



## LISTA DE EXERCÍCIOS

### - PROVAS -

① Prove que  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Prova por construção:

Inicialmente tomemos  $\lambda = A - (B \cap C)$  e  $R = (A - B) \cup (A - C)$ . Se  $\lambda = R$  então  $\lambda \subseteq R$  e  $R \subseteq \lambda$ .

Para  $R \subseteq \lambda$ :

Se  $x \in R$ , então  $x \in A - B$  ou  $x \in A - C$ , mas  $x \notin B$  e  $x \notin C$ . Logo  $x \in A - B$  ou  $x \in A - C$ . Portanto  $x \in \lambda$ . Ousse  $R \subseteq \lambda$ .

Para  $R \subseteq \lambda$ :

Se  $x \in R$ , então  $x \in A - B$  ou  $x \in A - C$ , então  $x \in A$ , e  $x \in B$  e  $x \notin C$  ou  $x \in A$  e  $x \notin B$  e  $x \in C$ . Se  $x$  é simultaneamente  $\in B$  e  $\in C$ ,  $x \notin B \cap C$ . Como  $x \in A$ ,  $x \in A - (B \cap C)$  e portanto  $x \in \lambda$ .

Portanto  $\lambda = R$ .  $\square$

Prova por contradição:

Inicialmente tomemos  $\lambda = A - (B \cap C)$  e  $R = (A - B) \cup (A - C)$ . Se  $\lambda = R$  então  $\lambda \subseteq R$  e  $R \subseteq \lambda$ .

Suponha que  $\lambda \not\subseteq R$ :

Siga  $x$  um elemento de  $\lambda$ , mas não de  $R$ . Se  $x \in \lambda$ , então  $x$  é um elemento de  $A$ , mas não é um elemento de  $B$  e de  $C$ .

Se  $x \in A$ , mas  $x \notin B$  e  $x \notin C$  então





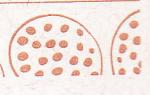
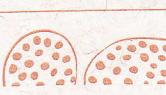
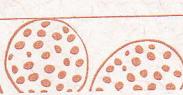
$x \in (A - B)$  ou  $x \in (A - C)$ , portanto  $x \in R$ . Contradição.

Suponha que  $R \neq L$ :

Seja  $r$  um elemento de  $R$ , mas não um elemento de  $L$ . Se  $r \in R$ , então  $r \in (A - B)$  ou  $r \in (A - C)$ , ou seja,  $r \in A$  mas  $r \notin B$  ou  $r \in A$  e  $r \notin C$ . Suponha que  $r \in A$ ,  $r \in B$  e  $r \notin C$ , então  $r \in (A - (B \cap C))$ .

Suponha que  $r \in A$  e  $r \notin B$  e  $r \notin C$ , então  $r \in (A - (B \cap C))$ . Portanto  $r \in L$ . Contradição.

Portanto  $L = R$ .  $\square$





Q) Prove que  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Prova por construção:

Inicialmente tomemos  $L = (A \cup B) \cap C$  e  $R = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Se  $L = R$  então  $L \subseteq R$  e  $R \subseteq L$ .

Para  $L \subseteq R$ :

Seja  $x \in L$ , então  $x \in C$  e  $x \in A$  ou  $x \in C$  e  $x \in B$ . Se  $x \in A$  e  $x \in C$  então  $x \in (A \cap C)$ . Se  $x \in B$  e  $x \in C$  então  $x \in (B \cap C)$ . Portanto  $x \in R$  e  $L \subseteq R$ .

Para  $R \subseteq L$ :

Seja  $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Se  $x \in A \cap C$ , então  $x \in A$  e  $x \in C$ , portanto  $x \in (A \cup B) \cap C$ . Se  $x \in B \cap C$ , então  $x \in B$  e  $x \in C$  e portanto  $x \in (A \cup B) \cap C$ . Portanto  $x \in L$  e  $R \subseteq L$ .

Portanto  $L = R$ .  $\square$

Prova por contradição:

Inicialmente tomemos  $L = (A \cup B) \cap C$  e  $R = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Se  $L = R$  então  $L \subseteq R$  e  $R \subseteq L$ .

Suponha que  $L \neq R$ ; então  $\exists x$  tal que  $x \in L$  e  $x \notin R$ . Se  $x \in L$  então  $x \in C$  e  $x \in A$  ou  $x \in C$  e  $x \in B$ . Se  $x \in C \cap A$ ,  $x \in (A \cap C)$  e portanto  $x \in R$ . Se  $x \in C \cap B$ ,  $x \in (B \cap C)$  e portanto  $x \in R$ . Contradição.

Suponha que  $R \neq L$ ; então  $\exists x \in R$  e  $x \notin L$ . Se  $x \in R$ ,  $x \in L$  e  $x \in C$  ou  $x \in B$  e  $x \in C$ .





Se  $x \in A$  e  $x \in C$ ,  $x \in (A \cup B) \cap C$  e portanto  
 $x \in L$ . Se  $x \in B$  e  $x \in C$ ,  $x \in (A \cup B) \cap C$   
e portanto  $x \in L$ . Contradição.

Portanto  $L = R$ .  $\square$

③ Prove que se  $A \cup B = A \cap B$  então  $A = B$

Prova por Construção:

Pela definição do operador de união, são membros de  $A \cup B$  todos os elementos que pertencem ao conj. A ou ao conj. B. Pela definição do operador de disjunção,  $A \cap B$  terá como elementos aqueles que são comuns a A e B. Sendo  $A \cup B = A \cap B$ , então A e B não iguais.

Prova por Contradição:

Suponha que  $A \cup B = A \cap B \rightarrow A = B$ . Então suponha que  $\exists x \in A$  tal que  $x \notin B$ . Se  $x \in A$ ,  $x \in A \cup B$ , pela definição do operador de união. Se  $A \cup B = A \cap B$  então  $x \in B$  pela definição do operador de intersecção. Contradição.

Portanto  $A \cup B = A \cap B \rightarrow A = B$ .  $\square$





① Prove que a cardinalidade do conj. potência de um conjunto A é igual a  $2^{|A|}$ .

Prova por indução:

Aver-se provar que se A tem n elementos então o conjunto potência de A (notado  $2^A$ ) possui  $2^n$  elementos.

Passo 1: Para  $n = 0$ .

Por definição, o conjunto potência de um conjunto vazio possui um único subconjunto que é o próprio conjunto vazio, assim

$$A = \emptyset \quad |A| = 0 \quad e \quad 2^0 = 1$$

Hipótese: Se A possui n elementos então o conjunto potência de A possui  $2^n$  elementos

Passo: Se A possui  $n+1$  elementos então o conj. potência de A possui  $2^{n+1}$  elementos, ou seja  $2 \cdot 2^n$  elementos.

Seja  $x \in A$ . Para todo conjunto C pertencente ao conj. potência de A,  $x \in C$  ou  $x \notin C$ . Suponha um conj.  $A' = A - \{x\}$ . O conj. potência de  $A'$  é exatamente o mesmo formado pelos conjuntos C pertencentes ao conj. potência de A que não possuem  $x$  como elemento. Ou seja,  $2^n$ , uma vez que A possui  $n+1$  elementos. Ao incluir  $x$  no conj.

A, a cada conj. C do conjunto potência de A será duplicado para a inclusão do elemento  $x$ , portanto

$$2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$





⑤ Prove por indução que:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Base p/  $n=1$

$$1^2 = \frac{1}{6} 1 \cdot (1+1) (2 \cdot 1 + 1)$$

$$1 = \frac{1}{6} \cdot 4 + 2$$

$$1 = 1$$

Passo:  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1) \cdot (n+1+1) \cdot (2(n+1)+1)$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{6} n^2 + \underline{n+n+n+1+1} \cdot 2(n+1) + 1$$

pela h.p. tese

$$\frac{1}{6} \left[ n(n+1)(2n+1) \right] + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{6} n^2 + 3n + 2 \cdot (2n+2+1)$$

$$\frac{1}{6} \left[ (n^2 + n) \cdot (2n+1) \right] + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{6} n^2 + 3n + 2 \cdot (2n+3)$$

$$\frac{1}{6} \left[ 2n^3 + n^2 + \underline{2n^2 + n} \right] + \underline{n^2 + 8n + 1} = \frac{1}{6} 2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2n^3 + \underline{n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6} = \frac{1}{6} 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = \frac{1}{6} 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 \quad \square$$





⑥ Prove por indução que.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2$$

Base p/  $n = 1$

$$1^3 = \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \right]^2$$

$$1^3 = \left( \frac{2}{2} \right)^2$$

$$1 = 1$$

$$(n+1)(n+1)(n+1)$$

$$(n^2+n+n+1)(n+1)$$

$$n^2+2n+1 \cdot (n+1)$$

$$n^3+n^2+2n^2+2n+n+1$$

$$n^3+3n^2+3n+1$$

Passo:  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{1}{2} (n+1)[(n+1)+1] \right]^2$

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{1}{2} n^2 + n + n + n + 1 + 1 \right]^2}$$

if pela hipótese

$$\left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + n+1^3 = \left[ \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2 \right]^2$$

$$\left[ \frac{1}{2} n^2 + n \right]^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \left[ \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2 \right]^2$$

$$\frac{1}{4} n^4 + \underline{2n^3} + \underline{n^2} + \frac{1}{4} \cancel{4n^3} + \cancel{12n^2} + \cancel{12n} + \cancel{4} = \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2 \cdot \frac{1}{2} n^2 + 3n + 2$$

$$\frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = \frac{1}{4} n^4 + \cancel{3n^3} + \underline{2n^2} + \cancel{3n^3} + \cancel{3n^2} + 6n + \cancel{2n^2} + 6n + 4$$

$$\frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = \frac{1}{4} n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$$





⑦ Prove que o número de arestas em um grafo completo com  $n$  vérticos é igual a  $n(n-1)/2$

contra exemplo

Dado um grafo completo  $G = (V, E)$  onde  $V = \{a, b, c\}$  e  $E = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$  tem-se que o número de arestas de  $G$  é igual a 3, que é diferente de  $n^2 \cdot (n^2 - 1) / 2$ . Ou seja

$$3^2 \cdot (3^2 - 1) / 2 =$$
$$3 \cdot 8 / 2 = 72 / 2 = 36$$
