Álgebra 1

# Lista 01

(Princípios Básicos)

1.1. (Quanto tinha ontem). Mostre que a relação $(-1) \cdot (-1) = +1$ é uma consequência da lei distributiva.

Como $0 = 1 + (-1)$, temos que :

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot (-1) &= (1 + (-1)) \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= -1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \\ &\Rightarrow 1 = (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Portanto, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

1.2. (Funções). Seja $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. O conjunto $C$ das funções contínuas de $I$ em $\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição e multiplicação pontuais, possui quais propriedades dos conjuntos numéricos vistas em aula?

Sejam $f, g, h \in C$ e $x \in I$.

**A1 – Associatividade da Adição** : $(f + g) + h = f + (g + h)$

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f(x) + g(x)) + h(x), \\ (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g(x) + h(x)). \end{aligned}$$

Como a adição em $\mathbb{R}$ é associativa, temos

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Logo, essa propriedade é válida.

**A2 – Elemento Neutro aditivo** : $0 + f = f$

Seja função nula $z(x) = 0 \ \forall \ x \in C$, satisfaz

$$(f + z)(x) = f(x) + 0 = f(x),$$

Logo, essa propriedade é válida.

**A3 – A equação $f + h = g$ possui uma única solução**

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

Como $g$ e $f$ são contínuas, a diferença entre elas também é uma função contínua

Logo, $h \in C$ pois $g$ e $f \in C$ e é a única solução.

**A4 – Comutatividade da Adição** : $f + g = g + f$

Como a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa temos :

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$.

Logo, essa propriedade é válida.

**M1 – Associatividade da Multiplicação** : $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

$$((f \cdot g) \cdot h)(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x),$$
$$(f \cdot (g \cdot h))(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)).$$

Como a multiplicação em $\mathbb{R}$ é associativa, temos

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h).$$

Logo, essa propriedade é válida.

**M2 – Elemento Neutro multiplicativo** : $1 \cdot f = f$
A função $u(x) = 1\ \forall\ x \in I$,essa função é <u>contínua</u>, logo $\in C$.
$(f \cdot u)(x) = f(x) \cdot u(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$.
Logo, essa propriedade é válida.

**M3 –** $fg = h$ **possui uma única solução** *Contraexemplo :*
Seja $f(x) = x - 0.5$ e $g(x) = 1$
A equação $(x-0.5) \cdot h(x) = 1$ **não** tem solução em $C$ pois a função $h(x) = \frac{1}{x-0.5}$ <u>não é contínua</u> em 0.5.
Logo, essa propriedade **não** é válida.

**M4 – Comutatividade da Multiplicação** : $fg = gf$
Como a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa temos :
$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$.
Logo, essa propriedade é válida.

**MA – Distributividade.**

Portanto, $(C, +, \cdot)$ é um <u>anel comutativo</u> com unidade, mas não um corpo.

1.3. (Reticulado e relação de ordem). Um conjunto $L$, juntamente com duas operações binárias associativas e comutativas $\vee$ e $\wedge$ sobre $L$ tais que $a \vee (a \wedge b) = a$ e $a \wedge (a \vee b) = a$, para quaisquer $a, b \in L$, é chamado reticulado. Definindo $a \leq b$ se $a = a \wedge b$ ou $b = a \vee b$, verifique que, para quaisquer $x, y, z \in L$, tem-se: $x \leq x$ ; se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ ; se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

Tome $x, y$ e $z \in L$.

i. $x \leq x$
Sabemos que $x = x \wedge (x \vee y)$
Seja $y = (x \vee z)$ para algum $z$, então
$x = x \wedge (x \vee (x \vee z)) = x \wedge x$
Logo, $x \leq x$

ii. Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$
$x = x \wedge y$ e $y = y \wedge z$, substituindo $y$ em $x \wedge y$
$x = x \wedge (y \wedge z)$, como "$\wedge$"é associativa
$x = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$
Logo, $x \leq z$.

iii. Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$

Temos, $x = x \wedge y$

$y = y \wedge x$, como "$\wedge$"é comutativa $y = x \wedge y$

Assim, $x = x \wedge y = y$

Logo, $x = y$

1.4. (Uma álgebra de Boole). Seja $P(X)$ o conjunto das partes de um conjunto $X$. Escrevendo $+$ ou $\vee$ no lugar de união e $\wedge$ no lugar de interseção, e definindo $\neg a$ como o complementar de $a \subseteq X$, prove que $P(X)$ é um reticulado no qual $\wedge$ distribui-se sobre $\vee$, $\vee$ distribui-se sobre $\wedge$, e que $a \vee \neg a = 1$ e $a \wedge (\neg a) = 0$ para qualquer $a \in P(X)$. Quais conjuntos são 0 e 1?

Para ser um reticulado pe preciso que as leis de absorção valem:

- $a \vee (a \wedge b) \rightarrow A \cup (A \cap B) = A$
- $a \wedge (a \vee b) \rightarrow A \cap (A \cup B) = A$

Como as leis são válidas, $P(X)$ é um reticulado.

Distributivas:

- $\wedge$ distribui-se sobre $\vee$ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\vee$ distribui-se sobre $\wedge$ : $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Logo, a distributiva é válida.

Complemento:

- $a \wedge (\neg a) = 0 \rightarrow A \cup A^c = X($ Conjunto Universal)
- $a \vee \neg a = 1 \rightarrow A \cap A^c = \emptyset$

$0 \rightarrow \emptyset$
$1 \rightarrow$ Universal (X)

1.5. (Até onde encontramos um divisor). Prove que cada inteiro $n > 1$ ou possui um divisor $> 1$ e $\leq \sqrt{n}$, ou então não possui divisor $> 1$ e $< n$.

I. $n$ é um número primo

Por definição, a segunda condição é satisfeita

II. $n$ é um número composto

Por definição $n$ pode ser escrito da seguinte forma : $n = a \cdot b$ tal que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $1 < a, b < n$

Em relação a $\sqrt{n}$ temos 3 possibilidades :

1. $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$ : o que seria uma contradição pois $a \cdot b > n$
2. $a < \sqrt{n}$ e $b < \sqrt{n}$
3. $a \geq \sqrt{n}$ e $b \leq \sqrt{n}$ (ou vice-versa)

Assim, pelo menos um dos fatores deve ser <u>menor ou igual</u> a $\sqrt{n}$, como $a, b > 1$ encontramos um divisor $d$ tal que $1 < d \leq \sqrt{n}$

1.6. (Uma equação diofantina). Use o Princípio da Boa Ordenação para ver que a equação $X^6 + 2Y^6 = 4Z^6$ possui uma única solução sobre $\mathbb{Z}$.

Nota-se que $(0, 0, 0)$ é uma solução pois $(0^6) + 2(0^6) = 4(0^6)$

1.7. (Soma dos $n$ primeiros cubos). Demonstre, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

De fato, para $n = 1$ temos :

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

Suponhamos que a equação seja válida para cada $n$ com $1 \leq n < N$.

Daí,

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + (N-1)^3 + N^3 &= \left(\frac{n - 1(n-1+1)}{2}\right)^2 + N^3 \\
&= \left(\frac{N^2 - N}{2}\right)^2 + N^3 \\
&= \frac{N^4 - 2N^3 + N^2 + 4N^3}{4} = \frac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4} \\
&= \left(\frac{N^2 + N}{2}\right)^2 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática a equação é válida.

1.8. (Múltiplo de 11). Mostre por indução que $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ é múltiplo de 11 para cada inteiro $n \geq 0$.

De fato, para $n = 0$ temos :

$$3^{3 \cdot 0+2} + 2^{4 \cdot 0+1} = 11 = 11 \cdot 0$$

Suponhamos que a expressão seja um multíplo de 11 para cada $n$ com $0 \leq n < N+1$.

Daí,

$$\begin{aligned}
3^{3\cdot(N+1)+2} + 2^{4\cdot(N+1)+1} &= 3^{3N+2} \cdot 27 + 2^{4N+1} \cdot 16 \\
&= (16 + 11) \cdot 3^{3N+2} + 16 \cdot 2^{4N+1} \\
&= 11 \cdot 3^{3N+2} + 16 \cdot (2^{4N+1} + 3^{3N+2})
\end{aligned}$$

que é um multíplo de 11.

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática a afirmação é válida.