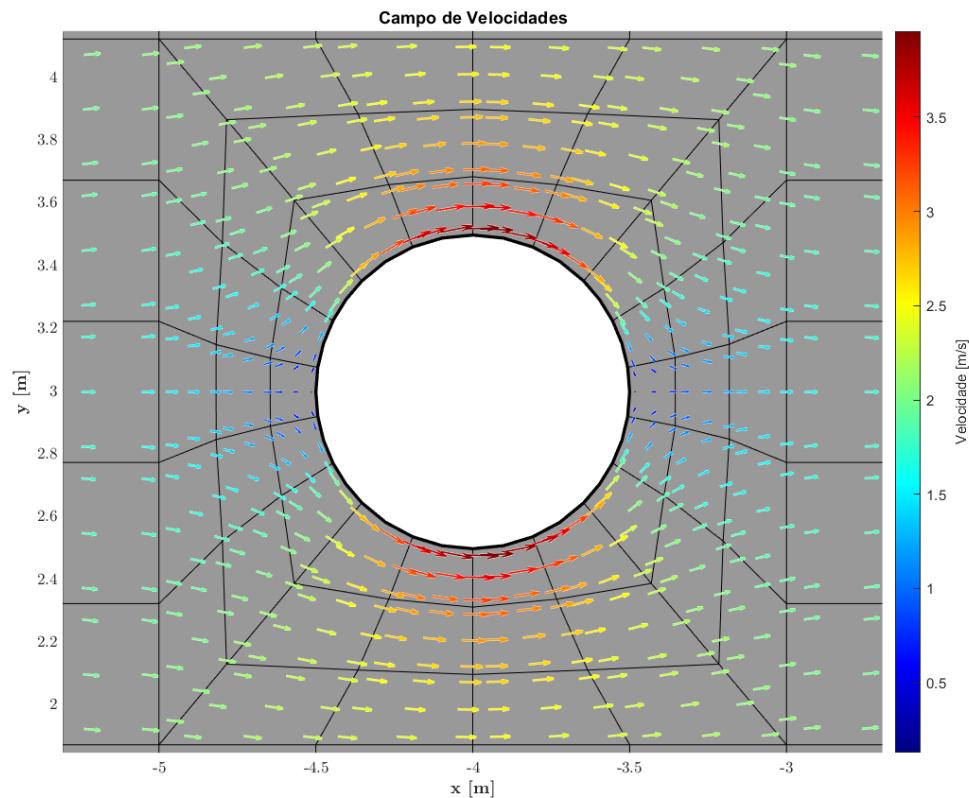
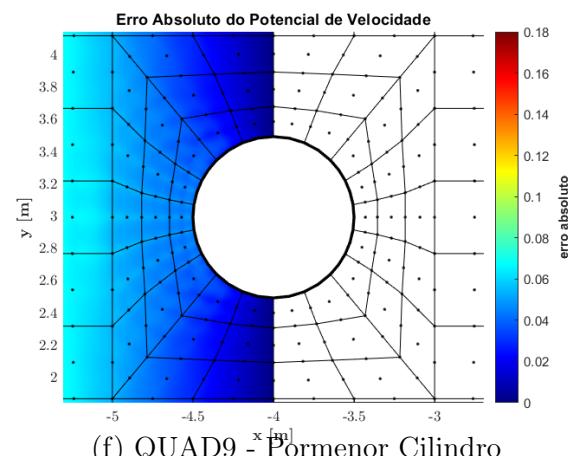
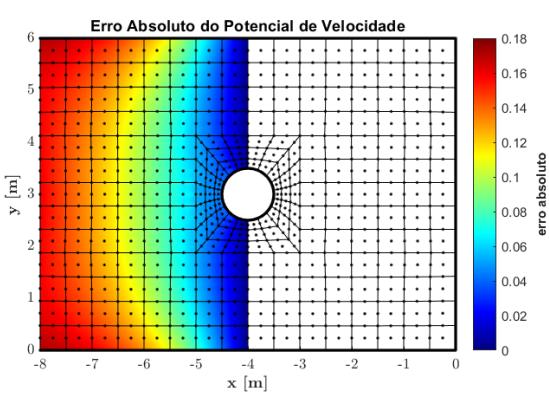
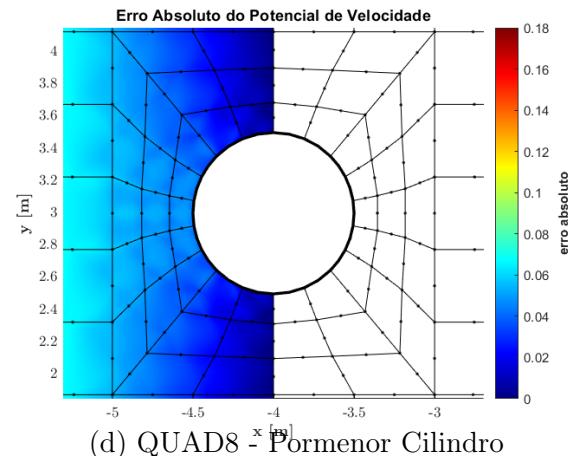
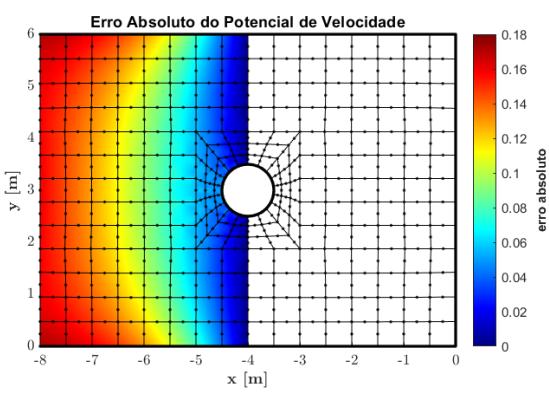
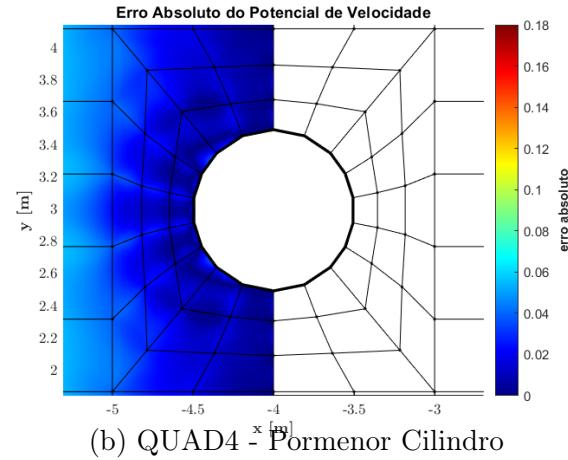
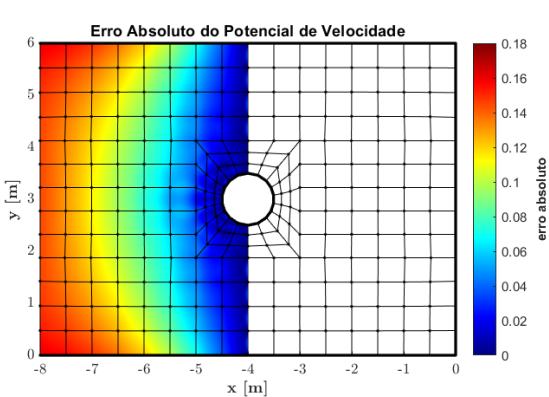


Figure 28: Vetor Velocidade - Pormenor Cilindro

7.3 Erro Absoluto - Geometria Simples

Potencial de Velocidade



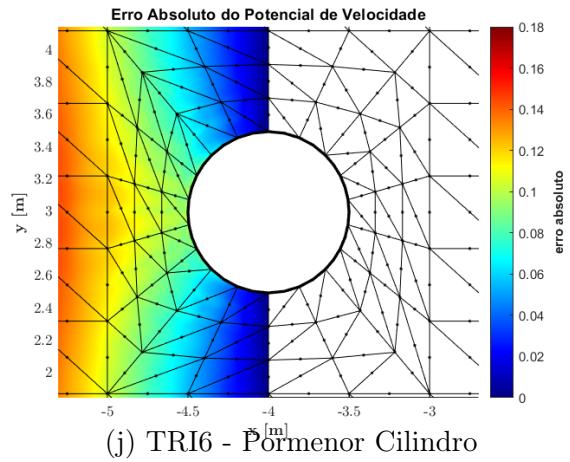
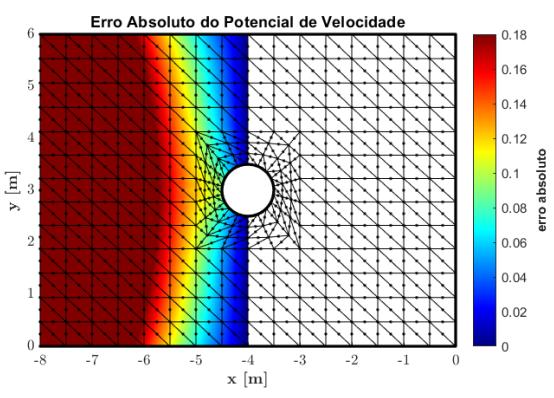
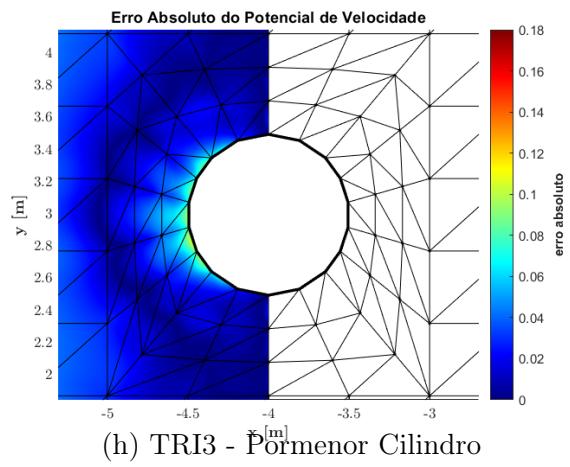
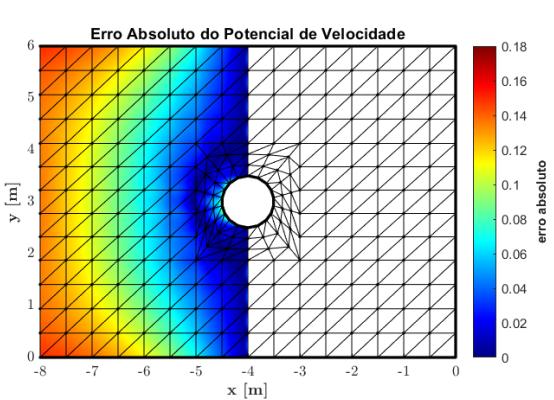
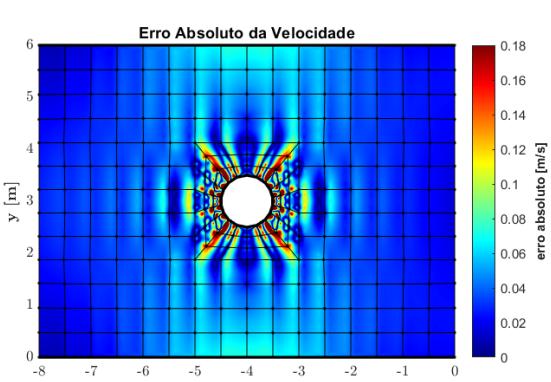
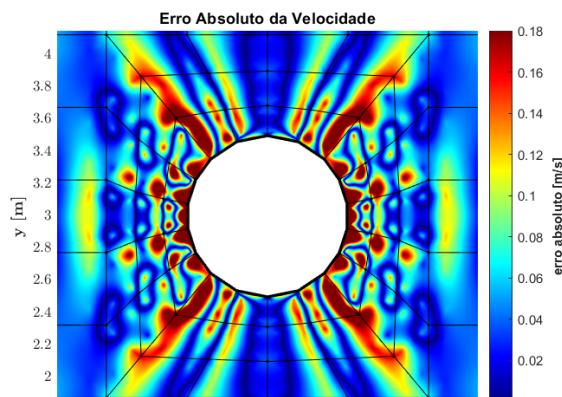


Figure 29: Erro Absoluto do Potencial de Velocidade para o Escoamento de Geometria Simples

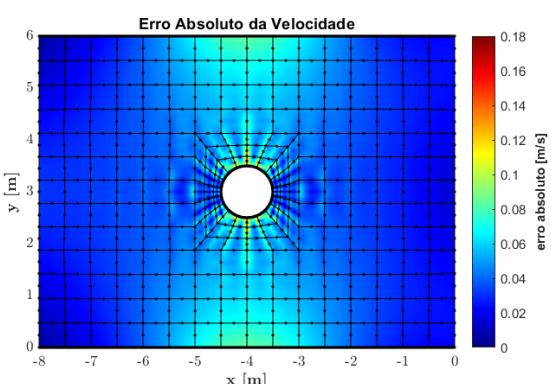
Magnitude da Velocidade



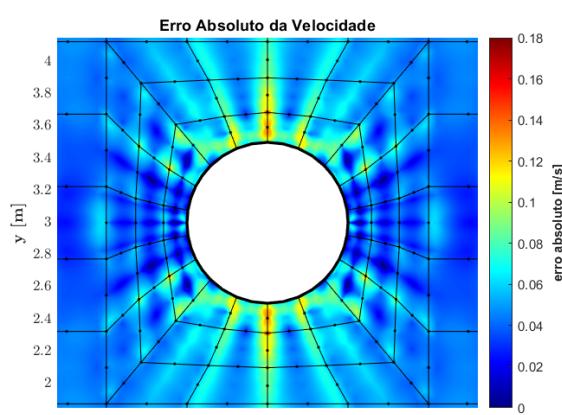
(a) QUAD4



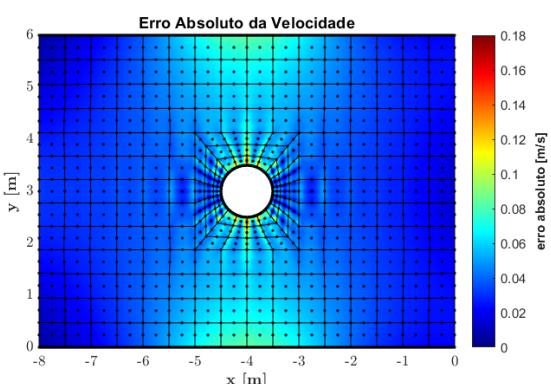
(b) QUAD4 - Pormenor Cilindro



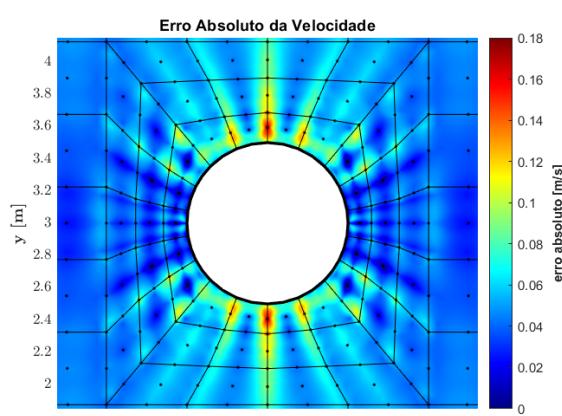
(c) QUAD8



(d) QUAD8 - Pormenor Cilindro



(e) QUAD9



(f) QUAD9 - Pormenor Cilindro

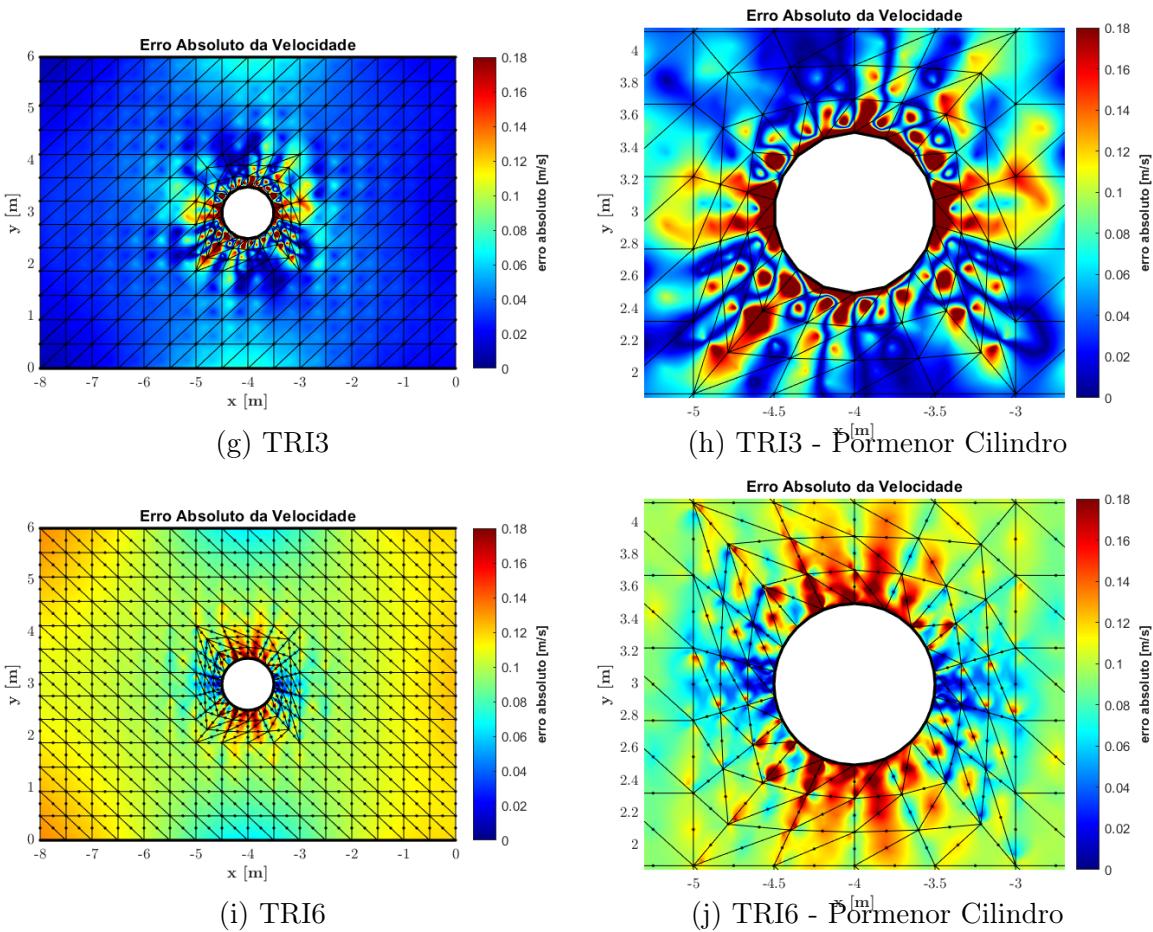
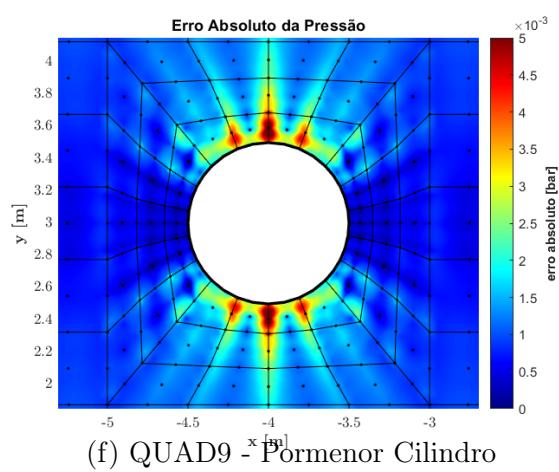
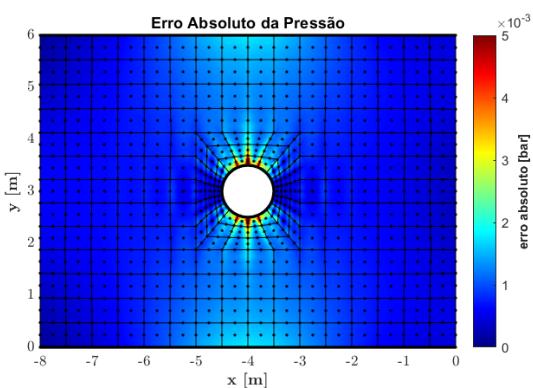
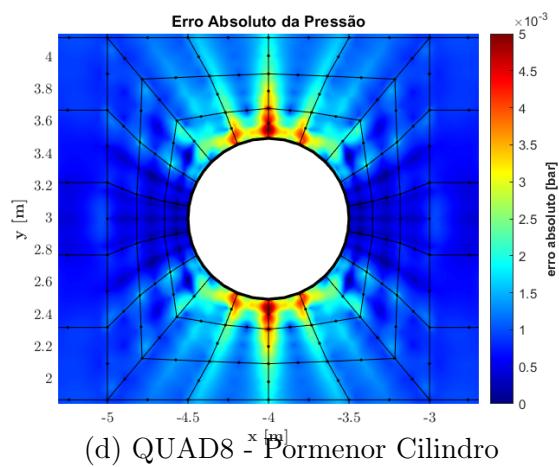
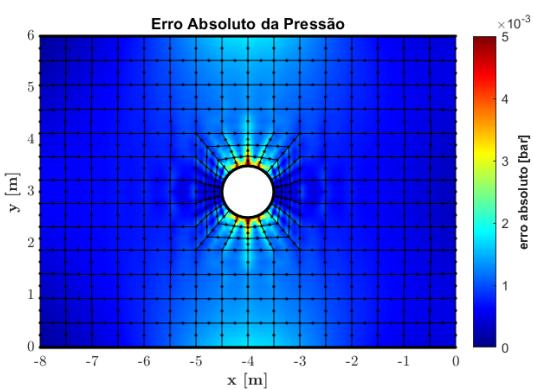
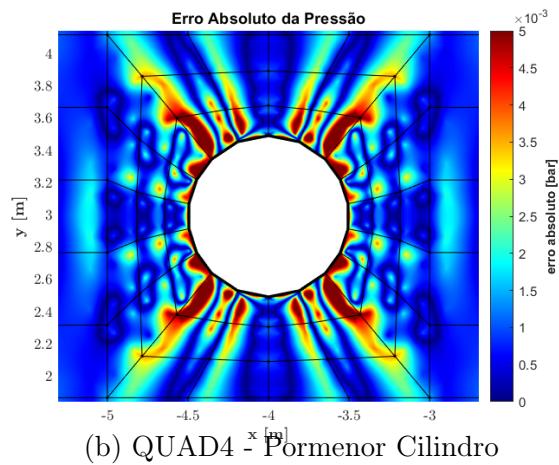
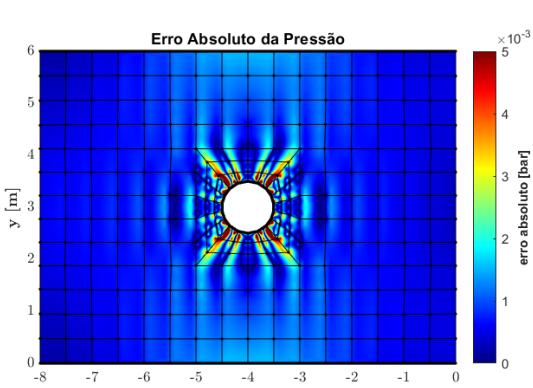


Figure 30: Erro Absoluto do Campo de Velocidades para o Escoamento de Geometria Simples

Pressão



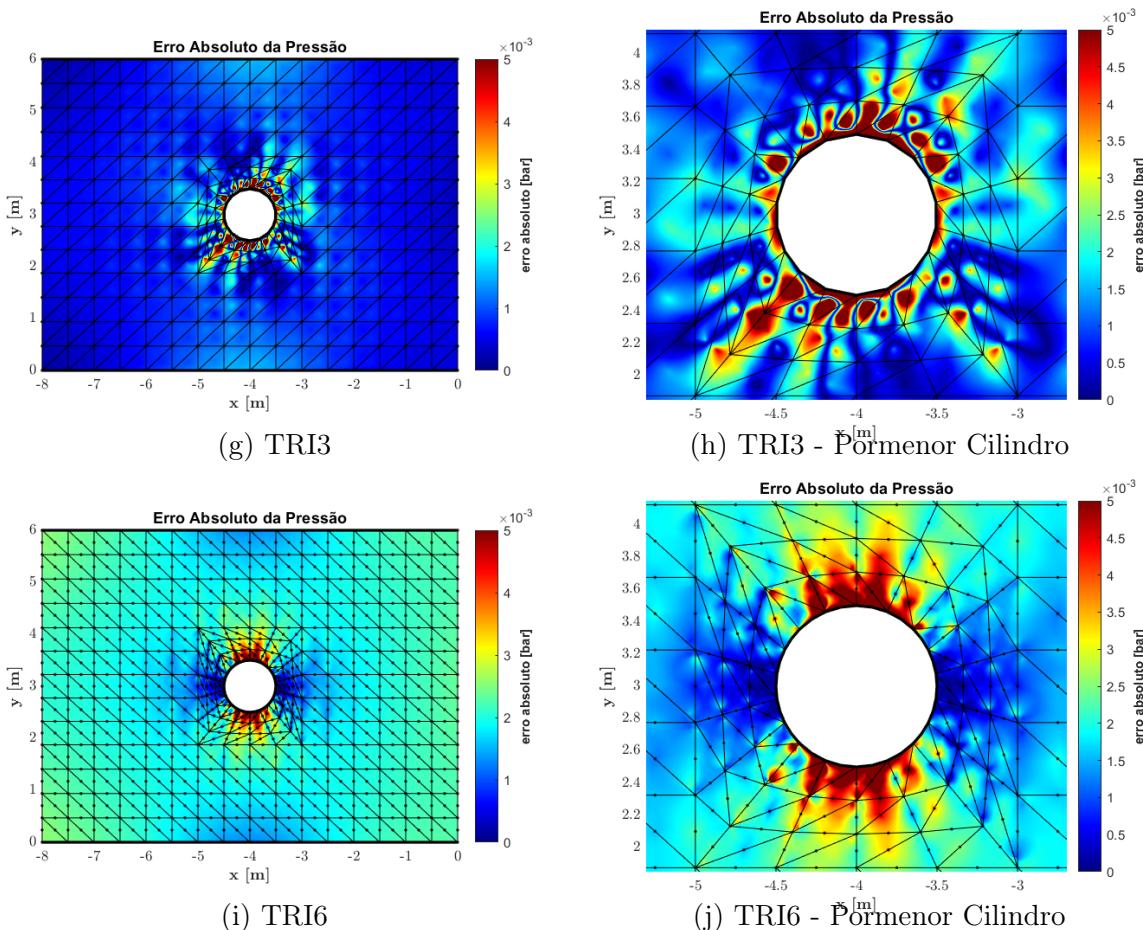
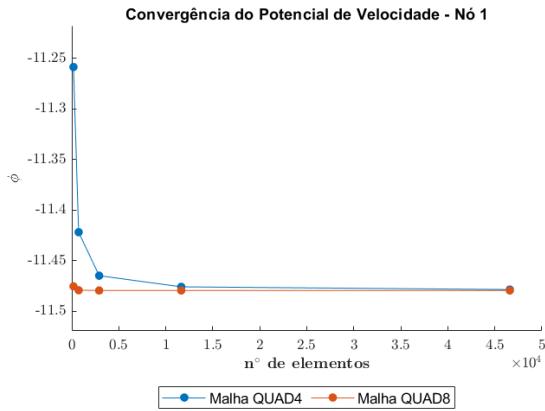
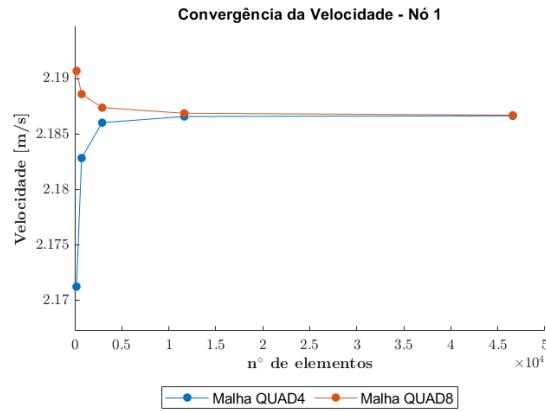


Figure 31: Erro Absoluto da Pressão para o Escoamento de Geometria Simples

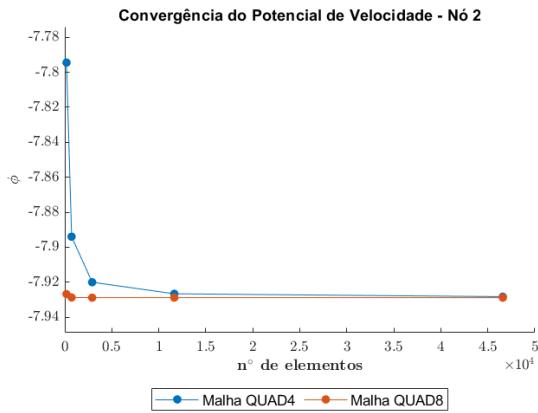
7.4 Analise convergência - Implementação em Siemens NX



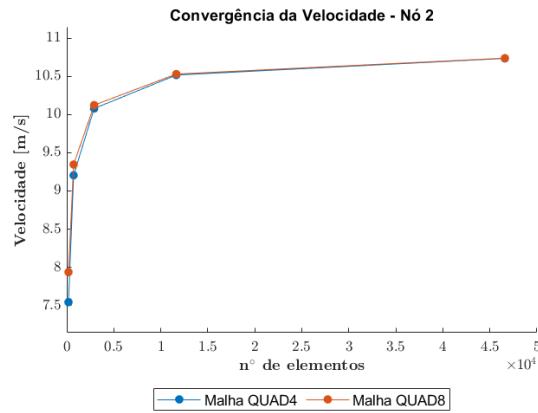
(a) Potencial de Velocidade - Nô 1



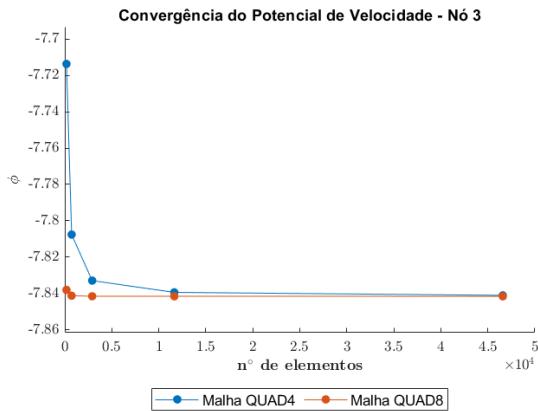
(b) Magnitude da Velocidade - Nô 1



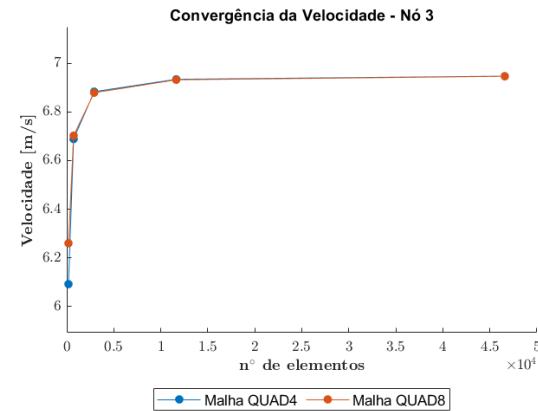
(c) Potencial de Velocidade - Nô 2



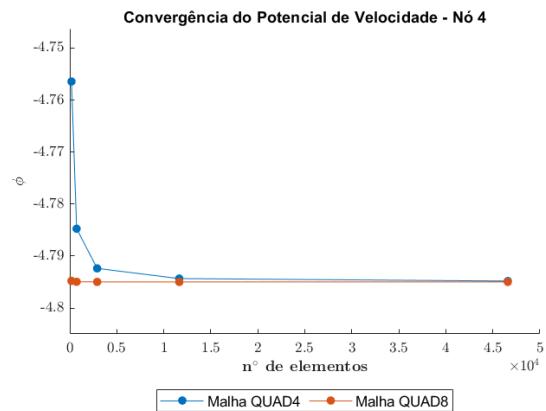
(d) Magnitude da Velocidade - Nô 2



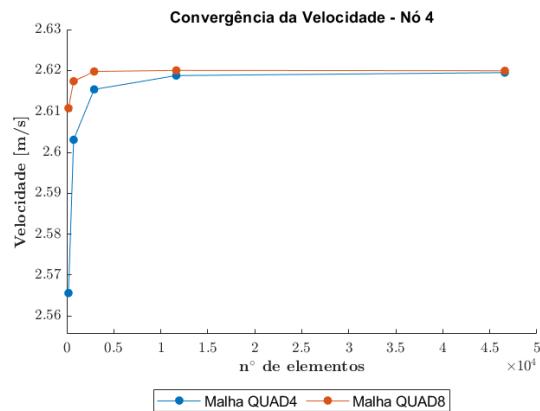
(e) Potencial de Velocidade - Nô 3



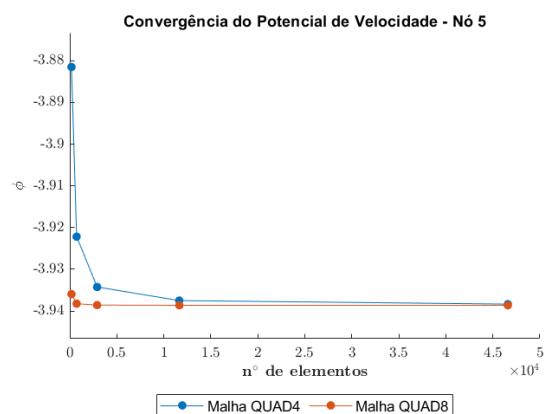
(f) Magnitude da Velocidade - Nô 3



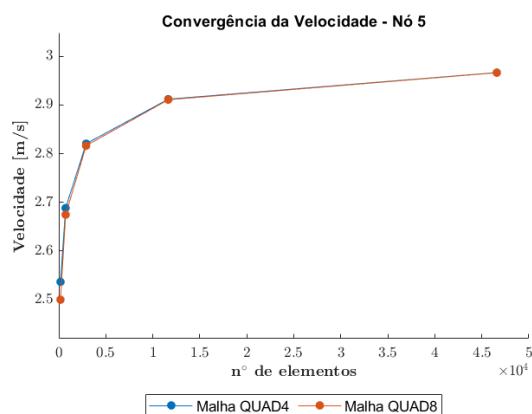
(g) Potencial de Velocidade - Nô 4



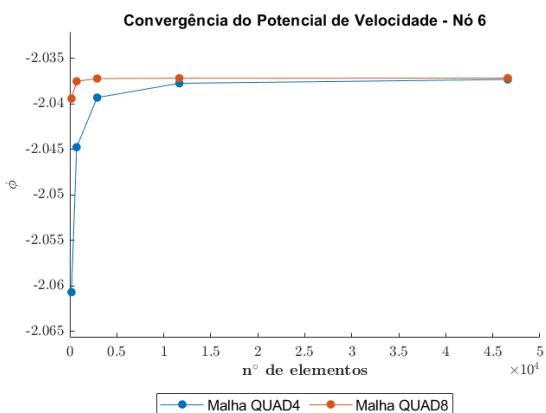
(h) Magnitude da Velocidade - Nô 4



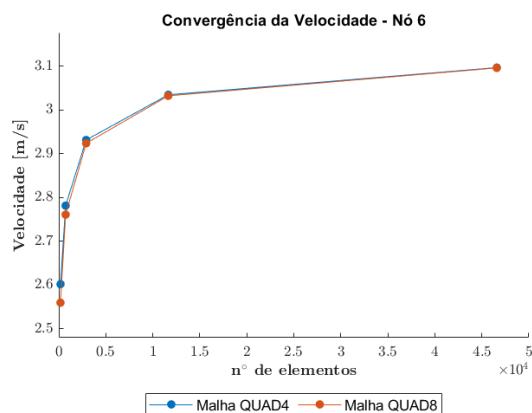
(i) Potencial de Velocidade - Nô 5



(j) Magnitude da Velocidade - Nô 5



(k) Potencial de Velocidade - Nô 6



(l) Magnitude da Velocidade - Nô 6

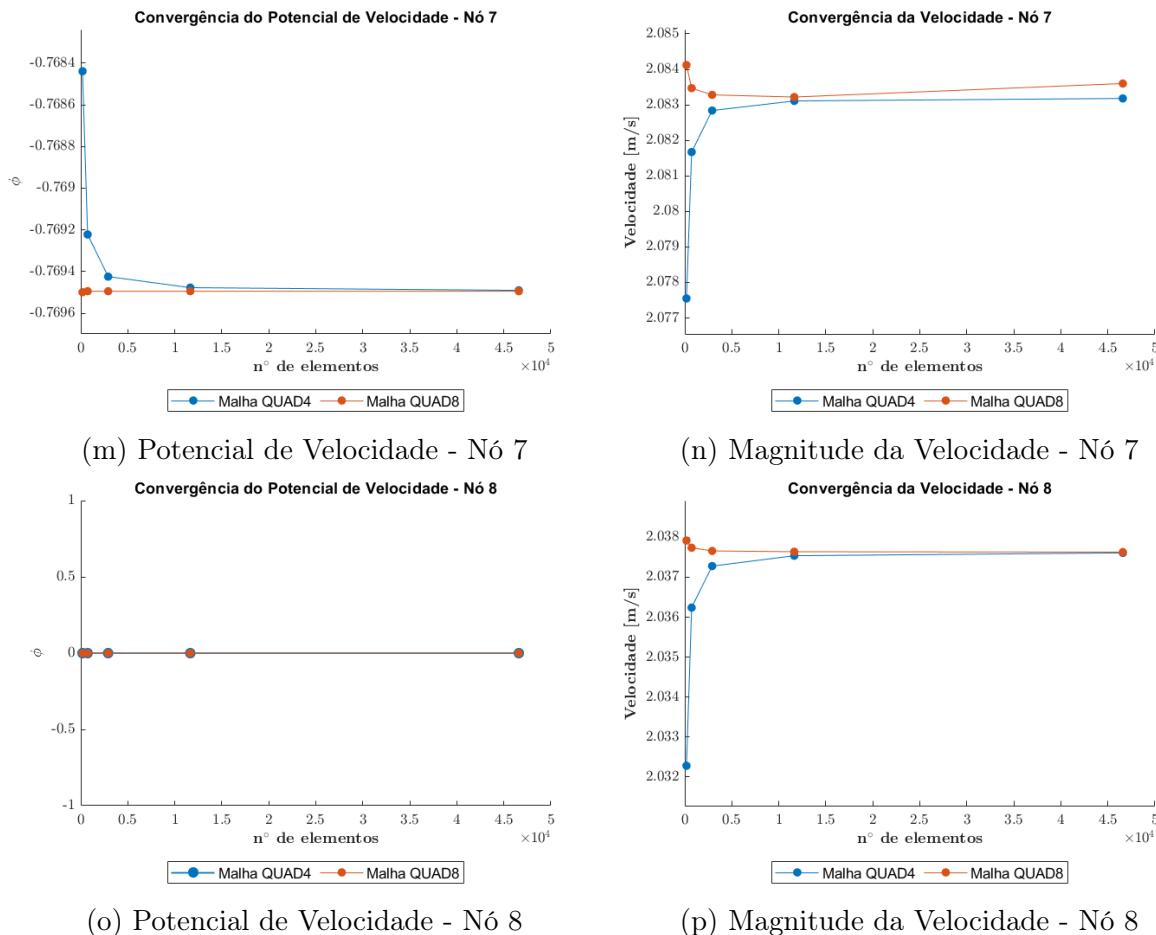


Figure 32: Análise de Convergência

7.5 Resultados do Siemens NX - Geometria do Enunciado (Problema 17)

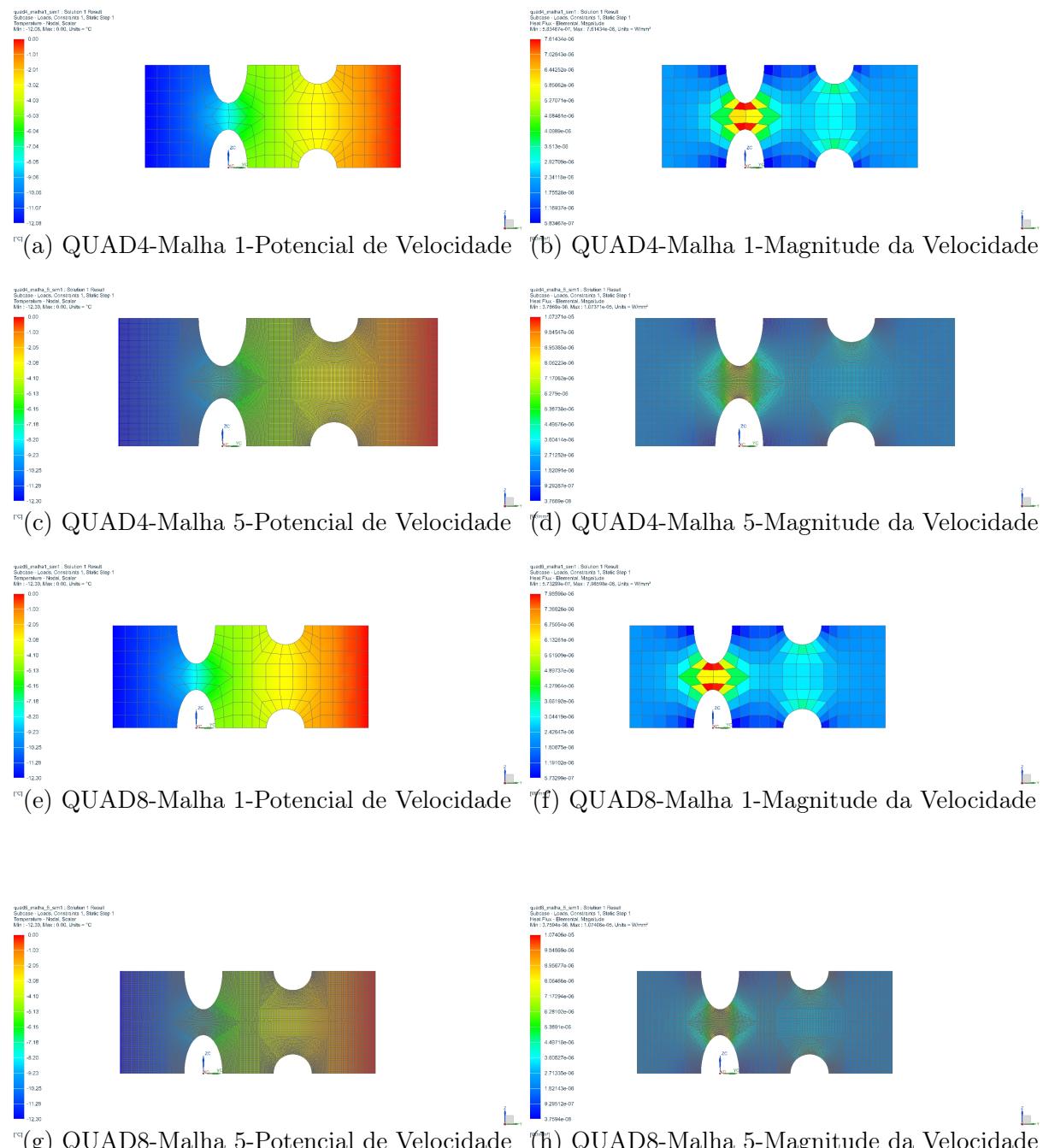
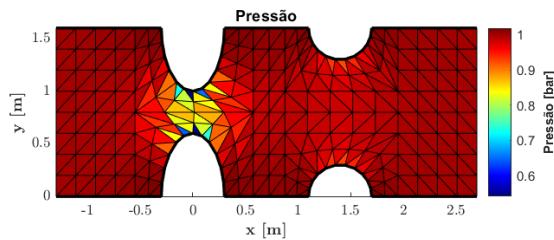


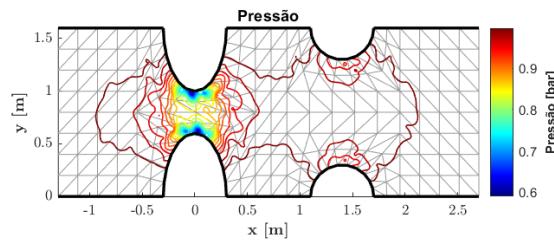
Figure 33: Resultados QUAD4 e QUAD8 para Malha 1 e 5

7.6 Resultados do MATLAB - Geometria do Enunciado (Problema 17)

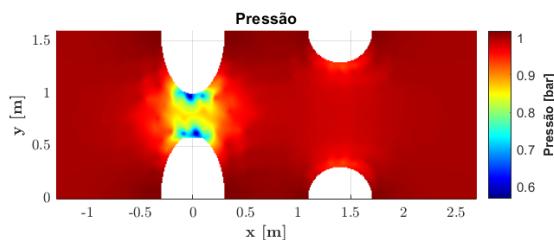
TRI3



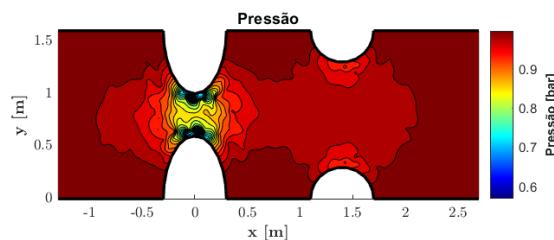
(a) Pressão



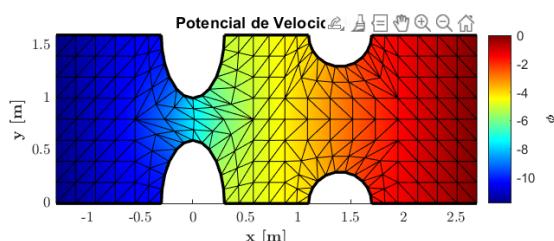
(b) Isolinhas de Pressão



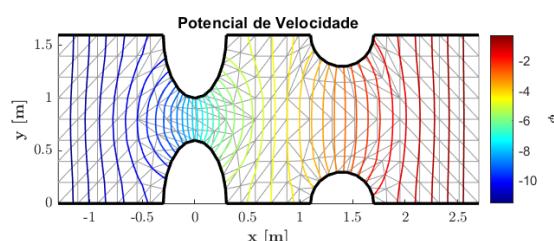
(c) Pressão sem Malha



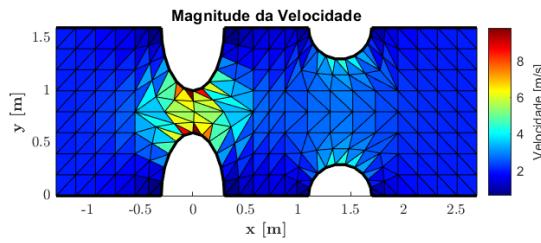
(d) Patamares de Pressão



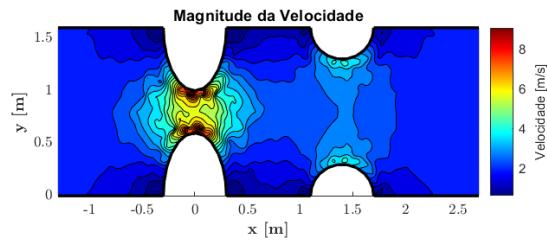
(e) Potencial de Velocidade



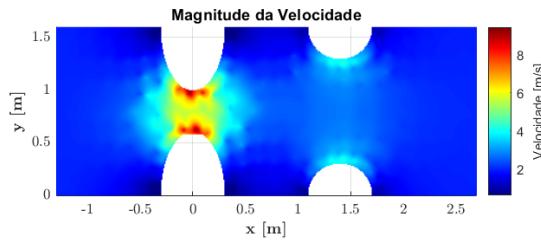
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



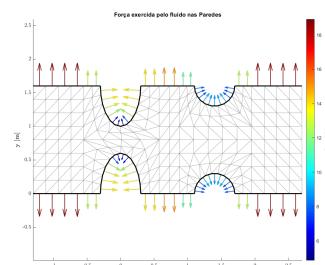
(g) Magnitude da Velocidade



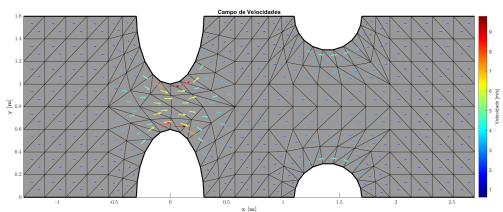
(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



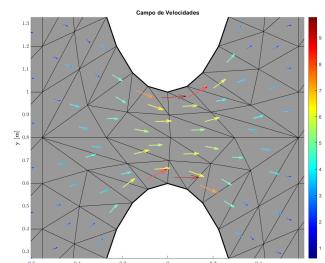
(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Força na Parede

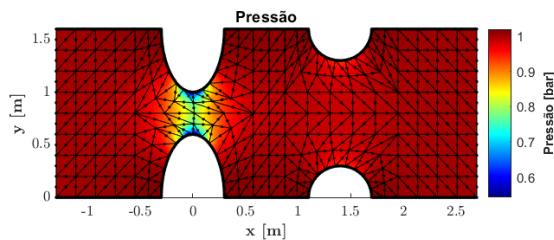


(k) Campo de Velocidades

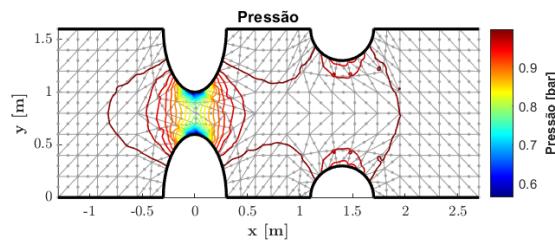


(l) Campo de Velocidades - Pormenor Cilindro

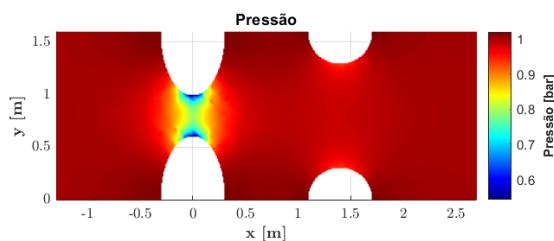
Figure 34: Resultados TRI3

TRI6

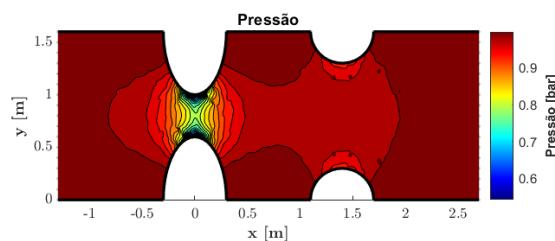
(a) Pressão



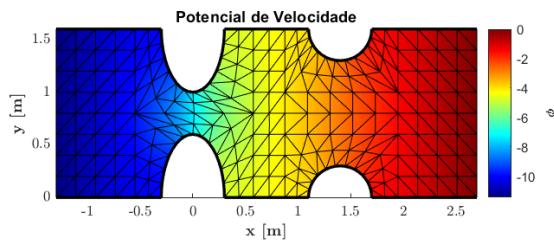
(b) Isolinhas de Pressão



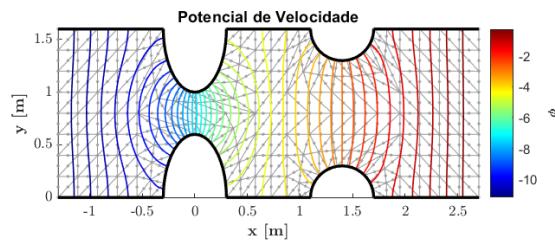
(c) Pressão sem Malha



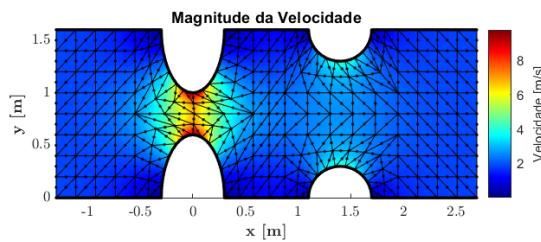
(d) Patamares de Pressão



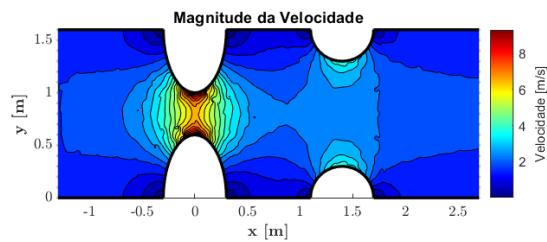
(e) Potencial de Velocidade



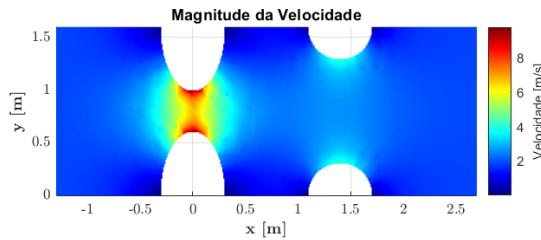
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



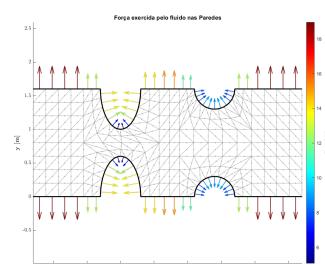
(g) Magnitude da Velocidade



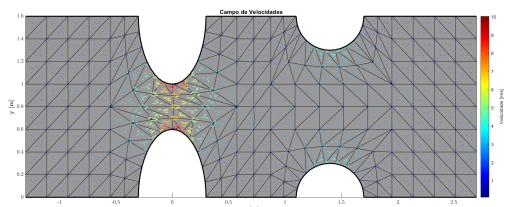
(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



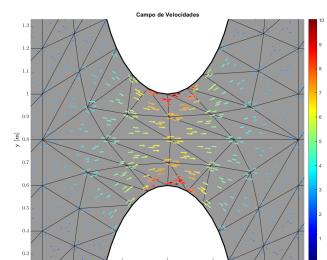
(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Força na Parede

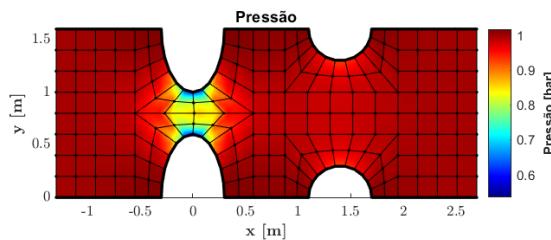


(k) Campo de Velocidades

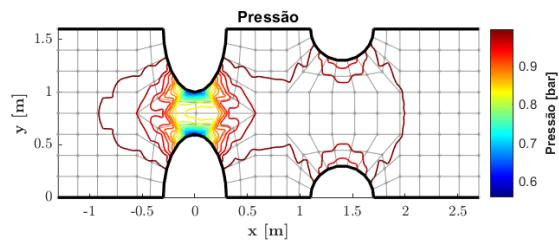


(l) Campo de Velocidades - Pormenor Cilindro

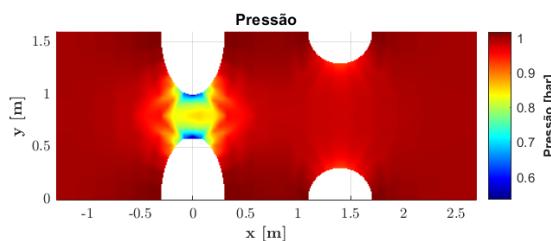
Figure 35: Resultados TRI6

QUAD4

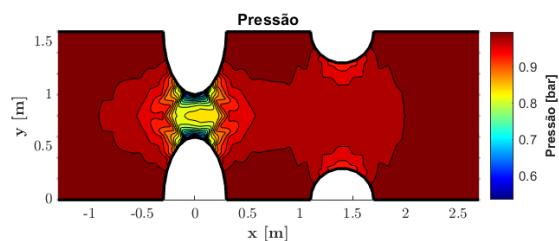
(a) Pressão



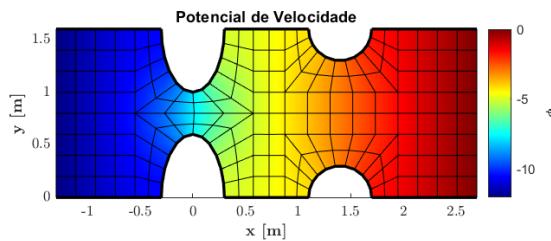
(b) Isolinhas de Pressão



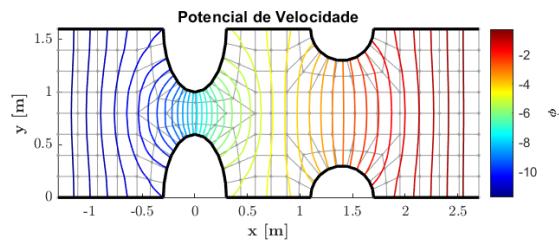
(c) Pressão sem Malha



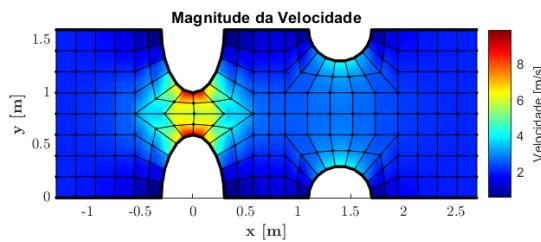
(d) Patamares de Pressão



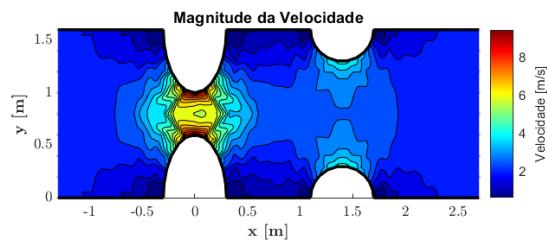
(e) Potencial de Velocidade



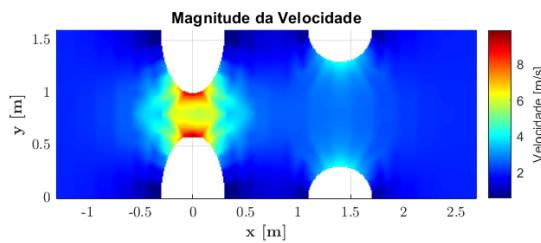
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



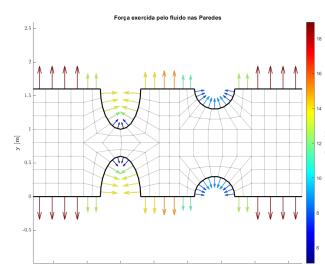
(g) Magnitude da Velocidade



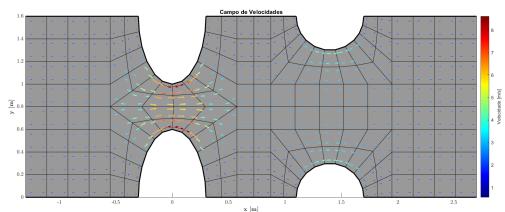
(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



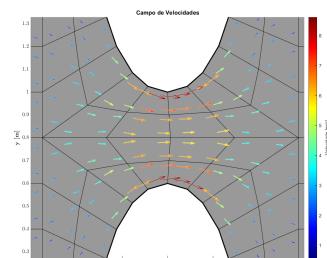
(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Força na Pareado

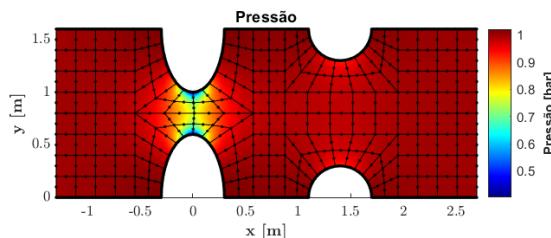


(k) Campo de Velocidades

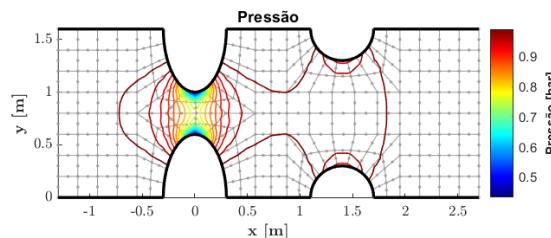


(l) Campo de Velocidades - Pormenor Cilindro

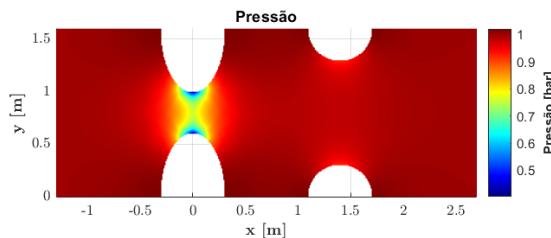
Figure 36: Resultados QUAD4

QUAD8

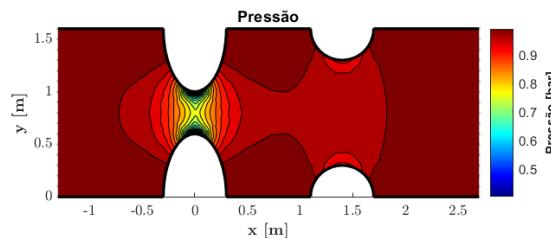
(a) Pressão



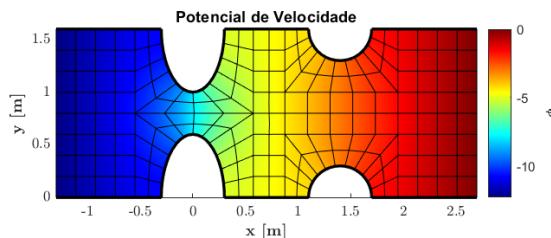
(b) Isolinhas de Pressão



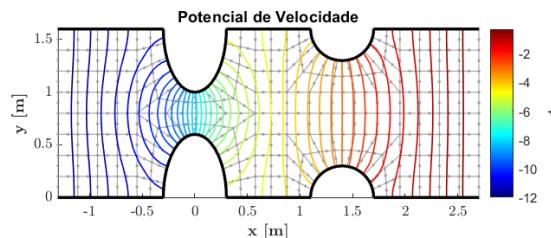
(c) Pressão sem Malha



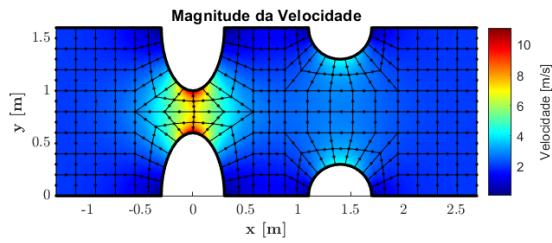
(d) Patamares de Pressão



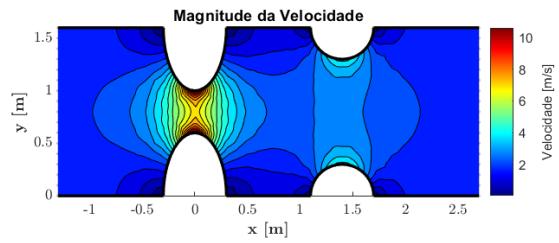
(e) Potencial de Velocidade



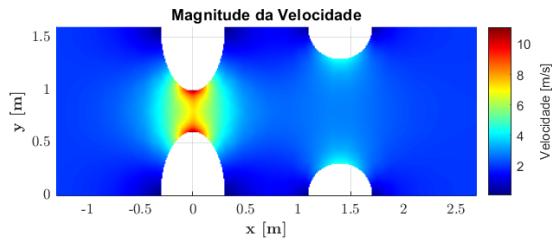
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



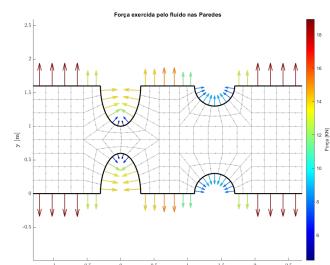
(g) Magnitude da Velocidade



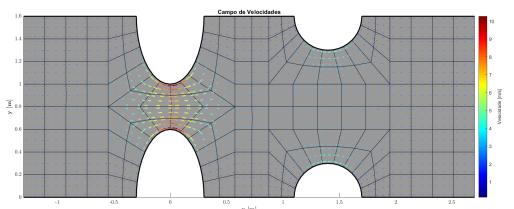
(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



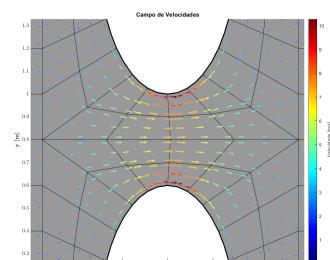
(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Força na Parede

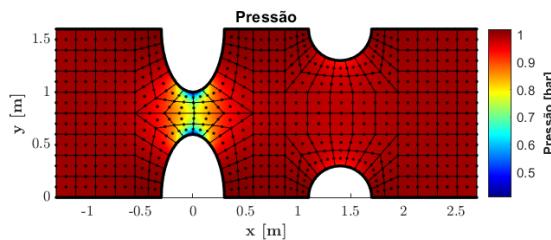


(k) Campo de Velocidades

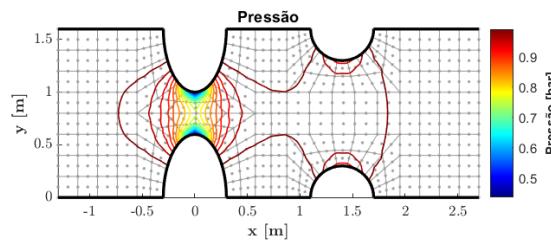


(l) Campo de Velocidades - Pormenor Cilindro

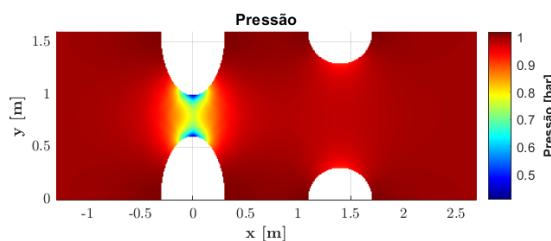
Figure 37: Resultados QUAD8

QUAD9

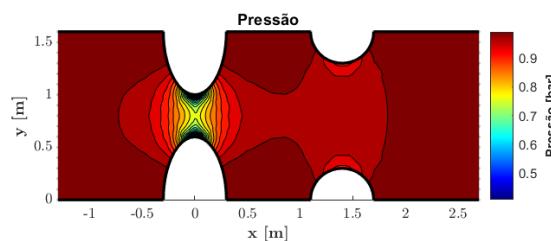
(a) Pressão



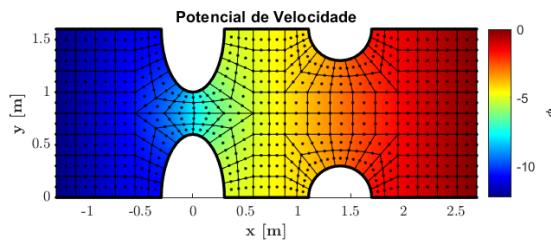
(b) Isolinhas de Pressão



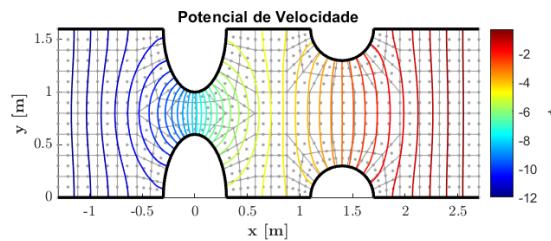
(c) Pressão sem Malha



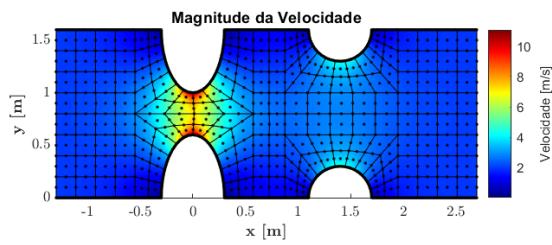
(d) Patamares de Pressão



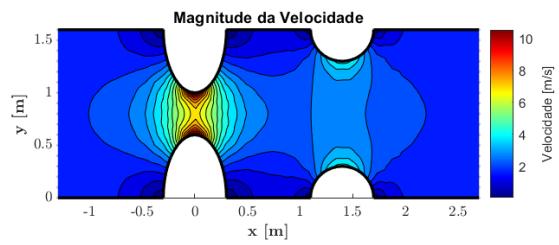
(e) Potencial de Velocidade



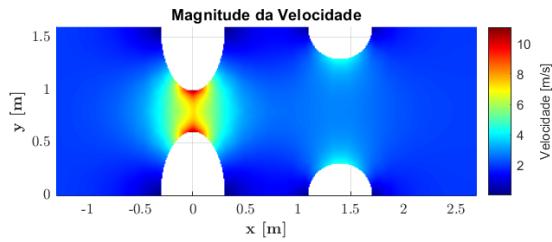
(f) Isolinhas Potencial de Velocidade



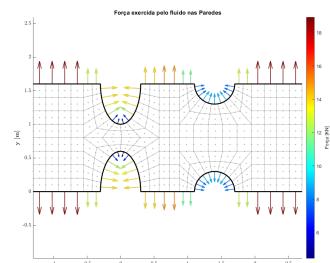
(g) Magnitude da Velocidade



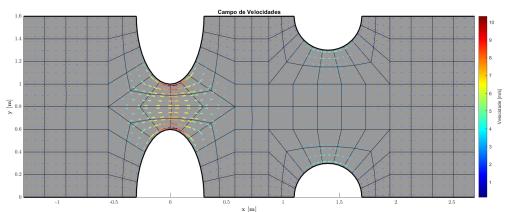
(h) Isolinhas de Magnitude de Velocidade



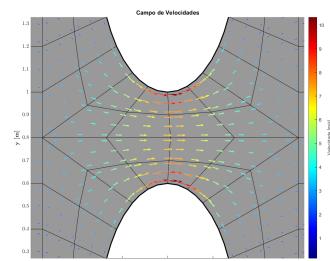
(i) Magnitude da Velocidade sem Malha



(j) Força na Parede



(k) Campo de Velocidades



(l) Campo de Velocidades - Pormenor Cilindro

Figure 38: Resultados QUAD9