Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2022

Sistemas de ecuaciones lineales
Eliminación Gaussiana

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Sistemas de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$$
Ax = b
$$

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin Im(A)$, el sistema no tiene solución.

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin Im(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in Im(A)$, puede existir única solución o infinitas. ¿De qué depende?

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin Im(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in Im(A)$, puede existir única solución o infinitas. ¿De qué depende?

$A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$, $B \in R^{n\times n}$, $d \in R^n$

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin Im(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in Im(A)$, puede existir única solución o infinitas. ¿De qué depende?

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $B \in R^{n \times n}$, $d \in R^n$

Los sistemas $Ax = b$ y $Bx = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

$D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$D \in R^{n\times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

- Si $d_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$x_i = b_i/d_{ii} \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

$\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales.

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

- Si $d_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

  $$x_i = b_i / d_{ii} \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

  $\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales.
- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \tag{1c}$$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n/u_{nn} \qquad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n)/u_{n-1n-1} \qquad (1c + 1p + 1r)$$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$
\begin{aligned}
x_n &= b_n/u_{nn} && (1c)\\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n)/u_{n-1n-1} && (1c + 1p + 1r)\\
&\vdots\\
x_i &= (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j)/u_{ii} && (1c + (n-i)p + (n-i)r)
\end{aligned}
$$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n/u_{nn} \qquad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n)/u_{n-1n-1} \qquad (1c + 1p + 1r)$$

$$\vdots$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j)/u_{ii} \qquad (1c + (n-i)p + (n-i)r)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}x_j)/u_{11} \qquad (1c + (n-1)p + (n-1)r)$$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$
\begin{aligned}
x_n &= b_n / u_{nn} && (1c) \\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - u_{n-1n} x_n)/u_{n-1n-1} && (1c + 1p + 1r) \\
&\vdots \\
x_i &= (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)/u_{ii} && (1c + (n-i)p + (n-i)r) \\
&\vdots \\
x_1 &= (b_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j} x_j)/u_{11} && (1c + (n-1)p + (n-1)r)
\end{aligned}
$$

Backward substitution, $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales.

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

$L \in R^{n \times n}$ matriz triangular inferior, $b \in R^n$

- Solución similar al caso de triangular superior, comenzando desde x_1 hasta x_n. Forward substitution.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.
- ¿Como hacerlo? Sumar/restar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un escalar, permutar ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.
- ¿Como hacerlo? Sumar/restar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un escalar, permutar ecuaciones.

$\boxed{\text{Método de Eliminación Gaussiana}}$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array}$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ \color{red}{0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ \color{red}{0} & -1 & 0 & -2 & -2 \\ \color{red}{0} & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2-(-1)F_1 \\ F_3-(2)F_1 \\ F_4-(-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} F_3-(-1)F_2 \\ F_4-(2)F_2 \end{array}$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ {\color{red}0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ {\color{red}0} & -1 & 0 & -2 & -2 \\ {\color{red}0} & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ {\color{red}0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & -1 & 1 & 9 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & 1 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow F_4 - (-1)F_3$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow F_4 - (-1)F_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$x_4 = 16$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$x_4 = 16$

$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$x_4 = 16$

$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$

$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$x_4 = 16$
$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$
$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$
$x_1 = (13 - x_2 + x_3 - 3x_4)/2 = 1$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$
$$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$$
$$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$$
$$x_1 = (13 - x_2 + x_3 - 3x_4)/2 = 1$$

Solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -30, 7, 16)$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: primer paso

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & b_n^0 \end{array}\right]$$

El algoritmo: primer paso

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & | & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & | & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & | & b_n^0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} F_2 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a_{i1}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a_{n1}^0/a_{11}^0)F_1 \end{matrix}$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: primer paso

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & b_n^0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a_{i1}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a_{n1}^0/a_{11}^0)F_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{in}^1 & b_i^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 & b_n^1 \end{array}\right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccccc} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & | & b_1^{i-1} \\ 0 & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & | & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & | & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & | & b_n^{i-1} \end{array}\right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: paso i-esimo

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & | & b_1^{i-1} \\ 0 & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & | & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & | & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & | & b_n^{i-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} F_{i+1} - (a_{i+1\,i}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \\ \vdots \\ F_n - (a_{ni}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \end{array}$$

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & b_1^{i-1} \\ 0 & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & b_n^{i-1} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_{i+1} - (a_{i+1i}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \\ \vdots \\ F_n - (a_{ni}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{i} & a_{12}^{i} & \cdots & a_{1i}^{i} & a_{1i+1}^{i} & \cdots & a_{1n}^{i} & b_1^{i} \\ 0 & a_{22}^{i} & \cdots & a_{2i}^{i} & a_{2i+1}^{i} & \cdots & a_{2n}^{i} & b_2^{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i} & a_{ii+1}^{i} & \cdots & a_{in}^{i} & b_i^{i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1i+1}^{i} & \cdots & a_{i+1n}^{i} & b_{i+1}^{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni+1}^{i} & \cdots & a_{nn}^{i} & b_n^{i} \end{array}\right]$$

El algoritmo: último paso

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{i} & a_{12}^{n-1} & \cdots & a_{1i}^{n-1} & \cdots & a_{1n}^{n-1} & b_{1}^{n-1} \\
0 & a_{22}^{n-1} & \cdots & a_{2i}^{n-1} & \cdots & a_{2n}^{n-1} & b_{2}^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{n-1} & \cdots & a_{in}^{n-1} & b_{i}^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{n-1} & b_{n}^{n-1}
\end{array}\right]$$

Esquema básico

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$

Para $k = i$ a $n + 1$

$a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$

Fin

Fin

Fin

Método de Eliminación Gaussiana

Esquema básico

Para $i = 1$ a $n - 1$

  Para $j = i + 1$ a n

    $m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$

    Para $k = i$ a $n + 1$

      $a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$

    Fin

  Fin

Fin

Condición necesaria: $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, n - 1$

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?
Si en el paso i-ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?
Si en el paso i-ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i + 1$ a n. En este caso, la columna i-ésima desde la posición $i + 1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.

Método de Eliminación Gaussiana

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

Si en el paso i-ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i + 1$ a n. En este caso, la columna i-ésima desde la posición $i + 1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.
- existe $a_{j'i}^{i-1} \neq 0$ para algún $j' \geq i + 1$. En este caso, basta permutar la fila i con la j' y continuar con el algoritmo.

Método de Eliminación Gaussiana

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

Método de Eliminación Gaussiana

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n-1$

Para $j = i+1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1}/a_{ii}^{i-1} \tag{1c}$$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \qquad (1c)$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1} \qquad (1p + 1r)$$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$ (1c)

Para $k = i$ a $n + 1$

$a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$ (1p + 1r)

Fin

Fin

Fin

Método de Eliminación Gaussiana

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n-1$

Para $j = i+1$ a n

$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$ (1c)

Para $k = i$ a $n+1$

$a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$ (1p + 1r)

Fin

Fin

Fin

Total

$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)c + (n-i)(n-i+2)p + (n-i)(n-i+2)r \longrightarrow \mathcal{O}(n^3)$

Estrategias de pivoteo
Evitar errores por trabajar con aritmética finita

Estrategias de pivoteo
Evitar errores por trabajar con aritmética finita

- Pivoteo parcial: entre las filas i a n, utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutacion necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

Estrategias de pivoteo
***Evitar* errores por trabajar con aritmética finita**

- Pivoteo parcial: entre las filas i a n, utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutacion necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.
- Pivoteo completo: entre las filas i a n y las columnas i a n, calcular el mayor $|a_{kl}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas y columnas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

Método de Eliminación Gaussiana: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan,JHU Press, 2013.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.