

Lógica Computacional 1

Exercícios

UnB/IE/CIC

Turma 01 - 2024/2

1. Considere a seguinte interpretação sobre o universo $\{1, 2, 3\}$ de um modelo M :

$$b^M = 3, c^M = 1, e^M = 2, P^M = \{1, 3\}, S^M = \{1\}, A^M = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3)\}, C^M = \{b\}$$

e determine se as seguintes fórmulas são satisfeitas em M :

- (a) $P(c)$
 - (b) $P(e)$
 - (c) $S(e)$
 - (d) $A(c, e)$
 - (e) $A(e, c)$
 - (f) $A(e, e)$
 - (g) $(P(c) \wedge A(c, e)) \vee (\neg P(c) \wedge A(e, c))$
 - (h) $\forall x S(x)$
 - (i) $\exists x S(x)$
 - (j) $\forall x (P(x) \rightarrow S(x))$
 - (k) $\exists x (\neg P(x) \vee S(x))$
 - (l) $\exists x (\neg P(x) \wedge S(x))$
 - (m) $\forall x P(x) \vee \forall x S(x)$
 - (n) $\forall x P(x) \vee \forall z S(z)$
 - (o) $\forall x (P(x) \vee S(x))$
2. Seja $M = \langle \{0, 1\}, \{a^M = 0\}, \{P^M = \{0, 1\}, R^M = \{(0, 0), (0, 1)\}\} \rangle$ uma interpretação. Verifique quais das seguintes fórmulas são satisfeitas em M :
- (a) $\forall x P(x)$
 - (b) $P(a)$
 - (c) $\neg R(a, a)$
 - (d) $\exists x R(x, x)$
 - (e) $\forall x R(x, x)$
 - (f) $\forall x (R(x, x) \rightarrow P(x))$
 - (g) $\forall x (\neg R(x, x) \rightarrow P(x))$
 - (h) $\forall x (P(x) \rightarrow R(x, x))$
 - (i) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x, x))$
3. Encontre duas interpretações M e M' tais que M satisfaça e M' falsifique a seguinte fórmula:

$$\exists y (P(y) \wedge \neg Q(y)) \wedge \forall z (P(z) \vee Q(z))$$

4. Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$, onde Q e g têm aridades 3 e 2, respectivamente. Encontre dois modelos \mathcal{M} e \mathcal{M}' com funções de avaliação v e v' , respectivamente, tais que $\mathcal{M} \models_v \varphi$, mas $\mathcal{M}' \not\models_{v'} \varphi$.
5. Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(z, x)))$ uma sentença. Quais dos seguintes modelos satisfaz φ ?
- (a) $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \{\}, \{P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, n) \mid m < n\}\})$.
 - (b) $\mathcal{M}' = (\mathbb{N}, \{\}, \{P^{\mathcal{M}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, 2 \times m) \mid m \in \mathbb{N}\}\})$.
 - (c) $\mathcal{M}'' = (\mathbb{N}, \{\}, \{P^{\mathcal{M}''} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, n) \mid m < n + 1\}\})$.
6. Seja P um símbolo predicativo com dois argumentos. Encontre um modelo que satisfaça a sentença $\forall x \neg P(x, x)$. Encontre também um modelo que não a satisfaça.
7. Seja φ a sentença $\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \rightarrow R(y, z))$, onde R é um símbolo predicativo de dois lugares.
- (a) Seja $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d\}$ e $R^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. $\mathcal{M} \models \varphi$?
 - (b) Seja $\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$ e $R^{\mathcal{M}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. $\mathcal{M}' \models \varphi$?