Álgebra 1

Lista 12
(Grupos Finitos)

12.1. (**Potências n-ésimas**). Se G é um grupo de ordem m, e n é primo a m, mostre que cada elemento de G pode ser escrito na forma x^n para algum $x \in G$.

12.2. (**p-grupos finitos**). Se p é um primo, verifique que todo grupo de ordem p^n, com $n > 0$, contém um elemento de ordem p, e que todo grupo de ordem p é cíclico.

12.3. (**Euler vs. Fermat**). Se p é um divisor primo ímpar de $a^{2^n} + 1$, com $n \geq 1$, prove que

$$p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}.$$

Dica: qual é a ordem de $(a \bmod p)$ *no grupo multiplicativo módulo* p*?*

12.4. (**Permutações II**). Sejam $n > 1$, $X = \{1, \ldots, n\}$ e S_n o grupo $\mathrm{Perm}(X)$. Um elemento $f \in S_n$ é um r-ciclo se existem $i_1, \ldots, i_r \in X$ tais que

$$f(i_1) = i_2,\ f(i_2) = i_3, \ldots, f(i_{r-1}) = i_r,\ f(i_r) = i_1$$

e $f(j) = j$ se $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Neste caso, denota-se f por $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_r)$. Note que $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8) = (1\,2\,3)(4)(5\,7)(6\,8)$. Escreva

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

como um produto de ciclos. Prove que cada elemento de S_n é um produto de ciclos.

12.5. (**Permutações III**). Dizemos que uma permutação $f \in S_n$ é *par* se a quantidade de pares (i, j) com $i < j$ e $f(i) > f(j)$ é par. Mostre que o subconjunto A_n das permutações pares é um subgrupo de S_n de ordem $n!/2$. Verifique que

$$(i_1\, i_2\, \ldots\, i_r) = (i_1\, i_r)(i_1\, i_{r-1}) \ldots (i_1\, i_2), \quad (i\, j)(k\, \ell) = (i\, j)(k\, \ell), \quad (i\, j)(i\, \ell) = (i\, \ell)(j\, \ell).$$

Conclua que o conjunto dos 3-ciclos de S_n gera A_n.

12.6. (**Os grupos de ordem 8**). Seja $GL_n(R)$ o grupo dos elementos invertíveis do anel das matrizes $n \times n$ com entradas em um anel associativo comutativo unitário R. Verifique que os seguintes subconjuntos geram grupos não isomorfos de ordem 8:

(i) $\{2\} \subseteq GL_1(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$;

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$;

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$;

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$;

(v) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL_3(\mathbb{Z})$.

12.7. (p-**subgrupos**). Demonstre que $G = GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, com p primo, possui ordem

$$\prod_{1 \le i \le n} (p^i - 1) p^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

e que o subgrupo de G das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais iguais a 1 possui ordem

$$p^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dica: para $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, a ordem de G é o número de R-bases ordenadas de R^n.