Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

LU - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de LU usadas durante el dictado virtual (pandemia-COVID-19).
Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en el caso que la liminación gaussiana no se encuentren con elemento nulo en la diagonal durante el proceso, se obtiene la factorización LU donde L es una matriz tringular inferior con 1's en la diagonal y U es triangular superior. En este documento incluimos demostraciones de algunas propiedades, enunciadas en las diapos de la clase, referidas a la existencia y unicidad de la factorización.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz inversible. Si A tiene factorización LU, entonces es única.*

Demostración:
Supongamos que existen al menos dos factorizaciones:

$$A = L_1U_1 = L_2U_2$$

Como A es inversible, entonces U_1 y U_2 son inversibles. Además, las inversas son también triangulares superiores. Tanto L_1 como L_2 son inversibles por ser triangulares inferiors con 1's en la diagonal y sus inversas son también triangulares inferiores con 1's en la diagonal. Entonces, partiendo de las dos factorizaciones:

$$L_1U_1 = L_2U_2$$

Multiplicando a izquierda por $(L_1)^{-1}$

$$(L_1)^{-1}L_1U_1 = (L_1)^{-1}L_2U_2$$
$$U_1 = (L_1)^{-1}L_2U_2$$

Multiplicando a derecha por $(U_2)^{-1}$

$$U_1(U_2)^{-1} = (L_1)^{-1}L_2U_2(U_2)^{-1}$$
$$U_1(U_2)^{-1} = (L_1)^{-1}L_2$$

La matriz de la izquierda es triangular superior por ser producto de matrices triangulares superiores. Si ahora analizamos el lado derecho, llegamos a la conclusión de que es triangular inferior. Las únicas matrices que son triangular inferior y superior al mismo tiempo son las matrices diagonales.

Entonces existe D diagonal tal que $D = U_1(U_2)^{-1} = (L_1)^{-1}L_2$.

Pero los elementos de la diagonal del producto $(L_1)^{-1}L_2$ valen 1. Entonces $D = I$ y deducimos que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$. ■

A continuación presentamos la demostración de una propiedad que da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de factorización LU.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular. A tiene factorización LU $\Leftrightarrow$ todas sus submatrices principales son no singulares.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si A es no singular y tiene factorización LU, entonces tanto L como U son no singulares. Los elementos de la diagonal de L son 1's y los elementos de la diagonal de U son no nulos. La submatrices principales de L son también triangulares inferiores con 1's en la diagonal, por lo tanto no singulares. La submatrices principales de U son también triangulares superiores con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto no singulares.

Como $A = LU$, L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces la submatriz de orden k de A es el resultado del producto de la submatriz de orden k de L y la submatriz de orden k de U. Como estas submatrices son no singulares, entonces la submatriz de orden k de A también lo es.

$\Leftarrow$) Demostramos por inducción en la dimensión de la matriz A

- Caso base: $n = 2$.

  Como a_{11} no es nulo por ser la submatriz principal de orden 1 de A, entonces el primer (y único ya que $n = 2$) paso de la eliminación gaussiana se puede realizar sin inconvenientes y se encuentra la factorización LU.

- Paso inductivo.

  Supongamos que para toda matriz no singular de dimensión $n \times n$ con submatrices principales no singulares existe factorización LU. Consideremos una matriz no singular de dimensión $(n+1)\times(n+1)$ con todas sus submatrices principales no singulares. Veamos que tiene factorización LU.

  Escribimos a A como:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(n)} & c_{n+1} \\ f_{n+1}^t & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

  donde $A^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, $f_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ y $a_{n+1n+1} \in \mathbb{R}$.
  Como todas las submatrices principales de A son no singulares, entonces $A^{(n)}$ y todas sus submatrices principales son no singulares y por lo tanto vale la hipótesis inductiva de que tiene factorización LU. Sea $A^{(n)} = L^{(n)}U^{(n)}$ y nos planteamos la siguiente posible factorizacion LU de A:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(n)} & c_{n+1} \\ f_{n+1}^t & a_{n+1n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^{(n)} & 0 \\ l_{n+1}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(n)} & u_{n+1} \\ 0 & u_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

  Realizando el producto por bloques, tenemos que debería verificarse que

$$A^{(n)} = L^{(n)}U^{(n)}$$

$$L^{(n)}u_{n+1} = c_{n+1}$$
$$l_{n+1}^t U^{(n)} = f_{n+1}^t$$
$$l_{n+1}^t u_{n+1} = u_{n+1n+1}$$

La primera ecuación se satisface ya que es la factorización LU de $A^{(n)}$. Como $L^{(n)}$ es no singular (triang infer con 1's en la diagonal), entonces el segundo sistema tiene solución y es única. Es decir, es posible determinar u_{n+1}. La matriz $U^{(n)}$ es no singular ya que $A^{(n)}$ es no singular, por lo tanto el tercer sistema tiene solución y es única. Es decir, es posible determinar l_{n+1}. Finalmente, ya determinados l_{n+1} y u_{n+1}, la última condición determina unívocamente a u_{n+1n+1}.

Concluimos entonces que existe la factorización LU de A.

■

En la próxima propiedad analizamos el caso particular de matrices estrictamente diagonal dominante.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz estrictamente diagonal dominante, entonces A tiene factorización LU.*

Demostración:
Realizamos la demostración de dos maneras distintas.

1. Vamos a demostrar que A es no singular y que todas las submatrices principales son no singulares. De esta manera estamos en condiciones de aplicar la propiedad anterior.

   Si A fuera singular, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Como $x \neq 0$, existe $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|x_{k_0}| = \max\limits_{j=1,\dots,n} |x_j|$ con $|x_{k_0}| \neq 0$..

   Consideremos la ecuación k_0 del sistema $Ax = 0$:

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{k_0 j} x_j = 0$$

   Separamos el término k_0

   $$\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} a_{k_0 j} x_j + a_{k_0 k_0} x_{k_0} = 0$$

   Pasamos restando

   $$\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} a_{k_0 j} x_j = -a_{k_0 k_0} x_{k_0}$$

   Tomamos módulo

   $$|\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} a_{k_0 j} x_j| = |a_{k_0 k_0} x_{k_0}|$$

   Mayoramos el módulo de una suma por la suma de los módulos

   $$\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} |a_{k_0 j} x_j| \geq |\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} a_{k_0 j} x_j| = |a_{k_0 k_0} x_{k_0}|$$

   Dividimos por $|x_{k_0}|$ (no es nulo)

   $$\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} |a_{k_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{k_0}|} \geq |a_{k_0 k_0}|$$

   Como $|x_{k_0}| = \max\limits_{i=j,\dots,n} |x_j|$, entonces $\frac{|x_j|}{|x_{k_0}|} \leq 1$ y podemos mayorar la suma

   $$\sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} |a_{k_0 j}| \geq \sum_{j=1, j\neq k_0}^{n} |a_{k_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{k_0}|} \geq |a_{k_0 k_0}|$$

   Lo cual nos lleva a una contradicción ya que la matriz es estrictamente diagonal dominante.

Como las submatrices principales de una matriz estrictamente diagonal dominante son también estrictamente diagonal dominante, concluimos que las submatrices principales son no singulares. Aplicando la propiedad anterior podemos concluir que existe factorización LU.

2. Vamos a demostrar que es posible realizar el primer paso de la eliminación gaussiana y que la matriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n que resulta de este paso es también estrictamente diagonal dominante. De esta manera, podremos afirmar que la eliminación gaussiana se puede aplicar sin inconvenientes y por lo tanto existe factorización LU.

   Como A es estrictamente diagonal dominante podemos afirmar que $a_{11} \neq 0$ y por lo tanto es posible realizar el primer paso de la eliminacion gaussiana. Analicemos como queda la matriz al finalizar este paso:

$$\tilde{F}_i = F_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} F_1 \rightarrow \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$$

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |\tilde{a}_{ij}| = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{mod resta} \leq \text{suma de modulos}}}{\leq} \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + |\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}| \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ edd}}}{<} |a_{ii}| - |a_{i1}| + |\frac{a_{i1}}{a_{11}}| \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}|$$

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |\tilde{a}_{ij}| \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ edd}}}{<} |a_{ii}| - |a_{i1}| + |\frac{a_{i1}}{a_{11}}| (|a_{11}| - |a_{1i}|) = |a_{ii}| - |a_{i1}| |\frac{a_{1i}}{a_{11}}|$$

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |\tilde{a}_{ij}| < |a_{ii}| - |a_{i1}| |\frac{a_{1i}}{a_{11}}| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{resta de mod} \leq \text{mod de resta}}}{\leq} |a_{ii} - a_{i1} \frac{a_{1i}}{a_{11}}| \overset{\substack{\text{def de } \tilde{a}_{ii} \\ \uparrow}}{=} |\tilde{a}_{ii}|$$

   Concluimos que la matriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n que resulta del primer paso de la eliminación gaussiana es también estrictamente diagonal dominante por lo que deducimos que existe factorización LU.

■

Proposición: *Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene factorización PLU.*

Demostración:
Si aplicamos la eliminación gaussiana, aplicando permutaciones cuando sea necesario por la presencia de elementos nulos en la diagonal durante el proceso, se obtiene el siguiente producto de matrices:

$$M^{n-1}P^{n-1}M^{n-2}P^{n-2} \ldots M^i P^i \ldots M^2 P^2 M^1 P^1 A = U$$

donde las matrices $M^i = I - m_i^t e_i$ realizan las operaciones entre las filas para obtener elementos nulos debajo de la diagonal y las matrices P^i son matrices de permutación que indican los intercambios realizados entre las filas.
Recordamos que M^i son matrices triangulares inferiores no singulares y P^i, por ser matriz de permutación entre dos filas, tambíen es no singular y su inversa es ella misma.
En cada término agregamos $(\mathbf{P^{i+2}} \ldots \mathbf{P^{n-1}} \mathbf{P^{n-1}} \ldots \mathbf{P^{i+2}}) = \mathbf{I}$ y obtenemos

$$M^{n-1}P^{n-1}M^{n-2}(\mathbf{P^{n-1}P^{n-1}})P^{n-2} \ldots (\mathbf{P^{i+2}} \ldots \mathbf{P^{n-1}P^{n-1}} \ldots \mathbf{P^{i+2}})P^{i+1}M^i(\mathbf{P^{i+1}} \ldots \mathbf{P^{n-1}P^{n-1}} \ldots \mathbf{P^{i+1}})P^i$$

$$\ldots M^2(\mathbf{P^3} \ldots \mathbf{P^{n-1}P^{n-1}} \ldots \mathbf{P^3})P^2 M^1(\mathbf{P^2} \ldots \mathbf{P^{n-1}P^{n-1}} \ldots \mathbf{P^2})P^1 A = U$$

Si ahora asociamos el producto de otra manera:

$$M^{n-1}(P^{n-1}M^{n-2}P^{n-1})\dots(P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})M^i(P^{i+1}\dots P^{n-1})$$
$$\dots(P^{n-1}\dots P^3)M^2(P^3\dots P^{n-1})(P^{n-1}\dots P^3P^2)M^1(P^2\dots P^{n-1})(P^{n-1}\dots P^2P^1)A = U$$

Si notamos $\tilde{M}^i = (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})M^i(P^{i+1}\dots P^{n-1})$, tenemos que:

$$M^{n-1}\tilde{M}^{n-2}\dots\tilde{M}^i\dots\tilde{M}^2\tilde{M}^1(P^{n-1}\dots P^2P^1)A = U$$

Veamos que estructura tiene $\tilde{M}^i$

$$\tilde{M}^i = (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(I - m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1})$$

Distribuyendo el producto

$$\tilde{M}^i = (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})I(P^{i+1}\dots P^{n-1}) - (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1})$$

$$\tilde{M}^i = I - (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1})$$

Como $P^{i+1}\dots P^{n-1}$ son matrices de permutación que realizan intercambios entre filas que ocupan lugares entre $i+1$ a n, entonces $e_i(P^{i+1}\dots P^{n-1}) = e_i$

Entonces

$$\tilde{M}^i = I - (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(m_i^t e_i) = I - \tilde{m}_i^t e_i$$

donde $\tilde{m}_i^t$ tiene los elementos de m_i^t permutados de acuerdo a las sucesivas permutaciones realizadas desde el paso $i+1$ a $n-1$.

Entonces

$$(M^{n-1}\tilde{M}^{n-2}\dots\tilde{M}^i\dots\tilde{M}^2\tilde{M}^1)(P^{n-1}\dots P^2P^1)A = U$$

de donde se deduce

$$PA = LU$$

con $L = (\tilde{M}^1)^{-1}(\tilde{M}^2)^{-1}(\tilde{M}^{n-2})^{-1}(M^{n-1})^{-1} = I + \tilde{m}_1^t e_1 + \tilde{m}_2^t e_2 + \dots + \tilde{m}_{n-2}^t e_{n-2} + m_{n-1}^t e_{n-1}$ y $P = P^{n-1}\dots P^2P^1$

$\blacksquare$