

On a déjà évoqué le problème de l'échantillonnage auparavant. On se propose ici de revenir plus en détail sur les conditions à respecter lors de cette opération, ainsi que sur l'opération inverse, c'est à dire la **reconstruction** ou **reconstitution** de données. Remarque : on se limite au cas de l'échantillonnage périodique.

Signal échantillonné (rappels) :

Physiquement, il s'agit d'une suite d'impulsions où chaque impulsion indique la valeur, pendant un court intervalle de temps, du signal analogique. Dans le cas le plus fréquent, c'est à dire l'**échantillonnage par multiplication**, c'est la hauteur des impulsions qui est représentative. En particulier, dans le cas de l'**échantillonnage réel**, la valeur du signal analogique $x(t)$ aux instants d'échantillonnage kT_e est successivement représentée par une suite d'impulsions de durée constante Δ , dont la hauteur varie comme $x(t)$. Une approximation consiste à supposer ces échantillons rectangulaires de hauteur $x(kT_e)$ (**échantillonnage avec maintien** ou avec bloqueur d'ordre 0 : cas fréquent en pratique). Dans la pratique, on s'arrange pour que $\Delta \ll T_e$. On peut alors assimiler le signal échantillonné à un train d'impulsions de Dirac modulées en amplitude (**échantillonnage idéal**), ce qui permet de simplifier l'analyse des différents phénomènes.

Spectre d'un train d'impulsions modulées :

On se place désormais dans le cas "idéal". Par conséquent, le signal échantillonné est donné par :

$$x'(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

On en déduit : $X'(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) L[\delta(t - kT_e)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-kT_e s} = X(z)|_{z=e^{sT_e}}$

Par hypothèse, le signal $x(t)$ représente la variation d'une grandeur physique et a par conséquent une énergie finie. Il possède donc une transformée de Fourier qui définit son spectre fréquentiel :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

On cherche à présent la relation entre la transformée de Fourier du signal analogique et celle du signal échantillonné, ainsi qu'avec la transformée en z :

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j\omega kT_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \left(e^{j\omega T_e} \right)^{-k} \end{aligned}$$

d'où finalement : $X'(\omega) = X(z)|_{s=j\omega}$ i.e $z = e^{j\omega T_e}$ (résultat attendu pour des distributions)

Remarque : on note au passage que le spectre du signal échantillonné est périodique, de période égale à la pulsation d'échantillonnage, en effet :

$$e^{j\omega T_e} = e^{j\left(\omega + k\frac{2\pi}{T_e}\right)T_e}, \text{ k entier, d'où : } X'(\omega) = X'(\omega + k\omega_e) \text{ avec } \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 2\pi f_e$$

Par ailleurs, la distribution peigne de Dirac étant périodique, elle peut être développée en série de Fourier :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_e t} \text{ avec } C_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-jn\omega_e t} dt = \frac{1}{T_e} \quad \forall n$$

d'où : $X'(\omega) = \int x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jn\omega_e t}}{T_e} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int x(t) e^{-j(\omega - n\omega_e)t} dt$

c'est à dire :
$$X'(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_e)$$

Le spectre du signal échantillonné est donc constitué, au facteur $1/T_e$ près, d'**une suite de répliques** ("alias" en anglais) du spectre du signal analogique, centrées sur des pulsations multiples de la pulsation d'échantillonnage ω_e .

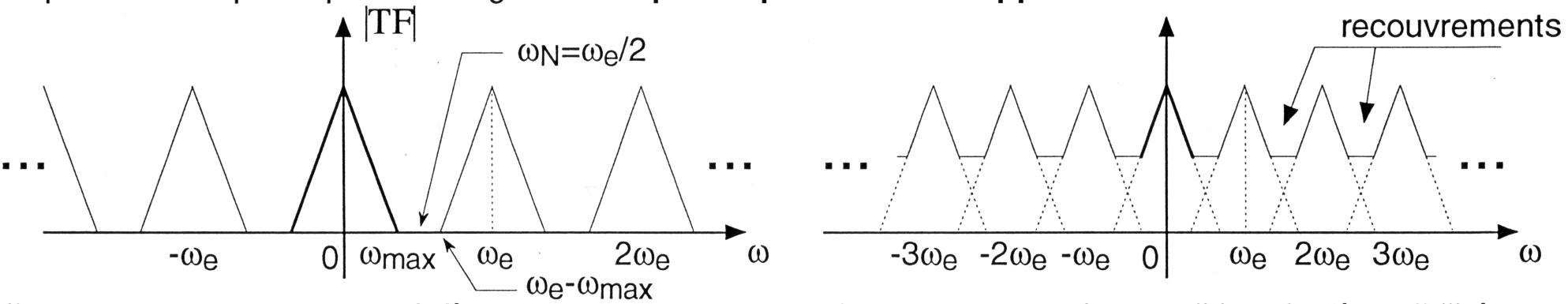
Remarques : le résultat précédent peut s'interpréter en termes de convolution : la TF du produit d'un signal par un peigne de Dirac est égale au produit de convolution de la TF du signal et de la TF du peigne. Or la TF du peigne, de période T_e , est également un peigne, de période ω_e , on a donc bien une reproduction du spectre initial centrée sur les multiples de ω_e (voir Signaux 4, transp. 54).

Dans le cas de l'échantillonnage réel et avec maintien, on montre :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n X(\omega - n\omega_e) \text{ avec } \begin{cases} C_n = \operatorname{sinc}\left(n \frac{\omega_e}{2\pi} \Delta\right) \text{ répliques modulées en amplitude (éch. réel)} \\ C_n = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \Delta}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega \Delta}{2}} \text{ répliques déphasées et déformées par une fonction de la pulsation (éch. avec maintien)} \end{cases}$$

On se place toujours dans le cas idéal, deux cas sont à considérer : selon la forme du spectre du signal analogique et selon la fréquence d'échantillonnage, les répliques spectrales sont à supports disjoints ou au contraire, se recouvrent partiellement (**recouvrement ou repliement spectral**, "aliasing effect"). Or, la présence d'un tel recouvrement entraîne la non-réversibilité de la transformation et donc une perte d'information. Dans le cas d'un signal à bande non-limitée, ce phénomène a lieu quelque soit la fréquence d'échantillonnage. Or, une conséquence du théorème de Paley-Wiener est que tout signal physiquement réalisable ne peut être simultanément à bande limitée. Ainsi, **dans la réalité, l'échantillonnage entraîne toujours un certain recouvrement** ce qui exclut toute possibilité de reconstruction parfaite. Néanmoins, la condition d'énergie finie impose que le spectre tende vers zéro lorsque la fréquence tend vers $\pm\infty$, le spectre est donc quasiment nul à partir d'une certaine fréquence. Il est alors possible de choisir une fréquence d'échantillonnage ne provoquant qu'un recouvrement négligeable et permettant une réversibilité acceptable.

En pratique, le spectre du signal à échantillonner est généralement limité par filtrage passe-bas. La fréquence de coupure de ce filtre passe-bas, appelé **filtre anti-repliement** ("antialiasing filter"), est fixée en fonction de la bande jugée utile du signal d'origine. Dès lors, la condition de réversibilité de l'opération s'exprime pour des signaux de **spectre passe-bas à support borné** :



Il y a recouvrement spectral dès que $\omega_e - \omega_{\max} < \omega_{\max}$ i.e $\omega_e < 2\omega_{\max}$. La condition de réversibilité est donc donnée par : $\omega_e \geq 2\omega_{\max}$.

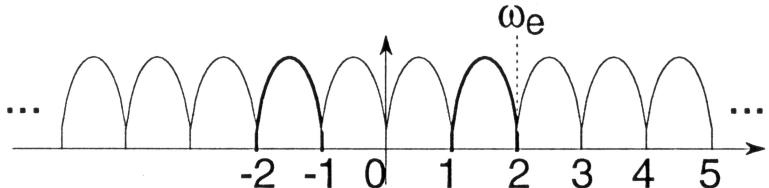
Remarque : toute pulsation ω' supérieure à la **pulsation de Nyquist** ω_N (la moitié de la pulsation d'échantillonnage) est une réplique de la pulsation $\omega = |(\omega' + \omega_N) \bmod (\omega_e) - \omega_N|$

Enoncé du théorème : un signal continu, dont la TF est nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$, est donné de manière unique par ses valeurs aux instants d'échantillonnage si la pulsation (fréquence) d'échantillonnage est supérieure ou égale ($>$ dans le cas théorique d'un sinus pur) au double de la pulsation (fréquence) maximale ω_{\max} du signal. Dans ce cas, il n'y a pas de perte d'information et on peut théoriquement reconstruire le signal analogique.

Remarque : dans le cas d'un signal passe-bande à support borné $[\omega_1, \omega_2]$, la condition de Shannon est $\omega_e \geq 2 \omega_2$, mais en fait la condition suffisante est donnée par :

$$\omega_{e_{\min}} = 2 \frac{\omega_2}{m} \text{ où } m \text{ est le plus grand entier } \leq \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$$

NB : toutes les fréquences supérieures ne sont pas forcément utilisables.



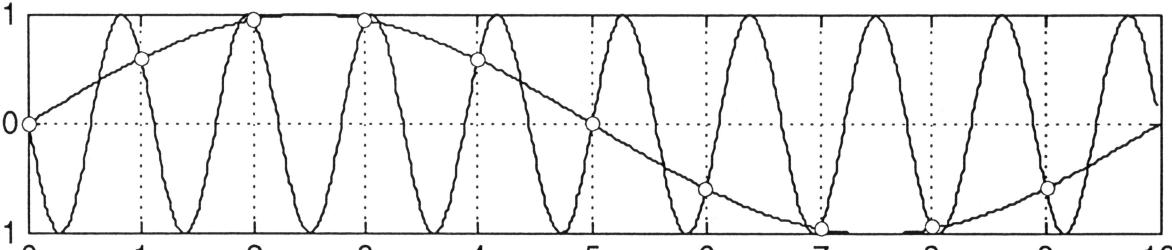
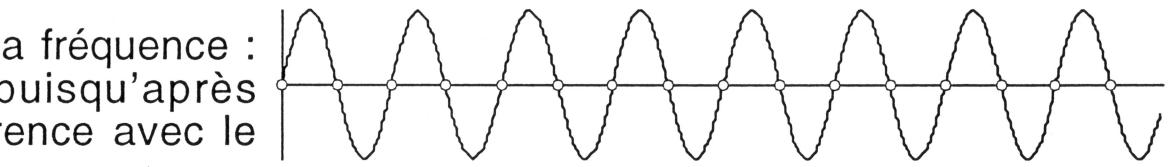
exemple : $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, d'où $m = 2$ et $\omega_e = \omega_2$.

Exemples :

Signal sinusoïdal échantillonné à 2 fois sa fréquence : on a ici perdu de l'information puisqu'après échantillonnage, on ne fait plus la différence avec le signal nul.

2 signaux sinusoïdaux, à 0,1 et 0,9 Hz, échantillonnés à 1 Hz peuvent présenter les mêmes valeurs aux instants d'échantillonnage (on a perdu de l'information sur le signal à 0,9 Hz).

On peut trouver une infinité de sinusoïdes passant par ces mêmes échantillons, rien d'étonnant donc à ce que le spectre correspondant comprenne une infinité de composantes.



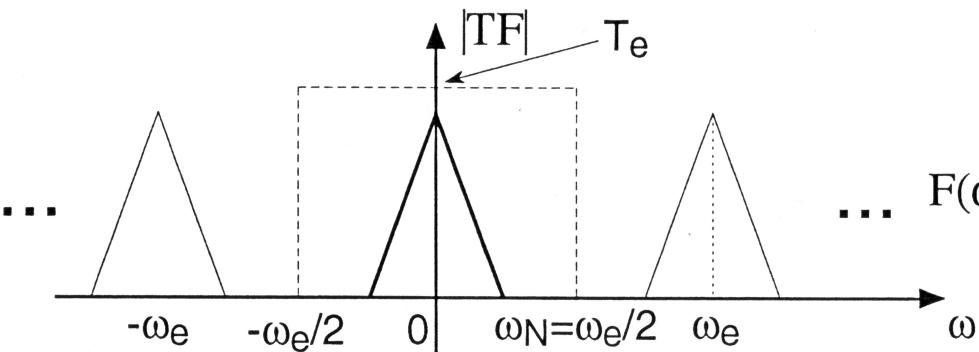
La reconstitution d'un signal analogique $x(t)$ à partir d'échantillons $x(kT_e)$ successifs implique la restitution de toutes les valeurs intermédiaires. Celle-ci est en pratique approximative.

Concernant les systèmes de restitution, on parle d'**extrapolateur d'ordre m** (détermination des valeurs du signal suivant x_k à partir de $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$) ou d'**interpolateur d'ordre m** (à partir de $m + 1$ échantillons, dont certains postérieurs à x_k). Ce dernier étant non-causal, on le rend causal en admettant un **retard à la reconstruction**.

Remarque : en traitement du signal, certaines applications peuvent tolérer ce retard (ex : télécom.). Par contre, dans tous les systèmes bouclés, cela peut poser des problèmes de stabilité, on préfère alors utiliser des extrapolateurs (généralement des bloqueurs d'ordre 0).

Interpolateur idéal (reconstructeur de Shannon) :

On se place dans le cas d'un signal à spectre passe-bas, l'échantillonnage est supposé idéal et sans recouvrement. Le filtre de reconstruction idéal est alors un filtre rectangulaire passe-bas, de pulsation de coupure $\omega_e/2$, ce qui permet d'éliminer totalement les parties du spectre introduites par l'échantillonnage :



Ce produit correspond à un produit de convolution dans le domaine temporel, donc :

L'échantillonnage idéal introduisant un facteur $1/T_e$, le filtre doit être de hauteur T_e :

$$F(\omega) = \begin{cases} T_e & |\omega| < \frac{\pi}{T_e} = \frac{\omega_e}{2} = \omega_N \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_e} = \omega_N \end{cases} \rightarrow X(\omega) = X'(\omega) \cdot F(\omega)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Dans l'expression précédente, $f(t)$ désigne la réponse impulsionnelle du filtre c'est à dire la TF inverse de $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_e}}^{+\frac{\pi}{T_e}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_e}{2\pi j t} [e^{j\omega t}] \Big|_{-\frac{\pi}{T_e}}^{+\frac{\pi}{T_e}} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$$

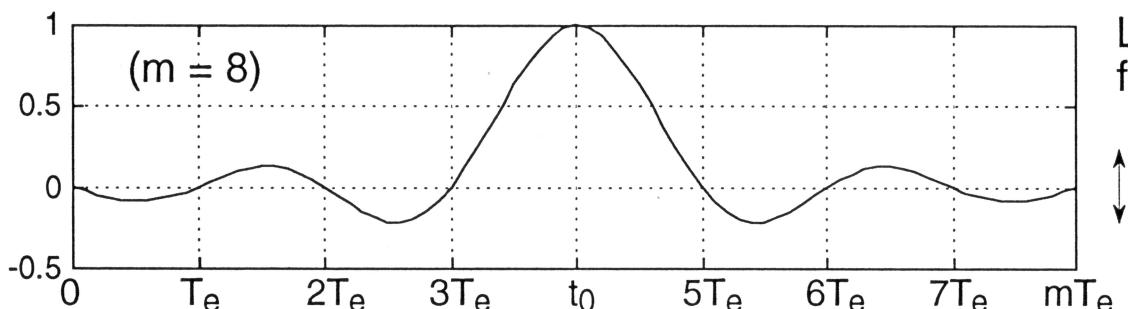
D'autre part, le terme $x'(\tau)$ s'écrit :

$$x'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(\tau - kT_e) \rightarrow \text{non-nul pour } \tau = kT_e$$

Finalement, on a :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(\tau - kT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T_e}\right) d\tau \text{ i.e. } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \text{sinc}\left(\frac{t-kT_e}{T_e}\right)$$

Ce filtrage est irréalisable, puisque non-causal et faisant intervenir une infinité de termes. La solution utilisée en pratique consiste à tronquer la réponse impulsionnelle du filtre et à la décaler de $t_0 = mT_e/2$:



La troncature peut s'effectuer à l'aide d'une fenêtre rectangulaire (comme ici) ou autre.

↑ < 10% après 3 échantillons
↓ < 5% après 6 échantillons

→ **Interpolateur quasi-ideal**

Remarque : dans la réalité, une reconstruction de très haute qualité suppose en plus de tenir compte des déformations et déphasages introduits par exemple par l'échantillonnage avec maintien.

Remarque : dans la pratique, on utilise en fait un interpolateur quasi-idéal numérique. La reconstruction est alors effectuée en deux étapes : l'interpolateur travaille en fait à une fréquence plus élevée $f'_e = L \cdot f_e$ ($L \gg 1$) et alimente à cette cadence un bloqueur d'ordre 0 (CNA) suivi éventuellement d'un filtre de lissage. Le **suréchantillonnage** introduit par l'interpolation remplace la période de répétition ω_e du spectre du signal échantillonné par $L \cdot \omega_e$ et ce sans modifier ω_{max} . De plus, le bloqueur et le filtre éventuel agissent comme des filtres passe-bas. Lorsque L est choisi suffisamment grand, la distorsion introduite par l'ensemble bloqueur/filtre est négligeable.

Conclusion : Cette méthode de reconstruction introduit un retard relativement important et conduit à des charges de calcul élevées. De plus, elle est inutilisable en cas d'échantillonnage irrégulier. Elle n'est donc généralement pas employée en commande échantillonnée et reste réservée à certaines applications particulières de traitement du signal nécessitant une qualité de reconstruction irréprochable (exemple : lecteur de CD).

Remarques : D'autres interpolateurs peuvent être imaginés utilisant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle $g(t)$. Par analogie avec ce qui précède, on réalise alors :

$$\tilde{x}(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) g(t - kT_e)$$

En fait, tous les systèmes de reconstruction peuvent s'exprimer sous cette forme. Pour des signaux à spectre passe-bande, on procède de manière similaire mais avec un filtre passe-bande.

Reconstruction par approximation polynômiale :

Par $m + 1$ échantillons, on ne peut faire passer qu'un seul polynôme de degré m . Si les $m + 1$ échantillons x_{k-m}, \dots, x_k sont connus, une approximation de $x(t - t_0)$ pour $kT_e \leq t \leq (k + 1)T_e$ et $0 \leq r \leq m$ peut être calculée en utilisant la **méthode des polynômes de Lagrange** (le **retard global** : $t_0 = rT_e +$ éventuellement t'_0 le temps de calcul, dépend alors du choix de r et de m) :

$$\tilde{x}(t - rT_e (-t'_0)) = \sum_{i=0}^m x_{i+k-m} q_{m,i}[t - (k+r-m)T_e] \text{ avec } \begin{cases} q_{m,i}[t] = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^m \frac{t - nT_e}{(i-n)T_e} & i=0, \dots, m \\ q_{0,0}[t] = 1 & \end{cases}$$

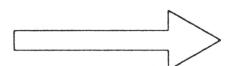
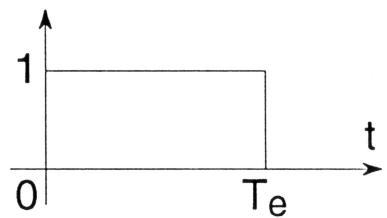
Pour $r \neq 0$, on obtient une interpolation (linéaire si $r = 1$, $m = 1$, $t_0 = T_e$). Pour $r = 0$, on obtient une extrapolation qui peut se ramener à la formule dite de Newton-Gregory :

$$\tilde{x}(t) = x_k + \frac{t - kT_e}{T_e} (x_k - x_{k-1}) + \frac{(t - kT_e)^2}{2!T_e^2} (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + \dots$$

Cas particulier important : extrapolateur ou bloqueur d'ordre 0 ($r = 0, m = 0$). Celui-ci réalise :

$$\tilde{x}(t) = x_k \text{ pour } kT_e \leq t < (k+1)T_e$$

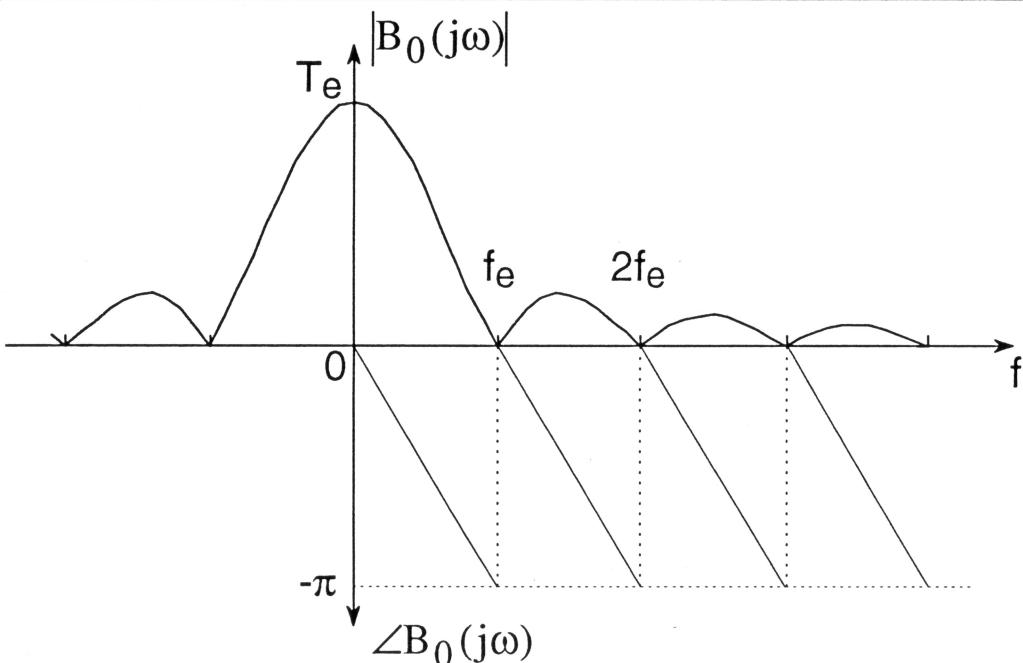
On en déduit sa réponse impulsionnelle, puis sa FT :



$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}$$

On en tire sa réponse fréquentielle :

$$B_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = T_e e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \frac{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}{2j\frac{\omega T_e}{2}} = T_e \underbrace{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}_{\substack{\text{retard} \\ \text{inherent}}} \frac{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}{\frac{\omega T_e}{2}} = T_e e^{-j\pi f T_e} \operatorname{sinc}(f T_e)$$



Ainsi le bloqueur d'ordre 0 est bien un filtre passe-bas. Dans la bande fréquentielle d'intérêt, la réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre 0 est comparable à celle d'un retard pur $T_e \exp(-sT_e/2)$ (module constant T_e et déphasage linéaire). Ce retard pur est ainsi souvent utilisé comme une approximation de la fonction de transfert du bloqueur.

Avec ce système de reconstruction, somme toute plutôt rudimentaire, il est clair que pour que le spectre du signal reconstruit soit proche du spectre du signal analogique de départ, **la fréquence d'échantillonnage doit être nettement plus élevée que $2 f_{\max}$** . Dans la pratique, comme on le verra par la suite, cette règle doit être plus ou moins respectée quelque soit le système de reconstruction, car n'oublions pas que le théorème de Shannon repose sur un certain nombre d'hypothèses rarement vérifiées à la lettre.

Avec le bloqueur d'ordre 0, seul l'échelon est parfaitement reconstitué. Une estimation de l'erreur maximale de reconstruction est donnée par :

$$e_{B_0} = \max_k |x_{k+1} - x_k| \leq T_e \cdot \max_t |\dot{x}(t)|$$

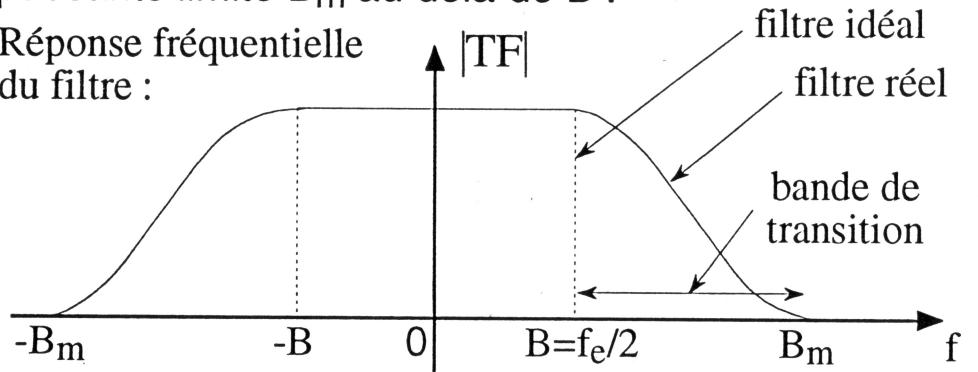
La fonction de maintien inhérente au B_0 est naturellement réalisée par les CNA standards, à l'entrée desquels les valeurs numériques sont maintenues pendant la durée du pas d'échantillonnage T_e . Aussi le B_0 est-il de loin le système le plus employé. Souvent, on le fait suivre d'un filtre de lissage additionnel pour atténuer les hautes fréquences indésirables dues à la variation en "escaliers" du signal de sortie.

Très souvent, le spectre du signal à échantillonner n'est pas parfaitement connu. Il contient généralement une composante à large bande due à la présence additionnelle de bruit de fond engendré dans le milieu de mesure, les capteurs, les amplificateurs, etc. Après échantillonnage, des hautes fréquences peuvent apparaître comme des basses fréquences à cause du repliement de spectre. Il est donc nécessaire d'effectuer un **pré-filtrage analogique** afin de supprimer tout risque de recouvrement sans devoir imposer une fréquence d'échantillonnage excessive. Le filtre utilisé est appelé **filtre anti-repliement ou filtre de garde** ("anti-aliasing filter").

Remarque : souvent, les capteurs analogiques comportent un filtre, qu'il est alors possible d'ajuster par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

Le filtre anti-repliement idéal est le filtre passe-bas idéal (rectangulaire), de bande passante $B = f_e/2 = f_N$ (fréquence de Nyquist). En pratique, le filtre comporte une **bande de transition** qui reporte la bande passante limite B_m au delà de B :

Réponse fréquentielle
du filtre :

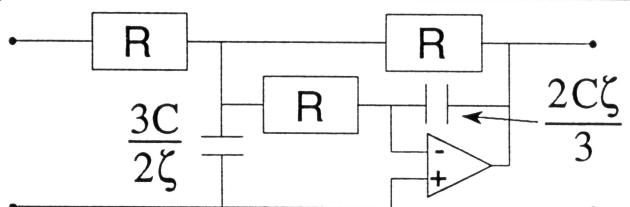


Avec un tel filtrage, on devra donc avoir en réalité :

$$f_{e \min} = 2B_m > 2B$$

La largeur de bande, la platitude dans la bande passante, l'atténuation, etc., dépendent du type de filtre utilisé et de son ordre.

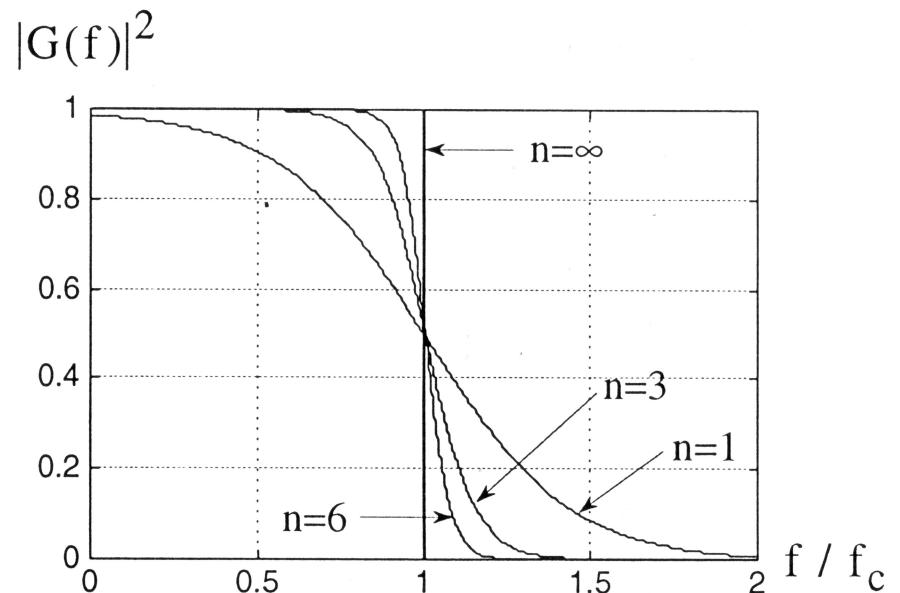
En l'absence de contraintes spécifiques, un filtre standard du 2ème ordre peut très bien faire l'affaire :



$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} ; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (+ \text{abaques 2ème ordre})$$

Si l'on souhaite obtenir un filtre à atténuation plus forte, on peut bien sûr mettre en cascade plusieurs filtres du 1^{er} et/ou du 2^{ème} ordre. Enfin, si cela est nécessaire, on peut mettre en œuvre des **filtres à haute performance** (Bessel, Butterworth, Tchebycheff, Cauer, etc.). Le type de filtre est alors choisi en fonction de la caractéristique que l'on souhaite privilégier : **platITUDE de la réponse fréquentielle** dans la bande passante (**Butterworth, Tchebycheff inverse**), **raideur** à la fréquence de coupure (**Legendre**, à atténuation uniformément croissante, **Tchebycheff** et **Cauer**, qui présentent des **ondulations**), **déphasage linéaire** (**Bessel** : assimilable à un retard pur).

EXEMPLE :



Approximation de Butterworth de degré n :

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_c)^{2n}}$$

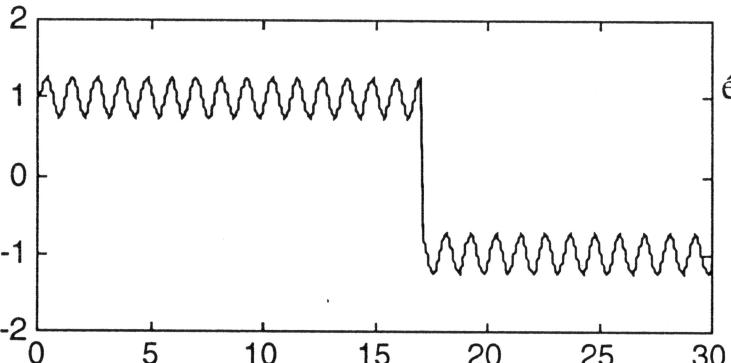
Elle maintient une **réponse plate optimale** dans la bande passante, avec atténuation de -3 dB à la fréquence de coupure f_c et une pente asymptotique d'atténuation de $-20.n$ dB/décade pour $f > f_c$.

Pour $n = 2$, on retrouve un cas particulier du filtre du 2^{ème} ordre standard, avec : $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

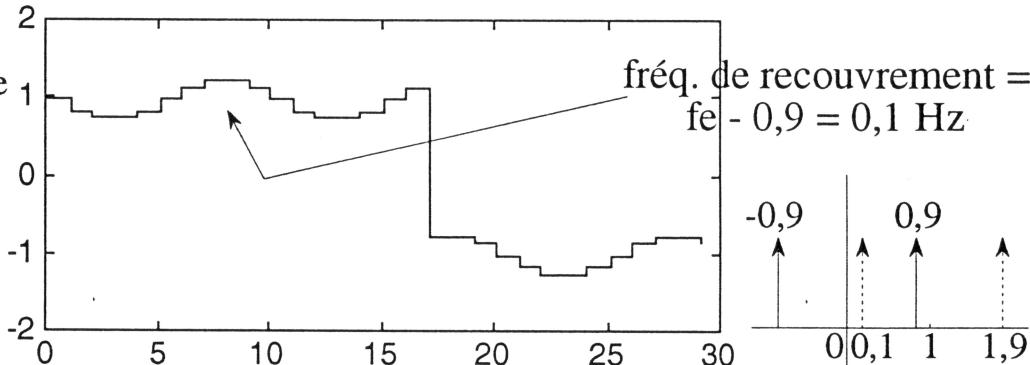
Remarque : Le filtre de Bessel revêt un intérêt particulier dans le cadre de la commande échantillonnée des systèmes. Etant assimilable à un retard pur, sa prise en compte dans le modèle du système à commander est plus facile à réaliser, de plus, il entraîne moins de distorsion du signal.

Utilité du préfiltrage, illustration sur un exemple :

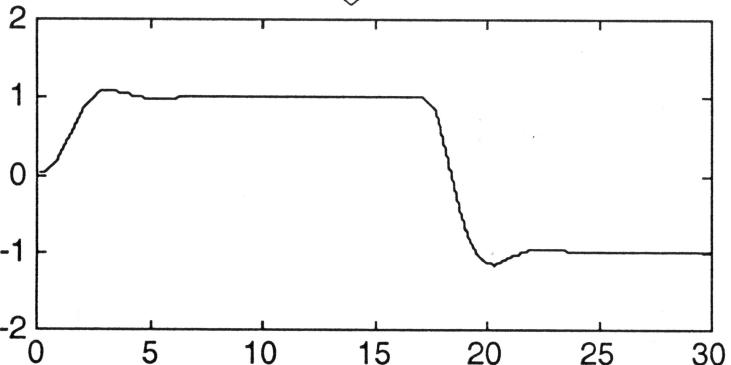
Soit un signal analogique composé d'une onde rectangulaire et d'une perturbation sinusoïdale à 0,9 Hz. On compare les résultats obtenus après échantillonnage à la fréquence de 1 Hz puis blocage d'ordre 0, dans les deux cas, c'est à dire avec et sans pré-filtrage :



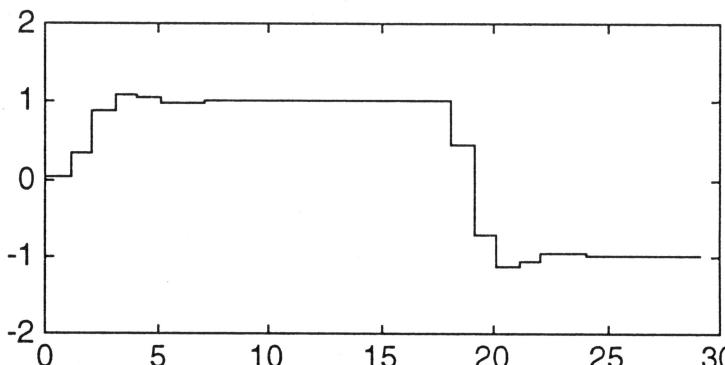
échantillonnage
blocage
→
 $f_e = 1 \text{ Hz}$



filtrage analogique ↓ (Butterworth 3e ordre)



idem
→
 $f_e = 1 \text{ Hz}$



Remarque : dans le contexte de la commande de processus, dans certains cas très particuliers, on ne peut pas effectuer de filtrage analogique tel qu'on l'a envisagé jusqu'à présent. Exemple : il n'est pas toujours techniquement possible de mesurer en ligne certaines caractéristiques (humidité par exemple) au sein d'un flux de produit. Celui-ci est alors échantillonné pour analyse en laboratoire. Dans ce cas, il faut prendre plusieurs échantillons en considération et les mélanger avant analyse (ou prendre la valeur moyenne sur les différents échantillons).

Remarque : concernant la réalisation des filtres analogiques, tant que la fréquence de coupure est supérieure à 5 Hz, on peut généralement se contenter de réseaux passifs de type RC. Lorsque la fréquence de coupure est comprise dans l'intervalle 0,1 Hz à 5 Hz, des réseaux actifs (à base d'amplificateurs opérationnels) doivent être utilisés. Enfin, pour des fréquences de coupure inférieures à 0,1 Hz, les filtres analogiques sont généralement trop chers, **on procède alors à un échantillonnage à fréquence très élevée suivi d'un filtrage numérique** (on parle parfois de **suréchantillonnage/filtrage numérique**).

Aspects pratiques du choix de la fréquence d'échantillonnage :

D'un point de vue général, le choix de la fréquence d'échantillonnage adéquate est un problème complexe, qui dépend de nombreux paramètres, et qui ne connaît pas de solution miracle qui s'énonce facilement ; chaque application constitue un cas particulier qu'il convient d'analyser avec soin. Toutefois, il existe des situations où le choix de f_e n'est pas crucial, c'est à dire dans le sens où les conséquences, sur le but poursuivi, d'un choix approximatif, restent limitées. Dans ce cas, des règles simples peuvent être établies.

En théorie, on applique bien sûr le théorème de Shannon, mais il ne faut pas perdre de vue le fait que celui-ci repose sur un certain nombre d'hypothèses.

En particulier, le théorème de Shannon suppose un spectre initial borné

- ceci implique, en pratique, un filtrage analogique et donc une modification des caractéristiques du signal. Selon les cas, ces changements peuvent avoir des conséquences non-négligeables.

Dans le cas où une reconstruction est nécessaire, il suppose une reconstruction idéale

- Bien sûr, dans la pratique, la reconstruction ne peut être que quasi-idéale, mais elle entraîne tout de même un temps de reconstruction important (ce qui est loin d'être toujours acceptable).

En pratique, il faut donc tenir compte de nombreux aspects, parfois contradictoires, parmi lesquels :

Les propriétés, spectrales essentiellement, du signal

- présence de perturbations haute fréquence,
- spectre passe-bas ou passe-bande, ...
- etc.

La méthode de reconstruction

- on peut retenir comme idée générale que plus on s'éloigne de l'interpolateur idéal, plus il faut prendre une marge importante par rapport à la condition de Shannon.

Les contraintes technologiques

- rapidité des divers organes : actionneurs, capteurs, convertisseurs, calculateur,
- temps de reconstruction.

Les objectifs poursuivis, et notamment le but de la reconstruction

- traitement du signal (vaste !),
- commande des systèmes,
- identification des systèmes,
- simulation des systèmes.

EXEMPLE : Dans de nombreuses applications de traitement du signal, le critère de choix prépondérant de la fréquence d'échantillonnage est l'erreur entre le signal d'origine et le signal reconstruit. Ainsi, si le signal considéré est une sinusoïde pure de pulsation ω_0 :

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

Dans ce cas, Shannon indique : $\omega_e \geq 2\omega_0$, soit $\frac{2\pi}{T_e} \geq 2\frac{2\pi}{T_0}$, i.e. $\frac{T_0}{T_e} \geq 2$

Ceci est valable si on suppose une reconstruction idéale par ailleurs.

Mais, si le temps de reconstruction doit être court, il faut utiliser un système de reconstruction plus rudimentaire, tel un bloqueur d'ordre 0. L'échantillonnage selon Shannon se révèle alors largement insuffisant comme on va le voir. En utilisant l'expression de l'erreur de reconstruction introduite précédemment :

$$e_{B_0} = \max_k |x_{k+1} - x_k| \leq T_e \cdot \max_t |\dot{x}(t)|$$

On peut établir pour le signal sinusoïdal : $e_{B_0 \text{ max}} = T_e \cdot \max_t [\omega_0 \cos \omega_0 t]$

soit une erreur moyenne :

$$e_{B_0} = \frac{T_e \omega_0}{2} = \frac{\pi T_e}{T_0} = \frac{\pi}{N}$$

où N représente le nombre d'échantillons par période de la sinusoïde T_0 . Si on veut une **erreur de 1 %**, il faut **N = 315 échantillons par période T₀**. Ce nombre est à comparer avec les 2 échantillons par période préconisés par le théorème de Shannon !

De façon générale, en pratique, on retiendra la règle :

$$f_e >> 2f_{\max}$$

Exemples :

Signal téléphonique, $f_{\max} = 3400 \text{ Hz}$, normes internationales : $f_e = 8000 \text{ Hz}$,

Signal vidéo TV, $f_{\max} \approx 5 \text{ MHz}$, $f_e = 18 \text{ MHz}$.

On abordera par la suite le problème spécifique du choix de la fréquence d'échantillonnage dans le contexte de l'automatique, plus particulièrement en ce qui concerne la commande de systèmes échantillonnés. D'ores et déjà, il est clair que ce choix dépendra en grande partie des caractéristiques dynamiques du processus à commander.