Lógica Computacional

Sumário

1 Introdução

1.1 O que é Lógica ?

- É a ciência que estuda a validade dos argumentos
- Estuda os métodos e pricípios para comprovar os argumentos
- **Argumento :** É uma sequência de fatos que é usado para concluir algo.
  $\hookrightarrow$ Pode ser expresso em **linguagem natural** ou **linguagem formal**
- **Argumento Correto :** É um argumento em que os fatos justificam, sem falhas, uma determinada conclusão

1.2 Linguagem

- **Linguagem Natural :** Uso cotidiano
  $\hookrightarrow$ Prolixa
  $\hookrightarrow$ Ambiguidade
- **Linguagem Formal :** Sistema simbólico preciso e operacional de modo a evitar a ambiguidade e a loquacidade das linguagens naturais
  $\hookrightarrow$ Concisa
  $\hookrightarrow$ Exata
  $\hookrightarrow$ Exemplos: Matemática, Música, Relógio, Linguagens de Programação, ...

Dimensões da Linguagem

1. **Sintaxe :** Ordem de como são escritas as palavras
2. **Semântica :** Significado que as palavras possuem
   Exemplo : $2 + 2 = 4$
   $\hookrightarrow$ Estrutura matemática : sintaxe
   $\hookrightarrow$ Valor : semântica
3. **Pragmática :** Sem relação com a sintaxe e semântica, significado atribuido por questões históricas, sociais e culturais.
   Exemplo : Que horas são ?

Metalinguagem

- **Metalinguagem :** É uma linguagem que explica qualquer outra linguagem
- **Linguagem Objeto :** É a linguagem da qual se fala
  Ex_1 : "House"é o mesmo que "casa"
  $\hookrightarrow$ Metalinguagem : português
  $\hookrightarrow$ Linguagem Objeto : inglês
  $\hookrightarrow$ " " : Separar a metalinguagem da linguagem

Ex$_2$: $\int_a^b f(x)\,dx$
- $\hookrightarrow$ Metalinguagem : português
- $\hookrightarrow$ Linguagem Objeto : matemática

- **Hierarquia infinita de metalinguagem :** Para ter consistência na análise da linguagem é preciso que uma linguagem de nível inferior para explicá-la.
  - $\hookrightarrow$ Ou seja, dada uma linguagem-objeto precisamos de uma metalinguagem para explicá-la, que por sua vez precisa de uma metametalinguagem para explicá-la, e assim sucessivamente.

Objeto

↓

Metaliguagem

↓

Metametaliguagem

↓

...

Exemplo : $2 + 2 = 4$

Linguagem-objeto : "$2 + 2 = 4$" — uma sentença da linguagem da *aritmética*.

Metaliguagem : "A expressão '2+2 = 4' é verdadeira." — frase na linguagem natural (Português) descrevendo a sentença da linguagem-objeto.

Metametalinguagem : "A frase 'A expressão 2+2 = 4 é verdadeira' é uma afirmação correta sobre a linguagem da aritmética." — análise sobre a metalinguagem.

- **Teoria :** É um conjunto de explicações para descrever um fenômeno
- **Metateoria :** É a teoria que investiga, analisa ou descreve a própria teoria

1.3 Uso e Mensão

- Relacionados diretamente com os níveis da linguagem em que os termos aparecem.
- **Usa-se** um termo para afirmar certas coisas.
- **Menciona-se** um termo quando falamos à respeito dele próprio.
  - $\hookrightarrow$ Ex$_1$: Gato é um animal bonitinho
  - $\hookrightarrow$ Ex$_2$: "Gato"tem cinco letras
  - $\hookrightarrow$ Ex$_3$: "Lucas"é um nome bíblico
- **Número :** É um certo tipo de objeto matemático
- **Numeral :** É o nome de um número
- **Substituendos :** São expressões que podem ser colocados no lugar de variáveis
- **Valores da variáveis :** É o domínio em que a variável está inserida.

Exemplos

Ex_1 : "Rosa" é dissílaba.
Ex_2 : Napoleão foi imperador da França.
Ex_3 : A palavra "water" tem o mesmo significado que a palavra portuguesa "água"
Ex_4 : " "Logik" " não pode ser usada como sujeito de uma sentença do português.
Ex_5 : "Pedro" não é o nome de Sócrates, mas é o nome de "Pedro".
Ex_6 : O numeral "8" designa a soma de 4 mais 4.
Ex_7 : 2+2 é igual a 3+1, mas "3+1" é diferente de "4"
Ex_8 : A sentença nenhum gato é preto é falsa. A sentença "nenhum gato é preto" é falsa.
Ex_9 : "Todavia" e "contudo", mas, não também têm o mesmo que significado que "mas", contudo, não, não.

2 Lógica Proposicional

3 Teoria de Provas

4 Tableaux Proposicional

5 Lógica de Primeira-Ordem

5.1 Introdução

- Extensão da Linguagem Proposicional ($\mathcal{L}_p$)
- $\mathcal{L}_p$ é um fragmento da LPO
- $\mathcal{L}_p$ não expressa adequadamente relações entre indivíduos
- Permite descrever propriedades de objetos e relações entre eles

Exemplos :

1. Todo homem é mortal
   Sócrates é homem
   ____
   Sócrates é mortal
2. Todas as pessoas têm um progenitor
3. Alguns progenitores têm mais de um filho
4. Minha sogra tem netos
5. Toda tia tem sobrinha ou sobrinho

Constantes e Funções

- Usamos constantes e funções para referenciar ou construir indivíduos únicos.
- Constantes são símbolos funcionais com zero argumentos.
- Funções são operadores que, a partir de um ou mais argumentos, retornam um único indivíduo.

Exemplos :

1. $c =$ Sócrates
2. $m(x) = x$ é mãe
3. $f(x, y) = x$ é filho de y

Relações

- Relações (ou predicados) representam propriedades e associações entre indivíduos.
- Uma relação P^n tem aridade n, isto é, atua sobre n objetos.

Exemplos : $P^1 = \ldots$ ser homem, $Q^2 = \ldots$ amar $\ldots$, $R^3 = \ldots$ estar entre $\ldots$ e $\ldots$

1. $P^1(c) =$ Sócrates é homem
2. $Q^2(a, b) =$ Romeu ama Julieta
3. $R^3(c_1, c_2, c_3) =$ São Paulo está entre Rio de Janeiro e Curitiba

Quantificadores e Variáveis

- $\forall$: *quantificador universal* — "para todo"
- $\exists$: *quantificador existencial* — "existe pelo menos um"
- Variáveis são marcadores que representam indivíduos genéricos.

Exemplos :

1. $H(x) =$ "x é homem", $M(x) =$ "x é mortal"
$$\forall x(H(x) \to M(x))$$
2.
3. mover mais para a direita e colocar exemplos do caderno

5.2 Sintaxe

Definição. O *conjunto de símbolos lógicos* da Linguagem de Primeira-Ordem é dado pela união dos seguintes conjuntos :

1. $\mathcal{P} = \{P^{n_P}, Q^{n_Q}, R^{n_R}, \ldots, P_1^{n_{P_1}}, Q_1^{n_{Q_1}}, R_1^{n_{R_1}}, \ldots\}$;
2. $\mathcal{F} = \{f^{n_f}, g^{n_g}, h^{n_h}, \ldots, f_1^{n_{f_1}}, g_1^{n_{g_1}}, h_1^{n_{h_1}}, \ldots\}$;
3. $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots\}$;
4. $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$;

5. $\{\forall, \exists\}$;
6. $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
7. (e).

Definição. Os elementos do conjunto $\mathcal{P}$ são chamados de *símbolos predicativos*

Definição. Os elementos do conjunto $\mathcal{F}$ são chamados de *símbolos funcionais*

Definição. Os elementos do conjunto $\mathcal{C}$ são chamados de *constantes*

Definição. Os elementos do conjunto $\mathcal{V}$ são chamados de *variáveis*

Definição. Os elementos do conjunto $\{\forall, \exists\}$ são *operadores* ou *conectivos* unários chamados de *quantificadores*.O *quantificador universal* é denotado por $\forall$ e o *quantificador existencial* é denotado por $\exists$

Definição. A *aridade* de um símbolo predicativo ou de um símbolo funcional é o número fixo de seus argumentos. A aridade de um símbolo predicativo ou funcional é indicado pelo índice superior.

Observação. Símbolos predicativos e funcionais têm número fixo de argumentos (aridade).

- Símbolos predicativos de aridade zero referem-se a preposições;
- Símbolos funcionais de aridade zero referem-se a indivíduos.

Definição. O conjunto de termos $\mathcal{T}$ da Linguagem de Primeira-Ordem é definido indutivamente:

1. Se $t \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}$, então $t \in \mathcal{T}$;
2. Se $f^n \in \mathcal{F}$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$

Definição. A Linguagem de Primeira-Ordem, denotada por $\mathcal{L}_{PO}$, é dada pelo conjunto de suas fórmulas bem-formadas, denotado por $\text{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$, o qual é obtido indutivamente por:

- $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in \text{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}},$ onde $P^n \in \mathcal{P},$ para $t_i \in \mathcal{T}, 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$;
- Se $\varphi, \psi \in \text{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$ e $x \in \mathcal{V},$ então $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi \in \text{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$

Observação. Parênteses podem ser omitidos, se a leitura não for ambígua. A precedência dos operadores é dada por: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Definição. Uma *árvore sintática* para φ, onde $\varphi \in \text{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$, é constituída de uma raiz com zero ou mais filhos, dependendo da *estrutura* (ou seja, da forma) de φ:

1. se t é um termo da forma u^0, então a árvore sintática tem raiz rotulada por u^0 e tem zero filhos;
2. se t é um termo da forma $u^n(t_1, \ldots, t_n)$, $n > 0$, então a raiz é rotulada por u^n e tem n filhos, que são as raízes das árvores sintáticas para cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$;
3. se φ é da forma $P^n(t_1, \ldots, t_n)$, então a raiz é rotulada por P^n e tem n filhos, que são raízes das árvores sintáticas para cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$;
4. se φ é da forma $*\psi$, onde $* \in \{\neg, \forall x, \exists x\}$, para algum $x \in \mathcal{V}$, então a raiz é rotulada

por $*$ e tem um único filho, que é a raiz da árvore sintática de ψ;
5. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então a raiz é rotulada por $*$ e tem dois filhos, onde o da esquerda é a raiz da árvore sintática de ψ e o da direita é a raiz da árvore sintática de χ.

Definição. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. O *escopo* de $\forall x$ (ou $\exists x$) na fórmula $\forall x \psi$ (ou $\exists x \psi$) é φ, exceto por subfórmulas de φ na forma $\forall x \psi$ ou $\exists x \psi$.

Definição. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. A ocorrência de uma variável x em uma fórmula bem-formada $\forall x \varphi$ ou $\exists x \varphi$ é *ligada* se x ocorrer em φ.

Definição. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. A ocorrência de uma variável x em uma fórmula φ é *livre* se esta ocorrência de x não for ligada em qualquer subfórmula de φ.

Definição. Uma *sentença* é uma fórmula <u>sem variáveis livres</u>.

Definição. Sejam $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. Nós denotamos por $\varphi[t/x]$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de x em φ por t.

Definição. Sejam $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. Nós dizemos que t é livre para a variável x na fórmula φ se as variáveis em t não se tornarem ligadas em $\varphi[t/x]$

Exemplos

exemplos do caderno e de alguns exercicios da lista

5.3 Semântica

Definição. Uma *interpretação* $\mathcal{M}$ para o par $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ consiste de:

- um conjunto não-vazio $\mathcal{A}$ (*universo*);
- uma função $f^M : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, para cada símbolo funcional $f^n \in \mathcal{F}$;
- um subconjunto $P^M \subseteq \mathcal{A}^n$, para cada símbolo predicativo $P^n \in \mathcal{P}$.

Definição. A *função de avaliação* v para uma interpretação $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \{f^M\}_{f \in \mathcal{F}}, \{P^M\}_{P \in \mathcal{P}})$ para $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ é o mapeamento de variáveis a valores do universo $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}$.

Definição. O valor de um termo t em uma interpretação $\mathcal{M}$ é relativo à função de avaliação v e é definido indutivamente:

$$t^{M,v} = \begin{cases} v(t), & \text{se } t \in \mathcal{V} \\ f^{M,v}(t_1^{M,v}, \ldots, t_n^{M,v}), & \text{se } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definição. Sejam $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \{f^M\}_{f \in \mathcal{F}}, \{P^M\}_{P \in \mathcal{P}})$ uma interpretação para $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, v uma função de avaliação, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathrm{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$:

1. $\mathcal{M} \models_v P(t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, $(t_1^{M,v}, \ldots, t_n^{M,v}) \in P^M$;

2. $\mathcal{M} \models_v \neg\varphi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \not\models_v \varphi$;
3. $\mathcal{M} \models_v \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models_v \varphi$ e $\mathcal{M} \models_v \psi$;
4. $\mathcal{M} \models_v \varphi \vee \psi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models_v \varphi$ ou $\mathcal{M} \models_v \psi$ ou ambos;
5. $\mathcal{M} \models_v \varphi \to \psi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models_v \neg\varphi \vee \psi$;
6. $\mathcal{M} \models_v \forall x\varphi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models_v \varphi[a/x]$ <u>para todo</u> $a \in \mathcal{A}$;
7. $\mathcal{M} \models_v \exists x\varphi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models_v \varphi[a/x]$ <u>para algum</u> $a \in \mathcal{A}$.

Lema. Seja $\mathcal{M}$ uma interpretação. Se φ é uma sentença, então:

$$\mathcal{M} \models_v \varphi \iff \mathcal{M} \models_{v'} \varphi$$

para todas as funções de avaliação v e v'.

Definição. Uma fórmula φ é *satisfatível* se existir uma interpretação $\mathcal{M}$ e função de avaliação v tal que $\mathcal{M} \models_v \varphi$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{M}_v$ *satisfaz* φ ou que $\mathcal{M}_v$ é um *modelo* para φ.

Definição. Uma sentença φ é *satisfatível* se existir uma interpretação $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{M}$ *satisfaz* φ ou é um *modelo* para φ.

Observação. Satisfatibilidade,tautologia,contradição,contingência,equivalência semântica, consequência de conjuntos, consequência lógica e validade já foram definidos.

Exemplos

6 Tableaux de Primeira Ordem