BCC202 - Estruturas de Dados I

Aula 07: Análise de Algoritmos (Parte III)

Pedro Silva

Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP
Departamento de Computação, DECOM
Email: **silvap@ufop.edu.br**

Conteúdo

Revendo conceitos

Função de Complexidade

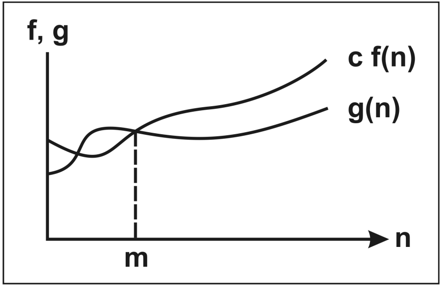
- Melhor caso x Caso médio x Pior caso.
- Qual a influência desta função em algoritmos aplicados sobre problemas de tamanho pequeno?
- E sobre problemas grandes?
- Estuda-se o comportamento assintótico das funções de custo. O que isso significa?

Comportamento Assintótico de funções

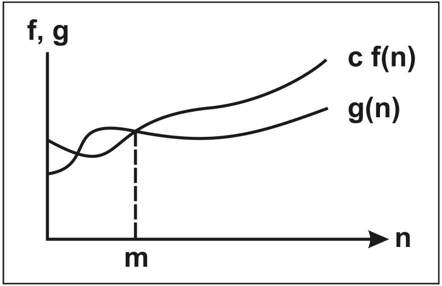
- Dominação Assintótica.
- Notação $\boldsymbol{O}$.
- Notação $\boldsymbol{\Omega}$.
- Notação $\boldsymbol{\Theta}$

Dominação Assintótica

- $f(n)$ **domina assintoticamente** $g(n)$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| <= c|f(n)|$.



Notação O



- O valor da constante m mostrado é o menor valor possível, mas qualquer valor maior também é válido.
- **Definição**: uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existem duas constantes positivas c e m tais que $g(n) <= cf(n)$, para todo $n >= m$.

Notação O - Operações

$$f(n) = O(f(n))$$

$$c * O(f(n)) = O(f(n)), \text{ c} = \text{constante}$$

$$O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$$

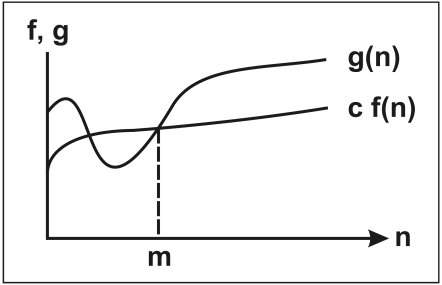
$$O(O(f(n))) = O(f(n))$$

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$$

$$O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$$

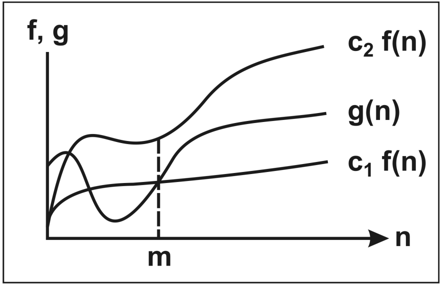
$$f(n) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$$

Notação Ω



- Especifica um **limite inferior** para $g(n)$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Omega(f(n))$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| >= c\ |f(n)|$.

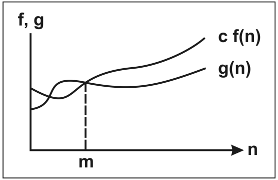
Notação Θ



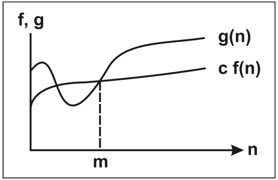
- Especifica um **limite assintótico firme** para $g(n)$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Theta(f(n))$ se:
  - Existem três constantes positivas c_1, c_2 e m, tais que, para $n >= m$, temos: $0 <= c_1 f(n) <= g(n) <= c_2 f(n)$

Para uma função ser $\Theta(f(n))$ ela deverá ser, ao mesmo tempo, $O(f(n))$ e $\Omega(f(n))$.

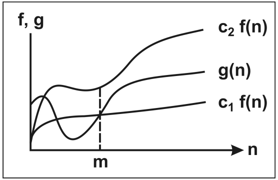
Algumas perguntas importantes



Notação O



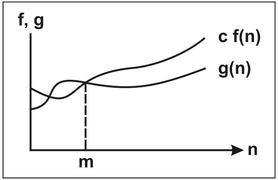
Notação Ω (Ômega)



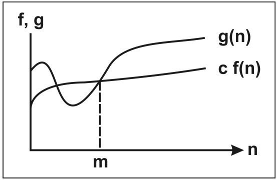
Notação Θ (Theta)

- n é $O(n \log n)$? Esta afirmação é útil?
- n^3 é $\Omega(n)$? Esta afirmação é útil?
- n é $O(n)$?
- n é $\Omega(n)$?
- n é $\Theta(n)$?
- n é $\Theta(n \log n)$?

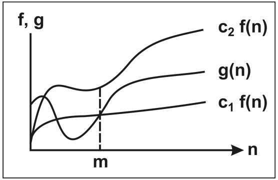
Algumas perguntas importantes



Notação O



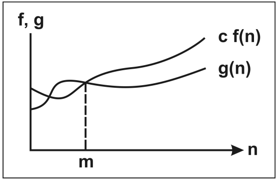
Notação Ω (Ômega)



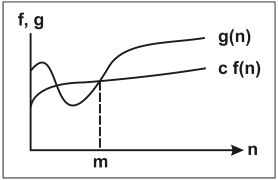
Notação Θ (Theta)

- n é $O(n \log n)$? Esta afirmação é útil?
- n^3 é $\Omega(n)$? Esta afirmação é útil?
- n é $O(n)$?
- n é $\Omega(n)$?
- n é $\Theta(n)$?
- n é $\Theta(n \log n)$?

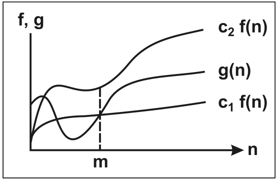
Algumas perguntas importantes



Notação O



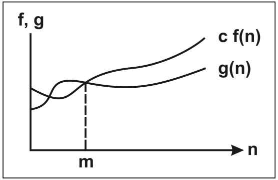
Notação Ω (Ômega)



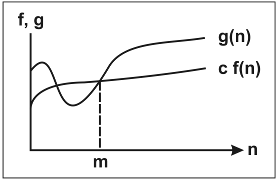
Notação Θ (Theta)

- $\boldsymbol{n}$ é $\boldsymbol{O(n \; log \; n)}$? Esta afirmação é útil?
- $\boldsymbol{n^3}$ é $\Omega(\boldsymbol{n})$? Esta afirmação é útil?
- $\boldsymbol{n}$ é $\boldsymbol{O(n)}$?
- $\boldsymbol{n}$ é $\Omega(\boldsymbol{n})$?
- $\boldsymbol{n}$ é $\Theta(\boldsymbol{n})$?
- $\boldsymbol{n}$ é $\Theta(\boldsymbol{n \; log \; n})$?

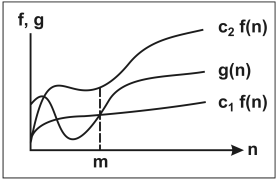
Algumas perguntas importantes



Notação O



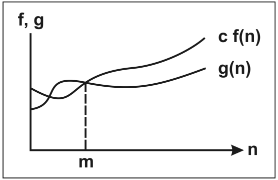
Notação Ω (Ômega)



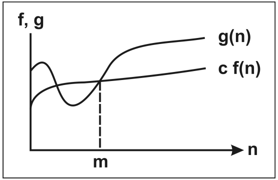
Notação Θ (Theta)

- n é $O(n \log n)$? Esta afirmação é útil?
- n^3 é $\Omega(n)$? Esta afirmação é útil?
- n é $O(n)$?
- n é $\Omega(n)$?
- n é $\Theta(n)$?
- n é $\Theta(n \log n)$?

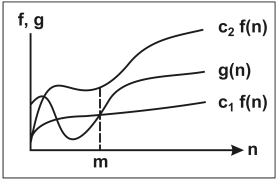
Algumas perguntas importantes



Notação O



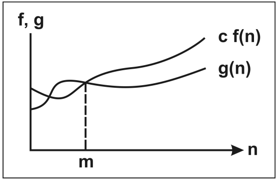
Notação Ω (Ômega)



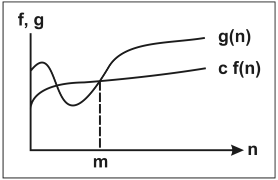
Notação Θ (Theta)

- n é $O(n \log n)$? Esta afirmação é útil?
- n^3 é $\Omega(n)$? Esta afirmação é útil?
- n é $O(n)$?
- n é $\Omega(n)$?
- n é $\Theta(n)$?
- n é $\Theta(n \log n)$?

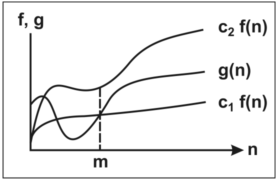
Algumas perguntas importantes



Notação O



Notação Ω (Ômega)



Notação Θ (Theta)

- n é $O(n \log n)$? Esta afirmação é útil?
- n^3 é $\Omega(n)$? Esta afirmação é útil?
- n é $O(n)$?
- n é $\Omega(n)$?
- n é $\Theta(n)$?
- n é $\Theta(n \log n)$?

Duas novas notações

Mais sobre notação assintótica

- Existem duas outras notações na análise assintótica de funções:
  - Notação $\boldsymbol{o}$ ("o" pequeno).
  - Notação $\boldsymbol{\omega}$ (ômega pequeno).
- Estas duas notações não são usadas normalmente, mas é importante saber seus conceitos e diferenças em relação às notações $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{\Omega}$, respectivamente.

Notação o ("o" pequeno)

- O limite assintótico superior definido pela notação O pode ser **assintoticamente firme** ou **não**:
  - Por exemplo, o limite $2n^2 = O(n^2)$ é assintoticamente firme, mas o limite $2n = O(n^2)$ não é.
- A notação o é utilizada para definir um limite **superior** que **não é assintoticamente firme**.
- Matematicamente, $g(n)$ é $o(f(n))$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| < c|f(n)|$.

Notação ω (ômega pequeno)

- De forma análoga, a notação ω está relacionada com a notação Ω.
- A notação ω é utilizada para definir um limite **inferior** que **não é assintoticamente firme**.
- Matematicamente, $g(n)$ é $\omega(f(n))$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| > c\ |f(n)|$.

Hierarquia de funções

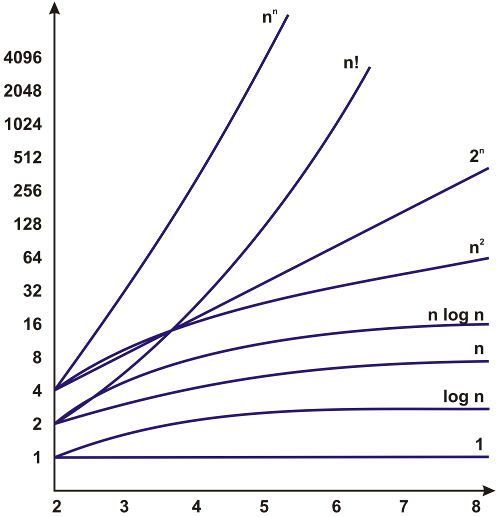
Hierarquia de funções

A seguinte hierarquia de funções pode ser definida do ponto de vista **assintótico**:

$$1 \prec log\ log\ n \prec log\ n \prec n^{\epsilon} \prec n^{c} \prec n^{log\ n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

onde ϵ e c são constantes em que $0 < \epsilon < 1 < c$.

Hierarquia de funções



Comparação de Programas

Comparação de Programas

- Um programa com tempo de execução $O(n)$ é melhor que outro com tempo $O(n^2)$.
- Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração.
- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - Depende do tamanho do problema (valor de n).
  - Para $n = 40$, o problema $O(n^2)$ é melhor do que o $O(n)$.
  - E para $n = 100$? E para $n = 150$?

Comparação de Programas

- Um programa com tempo de execução $O(n)$ é melhor que outro com tempo $O(n^2)$.
- Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração.
- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - Depende do tamanho do problema (valor de n).
  - Para $n = 40$, o problema $O(n^2)$ é melhor do que o $O(n)$.
  - E para $n = 100$? E para $n = 150$?

Comparação de Programas

- Um programa com tempo de execução $O(n)$ é melhor que outro com tempo $O(n^2)$.
- Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração.
- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - Depende do tamanho do problema (valor de n).
  - Para $n = 40$, o problema $O(n^2)$ é melhor do que o $O(n)$.
  - E para $n = 100$? E para $n = 150$?

Comparação de Programas

- Um programa com tempo de execução $O(n)$ é melhor que outro com tempo $O(n^2)$.
- Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração.
- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - Depende do tamanho do problema (valor de n).
  - Para $n = 40$, o problema $O(n^2)$ é melhor do que o $O(n)$.
  - E para $n = 100$? E para $n = 150$?

Principais Classes de Problemas – Resumo

Ordem de Complexidade	Nome
$O(1)$	Constante
$O(log\ n)$	Logarítmica
$O(n)$	Linear
$O(n\ log\ n)$	Linearitmica
$O(n^2)$	Quadrática
$O(n^3)$	Cúbica
$O(2^n)$	Exponencial
$O(n!)$	Exponencial

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(1)$

- Algoritmos de complexidade $\boldsymbol{O(1)}$ são ditos de **complexidade constante**.
- Uso do algoritmo independe de $\boldsymbol{n}$.
- As instruções do algoritmo são executadas um número fixo de vezes.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(log\ n)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(log\ n)}$ é dito ter **complexidade logarítmica**.
- Típico em algoritmos que transformam um problema em outros menores.
- Pode-se considerar o tempo de execução como menor que uma constante grande.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 1.000, $\boldsymbol{log_2\ n = 10}$, quando n é 1.000.000, $\boldsymbol{log_2\ n = 20}$.
- Para dobrar $\boldsymbol{log_2\ n}$ temos que elevar $\boldsymbol{n}$ ao quadrado!
- A base do logaritmo muda pouco estes valores: quando $\boldsymbol{n}$ é 1.000.000, o $\boldsymbol{log_2\ n = 20}$ e $\boldsymbol{log_{10}\ n = 6}$.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(n)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(n)}$ é dito ter **complexidade linear**.
- Em geral, um pequeno trabalho é realizado sobre cada elemento de entrada.
- É a melhor situação possível para um algoritmo que tem de processar/produzir $\boldsymbol{n}$ elementos de entrada/saída.
- Cada vez que $\boldsymbol{n}$ dobra de tamanho, o tempo de execução dobra.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(n\ log\ n)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(n\ log\ n)}$ é dito ter **complexidade linearitmica**.
- Típico em algoritmos que quebram um problema em outros menores, resolvem cada um deles independentemente e juntam as soluções depois.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 1.000.000, $\boldsymbol{O(n\ log_2\ n)} \approx \mathbf{20.000.000}$.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 2.000.000, $\boldsymbol{O(n\ log_2\ n)} \approx \mathbf{42.000.000}$.
- Ou seja, quando $\boldsymbol{n}$ dobra, $\boldsymbol{O(n\ log\ n)}$ é pouco mais do que o dobro.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(n^2)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(n^2)}$ é dito ter **complexidade quadrática**.
- Ocorrem quando os itens de dados são processados aos pares, muitas vezes em um laço dentro de outro.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 1.000, o número de operações é da ordem de 1.000.000.
- Quando $\boldsymbol{n}$ dobra, o tempo de execução é multiplicado por 4.
- Úteis para resolver problemas de tamanhos relativamente pequenos.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(n^3)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(n^3)}$ é dito ter **complexidade cúbica**.
- Úteis apenas para resolver pequenos problemas.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 100, o número de operações é da ordem de 1.000.000.
- Sempre que $\boldsymbol{n}$ dobra, o tempo de execução fica multiplicado por 8.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(2^n)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(2^n)}$ é dito ter **complexidade exponencial**.
- Geralmente não são úteis sob o ponto de vista prático.
- Ocorrem na solução de problemas quando se usa **força bruta**.
- Quando $\boldsymbol{n}$ é 20, o tempo de execução é cerca de 1.000.000.
- Quando $\boldsymbol{n}$ dobra, o tempo fica elevado ao quadrado.

Principais Classes de Problemas – $f(n) = O(n!)$

- Um algoritmo de complexidade $\boldsymbol{O(n!)}$ é dito ter **complexidade exponencial**, apesar de apresentar comportamento muito pior do que $O(2^n)$.
- Geralmente ocorrem quando se usa força bruta para resolver o problema.
- Para $\boldsymbol{n = 20}$, temos $\boldsymbol{20! = 2.432.902.008.176.640.000}$, um número de 19 dígitos.
- Para $\boldsymbol{n = 40}$, temos um número de 48 dígitos.

Principais Classes de Problemas – Resumo

Ordem de Complexidade	Nome
$O(1)$	Constante
$O(log\ n)$	Logarítmica
$O(n)$	Linear
$O(n\ log\ n)$	Linearitmica
$O(n^2)$	Quadrática
$O(n^3)$	Cúbica
$O(2^n)$	Exponencial
$O(n!)$	Exponencial

Principais Classes de Problemas – Comparativo de tempo

Qual é o efeito no tempo de processamento ao aumentar $\boldsymbol{n}$?

Função de Custo	Tamanho n					
	10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
n	0,00001s	0,00002s	0,00003s	0,00004s	0,00005s	0,00006s
n^2	0,0001s	0,0004s	0,0009s	0,0016s	0,0035s	0,0036s
n^3	0,001s	0,008s	0,027s	0,64s	0,125s	0,316s
n^5	0,1s	3,2s	24,3s	1,7min	5,2min	13min
2^n	0,001s	1s	17,9min	12,7dias	35,7anos	366séc.
3^n	0,059s	58min	6,5anos	3855séc.	10^8séc.	10^{13}séc.

Principais Classes de Problemas – Comparativo de tamanho

Qual é o efeito no tamanho t do problema com o aumento do poder de processamento?

Função de custo de tempo	Computador atual	Computador 100 vezes mais rápido	Computador 1.000 vezes mais rápido
n	t_1	$100t_1$	$1.000t_1$
n^2	t_2	$10t_2$	$31,6t_2$
n^3	t_3	$4,6t_3$	$10t_3$
2^n	t_4	$t_4 + 6,6$	$t_4 + 10$

O tamanho do problema corresponde ao valor máximo de n suportado pela máquina.

Algoritmo Polinomial

- **Algoritmo exponencial** no tempo de execução tem função de complexidade $O(c^n)$, onde $c > 1$.
- **Algoritmo polinomial** no tempo de execução tem função de complexidade $O(p(n))$, onde $p(n)$ é um **polinômio**.
- A distinção entre estes dois tipos de algoritmos torna-se significativa quando o tamanho do problema a ser resolvido cresce.
- Por isso, os algoritmos polinomiais são muito mais úteis na prática do que os exponenciais.

Considerações

Conclusão

- Nesta aula aprofundamos ainda mais os estudos de análise de complexidade de algoritmos apresentando as **Classes de Problemas**.
- Limite assintótico firme e não firme.

Recursividade.

Exercícios

Exercício 01

- Indique se as afirmativas a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique a sua resposta:
  - É melhor um algoritmo que requer 2^n passos do que um que requer $10n^{10}$ passos.
  - $2^{n+1} = O(2^n)$.
  - $f(n) = O(u(n))$ e $g(n) = O(v(n)) => f(n) + g(n) = O(u(n) + v(n))$
  - $f(n) = O(u(n))$ e $g(n) = O(v(n)) => f(n) - g(n) = O(u(n) - v(n))$