



Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Filtragem Adaptativa - TIP7188

Lista de Exercícios

Aluno: Lucas de Souza Abdalah 539567

Professor: Charles Casimiro Cavalcante e Guilherme de Alencar Barreto

Data de Entrega: 20/07/2022

Fortaleza
2022

Sumário

1	Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem	2
1.1	Média e Autocorrelação	2
1.2	Processos Escationários	2
1.3	Matriz de Autocorrelação	2
1.4	Matriz Definida Positiva	2
1.5	Covariância e correlação	2
1.6	Função de autocorrelação	2
1.7	Exercícios Propostos	3
2	Lista 2: Filtragem Linear Ótima	5
2.1	Filtragem Ótima	5
2.2	Erro Médio Quadrático Mínimo	5
2.3	Cancelamento de Ruído	5
2.4	Predição Ótima	5
2.5	Superfície de Erro	5
2.6	Exercícios Propostos	6
3	Lista 3: Algoritmos Recursivos	8
3.1	Algoritmo LMF	8
3.2	Algoritmo LMS	8
3.3	Algoritmo LMS Normalizado	8
3.4	Equalização de Canais	8
3.5	Identificação de Sistemas	8
3.6	Equalização Adaptativa	8
3.7	Exercícios Propostos	9
4	Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados	11
4.1	Algoritmo RLS	11
4.2	Erro de Estimação a Priori	11
4.3	Preditor Adaptativo	11
4.4	Equalização de Canais	11
4.5	Equalização Adaptativa	11
4.6	Exercícios Propostos	12

1 Lista 1: Estatísticas de Segunda Ordem

1.1 Média e Autocorrelação

1.2 Processos Escationários

1.3 Matriz de Autocorrelação

1.4 Matriz Definida Positiva

1.5 Covariância e correlação

1.6 Função de autocorrelação



Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 1: Estatísticas de Segunda Ordem

- 1. (Média e autocorrelação)** Determine a média e a função de autocorrelação para o processo aleatório

$$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$$

em que $v(n)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média μ e variância σ^2 . $x(n)$ é estacionário? Justifique.

- 2. (Processos estacionários)** Sejam os processos aleatórios $x(n)$ e $y(n)$ definidos por

$$x(n) = v_1(n) + 3v_2(n-1)$$

e

$$y(n) = v_2(n+1) + 3v_1(n-1)$$

em que $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são processos de ruído branco independentes cada um com variância igual a 0,5.

- (a) Quais são as funções de autocorrelação de x e de y ? Os processos são WSS?
(b) Qual é a função de correlação cruzada $r_{xy}(n_1, n_0)$? Estes processos são conjuntamente estacionários (no sentido amplo)? Justifique.
- 3. (Matriz de autocorrelação)** Quais as condições que os elementos de uma matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

devem satisfazer tal que \mathbf{R} seja uma matriz de autocorrelação válida de

- (a) Um vetor aleatório bidimensional?
(b) Um processo estocástico estacionário escalar?
- 4. (Matriz definida positiva)** Assuma que a inversa \mathbf{R}_x^{-1} da matriz de autocorrelação de um vetor coluna N -dimensional exista. Mostre que

$$E \{ \mathbf{x}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x} \} = N$$

- 5. (Covariância e correlação)** Mostre que as matrizes de correlação e covariância satisfazem as relações abaixo:

- $\mathbf{R}_x = \mathbf{C}_x + \boldsymbol{\mu}_x \boldsymbol{\mu}_x^H$
- $\mathbf{C}_{x+y} = \mathbf{C}_x + \mathbf{C}_{xy} + \mathbf{C}_{yx} + \mathbf{C}_y$, para \mathbf{x} e \mathbf{y} descorrelacionados



- 6. (Função de autocorrelação)** Processos aleatórios $v_1(n)$ e $v_2(n)$ são independentes e têm a mesma função de correlação

$$r_v(n_1, n_0) = 0.5\delta(n_1 - n_0)$$

- (a) Qual é a função de correlação do processo aleatório

$$x(n) = v_1(n) + 2v_1(n+1) + 3v_2(n-1)?$$

Este é um processo WSS? Justifique.

- (b) Encontre a a matrix de correlação de um vetor aleatório consistindo de oito amostras consecutivas de $x(n)$.

2 Lista 2: Filtragem Linear Ótima

2.1 Filtragem Ótima

2.2 Erro Médio Quadrático Mínimo

2.3 Cancelamento de Ruído

2.4 Predição Ótima

2.5 Superfície de Erro

Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 2: Filtragem Linear Ótima

- 1. (Filtragem ótima)** Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação \mathbf{R}_x de um vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ é dada por

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada \mathbf{p}_{xd} entre o vetor de entrada \mathbf{x} e a resposta desejada $d(n)$ é

$$\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?
- (c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz \mathbf{R}_x e de seus autovetores associados.

- 2. (Erro médio quadrático mínimo)** Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que J_{\min} é o mínimo erro médio quadrático, \mathbf{w} é o filtro de Wiener, e \mathbf{A} é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$$

em que $d(n)$ é o sinal desejado e $\mathbf{x}(n)$ é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

- 3. (Cancelamento de ruído)** Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura 1 ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

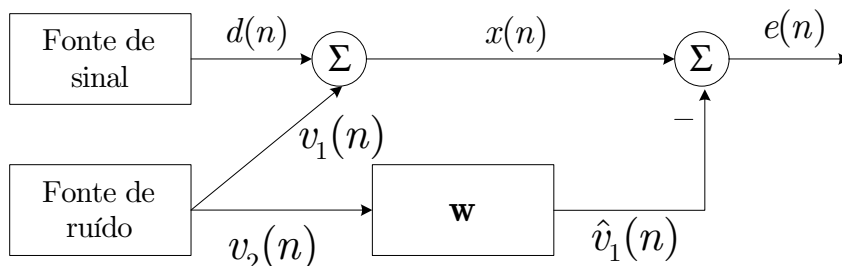


Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

4. (Predição ótima) Seja um processo estocástico dado por

$$x(n) = s(n + a) + s(n - 4a),$$

em que $S(n)$ é um processo estocástico WSS dado e a é uma constante.

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo $D(s) = s(n - a)$, o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal $d(n)$ possua média nula e variância unitária.

- (a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (c) Compare as soluções dos dois.

5. (Superfície de erro) Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação: $r_x(0) = 1$ e $r_x(1) = 0$. Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é $\sigma_d^2 = 24.40$ e o vetor de correlação cruzada é $\mathbf{p}_{xd} = [2 \ 4.5]^T$. Encontre:

- (a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

3 Lista 3: Algoritmos Recursivos

3.1 Algoritmo LMF

3.2 Algoritmo LMS

3.3 Algoritmo LMS Normalizado

3.4 Equalização de Canais

3.5 Identificação de Sistemas

3.6 Equalização Adaptativa



Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

Lista de Exercícios No. 3: Algoritmos Recursivos

- 1. (Algoritmo LMF)** Deseja-se minimizar a função objetivo $E\{e^4(n)\}$ utilizando-se um algoritmo do gradiente estocástico do tipo LMS. O algoritmo resultando é chamado de algoritmo *least mean fourth* (LMF). Derive tal algoritmo. Derive também o filtro ótimo para tal critério e compare as soluções.
- 2. (Algoritmo LMS)** Considere o uso de um a sequência de ruído branco com média nula e variância σ^2 como entrada do algoritmo LMS. Avalie
 - (a) a condição para convergência do algoritmo em média quadrática;
 - (b) o erro em excesso em média quadrática.
- 3. (Algoritmo LMS Normalizado)** Avalie a questão anterior para o caso do algoritmo LMS-Normalizado. Compare os dois casos.
- 4. (Equalização de canais)** Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1z^{-1}$.
 - (a) Forneça o equalizador ótimo segundo o critério de Wiener. Esboce a posição dos zeros do canal e do equalizador no plano Z .
 - (b) Obtenha o filtro de erro de predição direta de passo unitário, correspondente ao sinal à saída do canal. Calcule os zeros deste filtro e compare com os do equalizador.
 - (c) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador, para os seguintes algoritmos
 - (a) Gradiente determinístico;
 - (b) Algoritmo de Newton;
 - (c) LMS;
 - (d) LMS-normalizado;
 - (d) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.
 - (e) Qual o número de condicionamento para o problema em questão?
 - (f) Qual deveria ser o canal para que o número de condicionamento fosse menor/maior que 5? Comente os resultados.
- 5. (Identificação de sistemas)** Utilize o algoritmo LMS para identificar um sistema com a função de transferência dada abaixo.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-12}}{1 - z^{-1}}$$

O sinal de entrada é um ruído branco distribuído uniformemente com variância $\sigma_x^2 = 1$, e o ruído de medida é assumido gaussiano branco descorrelacionado da entrada e com variância de entrada $\sigma_v^2 = 10^{-3}$. O filtro adaptativo tem 12 coeficientes.

- (a) Calcule o limite superior para μ (ou seja μ_{\max}) para garantir a estabilidade do algoritmo.

- Execute o algoritmo para $\frac{\mu_{\max}}{2}$, $\frac{\mu_{\max}}{10}$ e $\frac{\mu_{\max}}{50}$. Comente sobre o comportamento da convergência de cada caso.
- Meça o desajuste (*misadjustment*) em cada exemplo e comparar com os resultados obtidos pela solução teórica (Eq. (3.50) do livro texto)
- Mostre o gráfico da resposta em frequência do filtro FIR em qualquer uma das iterações após a convergência ser obtida e compare com o sistema desconhecido.

6. (Equalização adaptativa) Seja o canal de comunicações dado por

$$H(z) = 0.5 + 1.2z^{-1} + 1.5z^{-2} - z^{-3}$$

e deseja-se projetar um equalizador para o mesmo. A estrutura do equalizador é mostrada na Figura 1. Os símbolos $s(n)$ são transmitidos através de um canal e corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco complexo $v(n)$. O sinal recebido $x(n)$ é processado pelo equalizador FIR para gerar estimativas $\hat{s}(n - \delta)$, as quais são passadas por um dispositivo decisor gerando símbolos $\hat{s}(n - \delta)$. O equalizador possui dois modos de operação: um modo de treinamento durante o qual uma versão atrasada e replicada da sequência de entrada é usada como o sinal de referência (desejado) e um modo dirigido por decisão no qual a saída do dispositivo de decisão substitui a sequência de referência. O sinal de entrada $s(n)$ é escolhido de uma constelação QAM (por exemplo, 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM ou 256-QAM).

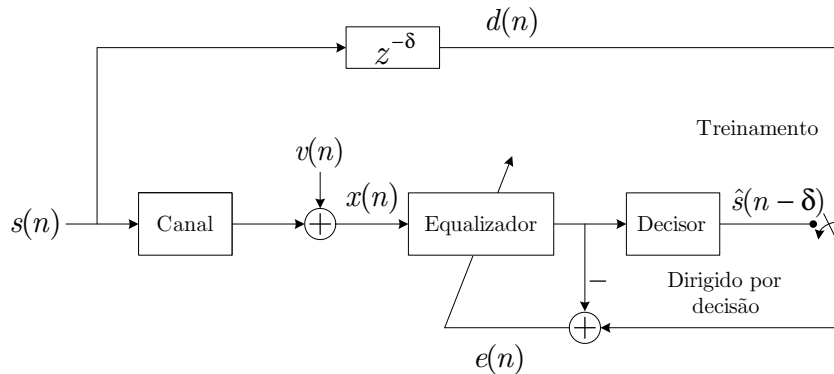


Figure 1: Equalizador linear adaptativo operando em dois modos: modo de treinamento e modo dirigido por decisão.

- Faça um programa que treine o filtro adaptativo com 500 símbolos de uma constelação 4-QAM, seguindo de uma operação dirigida por decisão de 5000 símbolos de uma constelação 16-QAM. Escolha a variância do ruído σ_v^2 de maneira que ela promova uma relação sinal ruído de 30 db na entrada do equalizador. Note que os símbolos escolhidos não têm variância unitária. Por esta razão, a a variância do ruído necessita ser ajustada adequadamente para cada uma das diferentes modulações (constelações) QAM para fornecer o nível de SNR desejado. Escolha $\delta = 15$ e o comprimento do equalizador $M = 15$. Mostre os gráficos da evolução temporal de $s(n)$, $x(n)$ e $\hat{s}(n - \delta)$. Use o LMS-normalizado com um fator de passo de $\mu = 0.4$.
- Para os mesmos parâmetros do item (a), plote e compare os gráficos de evolução que seriam resultante se o equalizador fosse treinado com 150, 300 e 500 iterações. Use o LMS com um $\mu = 0.001$.
- Assuma agora que os dados transmitidos foram gerados de uma constelação 256-QAM ao invés de 16-QAM. Plote os gráficos da evolução do sinal na saída do equalizador quando treinado usando o LMS-normalizado e 500 símbolos de treinamento.
- Gerar as curvas de taxa de erro de símbolo (SER, do inglês *Symbol Error Rate*) versus SNR na entrada do equalizador para símbolos de constelações 4, 16, 64 e 256-QAM. Faça SNR variar de 5 dB a 30 dB.

4 Lista 4: Método dos Mínimos Quadrados

4.1 Algoritmo RLS

4.2 Erro de Estimação a Priori

4.3 Preditor Adaptativo

4.4 Equalização de Canais

4.5 Equalização Adaptativa



Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Período: 2018.2

Lista de Exercícios No. 4: Método dos Mínimos Quadrados

1. O algoritmo RLS é utilizado para prever o sinal $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ usando um filtro FIR de segunda ordem com o primeiro coeficiente fixo em 1. Dado $\lambda = 0.98$, calcule o sinal de saída $y(n)$ e os coeficientes do filtro nas primeiras 10 iterações. Note que a meta é minimizar $E\{y^2(n)\}$. Inicie com $\mathbf{w} = [1 \ 0 \ 0]^T$ e $\delta = 100$.

2. Seja $\epsilon(n)$ que denota um erro de estimação *a priori*

$$\epsilon(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{x}(n)$$

em que $d(n)$ é a resposta desejada, $\mathbf{x}(n)$ é o vetor de entrada do filtro e $\mathbf{w}(n-1)$ é a estimativa anterior do vetor de coeficientes do filtro. Seja $e(n)$ o erro de estimação *a posteriori*

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

em que $\mathbf{w}(n)$ é a estimativa atual do vetor de coeficientes do filtro. Para dados complexos ambos $\epsilon(n)$ e $e(n)$ são de valores complexos. Mostre que o produto $\epsilon(n)e^*(n)$ é sempre de valor real.

3. Seja um sinal $x(n)$ composto de uma senóide em meio à ruído. Simule um preditor adaptativo de ordem 2 com um algoritmo RLS considerando $\text{SNR} = 3$ dB e $\text{SNR} \rightarrow \infty$. Variando o fator de esquecimento e/ou as condições iniciais verifique e comente sobre a ocorrência ou não de instabilidade numérica. Repita o procedimento como preditor de ordem 3.
4. Considere um sinal branco gaussiano de variância unitária transmitido por um canal de comunicação de função de transferência $H(z) = 1 + 1.6z^{-1}$. Para compensar este canal utiliza-se um equalizador dado por $W(z) = w_0 + w_1z^{-1}$. (Problema da lista de exercícios no. 3).
- (a) Calcule a adaptação do algoritmo usando o RLS.
 - (b) Obtenha as trajetórias sobre as curvas de nível, tendo condições iniciais nulas para os coeficientes do equalizador. Verifique qual a melhor inicialização do algoritmo RLS. Compare com os algoritmos LMS, LMS-Normalizado e Gauss-Newton.
 - (c) Obtenha também a evolução do erro quadrático médio para cada um dos algoritmos anteriores.
5. Seja a questão 6 da lista de exercícios anterior (Algoritmos Recursivos - questão sobre Equalização Adaptativa). Implemente o RLS para a equalização do sistema considerado na letra (a) da mesma. Compare os resultados obtidos com o LMS. Verifique a velocidade de convergência para os casos de $\lambda = 0.9$, $\lambda = 0.99$ e $\lambda = 0.999$.