Álgebra 1

Lista 05

(Polinômios)

5.1. (Calculando m.d.c. II). Encontre o m.d.c. dos seguintes polinômios sobre $\mathbb{Q}$:

(i) $X^7 - 3X^5 + 2X^4$ e $X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2$

(ii) $X^5 - 4X^4 - 3X^3 + 34X^2 - 52X + 24$ e $X^3 - 3X^2 + 4$

(iii) $X^5 - X^4 - 6X^3 - 2X^2 + 5X + 3$ e $X^3 - 3X - 2$

Verifique as respostas por outro método.

5.2. (Schönemann e Eisenstein). Seja $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ um polinômio de grau $n > 0$ com coeficientes inteiros. Se existe um primo p tal que p divide $a_{n-1}, \ldots, a_0$ mas p não divide a_n e p^2 não divide a_0, demonstre que $f(X)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$.

5.3. (Irredutibilidade depende do anel de coeficientes). Mostre que X^4+1 é um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$, mas possui divisores de grau 2 sobre o corpo dos números da forma $x + y\sqrt{2}$, onde x e y percorrem todos os números racionais.

5.4. (Se o anel dos coeficientes não for um corpo...). Prove que o conjunto I de todos os polinômios da forma $2f(X) + Xg(X)$, onde $f(X)$ e $g(X)$ percorrem $\mathbb{Z}[X]$, é fechado para a subtração e é tal que se $p(X) \in I$ então todos os múltiplos de $p(X)$ pertencem a I. Prove que I não consiste nos múltiplos de um polinômio em $\mathbb{Z}[X]$.

5.5. (Derivação). Seja K um corpo. Defina a aplicação $D : K[X] \to K[X]$ por: se $f(X) = a_nX^n + ... + a_0$ com $a_i \in K$, então $Df(X) = 0$ quando $n = 0$ e, em geral, $Df(X) = na_nX^{n-1} + ... + a_1$. Verifique que:

(i) Se $f(X)$ e $g(X)$ são polinômios em $K[X]$ e $a \in K$, então $D(f(X) + g(X)) = Df(X) + Dg(X)$, $D(af(X)) = aDf(X)$, e $D(f(X)g(X)) = Df(X)g(X) + f(X)Dg(X)$.

(ii) Se $f(X)$ é um polinômio de grau > 0 em $K[X]$, então para que uma raiz a de $f(X)$ em K possua multiplicidade > 1 é necessário e suficiente que $Df(a) = 0$.

5.6. ($K(X)$ e $K((X))$). Se K for um corpo, verifique que, com as operações usuais, os seguintes conjuntos formam corpos:

(i) O conjunto de todas as frações $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in K[X], q \neq 0$.

(ii) O conjunto de todas as séries formais de Laurent $\sum_{n=m}^{\infty} a_nX^n$, onde $a_n \in K$ e $m \in \mathbb{Z}$.