

ANÁLISIS NUMÉRICO I

MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

75.12

DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO

2	2 0 2 3	TRABAJO PRÁCTICO N°2
	AÑO	Resolución numérica de problemas de valores de contorno Transferencia de calor en una tubería con material aislante
	2°	
TP NRO	CUAT	TEMA

INTEGRANTES DEL GRUPO

	<div style="background-color: black; width: 100px; height: 1.2em; display: inline-block;"></div> L U C A S G A B R I E L	9 7 8 1 9
	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN
GRUPO	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN

Introducción

Se describe, que el problema en este caso particular, modelado de forma infinita y distribución axil-simétrica) está gobernado por la ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

Donde solamente se analiza la variación de las variables en la coordenada radial.

A su vez, tiene información de contorno que es dada por las ecuaciones::

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_i = h_i (T_i^\infty - T_i) \quad (2)$$

$$q_e = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_e = h_e (T_e - T_e^\infty)$$

Donde los valores de k dependen del material que se esté analizando, y los índices refieren a los valores interiores y exteriores. Los casos a analizar en este trabajo práctico son:

1. Caso tubería - aire , considerando k constante en el tiempo.
2. Caso tubería - aislante - aire, considerando que dependiendo del radio.

Objetivo

El objetivo del trabajo práctico consta en el análisis de la temperatura en función del radio, y la verificación de cuán preciso es la discretización de segundo orden.

Para la resolución a este problema, el objetivo es discretizar las ecuaciones (1) y (2) para aproximar la resolución analítica. Para esto , podemos proponer, para la ecuación dominante la discretización:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \simeq \frac{1}{\Delta x} (F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \simeq \frac{1}{2\Delta x} (F_{n+1} - F_{n-1}) \quad (3)$$

y, para la aproximación de la ecuación de contorno (2), podemos proponer la discretización finita de segundo orden centrada :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \simeq \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2\Delta x} \quad (4)$$

Una vez realizada la discretización, se procede a resolver los enunciados provistos por el TP.

Desarrollo

Parte 1 - K constante

Punto A

1a) Evaluar la solución analítica (ec. 5) utilizando los datos a continuación:

$k_i = 20 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	conductividad térmica del acero
$r_i = 0.025 \text{ m}$	radio interno de la tubería
$r_e = 0.0275 \text{ m}$	radio externo de la tubería
$h_i = 2500 \text{ W/m}^2/^\circ\text{C}$	coeficiente de convección interna (agua-acero)
$h_e = 100 \text{ W/m}^2/^\circ\text{C}$	coeficiente de convección externa (acero-aire o aislante-aire)
$T_{\infty i} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$	temperatura del agua (interna)
$T_{\infty e} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$	temperatura del aire (externa)

La ecuación 5, dada por el TP, es:

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

De donde las constantes, pueden ser calculadas mediante la resolución de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \ln(r_i) - \frac{k}{h_i r_i} & 1 \\ \ln(r_e) + \frac{k}{h_e r_e} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^\infty \\ T_e^\infty \end{bmatrix}$$

Redondeado a 4 dígitos significativos y redondeo simétrico, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -4,009 & 1 \\ 3,679 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 15 \end{bmatrix}$$

De donde, resolviendo por métodos directos, llegamos a los resultados

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.455 \\ 46.11 \end{bmatrix}$$

De donde finalmente reescribimos la ecuación 5:

$$T(r) = -8.455 \cdot \ln(r) + 46.11$$

que, calculado en los radios tanto interno como externo, el valor es

$$\begin{aligned} T(0.025 \text{ mts}) &= 77.30 \pm 0.005^\circ \text{C} \\ T(0.0275 \text{ mts}) &= 76.50 \pm 0.005^\circ \text{C} \end{aligned}$$

Punto B

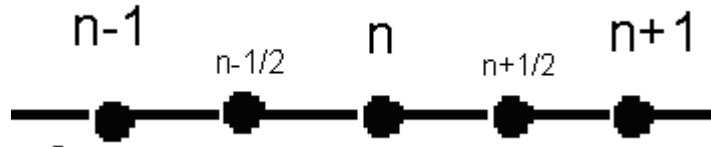
Para la parte 1, al ser un k constante, la ecuación gobernante a resolver es:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

y, aplicando las discretizaciones mencionadas en (2) queda:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r_{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n+\frac{1}{2}} - r_{n-\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n-\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (5)$$

Pero, las derivadas evaluadas en $n+\frac{1}{2}$ y en $n-\frac{1}{2}$ deben también ser centradas, para evitar perder el orden 2 buscado::



Por lo tanto, sus derivadas centradas son:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n+\frac{1}{2}} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n-\frac{1}{2}} = \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta r}$$

Por lo tanto, haciendo este reemplazo en la ecuación (5):

$$\frac{1}{\Delta r} \left(r_{n+\frac{1}{2}} \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta r} - r_{n-\frac{1}{2}} \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta r} \right) = 0$$

Donde, $r_{n+\frac{1}{2}}$ y $r_{n-\frac{1}{2}}$ implica el promedio de los radios.

Ahora, dada la última ecuación, reordenando la ecuación para dejarlas en función de las temperaturas, nos queda:

$$\frac{1}{2(\Delta r)^2} (T_{n-1}[r_n + r_{n-1}] + T_n[-r_{n-1} - 2r_n - r_{n+1}] + T_{n+1}[r_n + r_{n+1}]) = 0$$

Ahora, para las ecuaciones de contorno mostradas en (2) proponemos la discretización de (4):

$$-k_{acero} \frac{T_3 - T_1}{2 * \Delta r} = h_i(t_i^\infty - t_2)$$

$$T_1 \left[\frac{k_{acero}}{2 * \Delta r} \right] + T_2 [h_i] + T_3 \left[\frac{-k_{acero}}{2 * \Delta r} \right] = h_i t_i^\infty$$

$$-k_{acero} \frac{T_n - T_{n-2}}{2 * \Delta r} = h_e(T_{n-1} - t_e^\infty)$$

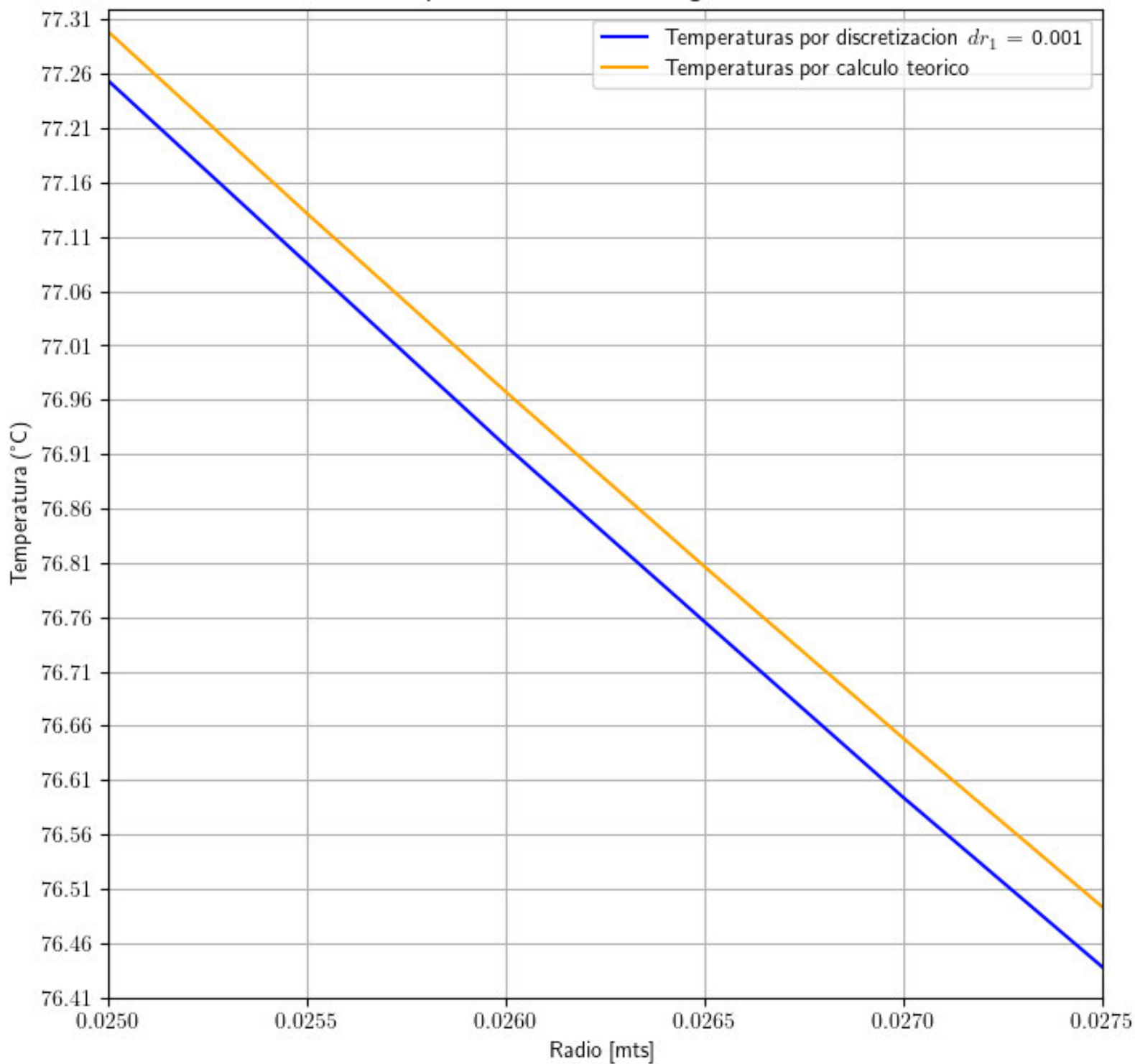
$$T_{n-2} \left[\frac{k_{acero}}{2 * \Delta r} \right] + T_{n-1} [-h_e] + T_n \left[\frac{-k_{acero}}{2 * \Delta r} \right] = -h_e t_e^\infty$$

Ya resuelto las discretizaciones, se realizó el proyecto en collab, tomando como $\Delta r = 0.001$ (desde este momento, se referirá a este paso de discretización como dr1), y se logró los siguientes resultados relevantes:

r	Temperatura
0.025	77.25432381
0.026	76.91797847
0.027	76.59432542

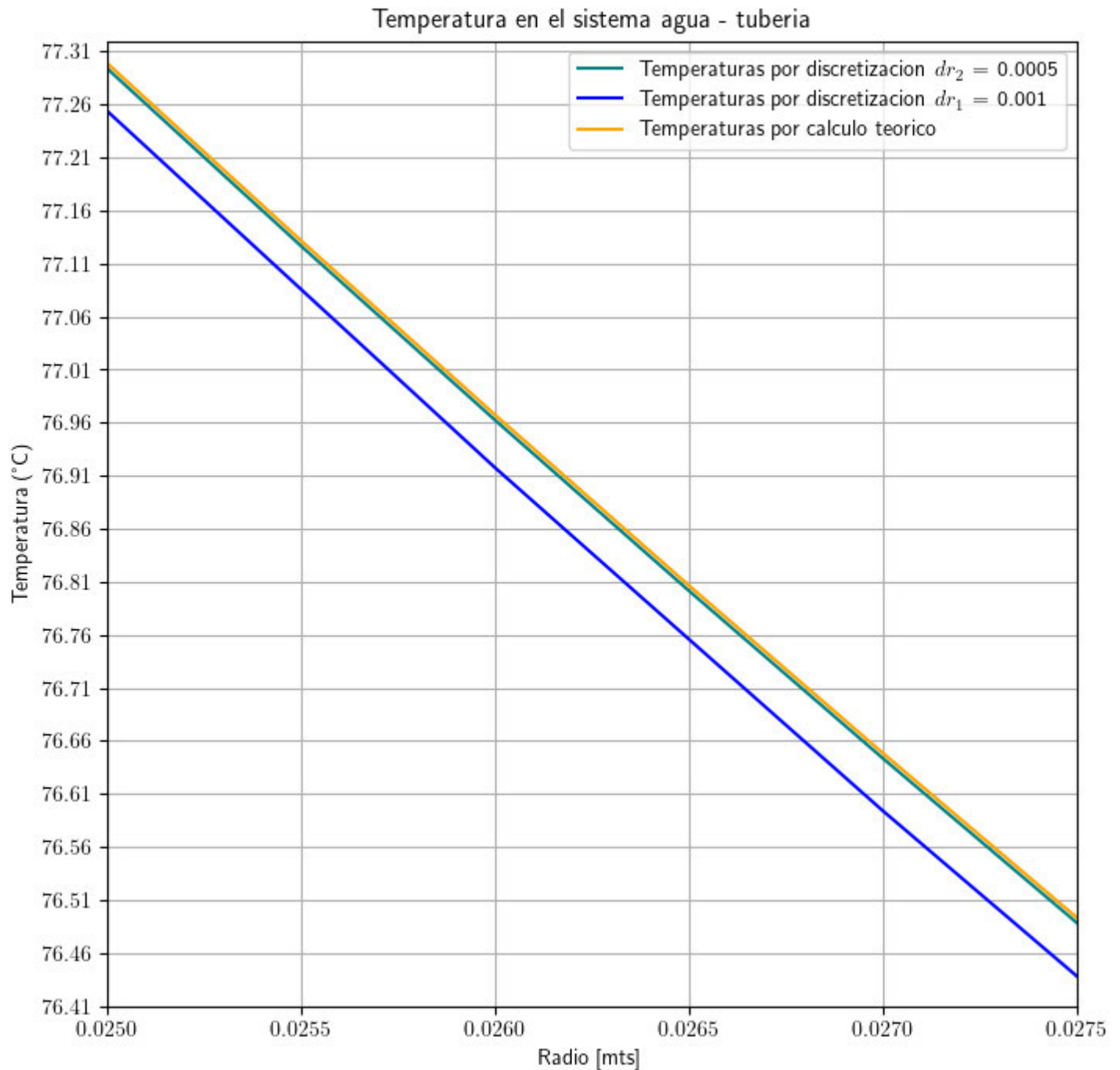
Además, se realizó un gráfico para comparar la diferencia entre lo calculado teóricamente y lo resuelto por discretización (Aclaración, de ahora en mas, para mas clara visualización, se mantiene los colores elegidos a lo largo de todo los gráficos inclusive sus respectivos errores):

Temperatura en el sistema agua - tuberia

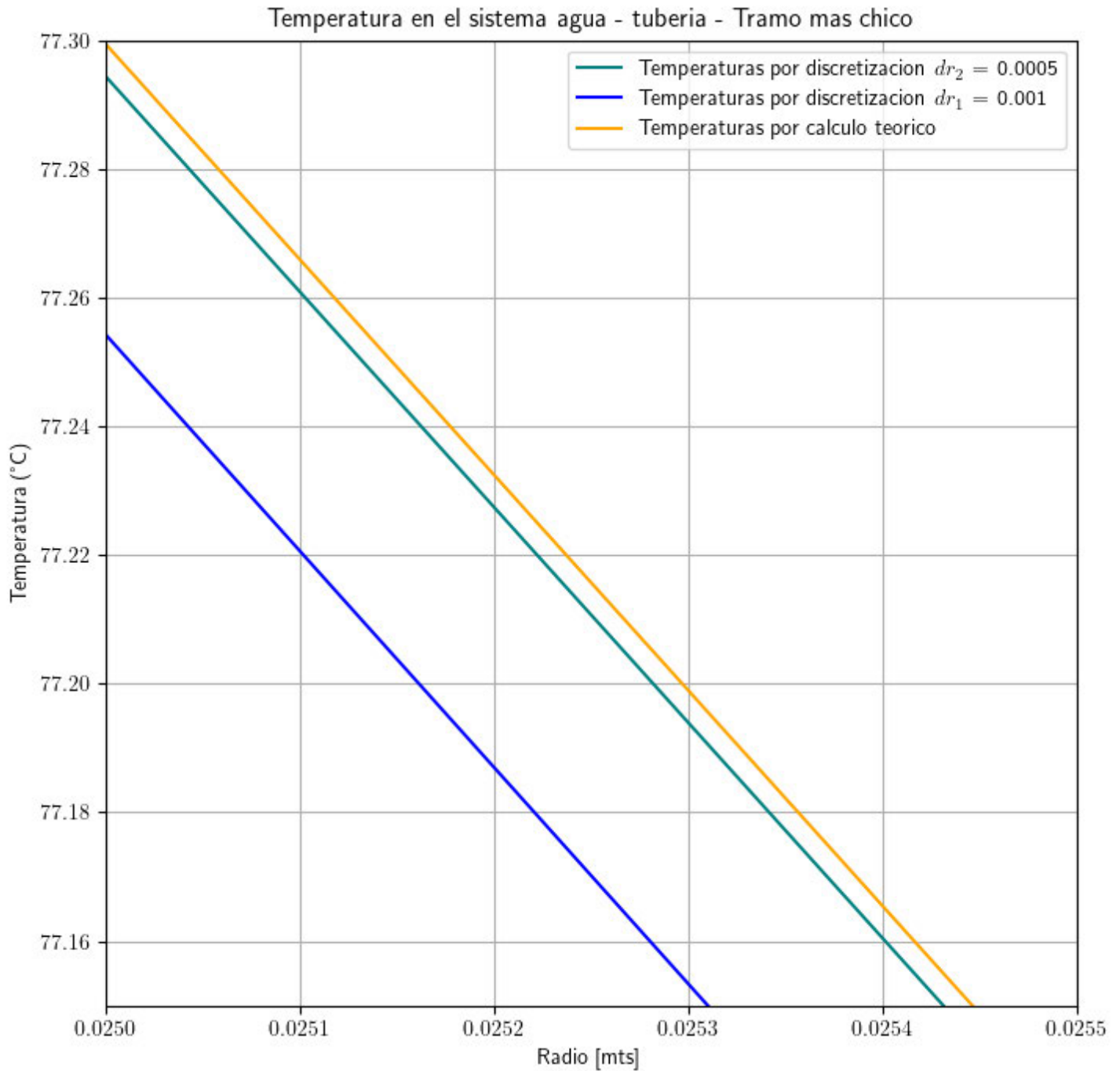


Pero, el paso de discretización en este ejemplo es muy grande, y se tomó debido a que luego, cuando se calcula el orden, queda explícito la diferencia y el salto entre los errores relativos con distintos h utilizados.

Entonces, se realizó un segundo cálculo, con un paso a la mitad del previo (es decir $\Delta r = 0.0005$ (a partir de aquí, se menciona a este paso de discretización como dr_2))



Se agrega, este gráfico con zoom, para denotar la diferencia más clara (No obstante todos los gráficos se encuentran en Collab):



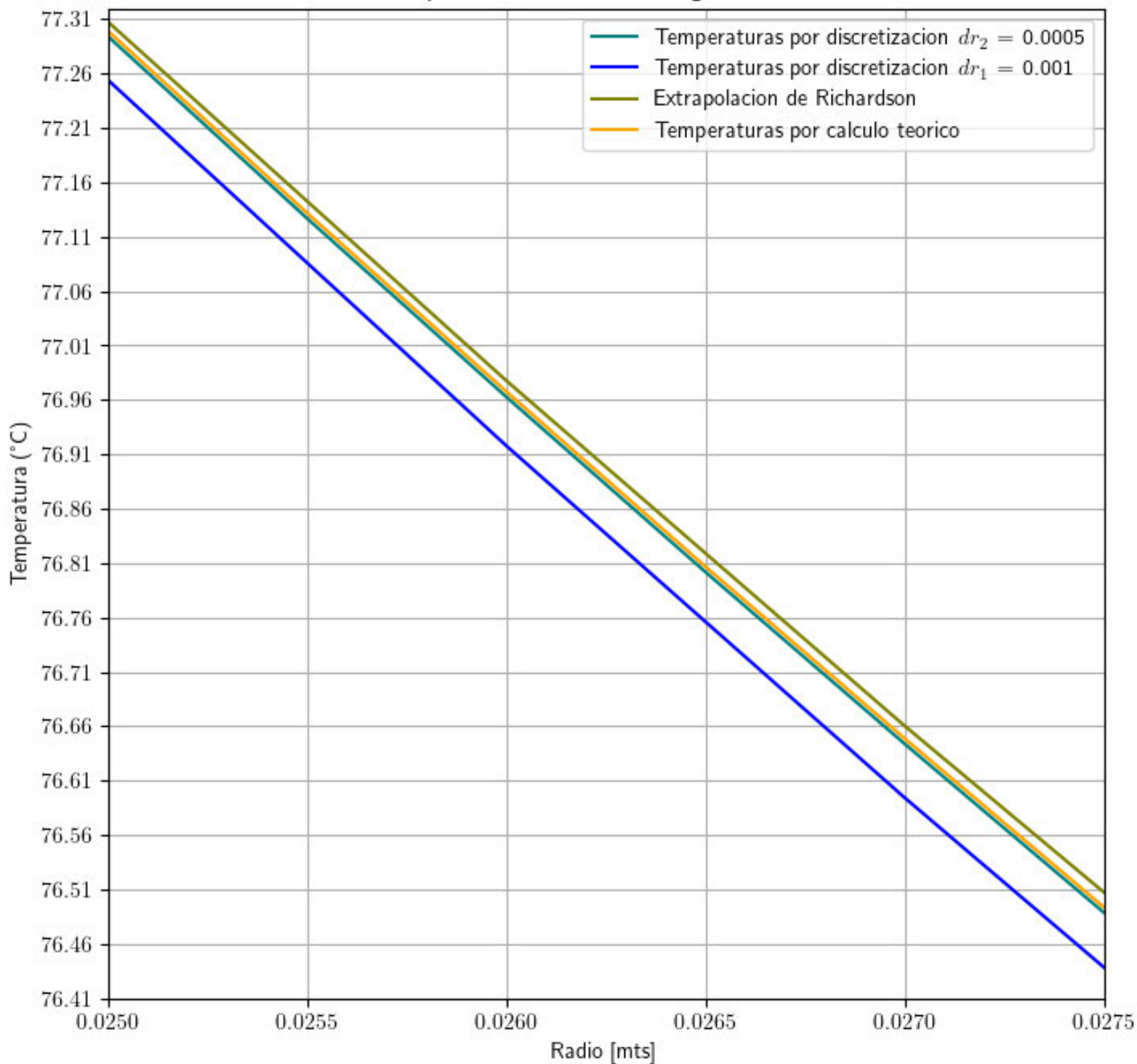
Punto C

Se realizó la extrapolación de Richardson sobre los puntos en común de los pasos $\Delta dr_2 = 0.0005$ y $\Delta dr_1 = 0.001$, y se obtuvo la siguiente tabla:

Valores de r	Temperatura extrapolada por Richardson
0.025	76.97785783842885
0.026	76.66034581659481
0,027	76.35438229177434

Además, se armó un gráfico de estas temperaturas, agregada al gráfico principal (Aclaración: Se denota que, por lo mencionado en clase, la extrapolación queda por fuera del rango de las discretizaciones y más próxima al resultado teórico).

Temperatura en el sistema agua - tuberia

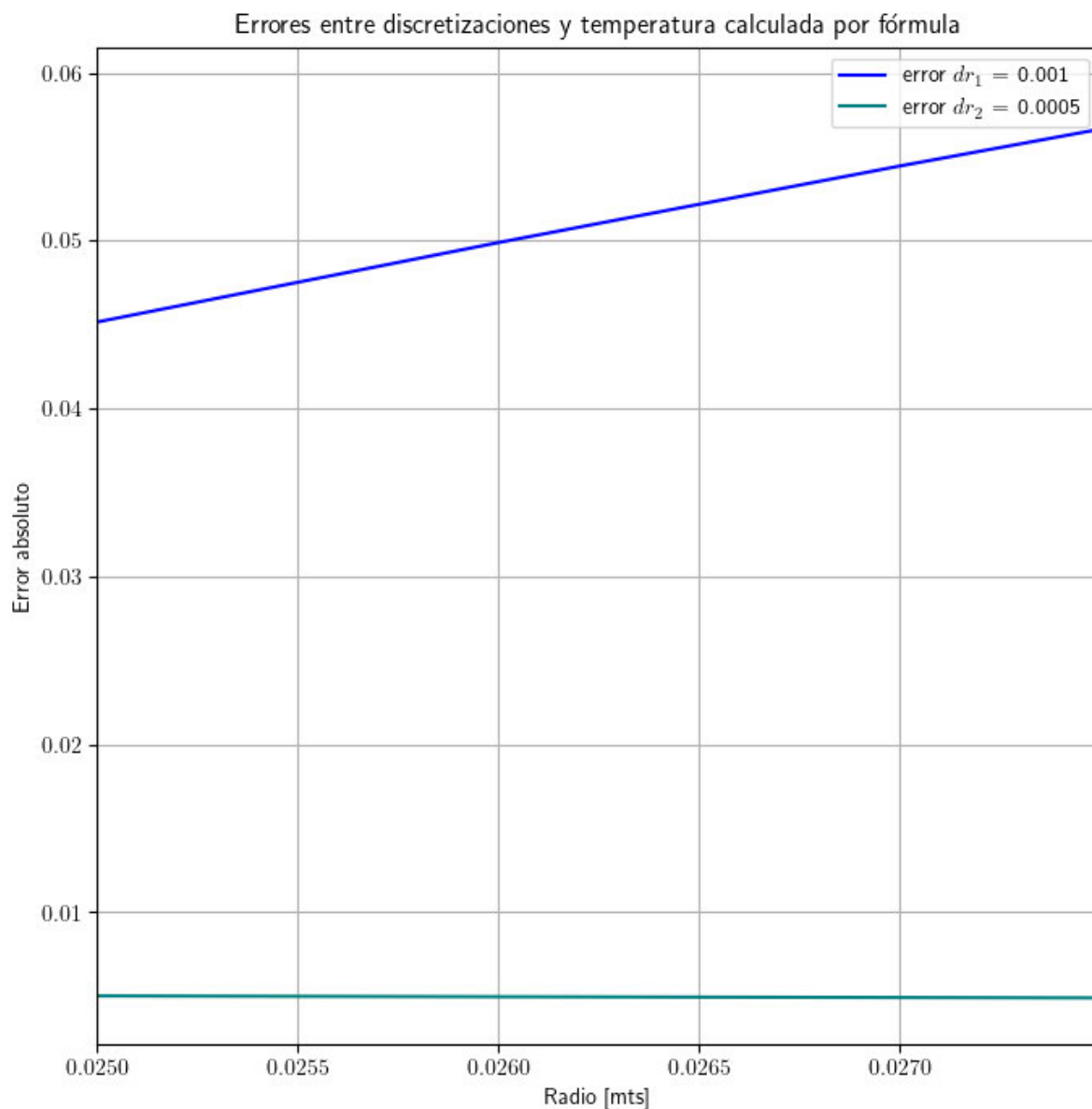


Punto D

Para realizar las conclusiones de este punto, se decidió crear un gráfico de errores, donde el error relativo está dado por:

$$e = |T_{teorica} - T_{calculada}|$$

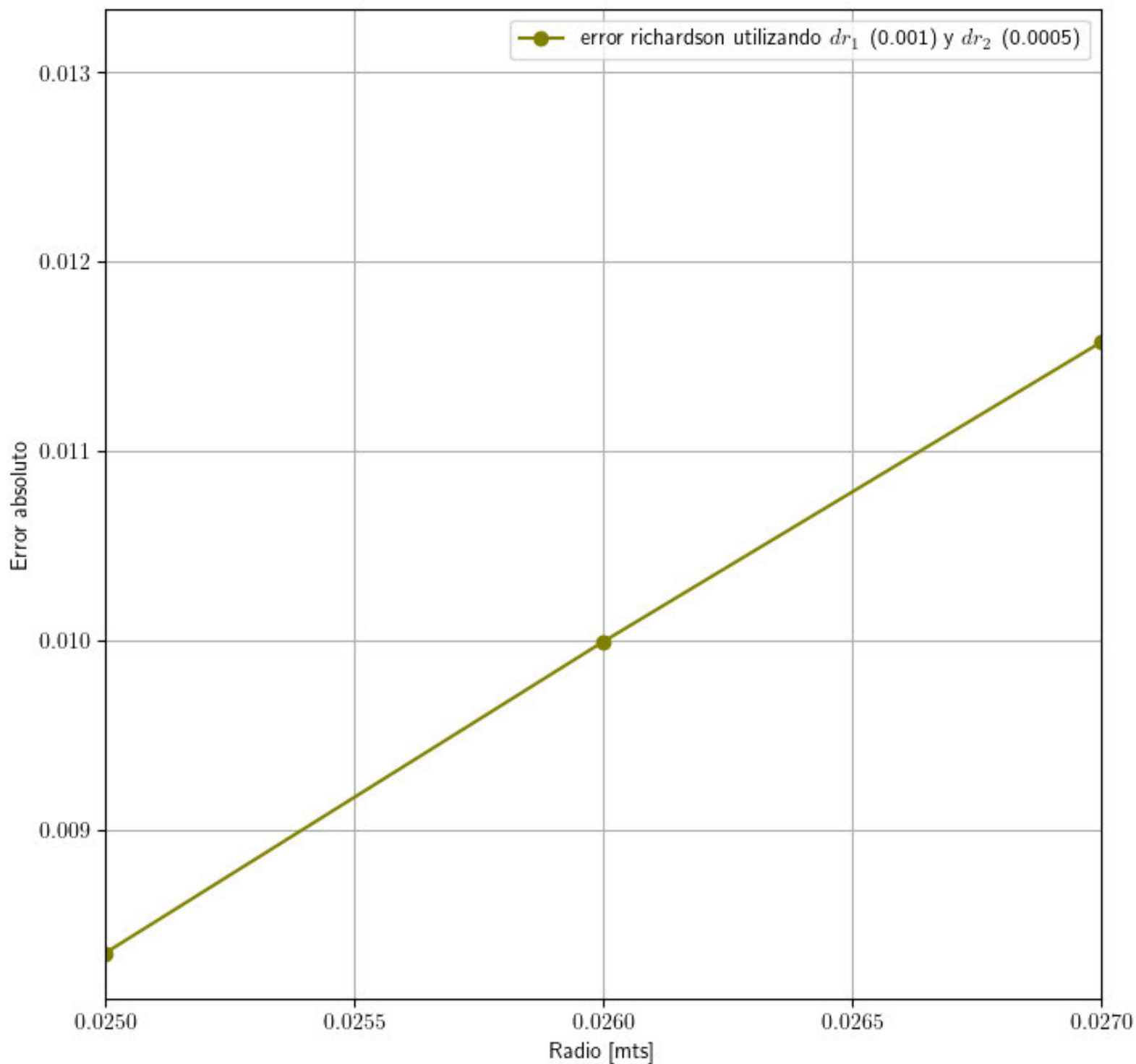
y se muestra a continuación:



Del gráfico podemos denotar, que efectivamente cuando achicamos el paso a la mitad, bajamos el error de manera considerable, y inclusive, mucho mayor al esperado (debería ser una reducción de factor 4 debido a que es de orden 2), esto puede ser debido a que se utilizaron pasos de discretización demasiados grandes respecto a las mediciones de la tubería, o ,que al aproximar el resultado de forma teórica con pocos dígitos significativos parezca que el error baja de forma anormal.

Sobre el orden que tiene Richardson, a primera instancia, podemos determinar que la solución que nos da utilizando los pasos de discretización dr_1 y dr_2 es mucho más precisa, y ésta queda por fuera de ambas soluciones. Para determinar su orden, se armó una interpolación comparando con la solución analítica.

Errores de richardson utilizando la formula teorica como base



Si comparamos el error en 0.025 entre la extrapolación de richardson y la solución otorgada por dr_1 vemos que el error aproximadamente baja con un factor de 6.

Parte 2 - K dependiente del radio

Punto A

Si k es dependiente del radio, la expresión dependiente queda de manera:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Utilizando las mismas discretizaciones propuestas en (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{1}{\Delta r} \left(k_{n+\frac{1}{2}} r_{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n+\frac{1}{2}} - k_{n-\frac{1}{2}} r_{n-\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

y, utilizando las mismas discretizaciones para la derivada (centrada) evaluada en $n+\frac{1}{2}$ y en $n-\frac{1}{2}$ nos queda:

$$\frac{1}{\Delta r} \left(k_{n+\frac{1}{2}} r_{n+\frac{1}{2}} \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta r} - k_{n-\frac{1}{2}} r_{n-\frac{1}{2}} \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta r} \right) = 0$$

De donde, los valores de k y r son los promedios de la ubicación donde está eje radial (En nuestro código, se armó un arreglo con los valores de k respectivos para los radios tanto interno como externo de la tubería y el radio del aislante).

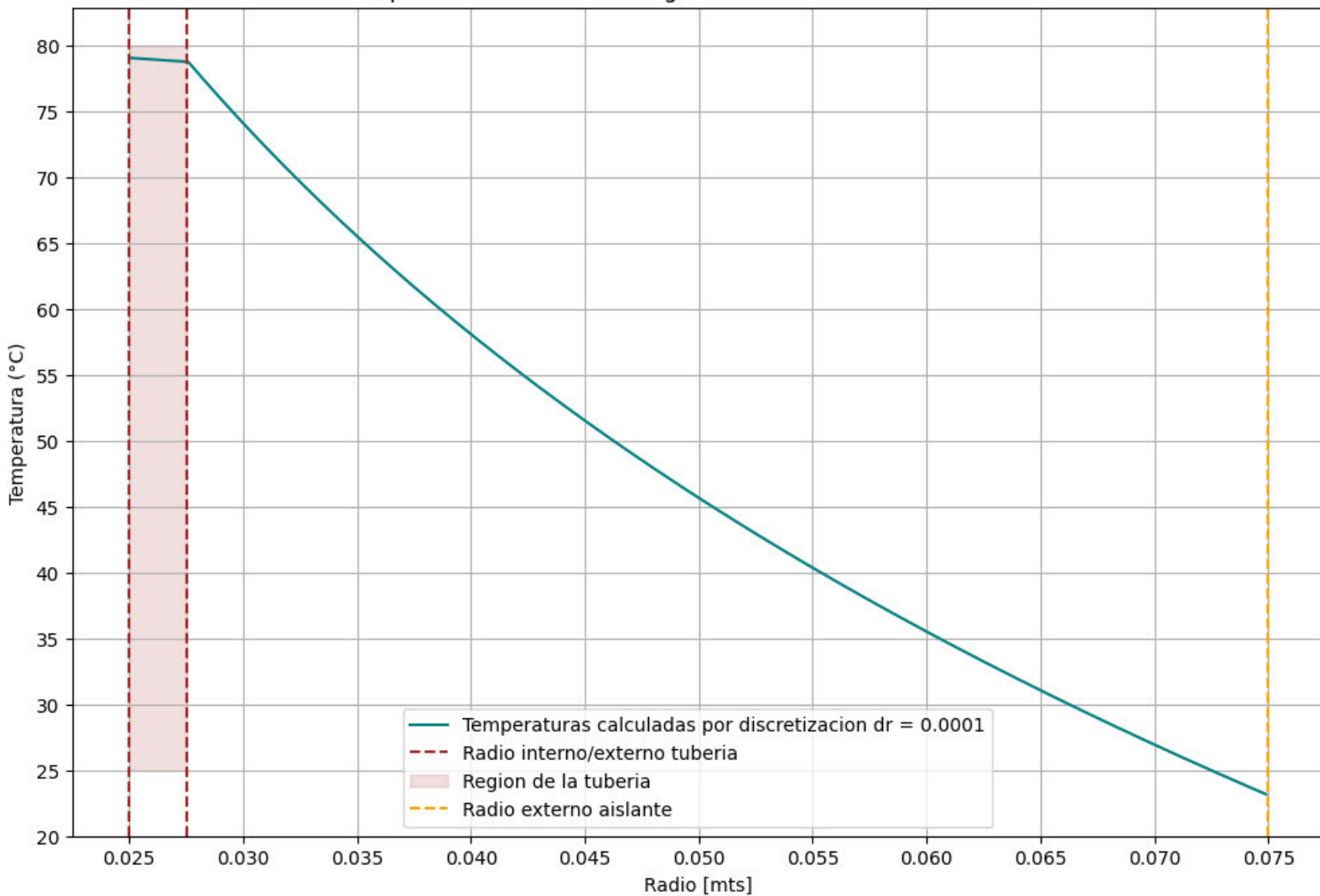
Ahora, despejando los valores de T para armar el código, nos queda:

$$\frac{1}{4(\Delta r^2)} (T_{n-1} [(k_{n-1} + k_n)(r_n + r_{n-1})] + T_n [-(k_{n+1} - k_n)(r_{n+1} + r_n) - (k_{n-1} + k_n)(r_n + r_{n-1})] + T_{n+1} [(k_{n+1} + k_n)(r_{n+1} + r_n)]) = 0$$

Dado que podemos utilizar un espesor arbitrario, se propuso que sea 0.075.

Utilizando $\Delta r = 0.0001$, se desarrolló la solución dando como gráfico solución::

Temperatura en el sistema agua - tuberia - aislante (k variable)



Punto B

Se desarrolló un algoritmo para poder encontrar iterativamente cual satisface los 2 puntos pedidos, pero el punto 1, es siempre válido y es constante dado que solo se analiza en el radio interno, por lo tanto el único punto a validar es el punto 2 el cual la temperatura del aislante externa debe ser menor a 40 grados. Gráficamente, ya se puede denotar que aproximadamente con un espesor de 0.055 estamos cerca del espesor pedido, no obstante, con un código sencillo, se logra obtener que el espesor buscado es, con mayor precisión 0.0554.

Punto C

Ahora, tenemos para discretizar la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Si utilizamos las mismas discretizaciones mostradas en (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{1}{\Delta r} \left(k(T) \Big|_{n+1/2} \cdot r \Big|_{n+1/2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n+1/2} - k(T) \Big|_{n-1/2} \cdot r \Big|_{n-1/2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{n-1/2} \right) = 0$$

Donde las evaluaciones en las funciones son el promedio, y las evaluaciones en las derivadas son las diferenciaciones centradas (que son de orden 2) mostrada en (4), finalmente nos queda

$$\frac{1}{4(\Delta r)^2} [(K(T_{n+1}) + K(T_n))(R_{n+1} + R_n)(T_{n+1} - T_n) - (K(T_n) + K(T_{n-1}))(R_n + R_{n-1})(T_n - T_{n-1})] = 0$$

Que, desarrollando, nos queda en función de las temperaturas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4(\Delta r)^2} \{ T_{n-1} [(K(T_n) + K(T_{n-1}))(R_n + R_{n-1})] \} + \\ & \frac{1}{4(\Delta r)^2} \{ T_n [-(K(T_{n+1}) + K(T_n))(R_n + R_{n+1}) - (K(T_n) + K(T_{n-1}))(R_n + R_{n-1})] \} + \\ & \frac{1}{4(\Delta r)^2} \{ T_{n+1} [(K(T_n) + K(T_{n+1}))(R_n + R_{n+1})] \} = 0 \end{aligned}$$

Conclusiones

Vemos, que el objetivo del TP era discretizar la ecuación diferencial de transmisión de calor con algún método centrado, para obtener el orden 2 buscado.

Una vez realizado los resultados tanto teóricos como prácticos, vemos cómo converge la solución a medida que se usa un paso dr más pequeño que el anterior. Los valores dr_1 y dr_2 fueron elegidos con intención antes de arrancar el trabajo práctico, debido que previamente sabíamos que, si utilizamos un método de orden 2, con un paso por la mitad, se reduce a la cuarta parte aproximadamente, pero, cuando analizamos los resultados, vemos que los pasos elegidos son demasiados grandes, también se considera la posibilidad de, al no utilizar varios dígitos significativos en la formula teórica, tal vez el factor es mas grande de lo esperado.

Luego, en la extrapolación de Richardson, vemos, que la solución obtenida queda por fuera de las soluciones dadas por dr_1 y dr_2 .

Luego, para saber el orden de la extrapolación, se desarrolló un gráfico, pero no es del todo claro el orden del método. Si queda claro que mejora la solución obtenida, una alternativa (como se mencionó previamente) que se propone es tomar pasos más pequeños para rearmar un gráfico y armar una solución analítica más precisa..

Anexo 1:

El proyecto fue realizado sobre Google Colab, se puede acceder haciendo click [aquí](#). (Se recomienda su visualización allí ya que están los registros de iteración completos, los gráficos presentados en este informe y la manera de cómo se graficó)

No obstante, se agrega el código relevante para la resolución de los problemas:

Resolución de primera parte del TP, con k constante.

```
def resolver_problema_sin_aislante(r, dr):  
    #dado un arreglo de posiciones de nodos, y un paso de discretizacion dr,  
    resolvemos el problema mencionado por el trabajo práctico  
    # inicializo la matriz  
    N = len(r)  
    A = np.zeros((N, N))  
    B = np.zeros(N)
```

Acá dejo los links de mis discretizaciones.

CONTORNO

$A[0, 0] = k_{\text{acero}} / (2 \cdot dr)$

$A[0, 1] = h_i$

$A[0, 2] = -k_{\text{acero}} / (2 \cdot dr)$

$B[0] = h_i \cdot T_{\text{agua_inf}}$

$A[N-1, N-3] = k_{\text{acero}} / (2 \cdot dr)$

$A[N-1, N-2] = -h_e$

$A[N-1, N-1] = -k_{\text{acero}} / (2 \cdot dr)$

$B[N-1] = -(h_e \cdot T_{\text{aire_inf}})$

CONTORNO

for i in range(1, N - 1):

$A[i, i-1] = (1 / (2 \cdot (dr^{**2}))) \cdot (r[i] + r[i-1])$

$A[i, i] = (1 / (2 \cdot (dr^{**2}))) \cdot (-((r[i+1] + r[i])) - (r[i] + r[i-1]))$

$A[i, i+1] = (1 / (2 \cdot (dr^{**2}))) \cdot (r[i+1] + r[i])$

$B[i] = 0$

#Ahora sí, tengo A, B, tengo que calcular $Ax = B$

$T = \text{np.linalg.solve}(A, B)$

return T

Resolución de la segunda parte del TP, con K dependiendo de la posición.

$r_i = 0.025$ ## radio interno cañería

$r_e = 0.0275$ ## radio externo cañería

$r_{e_aislante} = 0.075$ # radio externo aislante

$dr = 0.00001$ # paso discretizacion

```

r = np.arange(ri - dr, r_e_aislante + dr, dr) # Creamos todos los nodos y los nodos
T1 en conjunto con T_n+1 que son los que contienen los datos dados por la
conveccion
N = len(r)

valores_k = [ k_acero if valor_r <= re else k_aislante for valor_r in r ] # Creamos un
array con los distintos valores de K posibles para las posiciones

# inicializo la matriz
A = np.zeros((N, N))
B = np.zeros(N)

#Las condiciones de contorno se mantienen para el mismo caso que se aplique
un aislante, cambia la resolucio adentro del bucle.
A[0, 0] = k_acero / (2*dr)
A[0, 1] = hi
A[0, 2] = -k_acero / (2*dr)
B[0] = hi * T_agua_inf

A[N-1, N-3] = k_aislante/(2*dr)
A[N-1, N-2] = -he
A[N-1, N-1] = -k_aislante/(2*dr)
B[N-1] = -he * T_aire_inf

for i in range(1, N - 1):
    A[i, i-1] = (1/(4*(dr ** 2))) * ( (valores_k[i] + valores_k[i-1]) * (r[i] + r[i-1]) )
    A[i, i] = (1/(4*(dr ** 2))) * ( -( (valores_k[i+1]+valores_k[i]) * (r[i+1]+r[i]) ) - (
    (valores_k[i]+valores_k[i-1])*(r[i]+r[i-1]) ) )
    A[i, i+1] = (1/(4*(dr ** 2))) * ( ((valores_k[i+1]+valores_k[i])*(r[i]+r[i+1])) )
    B[i] = 0

#Ahora sí, tengo A, B, tengo que calcular Ax = B
T = np.linalg.solve(A, B)

```

Resolución de la búsqueda del espesor con ciertas condiciones:

```

L = 78.2
Qa = 0.0005
Rho_a = 1000
C_p_a = 4200

```

```

indice_temperatura_inicial = np.abs(r - ri).argmin()
expesor_buscado_index = np.abs(r - re).argmin() + 1 # Arrancamos desde la
posicion externa

while True:
    T_a_out = T_agua_inf - ( ( hi*(T_agua_inf - T[indice_temperatura_inicial]) * 2 *
np.pi * L * ri ) / (Qa * Rho_a * C_p_a ) )

    if ( T_agua_inf - T_a_out) < 20 and T[expesor_buscado_index] < 40 ):
        print(f"Con expesor mayor o igual a {r[expesor_buscado_index]} se logra tener
una temperatura menor a 40°C en el exterior del aislante")
        break;

    expesor_buscado_index += 1

```

Anexo 2:

Resultados para K constante, con discretización $\Delta r = 0.0005$

```

r = 0.0250 - T: 77.29444929678031
r = 0.0255 - T: 77.12704334701861
r = 0.0260 - T: 76.96288799822317
r = 0.0265 - T: 76.8018594179762
r = 0.0270 - T: 76.64384071773385
r = 0.0275 - T: 76.48872144318402

```

Resultados obtenidos con la extrapolación de richardson (Aclaración, solo los puntos que se encuentran en común con las discretizaciones de 0.001 y 0.0005):

```

0.0250 - 77.30782445877877
0.0260 - 76.97785783842885
0.0270 - 76.66034581659481 :

```