Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Filtragem Adaptativa - TIP7188

Lista de Exercícios

Aluno: Lucas de Souza Abdalah 539567

Professor: Charles Casimiro Cavalcante e Guilherme de Alencar Barreto
Data de Entrega: 20/07/2022

Fortaleza
2022

Sumário

1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1.1 Média e Autocorrelação

1.2 Processos Escationários

1.3 Matriz de Autocorrelação

1.4 Matriz Definida Positiva

1.5 Covariância e correlação

1.6 Função de autocorrelação

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1. (Média e autocorrelação) Determine a média e a função de autocorrelação para o processo aleatório

$$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$$

em que $v(n)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média μ e variância σ^2. $x(n)$ é estacionário? Justifique.

2. (Processos estacionários) Sejam os processos aleatórios $x(n)$ e $y(n)$ definidos por

$$x(n) = v_1(n) + 3v_2(n-1)$$

e

$$y(n) = v_2(n+1) + 3v_1(n-1)$$

em que $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são processos de ruído branco independentes cada um com variância igual a $0,5$.

(a) Quais são as funções de autocorrelação de x e de y? Os processos são WSS?

(b) Qual é a função de correlação cruzada $r_{xy}(n_1, n_0)$? Estes processos são conjuntamente estacionários (no sentido amplo)? Justifique.

3. (Matriz de autocorrelação) Quais as condições que os elementos de uma matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

devem satisfazer tal que $\mathbf{R}$ seja uma matriz de autocorrelação válida de

(a) Um vetor aleatório bidimensional?

(b) Um processo estocástico estacionário escalar?

4. (Matriz definida positiva) Assuma que a inversa $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}$ da matriz de autocorrelação de um vetor coluna N-dimensional exista. Mostre que

$$E\left\{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x}\right\} = N$$

5. (Covariância e correlação) Mostre que as matrizes de correlação e covariância satisfazem as relações abaixo:

- $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}^H$
- $\mathbf{C}_{\mathbf{x+y}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{\mathbf{xy}} + \mathbf{C}_{\mathbf{yx}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}$, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ descorrelacionados

6. **(Função de autocorrelação)** Processos aleatórios $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são independentes e têm a mesma função de correlação

$$r_v(n_1, n_0) = 0.5\delta(n_1 - n_0)$$

(a) Qual é a função de correlação do processo aleatório

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)?$$

Este é um processo WSS? Justifique.

(b) Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de $x(n)$.

Charles Casimiro Cavalcante
charles@gtel.ufc.br
http://charlescasimiro.github.io/

2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima

2.1 Filtragem Ótima

2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo

2.3 Cancelamento de Ruído

2.4 Predição Ótima

2.5 Superfície de Erro

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 2: Filtragem Linear Ótima

1. **(Filtragem ótima)** Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação $\mathbf{R_x}$ de um vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ é dada por

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}_{\mathbf{x}d}$ entre o vetor de entrada $\mathbf{x}$ e a resposta desejada $d(n)$ é

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}d} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.

(b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?

(c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz $\mathbf{R_x}$ e de seus autovetores associados.

2. **(Erro médio quadrático mínimo)** Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que $J_{\min}$ é o mínimo erro médio quadrático, $\mathbf{w}$ é o filtro de Wiener, e $\mathbf{A}$ é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$$

em que $d(n)$ é o sinal desejado e $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

3. **(Cancelamento de ruído)** Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura 1 ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

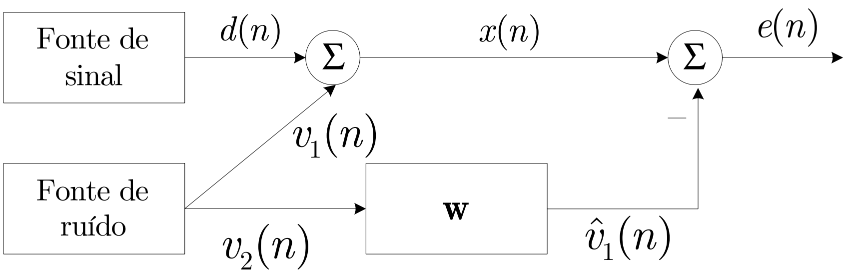

Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

4. **(Predição ótima)** Seja um processo estocástico dado por

$$x(n) = s(n + a) + s(n - 4a),$$

em que $S(n)$ é um processo estocástico WSS dado e a é uma constante.

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo $D(s) = s(n - a)$, o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal $d(n)$ possua média nula e variância unitária.

(a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

(b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

(c) Compare as soluções dos dois.

5. **(Superfície de erro)** Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação: $r_x(0) = 1$ e $r_x(1) = 0$. Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é $\sigma_d^2 = 24.40$ e o vetor de correlação cruzada é $\mathbf{p}_{\mathbf{x}d} = [2 \;\; 4.5]^T$. Encontre:

(a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.

(b) A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

3 Lista 3: Algoritmos Recursivos

3.1 Algoritmo LMF

3.2 Algoritmo LMS

3.3 Algoritmo LMS Normalizado

3.4 Equalização de Canais

3.5 Identificação de Sistemas

3.6 Equalização Adaptativa

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 3: Algoritmos Recursivos

1. **(Algoritmo LMF)** Deseja-se minimizar a função objetivo $\mathbb{E}\left\{e^4(n)\right\}$ utilizando-se um algoritmo do gradiente estocástico do tipo LMS. O algoritmo resultando é chamado de algoritmo *least mean fourth* (LMF). Derive tal algoritmo. Derive também o filtro ótimo para tal critério e compare as soluções.

2. **(Algoritmo LMS)** Considere o uso de um a sequência de ruído branco com média nula e variância σ^2 como entrada do algoritmo LMS. Avalie

(a) a condição para convergência do algoritmo em média quadrática;

(b) o erro em excesso em média quadrática.

3. **(Algoritmo LMS Normalizado)** Avalie a questão anterior para o caso do algoritmo LMS-Normalizado. Compare os dois casos.

4. **(Equalização de canais)** Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1 z^{-1}$.

(a) Forneça o equalizador ótimo segundo o critério de Wiener. Esboce a posição dos zeros do canal e do equalizador no plano Z.

(b) Obtenha o filtro de erro de predição direta de passo unitário, correspondente ao sinal à saída do canal. Calcule os zeros deste filtro e compare com os do equalizador.

(c) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador, para os seguintes algoritmos

  (a) Gradiente determinístico;

  (b) Algoritmo de Newton;

  (c) LMS;

  (d) LMS-normalizado;

(d) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.

(e) Qual o número de condicionamento para o problema em questão?

(f) Qual deveria ser o canal para que o número de condicionamento fosse menor/maior que 5? Comente os resultados.

5. **(Identificação de sistemas)** Utilize o algoritmo LMS para identificar um sistema com a função de transferência dada abaixo.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-12}}{1 - z^{-1}}$$

O sinal de entrada é um ruído branco distribuído uniformemente com variância $\sigma_x^2 = 1$, e o ruído de medida é assumido gaussiano branco descorrelacionado da entrada e com variância de entrada $\sigma_v^2 = 10^{-3}$. O filtro adaptativo tem 12 coeficientes.

(a) Calcule o limite superior para μ (ou seja $\mu_{\max}$) para garantir a estabilidade do algoritmo.

charles@gtel.ufc.br
http://charlescasimiro.github.io/

(b) Execute o algoritmo para $\frac{\mu_{\max}}{2}$, $\frac{\mu_{\max}}{10}$ e $\frac{\mu_{\max}}{50}$. Comente sobre o comportamento da convergência de cada caso.

(c) Meça o desajuste (*misadjustment*) em cada exemplo e comparar com os resultados obtidos pela solução teórica (Eq. (3.50) do livro texto)

(d) Mostre o gráfico da resposta em frequência do filtro FIR em qualquer uma das iterações após a convergência ser obtida e compare com o sistema desconhecido.

6. **(Equalização adaptativa)** Seja o canal de comunicações dado por

$$H(z) = 0.5 + 1.2z^{-1} + 1.5z^{-2} - z^{-3}$$

e deseja-se projetar um equalizar para o mesmo. A estrutura do equalizador é mostrada na Figura 1. Os símbolos $s(n)$ são transmitidos através de um canal e corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco complexo $v(n)$. O sinal recebido $x(n)$ é processado pelo equalizador FIR para gerar estimativas $\widetilde{s}(n-\delta)$, as quais são passados por um dispositivo decisor gerando símbolos $\widehat{s}(n-\delta)$. O equalizador possui dois modos de operação: um modo de treinamento durante o qual uma versão atrasada e replicada da sequência de entrada é usada como o sinal de referência (desejado) e um modo dirigido por decisão no qual a saída do dispositivo de decisão substitui a sequência de referência. O sinal de entrada $s(n)$ é escolhido de uma constelação QAM (por exemplo, 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM ou 256-QAM).

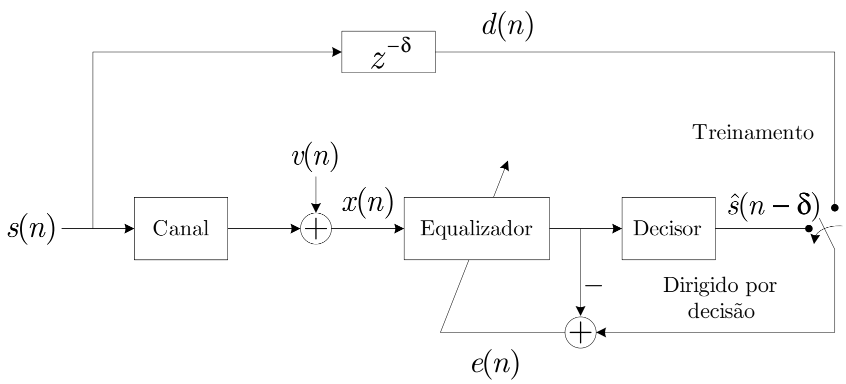

Figure 1: Equalizador linear adaptativo operando em dois modos: modo de treinamento e modo dirigido por decisão.

(a) Faça um programa que treine o filtro adaptativo com 500 símbolos de uma constelação 4-QAM, seguindo de uma operação dirigida por decisão de 5000 símbolos de uma constelação 16-QAM. Escolha a variância do ruído σ_v^2 de maneira que ela promova uma relação sinal ruído de 30 db na entrada do equalizador. Note que os símbolos escolhidos não têm variância unitária. Por esta razão, a a variância do ruído necessita ser ajustada adequadamente para cada uma das diferentes modulações (constelações) QAM para fornecer o nível de SNR desejado. Escolha $\delta = 15$ e o comprimento do equalizador $M = 15$. Mostre os gráficos da evolução temporal de $s(n)$, $x(n)$ e $\widetilde{s}(n-\delta)$. Use o LMS-normalizado com um fator de passo de $\mu = 0.4$.

(b) Para os mesmos parâmetros do item (a), plote e compare os gráficos de evolução que seriam resultante se o equalizador fosse treinado com 150, 300 e 500 iterações. Use o LMS com um $\mu = 0.001$.

(c) Assuma agora que os dados transmitidos foram gerados de uma constelação 256-QAM ao invés de 16-QAM. Plote os gráficos da evolução do sinal na saída do equalizador quando treinado usando o LMS-normalizado e 500 símbolos de treinamento.

(d) Gerar as curvas de taxa de erro de símbolo (SER, do inglês *Symbol Error Rate*) versus SNR na entrada do equalizador para símbolos de constelações 4, 16, 64 e 256-QAM. Faça SNR variar de 5 dB a 30 dB.

4 Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados

4.1 Algoritmo RLS

4.2 Erro de Estimação a Priori

4.3 Preditor Adaptativo

4.4 Equalização de Canais

4.5 Equalização Adaptativa

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Período: 2018.2

Lista de Exercícios No. 4: Método dos Mínimos Quadrados

1. O algoritmo RLS é utilizado para prever o sinal $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ usando um filtro FIR de segunda ordem com o primero coeficiente fixo em 1. Dado $\lambda = 0.98$, calcule o sinal de saída $y(n)$ e os coeficientes do filtro nas primeiras 10 iterações. Note que a meta é minimizar $E\left\{y^2(n)\right\}$. Inicie com $\mathbf{w} = [1\ 0\ 0]^T$ e $\delta = 100$.

2. Seja $\epsilon(n)$ que denota um erro de estimação *a priori*

$$\epsilon(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$$

em que $d(n)$ é a resposta desejada, $\mathbf{x}(n)$ é o vetor de entrada do filtro e $\mathbf{w}(n-1)$ é a estimativa anterior do vetor de coeficientes do filtro. Seja $e(n)$ o erro de estimação *a posteriori*

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

em que $\mathbf{w}(n)$ é a estimativa atual do vetor de coeficientes do filtro. Para dados complexos ambos $\epsilon(n)$ e $e(n)$ são de valores complexos. Mostre que o produto $\epsilon(n)e^*(n)$ é sempre de valor real.

3. Seja um sinal $x(n)$ composto de uma senóide em meio à ruído. Simule um preditor adaptativo de ordem 2 com um algoritmo RLS considerando SNR = 3 dB e SNR $\to \infty$. Variando o fator de esquecimento e/ou as condições iniciais verifique e comente sobre a ocorrência ou não de instabilidade numérica. Repita o procedimento como preditor de ordem 3.

4. Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1 z^{-1}$. (Problema da lista de exercícios no. 3).

(a) Calcule a adaptação do algoritmo usando o RLS.

(b) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador. Verifique qual a melhor inicialização do algoritmo RLS. Compare com os algoritmos LMS, LMS-Normalizado e Gauss-Newton.

(c) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.

5. Seja a questão 6 da lista de exercícios anterior (Algoritmos Recursivos - questão sobre Equalização Adaptativa). Implemente o RLS para a equalização do sistema considerado na letra (a) da mesma. Compare os resultados obtidos com o LMS. Verifique a velocidade de convergência para os casos de $\lambda = 0.9$, $\lambda = 0.99$ e $\lambda = 0.999$.

5 Listas