Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Introdução a Teoria da Informação – TI0056

Avaliação Parcial 02 - Teórica

Aluno	Diego Cartaxo Colaço - 385450
	Filipe Tavares Sores - 389240
	Kenneth Brenner dos Anjos Benício – 385468
	Lucas de Souza Abdalah - 385472
Professor	Walter da Cruz Freitas Júnior

Fortaleza, 03 de dezembro de 2018

Sumário

1 Teóricas

1.1 Questão 1

Na figura está representado um canal discreto designado por binary erasure channel (BEC):

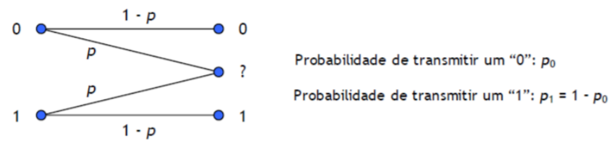

Figura 1: Binary Erasure Channel

1. Determine a informação mútua média do canal quando $p_0 = 0{,}25$ e $p = 0{,}1$.

   Solução:

   A expressão utilizada para calcular a informação mútua do canal é fornecidade pela seguinte relação:

   $$I(x|y) = H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) \tag{1}$$

   Dessa forma, é possível calcular $I(x|y)$ a partir tanto da entropia associada a informação enviada pelo transmissor quanto pela entropia na informação associada a informação recebida pelo receptor. Sendo assim, inicialmente é necessário calcular as entropias da entrada e da saída do canal pela seguinte relação que representa a entropia de uma fonte Z:

   $$H(Z) = \sum_{i=1}^{M} p_i log_2(\frac{1}{p_i}) \tag{2}$$

   Para isso, é necessário calcular a probabilidade da transmissão de cada tipo de bit de informação. No problema aqui abordado, como trata-se um canal simétrico binário basta calcular a probabilidade de transmissão do bit 1 pela seguinte relação uma vez que já seja conhecida as informações sobre a probabilidade de transmissão do bit 0:

   $$p_0 + p_1 = 1 \rightarrow p_1 = 1 - p_0 \rightarrow p_1 = 0.75 \tag{3}$$

   Em seguida, calcula-se as probabilidades associadas a saída em **y** pelas relações abaixo:

   $$p(y = 0) = p_0(1 - p) = 0,225 \tag{4}$$

   $$p(y = ?) = p_0 p + p_1 p = 0,1 \tag{5}$$

   $$p(y = 1) = p_1(1 - p) = 0,675 \tag{6}$$

   Em posse desses valores é finalmente possível calcular a entropia média associada a entrada, $H(X)$, e a saída, $H(Y)$, do canal:

$$H(x) = p_0 log_2(\frac{1}{p_0}) + (1-p_0)log_2(\frac{1}{(1-p_0)}) = \frac{1}{4}log_2(4) + \frac{3}{4}log_2(\frac{4}{3}) = 0,811 bits/simb \quad (7)$$

$$H(y) = p_0 log_2(\frac{1}{p_0}) + p_? log_2(\frac{1}{p_?}) + p_1 log_2(\frac{1}{p_1}) \quad (8)$$

$$H(y) = 0,225 log_2(\frac{1}{0,225}) + 0,1 log_2(\frac{1}{0,1}) + 0,675 log_2(\frac{1}{0,675}) = 1,20 bits/simb \quad (9)$$

Por fim, é necessário calcular agora apenas a entropia mútua $H(y|x)$:

$$H(y|x) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p(x_i)p(y_j|x_i)log_2(\frac{1}{p(y_j|x_i)}) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H(y|x) &= p(x=0)p(y=0|x=0)log_2(\frac{1}{p(y=0|x=0)}) + p(x=0)p(y=?|x=0)log_2(\frac{1}{p(y=?|x=0)}) \\ &+ p(x=0)p(y=1|x=0)log_2(\frac{1}{p(y=1|x=0)}) + p(x=1)p(y=0|x=1)log_2(\frac{1}{p(y=0|x=1)}) \\ &+ p(x=1)p(y=?|x=1)log_2(\frac{1}{p(y=?|x=1)}) + p(x=1)p(y=1|x=1)log_2(\frac{1}{p(y=1|x=1)}) \quad (11) \end{aligned}$$

$$H(y|x) = \frac{1}{4}(1-p)log_2(\frac{1}{1-p}) + \frac{1}{4}plog_2\frac{1}{p} + \frac{3}{4}plog_2\frac{1}{p} + \frac{3}{4}(1-p)log_2(\frac{1}{1-p}) = 0,469 bits/simb \quad (12)$$

Por fim, basta aplicar a expressão para o cálculo da informação mútua:

$$I(x|y) = H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) = 1,20 - 0,469 = 0,731 bits/simb \quad (13)$$

2. Determine a capacidade do canal se p = 0,25.

Solução:

A capacidade do canal especifíca a máxima taxa de transmissão de bits de um sinal de tal forma que possa ocorrer a transmissão a uma taxa de erro arbitrariamente pequena. Em posse dessas informações, a capacidade do canal é facilmente obtida pela seguinte expressão segundo [4] para o caso de um canal simétrico binário:

$$C = maxI(x|y) = \max_x(H(y) - H(y|x)) = \max_x H(y) - H(p, 1-p) = 1-p \quad (14)$$

Sendo assim:

$$C = 1 - 0,25 = 0,75 bits \quad (15)$$

1.2 Questão 2

Imagine uma máquina de escrever com 26 teclas:

1. Se ao carregar numa tecla a letra correspondente é escrita, determine a capacidade C em bits/letra.
   Solução:

   Supondo que as 26 letras compõem o alfabeto x do transmissor e os 26 resultados possíveis na chegada do receptor compõem o alfabeto de y, é possível, segundo [4], calcular a capacidade para o canal ruidoso de uma máquina de escrever pela seguinte relação:

$$maxI(x|y) = \max_x(H(y) - H(y|x)) = \max_x H(y) - 1 = log_2(26) - 1 = log_2(13) \tag{16}$$

   Entretanto, nesse momento o ruído não é considerado de modo que a equação acima pode ser reescrita apenas como:

$$C = log_2(26) = 4,7bits \tag{17}$$

2. A máquina está avariada, ou seja, ao carregar numa tecla a letra correspondente, ou a seguinte, é escrita (isto é, A $\rightarrow$ A ou B, ..., Z $\rightarrow$ Z ou A). Quanto vale a nova capacidade?
   Solução:

   Assumindo que a probabilidade de transição dessa máquina de escrever seja igual a $p = \frac{1}{2}$ é possível modelar matematicamente a avaria da máquina por meio de um canal ruidoso de modo que a expressão anteriormente utilizada para a capacidade torna-se:

$$maxI(x|y) = \max_x(H(y) - H(y|x)) = \max_x H(y) - 1 = log_2(26) - 1 = log_2(13) \tag{18}$$

   Dessa forma, é possível obter o seguinte valor para a capacidade do canal:

$$C = log_2(26) - 1 = 3,7bits \tag{19}$$

1.3 Questão 3

Os inventores de um dado código de canal de taxa 0,50 reclamam que com o seu código e com um canal AWGN conseguem obter uma probabilidade de erro negligenciável a 0,5 dB do limite de Shannon. Qual é o menor valor da razão $\frac{E_b}{N_0}$, em dB, permitida pelo código?

Solução:

A taxa de código R_C é o quociente da quantidade de bits antes e depois da codificação, logo se $R_C = 0,5$, isso indica que a cada um bit de informação é necessário enviar mais um bit de redundância. Em seguida, o problema aponta que o objetivo é estar a 0,5dB do limite de Shannon, mas qual é o limite?

A primeira consideração a ser observada é que há um canal AWGN, Ruído Branco Aditivo Gaussiano Branco em português, logo se a entrada $X(t)$ é um processo estacionário, de média nula e banda limitada em B Hz (ruído também limitado em banda), o modelo do sistema é: $Y_k = X_k + N_k,\ k = 1, 2, \ldots, K$, tendo densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$. Fazendo manipulações com equações descritas a partir de (25), tem-se que “existe um valor limite para $\frac{E_b}{N_0}$ abaixo do qual não pode haver comunicação sem erros, qualquer seja o ritmo de transmissão.” *Freitas Jr., W. C.* [3]. Então se T é a duração de cada bit, $R = \frac{1}{T} bits/s$:

$$\frac{P}{N} = \frac{E_b/T}{N_0 B} = \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B} \tag{20}$$

De acordo com a equação da capacidade de canal e com o resultado obtido em (20):

$$C = Blog_2\left(1 + \frac{P}{N}\right) \tag{21}$$

$$C = Blog_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}\right) \tag{22}$$

Sendo $R \leq C$, consequentemente:

$$\frac{R}{B} \leq \frac{C}{B} = log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}\right) \tag{23}$$

Tendo uma banda ilimitada, $B \to \infty$:

$$\frac{R}{B} \leq log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}\right) = \frac{ln\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}\right)}{ln(2)} \approx \frac{\frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}}{ln(2)} \tag{24}$$

Então, conclui-se que o limite para o quociente apresentado é

$$\frac{E_b}{N_0} \geq ln(2)$$

Logo, o limite de Shannon é:

$$ln(2) = -1,59dB$$

Então o menor valor da razão em dB proposto pelo código é:

$$-1,59dB + 0,5dB = -1,09dB$$

1.4 Questão 4

Um sinal digital binário é transmitido através de um canal gaussiano de largura de banda 20kHz. O débito binário do sinal é 10kbits/s e a sua energia por bit vale $E_b = 0,1$ mJ no receptor. O ruído introduzido pelo canal tem a mesma densidade espectral de potência de ruído branco que, depois de atravessar um canal com largura de banda equivalente de ruído de 30 kHz, apresenta uma potência de 75 mW.

1. Calcule a relação sinal-ruído SNR, em dB.

   Solução:

   Para calcular a SNR é necessário obter a potência do sinal digital binário P_{BDS} e a potência P_N do ruído. Sendo o canal gaussiano limitado em faixa e potência, P_{BDS} de transmissão é relacionada à energia por bit $E_b = 0,1mJ$ e ao débito binário $D_R = 10kbps$.

   “O número total de símbolos binários transmitidos por unidade de tempo - débito binário de dados (data rate).” *Ricardo, M.* [6].

$$P_{BDS} = E_b D_R \tag{25}$$

$$P_{BDS} = \left(0,1\ \frac{mJ}{bits}\right)(10\ kbits/s) \tag{26}$$

Observe que a energia pode ser reescrito como Potência x Unidade de Tempo (Ws). De forma que:

$$P_{BDS} = \left(0,1 * 10^-3\ \frac{Ws}{bits}\right)\left(10 * 10^3\ bits/s\right) = 1W \tag{27}$$

Qual a importância do ruído ter a mesma Densidade Espectral de Potência (DSP) de ruído branco atravessando esse canal de banda $B_{WN} = 30kHz$, com potência $P_{WN} = 75mW$? Observar a relação do desvio padrão com a Potência do Ruído. Estabelecendo um sinal $X(t)$ estocástico estacionário, de média nula e limitado em banda, tem-se que a autocorrelação R_X do sinal é dada por:

$$R_X(\tau) = E\{X^*(t)X(t+\tau)\} \tag{28}$$

Já a variância (σ_X^2) é:

$$\sigma_X^2 = E\{|X(t) - \mu_X|^2\} = E\{|X(t)|^2\} - |\mu_X|^2 \tag{29}$$

Observe que, consequentemente, a potência P_X desse sinal é dada por (30) e a equação referente à variância pode ser rescrita em (31):

$$P_X = E\{|X(t)|^2\} = R_X(0) \tag{30}$$

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - |\mu_X|^2 \tag{31}$$

Por fim, se a média μ_X é nula e $R_X(0) = P_X$, a Potência P_X é definida simplesmente pela variância.

$$\sigma^2 = P_X \tag{32}$$

No problema estudado, temos que:

$$\sigma^2 = N_0 B \tag{33}$$

Rescrevendo com as informações desenvolvidas e fornecidas pelo problema ($\sigma^2 = P_{WN},\ B = B_{WN}$)

Utilizando os dados fornecidos pelo problema temos que:

$$N_0 = \frac{P_{WN}}{B_{WN}} \tag{34}$$

$$N_0 = \frac{75mW}{30KHz} = 2.5 * 10^{-6} W/Hz \tag{35}$$

Visto que o N_0 será o mesmo, obtém-se a potência do ruído P_N na banda B_{BDS} do sinal utilizando novamente a equação (33):

$$P_N = N_0 B_{BDS} \tag{36}$$

$$P_N = (2.5 * 10^{-6} W/Hz) * (20kHz) = 0,05W \tag{37}$$

Tendo as informações de (27) e (37) é possível calcular a SNR:

$$SNR = \frac{P_{BDS}}{P_N} = \frac{1W}{0,05W} = 20 \tag{38}$$

Por fim, convertendo para dB:

$$10 * log(SNR) = 10 * log(20) \rightarrow 13,01dB \tag{39}$$

2. Qual é a capacidade do canal, em kbits/s?

Solução:

A capacidade do canal é calculada a partir da relação sinal ruído e a banda de transmissão, logo utilizando o valor de SNR obtido no item anterior, temos que:

$$C = B_{BDS} * log_2(1 + SNR) \tag{40}$$

$$C = (20kHz) * log_2(21) \tag{41}$$

Logo:

$$C = 87,846 \ kbits/s$$

Referências

[1] John G. Proakis and Masoud Salehi *Digital Communications*, 5th edition, New York (2008).

[2] Simon Haykin *Communication Systems* , 4th edition, New York (2014).

[3] Freitas Jr., W. C. *Notas de Aula de TI0056* (2018)

[4] Bouda, J. *Lecture 9 - Channel Capacity*. (2010) Disponível em: `https://www.fi.muni.cz/~xbouda1/teaching/2010/IV111/lecture9.pdf`

[5] Devarney, Bob *et al.A Tutorial on the Decibel*. (Desconhecido) Disponível em: `http://www.arrl.org/files/file/Instructor%20resources/A%20Tutorial%20on%20the%20Dec-N0AX.pdf`

[6] Ricardo, M. *Transmissão de Dados* (2002) Disponível em: `https://web.fe.up.pt/~mricardo/02_03/cdrc1/teoricas/transmissao_v5.pdf`