FUNDAMENTOS DE COMPUTACIÓN
TRABAJO ENTREGABLE 4
MAYO 2022

Este trabajo tiene un puntaje de 6 puntos y debe ser realizado en forma **INDIVIDUAL**.
Se debe subir a Aulas antes del día 15/5/2021 a las 21:00 hs.

(1) Considere la suma, producto y potencia de naturales, definidas como:

```
(+) :: N -> N -> N
(+) = \m n -> case m of {O -> n ; S x -> S (x + n)}
(*) :: N -> N -> N
(*) = \m n -> case m of {O -> O ; S x -> n + (x * n)}
(^) :: N -> N -> N
(^) = \m n -> case n of {O -> S O ; S x -> m * (m ^ x)}
```

Demuestre que `(∀m::N,∀n::N,∀k::N) m ^ (n + k) = m^n * m^k`.

Puede utilizar, sin necesidad de demostrarlas, la asociatividad y conmutatividad de la suma y el producto de naturales.

(2) Defina, <u>sin utilizar funciones auxiliares</u>, las siguientes funciones:

a) `min :: N -> N -> N` que calcula el mínimo de dos números naturales.

b) `max :: N -> N -> N` que calcula el máximo de dos números naturales.

(3) Demuestre que `(∀m::N,∀n::N) min m n + max m n = m + n`, utilizando las propiedades de `(+)` enunciadas en el ejercicio (1).

Solución

(1) $(\forall$`m::N`$,\forall$`n::N`$,\forall$`k::N`$)$ `m ^ (n + k) = m^n * m^k`.

Dem. Por inducción en `n::N`. Sean `m,k::N`.

Caso `n = 0`: `m ^ (0 + k)` $\stackrel{?}{=}$ `m^0 * m^k`

`m ^ (0 + k)`	`m^0 * m^k`
$=$ (def. `(+)`, $\beta \times 2$, `case`)	$=$ (def. `(^)`, $\beta \times 2$, `case`)
`m ^ k`	`S 0 * m^k`
	$=$ (def. `(*)`, $\beta \times 2$, `case`)
	`m^k + 0 * m^k`
	$=$ (def. `(*)`, $\beta \times 2$, `case`)
	`m^k + 0`
	$=$ (conmutatividad de `(+)`, def. `(+)`, $\beta \times 2$, `case`))
	`m^k`

Ambas expresiones son iguales por RME

Caso `n = S x`, con `x::N` cualquiera
HI) `m ^ (x + k) = m^x * m^k`
TI) `m ^ (S x + k)` $\stackrel{?}{=}$ `m^(S x) * m^k`

`m ^ (S x + k)`	`m^(S x) * m^k`
$=$ (def. `(+)`, $\beta \times 2$, `case`)	$=$ (def. `(^)`, $\beta \times 2$, `case`)
`m ^ S(x + k)`	`(m * m^x) * m^k`
$=$ (def. `(^)`, $\beta \times 2$, `case`)	$=$ (asociatividad de `(*)`)
`m * m ^ (x + k)`	`m * (m^x * m^k)`
$=$ (HI)	
`m * (m^x * m^k)`	

Ambas expresiones son iguales por RME

(2) a) `min::N->N->N`

```
min = \m n -> case m of {0 -> 0 ;
                         S x -> case n of {0 -> 0 ; S y -> S (min x y)}}
```

b) `max::N->N->N`

```
max = \m n -> case m of {0 -> n ;
                         S x -> case n of {0 -> S x ; S y -> S (max x y)}}
```

(3) $(\forall$`m::N`$,\forall$`n::N`$)$ `min m n + max m n = m + n`
Dem. Por inducción en `m::N`.

Caso `m = 0`: $(\forall$`n::N`$)$ `min 0 n + max 0 n` $\stackrel{?}{=}$ `0 + n`
Sea `n::N` cualquiera

`min 0 n + max 0 n`
= (def. `min`, $\beta \times 2$, `case`, def. `max`, $\beta \times 2$, `case`)
`0 + n`

Caso `m = S x`, con `x::N` cualquiera
HI) `(∀n::N) min x n + max x n = x + n`
TI) `(∀n::N) min (S x) n + max (S x) n` $\stackrel{?}{=}$ `S x + n`

Por inducción en `n::N`

Caso `n = 0`: `min (S x) 0 + max (S x) 0` $\stackrel{?}{=}$ `S x + 0`
`min (S x) 0 + max (S x) 0`
= (def. `min`, $\beta \times 2$, `case`$\times 2$, def. `max`, $\beta \times 2$, `case`$\times 2$)
`0 + S x`
= (conmutatividad de `(+)`
`S x + 0`

Caso `n = S y`, con `y::N` cualquiera
HI2) `min (S x) y + max (S x) y = S x + y`
TI2) `min (S x) (S y) + max (S x) (S y)` $\stackrel{?}{=}$ `S x + S y`

`min (S x) (S y) + max (S x) (S y)`
= (def. `min`, $\beta \times 2$, `case`$\times 2$, def. `max`, $\beta \times 2$, `case`$\times 2$)
`S (min x y) + S (max x y)`
= (def. `(+)`, $\beta \times 2$, `case`)
`S (min x y + S (max x y))`
= (conmut.`(+)`, def.`(+)`, $\beta \times 2$, `case`))
`S (S (min x y + max x y))`
= (HI de arriba para `n = y`)
`S (S (x + y))`

`(S x) + (S y)`
= (def. `(+)`, $\beta \times 2$, `case`)
`S (x + S y)`
= (conmut.`(+)`,def.`(+)`, $\beta \times 2$, `case`)
`S (S (x + y))`

Ambas expresiones son iguales por RME