

Lógica Computacional 1

Exercícios – Sintaxe da Lógica de Primeira-Ordem

UnB/IE/CIC

Turma 01 - 2024/2

1. Use os seguintes predicados

$A(x, y)$: x admira y
 $F(x, y)$: x frequenta y
 $P(x)$: x é professor
 $E(x)$: x é estudante
 $T(x)$: x é turma

e o símbolo funcional de aridade 0, $a = \text{Ana}$, para traduzir as seguintes sentenças para a Linguagem de Primeira-Ordem:

- (a) Ana admira todos os professores. (A resposta não é $\forall x A(a, P(x))$.)
- (b) Alguns professores admiram Ana.
- (c) Ana admira a si mesma.
- (d) Nenhum estudante frequenta todas as turmas.
- (e) Nenhuma turma é frequentada por todos os estudantes.
- (f) Nenhuma turma é frequentada por qualquer estudante.

2. Defina predicados adequados para traduzir as seguintes sentenças para a Linguagem de Primeira-Ordem:

- (a) Todas as coisas vermelhas estão na caixa.
- (b) Apenas coisas vermelhas estão na caixa.
- (c) Nenhum animal é um gato e também um cachorro.
- (d) Todos prêmios foram ganho por um garoto.
- (e) Um garoto ganhou todos os prêmios.

3. Seja $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$ o conjunto de símbolos funcionais, onde d é uma constante, f é um símbolo funcional com dois argumentos e g é um símbolo funcional com três argumentos.

- (a) Quais das seguintes fórmulas são termos sobre \mathcal{F} ? Desenhe a árvore sintática para as expressões que sejam termos.
 - i. $g(d, d)$
 - ii. $f(x, g(y, z), d)$
 - iii. $g(x, f(y, z), d)$
 - iv. $g(x, h(y, z), d)$
 - v. $f(f(g(d, x), f(g(d, x), y, g(y, d))), g(d, d)), g(f(d, d, x), d), z)$
- (b) O tamanho de um termo sobre \mathcal{F} é o tamanho de sua representação, onde nós contamos todas as vírgulas e parênteses. Por exemplo, o tamanho de $f(x, g(y, z), z)$ é 13. Liste todos os termos livres de variáveis (ou seja, que não contenham variáveis) cujo tamanho seja menor que 10.
- (c) A altura de um termo sobre \mathcal{F} é definido como 1 mais o tamanho do caminho mais longo em sua árvore sintática. Liste todos os termos livres de variáveis cuja altura é menor do que 4.

4. Desenhe a árvore sintática do termo $(2 - f(x)) + (y \times x)$ considerando que $-$, $+$ e \times são símbolos funcionais que são usados na forma infixa (como o sinal de igual).
5. Quais das seguintes fórmulas são bem-formadas na Linguagem de Primeira Ordem? Justifique sua resposta.
- (a) Sejam a uma constante, f um símbolo funcional com um argumento e S e B dois símbolos predicativos de aridade 2:
- $S(a, x)$
 - $B(a, f(a))$
 - $f(a)$
 - $B(B(a, x), y)$
 - $S(B(a), z)$
 - $(B(x, y) \rightarrow \exists z S(z, y))$
 - $(S(x, y) \rightarrow S(y, f(f(x))))$
 - $(B(x) \rightarrow B(B(x)))$
- (b) Sejam c e d constantes, f um símbolo funcional com um argumento, g um símbolo funcional com dois argumentos, h um símbolo funcional com três argumentos e P e Q símbolos predicativos de três lugares.
- $\forall x P(f(d), h(g(c, x), d, y))$
 - $\forall x P(f(d), h(P(x, y), d, y))$
 - $\forall x Q(g(h(x, f(d), x), g(x, x)), h(x, x, x), c)$
 - $\exists z (Q(z, z, z) \rightarrow P(z))$
 - $\forall x \forall y (g(x, y) \rightarrow P(x, y, x))$
 - $Q(c, d, c)$
6. Seja φ a fórmula $\exists x (P(y, z) \wedge (\forall y (\neg Q(y, x) \vee P(y, z))))$, onde P e Q são símbolos predicativos diádicos.
- Desenhe a árvore sintática de φ .
 - Identifique todas as variáveis livres e ligadas de φ .
 - Existe alguma variável que tenha ambas ocorrências, livre e ligada?
 - Considere os termos $w \in \mathcal{C}$, $f(x)$ e $g(y, z)$, onde f e g são símbolos funcionais com um e dois argumentos, respectivamente.
 - Obter $\varphi[w \setminus x]$, $\varphi[w \setminus y]$, $\varphi[f(x) \setminus y]$ e $\varphi[g(y, z) \setminus z]$;
 - Quais termos são livres para a variável x ?
 - Quais termos são livres para a variável y ?
 - Qual é o escopo de $\exists x$ em φ ?
 - Suponha que nós mudemos φ para $\exists x (P(y, z) \wedge (\forall x (\neg Q(x, x) \vee P(x, z))))$. Qual é o escopo de $\exists x$ em φ ?
7. Seja P um símbolo predicativo de aridade 3. Seja $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\forall x ((\exists y P(x, y, z)) \wedge (\forall z P(x, y, z))))$.
- Desenhe a árvore sintática de ψ .
 - Identifique todas as variáveis livres e ligadas de ψ .
 - Liste todas as variáveis que apareçam tanto livre quanto ligadas.
 - Obtenha $\psi[t \setminus x]$, $\psi[t \setminus y]$ e $\psi[t \setminus z]$, onde $t \stackrel{\text{def}}{=} g(f(g(y, y)), y)$. Quais os termos que são livres para x , para y e para z em ψ ?