



Universidade Federal do Ceará  
Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia de Teleinformática  
Sistemas de Comunicações Digitais - TI0069

## **Trabalho 01: Modulação Digital**

**Aluno:**

Lucas de Souza Abdalah 385472

**Professor:** André Almeida

**Data de Entrega do Relatório:** 28/03/2021

Fortaleza  
2021

# Sumário

<b>1</b>	<b>Modulação <math>M</math>-QAM</b>	<b>2</b>
1.1	Introdução . . . . .	2
1.2	Energia da Constelação . . . . .	2
1.3	Distância Mínima entre Símbolos . . . . .	3
1.4	Modulador (Codificação de Gray) . . . . .	4
1.5	Demodulador . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Probabilidade de Erro: <math>M</math>-QAM</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Canal RAGB: <math>M</math>-QAM</b>	<b>9</b>
3.1	Modelo . . . . .	9
3.2	Experimento de Transmissão . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Modulação <math>M</math>-PSK</b>	<b>12</b>
4.1	Introdução . . . . .	12
4.1.1	Energia da Constelação . . . . .	12
4.1.2	Distância Mínima entre Símbolos . . . . .	12
4.1.3	Modulador (Codificação de Gray) . . . . .	13
4.1.4	Demodulador . . . . .	13
4.2	Probabilidade de Erro: $M$ -PSK . . . . .	15
4.3	Canal RAGB: $M$ -PSK . . . . .	16
4.3.1	Modelo . . . . .	16
4.3.2	Experimento de Transmissão . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Comparativo <math>M</math>-QAM vs. <math>M</math>-PSK</b>	<b>18</b>
	<b>Referências</b>	<b>20</b>

# 1 Modulação $M$ -QAM

## 1.1 Introdução

Na modulação, *quadrature amplitude modulation* (QAM) os símbolos de informação são mapeados nas amplitudes das portadoras em fase e quadratura. Um modelo simplificado do sinal transmitido é visto como a equação 1.

$$s_m(t) = (A_m^{(\text{real})} + jA_m^{(\text{imag})})g(t) \quad (1)$$

No caso especial em que amplitudes  $A_m^{(\text{real})}$  e  $A_m^{(\text{imag})}$  assumem valores discretos no conjunto da equação 2, a constelação é chamada QAM retangular. O QAM retangular se aplica ao caso estudado a seguir, pois a quantidade de símbolos utilizados ( $M = \{4, 16, 64\}$ ) se encaixam na condição e é utilizado para construção do alfabeto da modulação [1]. A função `const_MQAM.m` foi

desenvolvida de modo a construir o alfabeto como uma matriz para ordenar os símbolos da esquerda para direita em linhas de símbolos ímpares e, da direita para esquerda em linhas pares.

$$A_m = \{(2m - \sqrt{M} - 1)d\}_{m=1}^{\sqrt{M}} \quad (2)$$

## 1.2 Energia da Constelação

Para calcular a energia média, é suficiente de calcular a equação 3, desenvolvida em [1], [2].

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{M-1}{3} \mathcal{E}_g \quad (3)$$

Sendo  $g(t)$  o pulso de energia unitária,  $\mathcal{E}_g = 1$ . O resultado é computado pela função função `energia_MQAM.m` para cada constelação QAM e é registrado na Tabela 1.

A relação entre  $\mathcal{E}_{media} = \mathcal{E}_b \log_2 M$  permite calcular diretamente a energia média de bit ( $\mathcal{E}_b$ ), resultando na equação 4

$$\mathcal{E}_b = \frac{M-1}{3 \log_2 M} \mathcal{E}_{media} \quad (4)$$

### 1.3 Distância Mínima entre Símbolos

O parâmetro  $d$  é a distância entre os símbolos adjacentes, e pode ser obtido com o cálculo da distância euclidiana entre estes, como na equação 5.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}[(A_{mi} - A_{ni})^2 + (A_{mq} - A_{nq})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}} \end{aligned} \quad (5)$$

Essa distância é computada pela função `d_MQAM.m` e registrada na Tabela 1.

$M$ -QAM	$\mathcal{E}_{media}$	$\mathcal{E}_b$	$d$
$M$	$\frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g$	$\frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}}$
4	1	$1.67 \times 10^{-1}$	$\sqrt{2}/2$
16	5	$4.67 \times 10^{-1}$	$\sqrt{2}/2$
64	21	$1.17 \times 10^0$	$\sqrt{2}/2$

Tabela 1: Informações gerais calculadas para a modulação  $M$ -QAM.

## 1.4 Modulador (Codificação de Gray)

O mapeador da constelação  $M$ -QAM consiste em uma função que recebe uma sequência de bits e retorna o símbolo equivalente: `mapping_MQAM.m`. Dentro desta função, é criado um alfabeto de código binário e na sequência ele é convertido em Gray com `gray_const.m`.

Esta codificação é baseada em um algoritmo recursivo 1, cujo recebe uma sequência de bits orientadas pelo bit mais importante (MSB) [3]. A recursão está na operação “ou exclusivo” ( $xor$ ), denotada pelo símbolo ( $\otimes$ ). Este cálculo é executado na função `mybin2gray.m`.

---

### Algorithm 1: Codificação de Gray

---

**Entrada:** Sequência de Bits ( $b$ ) - MSB

**Saída:** Sequencia em Código Gray ( $g$ ) - LSB

$n = 0$ ;

$K = \text{length}(b)$ ;

**while**  $K > n$  **do**

**if**  $K == n$  **then**

$g_{(K-n)} = b_{(K-n)}$  ;

**else**

$g_{(K-n)} = b_{(K-n+1)} \otimes b_{(K-n)}$ ;

**end**

$n = n + 1$ ;;

**end**

$g = \text{flip}(g)$ ;

---

Tabela 2 mostra um exemplo de conversão para código Gray de uma sequência de 2 bits. Seguindo o mesmo procedimento um alfabeto de qualquer tamanho pode ser criado.

Decimal	Binário	Gray	Decimal
0	00	00	0
1	01	01	1
2	10	11	3
3	11	10	2

Tabela 2: Tabela de tradução de binário para Gray com 2 bits.

As constalações  $M$ -QAM para  $M = \{4, 16, 64\}$  são apresentadas nas figuras 1, 2 e 3, respectivamente. É possível observar os valores dos símbolos em fase e quadratura, além do equivalente em binário.

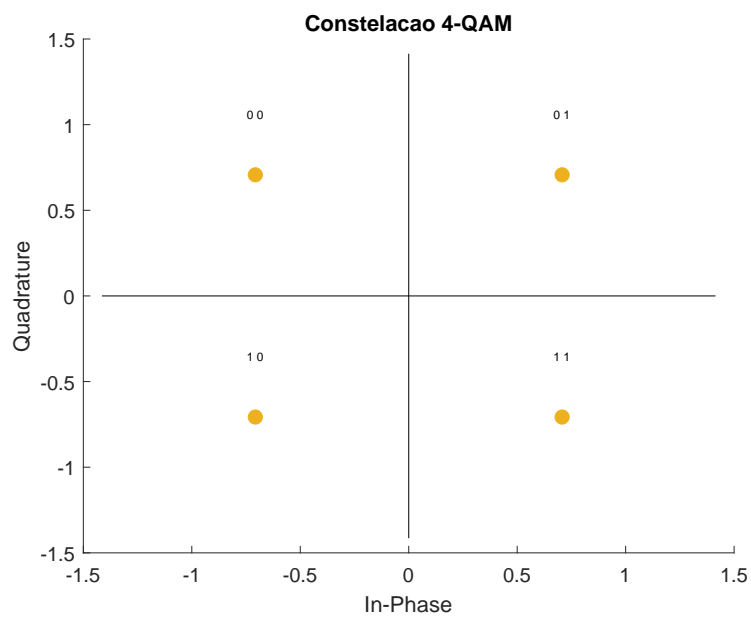


Figura 1: Constelação 4-QAM plot.

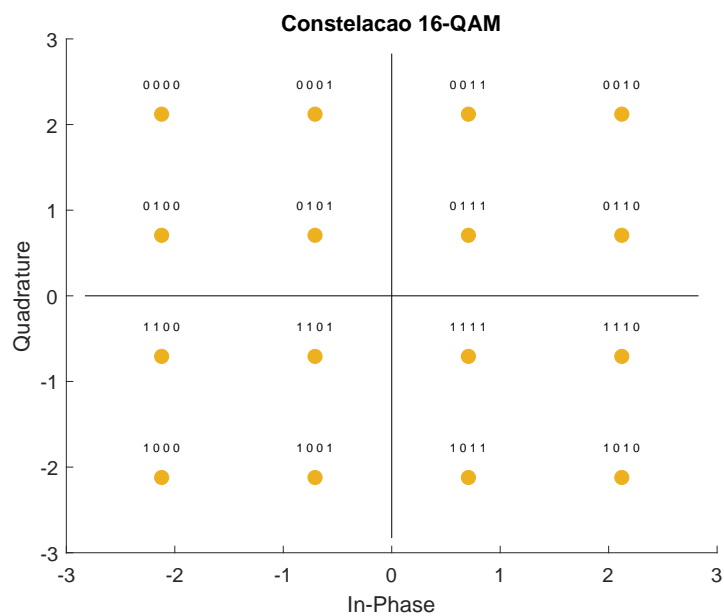


Figura 2: Constelação 16-QAM plot.

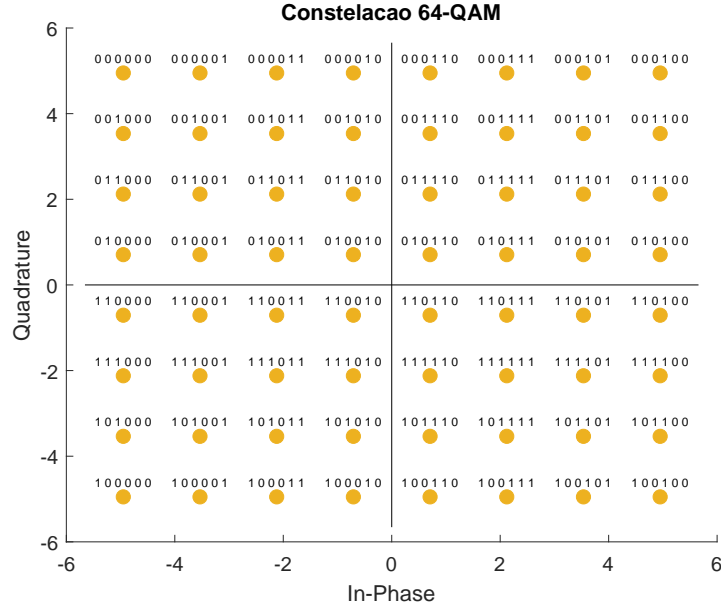


Figura 3: Constelação 64-QAM plot.

## 1.5 Demodulador

A função que decodifica um símbolo tem como entrada o próprio símbolo:  $A_n^{(\text{real})}$  e  $A_n^{(\text{imag})}$ ,  $M$  e  $d$ .

O alfabeto da constelação  $M$ -QAM é gerada e uma vez estes definidos, a área de decisão é desenhada a partir em função de  $M$  e  $d$ . Basicamente, o símbolo selecionado é aquele que minimiza a distância euclidiana entre o símbolo recebido e o do alfabeto, como mostra a equação 6.

$$d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} \quad (6)$$

A função que executa estes comando é a `demapping_MQAM.m` e ela retorna o símbolo decodificado e os bits equivalente do alfabeto de Gray.

As figuras 4 e 5 mostram uma geração de sequência de 50 símbolos aleatórios (*i.i.d*) passando pelo demodulador com o traçado da distância euclidiana entre o símbolo recebido e o equivalente escolhido na constelação.

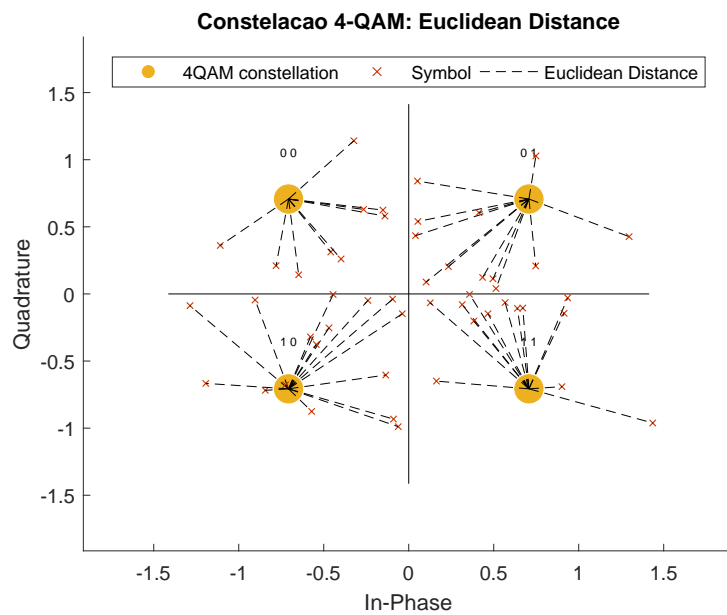


Figura 4: Exemplo de 4-QAM plot.

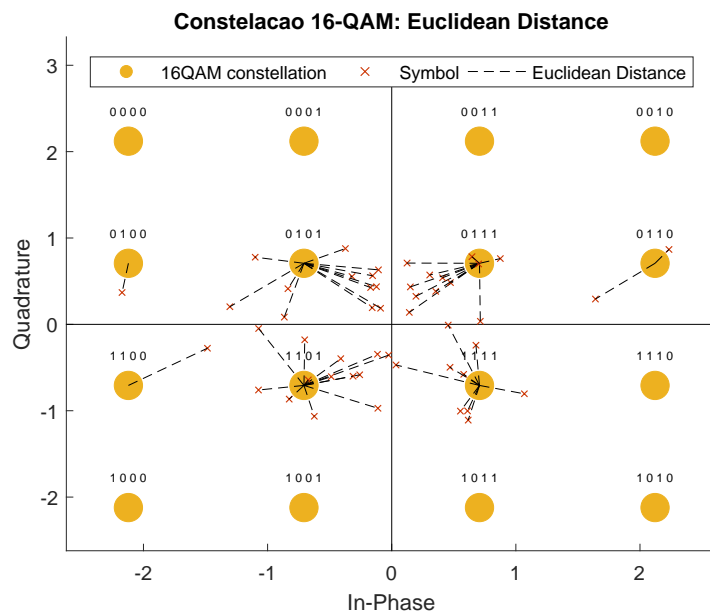


Figura 5: Exemplo de 16-QAM plot.



## 2 Probabilidade de Erro: $M$ -QAM

Para calcular a probabilidade de erro  $P(e)$  de cada constelação 7 é necessário computar a energia da cosnstelação e do ruído, respectivamente,  $E_s$  e  $N_o$ , que é desenvolvida em [1]. A função `Pe_MQAM.m` é utilizada para calcular a probabilidade de erro.

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left( \sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2 \left( \sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) \quad (7)$$

Para valores mais elevados de relação sinal-ruído( $SNR$ ), a equação 7 pode ser reduzida para 8, pois o segundo termo ao quadrado se torna irrelevante.

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left( \sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) \quad (8)$$

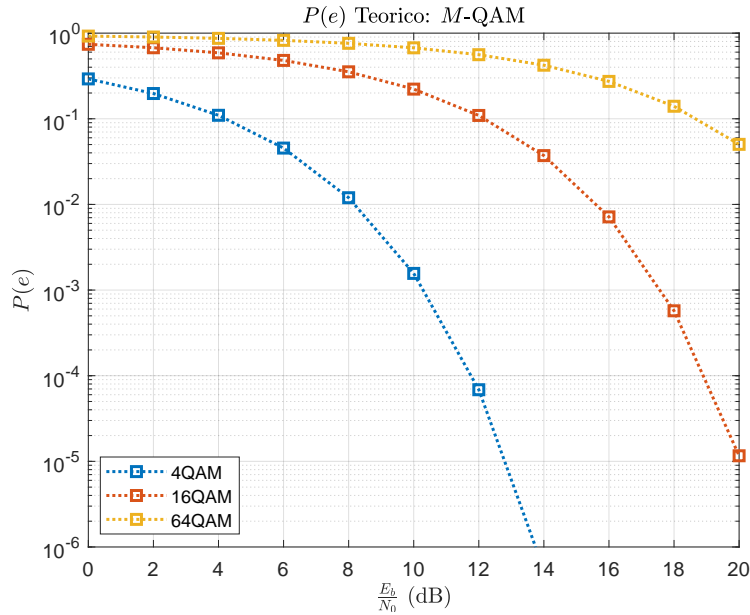


Figura 6: Probabilidade de erro ( $P(e)$ ) teórico  $M$ -QAM.

Nas simulações realizadas, os resultados são semelhantes, além de reduzir o custo computacional.

Entretanto, para manter uma fidedignidade numérico aos resultados, o gráfico mostrado na figura 6 a probabilidade  $P(e)$  é caculada a partir da equação completa 7, variando a  $SNR$  de 0:2:20 dB.

### 3 Canal RAGB: $M$ -QAM

#### 3.1 Modelo

Considerando que um sinal ( $s_m$ ) de mensagem passa por um canal de Ruído Aditivo Gaussiano Branco (RAGB), o modelo da Equação 9, onde como uma variável aleatoria,  $\mathcal{CN}(0, N_0)$ , Gaussiana complexa com média zero e variância  $N_0$ .

$$y_m = s_m + n_m \quad (9)$$

A variância é dada por  $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$ , representando a potência média do ruído que afeta cada dimensão do sinal em banda base [2]. Consequentemente, o desvio padrão do ruído corresponde a  $\sqrt{\frac{N_0}{2}}$ , podendo parte real e imaginária. Portanto, tendo um valor de SNR ( $E_s/N_0$ ) em dB, o termo  $N_0$  pode ser calculado por  $N_0 = E_s 10^{-\frac{E_s - N_0}{10}}$ , tendo enfim o termo  $n_m$  é obtido na equação 10.

$$n_m = \sqrt{\frac{N_0}{2}} (\text{randn}(1) + 1j\text{randn}(1)) \quad (10)$$

Para ilustrar a implementação do modelo, as constelações  $M$ -QAM recebem uma sequência de símbolos com SNR de 25dB gerados no script `script_AWGN.m`, como mostrado na figura 7, 8 e 9.

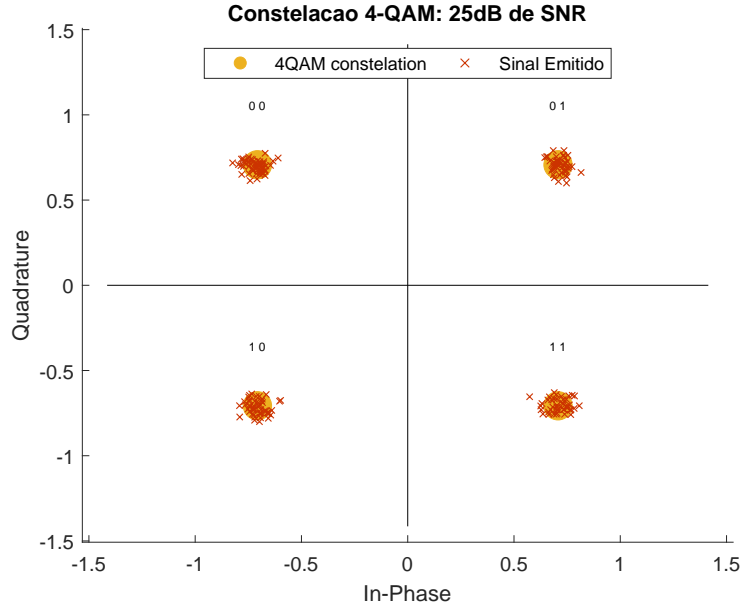


Figura 7: Simulação de transmissão 4-QAM, com  $SNR$  de 25dB.

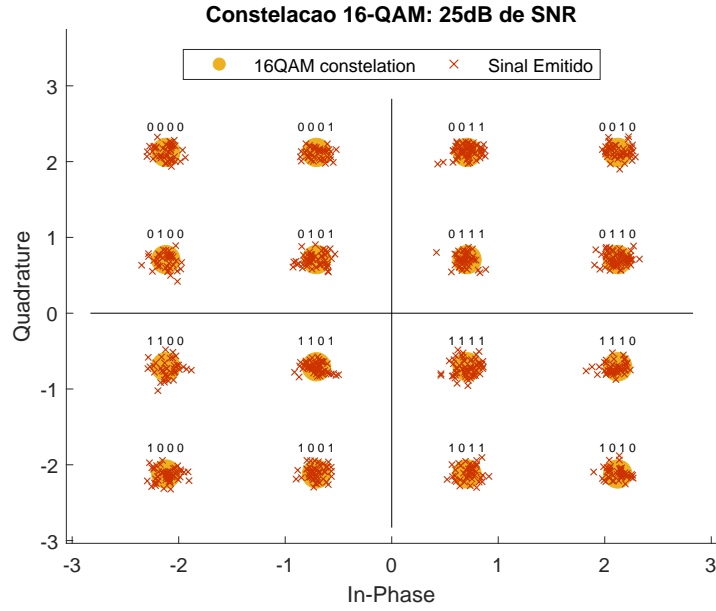


Figura 8: Simulação de transmissão 16-QAM, com  $SNR$  de 25dB.

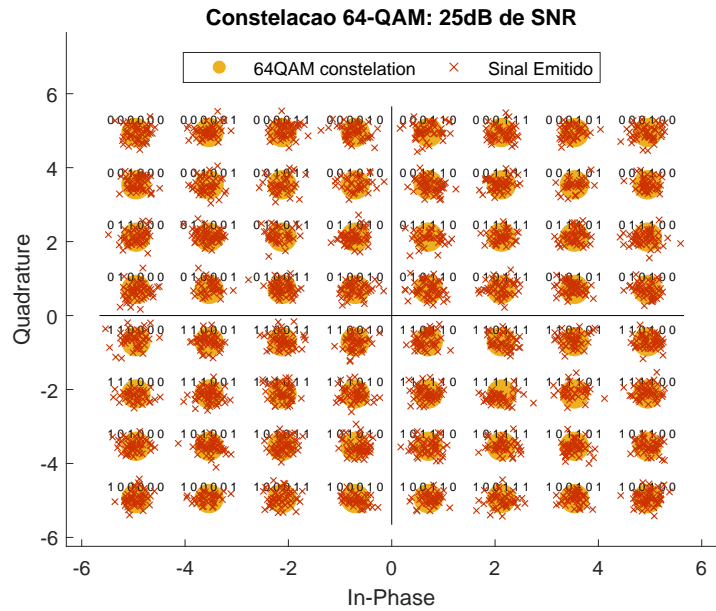


Figura 9: Simulação de transmissão 64-QAM, com  $SNR$  de 25dB.

### 3.2 Experimento de Transmissão

O experimento consiste em realizar uma transmissão de uma sequência  $s_m$  de tamanho  $L = 264000$  bits pelo modelo do canal RAGB com as constelações  $M$ -QAM, variando a  $SNR$  de 0 a 20 dB com passo 2.

Ao traçar as curvas teóricas de probabilidade de erro de símbolo  $P(e)$  e a taxa de erro de símbolo  $SER$  na figura 10 é possível observar que os valores teóricos e simulados são idênticos, corroborando o embasamento desenvolvido nas seções anteriores.

Estes resultados são gerados com a rotina `script_teoricaxAWGN.m`, que chama os dados já computados nas seções anteriores e traça as curvas em um mesmo gráfico.

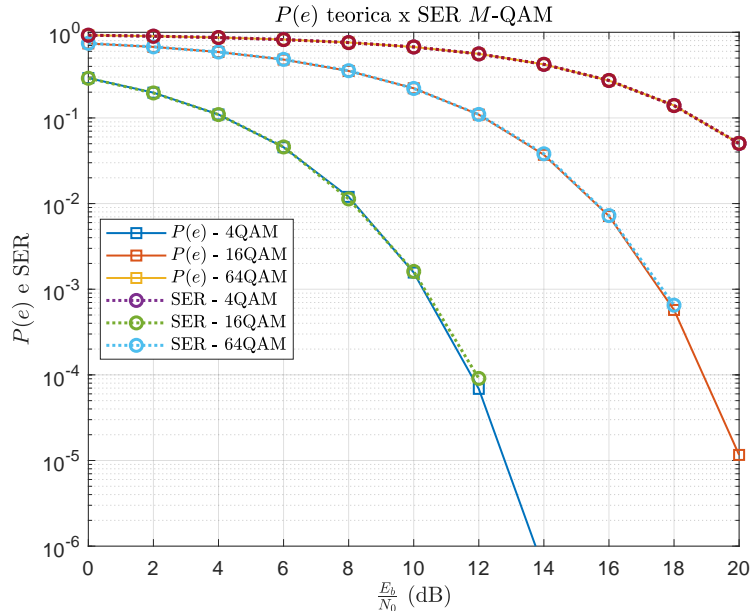


Figura 10: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão  $M$ -QAM em canal RAGB.

## 4 Modulação $M$ -PSK

### 4.1 Introdução

O esquema de modulação *phase-shift keying* (PSK) tem os símbolos de seu alfabeto com mesma amplitude, mas com fases diferentes para cada mensagem, podendo ser escrito para  $M > 2$  de acordo com a equação 11

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{media}}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{(2i-1)\pi}{M}\right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

Assumindo a energia do pulso de transmissão  $g(t)$  unitária,  $\mathcal{E}_g = 1$ , o sinal também pode ser expresso através de uma combinação linear [1], de modo que  $s_i(t)$  é reescrito como na equação 12.

$$s_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_{media}} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{M}\right) \\ \sqrt{\mathcal{E}_{media}} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{M}\right) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M \quad (12)$$

Esta construção facilita a geração dos símbolos da constelação, dado que ao construir os símbolos de parte superior (imaginária positiva), se faz suficiente apenas rebatê-los em função do eixo das componentes reais.

#### 4.1.1 Energia da Constelação

Para calcular a energia média, é suficiente de calcular a equação 13, desenvolvida em [1], [2].

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_g \quad (13)$$

Sendo  $g(t)$  o pulso de energia unitária,  $\mathcal{E}_g = 1$ . O resultado é computado pela função função `energia.MPSK.m` para cada constelação PSK e é registrado na Tabela 3.

Ao recuperar a relação entre  $\mathcal{E}_{media} = \mathcal{E}_b \log_2 M$  que resulta na equação 4, o cálculo da energia média de bit ( $\mathcal{E}_b$ ) na equação 14.

$$\mathcal{E}_b = \frac{1}{2 \log_2 M} \mathcal{E}_g \quad (14)$$

#### 4.1.2 Distância Mínima entre Símbolos

O parâmetro  $d$  é a distância euclidiana entre dois símbolos de uma constelação  $M$ -PSK, e é obtido através da equação 15.

$$d = 2\sqrt{\mathcal{E}_{media} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \quad (15)$$

Essa distância é computada pela função `d_MPSK.m` e registrada na Tabela 3.

$M$ -PSK	$\mathcal{E}_{media}$	$\mathcal{E}_b$	$d$
$M$	$\frac{1}{2}\mathcal{E}_g$	$\frac{1}{2\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$2\sqrt{\mathcal{E}_{media} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$
4	0.5	$8.33 \times 10^{-2}$	1
8	0.5	$5.56 \times 10^{-2}$	$5.41 \times 10^{-1}$

Tabela 3: Informações gerais calculadas para a modulação  $M$ -PSK.

#### 4.1.3 Modulador (Codificação de Gray)

A função `const_MPSK.m` trabalha gerando apenas para gerar os coeficientes dos símbolos:  $r_i \exp(j\varphi_i)$ , com o  $0 < \varphi_i < \pi$ . Na sequência basta rebatê-los em torno do eixo das componentes reais( $x$ ), gerando toda a constelação  $M$ -PSK.

O mapeador da constelação  $M$ -PSK consiste em uma função que recebe uma sequência de bits e retorna o símbolo equivalente: `mapping_MPSK.m`. Seguindo a mesma lógica do mapeador utilizado no  $M$ -QAM, dentro desta função, é criado um alfabeto de código binário e na sequência ele é convertido convertido em Gray com `gray_const.m`.

Para esta codificação basta resgatar o procedimento do algoritmo 1, já citado: `mybin2gray.m`.

As constalações  $M$ -PSK para  $M = \{4, 8\}$  são apresentadas nas figuras 1, 11 e 12, respectivamente. É possível observar os valores dos símbolos, além dos equivalentes em binário.

#### 4.1.4 Demodulador

A função que decodifica um símbolo tem como entrada o próprio símbolo:  $A_n^{(\text{real})}$  e  $A_n^{(\text{imag})}$ ,  $M$  e  $\mathcal{E}_{media}$ .

O alfabeto da constelação  $M$ -PSK é gerado e uma vez que estes símbolos são definidos, a área de decisão é desenhada em função de  $M$  e  $\mathcal{E}_{media}$ . Basicamente, o símbolo selecionado é aquele que minimiza a distância euclidiana

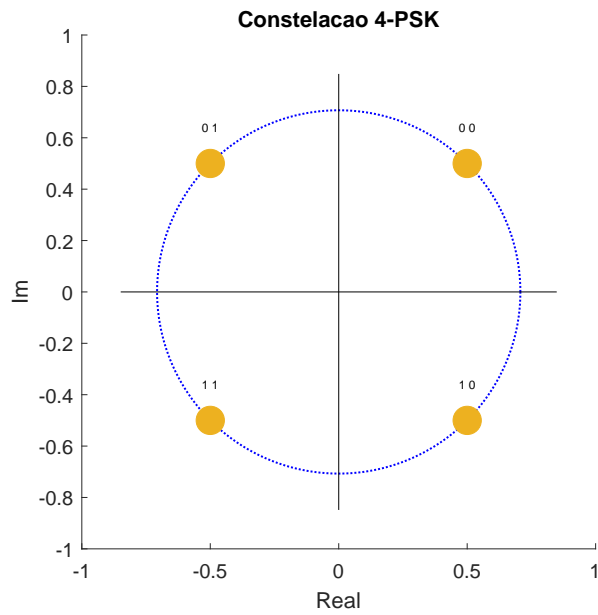


Figura 11: Constelação 4-PSK com codificação de Gray.

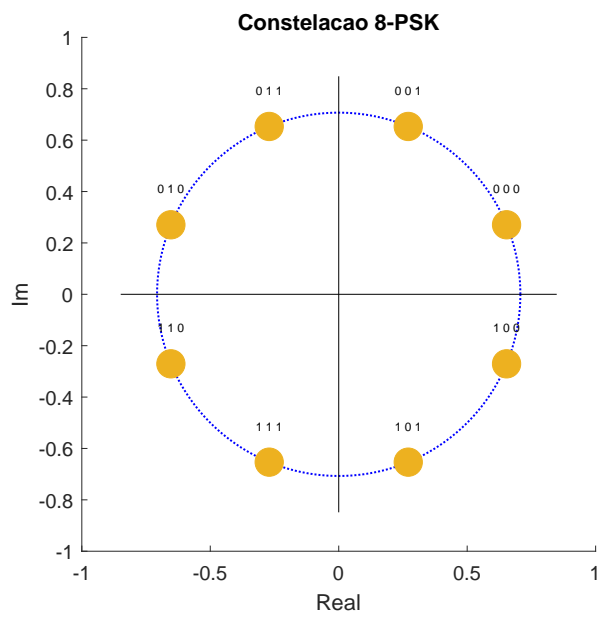


Figura 12: Constelação 8-PSK com codificação de Gray.

entre o símbolo recebido e o do alfabeto, como mostra a equação 6 discutida nas seções anteriores.

A função que executa estes comando é a `demapping_MQAM.m` e ela retorna o símbolo decodificado e os bits equivalente do alfabeto de Gray.

## 4.2 Probabilidade de Erro: $M$ -PSK

Para calcular a probabilidade de erro  $P(e)$  de cada constelação 16 é necessário computar a energia da cosnstelação e do ruído, respectivamente,  $E_s$  e  $N_o$ , que é desenvolvida em [1].

$$P(e) \approx 2Q \left( \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{media}}{N_0}} \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \right) \quad (16)$$

A função `Pe_MPSK.m` é utilizada para calcular a probabilidade de erro. O gráfico mostrado na figura 13 mostra a probabilidade  $P(e)$  caculada a partir da equação 16, variando a  $SNR$  de 0:2:20 dB.

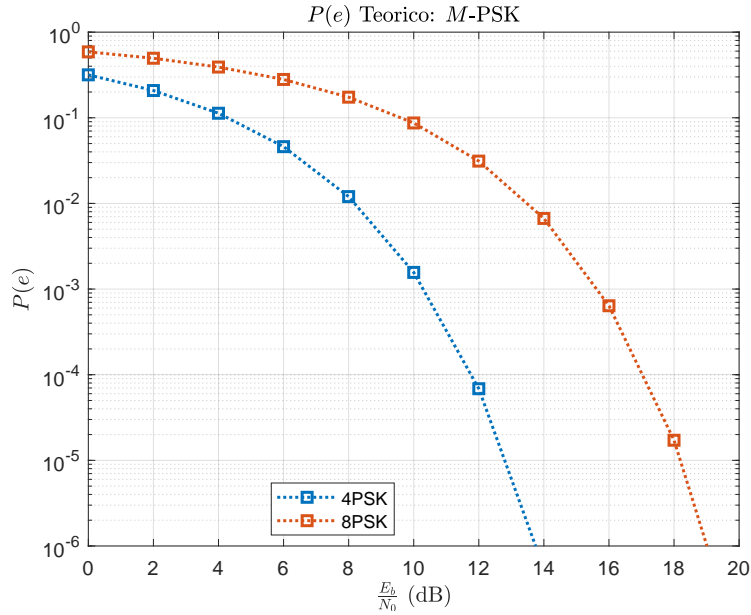


Figura 13: Probabilidade de erro ( $P(e)$ ) teórico  $M$ -PSK.



## 4.3 Canal RAGB: $M$ -PSK

### 4.3.1 Modelo

Seguindo o mesmo modelo utilizado para o caso  $M$ -QAM da equação 9, o modelo  $M$ -PSK, com  $M = 4$  recebe uma sequência de símbolos com SNR de 25dB gerados no script `script_AWGN.m` para ilustrar a implementação a passagem dos símbolos pelo canal, como mostrado na figura 14.

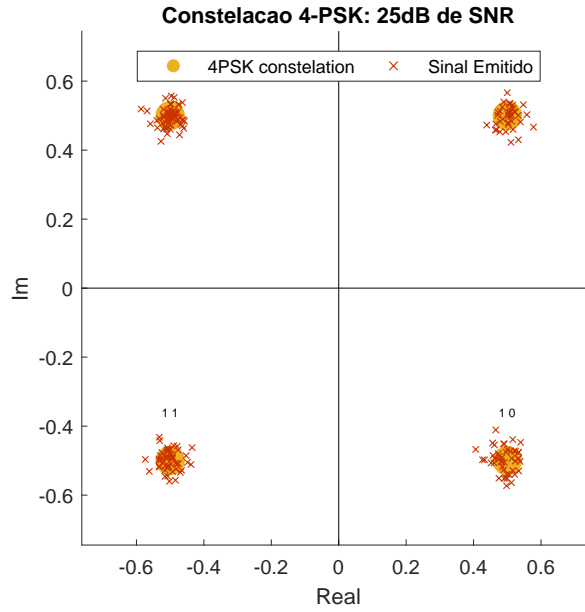


Figura 14: Simulação de transmissão 4-PSK, com  $SNR$  de 25dB..

### 4.3.2 Experimento de Transmissão

O experimento consiste em realizar uma transmissão de uma sequência  $s_m$  de tamanho  $L = 264000$  bits pelo modelo do canal RAGB com as constelações  $M$ -PSK, variando a  $SNR$  de 0 a 20 dB com passo 2.

Ao traçar as curvas teóricas de probabilidade de erro de símbolo  $P(e)$  e a taxa de erro de símbolo  $SER$  na figura 15 é possível observar que os valores teóricos e simulados são idênticos, corroborando o embasamento desenvolvido nas seções anteriores.

Estes resultados são gerados com a rotina `script_teoricaxAWGN.m`, que chama os dados já computados nas seções anteriores e traça as curvas em um mesmo gráfico.

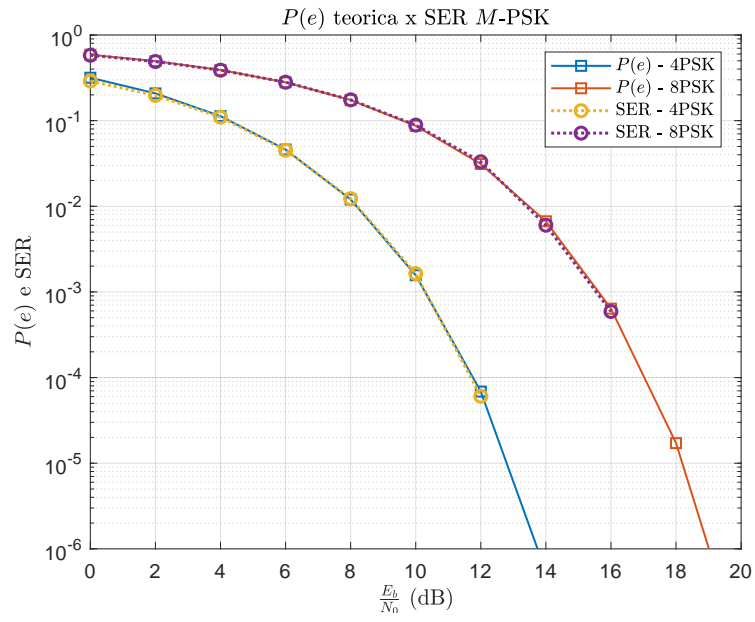


Figura 15: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão  $M$ -PSK em canal RAGB.

## 5 Comparativo $M$ -QAM vs. $M$ -PSK

- Para o caso do  $M$ -QAM é possível observar que ao aumentar o número de símbolos na constalação, há o ganho de símbolos transmitidos por símbolos. Ao manter a energia  $\mathcal{E}_g$  fixa, a energia média da constelação cresce proporcionalmente. Sendo igual 1, 10 e 21 para os casos de  $M = 4, 16, 64$ , respectivamente. Isso implicada que a distância  $d$  entre os símbolos adjacentes é a mesma, acarretando limiares que exigem atenção do engenheiro. É possível observar na figura 16 que para  $M = \{16, 64\}$ , é necessária a  $SNR \geq \{12, 20\}$  dB para ter uma taxa de erro de símbolo menor que 0.1.
- O item anterior indica que há uma exigência de um sistema de transmissão mais robusto ao ruído, pois aumentando a quantidade de símbolos, há uma maior influência do ruído, de forma a deteriorar totalmente a informação enviada dado a proximidade dos símbolos. A transmissão é totalmente prejudicada e equivale ao experimento de jogar uma moeda para saber se o símbolo recebido está correto ou não, já que chega ao ponto de o receptor errar a taxa de 0.5 dos símbolos enviados no caso 64-QAM para 0dB.
- Interessante notar a diferença entre a taxa de erro de bit ( $BER$ ) e a taxa de símbolo ( $SER$ ), pois ao utilizar a codificação de Gray o símbolos decidido apresenta apenas um bit de diferença símbolos vizinhos, garantindo que mesmo ao decodificar um símbolo equivocado, a mensagem será afetada de apenas um bit.
- Vale notar que há uma diferença entre a energia média ( $\mathcal{E}_{media}$ ) das constelações  $M$ -QAM e  $M$ PSK para  $M = 4$ , sendo que estas são idênticas, entretanto a segunda apresenta uma ( $\mathcal{E}_{media}$ ) duas vezes menor que a primeira.
- As figuras 16 e 17 indicam que há uma melhor eficiência espectral para constelações menores, pois estas necessitam de menos energia para alcançar taxas de erros desprezíveis. Entretanto, isto vem com a limitação do número de bits enviados por símbolo e o desafiador é encontrar a relação ideal entre eficiência espectral e bits/símbolo para garantir o o melhor resultado.

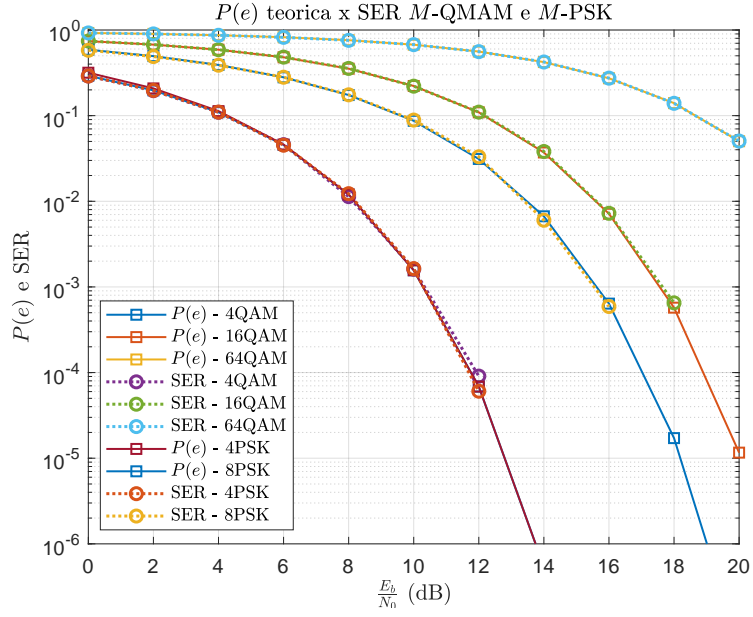


Figura 16: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão  $M$ -PSK em canal RAGB.

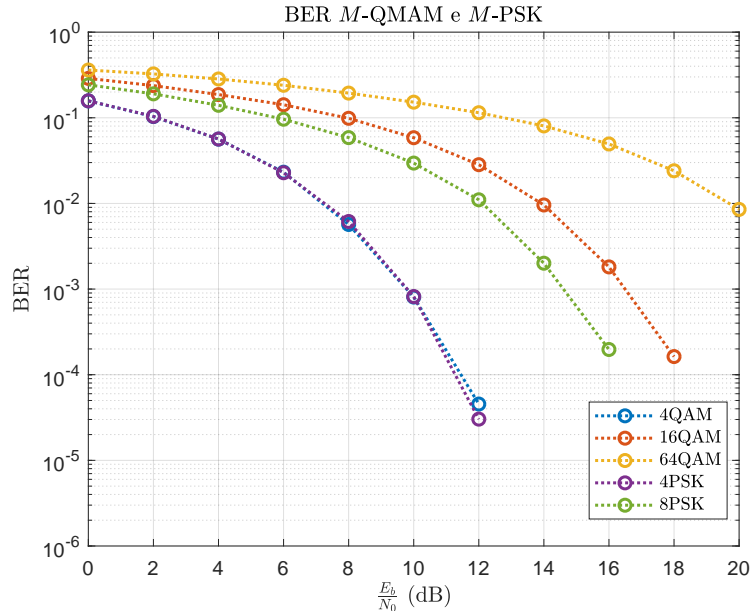


Figura 17: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão  $M$ -PSK em canal RAGB.

## Referências

- [1] C. Pimentel, *Comunicação Digital*, 1<sup>a</sup> ed. 2007.
- [2] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5<sup>a</sup> ed. 1995.
- [3] A. Reddy, *Conversion of Binary to Gray Code*, <https://www.tutorialspoint.com/conversion-of-binary-to-gray-code>, Accessed: 2021-03-26.