



Universidade Federal do Ceará  
Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia de Teleinformática  
Filtragem Adaptativa - TIP7188

## Lista de Exercícios

**Aluno:** Lucas de Souza Abdalah 539567

**Professor:** Charles Casimiro Cavalcante e Guilherme de Alencar Barreto

**Data de Entrega:** 20/07/2022

Fortaleza  
2022

# Sumário

<b>1</b>	<b>Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem</b>	<b>2</b>
1.1	Média e Autocorrelação . . . . .	2
1.2	Processos Escationários . . . . .	2
1.3	Matriz de Autocorrelação . . . . .	2
1.4	Matriz Definida Positiva . . . . .	2
1.5	Covariância e correlação . . . . .	2
1.6	Função de autocorrelação . . . . .	2
1.7	Exercícios Propostos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Lista 2: Filtragem Linear Ótima</b>	<b>5</b>
2.1	Filtragem Ótima . . . . .	5
2.2	Erro Médio Quadrático Mínimo . . . . .	5
2.3	Cancelamento de Ruído . . . . .	5
2.4	Predição Ótima . . . . .	5
2.5	Superfície de Erro . . . . .	5
2.6	Exercícios Propostos . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Lista 3: Algoritmos Recursivos</b>	<b>8</b>
3.1	Algoritmo LMF . . . . .	8
3.2	Algoritmo LMS . . . . .	8
3.3	Algoritmo LMS Normalizado . . . . .	8
3.4	Equalização de Canais . . . . .	8
3.5	Identificação de Sistemas . . . . .	8
3.6	Equalização Adaptativa . . . . .	8
3.7	Exercícios Propostos . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados</b>	<b>11</b>
4.1	Algoritmo RLS . . . . .	11
4.2	Erro de Estimação a Priori . . . . .	11
4.3	Preditor Adaptativo . . . . .	11
4.4	Equalização de Canais . . . . .	11
4.5	Equalização Adaptativa . . . . .	11
4.6	Exercícios Propostos . . . . .	12

# 1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1.1 Média e Autocorrelação

1.2 Processos Escationários

1.3 Matriz de Autocorrelação

1.4 Matriz Definida Positiva

1.5 Covariância e correlação

1.6 Função de autocorrelação



## Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante  
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

### *Lista de Exercícios No. 1: Estatísticas de Segunda Ordem*

- 1. (Média e autocorrelação)** Determine a média e a função de autocorrelação para o processo aleatório

$$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$$

em que  $v(n)$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .  $x(n)$  é estacionário? Justifique.

- 2. (Processos estacionários)** Sejam os processos aleatórios  $x(n)$  e  $y(n)$  definidos por

$$x(n) = v_1(n) + 3v_2(n-1)$$

e

$$y(n) = v_2(n+1) + 3v_1(n-1)$$

em que  $v_1(n)$  e  $v_2(n)$  são processos de ruído branco independentes cada um com variância igual a 0,5.

- (a) Quais são as funções de autocorrelação de  $x$  e de  $y$ ? Os processos são WSS?  
(b) Qual é a função de correlação cruzada  $r_{xy}(n_1, n_0)$ ? Estes processos são conjuntamente estacionários (no sentido amplo)? Justifique.

- 3. (Matriz de autocorrelação)** Quais as condições que os elementos de uma matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

devem satisfazer tal que  $\mathbf{R}$  seja uma matriz de autocorrelação válida de

- (a) Um vetor aleatório bidimensional?  
(b) Um processo estocástico estacionário escalar?

- 4. (Matriz definida positiva)** Assuma que a inversa  $\mathbf{R}_x^{-1}$  da matriz de autocorrelação de um vetor coluna  $N$ -dimensional exista. Mostre que

$$E \{ \mathbf{x}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x} \} = N$$

- 5. (Covariância e correlação)** Mostre que as matrizes de correlação e covariância satisfazem as relações abaixo:

- $\mathbf{R}_x = \mathbf{C}_x + \boldsymbol{\mu}_x \boldsymbol{\mu}_x^H$
- $\mathbf{C}_{x+y} = \mathbf{C}_x + \mathbf{C}_{xy} + \mathbf{C}_{yx} + \mathbf{C}_y$ , para  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  descorrelacionados



- 6. (Função de autocorrelação)** Processos aleatórios  $v_1(n)$  e  $v_2(n)$  são independentes e têm a mesma função de correlação

$$r_v(n_1, n_0) = 0.5\delta(n_1 - n_0)$$

- (a) Qual é a função de correlação do processo aleatório

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)?$$

Este é um processo WSS? Justifique.

- (b) Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de  $x(n)$ .

## 2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima

### 2.1 Filtragem Ótima

### 2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo

### 2.3 Cancelamento de Ruído

### 2.4 Predição Ótima

### 2.5 Superfície de Erro

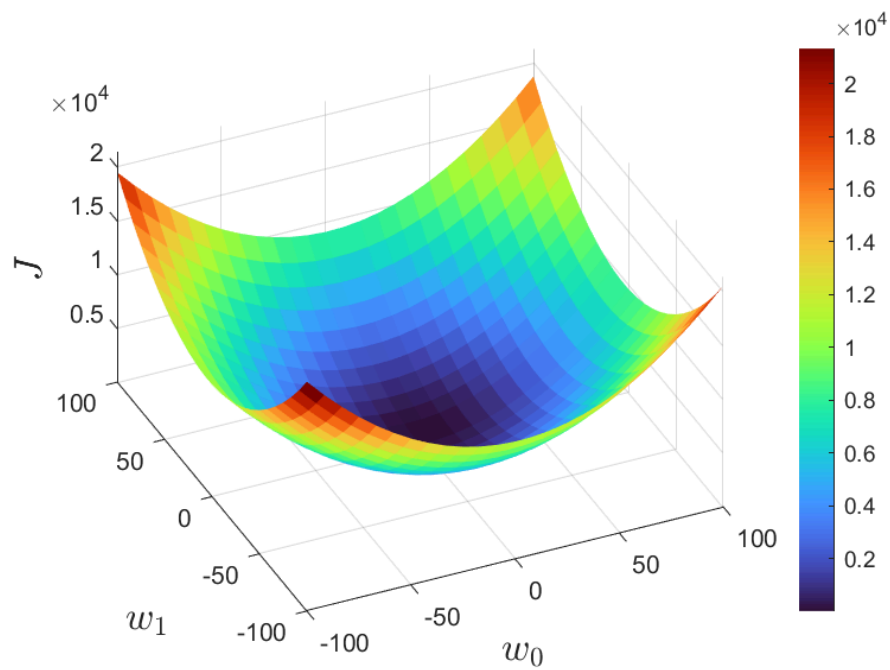


Figura 1: Superfície de erro  $J(w_0, w_1)$ .

## Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante  
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

### *Lista de Exercícios No. 2: Filtragem Linear Ótima*

- 1. (Filtragem ótima)** Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação  $\mathbf{R}_x$  de um vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$  é dada por

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada  $\mathbf{p}_{xd}$  entre o vetor de entrada  $\mathbf{x}$  e a resposta desejada  $d(n)$  é

$$\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?
- (c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz  $\mathbf{R}_x$  e de seus autovetores associados.

- 2. (Erro médio quadrático mínimo)** Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que  $J_{\min}$  é o mínimo erro médio quadrático,  $\mathbf{w}$  é o filtro de Wiener, e  $\mathbf{A}$  é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$$

em que  $d(n)$  é o sinal desejado e  $\mathbf{x}(n)$  é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

- 3. (Cancelamento de ruído)** Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura 1 ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

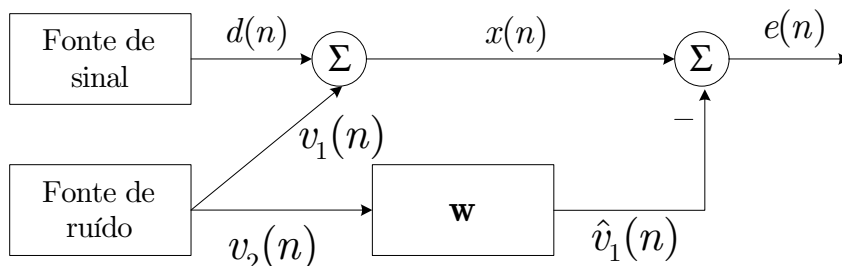


Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

**4. (Predição ótima)** Seja um processo estocástico dado por

$$x(n) = s(n + a) + s(n - 4a),$$

em que  $S(n)$  é um processo estocástico WSS dado e  $a$  é uma constante.

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo  $D(s) = s(n - a)$ , o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal  $d(n)$  possua média nula e variância unitária.

- (a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (c) Compare as soluções dos dois.

**5. (Superfície de erro)** Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação:  $r_x(0) = 1$  e  $r_x(1) = 0$ . Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é  $\sigma_d^2 = 24.40$  e o vetor de correlação cruzada é  $\mathbf{p}_{xd} = [2 \ 4.5]^T$ . Encontre:

- (a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) A superfície definida por  $J(\mathbf{w})$ . Faça um gráfico da mesma.



### **3   Lista 3: Algoritmos Recursivos**

**3.1   Algoritmo LMF**

**3.2   Algoritmo LMS**

**3.3   Algoritmo LMS Normalizado**

**3.4   Equalização de Canais**

**3.5   Identificação de Sistemas**

**3.6   Equalização Adaptativa**



## Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante  
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

### *Lista de Exercícios No. 3: Algoritmos Recursivos*

- 1. (Algoritmo LMF)** Deseja-se minimizar a função objetivo  $E\{e^4(n)\}$  utilizando-se um algoritmo do gradiente estocástico do tipo LMS. O algoritmo resultando é chamado de algoritmo *least mean fourth* (LMF). Derive tal algoritmo. Derive também o filtro ótimo para tal critério e compare as soluções.
- 2. (Algoritmo LMS)** Considere o uso de um a sequência de ruído branco com média nula e variância  $\sigma^2$  como entrada do algoritmo LMS. Avalie
  - (a) a condição para convergência do algoritmo em média quadrática;
  - (b) o erro em excesso em média quadrática.
- 3. (Algoritmo LMS Normalizado)** Avalie a questão anterior para o caso do algoritmo LMS-Normalizado. Compare os dois casos.
- 4. (Equalização de canais)** Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência  $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$ . Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por  $W(z) = w_0 + w_1z^{-1}$ .
  - (a) Forneça o equalizador ótimo segundo o critério de Wiener. Esboce a posição dos zeros do canal e do equalizador no plano  $Z$ .
  - (b) Obtenha o filtro de erro de predição direta de passo unitário, correspondente ao sinal à saída do canal. Calcule os zeros deste filtro e compare com os do equalizador.
  - (c) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador, para os seguintes algoritmos
    - (a) Gradiente determinístico;
    - (b) Algoritmo de Newton;
    - (c) LMS;
    - (d) LMS-normalizado;
  - (d) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.
  - (e) Qual o número de condicionamento para o problema em questão?
  - (f) Qual deveria ser o canal para que o número de condicionamento fosse menor/maior que 5? Comente os resultados.
- 5. (Identificação de sistemas)** Utilize o algoritmo LMS para identificar um sistema com a função de transferência dada abaixo.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-12}}{1 - z^{-1}}$$

O sinal de entrada é um ruído branco distribuído uniformemente com variância  $\sigma_x^2 = 1$ , e o ruído de medida é assumido gaussiano branco descorrelacionado da entrada e com variância de entrada  $\sigma_v^2 = 10^{-3}$ . O filtro adaptativo tem 12 coeficientes.

- (a) Calcule o limite superior para  $\mu$  (ou seja  $\mu_{\max}$ ) para garantir a estabilidade do algoritmo.

- Execute o algoritmo para  $\frac{\mu_{\max}}{2}$ ,  $\frac{\mu_{\max}}{10}$  e  $\frac{\mu_{\max}}{50}$ . Comente sobre o comportamento da convergência de cada caso.
- Meça o desajuste (*misadjustment*) em cada exemplo e comparar com os resultados obtidos pela solução teórica (Eq. (3.50) do livro texto)
- Mostre o gráfico da resposta em frequência do filtro FIR em qualquer uma das iterações após a convergência ser obtida e compare com o sistema desconhecido.

**6. (Equalização adaptativa)** Seja o canal de comunicações dado por

$$H(z) = 0.5 + 1.2z^{-1} + 1.5z^{-2} - z^{-3}$$

e deseja-se projetar um equalizador para o mesmo. A estrutura do equalizador é mostrada na Figura 1. Os símbolos  $s(n)$  são transmitidos através de um canal e corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco complexo  $v(n)$ . O sinal recebido  $x(n)$  é processado pelo equalizador FIR para gerar estimativas  $\hat{s}(n - \delta)$ , as quais são passadas por um dispositivo decisor gerando símbolos  $\hat{s}(n - \delta)$ . O equalizador possui dois modos de operação: um modo de treinamento durante o qual uma versão atrasada e replicada da sequência de entrada é usada como o sinal de referência (desejado) e um modo dirigido por decisão no qual a saída do dispositivo de decisão substitui a sequência de referência. O sinal de entrada  $s(n)$  é escolhido de uma constelação QAM (por exemplo, 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM ou 256-QAM).

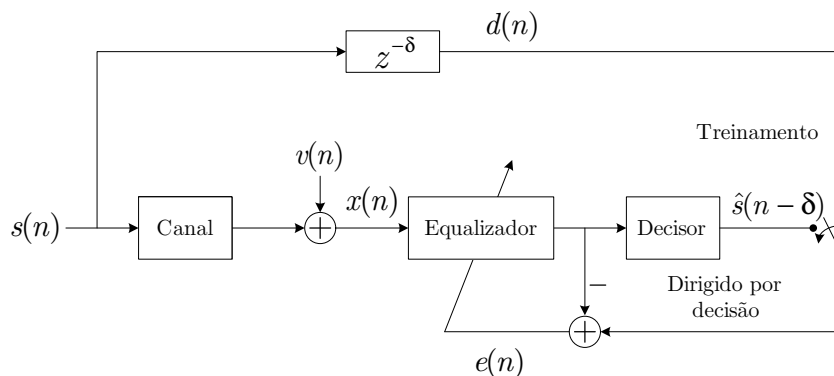


Figure 1: Equalizador linear adaptativo operando em dois modos: modo de treinamento e modo dirigido por decisão.

- Faça um programa que treine o filtro adaptativo com 500 símbolos de uma constelação 4-QAM, seguindo de uma operação dirigida por decisão de 5000 símbolos de uma constelação 16-QAM. Escolha a variância do ruído  $\sigma_v^2$  de maneira que ela promova uma relação sinal ruído de 30 db na entrada do equalizador. Note que os símbolos escolhidos não têm variância unitária. Por esta razão, a a variância do ruído necessita ser ajustada adequadamente para cada uma das diferentes modulações (constelações) QAM para fornecer o nível de SNR desejado. Escolha  $\delta = 15$  e o comprimento do equalizador  $M = 15$ . Mostre os gráficos da evolução temporal de  $s(n)$ ,  $x(n)$  e  $\hat{s}(n - \delta)$ . Use o LMS-normalizado com um fator de passo de  $\mu = 0.4$ .
- Para os mesmos parâmetros do item (a), plote e compare os gráficos de evolução que seriam resultante se o equalizador fosse treinado com 150, 300 e 500 iterações. Use o LMS com um  $\mu = 0.001$ .
- Assuma agora que os dados transmitidos foram gerados de uma constelação 256-QAM ao invés de 16-QAM. Plote os gráficos da evolução do sinal na saída do equalizador quando treinado usando o LMS-normalizado e 500 símbolos de treinamento.
- Gerar as curvas de taxa de erro de símbolo (SER, do inglês *Symbol Error Rate*) versus SNR na entrada do equalizador para símbolos de constelações 4, 16, 64 e 256-QAM. Faça SNR variar de 5 dB a 30 dB.

## 4 Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados

### 4.1 Algoritmo RLS

### 4.2 Erro de Estimação a Priori

### 4.3 Preditor Adaptativo

### 4.4 Equalização de Canais

### 4.5 Equalização Adaptativa



## Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante  
Período: 2018.2

### *Lista de Exercícios No. 4: Método dos Mínimos Quadrados*

1. O algoritmo RLS é utilizado para prever o sinal  $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$  usando um filtro FIR de segunda ordem com o primeiro coeficiente fixo em 1. Dado  $\lambda = 0.98$ , calcule o sinal de saída  $y(n)$  e os coeficientes do filtro nas primeiras 10 iterações. Note que a meta é minimizar  $E\{y^2(n)\}$ . Inicie com  $\mathbf{w} = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\delta = 100$ .

2. Seja  $\epsilon(n)$  que denota um erro de estimação *a priori*

$$\epsilon(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$$

em que  $d(n)$  é a resposta desejada,  $\mathbf{x}(n)$  é o vetor de entrada do filtro e  $\mathbf{w}(n-1)$  é a estimativa anterior do vetor de coeficientes do filtro. Seja  $e(n)$  o erro de estimação *a posteriori*

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

em que  $\mathbf{w}(n)$  é a estimativa atual do vetor de coeficientes do filtro. Para dados complexos ambos  $\epsilon(n)$  e  $e(n)$  são de valores complexos. Mostre que o produto  $\epsilon(n)e^*(n)$  é sempre de valor real.

3. Seja um sinal  $x(n)$  composto de uma senóide em meio à ruído. Simule um preditor adaptativo de ordem 2 com um algoritmo RLS considerando  $\text{SNR} = 3$  dB e  $\text{SNR} \rightarrow \infty$ . Variando o fator de esquecimento e/ou as condições iniciais verifique e comente sobre a ocorrência ou não de instabilidade numérica. Repita o procedimento como preditor de ordem 3.
4. Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência  $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$ . Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por  $W(z) = w_0 + w_1z^{-1}$ . (Problema da lista de exercícios no. 3).
- (a) Calcule a adaptação do algoritmo usando o RLS.
  - (b) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador. Verifique qual a melhor inicialização do algoritmo RLS. Compare com os algoritmos LMS, LMS-Normalizado e Gauss-Newton.
  - (c) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.
5. Seja a questão 6 da lista de exercícios anterior (Algoritmos Recursivos - questão sobre Equalização Adaptativa). Implemente o RLS para a equalização do sistema considerado na letra (a) da mesma. Compare os resultados obtidos com o LMS. Verifique a velocidade de convergência para os casos de  $\lambda = 0.9$ ,  $\lambda = 0.99$  e  $\lambda = 0.999$ .