Este PDF contiene ejercicios resueltos de finales. Los ejercicios NO estan verificados, por lo tanto resolvé por tu parte nuevamente para sacarte las dudas.
Lo mismo aplica para las preguntas teóricas y ciertos items de enunciados, dado a que hay contenido que se sacó de la materia.

INDISPENSABLE: DRIVE CON EJERCICIOS DE FINAL, CLICK AQUI

Discretizaciones mas utilizadas a lo largo de la materia

| | | |
|---|---|---|
| discretizacion derivada segunda centrada) | $\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$ | $Orden\ 2$ |
| discretizacion derivada primera centrada) | $\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2h}$ | $Orden\ 2$ |
| discretizacion derivada primera en atraso con 3 puntos) | $\frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h}$ | $Orden\ 2$ |
| discretizacion derivada primera en adelanto con 3 puntos) | $\frac{-3u_n + 4u_{n+1} - u_{n+2}}{2h}$ | $Orden\ 2$ |
| discretizacion derivada primera en adelanto) | $\frac{u_{n+1} - u_n}{h}$ | $Orden\ 1$ |
| discretizacion derivada primera en adelanto) | $\frac{u_n - u_{n-1}}{h}$ | $Orden\ 1$ |

Reglas para capa límite método upwinding:

$$\text{ecuacion estilo} => \alpha u'' + \beta u' + u = 0$$

$$\text{discretizacion a elegir u'} = \begin{cases} \text{en adelanto} & \frac{u_{n+1}-u_n}{h} \quad : \ \beta > 0 \\ \text{en atraso} & \frac{u_n-u_{n-1}}{h} \quad : \ \beta < 0 \end{cases}$$

**<u>Ojo</u>** que en la teórica está al revés, pero es debido a que la derivada segunda tiene signo opuesto.

Diagonal dominante: Jacobi y SOR convergen para cualquier semilla.

Si además, A es simétrica y 0 < w < 2, SOR converge.

Necesaria y suficiente:

Teo 4) Si $\rho(\underline{\underline{T}}) = \max|\lambda_i| < 1 <=>$ el método converge

Perdón por ponerle sello a todas las hojas, pero en física me cagaron afanando mi pdf.

## 3.3 SINTESIS



| Metodo | Ventajas | Desventajas |
|---|---|---|
| **Tablas / graficos** | • Facil<br>• Rapido | • Sin precision |
| **Biseccion** | • Facil implementacion<br>• Siempre converge<br>• Pocos requisitos | • Convergencia lenta<br>• P=1 |
| **Punto fijo** | • Facil aplicacion | • Convergencia condicionada<br>• P=1 |
| **NR** | • P=2<br>• Aplicables en muchos casos practicos | • Muchos requisites<br>• Calculo de F' |
| **Secante** | • 1<P<2<br>• No require F' | • Pierde P=2 de NR<br>• No converge incondicionalmente |
| **Regula-Falsi** | • Siempre converge | • Convergencia lenta<br>• P=1 |

| n° | x | f(x) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 4,78 |
| 1 | 0,25 | 2,58 |
| 2 | 0,5 | 0,637 |
| 3 | 0,75 | -1,08 |
| 4 | 1 | -2,19 |

Integración formulitas y ejemplos.

$$I_{rect} = \sum_{i=2}^{n} \Delta * f(\frac{x_{i-1} - x_i}{2})\, \mathcal{O}(2)$$

el paso acá es 0.5 me olvidé de escribirlo

$$\therefore I_{rect} = \Delta f(0,25) + \Delta f(0.75)$$

$$I_{trap} = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + h * (\sum_{i=1}^{n-2} f(x_i))\, \mathcal{O}(2)$$

$$\therefore I_{trap} = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) + h \cdot (f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))$$

$$I_{simp} = \frac{h}{3}(f(x_o) + 2 * \sum_{pares} f(x_i) + 4 * \sum_{impares} f(x_i) + f(x_n))\;\; \mathcal{O}(4)$$

$$\therefore I_{simp} = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1))$$

Si bien los metodos mostrados acá (Trapecios y Simpsons compuestos) están bien resueltos, recomiendo que miren el PDF donde está bien el tema resumido muy bien.

## Problema 1

Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC) definido en el intervalo [0,2]

$$-2y'' + y = e^{-0.2x} \text{ con } y_{(0)} = 1 \text{ e } y'_{(2)} = -y_{(2)}$$

a) Aplicar el método de las diferencias finitas discretizando el dominio de cálculo tomando un paso $h=2/N$ utilizando operadores centrados. Dejar expresado en forma genérica el problema numérico resultante.

b) Obtener una aproximación de la solución "$y$" resolviendo el planteo anterior para el caso de $N=2$.

c) Repetir para el caso de $N=3$ utilizando únicamente los métodos vistos en el curso para su resolución.

d) Comparar los resultados obtenidos para x=2. Que comentarios puede efectuar sobre el error de estos.

$$u'' \simeq \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{h^2} \; ; u' \simeq \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} ; u \simeq u_n \quad x \to x_i \quad i = 0,1,2,\dots,N$$

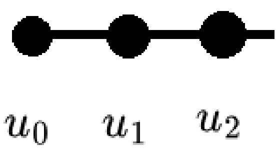
$$a \leq x_i \leq b \quad x_0 = a \; , \; x_N = b$$

Si $\Delta x$ =cte: $x_i = a + i\Delta x$, con $\Delta x = \frac{b-a}{N}$

a)

$$-2 \cdot \left(\frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\frac{4}{N^2}}\right) + U_n = e^{-0.2x_i}$$

b)




$$-2U_{n-1} + 5U_n - 2U_{n+1} = e^{-0.2x_i}$$

$$n = 0) \qquad U_0 = 1$$

$$n = 1) \qquad -2U_0 + 5U_1 - 2U_2 = e^{-0.2*1}$$

$$n = 2) \qquad \begin{cases} -2U_1 + 5U_2 - 2U_3 = e^{-0.2*2} \\ U_2' = \frac{U_3 - U_1}{2h} \Rightarrow \boxed{-U_2 \cdot 2 \cdot h + U_1 = U_3} \end{cases}$$

$$n = 0) \qquad U_0 = 1$$

$$n = 1) \qquad 5U_1 - 2U_2 = e^{-0.2*1} + 2$$

$$n = 2) \qquad -4U_1 + 9U_2 = e^{-0.2*2}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7219 \\ 0,3953 \end{bmatrix}$$

c) $$-\frac{9}{2}U_{n-1} + 10U_n - \frac{9}{2}U_{n+1} = e^{-0.2*x_i} \qquad \Delta x = \frac{2}{3}$$

$n = 0)$ $$U_0 = 1$$

$n = 1)$ $$-\frac{9}{2}U_0 + 10U_1 - \frac{9}{2}U_2 = e^{-0.2*\frac{2}{3}}$$

$n = 2)$ $$-\frac{9}{2}U_1 + 10U_2 - \frac{9}{2}U_3 = e^{-0.2*\frac{4}{3}}$$

$n = 3)$ $$\begin{cases} -\frac{9}{2}U_2 + 10U_3 - \frac{9}{2}U_4 = e^{-0.2*2} \\ U_3' = \frac{U_4 - U_2}{2h} => 2 \cdot h \cdot -U_3 = U_4 - U_2 => -\frac{4}{3}U_3 + U_2 = U_4 \\ \therefore \boxed{-9U_2 + 16U_3 = e^{-0.2*2}} \end{cases}$$

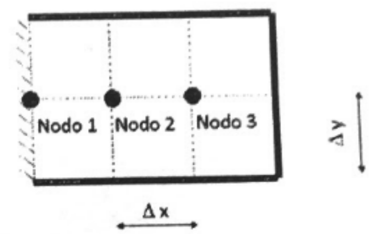
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8164 \\ 0,6196 \\ 0,3904 \end{bmatrix}$$

Lo que está sucediendo es que el paso en el punto b es mas grande comparado al paso en el punto C, por lo tanto la solucion queda mas refinada

**Problema 2**

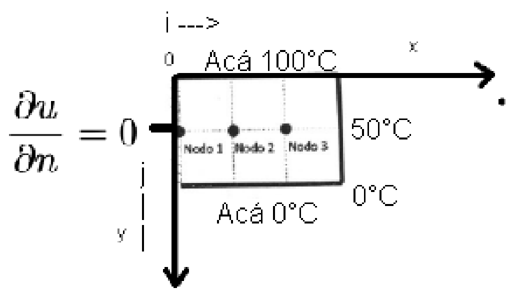
La distribución de temperaturas U de una placa homogénea en la cual se conocen las temperaturas en el contorno (Dirichlet) satisface la ecuación de Laplace. (Uxx+Uyy=0).

La placa tiene 3 cm x 2 cm. En los contornos donde la línea es gruesa la temperatura esta impuesta mientras que está aislado el resto del contorno o sea derivada nula respecto de la dirección normal al borde. En el borde horizontal superior la temperatura es de 100° y en el borde horizontal inferior es de 0°C. En cuanto al borde vertical varía linealmente.




Resolver numéricamente utilizando el método de diferencias finitas centrado tomando un paso tal que permita calcular las temperaturas en los nodos indicados en la figura. Para ello deberá resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el método de Jacobi para lo cual deberá efectuar los cambios que considere necesarios para asegurar la convergencia del método.

Que comentario puede efectuar respecto del error de la solución obtenida teniendo en cuenta todos los métodos numéricos utilizados.




Del gráfico podemos ver que delta x y delta y son iguales, con valor 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ;\ \Delta x = \Delta y = 1$$

$$x = x_o + i\Delta x$$

$$y = y_o + j\Delta y$$

$$U_{i+1\ j} + U_{i-1\ j} + U_{i\ j+1} + U_{i\ j-1} - 4U_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 => \frac{U_{n+1\ j} - U_{n-1\ j}}{2\Delta x} = 0$$

$$U_{n+1\ j} = U_{n-1\ j}$$

$$x = 0, y = 1) \quad \begin{cases} U_{11} + U_{-11} + U_{02} + U_{00} - 4U_{01} & = 0 \\ borde = U_{11} = U_{-11} & \\ \therefore 2U_{11} + \boxed{U_{02}} + \boxed{U_{00}} - 4U_{01} & = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 1) \quad U_{21} + U_{01} + \boxed{U_{12}} + \boxed{U_{10}} - 4U_{11} = 0$$

$$x = 2, y = 1) \quad \boxed{U_{31}} + U_{11} + \boxed{U_{22}} + \boxed{U_{20}} - 4U_{21} = 0$$

en cuadrado es dato

Acá deberia aplicar jacobi...
La matriz te queda encaminada para aplicarlo directamente porque es diagonal dominante

$$\begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,1538 \\ 42,3077 \\ 48,0769 \end{bmatrix}$$

**Problema 1**

Dado el problema de valores de contorno

$$y'' = 4\,(y - x) \text{ con } 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 2$$

a) discretizar el problema utilizando operadores centrados y dejar indicada la forma de calcular la solución.
b) Tomando un paso espacial ~~h=1~~ obtener una aproximación de la solución. $0{,}5 = h$
c) Repetir tomando un paso ~~h=0.5~~ $0{,}25 = h$

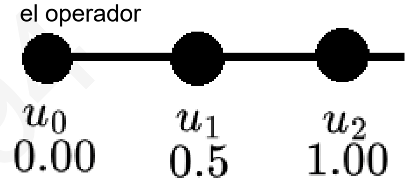
a)

$$y'' = 4y - 4x$$

$$y'' - 4y = -4x$$

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - 4u_n = -4x_i$$

Recomendación: armar este diagramita de aca abajo, a veces sirve para saber los pasos que hay que hacer, no es obligatorio, pero te puede ayudar a razonar donde estás parado para aplicar el operador




b) $$4u_{n-1} - 12u_n + 4u_{n+1} = -4x_i$$

$$n = 0) \qquad u_0 = 0$$

$$n = 1) \qquad -4u_0 - 12u_1 + 4u_2 = -4 * (0 + 1 * 0.5)$$

$$n = 2) \qquad u_2 = 2$$

$$u_1 = 0.833$$

c) Misma discretización que A pero distinto h $16u_{n-1} - 36u_2 + 16u_{n+1} = -4x_i$

$$n = 0) \qquad u_0 = 0$$

$$n = 1) \qquad 16u_0 - 36u_1 + 16u_2 = -4 * (0 + 1 * 0,25)$$

$$n = 2) \qquad 16u_1 - 36u_2 + 16u_3 = -4 * (0 + 2 * 0,25)$$

$$n = 3) \qquad 16u_2 - 36u_3 + 16u_4 = -4 * (0 + 3 * 0,25)$$

$$n = 1) \qquad u_4 = 2$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3951 \\ 0,8265 \\ 1,3396 \end{bmatrix}$$

**Problema 1**

El problema de transferencia de calor estacionario en una barra de sección A variable responde a la siguiente ecuación diferencial

$$kA\frac{d^2T}{dx^2}+k\frac{dA}{dx}\frac{dT}{dx}+Q=0$$

donde T es la temperatura en K y A = 0,25 m2 + x 0,2 m donde x es una coordenada longitudinal que se mide en metros mientras que k=100 W/Km y Q=10 W/m (conductividad térmica y fuente de calor respectivamente). Considerar que la barra tiene 1,5 m de longitud y que en el extremo izquierdo (x=0) la temperatura es de 40 K y en el otro extremo es adiabático (dT/dx=0).

Se pide:

a) Plantear la resolución por el método de diferencias finitas centradas
b) Calcular la distribución de temperaturas considerando un espaciamiento uniforme Dx=0,5 m
c) Con respecto al punto anterior, hay algún caso en el que el problema numérico resultante carezca de solución única.

a) $$100(0.25+x_i*0.2)(\frac{T_{n+1}-2T_n+T_{n-1}}{h^2})+100*0.2*(\frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2h})+10=0$$

$$L=1.5m$$

$$T(x=0)=40\ K$$

$$T'(x=L)=0$$

b) $x_i=x_0+n*h$

h = 0.5 $$\begin{cases} x_i=0 & : n=0 \\ x_i=0.5 & : n=1 \\ x_i=1 & : n=2 \\ x_i=1.5 & : n=3 \end{cases}$$

$$(100+x_i*80)(T_{n+1}-T_n+T_{n-1})+20(T_{n+1}-T_{n-1})+10=0$$

$$T_{n-1}[(100+x_i*80)-20]+T_n[-100-x_i*80]+T_{n+1}[(100+x_i*80)+20]=-10$$

$$n=0) \qquad T_0=40K$$

$$n=1) \quad T_0(120)+T_1(-140)+T_2(160)=-10$$

$$n=2) \quad T_1(160)+T_2(-180)+T_3(200)=-10$$

$$n=3) \qquad T_3^{'}=\frac{T_4-T_2}{2h}=0 \therefore T_4=T_2$$

$$T_2(200)+T_3(-220)+T_2(240)=-10$$

$$\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18,7083\\-13,6928\\-27,3401\end{bmatrix}$$

Puede llegar a estar mal, pero la base del ejercicio está.

Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi/2) = 0$$

Se pide:

a) Dejar expresado en forma genérica el sistema de ecuaciones lineales que surge de aplicar el método de diferencias finitas de forma tal que el error de discretización sea de orden 2. (Asumir que el dominio se discretiza en N partes iguales).

b) Calcular la solución aproximada en x=π/4 usando N=2 y N=4.

c) Sabiendo que la solución analítica del PVC planteado es y=cos(x) verificar experimentalmente el orden del error de truncamiento correspondiente al valor de x analizado en el punto b).

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + u_n = 0 \quad y(0) = 1 \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

a)

$$N_2 = 2 \quad h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$N_4 = 4 \quad h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$x = x_0 + n * h$$

$$h = \frac{\pi}{4})$$

$$u_0 = 1 \qquad : n = 0$$

$$\frac{16}{\pi^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + u_n = 0 \qquad : n = 1$$

$$u_2 = 0 \qquad : n = 2$$

$$h = \frac{\pi}{4})$$

$$u_0 = 1 \qquad : n = 0$$

$$\frac{16}{\pi^2}u_0 + (\frac{-32}{\pi^2} + 1)u_n + \frac{16}{\pi^2}u_2 = 0 \qquad : n = 1$$

$$u_2 = 0 \qquad : n = 2$$

$$u_1 = 0.7229$$

$$h = \frac{\pi}{8})$$

$$u_0 = 1 \qquad : n = 0$$

$$\frac{64}{\pi^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + u_n = 0 \qquad : 1 <= n <= 3$$

$$u_4 = 0 \qquad : n = 4$$

$$h = \frac{\pi}{8})$$

$$u_0 = 1 \qquad : n = 0$$

$$\frac{64}{\pi^2}u_0 + (\frac{-128}{\pi^2} + 1)u_1 + \frac{64}{\pi^2}u_2 = 0 \qquad : n = 1$$

$$\frac{64}{\pi^2}u_1 + (\frac{-128}{\pi^2} + 1)u_2 + \frac{64}{\pi^2}u_3 = 0 \qquad : n = 2$$

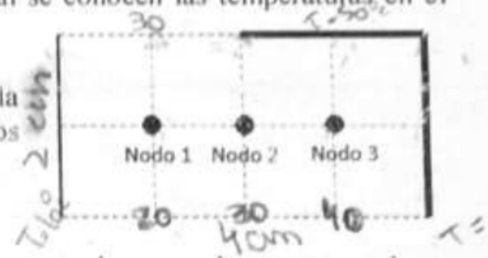
$$\frac{64}{\pi^2}u_2 + (\frac{-128}{\pi^2} + 1)u_3 + \frac{64}{\pi^2}u_4 = 0 \qquad : n = 3$$

$$u_4 = 0 \qquad : n = 4$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9266 \\ 0,7105 \\ 0,3849 \end{bmatrix}$$

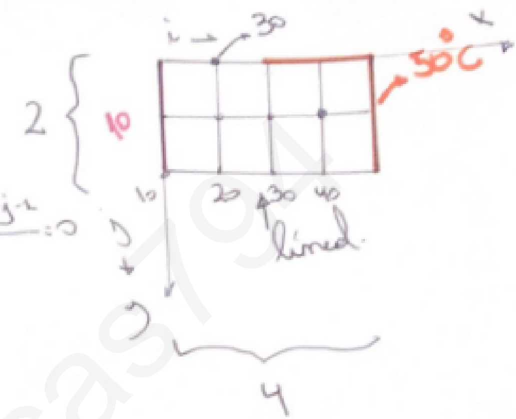
La distribución de temperaturas U de una placa homogénea en la cual se conocen las temperaturas en el contorno satisface la ecuación de Laplace. ($U_{xx}+U_{yy}=0$).

La placa tiene 2 cm x 4 cm. En los contornos donde la línea es gruesa la temperatura vale 50°C y en donde es fina 10 °C. En los contornos punteados la temperatura varía linealmente.




Resolver numéricamente utilizando el método de diferencias finitas centrado tomando un paso tal que permita calcular las temperaturas en los nodos indicados en la figura. Para ello deberá resolver el sistema de ecuaciones lineales planteado usando el método de eliminación de Gauss.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$




$$\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{\Delta x^2}=0$$

$\Delta y = 1 \qquad x = x_0 + i\Delta x$

$\Delta x = 1 \qquad y = y_0 + i\Delta y$

$\therefore U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}-4U_{i,j}=0.$

$i=1;j=1)\quad U_{21}+\underline{U_{01}}+\underline{U_{12}}+\underline{U_{10}}-4U_{11}=0$

$i=2;j=1)\quad U_{31}+U_{11}+\underline{U_{22}}+\underline{U_{20}}-4U_{21}=0$

$i=3;j=1)\quad U_{41}+U_{21}+\underline{U_{32}}+\underline{U_{30}}-4U_{31}=0$

Subrayo los datos

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -60 \\ -80 \\ -90 \end{bmatrix} \quad f_2 - m_{21}f_1 \left(m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & -3{,}75 & 1 & -95 \\ 0 & 1 & -4 & -90 \end{array}\right] f_3 - m_{32}f_2 \quad m_{32}=\frac{a_{32}}{a_{22}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & -3{,}75 & 1 & -95 \\ 0 & 0 & -3{,}73 & -115{,}33 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} U_{11} = 21{,}93\,°C \\ U_{21} = 27{,}73\,°C \\ U_{31} = 30{,}92\,°C. \end{cases}$$

Dado el siguiente problema diferencial:

github: lucas794

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Q(x) \qquad -1 \le x \le 1 \qquad y(-1) = 1 \qquad \frac{dy}{dx}(1) = 1 \qquad Q(x) = \begin{cases} 4x^2 & 0 \le |x| \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le |x| \le 1 \end{cases}$$

acá hay un incluido que está de mas, asumo que es el que está abajo y el de arriba es solo menor

a) Discretice el problema matemático mediante el método de diferencias finitas a orden 2. Utilice un paso de discretización $\Delta x$ arbitrario y uniforme, obtenido al dividir el intervalo de trabajo en $N$ segmentos. Justifique cada etapa de discretización.

b) Resuelva para el caso $N$=3.

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = Q(x_i) = \begin{cases} 4(x_i)^2 & : 0 \leqslant |x_i| < \frac{1}{2} \\ 1 & : \frac{1}{2} \leqslant |x_i| \leqslant 1 \end{cases} ; x_i = x_0 + nh (x_0 = -1)$$

$$h = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \therefore u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = Q(x_i)$$

$\boxed{n = 0, x_i = -1}$ $\qquad u_0 = 1$

$\boxed{n = 1, x_i = 0}$ $\qquad u_0 - 2u_1 + u_2 = 4 \cdot (0)^2$ $\qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{n = 2, x_i = 1}$ $\qquad \begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 = 1 \\ u_2' = \frac{u_3 - u_1}{2h} => 2 + u_1 = u_3 \\ \therefore 2u_1 - 2u_2 = -1 \end{cases}$

$$h = \frac{2}{3} \therefore \boxed{\frac{9}{4}u_{n-1} - \frac{9}{2}u_n + \frac{9}{4}u_{n+1} = Q(x_i)}$$

$n = 0, x_i = -1)$ $\qquad u_0 = 1$

$n = 1, x_i = -\frac{1}{3})$ $\qquad \frac{9}{4}u_0 - \frac{9}{2}u_1 + \frac{9}{4}u_2 = 4(-\frac{1}{3})^2$

$n = 2, x_i = \frac{1}{3})$ $\qquad \frac{9}{4}u_1 - \frac{9}{2}u_2 + \frac{9}{4}u_3 = 4(\frac{1}{3})^2$ $\qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4444 \\ 1,6914 \\ 2,1358 \end{bmatrix}$

$n = 3, x_i = 1)$ $\qquad \begin{cases} \frac{9}{4}u_2 - \frac{9}{2}u_3 + \frac{9}{4}u_4 = 1 \\ u_3' = \frac{u_4 - u_2}{2h} => \frac{4}{3} + u_2 = u_4 \\ \therefore \frac{9}{2}u_2 - \frac{9}{2}u_3 = -2 \end{cases}$

Dado el siguiente problema diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos(\pi x) \qquad -1 \le x \le 1 \qquad y(-1) = 0 \qquad y(1) + \frac{dy}{dx}(1) = 1$$

a) Discretice el problema matemático mediante el método de diferencias finitas a orden 2. Utilice un paso de discretización $\Delta x$ arbitrario y uniforme, obtenido al dividir el intervalo de trabajo en $N$ segmentos. Justifique cada etapa de discretización.

b) Resuelva para el caso $N$=4.

Se resuelve exactamente de la misma manera, solo cambia la formula del nodo fantasma con el borde y(1)
(Si mantenemos la misma numeracion del ej anterior : u2 + u'2 = 1. y u'2 es (u3 - u1)/2h despejas u3 y sale.

Considere el siguiente problema matemático:



$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \beta\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 e^{-\frac{y}{\alpha}} \qquad t \geq 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

con g = 9.8 , $y_0$ = 40,000 , α = 7000 y β' = 0.005

a) Discretizar el problema matemático utilizando el método RK2.
b) Avanzar numéricamente la solución durante 3 pasos, para un paso h=0.1.

Método RK2 para la ecuación diferencial dy/dt = f(y,t) :

$$u_{n+1}^* = u_n + k\, f(u_n, t_n)$$
$$u_{n+1} = u_n + k/2\, [\, f(u_n, t_n) + f(u_{n+1}^*, t_{n+1})\,]$$

$$y(t_n) = u$$
$$u' = v \qquad u' = f(u, v, t)$$
$$v' = -g + \beta(v)^2 * e^{\frac{-u}{\alpha}} \qquad v' = f(u, v, t)$$
$$t_n = t_0 + n * h$$

$$u_{n+1}^* = u_n + k \cdot v_n \qquad predictor$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{k}{2}(v_n + v_{n+1}^*) \qquad corrector$$

$$v_{n+1}^* = v_n + k \cdot (-g + \beta(v_n)^2 e^{\frac{-u_n}{\alpha}}) \qquad predictor$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{k}{2}(-g + \beta(v_n)^2 e^{\frac{-u_n}{\alpha}} + (-g + \beta(v_{n+1}^*)^2 e^{\frac{-u_{n+1}^*}{\alpha}})) \qquad corrector$$

$$\left.\begin{array}{l} 1) Se\ resuelve\ u_{n+1}^* \\ 2) Se\ resuelve\ v_{n+1}^* \end{array}\right\} \quad predictor$$
$$\left.\begin{array}{l} 3) Se\ resuelve\ u_{n+1} \\ 4) Se\ resuelve\ v_{n+1} \end{array}\right\} \quad corrector$$

No lo terminé, y me di cuenta que está resuelto en la practica y efectivamente está bien planteado, es solo armar las tablitas y empezar a hacer las iteraciones que te piden.

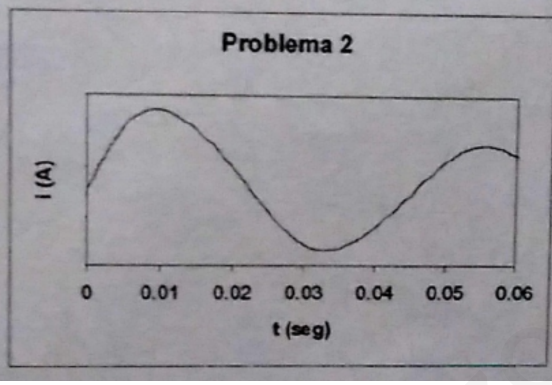
**a)** Discretizar el siguiente PVI aproximando todas las derivadas a orden 2:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+3i^2\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \qquad t\geq 0$$

$$i(0)=0 \qquad \frac{di}{dt}(0)=\frac{V}{L}$$

**b)** Sabiendo que la solución del problema es como la mostrada en la figura, seleccionar un paso de discretización adecuado.

**c)** Estimar el pico de la función, que ocurre en el primer cuarto de onda. Datos: $C$=1000µF, $L$=50 mH y $V$=15V.




$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=\frac{-3i^2\frac{\partial i}{\partial t}}{L}-\frac{Li}{C}$$

$$\begin{cases} V & =15V \\ L & =0.05H \\ C & =0.001F \\ \boxed{\mathrm{i}(0)=0 \quad \frac{\partial i}{\partial t}(0)=\frac{V}{L}} & \end{cases}$$

$$y(t_n)=u$$

$$u'=v$$

$$v'=\frac{-3u^2v}{L}-\frac{Lu}{C} \qquad \begin{array}{l} u'=f(u,v,t) \\ v'=f(u,v,t) \end{array}$$

$$u_{n+1}=u_n+hv_n$$

$$v_{n+1}=v_n+h\left(\frac{-3u_n^2v_n}{L}-\frac{Lu_n}{C}\right)$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 197 | h | 0,01 | | | |
| 198 | | | | | |
| 199 | n | u_n | v_n | u_n+1 | v_n+1 |
| 200 | 0 | 0 | 300 | 3 | 300 |

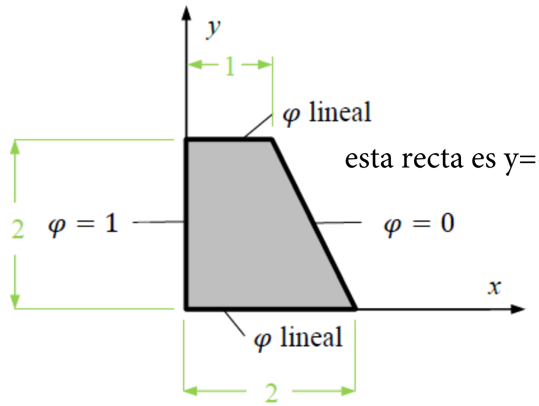
y la solución original es y(0.01) aproximadamente a 2.21 asi que se podría decir que es una muy buena aprox
Hice tambien por mi parte una resolución RK-2 y dió 2.6 asi que por ser un ejercicio de examen, tiene sentido y da aproximadamente muy bien.

5. Dada la siguiente ecuación diferencial en 2D:



$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi=2x+2y+2$$

con condiciones de contorno (Dirichlet):




esta recta es y=-2x +4 , por lo tanto tiene normal (2,1)

a) Discretizar la ecuación diferencial utilizando operadores de orden 2, y el dominio utilizando pasos $\Delta x = 0{,}5$ y $\Delta y = 1$.

b) Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

$$\frac{\varphi_{i+1\ j}-2\varphi_{i\ j}+\varphi_{i-1\ j}}{\Delta x^2}+\frac{\varphi_{i\ j+1}-2\varphi_{i\ j}+\varphi_{i\ j-1}}{\Delta y^2}-(\frac{\varphi_{i+1\ j}-\varphi_{i-1\ j}}{\Delta x})-(\frac{\varphi_{i\ j+1}-\varphi_{i\ j-1}}{\Delta y})+\varphi_{i\ j}=2x_i+2y_i+2$$

$$\varphi_{i-1\ j}(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta x})+\varphi_{i+1\ j}(\frac{1}{\Delta x^2}-\frac{1}{\Delta x})+\varphi_{i\ j-1}(\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta y})+\varphi_{i\ j+1}(\frac{1}{\Delta x^2}-\frac{1}{\Delta y})+\varphi_{i\ j}(\frac{-2}{\Delta x^2}+\frac{-2}{\Delta y^2})+1=2x_i+2y_i+2$$

$$6\varphi_{i-1\ j}+2\varphi_{i+1\ j}+2\varphi_{i\ j-1}-10\varphi_{i\ j}=2x_i+2y_i+1$$

$$x_i=x_0+n\Delta x$$

$$y_i=y_0+n\Delta y$$

$$x=1,y=1)6\varphi_{0\ 1}+2\varphi_{2\ 1}+2\varphi_{1\ 0}-10\varphi_{1\ 1}=4$$

$$x=2,y=1)6\varphi_{1\ 1}+2\varphi_{3\ 1}+2\varphi_{2\ 0}-10\varphi_{2\ 1}=5$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_{0\ 0}\\ \varphi_{1\ 0}\\ \varphi_{2\ 0}\\ \varphi_{2\ 1}\\ \varphi_{2\ 2}\\ \varphi_{0\ 1}\\ \varphi_{0\ 2}\\ \varphi_{0\ 3}\\ \varphi_{0\ 4}\\ \varphi_{3\ 1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0.5\\ 0\\ 0.75\\ 0.50\\ 0.25\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Lo que buscamos:

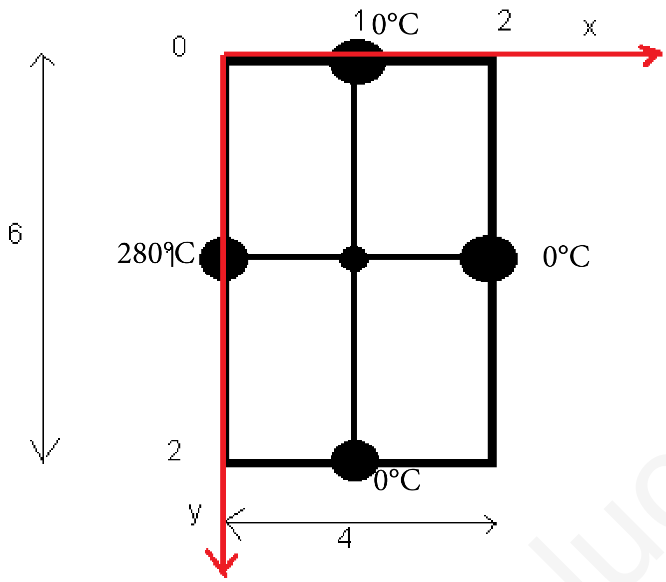
$$\varphi_{1\ 1}=0.35$$

$$\varphi_{2\ 1}=-0.09$$

(No se si está bien, ni idea)

**Problema 1**

Una placa rectangular de metal cuyas dimensiones son 6m y 4m se encuentra aislada de forma tal que solamente puede intercambiar calor a través de sus bordes laterales. Por este motivo la temperatura $u$ en los distintos puntos de la placa satisface la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$. En uno de los contornos más largos la temperatura de este se puede asemejar a una distribución senoidal con un valor máximo de 280 °C en el centro y 0°C en sus extremos. El resto de los contornos se encuentran a 0°C. **a)** Estimar la temperatura en el centro de la placa utilizando algún método numérico apropiado para este problema. **b)** Calcular el error de la estimación en a) utilizando un método matemático para efectuar el cálculo de la temperatura en el centro de la placa.




$$x_i = x_0 + n\Delta x$$
$$y_i = y_0 + n\Delta y$$
$$\Delta x = 2$$
$$\Delta y = 3$$



$$\frac{u_{i+1\ j} - 2u_{i\ j} + u_{i-1\ j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i\ j+1} - 2u_{i\ j} + u_{i\ j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\frac{u_{i+1\ j} - 2u_{i\ j} + u_{i-1\ j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i\ j+1} - 2u_{i\ j} + u_{i\ j+1}}{\Delta y^2} = 0$$
$$\frac{1}{4}(u_{i+1\ j} + u_{i-1\ j}) + \frac{1}{9}(u_{i\ j+1} + u_{i\ j-1}) - \frac{13}{18}u_{i\ j} = 0$$

$$u_{1\ 1} = 96.92^\circ C$$

El punto B es una formula que no se ve en los temas de la materia (a 2C2023, lo mas cerca que vimos fue la discretización de calor para el TP1)

**Problema 2**

Dado el siguiente problema de valores de contorno: $u'' + u = 0$

con $u(x=0) = 0$ , $u'(x=1) = 1$ $0 \leq x \leq 1$

a) Plantear en forma genérica y detallada su resolución numérica utilizando diferencias finitas centradas de segundo orden para todos los operadores.

b) Resolver utilizando una discretización constituida por 3 nodos equidistanciados (o sea uno en cada extremo y otro en el centro).

c) Plantear la resolución reduciendo el paso espacial ($\Delta x$) a la mitad. Indicar dos posibles formas alternativas de obtener la solución.

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + u_n = 0$$

Si te piden 3 nodos, 2 en los extremos y uno en el medio, el paso es h=0.5

$$4u_{n-1} - 7u_n + 4u_{n+1} = 0 \qquad x_i = x_0 + nh$$

$$n = 0) \qquad u_0 = 0$$

$$n = 1) \qquad -7u_1 + 4u_2 = 0$$

$$uso\ derivada\ primera\ en\ atraso$$

$$n = 2) \qquad u_2' = \frac{3u_2 - 4u_1 + u_0}{2h} => -4u_1 + 3u_2 = 1$$

Usé derivada primera en atraso solo para cambiar un poco, no por algo en específico

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

h=0.25 $16u_{n-1} - 31u_n + 16u_{n+1} = 0$

$$n = 0) \qquad u_0 = 0$$

$$n = 1) \qquad -31u_1 + 16u_2 = 0$$

$$n = 2) \qquad 16u_1 - 31u_2 + 16u_3 = 0$$

$$n = 3) \qquad 16u_2 - 31u_3 + 16u_4 = 0$$

$$n = 4) \qquad u_4' = \frac{u_5 - u_3}{2h} => \boxed{u_5 = 0.5 + u_3}$$

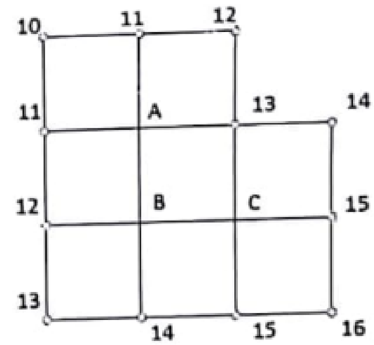
$$n = 4) \qquad 32u_3 - 31u_4 = -8$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4646 \\ 0,9002 \\ 1,2795 \\ 1,5788 \end{bmatrix}$$

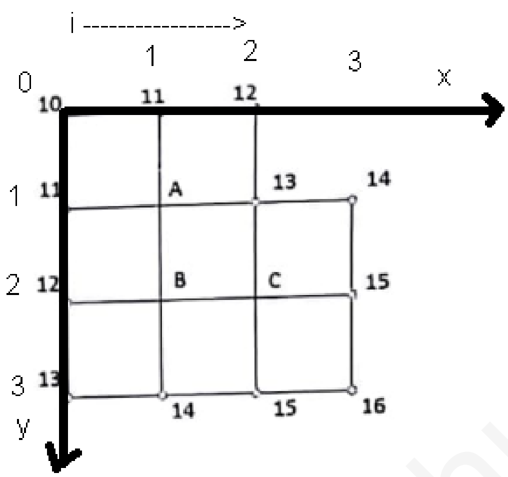
**Problema 2**

En el interior de la siguiente figura se verifica que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y en sus contornos se encuentra especificado el valor de $u$, lo cual constituye un problema de valore de contorno (considerar "$x$" horizontal e "$y$" vertical). Al plantear una resolución numérica por diferencias finitas de acuerdo con la discretización indicada en la figura quedan definidos tres nodos (A, B y C) donde calcular la solución aproximada.

a) plantear las ecuaciones resultantes de utilizar operadores centrados de segundo orden
b) resolver las ecuaciones planteadas a los efectos de calcular los valores de u en A, B y C proporcionados por el método numérico planteado.
c) discutir acerca del error que presentan los resultados previamente obtenidos.




$$\frac{u_{i+1\ j} - 2u_{ij} + u_{i-1\ j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i\ j+1} - 2u_{ij} + u_{i\ j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad tomo\ \Delta x = \Delta y = 1$$




$$u_{i+1\ j} + u_{i-1\ j} + u_{i\ j+1} + u_{i\ j-1} - 4u_{ij} = 0$$

$$x = 1, y = 1) \quad \underline{u_{21}} + \underline{u_{01}} + u_{12} + \underline{u_{10}} - 4u_{11} = 0$$
$$x = 1, y = 2) \quad u_{22} + \underline{u_{02}} + \underline{u_{13}} + u_{11} - 4u_{12} = 0$$
$$x = 2, y = 2) \quad \underline{u_{32}} + u_{12} + \underline{u_{23}} + \underline{u_{21}} - 4u_{22} = 0$$

Lo subrayado son datos que están en el enunciado

$$x = 1, y = 1) \quad -4u_{11} + u_{12} = -35$$
$$x = 1, y = 2) \quad u_{11} + u_{22} - 4u_{12} = -26$$
$$x = 2, y = 2) \quad -4u_{22} + u_{12} = -43$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

**Parte Practica)** Discretizar el siguiente problema matemático del modelo SIR en su versión reducida, mediante el método de Runge-Kutta 2 (*):

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} IS \qquad S(0) = S_0 \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} IS - \gamma I \qquad I(0) = I_0 \geq 0$$

b) Encontrar la solución numérica con 5 dígitos significativos para $t = 2$, utilizando un paso $h = 1$: siendo $I_0 = 10^3$, $S_0 = N - I_0$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.1$ y $N$ = número de Padrón.

(*) Ayuda (interpretación de nomenclatura a cargo del alumno). Método RK2 para $y' = f$:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{h}{2} f(t^n, u^n)$$
$$u^{n+1} = u^n + hf\left(t^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$S' = f(I_n, S_n) = -\frac{\beta}{N} I_n S_n$$

$$I' = f(I_n, S_n) = \frac{\beta}{N} I_n S_n - \gamma I_n$$

$$\left.\begin{aligned} S^{n+\frac{1}{2}} &= S_n + \tfrac{h}{2} \cdot [-\tfrac{\beta}{N} I_n S_n] \\ I^{n+\frac{1}{2}} &= I_n + \tfrac{h}{2} \cdot [\tfrac{\beta}{N} I_n S_n - \gamma I_n] \end{aligned}\right\} \quad \text{predictor}$$

$$\left.\begin{aligned} S^{n+1} &= S_n + h \cdot [-\tfrac{\beta}{N} I_{n+\frac{1}{2}} S_{n+\frac{1}{2}}] \\ I^{n+1} &= I_n + h \cdot [\tfrac{\beta}{N} I_{n+\frac{1}{2}} S_{n+\frac{1}{2}} - \gamma I_{n+\frac{1}{2}}] \end{aligned}\right\} \quad \text{corrector}$$

poniendo los datos correspondientes con el padrón sale.

**Problema 2**

Aplicar el método de Runge Kutta 2 al siguiente problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 1001\,\frac{dy}{dt} + 1000\,y = 0 \quad con \quad y_{(0)} = 0\,, \quad \frac{dy}{dt}_{(0)} = -1$$

Elegir un paso de cálculo que garantice la condición de estabilidad (en el sentido fuerte) y avanzar tres pasos la solución numérica.

Ayuda: RK2: Si y' = f(t,y) $u_{n+1} = u_n + 0.5*(q1+q2)$ siendo $q1 = k*f(t_n,u_n)$ y $q2 = k*f(t_n+k,u_n+q1)$

$$y'' = -1001y' - 1000y \qquad ; y(0) = 0 \; ; y'(0) = -1$$

$$\begin{cases} y(t_n) = u & \\ u' = v & u' = f(u_n, v_n, t_n) \\ v' = -1001v - 1000u & v' = f(u_n, v_n, t_n) \end{cases}$$

$$u_0 = 0$$

$$v_0 = -1$$

$$\begin{cases} q_{1u} = k * v_n \\ q_{2u} = k * [v_n + q_{1u}] \end{cases}$$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 0.5 * (q_{1u} + q_{2u})}$$

$$\begin{cases} q_{1v} = k * [-1001v_n - 1000u_n] \\ q_{2v} = k * [-1001(v_n + q_{1v}) - 1000(u_n + q_{1u})] \end{cases}$$

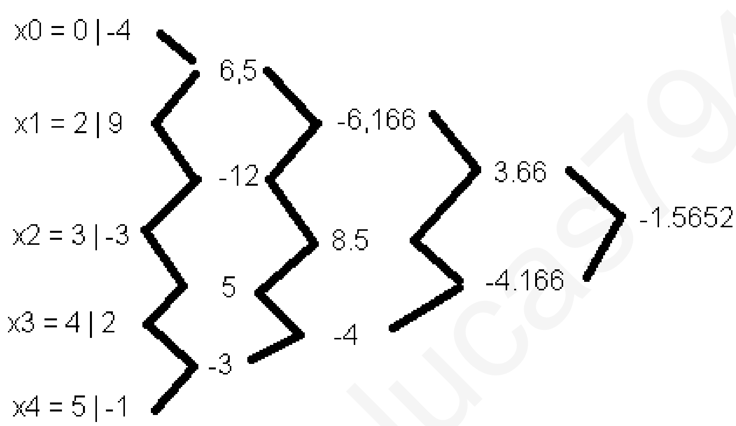
$$\boxed{v_{n+1} = v_n + 0.5 * (q_{1v} + q_{2v})}$$

$$\begin{cases} q_{1u} & = k * f_u(u_n, v_n, t_n) \\ q_{2u} & = k * f_u(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_n + k) \\ & \boxed{u_{n+1} = u_n + 0.5 * (q_{1u} + q_{2u})} \\ q_{1v} & = k * f_v(u_n, v_n, t_n) \\ q_{2v} & = k * f_u(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_n + k) \\ & \boxed{v_{n+1} = v_n + 0.5 * (q_{1v} + q_{2v})} \end{cases}$$

**3.** Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 1 y su error cometido, el polinomio debe ser al menos de orden 3. En caso de descartar información justificar. Para ello se tienen los siguientes datos.

| $x$ | $f_{(x)}$ |
|---|---|
| 0 | -4 |
| 2 | 9 |
| 3 | -3 |
| 4 | 2 |
| 5 | -1 |
| 6 | 8 |

Si necesitas de al menos orden 3, necesitas 4 datos, uso x=(0,2,3,4) pero tambien necesitas el error cometido, asi que necesitas tener un nodo mas, entonces usas x=(0,2,3,4,5)






$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\therefore P_3(x) = -4 + (6,5)(x) + (-6,166)(x)(x-2) + (3,66)(x)(x-2)(x-3)$$
$$P_3(1) = 15,98$$
$$\epsilon = |(-1.5652)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$$
$$\epsilon = |(-1.5652)(x)(x-2)(x-3)(x-4)| = 9.4$$
$$\therefore f(2,3) = 15.9 \pm 9.4$$

**Problema 1**

Se desea encontrar el valor de la función en el punto x = 1.21 a partir de las siguientes mediciones:

| x | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|
| F(x) | 6.87 | 4.61 | 3.28 | 4.54 |

a) Para ello, obtenga el polinomio interpolante de Newton de grado 2 [$N_2(x)$] utilizando los datos de la tabla e indique el valor de $N_2(1.21)$.

b) Obtenga una expresión del error cometido y su valor en x = 1.21 al representar los puntos de la tabla mediante el polinomio de grado 2 obtenido en a). Indique de qué tipo de error se trata.

c) Indique alguna expresión del polinomio interpolante de grado 3 de Lagrange [$L_3(x)$] y el valor que se obtiene al evaluarlo en x = 1.21.

Si necesitas de grado 2, necesitas 3 datos, igualmente, necesitas el error cometido, y para eso necesitas los 4 datos. Pero atento al polinomio que hay que generar..

| | F[x,x] | F[x,x,x] | F[x,x,x,x] |
|---|---|---|---|
| x0 = 1 \| 6.87 | | | |
| | -4.52 | | |
| x1 = 1.5 \| 4.61 | | 1.86 | |
| | -2.66 | | 2.21 |
| x2 = 2 \| 3.28 | | 5.18 | |
| | 2.52 | | |
| x3 = 2.5 \| 4.54 | | | |

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$P_2(x) = 6.87 + (-4.52)(x - 1) + (1.86)(x - 1)(x - 1.5)$$
$$P_2(1.21) = 5.811726$$
$$\epsilon = |(2.21)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| = |(2.21)(x - 1)(x - 1.5)(x - 2)| = 0.1063$$

**Problema 1**
Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$y'' + x^2 = 0; 0 < x < 1 \;\; con \;\; y(0) = 0 \;\; e \;\; y'(1) = 0$$

a) Construir una aproximación en diferencias finitas de orden de precisión 2, incluidas las condiciones de borde. Expresar el sistema de ecuaciones resultantes en forma matricial.
b) Resolver el problema utilizando 1 nodo interior

$$y'' = -x^2$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(1) = 0. y'' \cong \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$
$$\therefore \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = -x_i^2$$

1 nodo, por lo tanto es a paso h=0.5

$$4u_{n-1} - 8u_n + 4u_{n+1} = -x_i^2$$

$$\begin{cases} n = 0, x_i = 0) & u_0 = 0 \\ n = 1, x_i = 0.5) & 4u_0 - 8u_1 + 4u_2 = -0.25 \\ n = 2, x_i = 1) & \boxed{4u_1 - 8u_2 + 4u_3 = -1; \; u_2' = 0 = \frac{u_3 - u_1}{2h} => u_3 = u_1} \therefore \\ & n = 2, x_i = 1) 8u_1 - 8u_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1875 \\ 0,3125 \end{bmatrix}$$

a) Sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es:

$$p_3(x)=1/2*(5x^3-3x)$$

obtener la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana (justificando el método de obtención)

b) Aplicar la formula previamente obtenida para el calculo de la siguiente integral definida

$$I = \int_0^1 xe^{-x}dx$$

Ayuda: El coeficiente correspondiente a la raiz x=0 de $p_3(x)$ vale 8/9.

1° cambio variable) $x = \frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}$ ; $dx = \frac{b-a}{2}du$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}du = \int_{-1}^1 \varphi(u)\frac{1}{2}du$$

2° puntos de gauss) raices del polinomio de legendre $u_0 = 0, u_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}, u_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

3° coeficientes de gauss)

por coeficientes indeterminados..

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 1du = 2 & = c_0 1 + c_1 1 + c_2 1 \\ \int_{-1}^1 udu = 0 & = c_0 0 + c_1\sqrt{\frac{3}{5}} + c_2 - \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \int_{-1}^1 u^2du = \frac{2}{3} & = c_0 0 + c_1 \frac{3}{5} + c_2 \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} & -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} c_0 = \frac{8}{9} \\ c_1 = \frac{5}{9} \\ c_2 = \frac{5}{9} \end{cases}$$

4° resolucion)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \varphi(u)\frac{1}{2}du = \frac{8}{9}\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \frac{5}{9}\frac{1}{2}f(0,8872) + \frac{5}{9}\frac{1}{2}f(0,1127)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(u)du = 0,264241$$

Definite integrals

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx = \frac{e-2}{e} \approx 0.26424$$

**Problema 1**

Sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es:

$$p_3(x)=1/2*(5x^3-3x)$$

a) obtener los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con tres puntos (justificando teóricamente el método de obtención)

b) acotar el error total (discriminando según la fuente de error) correspondiente al calculo mediante la fórmula anterior de la siguiente integral definida suponiendo que: a) las raíces del polinomio de Legendre se utilizan con 3 decimales correctos, b) los resultados intermedios se obtienen con 3 dígitos de precisión c) el integrando se evalúa de izquierda a derecha.

$$I = \int_{-2}^{7} 5(x-2)^3 x^2 dx$$

Se aplica lo mismo del ejercicio anterior, no lo vuelvo a hacer

$$\int_{-1}^{1} \varphi(u)du = \frac{8}{9}\frac{9}{2}f(\frac{5}{2}) + \frac{5}{9}\frac{9}{2}f(5,985685) + \frac{5}{9}\frac{9}{2}f(-0,985685)$$

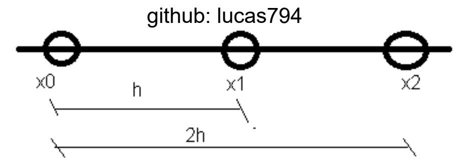
$$\int_{-1}^{1} \varphi(u)du = 28048,499$$



$$\int_{-2}^{7} 5\,(x-2)^3\,x^2\,dx = \frac{56097}{2}$$

Considere el siguiente PVI:

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$




a) Demuestre que:

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2})}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''(\xi_i)$$

para algún $\xi_i$ donde $t_i \le \xi_i \le t_{i+2}$.

b) Utilice el método de discretización asociado al punto a) para encontrar la solución numérica para el caso:
$a = 0,\ \ b = 1,\ \ h = 0.2,\ \ f(t, y) = 1 - y,\ \alpha = 0$. Ayuda: seleccione $u_1 = 1 - e^{-h}$, siendo $u_1 \approx y(t_1)$.

c) Sabiendo que la solución analítica del PVC planteado es $y(t) = 1 - e^{-t}$, evaluar numéricamente el error de la solución encontrada el punto b) y justificar el comportamiento en forma teórica.

Como se mostró en la primera hoja, es una discretización primera de orden 2 en adelanto...

$$f'(x_0) = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)(x_1 - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x_1 - x_0)^3}{3!}$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)(x_2 - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x_2 - x_0)^3}{3!}$$

$$\begin{cases} f(x_0)(a + b + c) = 0 \\ f'(x_0)(bh + 2ch) = 1 \\ f''(x_0)(bh^2 + 4ch^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & h^2 & 4h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{-3}{2h}} \boxed{b = \frac{2}{h}} \boxed{c = \frac{-1}{2h}}$$

$$f'(x_0) = \frac{-3}{2h} f(x_0) + \frac{2}{h} f(x_1) + \frac{-1}{h} f(x_2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$$

$$f'''(x_0)(|)\frac{h^3}{6}b + \frac{8}{6}h^3 c) \therefore -\frac{1}{3}h^2 f'''(\xi)$$

$$\begin{cases} n = 0) - 6.5u_0 + 10u_1 - 2.5u_2 = 1 \\ n = 1) - 6.5u_1 + 10u_2 - 2.5u_3 = 1 \\ n = 2) - 6.5u_2 + 10u_3 - 2.5u_4 = 1 \\ \begin{cases} n = 3) \quad -6.5u_3 + 10u_4 - 2.5u_5 = 1 \\ u_5 = 1 - e^{-h} \\ \therefore n = 3) \quad -6.5u_3 + 10u_4 = 1.453173 \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1799 \\ 0,3197 \\ 0,4109 \\ 0,4124 \end{bmatrix}$$

**Problema 1**

El siguiente problema de valores iniciales $\frac{dy}{dt} = -y + t^2 + 5$ con $y(0) = 1$ tiene una solución de la forma $y = -6e^{-t} + t^2 - 2t + 7$

a) Discretizar el problema utilizando el método de Euler implícito obteniendo una expresión que permita calcular $u_{n+1}$ en función de $u_n$

b) Analizar la estabilidad numérica.

c) Con un paso k=0,1 calcular el valor aproximado de la solución en los 4 primeros puntos, o sea hasta evaluar el valor aproximado correspondiente a t=0,4. Repetir el cálculo utilizando un paso k=0,2 y obtener una aproximación de la solución en t=0,4 utilizando Extrapolación de Richardson.

d) Discretizar el problema utilizando el siguiente método obteniendo una expresión que permita calcular $u_{n-1}$ en función de $u_n$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{k}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

e) Con un paso de h=0,2 calcular el valor aproximado correspondiente a t=0,4 utilizando la discretización del punto anterior.

f) Calcular los valores absolutos de los errores en t=0,4 correspondientes a todas las aproximaciones obtenidas en los puntos anteriores y explicar los resultados obtenidos.

$$y' = f(t, y)$$

$$u_{n+1} = u_n + h[f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + h[-(u_{n+1}) + ((n+1)h)^2 + 5]}$$

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = \boxed{u_n} + \delta u_n \boxed{+h[-u_{n+1}} - \delta u_{n+1} \boxed{+((n+1)h)^2 + 5]}$$

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_{n+1} + \delta u_n - h\delta u_{n+1}$$

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = \left|\frac{1}{1+h}\right|$$

$$\left|\frac{1}{1+h}\right| < 1$$

$$h > 0 \qquad metodo\ incondicionalmente\ estable$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 204 | h | 0,1 | | |
| 205 | | | | |
| 206 | n | t | u_n | u_n+1 |
| 207 | 0 | 0 | 1 | 1,364545455 |
| 208 | 1 | 0,1 | 1,364545455 | 1,698677686 |
| 209 | 2 | 0,2 | 1,698677686 | 2,006979715 |
| 210 | 3 | 0,3 | 2,006979715 | 2,293617922 |
| 211 | 4 | 0,4 | 2,293617922 | 2,562379929 |
| 212 | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 204 | h | 0,2 | | |
| 205 | | | | |
| 206 | n | t | u_n | u_n+1 |
| 207 | 0 | 0 | 1 | 1,673333333 |
| 208 | 1 | 0,2 | 1,673333333 | 2,254444444 |

$$h_1 < h_2 \therefore I_r = I(h_1) \overset{*}{-} \frac{I(h_1) - I(h_2))}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1}$$

$$h_1 < h_2 \therefore I_r = I(h_1) \overset{*}{-} \frac{I(h_1) - I(h_2))}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1}$$

* pifié con el signo es +
por ende Ir está mal
calculada

$$p = 1;\ h_1 = 0.1\ ; h_2 = 0.2$$
$$I_r = 2.254439$$

| 206 | n | t | u_n | u_n+1 |
|---|---|---|---|---|
| 207 | 0 | 0 | 1 | 1,730909091 |
| 208 | 1 | 0,2 | 1,730909091 | 2,343471074 |
| 209 | 2 | 0,4 | 2,343471074 | 2,873749061 |
| 210 | 3 | 0,6 | 2,873749061 | 3,351249232 |
| 211 | 4 | 0,8 | 3,351249232 | 3,800113008 |

**Pregunta 1**
¿Es posible utilizar métodos numéricos diseñados para problemas de valores iniciales a los efectos de resolver problemas de valores de contorno? ¿Por qué?

No, debido a que el PVI es resolución en una flecha de tiempo, avanzando en una dirección.
El PVC es la distribución de un dominio, es la resolución conjunta de todos los puntos.

**Pregunta 2**
Indique para que se usan y el orden de convergencia de los siguientes métodos:
i) Bisección ii) SOR iii) Secante iv) Euler implícito

Bisección: Método de arranque para busqueda de raíces de una ecuacion no lineal. Orden 1.
SOR: Método para resolucion de SEL. Order 1.
Secante: Metodo alternativo a Newton Raphson (no utiliza la derivada) para encontrar raices de ecuaciones no lineales. Orden está acotado entre 1 y 2.
Euler Implicito: Método para resolucion de PVI. Orden 1.

**Pregunta 2**
Explique como se debe iniciar el cálculo para resolver un PVI con un método multipaso y que recaudos se deben tener al elegir los métodos.

La primera solución debe ser resuelta por medio de un método el cual tenga el mismo o mayor orden al método multipaso utilizado.

**Pregunta 1**
Cual método directo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es más conveniente de utilizar si luego se planea efectuar el refinamiento de la solución. Justificar la respuesta

Normalmente, cuando se hacen pivoteo parcial o total, se está intentando evitar la propagación de errores de entrada, por lo tanto la idea de refinar una solución tiene sentido si se resuelve con un método sin pivoteo.

**Pregunta 2**

Dado un problema de valores iniciales de segundo orden, en que caso se recomienda utilizar el método de Newmark. Justifique su respuesta.

Se recomienda el método de Newmark para PVI Conservativos. RK por ejemplo el error de truncamiento se va acumulando y se empieza a oscilar de mayor manera, Newmark tambien tiene error de truncamiento, pero se manifiesta en un defasaje de la solución real.

**Pregunta 1**

Explicar el método de extrapolación de Richardson. Desarrolle en términos teóricos.

Mejora la precisión de un resultado, calculado con 2 pasos, uno la mitad del otro mejorando una solución de mucho mayor precisión. Podes agregar la formual y explicarla si querés

**Pregunta 2**

Explique que es un nodo fantasma e indique cuantos puede haber en un PVC.

Cuando se resuelve la discretización de un PVC, y se da información sobre la derivada de la función, sucede que al llegar a ese punto, y se intenta discretizar por un método centrado, implica utilizar un nodo en el cual no está representado en el sistema. Sobre la cantidad solo es posible que un extremo tenga información de la derivada (Está explicado en los videos), sinó no está bien planteado porque da solución infinita.

**Pregunta 2**

¿Qué dificultad aparece en el análisis de estabilidad de un PVI no lineal? ¿Cómo la resuelve?

Cuando se hace hace el analisis de estabilidad, el valor de la perturbación queda elevado a un numero distinto de uno, se soluciona de manera de entender que la perturbación es tan chica, que si se la eleva a cualquier valor, se puede discriminar respecto a los demas errores.

**Pregunta 1**

Cuando se aplica el método de diferencias finitas a un problema de valores de contorno, explicar cuando hay una limitación en el valor de h.

Esta pregunta corresponde a un examen cuando la cátedra estaba unificada con otros 2 docentes y se veian conocimientos diferentes, que ya no se ven ahora.

**Pregunta 1**

¿Es posible utilizar métodos numéricos diseñados para problemas de valores iniciales a los efectos de resolver problemas de valores de contorno? ¿Por qué?

PVC es una resolución conjunta de todos los puntos, mientras que un PVI es un desarrollo en el tiempo.
PD: Esta pregunta tenia respuesta, pero el tema lo sacaron, asi que descuenten que le tomen una pregunta así

**Pregunta 1**

Explicar que relación existe entre el método de Trapecios y el de Simpson.

El metodo de simpsons se obtiene de la aplicación de Richardson al método de trapecios con un paso h y h/2 (Podes resolverlo analiticamente, que dá)

¿Cuál es el polinomio de mayor grado que puede ser integrado en forma exacta por los métodos de Rectángulo, Trapecio, Simpson y Gauss-Legendre de n puntos? Justificar la respuesta.

Rectangulo y Trapecio: Polinomios de grado 1.
Simpsons hasta polinomios de grado 3
Gauss-Legendre: hasta polinomios 2n-1

¿Cuál método de interpolación conviene usar si luego se van a incorporar nuevos puntos de interpolación para aumentar el grado del polinomio interpolante? Justificar la respuesta.

Conviene interpolar por medio de Newton, debido a que se puede agregar nuevos puntos sin tener que volver a calcular todo el polinomio de nuevo.
Con el método de lagrange, implica tener que calcular TODOS los coeficientes nuevamente con el nuevo dato agregado.

**Pregunta 1)**
Cuando un problema de valores de contorno lineal de 2do orden es integrado numéricamente mediante el método de diferencias finitas centradas, de que depende la existencia y unicidad de la solución del problema numérico resultante de la discretización efectuada?

(Teo.):

Sea $f(x, y, y')$ continua en $D = \{(x, y, y') \text{ tq } a \leq x \leq b, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < y' < \infty\}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ , $\frac{\partial f}{\partial y\prime}$ continuas en D. Si

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0 \ \forall (x, y, y') \in D$ y
- Si $\exists M = \text{cte tq } \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M \ \forall (x, y, y') \in D$,

entonces el problema tipo tiene **solución única**.

Rezá que no lo tomen.



**Pregunta 2**

Explique la principal motivación que llevó al desarrollo de métodos multi-paso para resolver una EDO.

Los métodos que NO son multipaso utilizan informacion del estado actual y siguiente, los multipaso utilizan estados PREVIOS para lograr obtener una mejor precisión numérica.

**Pregunta 2)**
Explicar que se entiende por métodos conservativos en el ámbito de la integración numérica de problemas de valores iniciales de 2do orden.

Es cuando se intenta preservar una condición de conservacion de un propiedad importante del problema, normalmente es utilizado para fórmulas física debido a la convervación de las mismas.

**Pregunta 1**

Explicar cuándo se utiliza y en qué consiste el método del nodo fantasma.

**Pregunta 2**

¿Qué dificultad aparece en el análisis de estabilidad de un PVI no lineal? ¿Cómo la resuelve?

1) El nodo fantasma es un método para poder solucionar PVC cuando se da una condición de borde sobre la derivada de la función (Llamada Neumann).
   Si se resuelve el problema con una discretizacion centrada, lo que sucede en el borde es que se necesita información de un nodo el cual es inexistente en el sistema, entonces, se utiliza algún método para poder obtener información de ese nodo, sin perder el orden establecido (una derivada en atraso/adelanto dependiendo en donde esté la información, o sino una derivada centrada y utilizando esa información en la ecuación general nuevamente)
2) El término que contiene la perturbación queda elevado o al cuadrado o a un valor mayor, pero, esta perturbación en sí, es un valor muy chico, y si se lo evalúa a un valor, queda aun mas chico y puede ser no considerado en la cuenta final.

**Pregunta 1**
¿Para qué y cómo se utilizan los polinomios de Legendre en los métodos de integración numérica?

Las raices del polinomio de Legendre dan los puntos de Gauss, para posteriormente ser usados en la cuadratura de gauss para la resolución de integrales de orden 2n-1 donde n es la cantidad de nodos a utilizar

**Pregunta 1**
Que ventaja presentan los métodos implícitos en la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales rígidas.

Se tiene la ventaja que el método implícito no limita el paso de H para la parte "lenta", mientras que con el método explicitó sí.

**Pregunta 1**
Se desea discretizar una derivada de segundo orden con precisión 4 y diferencias centradas. Justifique la cantidad de nodos que se deben utilizar.

OP = N - OD (+1) en caso de ser centrada:
4 = N - 2 + 1
N = 5

# 75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
# 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

## EXAMEN INTEGRADOR I

*2do cuatrimestre 2023*
*13-Dic-2023*

**Problema 1**

Las coordenadas (x,y) de un punto perteneciente a un disco rígido que gira con velocidad angular constante $\omega$ evolucionan temporalmente de acuerdo al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = \omega y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\omega x$$

Se pide:

a) Discretizar este problema mediante el método de Runge Kutta de 2do orden. Ayuda:

$$u^{*}_{n+1} = u_n + h\, f(u_n, t_n)$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\,[f(u_n, t_n) + f(u^{*}_{n+1}, t_{n+1})]$$

b) Usando los siguientes datos ($\omega = 2\pi\, s^{-1}$, x(0)=y(0)=1.0, paso de tiempo $h = 0.0625\, s$) avanzar 4 pasos la solución numérica.

**Problema 2**

Dada la siguiente integral:

$I = \int_{-1}^{1} P_3(x)\, dx$, donde $P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$

a) Resuélvala mediante el método de trapecios, con pasos $h = 2$ y $h = 1$.

b) Efectúe una extrapolación de Richardson para los valores obtenidos en (a).

Ayuda: $I_{rich} = I(h) + \frac{I(h) - I(qh)}{q^p - 1}$

c) Halle una cota para los errores en los resultados obtenidos en (a) y en (b), y compárelos con el error real. Estime experimentalmente el orden de los resultados obtenidos en (a).

Ayuda: $err_{trap} \leq n\frac{h^3}{12}|f''(\xi)|$

**Problema 2**

Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC) definido en el intervalo [0,3]

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+y=e^{-0.2x} \qquad y_{(x=0)}=1 \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)}=-y_{(x=3)}$$

a) Discretizar el problema mediante el método de diferencias finitas de forma tal que el error de discretización sea de orden 2. Escribir la expresión de las ecuaciones en diferencias para un valor genérico de $N$ (cantidad de tramos en los que se divide el dominio de cálculo al efectuar la discretización).

b) Calcular la solución aproximada para el caso de $N$=3

Considere el siguiente problema matemático:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t^2}-\frac{y}{t}-y^2 \qquad 1\le t\le 2 \qquad y(1)=1$$

Resolverlo numéricamente utilizando el método de Euler explícito en condiciones estables.

Ayuda: Método de Euler explícito para la ecuación diferencial dy/dt = f(y,t) : $u_{n+1}=u_n+k\,f(u_n,t_n)$

**Pregunta 1**

De que depende la existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al plantear la resolución numérica de un problema de valores de contorno de 2do orden lineal por el método de diferencias finitas centradas.