

Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2022
Práctica 1
Elementos de Álgebra Lineal



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nota: \mathbb{R}^n está formado por vectores columna. Cuando se escriben por filas es por comodidad tipográfica.

1. Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y los vectores columna $x = (x_i)$, $z = (z_i) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i)$, $w = (w_i) \in \mathbb{R}^m$ (donde la notación a_{ij} representa el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A y la notación x_i representa el elemento i -ésimo del vector x), decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso justificar por qué lo son.

- a) $x^t A z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} z_j$
b) $x z^t = \sum_{i=1}^n x_i z_i$
c) $(ADw)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ij} d_{jk} w_k$
d) $(B^t D^{-1} y)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m b_{ji} d_{jk}^{-1} y_k$

2. Sean las siguientes matrices de 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $C = AB$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

- a) $A_{11} = [a_{11}]$, $A_{12} = [a_{12} \ a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$
b) $A_{11} = [a_{11} \ a_{12}]$, $A_{12} = [a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$
c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $A_{21} = [a_{31}]$, $A_{22} = [a_{32} \ a_{33}]$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con columnas a_1, \dots, a_n , y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con filas b_1^t, \dots, b_n^t . Probar que:
- a) Si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$, entonces $A = B$.
b) $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^t$.
4. Exhibir $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para los cuales $AB \neq BA$. Idem para que $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$, siendo $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$ la *traza* de A .

5. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tales que $AB = 0$ ¿Será cierto que $A = 0$ o $B = 0$?
6. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no nula y $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tales que $AB = AC$ ¿Será cierto que $B = C$?
7. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y B para que valga la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Idem para que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $m \in \mathbb{N}$, probar la igualdad
 $(I - A)(I + A + \dots + A^m) = (I + A + \dots + A^m)(I - A) = I - A^{m+1}$
9. Determinar si los siguientes conjuntos de \mathbb{R}^n son linealmente independientes. Cuando no lo sean, escribir uno de sus elementos como combinación lineal del resto.

a) $C = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 3, 0), (3, 2, 4, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

b) $C = \{(3, 3, 3), (2, 1, 0), (7, 5, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

10. Hallar dos bases distintas de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^n . Extender las bases propuestas a bases de \mathbb{R}^n .

a) $S = \langle (1, 2, 0), (1, 3, 6), (1, 7, 30) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $S = \langle (1, 2), (4, 8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

11. Demostrar:

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. El conjunto $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente.

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente.

Relacionar estas dos propiedades con el método clásico de triangulación de matrices (Eliminación Gaussiana).

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Demostrar que $T(x) = Ax$ es una transformación lineal.
13. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y sea $T(x) = Ax$. Sean $x = (-1, -1)$ e $y = (2, 1)$ dos puntos del plano. ¿Cuál es la imagen del segmento que tiene por extremo a dichos puntos? Justificar.
14. Demostrar el punto anterior considerando $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y x e y dos puntos cualquiera de \mathbb{R}^n .
15. Hallar la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Hallar la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ asociada a la siguiente transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_3, 3x_2 + 2x_3)$$

17. Para las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hallar $Nu(A)$, $Im(A)$, su rango fila, su rango columna y comprobar que $n = \dim(Nu(A)) + \dim(Im(A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

18. Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^n$, sea $A = uv^t$.
- Hallar $Im(A)$ y $dim(Nu(A))$.
 - Probar que $A^2 = tr(A) \cdot A$.
19. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar:
- $Nu(B) \subseteq Nu(AB)$.
 - $Im(AB) \subseteq Im(A)$.
 - Si $AB = 0$ entonces $Im(B) \subseteq Nu(A)$.
20. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Supongamos que $dim(Nu(A)) = k$ y sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $Nu(A)$. Además sea $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base tal que $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n .
- Probar que cualquier vector $y \in Im(A)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
 - Probar que los vectores del conjunto $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son linealmente independientes.
 - Deducir el *Teorema de la dimensión*: $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$.
21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes (es decir, si una de ellas vale, todas valen).
- A es inversible.
 - No existe $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, tal que $Ax = 0$.
 - Las columnas de A son linealmente independientes.
 - Las filas de A son linealmente independientes.
22. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar:
- $AB = AC$ entonces $B = C$.
 - $AB = 0$ entonces $B = 0$.
 - Si $m = n$ y si $\forall D \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $tr(BD) = tr(CD)$, entonces $B = C$.
 - Si $m = n$ entonces $tr(B) = tr(ABA^{-1})$
(Sug.: demostrar primero que $tr(CD) = tr(DC)$).
23. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ probar:
- Si A es inversible entonces A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
 - Si A, B son inversibles entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 - Si A es inversible entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
24. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar mediante inducción en la dimensión de la matriz:
- Si A y B son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto AB es triangular inferior (superior).
 - Si A es inversible y triangular inferior (superior) entonces A^{-1} es triangular inferior (superior).

25. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice nilpotente si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si A es nilpotente entonces:
- a) A no es inversible.
 - b) $I - A$ es inversible.
26. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ son normas vectoriales.
27. Graficar los siguientes conjuntos de puntos:
- a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 = 1\}$
 - b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_1 = 1\}$
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_\infty = 1\}$
28. a) Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski $|x^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.
 b) Probar que si x e y son linealmente dependientes, entonces vale la igualdad.
29. Mostrar con un contraejemplo que la desigualdad de C-S-B no se cumple para la norma infinito.
 ¿Se cumple la desigualdad para la norma uno? Justificar la respuesta.
30. Probar que si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Resolver en computadora

- I Dados x_1, \dots, x_n una muestra de una variable aleatoria, implementar rutinas que calculen la media y la varianza utilizando operaciones vectoriales.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- II Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- a) Demostrar que $A^t A$ y $A A^t$ son simétricas.
- b) Implementar una rutina que dada una matriz cuadrada verifique si la misma es simétrica.
- c) Analizar la función implementada en el item anterior con la matriz B generada de la siguiente forma:

```
>> A = rand(4);
>> B = A'*A*0.1/0.1;
```

Analizar el resultado, revisar la implementación y (eventualmente) reimplementar la función.

- III Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con n par y B triangular inferior.

- a) Realizar la multiplicación AB por bloques, partiendo ambas matrices en bloques de tamaño $n/2$.
- b) Implementar una rutina que realice la multiplicación por bloques, evitando cuentas innecesarias.

Funciones útiles

A continuación incluimos ejemplos para crear y operar con matrices y vectores usando Python+Numpy y Matlab/Octave.

- Inicializar matrices y vectores usando distintas sintaxis en Numpy. Tener en cuenta que Numpy maneja como tipos de datos básicos tanto **array** multidimensional como **matrix**; para operaciones de álgebra lineal se recomienda usar esta última.

```

from numpy import *
from numpy.linalg import *

# Distintas maneras de inicializar una matriz
A = matrix([[1,2],[3,4]])
B = matrix('1_2;_3_4')
C = matrix('1_2;_3_4', float)

# Para los vectores usamos matrices columna
v = matrix([[4],[5]])
w = matrix('4;_5')

# Crear matrices especiales
I = asmatrix(eye(3))          # Identidad de 3x3
D = asmatrix(diag([1,2]))     # Matriz diagonal
N = asmatrix(zeros((3,3)))    # Matriz nula de 3x3

# Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
E = bmat([[A,B],[C,D]])

```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Numpy

```

A + B      # Suma
A - B      # Resta
A * B      # Producto de matrices
A * v      # Producto de matriz por vector
3.2 * A    # Producto por escalar
A ** 2     # Potencia
A.t        # Traspuesta
inv(A)     # Inversa

```

- Inicializar matrices y vectores en Matlab/Octave, por defecto se inicializan con tipo de dato **double**.

```

% Distintas maneras de inicializar una matriz
A = [ 1,2 ; 3,4 ]
A = [ 1 2 ; 3 4 ]
C = [[1 2];[3,4]]

% Para los vectores usamos matrices columna
v = [4 ; 5]

```

```

% Crear matrices especiales
I = eye(3)           % Identidad de 3x3
D = diag([1,2])      % Matriz diagonal
N = zeros(3,3)       % Matriz nula de 3x3

% Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
E = [A,B;C,D]
E = [[A,B];[C,D]]
E = [[A B];[C D]]

```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Matlab/Octave

```

A + B           % Suma
A - B           % Resta
A * B           % Producto de matrices
A * v           % Producto de matriz por vector
3.2 * A         % Producto por escalar
A^2             % Potencia
A'              % Traspuesta
inv(A)         % Inversa

```

Referencias

- [1] Serge Lang. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- [2] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [3] G. Strang. *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Ed. Paraninfo, 2007.