LISTA DE EXERCÍCIOS

- PROVAS -

① Prove que $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

Prova por construção:

Inicialmente tomemos $L = A - (B \cap C)$ e $R = (A-B) \cup (A-C)$. Se $L = R$ então $L \subseteq R$ e $R \subseteq L$.

Para $L \subseteq R$:

Se $x \in L$, então $x \in A$, mas $x \notin B$ e $x \notin C$. Logo $x \in A - B$ ou $x \in A - C$. Portanto $x \in R$. Ou seja $L \subseteq R$.

Para $R \subseteq L$:

Se $x \in R$, então $x \in A - B$ ou $x \in A - C$, então $x \in A$ e $x \in B$ e $x \notin C$ ou $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in C$. Se $x \notin$ simultaneamente a B e C, $x \notin B \cap C$. Como $x \in A$, $x \in A - (B \cap C)$ e portanto $x \in L$.

Portanto $L = R$. □

Prova por contradição:

Inicialmente tomemos $L = A - (B \cap C)$ e $R = (A-B) \cup (A-C)$. Se $L = R$ então $L \subseteq R$ e $R \subseteq L$.

Suponha que $L \nsubseteq R$:

Seja x um elemento de L, mas não de R. Se $x \in L$, então x é um elemento de A, mas não é um elemento de B e de C. Se $x \in A$, mas $x \notin B$ e $x \notin C$ então

$x \in (A-B)$ ou $x \in (A-C)$, portanto $x \in R$. Contradição.

Suponha que $R \not\subseteq L$:

Seja x um elemento de R, mas não um elemento de L. Se $x \in R$, então $x \in (A-B)$ ou $x \in (A-C)$, ou seja, $x \in A$ mas $x \notin B$ ou $x \in A$ e $x \notin C$. Suponha que $x \in A$, $x \in B$ e $x \notin C$, então $x \in (A-(B \cap C))$.

Suponha que $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in C$, então $x \in (A-(B \cap C))$. Portanto $x \in L$. Contradição.

Portanto $L = R$. $\square$

② Prove que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Prova por construção:

Inicialmente tomemos $L = (A \cup B) \cap C$ e $R = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Se $L = R$ então $L \subseteq R$ e $R \subseteq L$.

Para $L \subseteq R$:

Seja $x \in L$, então $x \in C$ e $x \in A$ ou $x \in C$ e $x \in B$. Se $x \in A$ e $x \in C$ então $x \in (A \cap C)$. Se $x \in B$ e $x \in C$ então $x \in (B \cap C)$. Portanto $x \in R$ e $L \subseteq R$.

Para $R \subseteq L$:

Seja $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Se $x \in A \cap C$, então $x \in A$ e $x \in C$, portanto $x \in (A \cup B) \cap C$. Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$ e portanto $x \in (A \cup B) \cap C$. Portanto $x \in L$ e $R \subseteq L$.

Portanto $L = R$. □

Prova por contradição:

Inicialmente tomemos $L = (A \cup B) \cap C$ e $R = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Se $L = R$ então $L \subseteq R$ e $R \subseteq L$. Suponha que $L \not\subseteq R$; então $\exists x$ tal que $x \in L$ e $x \notin R$. Se $x \in L$ então $x \in C$ e $x \in A$ ou $x \in C$ e $x \in B$. Se $x \in C$ e $x \in A$, $x \in (A \cap C)$ e portanto $x \in R$. Se $x \in C$ e $x \in B$, $x \in (B \cap C)$ e portanto $x \in R$. Contradição.

Suponha que $R \not\subseteq L$; então $\exists x \in R$ e $x \notin L$. Se $x \in R$, $x \in A$ e $x \in C$ ou $x \in B$ e $x \in C$.

Se $x \in A$ e $x \in C$, $x \in (A \cup B) \cap C$ e portanto $x \in L$. Se $x \in B$ e $x \in C$, $x \in (A \cup B) \cap C$ e portanto $x \in L$. Contradição.

Portanto $L = R$. $\square$

③ Prove que se $A \cup B = A \cap B$ então $A = B$

Prova por Construção:

Pela definição do operador de união, são membros de $A \cup B$ todos os elementos que pertencem ao conj. A ou ao conj. B. Pela definição do operador de disjunção, $A \cap B$ terá como elementos aqueles que são comuns a A e B. Sendo $A \cup B = A \cap B$, então A e B são iguais.

Prova por contradição:

Suponha que $A \cup B = A \cap B \not\to A = B$. Então suponha que $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$. Se $x \in A$, $x \in A \cup B$, pela definição do operador de união. Se $A \cup B = A \cap B$ então $x \in B$ pela definição do operador de intersecção. Contradição.

Portanto $A \cup B = A \cup B \to A = B$. $\square$

① Prove que a cardinalidade do conj. potência de um conjunto A é igual a $2^{|A|}$.

Prova por indução:

Quer-se provar que se A tem n elementos então o conjunto potência de A (notado 2^A) possui 2^n elementos.

Base: Para $n = \emptyset$.

Por definição, o conjunto potência de um conjunto vazio possui um único subconjunto que é o próprio conjunto vazio, assim

$$A = \{\} \quad |A| = 0 \quad e \quad 2^0 = 1$$

Hipótese: Se A possui n elementos então o conjunto potência de A possui 2^n elementos

Passo: Se A possui n+1 elementos então o conj. potência de A possui 2^{n+1} elementos, ou seja $2 \cdot 2^n$ elementos:

Seja $x \in A$. Para todo conjunto C pertencente ao conj. potência de A, $x \in C$ ou $x \notin C$. Suponha um conj. $A' = A - \{x\}$. O conj. potência de A' é exatamente o mesmo formado pelos conjuntos C pertencentes ao conj. potência de A que não possuem x como elemento. Ou seja, 2^n, uma vez que A possui n+1 elementos. Ao incluir x ao conj. A', a cada conj. C do conjunto potência de A' será duplicado para a inclusão do elemento x, portanto

$$2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad . \quad \square$$

⑤ Prove por indução que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1).$$

Base p/ $n = 1$

$$1^2 = \frac{1}{6} 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)$$

$$1 = \frac{1}{6} \cdot 4 + 2$$

$$1 = 1$$

Passo: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1) \cdot (n+1+1)$
$(2(n+1)+1)$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{6} n^2 + n + n + n + 1 + 1 \cdot 2(n+1) + 1$$

pela hipótese

$$\boxed{\frac{1}{6} \left[n(n+1)(2n+1) \right]} + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{6} n^2 + 3n + 2 \cdot (2n + 2 + 1)$$

$$\frac{1}{6} \left[(n^2 + n) \cdot (2n+1) \right] + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{6} n^2 + 3n + 2 \cdot (2n+3)$$

$$\frac{1}{6} \left[2n^3 + n^2 + 2n^2 + n \right] + \frac{n^2 + 2n + 1}{1} = \frac{1}{6} 2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6 = \frac{1}{6} 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = \frac{1}{6} 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 \quad \square$$

⑥ Prove por indução que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]^2$$

Base p/ $n = 1$

$$1^3 = \left[\frac{1}{2} 1 \, (1+1)\right]^2$$

$$1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$1 = 1$$

$(n+1)(n+1)(n+1)$

$(n^2+n+n+1)(n+1)$

$n^2+2n+1 \cdot (n+1)$

$n^3+n^2+2n^2+2n+n+1$

n^3+3n^2+3n+1

Passo: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(n+1)\left[(n+1)+1\right]\right]^2$

$$\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{\text{pela hipótese}} + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2} n^2 + n + n + n + 1 + 1\right]^2$$

$$\left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]^2 + n+1^3 = \left[\frac{1}{2} n^2 + 3n + 2\right]^2$$

$$\left[\frac{1}{2} n^2 + n\right]^2 + n^3+3n^2+3n+1 = \left[\frac{1}{2} n^2+3n+2\right]^2$$

$$\frac{1}{4} n^4 + 2n^3 + n^2 + \frac{1}{4} 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 = \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2 \cdot \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2$$

$$\frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = \frac{1}{4} n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 3n^3 + 9n^2 + 6n + 2n^2 + 6n + 4$$

$$\frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = \frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$$

7. Prove que o número de arestas em um grafo completo com n vértices é igual a $n^2(n^2-1)/2$

Contraexemplo:

Dado um grafo completo $G=(V,E)$ onde $V=\{a,b,c\}$ e $E=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ tem-se que o número de arestas de G é igual a 3, que é diferente de $n^2.(n^2-1)/2$. Ou seja

$3^2.(3^2-1)/2 =$

$9 . 8/2 = 72/2 = 36$