Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2022

Repaso de Álgebra lineal

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- Vector: $v \in R^n$ n-upla de coeficientes reales.

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Vector: $v \in R^n$ n-upla de coeficientes reales.

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Suma: $w = v + u$ con $w_i = v_i + u_i$ para $i = 1, \ldots, n$ (conmutativa, asociativa)

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

- Vector: $v \in R^n$ n-upla de coeficientes reales.

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- Suma: $w = v + u$ con $w_i = v_i + u_i$ para $i = 1, \dots, n$ (conmutativa, asociativa)

- Multiplicación por escalar: Sea $\alpha \in R$, $w = \alpha v$ con $w_i = \alpha v_i$ para $i = 1, \dots, n$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

- Vector: $v \in R^n$ n-upla de coeficientes reales.

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Suma: $w = v + u$ con $w_i = v_i + u_i$ para $i = 1, \ldots, n$ (conmutativa, asociativa)
- Multiplicación por escalar: Sea $\alpha \in R$, $w = \alpha v$ con $w_i = \alpha v_i$ para $i = 1, \ldots, n$
- Producto interno: $< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, K$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, K$
- Vectores linealmente dependientes: existen α_k con $k = 1, \ldots, K$ no todos nulos tal que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, K$
- Vectores linealmente dependientes: existen α_k con $k = 1, \ldots, K$ no todos nulos tal que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0$
- Subespacio generado: $S = \{x \in R^n \text{ tal que } x = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k\}$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \dots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \dots, K$
- Vectores linealmente dependientes: existen α_k con $k = 1, \dots, K$ no todos nulos tal que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0$
- Subespacio generado: $S = \{x \in R^n \text{ tal que } x = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k\}$
- Dimensión de S: cantidad máxima de vectores linealmente independientes en S.

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

Dados $v^k \in R^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, K$
- Vectores linealmente dependientes: existen α_k con $k = 1, \ldots, K$ no todos nulos tal que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0$
- Subespacio generado: $S = \{x \in R^n \text{ tal que } x = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k\}$
- Dimensión de S: cantidad máxima de vectores linealmente independientes en S.
- Base de S: conjunto de vectores linealmente independientes que generan a S.

- Matriz: $A \in R^{m\times n}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$,$B \in R^{p \times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots n$,
  $C \in R^{m \times n}$ (conmutativa, asociativa)

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m\times n}$,$B \in R^{p\times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots n$,
  $C \in R^{m\times n}$ (conmutativa, asociativa)

- Producto por escalar:
  $C = \alpha A$ con $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots n$, $C \in R^{m\times n}$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$,$B \in R^{p \times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots n$,
  $C \in R^{m \times n}$ (conmutativa, asociativa)

- Producto por escalar:
  $C = \alpha A$ con $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots n$, $C \in R^{m \times n}$

- Multiplicación: definida si $n = p$

$A \in R^{m\times n}$,$B \in R^{p\times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$,
  $C \in R^{m\times n}$ (conmutativa, asociativa)

- Producto por escalar:
  $C = \alpha A$ con $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$, $C \in R^{m\times n}$

- Multiplicación: definida si $n = p$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \mathbf{b_{nj}} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

$A \in R^{m \times n}$,$B \in R^{p \times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$,
  $C \in R^{m \times n}$ (conmutativa, asociativa)

- Producto por escalar:
  $C = \alpha A$ con $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$, $C \in R^{m \times n}$

- Multiplicación: definida si $n = p$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \mathbf{b_{nj}} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, q, \ C \in R^{m \times q}$$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m\times n}$,$B \in R^{p\times q}$

- Suma: definida si $m = p, n = q$
  $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$,
  $C \in R^{m\times n}$ (conmutativa, asociativa)

- Producto por escalar:
  $C = \alpha A$ con $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots n$, $C \in R^{m\times n}$

- Multiplicación: definida si $n = p$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \mathbf{b_{nj}} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}
$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, q, \ C \in R^{m\times q}$$

NO es conmutativa

- Matriz identidad: $I \in R^{n\times n}$ $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

- Matriz identidad: $I \in R^{n\times n}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
- Matriz diagonal: $D \in R^{n\times n}$ $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

- Matriz triangular superior: $U \in R^{n \times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular superior: $U \in R^{n \times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: $L \in R^{n \times n}$ con $l_{ij} = 0$ si $i < j$

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

- Matriz triangular superior: $U \in R^{n \times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: $L \in R^{n \times n}$ con $l_{ij} = 0$ si $i < j$

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Producto de triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).

$A \in R^{m \times n}$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.
- Matriz inversa: definida si $m = n$. $A^{-1} \in R^{n \times n}$.
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  A inversible $\Leftrightarrow rang(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

$A \in R^{m \times n}$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.
- Matriz inversa: definida si $m = n$. $A^{-1} \in R^{n \times n}$.
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  A inversible $\Leftrightarrow rang(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$
- La inversa (si existe) de una matriz diagonal es matriz diagonal.

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.

- Matriz inversa: definida si $m = n$. $A^{-1} \in R^{n \times n}$.
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  A inversible $\Leftrightarrow rang(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

- La inversa (si existe) de una matriz diagonal es matriz diagonal.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular inferior es matriz triangular inferior.

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.
- Matriz inversa: definida si $m = n$. $A^{-1} \in R^{n \times n}$.
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  A inversible $\Leftrightarrow rang(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$
- La inversa (si existe) de una matriz diagonal es matriz diagonal.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular inferior es matriz triangular inferior.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular superior es matriz triangular superior.

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$
- Matriz traspuesta $A^t \in R^{n \times m}$
  $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$

- Matriz traspuesta $A^t \in R^{n \times m}$
  $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$
  $(A^t)^t = A$

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$

- Matriz traspuesta $A^t \in R^{n \times m}$
  $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$
  $(A^t)^t = A$
  $(A + B)^t = A^t + B^t$

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$

- Matriz traspuesta $A^t \in R^{n \times m}$
  $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$
  $(A^t)^t = A$
  $(A + B)^t = A^t + B^t$
  $(AB)^t = B^t A^t$

- Matriz estrictamente diagonal dominante:
  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \ldots, n$

- Matriz traspuesta $A^t \in R^{n \times m}$
  $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$
  $(A^t)^t = A$
  $(A + B)^t = A^t + B^t$
  $(AB)^t = B^t A^t$
  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- Matriz de permutación: $P \in R^{n \times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de permutación: $P \in R^{n\times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

- Matriz de permutación: $P \in R^{n \times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

- Matriz de permutación: $P \in R^{n \times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de permutación: $P \in R^{n\times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{42} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \alpha a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in R^{n\times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} & \alpha a_{14} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} & \alpha a_{14} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in R^{n \times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} & \alpha a_{14} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \alpha a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + \alpha a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + \alpha a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + \alpha a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$A \in R^{m \times n}$

- Espacio Imagen:
  $Im(A) = \{y \in R^m$ tal que existe $x \in R^n$ con $Ax = y\}$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m \times n}$

- Espacio Imagen:
  $Im(A) = \{y \in R^m$ tal que existe $x \in R^n$ con $Ax = y\}$
  Combinaciones lineales de las columnas de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} x_i + \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$A \in R^{m\times n}$

- Espacio Imagen:
  $Im(A) = \{y \in R^m \text{ tal que existe } x \in R^n \text{ con } Ax = y\}$
  Combinaciones lineales de las columnas de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} x_i + \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

- Espacio Nulo: $N(A) = \{x \in R^n \text{ tal que } Ax = 0\}$

$A \in R^{m\times n}$

- Espacio Imagen:
  $Im(A) = \{y \in R^m \text{ tal que existe } x \in R^n \text{ con } Ax = y\}$
  Combinaciones lineales de las columnas de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} x_i + \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

- Espacio Nulo: $N(A) = \{x \in R^n \text{ tal que } Ax = 0\}$
  $N(A) \neq \{0\} \iff$ las columnas de A son linealmente dependientes.

Repaso Álgebra lineal: bibliografía

Recomendamos repasar de la numerosa bibliografía existente en el tema. Algunas sugerencias:

- Algebra lineal, K. Hoffman y R. Kunze, Prentice-Hall, 1977.
- Algebra lineal, G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, Departamento de Matemática, FCEN - UBA, 2008.
- Algebra lineal y sus aplicaciones, G. Strang, Ediciones Paraninfo, 4ta ed., 2007.