Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Filtragem Adaptativa - TIP7188

Lista de Exercícios

Aluno: Lucas de Souza Abdalah 539567

Professor: Charles Casimiro Cavalcante e Guilherme de Alencar Barreto
Data de Entrega: 20/07/2022

Fortaleza
2022

Sumário

1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem **2**
1.1 Média e Autocorrelação 2
1.2 Processos Escationários 2
1.3 Matriz de Autocorrelação 2
1.4 Matriz Definida Positiva 2
1.5 Covariância e correlação 2
1.6 Função de autocorrelação 2
1.7 Exercícios Propostos 3

2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima **5**
2.1 Filtragem Ótima 5
2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo 6
2.3 Cancelamento de Ruído 7
2.4 Predição Ótima 8
2.5 Superfície de Erro 8
2.6 Exercícios Propostos 11

3 Lista 3: Algoritmos Recursivos **13**
3.1 Algoritmo LMF 13
3.2 Algoritmo LMS 13
3.3 Algoritmo LMS Normalizado 13
3.4 Equalização de Canais 13
3.5 Identificação de Sistemas 13
3.6 Equalização Adaptativa 13
3.7 Exercícios Propostos 14

4 Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados **16**
4.1 Algoritmo RLS 16
4.2 Erro de Estimação a Priori 16
4.3 Preditor Adaptativo 16
4.4 Equalização de Canais 16
4.5 Equalização Adaptativa 16
4.6 Exercícios Propostos 17

5 Implementações em MATLAB **18**
5.1 Métodos 19
5.2 Função Main 22

1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1.1 Média e Autocorrelação

Organizar

1.2 Processos Escationários

Organizar

1.3 Matriz de Autocorrelação

Organizar

1.4 Matriz Definida Positiva

Organizar

1.5 Covariância e correlação

Organizar

1.6 Função de autocorrelação

Organizar

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1. **(Média e autocorrelação)** Determine a média e a função de autocorrelação para o processo aleatório

$$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$$

em que $v(n)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média μ e variância σ^2. $x(n)$ é estacionário? Justifique.

2. **(Processos estacionários)** Sejam os processos aleatórios $x(n)$ e $y(n)$ definidos por

$$x(n) = v_1(n) + 3v_2(n-1)$$

e

$$y(n) = v_2(n+1) + 3v_1(n-1)$$

em que $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são processos de ruído branco independentes cada um com variância igual a $0,5$.

(a) Quais são as funções de autocorrelação de x e de y? Os processos são WSS?

(b) Qual é a função de correlação cruzada $r_{xy}(n_1, n_0)$? Estes processos são conjuntamente estacionários (no sentido amplo)? Justifique.

3. **(Matriz de autocorrelação)** Quais as condições que os elementos de uma matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

devem satisfazer tal que $\mathbf{R}$ seja uma matriz de autocorrelação válida de

(a) Um vetor aleatório bidimensional?

(b) Um processo estocástico estacionário escalar?

4. **(Matriz definida positiva)** Assuma que a inversa $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}$ da matriz de autocorrelação de um vetor coluna N-dimensional exista. Mostre que

$$E\left\{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x}\right\} = N$$

5. **(Covariância e correlação)** Mostre que as matrizes de correlação e covariância satisfazem as relações abaixo:

- $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}^H$
- $\mathbf{C}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{\mathbf{xy}} + \mathbf{C}_{\mathbf{yx}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}$, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ descorrelacionados

6. **(Função de autocorrelação)** Processos aleatórios $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são independentes e têm a mesma função de correlação

$$r_v(n_1, n_0) = 0.5\delta(n_1 - n_0)$$

(a) Qual é a função de correlação do processo aleatório

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)?$$

Este é um processo WSS? Justifique.

(b) Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de $x(n)$.

2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima

2.1 Filtragem Ótima

Coeficientes de Wiener

Considerando o problema de filtragem de Wiener, e assumindo conhecimento da matriz de correlação $\mathbf{R_X}$ e do vetor de correlação cruzada $\mathbf{p_X}_d$, pode-se obter os coeficientes de $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w} = \mathbf{R_X}^{-1}\mathbf{p_X}_d \tag{2.1}$$

Aplicando a equação 2.1, obtém-se o vetor de pesos do filtro.

$$\mathbf{R_X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Erro Médio Quadrático

A partir do vetor de pesos, resultado de 2.1, basta aplicá-lo na equação do erro mínimo.

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^\top \mathbf{p_X}_d + \mathbf{w}^\top \mathbf{R_X}\mathbf{w} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} e &= \sigma_d^2 - 2\begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_d^2 - 2 \times 0.25 + 0.25 \\ &= \sigma_d^2 - 0.25 \end{aligned}$$

Representação em Autovalores

A decomposição em valores singulares (EVD) pode ser aplicada na matriz de correlação

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \tag{2.3}$$

Aplicando diretamente o resultado da EVD 2.3 na equação do filtro ótimo 2.1, obtém-se:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1})^{-1}\mathbf{p_X}_d \tag{2.4}$$

Finalmente, o resultado é uma expressão que compreende a inversão de matrizes menos custosas computacionalmente. Isto se dá principalmente por $\mathbf{\Lambda}$ ser uma matriz diagonal contendo os autovalores da matriz de autocorrelação, bastando calcular $1/\lambda_i$ para obter a sua inversa.

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d}. \tag{2.5}$$

2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo

Para verificar a expressão proposta, é necessário obter a matriz de correlação do vetor aumentado.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbb{E}\left\{ \begin{bmatrix} d(n) \\ x(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(n)^\top & x(n)^\top \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{d(n)d(n)^\top\} & \mathbb{E}\{d(n)x(n)^\top\} \\ \mathbb{E}\{x(n)d(n)^\top\} & \mathbb{E}\{x(n)x(n)^\top\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

É conveniente observar que ao desenvolver a equação, os elementos resultantes da expressão são todo conhecidos. Multiplicando o resultado obtido pelo vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ -w \end{bmatrix}$ à direita e assumindo o modelo nas condições de filtragem ótima, dado filtro de wiener, onde, $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{w} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{R}_X\mathbf{w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{R}_X\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{I}_X\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^T\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, dado a equação obtida, com expressão equivalente à J_{min}, pode-se escrever a relação proposta.

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{min} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Cancelamento de Ruído

Organizar

Inicialmente é necessário calcular a equação de erro do sistema aqui proposto

$$e(n) = x(n) - \hat{v_1} = x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n) \tag{2.6}$$

Em seguida faz-necessário calcular a função mean square error(MSE) que é facilmente fornecida pela manipulação algébrica abaixo

$$e^2(n) = [x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)][x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)]^T, \tag{2.7}$$
$$e^2(n) = x^2(n) - 2x(n)\mathbf{w}^T v_2(n) + \mathbf{w}^T v_2(n) v_2^T \mathbf{w}. \tag{2.8}$$

Sendo considerado que o filtro apresenta coeficientes constantes é possível aplicar o operador Valor Esperado de forma a obter a seguinte relação

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \mathbb{E}\{x^2(n)\} - 2\mathbf{w}^T \mathbb{E}\{x(n)v_2(n)\} + \mathbf{w}^T \mathbb{E}\{v_2(n)v_2(n)^T\}\mathbf{w}, \tag{2.9}$$
$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_x^2 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w}. \tag{2.10}$$

Por fim, basta encontrar o $\mathbf{w}$ que minimiza o MSE acima. Para chegar a esse fim, calcula-se o gradiante quanto ao $\mathbf{w}$ igualando-se o resultado da operação a zero

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbb{E}\{e^2(n)\} = -2\mathbf{p}_{xv_2} + 2\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = 0, \tag{2.11}$$
$$-\mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = 0, \tag{2.12}$$
$$\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = \mathbf{p}_{xv_2}. \tag{2.13}$$

Utilizando a identidade matricial abaixo é possível resolver a equação acima para obter o seguinte resultado

$$\mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, \tag{2.14}$$
$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, \tag{2.15}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}. \tag{2.16}$$

Onde é possível reescrever o termo final como

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}(\mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{v_1} + \mathbf{p}_{v_2}) \tag{2.17}$$

2.4 Predição Ótima

Organizar

O filtro linear ótimo que minimiza o erro médio quadrático é descrito pela solução das equações de Wiener. Portanto, inicialmente definir a matriz de autocorrelação para o processo descrito por $x(n)$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{x(n)x^*(n)\} & \mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n)\} \\ \mathbb{E}\{x(n)x^*(n-1)\} & \mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n-1)\} \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

se considerarmos que o processo $S(n)$ é WSS com variância σ_s^2 podemos calcular as correlações como se segue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{x(n)x^*(n)\} &= \mathbb{E}\{s(n-a)s^*(n-a) + s(n-a)s^*(n-4a) + s(n-4a)s^*(n-a) \\
&+ s(n-4a)s^*(n-4a)\} = \sigma_s^2 + 0 + 0 + \sigma_s^2 = 2\sigma_s^2, \\
\mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n)\} &= \mathbb{E}\{s(n-1-a)s^*(n-a) + s(n-1-a)s^*(n-4a) + s(n-1-4a)s^*(n - \\
&+ s(n-1-4a)s^*(n-4a)\} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
\mathbb{E}\{x(n)x^*(n-1)\} &= \mathbb{E}\{s(n-a)s^*(n-1-a) + s(n-a)s^*(n-1-4a) + s(n-4a)s^*(n-1 - \\
&+ s(n-4a)s^*(n-1-4a)\} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
\mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n-1)\} &= \mathbb{E}\{s(n-1-a)s^*(n-1-a) + s(n-1-a)s^*(n-1-4a) \\
&+ s(n-1-4a)s^*(n-1-a) + s(n-1-4a)s^*(n-1-4a)\} = \sigma_s^2 + 0 + 0
\end{aligned}$$

obtendo assim

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 2\sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_s^2 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Entretanto, considerando que o processo $D(n)$ têm média nula então temos na verdade um vetor de correlação cruzada nulo. Desse modo, o filtro linear ótimo para esse processo seria o próprio vetor nulo. Sendo assim

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 2\sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

2.5 Superfície de Erro

Organizar

A partir dos coeficientes fornecidos é possível escrever a matrix de correlação necessário para o filtro ótimo de wiener como uma matriz identidade de ordem 2

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Ao utilizar a solução fechada do problema chega-se ao seguinte vetor resultado

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

Solução:

Para obter a expressão que define a superfície basta desenvolver a expressão para o erro médio

$$\mathbf{J}(w) = \mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xd} + w^T\mathbf{R}_X\mathbf{w}. \tag{2.23}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente na expressão da superfície

$$\mathbf{J}(w_0, w_1) = 24.40 - 2\begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{J}(w_0, w_1) = 24.40 - 4w_0 - 9w_1 + w_0^2 + w_1^2. \tag{2.25}$$

Utilizando um software gráfico é possível obter a Figura 1 onde é traçada a superfície de erro MSE expressa na Equação (2.23).

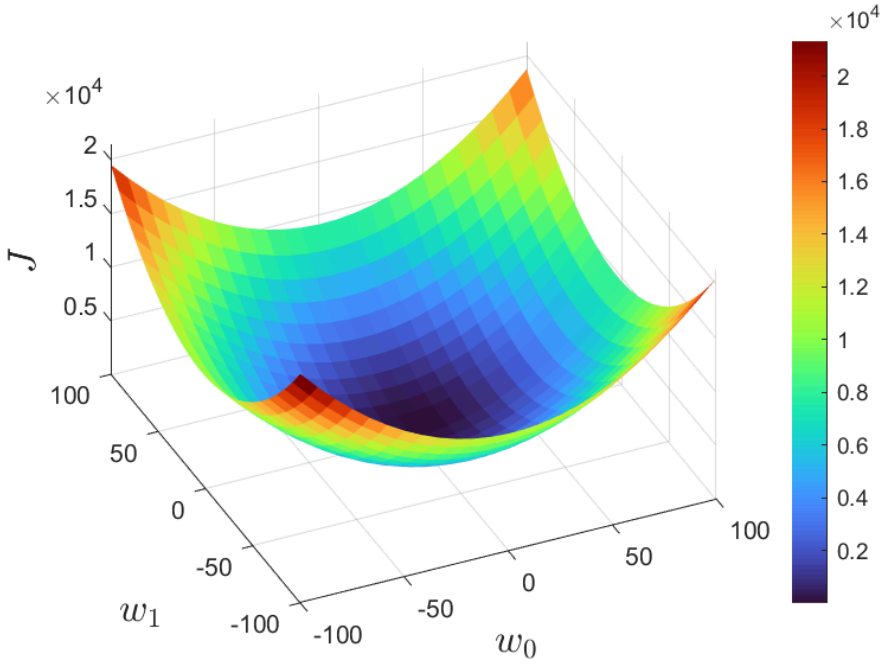

Figura 1: Superfície de erro $J(w_0, w_1)$.

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 2: Filtragem Linear Ótima

1. **(Filtragem ótima)** Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação $\mathbf{R}_\mathbf{x}$ de um vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ é dada por

$$\mathbf{R}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}_{\mathbf{x}d}$ entre o vetor de entrada $\mathbf{x}$ e a resposta desejada $d(n)$ é

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}d} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.

(b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?

(c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz $\mathbf{R}_\mathbf{x}$ e de seus autovetores associados.

2. **(Erro médio quadrático mínimo)** Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que $J_{\min}$ é o mínimo erro médio quadrático, $\mathbf{w}$ é o filtro de Wiener, e $\mathbf{A}$ é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$$

em que $d(n)$ é o sinal desejado e $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

3. **(Cancelamento de ruído)** Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura 1 ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

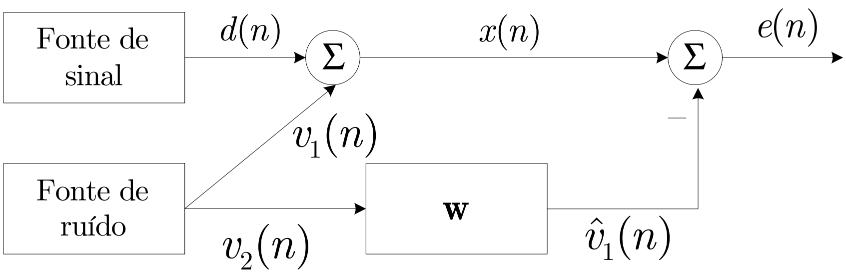

Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

4. **(Predição ótima)** Seja um processo estocástico dado por

$$x(n) = s(n + a) + s(n - 4a),$$

em que $S(n)$ é um processo estocástico WSS dado e a é uma constante.

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo $D(s) = s(n - a)$, o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal $d(n)$ possua média nula e variância unitária.

(a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

(b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

(c) Compare as soluções dos dois.

5. **(Superfície de erro)** Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação: $r_x(0) = 1$ e $r_x(1) = 0$. Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é $\sigma_d^2 = 24.40$ e o vetor de correlação cruzada é $\mathbf{p_{x}}_d = [2 \quad 4.5]^T$. Encontre:

(a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.

(b) A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

3 Lista 3: Algoritmos Recursivos

3.1 Algoritmo LMF

Organizar

3.2 Algoritmo LMS

Organizar

3.3 Algoritmo LMS Normalizado

Organizar

3.4 Equalização de Canais

Organizar

3.5 Identificação de Sistemas

Organizar

3.6 Equalização Adaptativa

Organizar

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 3: Algoritmos Recursivos

1. **(Algoritmo LMF)** Deseja-se minimizar a função objetivo $\mathbb{E}\left\{e^4(n)\right\}$ utilizando-se um algoritmo do gradiente estocástico do tipo LMS. O algoritmo resultando é chamado de algoritmo *least mean fourth* (LMF). Derive tal algoritmo. Derive também o filtro ótimo para tal critério e compare as soluções.

2. **(Algoritmo LMS)** Considere o uso de um a sequência de ruído branco com média nula e variância σ^2 como entrada do algoritmo LMS. Avalie

(a) a condição para convergência do algoritmo em média quadrática;

(b) o erro em excesso em média quadrática.

3. **(Algoritmo LMS Normalizado)** Avalie a questão anterior para o caso do algoritmo LMS-Normalizado. Compare os dois casos.

4. **(Equalização de canais)** Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1 z^{-1}$.

(a) Forneça o equalizador ótimo segundo o critério de Wiener. Esboce a posição dos zeros do canal e do equalizador no plano Z.

(b) Obtenha o filtro de erro de predição direta de passo unitário, correspondente ao sinal à saída do canal. Calcule os zeros deste filtro e compare com os do equalizador.

(c) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador, para os seguintes algoritmos

  (a) Gradiente determinístico;

  (b) Algoritmo de Newton;

  (c) LMS;

  (d) LMS-normalizado;

(d) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.

(e) Qual o número de condicionamento para o problema em questão?

(f) Qual deveria ser o canal para que o número de condicionamento fosse menor/maior que 5? Comente os resultados.

5. **(Identificação de sistemas)** Utilize o algoritmo LMS para identificar um sistema com a função de transferência dada abaixo.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-12}}{1 - z^{-1}}$$

O sinal de entrada é um ruído branco distribuído uniformemente com variância $\sigma_x^2 = 1$, e o ruído de medida é assumido gaussiano branco descorrelacionado da entrada e com variância de entrada $\sigma_v^2 = 10^{-3}$. O filtro adaptativo tem 12 coeficientes.

(a) Calcule o limite superior para μ (ou seja $\mu_{\max}$) para garantir a estabilidade do algoritmo.

charles@gtel.ufc.br
http://charlescasimiro.github.io/

(b) Execute o algoritmo para $\frac{\mu_{\max}}{2}$, $\frac{\mu_{\max}}{10}$ e $\frac{\mu_{\max}}{50}$. Comente sobre o comportamento da convergência de cada caso.

(c) Meça o desajuste (*misadjustment*) em cada exemplo e comparar com os resultados obtidos pela solução teórica (Eq. (3.50) do livro texto)

(d) Mostre o gráfico da resposta em frequência do filtro FIR em qualquer uma das iterações após a convergência ser obtida e compare com o sistema desconhecido.

6. **(Equalização adaptativa)** Seja o canal de comunicações dado por

$$H(z) = 0.5 + 1.2z^{-1} + 1.5z^{-2} - z^{-3}$$

e deseja-se projetar um equalizar para o mesmo. A estrutura do equalizador é mostrada na Figura 1. Os símbolos $s(n)$ são transmitidos através de um canal e corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco complexo $v(n)$. O sinal recebido $x(n)$ é processado pelo equalizador FIR para gerar estimativas $\widetilde{s}(n-\delta)$, as quais são passados por um dispositivo decisor gerando símbolos $\widehat{s}(n-\delta)$. O equalizador possui dois modos de operação: um modo de treinamento durante o qual uma versão atrasada e replicada da sequência de entrada é usada como o sinal de referência (desejado) e um modo dirigido por decisão no qual a saída do dispositivo de decisão substitui a sequência de referência. O sinal de entrada $s(n)$ é escolhido de uma constelação QAM (por exemplo, 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM ou 256-QAM).

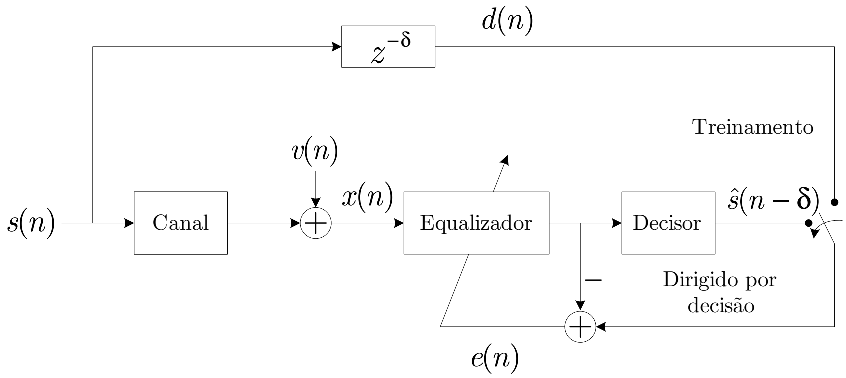

Figure 1: Equalizador linear adaptativo operando em dois modos: modo de treinamento e modo dirigido por decisão.

(a) Faça um programa que treine o filtro adaptativo com 500 símbolos de uma constelação 4-QAM, seguindo de uma operação dirigida por decisão de 5000 símbolos de uma constelação 16-QAM. Escolha a variância do ruído σ_v^2 de maneira que ela promova uma relação sinal ruído de 30 db na entrada do equalizador. Note que os símbolos escolhidos não têm variância unitária. Por esta razão, a a variância do ruído necessita ser ajustada adequadamente para cada uma das diferentes modulações (constelações) QAM para fornecer o nível de SNR desejado. Escolha $\delta = 15$ e o comprimento do equalizador $M = 15$. Mostre os gráficos da evolução temporal de $s(n)$, $x(n)$ e $\widetilde{s}(n-\delta)$. Use o LMS-normalizado com um fator de passo de $\mu = 0.4$.

(b) Para os mesmos parâmetros do item (a), plote e compare os gráficos de evolução que seriam resultante se o equalizador fosse treinado com 150, 300 e 500 iterações. Use o LMS com um $\mu = 0.001$.

(c) Assuma agora que os dados transmitidos foram gerados de uma constelação 256-QAM ao invés de 16-QAM. Plote os gráficos da evolução do sinal na saída do equalizador quando treinado usando o LMS-normalizado e 500 símbolos de treinamento.

(d) Gerar as curvas de taxa de erro de símbolo (SER, do inglês *Symbol Error Rate*) versus SNR na entrada do equalizador para símbolos de constelações 4, 16, 64 e 256-QAM. Faça SNR variar de 5 dB a 30 dB.

charles@gtel.ufc.br
http://charlescasimiro.github.io/

4 Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados

4.1 Algoritmo RLS

Organizar

4.2 Erro de Estimação a Priori

Organizar

4.3 Preditor Adaptativo

Organizar

4.4 Equalização de Canais

Organizar

4.5 Equalização Adaptativa

Organizar

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Período: 2018.2

Lista de Exercícios No. 4: Método dos Mínimos Quadrados

1. O algoritmo RLS é utilizado para prever o sinal $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ usando um filtro FIR de segunda ordem com o primero coeficiente fixo em 1. Dado $\lambda = 0.98$, calcule o sinal de saída $y(n)$ e os coeficientes do filtro nas primeiras 10 iterações. Note que a meta é minimizar $E\left\{y^2(n)\right\}$. Inicie com $\mathbf{w} = [1\ 0\ 0]^T$ e $\delta = 100$.

2. Seja $\epsilon(n)$ que denota um erro de estimação *a priori*

$$\epsilon(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$$

em que $d(n)$ é a resposta desejada, $\mathbf{x}(n)$ é o vetor de entrada do filtro e $\mathbf{w}(n-1)$ é a estimativa anterior do vetor de coeficientes do filtro. Seja $e(n)$ o erro de estimação *a posteriori*

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

em que $\mathbf{w}(n)$ é a estimativa atual do vetor de coeficientes do filtro. Para dados complexos ambos $\epsilon(n)$ e $e(n)$ são de valores complexos. Mostre que o produto $\epsilon(n)e^*(n)$ é sempre de valor real.

3. Seja um sinal $x(n)$ composto de uma senóide em meio à ruído. Simule um preditor adaptativo de ordem 2 com um algoritmo RLS considerando SNR = 3 dB e SNR $\rightarrow \infty$. Variando o fator de esquecimento e/ou as condições iniciais verifique e comente sobre a ocorrência ou não de instabilidade numérica. Repita o procedimento como preditor de ordem 3.

4. Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1 z^{-1}$. (Problema da lista de exercícios no. 3).

(a) Calcule a adaptação do algoritmo usando o RLS.

(b) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador. Verifique qual a melhor inicialização do algoritmo RLS. Compare com os algoritmos LMS, LMS-Normalizado e Gauss-Newton.

(c) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.

5. Seja a questão 6 da lista de exercícios anterior (Algoritmos Recursivos - questão sobre Equalização Adaptativa). Implemente o RLS para a equalização do sistema considerado na letra (a) da mesma. Compare os resultados obtidos com o LMS. Verifique a velocidade de convergência para os casos de $\lambda = 0.9$, $\lambda = 0.99$ e $\lambda = 0.999$.

5 Implementações em MATLAB

A implementação é dividida em dois arquivos. O primeiro é chamado *filter_hw.m*[1], onde há a definição dos métodos utilizados nos problemas. O segundo é o script *main.m*[2], que chama os métodos para serem executados. São apresentados nas sessões 5.1 e 5.2, respectivamente.

[1] *filter_hw.m*: `https://github.com/lucasabdalah/Courses-HWs/blob/master/Master/TIP7188-FILTRAGEM_ADAPTATIVA/homework/code/filter_hw.m`

[2] *main.m*: `https://github.com/lucasabdalah/Courses-HWs/blob/master/Master/TIP7188-FILTRAGEM_ADAPTATIVA/homework/code/main.m`.

Table of Contents

MÉTODOS 1
HOMEWORK 2 - PROBLEM 5 1
VERBOSE DETAILS 2
SAVE DATA TO TXT FILE 2

MÉTODOS

[TIP7188 - Filtragem Adaptativa] Author: Lucas Abdalah

filter_hw.m

filter_hw is a package developped for the Adaptative Filtering Course It is a way to make a compilation for all function

CONTENT

```
SAVE DATA TO TXT FILE
    filter_hw.MAT2TXT       - Write a matrix X into a txt file
    filter_hw.TENSOR2TXT    - Write a 3D tensor X into a txt file
```

```
PLACE HOLDER
```

```
classdef filter_hw
```

```
methods(Static)
```

HOMEWORK 2 - PROBLEM 5

```
function hw2p5(varargin)
% FILTER_HW.HW2P5  Perfom the error surface propose on the Hw 2,
 problem 5
%
%
%   See also.

    if isempty(varargin)
        save_results = false;
    else
        save_results = varargin{1};
    end

    N = 25;
    w_lim = 100;
    w = [linspace(-w_lim,w_lim,N); linspace(-w_lim,w_lim,N)];
    [w_0, w_1] = meshgrid(w(1,:), w(2,:));
    J_surface = @(w_0, w_1) 24.40 - 4.*w_0 - 9.*w_1 + w_0.^2 + w_1.^2;
    J = J_surface(w_0, w_1);
    h = figure();
    surf(w_0, w_1, J, 'EdgeColor', 'none');
```

```
        colormap turbo;
        xlabel('$w_0$', 'FontSize', 16, 'interpreter', 'latex');
        ylabel('$w_1$', 'FontSize', 16, 'interpreter', 'latex');
        zlabel('$J$', 'FontSize', 16, 'interpreter', 'latex');
        view([-24.5036297640653 47.6514617014408]);
        colorbar('box', 'off');
        grid on;
        axis tight;
        filter_hw.export_fig(save_results, h, 'figures/hw2p5');
    end
```

VERBOSE DETAILS

```
    function export_fig(Activate, h, filename)
        if Activate
            savefig_tight(h, filename, 'both');
            filter_hw.verbose_save(filename);
        else
            pause(1)
            close(h);
        end
    end

    function verbose_save(filename)
        fprintf('Saving Results for:\n\t %s \n', filename);
    end
```

SAVE DATA TO TXT FILE

```
    function mat2txt(filename, X, permission, header)
    % ND.MAT2TXT  Write a matrix X into a txt file
    %   mat2txt(filename, X, 'w', header) - Overwite the file
    %   mat2txt(filename, X, 'a', header) - Append to the file end
    %
    %   See also.
            [I, J] = size(X);
            fileID = fopen(filename, permission);
            fprintf(fileID, [repelem('-', strlength(header)+3), '\n',
     header, ...
                    '\n', repelem('-', strlength(header)+3), '\n']);
            fprintf(fileID, 'X(%d, %d)\n', I, J);
                for ii = 1:I
                    for jj = 1:J
                        fprintf(fileID, ' %2.0f', X(ii,jj));
                    end
                    fprintf(fileID, ';\n');
                end
            fprintf(fileID, '\n');
            fclose(fileID);
    end
```

```
% end methods list
end
end
```

```
ans =

  filter_hw with no properties.
```

Published with MATLAB® R2021a

Função Main

[TIP7188 - Filtragem Adaptativa] Author: Lucas Abdalah

main.m

```
clearvars;
close all;
clc; pause(0.1)

% publish('main.m', 'pdf');
% publish('filter_hw.m', 'pdf');

% filter_hw.hw2p5(false);
```

Published with MATLAB® R2021a