Álgebra 1

Lista 10
(Anéis)

10.1. (**A função φ de Euler**). Se m e n são inteiros > 0, e $\gcd(m,n) = 1$, prove que

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Se p é um primo, prove que

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

Sugestão: use o Teorema Chinês dos Restos para a primeira parte.

10.2. (**$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$**). Verifique que os números da forma

$$x + y\sqrt{2}, \quad x, y \in \mathbb{Z},$$

formam um anel. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, verifique que eles formam um corpo.

10.3. (**Sem divisores de zero**). Demonstre que um anel associativo comutativo unitário finito é um corpo se, e somente se, ele não possui divisores de zero. *Dica: Exercício 9.1.*

10.4. (**Sequências de Cauchy**). Seja F um corpo com um valor absoluto

$$|\cdot| : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

(isto é, para quaisquer $x, y \in F$ valem: $|x| = 0 \iff x = 0$; $|xy| = |x||y|$; $|x+y| \leq |x| + |y|$).

Mostre que as sequências $(x_n)_{n\geq 0}$ sobre F tais que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um correspondente $N > 0$ de modo que, para quaisquer $n, m \geq N$, vale $|x_n - x_m| < \varepsilon$, formam um anel com respeito às operações de adição e multiplicação termo a termo.

10.5. (R^X). Sejam X um conjunto e R um anel. Verifique que o conjunto $R^{(X)}$ das funções $f : X \to R$ tais que $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é finito é:

(i) um grupo com respeito à soma pontual de funções;

(ii) um anel definindo-se o produto por

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in X} f(y)g(y^{-1}x), \quad \text{se } X \text{ for um grupo;}$$

(iii) um espaço vetorial sobre R sob a operação escalar $(rf)(x) = rf(x)$, se R for um corpo.

10.6. (**Quaternions**). Seja H o conjunto das matrizes complexas

$$q = \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Prove que a soma e o produto matriciais usuais tornam H um anel de divisão (isto é, um "corpo possivelmente não comutativo").

Prove que

$$q = a1 + bi + cj + dk,$$

com

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, e $ij = k = -ji$. Prove ainda que

$$q\overline{q} = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1.$$