Apunte de Métodos Numéricos

Lucas Di Salvo

May 22, 2022

Contenidos

Lista de Algoritmos

1 Elementos de Álgebra Lineal

1.1 Definiciones y operaciones básicas

1.1.1 Vector

$v \in \mathbb{R}^n$ n-upla de coeficientes reales

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Suma: $w = v + u$ con $w_i = v_i + u_i$ para $i = 1, \ldots, n$ (conmutativa, asociativa)
- Multiplicación por escalar: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha v$ con $w_i = \alpha v_i$ para $i = 1, \ldots, n$
- Producto interno: $< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

1.1.2 Combinaciones lineales

Dados $v^k \in \mathbb{R}^n$ para $k = 1, \ldots, K$

- Combinación lineal: $w = \sum_{k_1}^{k} \alpha_k v_k$.
- Vectores linealmente independientes: $\sum_{k_1}^{k} \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_k = 0 \ \forall k = 1, \ldots, K$.
- Vectores linealmente dependientes: existen α_k con $k = 1, \ldots, K$ no todos nulos tal que $\sum_{k_1}^{k} \alpha_k v_k = 0$.
- Subespacio generado: $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = \sum_{k_1}^{k} \alpha_k v_k\}$.
- dimensión de S: Cantidad máxima de vectores linealmente independientes en S.
- Base de S: Conjunto de vectores linealmente independientes que generan a S.

1.2 Matrices

Matriz: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$

- Suma: Definida si $m = p$, $n = q$, $C = A + B$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (conmutativa, asociativa)
- Producto por escalar: $C = \alpha A$ con $c_{ij} \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Multiplicación Difinida si $n = m$ (no es conmutativa)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ para } i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \ C \in \mathbb{R}^{m \times q}$$

1.2.1 Matrices útiles

- Matriz identidad: $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular superior: $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$U = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$L = \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

- Producto de triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).

1.2.2 Definiciones útiles

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Rango de A: Cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.
- Matriz inversa: Definida si $m = n$. $A^{-1}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Donde $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ y

$$A \text{ inversible} \iff rang(A) = n \iff det(A) \neq 0$$

- La inversa (si existe) de una matriz diagonal es matriz diagonal.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular inferior es matriz triangular inferior.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular superior es matriz triangular superior.
- Si tanto A como B son inversibles, entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Matriz estrictamente diagonal dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall 1, \dots, n$$

- Matriz traspuesta $A^t \int \mathbb{R}^{n \times m}$
  - $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$
  - $(A^t)^t = A$

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- Traza de una matriz (cuadrada): $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

  Propiedades:

  - $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
  - $tr(cA) = ctr(A)$
  - $tr(A) = tr(A^t)$
  - Si el producto de $A \cdot B$ es posible a ambos lados ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$), entonces se tiene que $tr(AB) = tr(BA)$
  - Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces

$$tr(A^tB) = tr(AB^t) = tr(B^tA) = tr(BA^t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

  - La traza es invariante en permutaciones cíclicas:

$$tr(ABCD) = tr(BCDA) = tr(CDAB) = tr(DABC)$$

  - En caso de que se trate de tres matrices simétricas, las permutaciones no cíclicas están permitidas:

$$tr(ABC) = tr((ABC)^t) = tr(CBA) = tr(ACB)$$

  - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

    donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A (contando multiplicidad).

- Matriz *nilpotente*: Es una matriz A la cual su determinante es cero, y donde existe un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Con esto también se tiene que

  - A no es inversible.
  - $I - A$ es inversible.

- Matriz de permutación: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{111} & a_{13} & a_{12} \\ a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{42} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1): $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \alpha a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2): $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} & \alpha a_{14} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \alpha a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + \alpha a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + \alpha a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + \alpha a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Espacio imagen: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \; : \; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ con } Ax = y\}$$

Combinaciones lineales de las columnas de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} x_i + \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

- Espacio Nulo: $Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax = 0\}$

$$Nu(A) \neq \emptyset \iff \text{las columnas de } A \text{ son linealmente independientes}$$

1.3 Transformaciones lineales

$f \; : \; \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice una transformación lineal si cumple:

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$
- $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$

1.3.1 Matriz asociada

- $A \cdot e_i =$ "columna i de A", donde $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $e_j^t \cdot A =$ "fila j de A".

Toda transformación lineal f tiene su matriz asociada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde se dice que la matriz de la transformación f es A.

$$A = M(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

donde $f(e_i)$ tiene n elementos.
Propiedades:

- $f(x) = M(f) \cdot x$
- $M(f) \cdot M(g) = M(f \circ g)$
- $M(id) = I$
- f es inversible iff $M(f)$ es inversible

1.3.2 Núcleo e Imagen de una transformación lineal

Núcleo de A

$$Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0\}$$

Imagen de A

$$Im(A) = \{y \ : \ x \in \mathbb{R}^n \wedge Ax = y\}$$

Cómo hallar la imagen de A:

Utilizando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$, calculo

$$Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A(x_1 e_1 + \dots x_n e_n) = x_1 \cdot A \cdot e_1 + x_2 \cdot A \cdot e_2 + \dots x_n \cdot A \cdot e_n$$

Luego, si todas las columnas son l.i.,

$$Im(A) =< col_1(A), col_2(A), \dots, col_n(A) >= \{x_1 \cdot col_1(A) + \dots + x_n \cdot col_n(A)\}$$

o en su defecto, sacando la cantidad de columnas no l.i. necesarias.

1.4 Dimensión

Teorema de la dimensión: Se tiene $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$m = dim(Nu(A)) + dim(Im(A))$$

donde se entiende a $dim(Im(A)) = rang_c(A)$ como "número de columnas l.i. de A".

1.5 Enunciados de la guía práctica

1.5.1 Ejercicio 19

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces:

- $Nu(B) \subseteq Nu(AB)$
- $Im(AB) \subseteq Im(A)$
- Si $AB = 0$ entonces $Im(B) \subseteq Nu(A)$

1.5.2 Ejercicio 21

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, todas las siguientes condiciones son equivalentes:

- A es inversible.
- $\nexists x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0$ tal que $Ax = 0$.
- Las columnas de A son linealmente independientes.
- Las filas de A son linealmente independientes.

1.5.3 Ejercicio 22

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se tiene que:

- $AB = AC \implies B = C$
- $AB = 0 \implies B = 0$
- Si $m = n$ y si $\forall D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que $tr(BD) = tr(CD)$, entonces $B = C$
- Si $m = n$ entonces $tr(B) = tr(ABA^{-1})$

2 Sistemas lineales

Un sistema lineal, se plantea frente a una operación matricial compuesto (por ejemplo) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y se busca $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.

Donde estos elements son de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & a_{nn}x_n & = b_n \end{matrix}$$

2.1 Soluciones y Sistemas equivalentes

- Si $rang(A) = n \implies$ existe un única solución
- Si $rang(A) < n$:
  - Si $b \notin Im(A) \implies$ el sistema no tiene solución.
  - Si $b \in Im(A) \implies$, el sistema tiene infinitas soluciones.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $d \in \mathbb{R}^n$

Los sistemas $Ax = b$ y $Bx = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Esto se puede aprovechar transformando la matriz original A a una matriz asociada B con el mismo conjunto de soluciones que sea más fácil de resolver.

2.2 Sistemas de ecuaciones fáciles

2.2.1 Matriz diagonal

$A = D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in \mathbb{R}^n$. Es dicha situación se tiene un sistema de la forma

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & a_{ii}x_i & & & = b_i \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{matrix}$$

- Si $a_{ii} \neq 0 \; \forall \; i \in \{1, \dots, n\}$, existe solución y es única. En dicho caso, el algoritmo tiene la forma

Algorithm 1 Simple substitution

for $i \in [1, \dots, n]$ **do**
  $x_i \leftarrow b_i / a_{ii}$
end for

El mismo tiene una complejidad que pertenece a $O(n)$.

- Si existe $a_{ii} = 0$
  - Si $b_i = 0$, x_i puede tomar cualquier valor.
  - Si $b_i \neq 0$. no existe solución.

2.2.2 Matriz triangular superior

$A = U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in \mathbb{R}^n$. Es dicha situación se tiene un sistema de la forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & \dots & a_{1i}x_i & \dots & a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & a_{ii}x_i & \dots & a_{in}x_n & = b_i \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

- Si $a_{ii} \neq 0 \; \forall \; i \in \{1, \dots, n\}$, existe solución y es única. En dicho caso, el algoritmo tiene la forma

Algorithm 2 Backward substitution

```
x_n ← b_n/a_n n
for i ∈ [n, ..., 2] do
    x_i ← (b_i − Σ_{j=i+1}^{n} a_ij x_j)/a_ii
end for
```

El mismo tiene una complejidad que pertenece a $O(n^2)$.

- Si existe $a_{ii} = 0$
  - Si $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, x_i puede tomar cualquier valor.
  - Si $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \neq 0$. no existe solución.

2.2.3 Matriz triangular inferior

$A = L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in \mathbb{R}^n$. Es dicha situación se tiene un sistema de la forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\
\vdots & \ddots & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & \dots & a_{ii}x_i & & & = b_i \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & \dots & a_{ni}x_i & \dots & a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

- Si $a_{ii} \neq 0 \; \forall \; i \in \{1, \dots, n\}$, existe solución y es única. En dicho caso, el algoritmo tiene la forma

Algorithm 3 Forward substitution

```
x_1 ← b_1/a_1 1
for i ∈ [2, ..., n] do
    x_i ← (b_i − Σ_{j=1}^{i−1} a_ij x_j)/a_ii
end for
```

El mismo tiene una complejidad que pertenece a $O(n^2)$.

- Si existe $a_{ii} = 0$
  - Si $b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j = 0$, x_i puede tomar cualquier valor.
  - Si $b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \neq 0$. no existe solución.

3 Eliminación Gaussiana

3.1 Sistemas de ecuaciones generales

Cuando el sistema de ecuaciones no es de las formas presentadas en la sección 2.2, se puede construir un sistema equivalente al que se quiere resolver cuya matriz asociada sea más fácil de resolver.

Esto se logra sumando y restando ecuaciones, multiplicando ecuaciones por un escalar, y permutando ecuaciones. En particular, el método por defecto que se utiliza para ello es conocido como *Eliminación Gaussiana*.

3.2 Algoritmo de Eliminación Gaussiana

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y $b \in \mathbb{R}^n$.

- Primer paso:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a^0_{11} & a^0_{12} & \dots & a^0_{1n} & b^0_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^0_{i1} & a^0_{i2} & \dots & a^0_{in} & b^0_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \dots & a^0_{nn} & b^0_n \end{array}\right] \to \begin{matrix} F_2 - (a^0_{21}/a^0_{11})F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a^0_{i1}/a^0_{11})F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a^0_{n1}/a^0_{11})F_1 \end{matrix} \to \left[\begin{array}{cccc|c} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} & b^1_1 \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} & b^1_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^1_{i2} & \dots & a^1_{in} & b^1_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} & b^1_n \end{array}\right]$$

- Paso i-ésimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a^{i-1}_{11} & a^{i-1}_{12} & \dots & a^{i-1}_{1i} & \dots & a^{i-1}_{1n} & b^{i-1}_1 \\ 0 & a^{i-1}_{22} & \dots & a^{i-1}_{2i} & \dots & a^{i-1}_{2n} & b^{i-1}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{i-1}_{ii} & \dots & a^{i-1}_{in} & b^{i-1}_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{i-1}_{ni} & \dots & a^{i-1}_{nn} & b^{i-1}_n \end{array}\right] \to \begin{matrix} F_{i+1} - (a^{i-1}_{i+1i}/a^{i-1}_{ii})F_i \\ \vdots \\ F_n - (a^{i-1}_{ni}/a^{i-1}_{ii})F_i \end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccccc|c} a^i_{11} & a^i_{12} & \dots & a^i_{1i} & a^i_{1i+1} & \dots & a^i_{1n} & b^i_1 \\ 0 & a^i_{22} & \dots & a^i_{2i} & a^i_{2i+1} & \dots & a^i_{2n} & b^i_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^i_{ii} & a^i_{ii+1} & \dots & a^i_{in} & b^i_i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^i_{i+1i+1} & \dots & a^i_{i+1n} & b^i_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^i_{ni+1} & \dots & a^i_{nn} & b^{i1}_n \end{array}\right]$$

- Último paso:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a^{n-1}_{11} & a^{n-1}_{12} & \dots & a^{n-1}_{1i} & \dots & a^{n-1}_{1n} & b^{n-1}_1 \\ 0 & a^{n-1}_{22} & \dots & a^{n-1}_{2i} & \dots & a^{n-1}_{2n} & b^{n-1}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{n-1}_{ii} & \dots & a^{n-1}_{in} & b^{n-1}_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a^{n-1}_{nn} & b^{n-1}_n \end{array}\right]$$

3.2.1 Esquema básico

Con la condición necesaria de que $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Algorithm 4 Eliminación Gaussiana

for $i = 1, \ldots, n-1$ **do**
  for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $m_{ji} \leftarrow a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$ ▷ *1 (c)ociente*
    for $k = i, \ldots, n+1$ **do**
      $a_{jk}^{i} \leftarrow a_{jk}^{i-1} - m_{ji} \cdot a_{ik}^{i-1}$ ▷ *1 (p)roducto, 1 (r)esta*
    end for
  end for
end for

Si se hace el conteo de operaciones se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot c + (n-i)(n-i+2) \cdot p + (n-i)(n-i+2) \cdot r \qquad \in \ O(n^3)$$

Si en el paso i-ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i+1$ a n. En este caso, la columna i-ésima desde la posición $i+1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.
- Existe $a_{j'i}^{i-1} \neq 0$ para algún $j' \geq i+1$. En este caso, basta permutar la fila i con la j' y continuar con el algoritmo.

3.3 Estrategias de pivoteo

Es deseable evitar errores generados por trabajar con aritmética finita, para ello se pueden utilizar algunas estrategias de pivoteo.

- Pivoteo parcial: Entre las filas i a n, utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.
- Pivoteo completo: Entre las filas i a n y las columnas i a n, calcular el mayor $|a_{kl}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas y columnas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

4 Factorización LU

Resolver varios sistemas de ecuaciones con Eliminación Gaussiana tiene un costo que pertenece a $O(n^3)$ por cada uno. Hay una manera de evitar esto con una factorización llamada LU.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior con unos en su diagonal principal, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior, y por último

$$A = LU$$

4.1 Utilidad

Se tiene que $Ax = b$, luego

$$LUx = b$$

y se resuelve en dos etapas:

$$Ly = b$$
$$Ux = y$$

los cuales son dos sistemas triangulares con un costo de computo que pertenece a $O(n^2)$.

4.2 Matriz de transformación gaussiana

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supongamos que aplicamos eliminación Gaussiana y se verifica que $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Luego, sea la matriz elemental (tipo2), y $m_{ji} = \frac{a_{ji}^{i-1}}{a_{ii}^{i-1}}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y con ello puedo realizar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1j}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2j}^0 & \dots & a_{2n}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & \dots & a_{3j}^0 & \dots & a_{3n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nj}^0 & \dots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1j}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 - m_{21}a_{11}^0 & a_{22}^0 - m_{21}a_{12}^0 & \dots & a_{2j}^0 - m_{21}a_{1j}^0 & \dots & a_{2n}^0 - m_{21}a_{1n}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & \dots & a_{3j}^0 & \dots & a_{3n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nj}^0 & \dots & a_{nn}^0 \end{bmatrix}$$

lo cual es lo mismo que la operación $F_2 - m_{21}F_1$ de la Eliminación Gaussiana. Con esto se puede pensar en una matriz llamada *primera matriz de la eliminación gaussiana* de la forma

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{i1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y con la misma puedo realizar el producto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{i1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1j}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2j}^0 & \dots & a_{2n}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & \dots & a_{3j}^0 & \dots & a_{3n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \dots & a_{ij}^0 & \dots & a_{in}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nj}^0 & \dots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1j}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 - m_{21}a_{11}^0 & a_{22}^0 - m_{21}a_{12}^0 & \dots & a_{2j}^0 - m_{21}a_{1j}^0 & \dots & a_{2n}^0 - m_{21}a_{1n}^0 \\ a_{31}^0 - m_{31}a_{11}^0 & a_{32}^0 - m_{31}a_{12}^0 & \dots & a_{3j}^0 - m_{31}a_{1j}^0 & \dots & a_{3n}^0 - m_{31}a_{1n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^0 - m_{i1}a_{11}^0 & a_{i2}^0 - m_{i1}a_{12}^0 & \dots & a_{ij}^0 - m_{i1}a_{1j}^0 & \dots & a_{in}^0 - m_{i1}a_{1n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 - m_{n1}a_{11}^0 & a_{n2}^0 - m_{n1}a_{12}^0 & \dots & a_{nj}^0 - m_{n1}a_{1j}^0 & \dots & a_{nn}^0 - m_{n1}a_{1n}^0 \end{bmatrix}$$

Lo cual no es más que el primer paso de la Eliminación Gaussiana. De la misma forma, se tiene la i-ésima matriz de la transformación gaussiana para el i-ésimo paso de la eliminación gaussiana

$$M^i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{i+1i} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{ni} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y se pude realizar el i-ésimo paso de la eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{i+1i} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{ni} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{i-1} & \dots & a_{1i}^{i-1} & \dots & a_{1n}^{i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii}^{i-1} & \dots & a_{in}^{i-1} \\ 0 & \dots & a_{i+1i}^{i-1} & \dots & a_{i+1n}^{i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ni}^{i-1} & \dots & a_{nn}^{i-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \dots & a_{1i}^{i-1} & \dots & a_{1n}^{i-1} \\ 0 & a_{22}^{i-1} & \dots & a_{2i}^{i-1} & \dots & a_{2n}^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii}^{i-1} & \dots & a_{in}^{i-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{i+1i}^{i-1} - m_{i+1i}a_{ii}^{i-1} & \dots & a_{i+1n}^{i-1} - m_{i+1i}a_{in}^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni}^{i-1} - m_{ni}a_{ii}^{i-1} & \dots & a_{nn}^{i-1} - m_{ni}a_{in}^{i-1} \end{bmatrix}$$

4.3 Método de Eliminación Gaussiana

Con lo visto en la sección previa, se puede observar que el producto de las distintas M^i con A, realizan el algoritmo de Eliminación Gaussiana visto en la sección 3.2, obteniéndose una matriz triangular superior

$$M^{n-1}M^{n-2}\cdots M^1 A = U \text{ con } U \text{ triangular superior}$$

Un dato *importante* de todo esto es que se asume que $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

4.4 Propiedades de la matriz de transformación gaussiana

Tengo que puedo ver a M^i como

$$M^i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{i+1i} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{ni} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_{i+1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

es decir

$$M^i = I - m_i^t e_i$$

con $m_i = (0, \dots, m_{i+1i}, \dots, m_{ni})$ y e_i el i-ésimo vector canónico.
Y se tienen las siguientes propiedades:

- M^i es triangular inferior.
- M^i es inversible.

Veamos un poco esta segunda propiedad

$$(I - m_i^t e_i)(I + m_i^t e_i) = I + m_i^t e_i - m_i^t e_i - m_i^t e_i m_i^t e_i = I - m_i^t e_i m_i^t e_i$$

$$\text{pero } e_i m_i^t = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_{i+1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{bmatrix} = 0$$

Entonces tengo que $(I - m_i^t e_i)(I + m_i^t e_i) = I \implies (M^i)^{-1} = (I - m_i^t e_i)^{-1} = I + m_i^t e_i$.
y observando esto se tiene que

$$M^{n-1} M^{n-2} \cdots M^1 A = U$$
$$A = (M^1)^{-1} (M^2)^{-1} \cdots (M^{n-1})^{-1} U$$
$$A = (I + m_1^t e_1)(I + m_2^t e_2) \cdots (I + m_{n-1}^t e_{n-1}) U$$

y se puede observar que $m_i^t e_i m_j^t e_j = 0$ si $i < j$, con esto

$$A = (I + m_1^t e_1 + m_2^t e_2 + \cdots + m_{n-1}^t e_{n-1}) U = LU$$

luego

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ni} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1i} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2i} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & u_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4.5 Propiedades de LU

- La factorización LU está asociada a la Eliminación Gaussiana sin necesidad de intercambio de filas. Se verifica que $l_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- No toda matriz tiene factorización LU, por ejemplo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene todas sus submatrices principales no singulares, entonces tiene factorización LU. *Idea* de demostración por inducción:
  - Caso Base: Si $n = 2$ tengo
    $$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
    si se puede realizar Eliminación Gaussiana, es porque $a_{11} \neq 0$. Entonces es válido.
  - Caso inductivo: La *hipótesis inductiva* que se toma es que vale para A_n, siendo la misma:
    $$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
    Luego, quiero ver que vale que para A_{n+1}. En particular, si toma la submatriz principal de orden n, cumple con todas las hipótesis necesarias para poder afirmar que
    $$A_n = L_n U_n,$$
    y ahora quiero ver que
    $$A_{n+1} = L_{n+1} U_{n+1},$$
    donde tengo que L_{n+1} y U_{n+1} son de la forma
    $$L_{n+1} = \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ l_{n+1}^t & 1 \end{bmatrix} \qquad U_{n+1} = \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0^t & u_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$
    para averiguar esto necesito analizar la siguiente igualdad
    $$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & c_{n+1} \\ f_{n+1}^t & a_{n+1n+1} \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ l_{n+1}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0^t & u_{n+1n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_n U_n & L_n u_{n+1} \\ l_{n+1}^t U_n & l_{n+1}^t u_{n+1} + u_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$
    y lo único que falta para que esto se cumpla es que
    - $c_{n+1} = L_n u_{n+1}$
    - $f_{n+1}^t = l_{n+1}^t U_n$
    - $a_{n+1n+1} = l_{n+1}^t u_{n+1} + u_{n+1n+1}$
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y existe factorización LU, entonces es única.
- Si A es inversible con factorización LU, entonces se puede aplicar Eliminación Gaussiana sin pivoteo.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces tiene factorización LU. *Idea* de demostración:

  Para esto se puede probar que si A es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces es inversible. Esto lo pruebo por el absurdo, supongo que A no es inversible, es decir, existe $x^* \neq 0$ tal que $Ax^* = 0$ (con esto sus filas son linealmente dependientes).

  $$\text{como } x^* \neq 0, \exists x_k^* \in x \ : \ |x_k^*| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i^*| > 0$$

  y hasta acá tengo que

  $$\begin{bmatrix} a_{k1}, & a_{k2}, & \dots, & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^* = 0$$

lo cual es lo mismo que

$$a_{kk}x_k^* + \sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^* = 0$$

$$a_{kk}x_k^* = -\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^*$$

y aplicando módulo a ambos lados

$$|a_{kk}||x_k^*| = |\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^*| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j^*|$$

y con esto, como $x_{kk}^* \neq 0$ y $\frac{|x_j^*|}{|x_k^*|} \leq 1$

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|\frac{|x_j^*|}{|x_k^*|} \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

pero esto resulta absurdo,pues en dicho caso, A no sería estrictamente diagonal dominante.

Luego, como todas las matrices principales de A son estrictamente diagonal dominantes, son inversibles, y entonces A tiene factorización LU.

- Toda matriz estrictamente diagonal dominante tiene todas sus submatrices principales diagonal dominantes.
- Si a una matriz A estrictamente diagonal dominante se le aplica el primer paso de la Eliminación Gaussiana, su submatriz principal resultante también es estrictamente diagonal dominante. *Idea* de demostración:

  Hay que tener en cuenta que los coeficientes cambia de la forma

  $$a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - \frac{a_{i1}^0}{a_{11}^0} \cdot a_{1j}^0$$

  y quiero ver que

  $$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{ij}^1| < |a_{ii}^1|$$

  procedo a probarlo

  $$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{ij}^1| = \sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{ij}^0 - \frac{a_{i1}^0}{a_{11}^0} \cdot a_{1j}^0| \leq \sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{ij}^0| + \sum_{j=2,j\neq i}^{n} |\frac{a_{i1}^0}{a_{11}^0} \cdot a_{1j}^0| < |a_{ii}^0| - |a_{i1}^0| + \frac{|a_{i1}^0|}{|a_{11}^0|} \cdot \sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{1j}^0|$$

  y luego se tiene

  $$< |a_{ii}^0| - |a_{i1}^0| + \frac{|a_{i1}^0|}{|a_{11}^0|} \cdot (|a_{11}^0| - |a_{1i}^0|) = |a_{ii}^0| - \frac{|a_{i1}^0|}{|a_{11}^0|} \cdot |a_{1i}^0| \leq |a_{ii}^0 - \frac{|a_{i1}^0|}{|a_{11}^0|} \cdot |a_{1i}^0| = |a_{ii}^1|$$

  y con esto se concluye que

  $$\sum_{j=2,j\neq i}^{n} |a_{ij}^1| < |a_{ii}^1|$$

- Si A es estrictamente diagonal dominante, su factorización LU es única.

4.6 Matriz Banda

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es una matriz banda si

$$a_{ij} = 0 \ \forall \ i,j \ : \ j < q \wedge i < p$$

donde p y q determinan el ancho de banda izquierdo y derecho (el ancho de banda de dicha matriz está dado por $p+q-1$)

(una matriz banda tendrá factorización LU solo si sus diagonales principales son inversibles)

4.6.1 Matrices tridiagonales

Un caso particular de las matrices banda es cuando $p = q = 2$, donde se tiene una matriz tridiagonal de la forma

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

en dicha situación, computar su factorización LU es más simple que con otras matrices generales.

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \alpha_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & c_2 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \beta_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & \beta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_n \end{bmatrix} = LU$$

donde $b_1 = \beta_1$ y

$$a_j = \alpha_j \cdot \beta_{j-1} \qquad\qquad b_j = \alpha_j \cdot c_{j-1} + b_j$$

de esta forma la complejidad de esta factorización pertenece a $O(n)$.

4.7 Factorización PLU

En el caso de que exista $i = 1, \dots, n$ para el cual $a_{ii}^{i-1} = 0$, se puede continuar la Eliminación Gaussiana mediante permutación de filas y obtener una factorización LU de la matriz original permutada, de la forma

$$PA = LU$$

siendo P la matriz de permutación que establece como se intercambiaron las filas.

4.8 Enunciados de la guía práctica

4.8.1 Ejercicio 5

Sean $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A_h = L_h U$ es una factorización LU de A_h $\forall h$ (U es la misma para todas). Sea $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$, probar:

a. A tiene factorización LU.

Tengo que

$$A = \sum_{h=1}^{k} A_h = \sum_{h=1}^{k} (L_h U) = (\sum_{h=1}^{k} L_h) U = \underbrace{\frac{1}{k} \cdot (\sum_{h=1}^{k} L_h)}_{\widetilde{L}} \overbrace{k \cdot U}^{\widetilde{U}}$$

Luego, como $\widetilde{L}$ es triangular inferior con unos en su diagonal principal y $\widetilde{U}$ es triangular superior, A tiene factorización LU, $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$

b. Para $1 \leq i, j, \leq n$, los m_{ij} de la triangulación gaussiana de A son el promedio de los m_{ij}^h

Tengo que cada L_h es de la forma

$$L_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{21}^h & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ m_{n1}^h & \dots & \dots & m_{nn-1}^h & 1 \end{bmatrix}$$

y tengo que $\widetilde{L}$ es de la forma

$$\widetilde{L} \; = \; \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} L_h \; = \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\sum_{h=1}^{k} m_{21}^h}{k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{\sum_{h=1}^{k} m_{n1}^h}{k} & \dots & \dots & \frac{\sum_{h=1}^{k} m_{nn-1}^h}{k} & 1 \end{bmatrix}$$

donde cada $m_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^{k} m_{ij}^h}{k}$

4.8.2 Ejercicio 9

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, $A = TS$, con T triangular inferior y S triangular superior. Probar:

a. T y S son inversibles.

Como A es inversible, se tiene que $det(A) \neq 0$, luego

$$0 \neq det(A) = det(TS) = det(T)det(S) \implies det(T) \neq 0 \wedge det(S) \neq 0$$

lo cual implica que T es inversible y S es inversible.

b. A tiene LU.

Si tomo (por ejemplo)

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad\qquad D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

tengo que $D_1 D_2 = I$, y luego

$$A = TS = TIS = T(D_1 D_2)S = (TD_1)(D_2 S).$$

con esto, sean $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonales, con $(D_1)_{ii} = \frac{1}{T_{ii}}$ y con $(D_2)_{ii} = T_{ii}$. Donde $D_1 D_2 = I$.

con lo que $A = TS = TIS = \underbrace{TD_1}_{L}\underbrace{D_2S}_{U}$. Luego, quiero ver que esto es una factorización LU.

Tengo que L es triangular inferior con unos en su diagonal y U triangular superior. Adicionalmente

$$(L)_{ii} = \underbrace{fila_i(T)}_{(*,T_{ii},0)} \cdot \underbrace{columna_i(D_1)}_{(0,\frac{1}{T_{ii}},0)} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

con lo que se encontró $L = TD_1$ triangular inferior con unos en la diagonal y $U = D_2S$ triangular superior, de forma que $A = LU$.

c. La matriz $\begin{bmatrix} A & b \\ c^t & d \end{bmatrix}$ tiene LU para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$, $c^t \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$, y hallarla.

Sean

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ l_{21}^t & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & u_{12} \\ 0^t & u_{22} \end{bmatrix}$$

Se necesita que L_{11} sea triangular inferior con unos en su diagonal, y U_{11} sea triangular superior. Luego,

- $A = L_{11}U_{11}$
- $b = L_{11}u_{12}$
- $c^t = l_{21}^t U_{11}$
- $d = l_{21}^t u_{12} + u_{22}$

y como sé que A es inversible y tiene factorización LU, tengo que $L_{11} = TD_1$ y $U = D_2S$. Con ello, teniendo en cuenta que $D_1^{-1} = D_2$,

- $b = L_{11}u_{12} \implies D_2T^{-1}b = D_2T^{-1}L_{11}u_{12} = D_2T^{-1}TD_1u_{12} \implies u_{12} = D_2T^{-1}b$
- $c^t = l_{21}^t U_{11} \implies c^tS^{-1}D_1 = l_{21}^t D_2SS^{-1}D_1 \implies c^tS^{-1}D_1 = l_{21}^t$
- $u_{22} = d - l_{21}^t u_{12} = d - c^tS^{-1}D_1D_2T^{-1}b = d - c^tS^{-1}T^{-1}b = d - c^t(TS)^{-1}b = d - c^tA^{-1}b$

Luego, se puede ver que obtuve $\widetilde{L}$ triangular inferior con unos en su diagonal y $\widetilde{U}$ triangular de forma que

$$\begin{bmatrix} TD_1 & 0 \\ c^tS^{-1}D_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2S & D_2T^{-1}b \\ 0^t & d - c^tA^{-1}b \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} A & b \\ c^t & d \end{bmatrix}$$

con lo que se encontró una factorización LU.

5 Normas

5.1 Normas vectoriales

$f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $f(x) = 0 \iff x \neq 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

5.1.1 Ejemplos

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
- $||x||_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$

5.2 Normas matriciales

$F \; : \; \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ es una norma si:

- $F(A) > 0$ si $A \neq 0$
- $F(A) = 0 \iff A \neq 0$
- $F(\alpha x) = |\alpha| F(A)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
- $F(A+B) \leq F(A) + F(B)$
- $F(AB) \leq F(A)F(B)$ (propiedad adicional, son normas sub-multiplicativas, $m = n$)

5.2.1 Ejemplos

- Norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)}$

5.3 Normas matriciales inducidas

Sean f_1 una norma definida en $\mathbb{R}^m$ y f_2 una norma definida en $\mathbb{R}^n$
$F : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x \neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

$$F(A) = \max_{x : f_2(x) = 1} f_1(Ax)$$

Las normas inducidas por una norma vectorial verifican $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

5.3.1 Ejemplos con matriz cuadrada

Ejemplo para $n = m$

- $||A||_1 = \max\limits_{x : ||x||_1 = 1} ||Ax||_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- $||A||_2 = \max\limits_{x : ||x||_2 = 1} ||Ax||_2 = \sqrt{\max |\lambda| \; : \; \lambda \text{ autovalor de } A^t A}$
- $||A||_p = \max\limits_{x : ||x||_p = 1} ||Ax||_p$
- $||A||_\infty = \max\limits_{x : ||x||_\infty = 1} ||Ax||_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

5.4 Número de condición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||\cdot||$ una norma matricial. Se define el número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

- Si $||\cdot||$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$
- Si $||\cdot||$ es una norma sub-multiplicativa, $\kappa(A) \geq 1$, pues

$$1 = \max_{x\ :\ ||x||=1} ||x|| = ||I|| = ||AA^{-1}|| \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

5.5 Cota del error

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||\cdot||$ una norma matricial inducida. Sea $\tilde{x}$ solución aproximada del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$ y $r = Ax - A\tilde{x} = b - \tilde{b}$

$$\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \frac{||b-\tilde{b}||}{||b||}$$

(pequeñas diferencias en b no garantizan pequeños cambios en el vector solución x)

5.5.1 Residuo

Sea el residuo $r = b - A\tilde{x}$, para probar que

$$||x-\tilde{x}|| \leq ||r|| \cdot ||A^{-1}||$$

tengo que

$$r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x-\tilde{x})$$
$$r = A(x-\tilde{x})$$
$$A^{-1}r = x - \tilde{x}$$

y cambiando los lados y aplicando la norma a ambos lados

$$||x-\tilde{x}|| = ||A^{-1}r|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r||$$

5.6 Enunciados de la guía práctica

5.6.1 Ejercicio 19

Sea $\kappa(A)$ el número de condición de una matriz, calculado a partir de una norma matricial submultiplicativa.

a) Probar que si $||I|| \geq 1 \implies \kappa(A) \geq 1$.

b) Probar que para una norma dada, $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ y $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$; $\forall \alpha \neq 0$

6 Matrices Simétricas Definidas Positivas

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A se dice símetrica definida positiva (sdp) si y sólo si

- $A = A^t$, simétrica.
- $x^t Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$, definida positiva.

6.1 Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- Toda submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- A sdp $\iff$ $B^t AB$ es sdp con B no singular.
- La submatriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n después del primer paso de la eliminación gaussiana es sdp.
- Se puede realizar el método de eliminación gaussiana sin necesidad de permutar filas.

6.2 Adicionales

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definidas positivas.

- ¿Es A^t definida positiva?

$$x^t A^t x = (Ax)^t (x^t)^t = (x^t Ax)^t = x^t Ax > 0$$

- ¿Es $A + B$ definida positiva?

$$x^t (A + B)x = \underbrace{x^t Ax}_{>0} + \underbrace{x^t Bx}_{>0} > 0$$

- ¿Es A^2 definida positiva?
  tengo que $e_i^t Ae_j = a_{ij}$, luego, si tengo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  obtengo que con $x = e_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

- ¿Es A^2 sdp si A es sdp?
  Tengo que $y^t y = ||y||_2^2$, y $A^2 = A^t A$, luego

$$x^t A^2 x = x^t A^t Ax = (x^t A^t)(Ax) = (Ax)^t (Ax) = ||Ax||_2^2 > 0$$

  pues $Ax \neq 0$ para todo $x \neq 0$ (A es inversible).

6.3 Enunciados de la guía práctica

6.3.1 Ejercicio 4

Sea A una matriz simétrica y definida posititiva. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

a) Si x e y son linealmente independientes, $|x^t Ay| < \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$

b) Si x e y son linealmente independientes, $|x^t Ay| = \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$

7 Factorización de Cholesky

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es sdp, y se tiene que

$$A = LU$$
$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$
$$A = A^t \implies LU = U^t L^t$$

como L es triangular inferior (y L^t triangular superior) con unos en la diagonal, es inversible

$$LU = U^tL^t \implies L^{-1}LU = L^{-1}U^tL^t \implies U = L^{-1}U^tL^t \implies U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^tL^t(L^t)^{-1} \implies U(L^t)^{-1} = L^{-1}U$$

y tengo que $U(L^t)^{-1} = L^{-1}U = D$ (matriz diagonal), y entonces

$$U(L^t)^{-1} = D \implies U(L^t)^{-1}L^t = DL^t \implies U = DL^t$$

con esto se llega a que con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = LULDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^tx = e_i$.

$$0 < x^tAx = x^tLDL^tx = e_i^tDe_i = d_{ii}$$
$$D = \sqrt{D}\sqrt{D}$$
$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$$

y $A = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$ es la Factorización de Cholesky.

7.1 Algoritmo de la Factorización de Cholesky

El cómputo a realizar es la siguiente factorización

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{l}_{i1} & \tilde{l}_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{l}_{n1} & \tilde{l}_{n1} & \dots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \dots & \tilde{l}_{n1} \\ 0 & \tilde{l}_{21} & \dots & \tilde{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}$$

haciendo uso del siguiente algoritmo

Algorithm 5 Factorización de Cholesky

$\tilde{l}_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$
for $j = 2 \dots n$ **do**
  $\tilde{l}_{j1} \leftarrow \frac{a_{j1}}{\tilde{l}_{11}}$
end for
for $i = 2 \dots n-1$ **do**
  $\tilde{l}_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}^2}$
  for $j = i+1 \dots n$ **do**
    $\tilde{l}_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{jk}\tilde{l}_{ik}}{\tilde{l}_{ii}}$
  end for
end for
$\tilde{l}_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{l}_{nk}^2}$

7.2 Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A_n = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ donde $a_{ij} = min\{i,j\}$
tengo entonces por ejemplo

$$A_1 = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Para probarlo hago inducción en n.

- Caso base: $n = 1$, $A_1 = [1]$, con ello tengo que $x^tAx = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$.
- Paso inductivo: Utilizo como hipótesis inductiva el que A_k es sdp $\forall\ k < n$, y pruebo que A_n es sdp.
  A_n es simétrica, para probar que es definida positiva, busco su factorización de cholesky. Tengo que

$$\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 1 & \dots & 1\\ \hline 1 & 2 & \dots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & \dots & n\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}L_{11} & \overline{0}^t\\ \hline L_{21} & L_{22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}L_{11} & L_{21}^t\\ \hline \overline{0} & L_{22}^t\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}L_{11}^2 & L_{11}L_{21}^t\\ \hline L_{21}L_{11} & L_{21}L_{21}^t + L_{22}L_{22}^t\end{array}\right]$$

donde se puede ver que estos productos resultan ser

- $L_{11}^2 = 1 \implies L_{11} = 1$
- $L_{21}L_{11} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \implies L_{21} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \implies L_{21}^t = \begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}$
- $L_{21}L_{21}^t + L_{22}L_{22}^t = \begin{bmatrix}2 & 2 & \dots & 2\\ 2 & 3 & \dots & 3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix} \implies L_{22}L_{22}^t = \begin{bmatrix}2 & 2 & \dots & 2\\ 2 & 3 & \dots & 3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}$

  lo cual es lo mismo que

$$L_{22}L_{22}^t = \begin{bmatrix}2 & 2 & \dots & 2\\ 2 & 3 & \dots & 3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & \dots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & \dots & n-1\end{bmatrix} = A_{n-1}$$

y por hipótesis inductiva, A_{n-1} es sdp, lo cual implica que $A_{n-1} = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$ (cholesky de A_{n-1}).
Entonces $L_{22} = \widetilde{L}$ de la factorizaión de cholesky de A_{n-1}.

8 Factorización QR

8.1 Matrices Ortogonales

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q es ortogonal sí y solo sí $QQ^t = Q^tQ = I$.

- Columnas ortogonales denorma 2 igual a 1.
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1.
- $||Q||_2 = 1$.
- $\kappa_2(Q) = 1$.
- $||Qx||_2 = ||x||_2$
- Producto de ortogonales es ortogonal.

8.2 Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ traingular superior tal que

$$A = QR$$

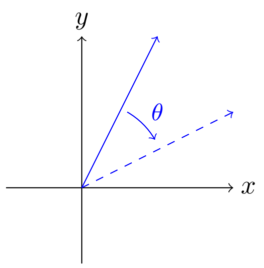
De forma que

$$Ax = b$$
$$QRx = b$$
$$Q^tQRx = Q^tb$$
$$Rx = Q^tb$$

Sistema triangular superior, $O(n^2)$.

8.3 Método de Givens (rotaciones)

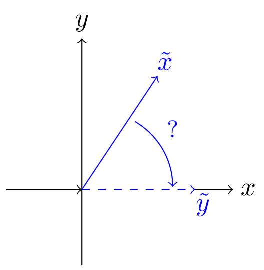
Dado un ángulo θ, sea la transformación lineal que rota a todo vector del plano en el ángulo θ en sentido horario.



$$W = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

W es ortonogal y $||Wx||_2 = ||x||_2$

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2, \tilde{y} = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, se busca la rotación W tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$



$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} \end{bmatrix}$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

donde si se realiza el siguiente producto

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & \dots & a_{3n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

De esta forma se puede contiguar con el siguiente paso, sean $\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 \\ a_{31}^1 \end{bmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{13} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & w_{13} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ w_{31} & 0 & w_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

donde si se realiza el siguiente producto

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & a_{22}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ 0 & a_{32}^2 & \dots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \dots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

De forma similar, para la posición $i1$, sean $\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11}^{i-1} \\ a_{i1}^1 \end{bmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{1i} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & \dots & w_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{i1} & 0 & \dots & w_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

donde si se realiza el siguiente producto con $i = n$

$$W_{1n} \cdots W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{32}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(n-1)} & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

8.3.1 Esquema

Para $i = 1, \ldots, n-1$, $j = i+1, \ldots, n$, sea

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & w_{ii} & \ldots & w_{ij} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & w_{ji} & \ldots & w_{jj} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

luego, con estas matrices tengo el siguiente producto

$$W_{n-1n}W_{n-2n}W_{n-1n-1}\cdots W_{1n}\cdots W_{12}A = R$$
$$A = W_{12}^t \cdots W_{1n}^t \cdots W_{n-2n-1}^t W_{n-2n}^t W_{n-1n} R$$
$$A = QR$$

8.3.2 Costo

$$W_{n-1n}W_{n-2n}W_{n-1n-1}\cdots W_{1n}\cdots W_{12}A = R$$

Calcular cada W_{ij}: 2 productos + 2 cocientes + 1 raiz.

- Primera Columna: W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \ldots, n$

  Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

  Costo total: $(n-1)(4n + 2n + 2 + 2 + 1)$

- i-ésima Columna: W_{ij} actúa entre las filas i y j para $j = i+1, \ldots, n$

  Costo: $4(n-i+1)$ productos + $2(n-i+1)$ sumas

  Costo total: $(n-1)(4(n-i+1) + 2(n-i+1) + 2 + 2 + 1)$

Costo total del algoritmo:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(4(n-i+1) + 2(n-i+1) + 2 + 2 + 1) \ \in O(\frac{4}{3}n^3)$$

8.3.3 Ejemplo

Se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y sea $\tilde{x} = (3, 0)$, buscamos W, rotación en plano, tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (0, 3)$.

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{0}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow W_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego con esta información se procede a calcular $W_{12}A$, de forma que

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (3, 4)$, buscamos W, rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (5, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Longrightarrow W_{13} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

y con esta información se procede a calcular $W_{13}W_{12}A$, de forma que

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

por último, sea $\tilde{x} = (20, -15)$, buscamos W, rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (25, 0)$.

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{||\tilde{x}||_2} & \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}||_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{25} & -\frac{15}{25} \\ \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix} \Longrightarrow W_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{25} & -\frac{15}{25} \\ 0 & \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix}$$

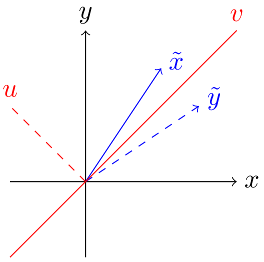
y se puede realizar el último producto

$$W_{23}W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{25} & -\frac{15}{25} \\ 0 & \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & 13 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Luego, tengo que $A = QR$ con

$$Q = W_{12}^t W_{13}^t W_{23}^t = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{20}{25} & -\frac{15}{25} \\ \frac{15}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{16}{25} \\ \frac{20}{25} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

8.4 Método de Householder (reflexiones)



$$H\tilde{x} = \tilde{y}$$

$$Hu = -u$$

$$Hv = v$$

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de $\tilde{x}$ es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$. Entonces, buscamos H tal que $H\tilde{x} = \alpha v - \beta u$

$$\alpha v - \beta u = \alpha v + \beta u - 2\beta u$$

$$H\tilde{x} = I\tilde{x} - W\tilde{x} \text{ tal que } W\tilde{x} = \alpha W v + \beta W u = 2\beta u$$

y se necesita que $Wv = 0$ y $Wu = 2u$.

Sea $P = uu^t$ y asumamos $||u||_2 = 1$, tenemos que

- P es simétrica.
- $PP^t = P$.
- $Pu = u$.
- $Pv = 0$.

Si definimos $W = 2P$, se tiene

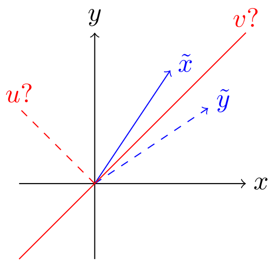
$$H = I - 2P$$
$$H\tilde{x} = (I - 2P)(\alpha v + \beta u) =$$
$$I(\alpha v + \beta u) - 2P(\alpha v + \beta u) =$$
$$\alpha v + \beta u - 2\beta u = \tilde{y}$$

8.4.1 Propiedades de H

$$H = I - 2uu^t$$

- H es simétrica.
- H es ortogonal.

Sean $\tilde{x},\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^n,\ \tilde{x} \neq \tilde{y},\ ||\tilde{x}||_2 = ||\tilde{y}||_2$. Existe una transformación de Householder tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.



$$v = \tilde{x} + \tilde{y}$$

$$u = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{||\tilde{x} - \tilde{y}||_2}$$

$$H = I - 2\frac{(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{y})^t}{||\tilde{x} - \tilde{y}||_2^2}$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$HA = \begin{bmatrix} ||\tilde{x}||_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$HA = R$$

$$H^t HA = H^t R$$

$$A = QR$$

8.4.2 Costo

8.4.3 Ejemplo

8.5 Propiedades