Entregable 4

Wednesday, 11 May 2022 10:22

Entregable_4

FUNDAMENTOS DE COMPUTACIÓN
TRABAJO ENTREGABLE 4
MAYO 2022

Este trabajo tiene un puntaje de 6 puntos y debe ser realizado en forma **INDIVIDUAL**.
Se debe subir a Aulas antes del día 15/5/2021 a las 21:00 hs.

(1) Considere la suma, producto y potencia de naturales, definidas como:

```
(+) :: N->N->N
(+) = \m n -> case m of {0 -> n ; S x -> S (x + n)}
(*) :: N->N->N
(*) = \m n -> case m of {0 -> 0 ; S x -> n + (x * n)}
(^) :: N->N->N
(^) = \m n -> case n of {0 -> S 0 ; S x -> m * (m ^ x)}
```

Demuestre que (∀m::N,∀n::N,∀k::N) `m^(n + k) = m^n * m^k`.

Puede utilizar, sin necesidad de demostrarlas, la asociatividad y conmutatividad de la suma y el producto de naturales.

(2) Defina, sin utilizar funciones auxiliares, las siguientes funciones:

a) `min :: N->N->N` que calcula el mínimo de dos números naturales.

b) `max :: N->N->N` que calcula el máximo de dos números naturales.

(3) Demuestre que (∀m::N,∀n::N) `min m n + max m n = m + n`, utilizando las propiedades de (+) enunciadas en el ejercicio (1).

1

---

(1) Demostrar $(\forall m::N \ \forall n::N \ \forall k::N)$ se cumple $m \mathbin{\char`^} (n+k) = m \mathbin{\char`^} n * m \mathbin{\char`^} k$

Demostración por inducción en $m::N$ con $n::N$ y $k::N$ cualesquiera

- Caso $m=0$

$0\,\hat{}\,(n+k) = 0\,\hat{}\,n * 0\,\hat{}\,k$

def ^, βx3, case def ^, βx3, case

$S0 = S0 * S0$

def * β_2 case

$S0 + (0 * S0)$

Lema 0*

$S0 + 0$

Lema +0

$S0 = S0$ ✓

- Caso $m = Sx$ con $x::N$ cualquiera

Hi) $x\,\hat{}\,(n+k) = x\,\hat{}\,n * x\,\hat{}\,k$

Ti) $Sx\,\hat{}\,(n+k) = Sx\,\hat{}\,n * Sx\,\hat{}\,k$

en este punto dependemos de los valores de n y k así que aplicamos inducción en n y en k

* Caso $n=0$

$Sx\,\hat{}\,(0+k) = Sx\,\hat{}\,0 * Sx\,\hat{}\,k$

* Caso $k=0$

$Sx\,\hat{}\,(0+0) \stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,0 * Sx\,\hat{}\,0$

def + βx2 case (def ^ βx2 case) x2

$Sx\,\hat{}\,0 \stackrel{?}{=} S0 * S0$

def ^ βx2 case def * βx2 case

$S0 \stackrel{?}{=} S0 + (0 * S0)$

Lema 0*

Lema +0

$S0 = S0$ ✓

* Caso $k = Sz$ con $z::N$ cualquiera

Hi) $Sx\,\hat{}\,(0+z) = Sx\,\hat{}\,0 * Sx\,\hat{}\,z$

Ti) $Sx\,\hat{}\,(0+Sz) = Sx\,\hat{}\,0 * Sx\,\hat{}\,Sz$

$Sx\,\hat{}\,(0+Sz) \stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,0 * Sx\,\hat{}\,Sz$

def 0+ (def ^ βx2 case) x2

$Sx\,\hat{}\,Sz \stackrel{?}{=} S0 * Sx\,\hat{}\,Sz$

def * βx2 case

$\stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sz + (0 * Sx\,\hat{}\,Sz)$

Lema 0*

$\stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sz + 0$

Lema +0

$Sx\,\hat{}\,Sz = Sx\,\hat{}\,Sz$ ✓ = xene

* Caso $n = Sy$ con $y::N$ cualquiera

Hi) $Sx\,\hat{}\,(y+k) = Sx\,\hat{}\,y * Sx\,\hat{}\,k$

Ti) $Sx\,\hat{}\,(Sy+k) = Sx\,\hat{}\,Sy * Sx\,\hat{}\,k$

* Caso $k=0$

$Sx\,\hat{}\,(Sy+0) \stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sy * Sx\,\hat{}\,0$

Lema +0 def ^ βx2 case

$Sx\,\hat{}\,Sy \stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sy * S0$

def * βx2 case

$\stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sy + (0 * Sx\,\hat{}\,Sy)$

Lema 0*

Lema +0

$Sx\,\hat{}\,Sy = Sx\,\hat{}\,Sy$ ✓

* Caso $k = Sz$ con $z::N$ cualquiera

Hi) $Sx\,\hat{}\,(Sy+z) = Sx\,\hat{}\,Sy * x\,\hat{}\,z$

Ti) $Sx\,\hat{}\,(Sy+Sz) \stackrel{?}{=} Sx\,\hat{}\,Sy * Sx\,\hat{}\,Sz$

def + ^ βx2 case (def ^ βx2 case) x2

(2)

* $\min :: N \to N \to N$

$\min = \lambda m,n \to$ case m of $\{ 0 \to 0;$
$Sx \to$ case n of $\{ 0 \to 0;$
$Sy \to S(\min(x,y)) \}\}$

* $\max :: N \to N \to$

$\max = \lambda m,n \to$ case m of $\{ 0 \to n;$
$Sx \to$ case n of $\{ 0 \to m;$
$Sy \to S(\max(x,y)) \}\}$

(3) Demostrar

$(\forall m::N, \forall n::N)\ \min m\, n + \max m\, n = m + n$

Demostración por inducción en $m::N$ sea $n::N$ cualquiera

- Caso $m=0$

$\min 0\, n + \max 0\, n = 0 + n$

= def min βx2 case = def max βx2 case

$0 + n = 0 + n$

= xAME

- Caso $m = Sx$ con $x::N$ cualquiera

Hi) $\min x\, n + \max x\, n = x + n$

Ti) $\min Sx\, n + \max Sx\, n \stackrel{?}{=} Sx + n$

(= def min βx2 casex2 = def max βx2 case)

Como en este punto dependemos de n, continuaremos con:

- Demostración por inducción en $n::N$

- Caso $n=0$

$\min Sx\, 0 + \max Sx\, 0 \stackrel{?}{=} Sx + 0$

= def min βx2 casex2

$0 + Sx$

Conmutativa de +

$Sx + 0 = Sx + 0$ ✓ = xAME

- Caso $n = Sy$ con $y::N$ cualquiera

Hi2) $\min x\, Sy + \max x\, Sy = x + Sy$

Ti2) $\min Sx\, Sy + \max Sx\, Sy \stackrel{?}{=} Sx + Sy$

= def min βx2 case x2 = def max βx2 case x2

Son validos cualquiera de los resultados

$Sx + Sy = Sx + Sy$

$Sy + Sx$

Para el caso de $Sy + Sx$ → = def + conmutativa de +

$Sx + Sy = Sx + Sy$ ✓