Métodos Numéricos

Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

8 de abril de 2022

Menú de hoy

- SDP, Cholesky
- Ejercitación de Cholesky en Python

Matrices SDP

Las matrices SDP son ...

- Simétricas
  Def:
  $A = A^t$

y

- Definidas positivas
  Def:
  $x^t A x > 0 \qquad \forall x \neq 0$

Matrices SDP (2)

Cómo podemos ver si una matriz A es simétrica?

- Podemos calcular A^t y ver que sean iguales
- Podemos ver que $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$

Cómo podemos ver si una matriz A es definida positiva?

Habría que probar que **para todo** $x \neq 0$, $x^t A x > 0$

Aplicar la definición no parece muy eficiente a nivel computacional...

Matrices SDP (2)

Cómo podemos ver si una matriz A es simétrica?

- Podemos calcular A^t y ver que sean iguales
- Podemos ver que $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$

Cómo podemos ver si una matriz A es definida positiva?

Habría que probar que **para todo** $x \neq 0$, $x^t A x > 0$

Aplicar la definición no parece muy eficiente a nivel computacional...

Matrices SDP (2)

Cómo podemos ver si una matriz A es simétrica?

- Podemos calcular A^t y ver que sean iguales
- Podemos ver que $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$

Cómo podemos ver si una matriz A es definida positiva?

Habría que probar que **para todo** $x \neq 0$, $x^t A x > 0$

Aplicar la definición no parece muy eficiente a nivel computacional...

Matrices SDP (2)

Cómo podemos ver si una matriz A es simétrica?

- Podemos calcular A^t y ver que sean iguales
- Podemos ver que $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$

Cómo podemos ver si una matriz A es definida positiva?

Habría que probar que **para todo** $x \neq 0$, $x^t Ax > 0$

Aplicar la definición no parece muy eficiente a nivel computacional... 🤔

Criterio de Sylvester

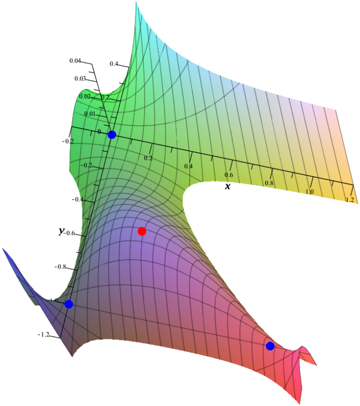
El Criterio de Sylvester nos da condiciones suficientes y necesarias para que una matriz simétrica sea definida positiva.

Criterio de Sylvester:
Sea A simétrica, A es definida positiva $\Leftrightarrow$ todos sus menores principales son positivos.

Menores principales:
El menor principal de orden k de una matriz A es el determinante de la submatriz dada por las primeras k filas/columnas.

Criterio de Sylvester?

Les hace recordar a algo este criterio...? 🤔



Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO ✗
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO ✗
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO ✗
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI ✓
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO ✗
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI ✓
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI

Examen sorpresa!

Indique verdadero o falso...

- Si A es simétrica entonces A es inversible.
  NO ✗
- Si a A es definida positiva entonces A es inversible.
  SI ✓
- Si A es definida positiva entonces A tiene factorización LU.
  SI ✓

Otras propiedades útiles

- Si A es definida positiva entonces todas sus submatrices principales son definidas positivas e inversibles.
- Si A inversible y simétrica que admite factorización LU, entonces podemos obtener también la factorización $A = LDL^t$, con L triangular inferior con 1 en la diagonal y D diagonal.
- Si A es definida positiva y B inversible, entonces BAB^t es definida positiva.

Factorización de Cholesky

Cómo era esta factorización?

$$A = LL^t$$

donde <u>L es triangular inferior</u>, con los <u>elementos de la diagonal positivos</u>.

Es un caso particular de la factorización LU.

Cholesky y las matrices SDP

Qué relación tienen?

Prop:
A es SDP $\Leftrightarrow$ A tiene factorización de Cholesky.

Como demostramos esa equivalencia?

Cholesky y las matrices SDP

Demostración fast forward:

$\Rightarrow$) A es DP, por tanto tiene LU. Además es simétrica e inversible (por ser DP), entonces $A = LDL^t$. Luego como $L^{-1}AL^{-1t} = D$, los elementos de D son positivos, por lo tanto existe $\sqrt{D}\sqrt{D} = D$. Finalmente

$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = L\sqrt{D}\sqrt{D}^t L^t = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^t = L'L'^t$.

$\Leftarrow$) Si $A = LL^t$ es fácil ver que A es simétrica. Luego podemos ver que $x^tAx = x^tLL^tx = (x^tL)(x^tL)^t = \|x^tL\|_2^2 \geq 0$.
Además L es inversible y como $x \neq 0$, podemos decir que A es SDP.

Algoritmo de Cholesky

Vamos a "desarmar" el algoritmo de Cholesky
Supongamos que tenemos la factorización de Cholesky de $A = LL^t$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \cdots & \ell_{n1} \\ 0 & \ell_{22} & \cdots & \ell_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

Si por ejemplo queremos calcular a_{ij} (con $j \leq i$) tendríamos
$a_{ij} = L_{fil(i)} {L^t}_{col(j)} = L_{fil(i)} L_{fil(j)} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}\ell_{jk}$

Algoritmo de Cholesky (cuentitas cuentitas...)

Tenemos entonces que:

- Si $j = i = 1$ entonces

$$a_{11} = \ell_{11}^2 \Leftrightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

- Si $j = 1 < i$ entonces

$$a_{i1} = \ell_{i1}\ell_{11} \Leftrightarrow \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}$$

Algoritmo de Cholesky (cuentitas cuentitas...)

- Si $1 < j = i$ entonces

$$a_{jj} = \ell_{j1}^2 + \cdots + \ell_{jj}^2 \Leftrightarrow \ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2}$$

- Si $1 < j < i$ entonces

$$a_{ij} = \ell_{i1}\ell_{j1} + \cdots + \ell_{ij}\ell_{jj} \Leftrightarrow \ell_{ij} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk} \right)$$

Con esto caracterizamos todos los elementos de L de manera unívoca y nos da un orden en el cual podemos calcularlos.

Algoritmo de Cholesky (ahora sí, el algoritmo)

Juntando todo lo anterior, obtenemos el siguiente algoritmo:

Algorithm Factorización de Cholesky

for $j = 1$ to n **do**
    $\ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2}$
    for $i = j + 1$ to n **do**
        $\ell_{ij} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk} \right)$
    end for
end for