DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Matrices simétricas definidas positivas- versión 1.0

En este documento presentamos algunas propiedades de las matrices simétricas definidas positivas que necesitamos para fundamentar métodos numéricos relacionados con este tipo de matrices. Es material complementario de las diapos de la clase de matrices simétricas definidas positivas usadas durante el dictado virtual (pandemia-COVID-19).
No pretende ser un documento que desarrolle toda la teoría de matrices simétricas definidas positiva. Aquellos interesados en profundizar pueden consultar la extensa bibliografía que existe sobre el tema.

Comenzamos por recordar la definición.

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que A es simétrica definida positiva sii

- $A = A^t$
- $x^tAx > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Algunas propiedades

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica definida positiva. Entonces*

1. *A es no singular*
2. *$a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$*
3. *toda submatriz principal es simétrica definida positiva*
4. *para toda matriz B no singular, B^tAB es simétrica definida positiva.*

Demostración:

1. Si A fuera singular existiría $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Multiplicando a izquierda por x^t obtenemos $x^tAx = 0$ que contradice qu A sea definida positiva.
2. Multiplicamos a derecha e izquierda de A por el vector canónico e_i. Tenemos $e_i^tAe_i = a_{ii}$ que resulta positivo por ser A una matriz definida positiva.

3. Sea $A^{(k)}$ submatriz de orden k. Es fácil ver que es simétrica ya que $a_{ij}^{(k)} = a_{ij} = a_{ji} = a_{ji}^{(k)}$. Si no fuera definida positiva, existiría $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\bar{x}^t A^{(k)} \bar{x} \leq 0$. Construímos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = (\bar{x}, 0, \ldots, 0)$. Entonces

$$0 < x^t A x = (\bar{x}, 0, \ldots, 0)^t \begin{bmatrix} A^{(k)}\bar{x} \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \bar{x}^t A^{(k)} \bar{x} \leq 0$$

Llegamos a una contradicción. Por lo tanto $A^{(k)}$ es simétrica definida positiva.

4. La simetría es fácil de verificar:

$$(B^t A B)^t = B^t (B^t A)^t = B^t A^t B^{t^t} \overset{\substack{A \text{ es simétrica} \\ \uparrow}}{=} B^t A B$$

Veamos ahora si es definida positiva. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

$$x^t B^t A B x = y^t A y \text{ con } Bx = y$$

Como B es inversible y $x \neq 0$, entonces $y \neq 0$ y por ser A definida positiva resulta $y^t A y > 0$. Es decir, la matriz $B^t A B$ es definida positiva.

■

A continuación veremos que la eliminación gaussiana se puede realizar sin necesidad de permutar. Es decir, a través del proceso, los elementos de la diagonal son distintos de cero.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz simétrica definida positiva. Despues de finalizar el primer paso de la eliminación gaussiana, la submatriz conformada desde la fila 2 a la n y desde la columna 2 a la n es simétrica definida positiva.*

Demostración:
Sea M_1 la matriz asociada al primer paso de la eliminación gaussiana y $\tilde{A}$ la matriz $\in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ conformada pro la final 2 a n y columnas 2 a n después del primer paso de la eliminación. Recordamos la estructura de M_1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Realicemos el siguiente producto

$$M_1 A M_1^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} M_1^t$$

$$M_1 A M_1^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{n1}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 A M_1^t = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$$

Por una de las propiedades anteriores, podemos afirmar que $M_1 A M_1^t$ es simétrica definida positiva. Por la estructura de este producto, podemos concluir que $\tilde{A}$ es simétrica y definida positiva. Notar que esto implica que el primer elemento de la diagonal de $\tilde{A}$ es positivo.

■

Corolario: Toda matriz simétrica definida positiva tiene factorización LU.

Demostración:
Basados en la propiedad anterior deducimos que en cada paso de la eliminación gaussiana, las submatrices que van quedando también son simétricas y definidas positivas. Por lo tanto podemos concluir que la eliminación gaussiana puede realizarse y obtener así la factorización LU. Además todos los elementos de la diagonal de U son positivos. ∎

Proposición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica definida positiva. Existe $\tilde{L}$ matriz triangular inferior tal que $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$.

Demostración:
De la propiedad anterior sabemos que A tiene factorización LU. Como A es simétrica, entonces $LU = (LU)^t$. Además L es inversible (L tiene $1's$ en la diagonal). Multiplicamos a derecha e izquierda por L^{-1} y $(L^t)^{-1}$

$$LU = (LU)^t = U^tL^t$$

$$L^{-1}LU(L^t)^{-1} = L^{-1}U^tL^t(L^t)^{-1}$$
$$U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t$$

Del lado izquierdo deducimos que por ser producto de dos matrices triangulares superiores, es una matriz triangular superior. Del lado derecho, el mismo razonamiento pero con matrices triangulares inferiores. Entonces el producto es una matriz diagonal D.

$$D = U(L^t)^{-1} \Rightarrow DL^t = U$$

Como U tiene en la diagonal elementos positivos y L tiene $1's$, entonces $d_{ii} > 0$. Tenemos entonces:

$$A = LU$$

$$A = LDL^t$$
$$A = LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^t = LD^{\frac{1}{2}}(LD^{\frac{1}{2}})^t = \tilde{L}\tilde{L}^t$$

con $D^{\frac{1}{2}}$ matriz diagonal con sus elementos igual a la raíz cuadrada de los elementos de D y $\tilde{L} = LD^{\frac{1}{2}}$
En conclusión, existe $\tilde{L}$ tal que $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$ (factorización de Choleski). ∎