Álgebra 1

Lista 06

(Inteiros Gaussianos)

6.1. (Calculando m.d.c. III). Calcule o seu m.d.c. tanto pela divisão euclidiana quanto pela fatoração em primos Gaussianos dos seguintes pares de inteiros Gaussianos, e escreva-o como combinação linear deles:

(i) $a = 32 + 9i$ e $b = 4 + 11i$

(ii) $a = 4 + 5i$ e $b = 4 - 5i$

(iii) $a = 10 + 91i$ e $b = 7 + 3i$

6.2. (Distância). Usando a representação de números complexos por pontos no plano, prove que, se z for um número complexo qualquer, existe um inteiro Gaussiano q cuja distância a z será menor ou igual a $\sqrt{2}/2$. Prove que, dentre todos os inteiros Gaussianos, existe pelo menos um cuja distância a z é a menor possível, e que não existem mais do que quatro com esta propriedade.

6.3. (Ternos pitagóricos). Prove que todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ são, a menos da troca de x por y, dadas por $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$, onde m, n inteiros positivos.

6.4. (Inteiros de Eisenstein). Se $\omega = e^{2\pi i/3}$, mostre que os números complexos $x + y\omega$, onde x e y são inteiros ordinários, formam um anel R, cujos invertíveis são $\pm 1, \pm\omega$, e $\pm\omega^2$. Prove que, se z for um número complexo qualquer, existirá um elemento q do anel R tal que $|z - q| \leq 1/\sqrt{3}$. Donde, prove um teorema de fatoração única para este anel.

6.5. (Primos da forma $x^2 + xy + y^2$). Use o Exercício 6.4 para mostrar que um primo racional > 3 pode ser escrito como $x^2 - xy + y^2$, com inteiros x e y se, e somente se, ele deixa resto 1 pela divisão por 3.

6.6. (Anéis de inteiros em corpos quadráticos). Quais resultados vistos sobre os inteiros Gaussianos possuem análogos sobre cada anel R de números complexos a seguir? Dê contraexemplos ou demonstrações.

(i) $R = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Z}\}$

(ii) $R = \{x + y\omega : x, y \in \mathbb{Z}\}$

(iii) $R = \{x + yi : x, y \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $R = \mathbb{Z}$