Álgebra 1

Lista 09

(Subgrupos)

9.1. (**Subgrupos finitos**). Mostre que um subconjunto finito não vazio S de um grupo G é um subgrupo de G se, e somente se, ele é fechado com respeito à operação do grupo.
Dica: se $a \in S$, então $x \mapsto ax$ é uma bijeção de S sobre si mesmo.

9.2. (**Certos subconjuntos**). Seja G um grupo comutativo. Verifique que:

(i) se n é um inteiro qualquer, então $\{x^n : x \in G\}$ é um subgrupo de G;

(ii) se H e K são subgrupos de G, então $\{hk : h \in H,\, k \in K\}$ é um subgrupo de G.

9.3. (**Subgrupos notáveis**). Mostre que os seguintes subconjuntos são subgrupos de um grupo G:

(i) o conjunto $Z(G)$ dos elementos $x \in G$ tais que $xg = gx$ para cada $g \in G$;

(ii) o conjunto $D(G)$ de todos os produtos possíveis de um número finito de elementos da forma $aba^{-1}b^{-1}$ com $a, b \in G$;

(iii) a interseção $\Phi(G)$ dos subgrupos próprios maximais M de G (i.e., M é um subgrupo de G com $M \neq G$ e, para qualquer subgrupo H de G com $H \neq G$, se $M \subseteq H$ então $H = M$).

9.4. (**Automorfismos**). Se G é um grupo, prove que o conjunto $\mathrm{Aut}(G)$ das bijeções $f : G \to G$ tais que $f(xy) = f(x)f(y)$ é um subgrupo do grupo $\mathrm{Perm}(G)$ de todas as bijeções de G em si mesmo.

Para cada $g \in G$, seja $c_g : G \to G$, $c_g(x) = gxg^{-1}$. Prove que $\{c_g : g \in G\}$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

9.5. (**Produto de grupos II**). Sob a notação do Exercício 8.3, é verdade que cada subgrupo de $G \times H$ é da forma $G' \times H'$, em que G' é um subgrupo de G e H' é um subgrupo de H?

9.6. (**Produto de grupos III**). Seja $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos e, para todos os $i \in I$, exceto possivelmente por uma quantidade finita, sejam H_i subgrupos de G_i. Verifique que as famílias $(g_i)_{i \in I}$ tais que $g_i \in G_i$ com $g_i \in H_i$ quando H_i está definido, formam um grupo sob a multiplicação

$$(g_i)_{i \in I}(g_i')_{i \in I} = (g_i g_i')_{i \in I}.$$