Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Filtragem Adaptativa - TIP7188

Lista de Exercícios

Aluno: Lucas de Souza Abdalah (539567)

Professor: Charles Casimiro Cavalcante e Guilherme de Alencar Barreto
Data de Entrega: 20/07/2022

Fortaleza
2022

Sumário

1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1.1 Média e Autocorrelação

Para obter a média, basta a expressão de acordo com o operador esperança $\mathbb{E}\{\cdot\}$, dado que as variáveis aleatórias tem mesma média, resume-se a expressão:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(n)\} &= \mathbb{E}\{v(n) + 3v(n-1)\} \\ &= \mu + 3\mu \\ &= 4\mu\end{aligned}$$

Já a variância, é obtida aplicando o mesmo operador, "abrindo"o termo ao quadrado, reorganizando em função do termo σ^2 e sabendo que $v(n)$ e $v(n-1)$ são descorrelacionadas:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{[(x(n) - \mu_X)]^2\} &= \mathbb{E}\{[v(n) - 3v(n-1) - \mu_X]^2\} \\ &= \mathbb{E}\{[v(n) - 3v(n-1) - 4\mu]^2\} \\ &= \mathbb{E}\{[v(n) - \mu + 3v(n-1) - 3\mu]^2\} \\ &= \sigma^2 + 9\sigma^2 + \mathbb{E}\{6[v(n) - \mu][v(n-1) - \mu]\} \\ &= 10\sigma^2\end{aligned}$$

Para afirmar que o processo apresentado é estacionário em sentido amplo, abrevidado em inglês para **WSS**, as estatísticas de primeira e de segunda ordem devem ser independentes ao deslocamento no tempo. Isto pode ser observado, assumindo novamente que $x(n)$ e $x(n+\tau)$, via função de correlação, dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(n)x(n+\tau)\} &= \mathbb{E}\{[v(n) + 3v(n-1)][v(n+\tau) + 3v(n-1+\tau)]\}, \\ &= \mathbb{E}\{v(n)v(n+\tau) + 3v(n)v(n-1+\tau) + 3v(n-1)v(n+\tau) + 9v(n-1)v(n-1+\tau)\} \\ &= \mathbb{E}\{\mu^2 + 3\mu^2 + 3\mu^2 + 9\mu^2\} \\ &= 16\mu^2\end{aligned}$$

Visto que os pré-requisitos são cumpridos, pode-se concluir que o processo é de fato WSS. Entretanto, para afirmar algo além disso é necessário conhecer os movimentos de ordem superior do caso estudado.

1.2 Processos Estacionários

Funções de autocorrelação de x e de y

Primeiramente, é conveniente definir o processo de ruído branco, visto que este possui propriedades bastante conveniente para a solução do problema. O processo desta natureza tem média nula e tem todas as suas amostras independentes entre si. Isto permite que seja obtida a média de novos processos resultantes da mistura linear desses ruídos.

Para $x(n)$, obtém-se a média dado:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(n)\} &= \mathbb{E}\{v_1(n) + 3v_2(n-1)\} \\ &= \mu_1 + 3\mu_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Enquanto para a variânciam, tem-se que (semelhante ao exercício 1.1):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{[x(n)-\mu]^2\} &= \mathbb{E}\{[x(n)-0]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{[v_1(n)+3v_2(n-1)]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{[v_1^2(n)]+6[v_1(n)v_2(n-1)]+9[v_2^2(n-1)]\} \\
&= 1\sigma_1^2+9\sigma_2^2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

O mesmo procedimento é aplicado para $y(n)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{y(n)\} &= \mathbb{E}\{v_2(n+1)+3v_1(n-1)\} \\
&= \mu_2+3\mu_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{[y(n)-\mu]^2\} &= \mathbb{E}\{[y(n)-0]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{[v_2(n+1)+3v_1(n-1)]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{[v_2^2(n)]+6[v_2(n+1)v_1(n-1)]+9[v_2^1(n-1)]\} \\
&= 9\sigma_1^2+1\sigma_2^2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Para função de autocorrelação de $x(n)$, sabe-se que as amostras são descorrelacionadas e o processo é de média nula, então o produto de diversos termos igual a zero também é zero. Temos que:

$$
\begin{aligned}
r_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(n)x(n+\tau)\} &= \mathbb{E}\{[v_1(n)+3v_2(n-1)][v_1(n+\tau)+3v_2(n-1+\tau)]\}, \\
&= \mathbb{E}\{v_1(n)v_1(n+\tau)+3v_1(n)v_2(n-1+\tau)+3v_2(n-1)v_1(n+\tau)+9v_2(n-1)v_2(n-1+\tau)\} \\
&= \vdots \quad \text{(Mesmo passo a passo do problema 1.1)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para $y(n)$, o processo é o mesmo, consquentemente $r_y(\tau) = 0$.

Finalmente, observa-se que estatísticas de primeira e de segunda ordem são independentes do tempo para ambos, i.e, os dois processos são **WSS**.

Função de correlação cruzada

Para obter a função de correlação cruzada, basta aplicar as premissas utilizadas anteriormente: I) Processo de ruído branco é descorrelacionado; II) Média nula.

$$
\begin{aligned}
r_{x,y}(n_1,n_0) &= \mathbb{E}\{[x(n_1)y^*(n_0)]\} \\
&= \mathbb{E}\{[v_1(n_1)+3v_2(n_1-1)][v_2(n_0+1)+3v_1(n_0-1)]^*\}, \\
&= \mathbb{E}\{v_1(n_1)v_2^*(n_0+1)+3v_1(n_1)v_1^*(n_0-1)+3v_2(n_1-1)v_2^*(n_0+1)+9v_2(n_1-1)v_1^*(n_0-1)\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Esta função também é igual a zero, $r_{x,y}(n_1,n_0) = 0$. Isto implica que os processos são conjuntamente estacionários, pois há independência do tempo da função, e por partir de processos de ruído branco, processos WSS individualmente, isto sustenta os desenvolvimento acima.

1.3 Matriz de Autocorrelação

Organizar

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

devem satisfazer tal que $\mathbf{R}$ seja uma matriz de autocorrelação válida de

item

Um vetor aleatório bidimensional?

Solução:

Em suma, precisamos estar atentos às seguintes propriedades para garantir que temos em mãos uma matriz de autocorrelação válida

- $\mathbf{R_x} = \mathbf{R_x^H}$
- $\mathbf{a^H R_{xa}} \geq 0$
- $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \forall\lambda \geq 0$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$

Desse modo, considerando um vetor aleatório bidimensional descrito por $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ podemos então

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{[x_1^2]\} & \mathbb{E}\{[x_1 x_2^*]\} \\ \mathbb{E}\{[x_2 x_1^*]\} & \mathbb{E}\{[x_2^2]\} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{R}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{[x_1^2]\} & \mathbb{E}\{[x_2 x_1^*]\} \\ \mathbb{E}\{[x_1 x_2^*]\} & \mathbb{E}\{[x_2^2]\} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Inicialmente, podemos garantir a simetria quanto ao hermitiano se fizermos

$$\mathbb{E}\{[x_1 x_2^*]\} \triangleq \mathbb{E}\{[x_2 x_1^*]\}, \qquad \mathbb{E}\{[x_2 x_1^*]\} \triangleq \mathbb{E}\{[x_1 x_2^*]\}. \tag{1.4}$$

Entretanto, sabemos que o operador esperança é linear tornando assim as expressões acima equivalentes. Em continuidade do problema, podemos considerar que a restrição as quais os autovalores estão submetidos pode ser facilmente atingida ao garantirmos que o determinante da matriz de correlação seja maior que a nulidade

$$\mathbb{E}\{[x_1^2]\}\mathbb{E}\{[x_1^2]\} - \mathbb{E}\{[x_1 x_2]\}\mathbb{E}\{[x_2 x_1]\} > 0, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{E}\{[x_1^2]\}\mathbb{E}\{[x_2^2]\} > \mathbb{E}\{[x_1 x_2]\}\mathbb{E}\{[x_2 x_1]\}. \tag{1.6}$$

item

Um processo estocástico estacionário escalar?

Solução:

Considerando um processo estocástico estacionário escalar do tipo $\mathbf{X}_t = x(t)$ e uma versão atrasada desse processo definida por $\mathbf{X}_{t+\tau} = x(t+\tau)$ temos que a matriz de correlação pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{[x^2(t)_1]\} & \mathbb{E}\{[x(t)x^*(t+\tau)]\} \\ \mathbb{E}\{[x(t+\tau)x^*(t)]\} & \mathbb{E}\{[x^2(t+\tau)]\} \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{R}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{[x^2(t)_1]\} & \mathbb{E}\{[x(t+\tau)x^*(t)]\} \\ \mathbb{E}\{[x(t)x^*(t+\tau)]\} & \mathbb{E}\{[x^2(t+\tau)]\} \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Em sequência, podemos garantir a simetria quanto ao hermitiano se fizermos

$$\mathbb{E}\{[x(t)x^*(t+\tau)]\} \triangleq \mathbb{E}\{[x(t+\tau)x^*(t)]\}, \tag{1.9}$$
$$\mathbb{E}\{[x(t+\tau)x^*(t)]\} \triangleq \mathbb{E}\{[x(t)x^*(t+\tau)]\}, \tag{1.10}$$

mas, mais uma vez, considerando que o operador esperança é linear então as duas expressões são equivalentes. Já considerando a restrição imposta aos autovalores da matriz temos novamente

$$\mathbb{E}\{[x^2(t)]\}\mathbb{E}\{[x^2(t+\tau)]\} > \mathbb{E}\{[x(t)x^*(t+\tau)]]\}\mathbb{E}\{[x(t+\tau)]x^*(t)]\}. \tag{1.11}$$

1.4 Matriz Definida Positiva

Organizar

$$\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{x}\right\} = N \tag{1.12}$$

Solução:

Inicialmente podemos escrever a expressão regular para a matriz de autocorrelação e supondo que de fato existe uma inversa bem definida para a matriz de autocorrelação

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\} = \mathbf{R}_x, \tag{1.13}$$
$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\}\mathbf{R}_x^{-1} = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_x^{-1}, \tag{1.14}$$
$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_x^{-1}\} = \mathbf{I}_N, \tag{1.15}$$
$$\tag{1.16}$$

Desse modo, podemos aplicar o operador traço de matriz e por meio da propriedade de permutação cíclica desse operador chegamos ao seguinte resultado

$$\mathrm{Tr}\{\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_x^{-1}\}\} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_N\}, \tag{1.17}$$
$$\mathrm{Tr}\{\mathbb{E}\{\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{x}\}\} = \mathrm{Tr}\{\mathbf{I}_N\}, \tag{1.18}$$
$$\mathrm{Tr}\{\mathbb{E}\{\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{x}\}\} = N, \tag{1.19}$$

onde a ultima expressão se justifica pois temos uma matriz identidade de ordem N no lado direito. Desse modo, seu traço é dado por $\sum_{i=1}^{N} 1 = N$.

1.5 Covariância e correlação

Organizar

item

$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{x}}^H$

Solução:

$$C_X = \mathbb{E}\{[(x-\mu)(x-\mu)^H]\} = \mathbb{E}\{[xx^H - x\mu^H - \mu x^H + \mu\mu^H]\}, \tag{1.20}$$
$$C_X = \mathbb{E}\{[xx^H]\} - \mathbb{E}\{[x\mu^H]\} - \mathbb{E}\{[\mu x^H]\} + \mathbb{E}\{[\mu\mu^H]\}. \tag{1.21}$$

Considerando a matriz de correlação pode ser escrita por $R_X = \mathbb{E}\{[xx^H]\}$ e que o valor médio de um escalar é o próprio escalar temos

$$C_X = R_X - \mathbb{E}\{[x\mu^H]\} - \mathbb{E}\{[\mu x^H]\} + \mu\mu^H, \tag{1.22}$$
$$C_X = R_X - \mu^H\mathbb{E}\{[x]\} - \mu\mathbb{E}\{[x^H]\} + \mu\mu^H, \tag{1.23}$$
$$C_X = R_X - \mu\mu^H - \mu\mu^H + \mu\mu^H, \tag{1.24}$$
$$C_X = R_X - \mu\mu^H, \tag{1.25}$$
$$R_X = C_X + \mu\mu^H. \tag{1.26}$$

item

$\mathbf{C_{x+y}} = \mathbf{C_x} + \mathbf{C_y}$, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ descorrelacionados
Solução:

$$\mathbf{C_{x+y}} = \mathbf{C_x} + \mathbf{C_{xy}} + \mathbf{C_{yx}} + \mathbf{C_y}. \tag{1.27}$$

Onde os termos de correlação cruzada $\mathbf{C_{xy}}$ e $\mathbf{C_{yx}}$ podem ser obtidos da seguinte maneira

$$\mathbf{C_{xy}} = \mathbb{E}\{[x - \mu_x][y - \mu_y]\}, \tag{1.28}$$
$$\mathbf{C_{xy}} = \mathbb{E}\{[xy]\} - \mathbb{E}\{[x\mu_y]\} - \mathbb{E}\{[\mu_x y]\} + \mathbb{E}\{[\mu_x\mu_y]\}, \tag{1.29}$$
$$\mathbf{C_{xy}} = \mathbb{E}\{[xy]\} - \mu_y\mu_x - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y, \tag{1.30}$$
$$\mathbf{C_{xy}} = \mathbb{E}\{[xy]\} + \mu_x\mu_y, \tag{1.31}$$
$$\mathbf{C_{xy}} = \mu_x\mu_y, \tag{1.32}$$
$$\tag{1.33}$$

$$\mathbf{C_{yx}} = \mathbb{E}\{[y - \mu_y][x - \mu_x]\}, \tag{1.34}$$
$$\mathbf{C_{yx}} = \mathbb{E}\{[yx]\} - \mathbb{E}\{[y\mu_x]\} - \mathbb{E}\{[\mu_y x]\} + \mathbb{E}\{[\mu_y\mu_x]\}, \tag{1.35}$$
$$\mathbf{C_{yx}} = \mathbb{E}\{[yx]\} - \mu_y\mu_x - \mu_x\mu_y + \mu_y\mu_x, \tag{1.36}$$
$$\mathbf{C_{yx}} = \mathbb{E}\{[yx]\} - \mu_x\mu_y, \tag{1.37}$$
$$\mathbf{C_{yx}} = -\mu_x\mu_y. \tag{1.38}$$

Portanto, é possível afirmar que a soma dos termos de correlação cruzada é nula e que a correlação da soma de dois vetores descorrelacionados é de fato dada por $\mathbf{C_{x+y}} = \mathbf{C_x} + \mathbf{C_y}$

$$\mathbf{C_{xy}} + \mathbf{C_{yx}} = \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y, \tag{1.39}$$
$$\mathbf{C_{xy}} + \mathbf{C_{yx}} = 0. \tag{1.40}$$

1.6 Função de autocorrelação

Organizar

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)? \tag{1.41}$$

Este é um processo WSS? Justifique.

Solução:

Para simplificar o desenvolvimento iremos considerar que os processos possuem media nula e são descorrelacionados

$$
\begin{aligned}
&r_x = \mathbb{E}\{x(n)x^*(n)\},\\
&r_x = \mathbb{E}\{[v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)][v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)]^*(n)\},\\
&r_x = \mathbb{E}\{[v_1(n)v_1^*(n) + 2v_1(n)v_1^*(n+1) + 3v_1(n)v_2^*(n-1) + 2v_1(n+1)v_1^*(n) + 4v_1(n+1)v_1^*(n+1)\\
&\quad + 6v_1(n+1)v_2^*(n-1)] + 3v_2(n-1)v_1^*(n) + 6v_2(n-1)v_1^*(n+1) + 9v_2(n-1)v_2^*(n-1)\},\\
&r_x = r_v(n,n) + 2r_v(n,n+1) + 0 + 2r_v(n+1,n) + 4r_v(n+1,n+1) + 0 + 0 + 0 + 9r_v(n-1,n-1),\\
&r_x = r_v(n,n) + 2r_v(n,n+1) + 2r_v(n+1,n) + 4r_v(n+1,n+1) + 9r_v(n-1,n-1).
\end{aligned}
$$

Após uma breve análise na expressão $r_v(n_1, n_0)$ é possível verificar que determinados termos anulam-se ao considerar um único momento temporal devido a presença da função degrau unitário, permitindo a seguinte simplificação:

$$r_x = 2r_v(n,n+1) + 2r_v(n+1,n), \tag{1.42}$$

$$r_x = \delta(n-n-1) + \delta(n+1-n). \tag{1.43}$$

Onde a generalização pode ser descrita por:

$$r_x(n_1,n_2) = \delta(n_1-n_2) + \delta(n_2-n_1). \tag{1.44}$$

Uma vez que a correlação é dependente apenas de um deslocamento temporal, então podemos classificar esse processo como WSS.

item

Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de $x(n)$.

Solução:

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

Para chegar a esse resultado foi utilizado a expressão para a correlação obtida no item anterior. Uma vez que a função delta de dirac terá um valor não nulo apenas quando o argumento for zero, isso irá acontecer apenas quando os momentos n_1 e n_2 forem iguais e isso irá acontecer apenas com os elementos da diagonal principal.

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1. (Média e autocorrelação) Determine a média e a função de autocorrelação para o processo aleatório

$$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$$

em que $v(n)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média μ e variância σ^2. $x(n)$ é estacionário? Justifique.

2. (Processos estacionários) Sejam os processos aleatórios $x(n)$ e $y(n)$ definidos por

$$x(n) = v_1(n) + 3v_2(n-1)$$

e

$$y(n) = v_2(n+1) + 3v_1(n-1)$$

em que $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são processos de ruído branco independentes cada um com variância igual a $0,5$.

(a) Quais são as funções de autocorrelação de x e de y? Os processos são WSS?

(b) Qual é a função de correlação cruzada $r_{xy}(n_1, n_0)$? Estes processos são conjuntamente estacionários (no sentido amplo)? Justifique.

3. (Matriz de autocorrelação) Quais as condições que os elementos de uma matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

devem satisfazer tal que $\mathbf{R}$ seja uma matriz de autocorrelação válida de

(a) Um vetor aleatório bidimensional?

(b) Um processo estocástico estacionário escalar?

4. (Matriz definida positiva) Assuma que a inversa $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}$ da matriz de autocorrelação de um vetor coluna N-dimensional exista. Mostre que

$$E\left\{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x}\right\} = N$$

5. (Covariância e correlação) Mostre que as matrizes de correlação e covariância satisfazem as relações abaixo:

- $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}^H$
- $\mathbf{C}_{\mathbf{x+y}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{\mathbf{xy}} + \mathbf{C}_{\mathbf{yx}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}$, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ descorrelacionados

6. **(Função de autocorrelação)** Processos aleatórios $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são independentes e têm a mesma função de correlação

$$r_v(n_1, n_0) = 0.5\delta(n_1 - n_0)$$

(a) Qual é a função de correlação do processo aleatório

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)?$$

Este é um processo WSS? Justifique.

(b) Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de $x(n)$.

2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima

2.1 Filtragem Ótima

Coeficientes de Wiener

Considerando o problema de filtragem de Wiener, e assumindo conhecimento da matriz de correlação $\mathbf{R_X}$ e do vetor de correlação cruzada $\mathbf{p_X}_d$, pode-se obter os coeficientes de $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w} = \mathbf{R_X}^{-1}\mathbf{p_X}_d \tag{2.1}$$

Aplicando a equação 2.1, obtém-se o vetor de pesos do filtro.

$$\mathbf{R_X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Erro Médio Quadrático

A partir do vetor de pesos, resultado de 2.1, basta aplicá-lo na equação do erro mínimo.

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^\top \mathbf{p_X}_d + \mathbf{w}^\top \mathbf{R_X}\mathbf{w} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} e &= \sigma_d^2 - 2\begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_d^2 - 2 \times 0.25 + 0.25 \\ &= \sigma_d^2 - 0.25 \end{aligned}$$

Representação em Autovalores

A decomposição em valores singulares (EVD) pode ser aplicada na matriz de correlação

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \tag{2.3}$$

Aplicando diretamente o resultado da EVD 2.3 na equação do filtro ótimo 2.1, obtém-se:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1})^{-1}\mathbf{p_X}_d \tag{2.4}$$

Finalmente, o resultado é uma expressão que compreende a inversão de matrizes menos custosas computacionalmente. Isto se dá principalmente por $\boldsymbol{\Lambda}$ ser uma matriz diagonal contendo os autovalores da matriz de autocorrelação, bastando calcular $1/\lambda_i$ para obter a sua inversa.

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{p_X}_d. \tag{2.5}$$

2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo

Para verificar a expressão proposta, é necessário obter a matriz de correlação do vetor aumentado.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} d(n) \\ x(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(n)^\top & x(n)^\top \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{d(n)d(n)^\top\} & \mathbb{E}\{d(n)x(n)^\top\} \\ \mathbb{E}\{x(n)d(n)^\top\} & \mathbb{E}\{x(n)x(n)^\top\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

É conveniente observar que ao desenvolver a equação, os elementos resultantes da expressão são todo conhecidos. Multiplicando o resultado obtido pelo vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ -w \end{bmatrix}$ à direita e assumindo o modelo nas condições de filtragem ótima, dado filtro de wiener, onde, $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{w} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{R}_X\mathbf{w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{R}_X\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^\top\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{I}_X\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{\mathbf{X}d}^T\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{X}d} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, dado a equação obtida, com expressão equivalente à J_{min}, pode-se escrever a relação proposta.

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{min} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Cancelamento de Ruído

Organizar

Inicialmente é necessário calcular a equação de erro do sistema aqui proposto

$$e(n) = x(n) - \hat{v_1} = x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n) \tag{2.6}$$

Em seguida faz-necessário calcular a função mean square error(MSE) que é facilmente fornecida pela manipulação algébrica abaixo

$$e^2(n) = [x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)][x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)]^T, \tag{2.7}$$
$$e^2(n) = x^2(n) - 2x(n)\mathbf{w}^T v_2(n) + \mathbf{w}^T v_2(n)v_2^T\mathbf{w}. \tag{2.8}$$

Sendo considerado que o filtro apresenta coeficientes constantes é possível aplicar o operador Valor Esperado de forma a obter a seguinte relação

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \mathbb{E}\{x^2(n)\} - 2\mathbf{w}^T\mathbb{E}\{x(n)v_2(n)\} + \mathbf{w}^T\mathbb{E}\{v_2(n)v_2(n)^T\}\mathbf{w}, \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_x^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w}. \tag{2.10}$$

Por fim, basta encontrar o $\mathbf{w}$ que minimiza o MSE acima. Para chegar a esse fim, calcula-se o gradiante quanto ao $\mathbf{w}$ igualando-se o resultado da operação a zero

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbb{E}\{e^2(n)\} = -2\mathbf{p}_{xv_2} + 2\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = 0, \tag{2.11}$$

$$-\mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = 0, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = \mathbf{p}_{xv_2}. \tag{2.13}$$

Utilizando a identidade matricial abaixo é possível resolver a equação acima para obter o seguinte resultado

$$\mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}. \tag{2.16}$$

Onde é possível reescrever o termo final como

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}(\mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{v_1} + \mathbf{p}_{v_2}) \tag{2.17}$$

2.4 Predição Ótima

Organizar

O filtro linear ótimo que minimiza o erro médio quadrático é descrito pela solução das equações de Wiener. Portanto, inicialmente definir a matriz de autocorrelação para o processo descrito por $x(n)$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{x(n)x^*(n)\} & \mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n)\} \\ \mathbb{E}\{x(n)x^*(n-1)\} & \mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n-1)\} \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

se considerarmos que o processo $S(n)$ é WSS com variância σ_s^2 podemos calcular as correlações como se segue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{x(n)x^*(n)\} &= \mathbb{E}\{s(n-a)s^*(n-a) + s(n-a)s^*(n-4a) + s(n-4a)s^*(n-a) \\
&\quad + s(n-4a)s^*(n-4a)\} = \sigma_s^2 + 0 + 0 + \sigma_s^2 = 2\sigma_s^2, \\
\mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n)\} &= \mathbb{E}\{s(n-1-a)s^*(n-a) + s(n-1-a)s^*(n-4a) + s(n-1-4a)s^*(n-a) \\
&\quad + s(n-1-4a)s^*(n-4a)\} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
\mathbb{E}\{x(n)x^*(n-1)\} &= \mathbb{E}\{s(n-a)s^*(n-1-a) + s(n-a)s^*(n-1-4a) + s(n-4a)s^*(n-1-a) \\
&\quad + s(n-4a)s^*(n-1-4a)\} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
\mathbb{E}\{x(n-1)x^*(n-1)\} &= \mathbb{E}\{s(n-1-a)s^*(n-1-a) + s(n-1-a)s^*(n-1-4a) \\
&\quad + s(n-1-4a)s^*(n-1-a) + s(n-1-4a)s^*(n-1-4a)\} = \sigma_s^2 + 0 + 0 + \sigma_s^2 = 2
\end{aligned}$$

obtendo assim

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 2\sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_s^2 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Entretanto, considerando que o processo $D(n)$ têm média nula então temos na verdade um vetor de correlação cruzada nulo. Desse modo, o filtro linear ótimo para esse processo seria o próprio vetor nulo. Sendo assim

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 2\sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

2.5 Superfície de Erro

Organizar

A partir dos coeficientes fornecidos é possível escrever a matrix de correlação necessário para o filtro ótimo de wiener como uma matriz identidade de ordem 2

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Ao utilizar a solução fechada do problema chega-se ao seguinte vetor resultado

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

Solução:

Para obter a expressão que define a superfície basta desenvolver a expressão para o erro médio

$$\mathbf{J}(w) = \mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xd} + w^T\mathbf{R}_X\mathbf{w}. \tag{2.23}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente na expressão da superfície

$$\mathbf{J}(w_0, w_1) = 24.40 - 2\begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{J}(w_0, w_1) = 24.40 - 4w_0 - 9w_1 + w_0^2 + w_1^2. \tag{2.25}$$

Utilizando um software gráfico é possível obter a Figura 2.1 onde é traçada a superfície de erro MSE expressa na Equação (2.23).

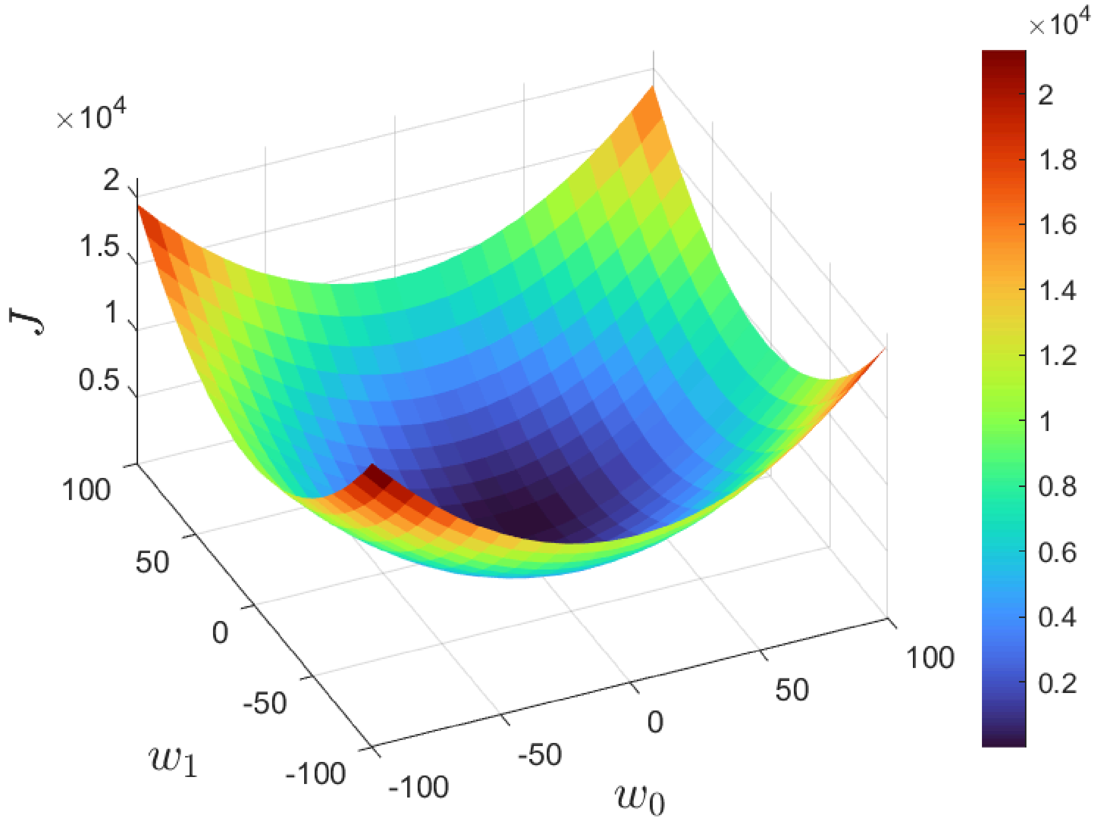

Figura 2.1: Superfície de erro $J(w_0, w_1)$.